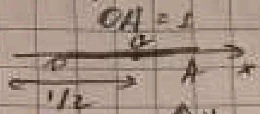
# Laborator 3
## Centrul de Greutate / Plăci Omogene și Bare Omogene

Centrul de greutate este centrul sistemului de forțe paralele format din greutăți $G_i$ ale punctelor din care se compune corpul.

Pentru determinarea coordonatelor centrului de greutate al corpului complex se parcurg următoarele etape

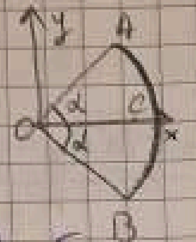
Pasul 1. Se împarte corpul complex în corpuri simple pt care se pot determina centrele de greutate

dreaptă




$OA = l$ $x_c = \frac{l}{2}$ $y_c = 0$

arc circular




$AB = 2R\alpha$ $x_c = OC = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $y_c = 0$

Placă triunghiulară
$A(x_A, y_A)$
$B(x_B, y_B)$
$D(x_D, y_D)$


$x_c = \frac{x_A + x_B + x_D}{3}$

$y_c = \frac{y_A + y_B + y_D}{3}$

sector circular


$A = \alpha R^2$ $x_c = OC = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $y_c = 0$

Pasul 2. Se alege un sistem de axe de coordonate în raport cu care se determină coordonatele centrului de greutate a corpurilor simple

Pasul 3. Se determină pozițiile centrelor de greutate pentru corpurile simple și se calculează elementele geometrice ale acestora (lungimi, arii, volume)

Pasul 4. Se completează datele calculate la pasul 3 într-un tabel de forma următoare (în cazul plăcilor plane)

| Nr. crt. | $G_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $z_i$ | $G_i x_i$ | $G_i y_i$ | $G_i z_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | | | | |
| 2. | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | |
| n | | | | | $\Sigma$ | $\Sigma$ | $\Sigma$ |
| $\Sigma$ | $\Sigma$ | | | | | | |

În funcție de caracteristicile corpului studiat tabelul va fi adaptat astfel:

- ☐ în cazul corpurilor 2D vom lucra doar cu 2 coordonate
- ☐ în cazul sistemelor de bare, se vor utiliza lungimi în locul ariilor
- ☐ în cazul corpurilor 3D se vor utiliza volume în locul ariilor

□ În cazul corpurilor considerate goale, ariile/volumele să fie luate cu semnul "-", astfel încât la calculul sumei de arii/volume în acest mod se va obține exact suprafața/volumul util al corpului analizat

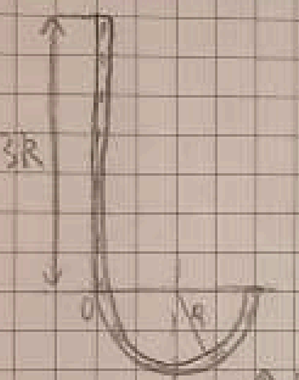
Pasul 5. Se determină coordonatele centrului de greutate al corpului complex aplicând formulele

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$$

unde, $G_i$ reprezintă lungimea/aria/volumul, după caz, a corpului i.

## Problema 1.

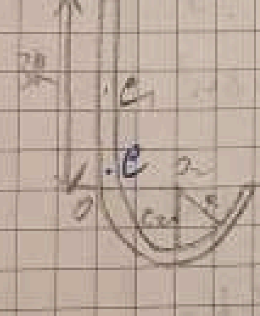
Să se determine coordonatele centrului de greutate a sât de bare




Pasul 1

Pasul 2. Se alege un sistem cu axe de coordonate în raport cu care se determină coordonatele centrului de greutate a corpurilor simple.

Pasul 3.

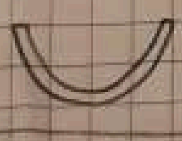


$$\left.\begin{aligned} l_1 &= 3R \\ x_1 &= 0 \\ y_1 &= \frac{3R}{2} \end{aligned}\right\} \text{Bara 1} \qquad \left.\begin{aligned} l_2 &= \pi R \\ O_2C_2 &= R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \end{aligned}\right\} \text{Bara 2}$$

$$O_2C_2 = R\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$

$$x_2 = R \qquad y_2 = -\frac{2R}{\pi}$$

Pasul 4

| Nr. Corp | | $l_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $l_i x_i$ | $l_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. |  | $3R$ | $0$ | $\frac{3R}{2}$ | $0$ | $\frac{9R^2}{2}$ |
| 2. |  | $\pi R$ | $R$ | $-\frac{2R}{\pi}$ | $\pi R^2$ | $-2R^2$ |
| Sume | | $\Sigma l_i = 3R+\pi R$ <br> $3R+\pi R$ | — | — | $\pi R^2 = \Sigma l_i x_i = 0+\pi R^2$ | $\Sigma l_i y_i = \frac{9R^2}{2} - 2R^2 = \frac{5R^2}{2}$ |

$\Sigma l_i = 3R+\pi R$

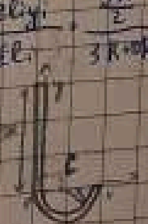
$\Sigma l_i x_i = 0+\pi R^2 = \pi R^2$

$\Sigma l_i y_i = \frac{9R^2}{2} - 2R^2$

Coordonate cg sârmă

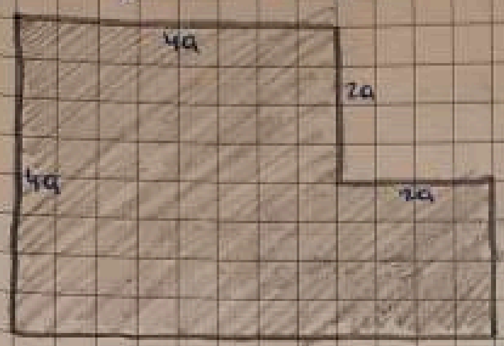
$$X_c = \frac{\Sigma l_i x_i}{\Sigma l_i} = \frac{\pi R^2}{3R+\pi R} = 0{,}51R$$

$$Y_c = \frac{\Sigma l_i y_i}{\Sigma l_i} = \frac{\frac{5R^2}{2}}{3R+\pi R} = 0{,}41R$$



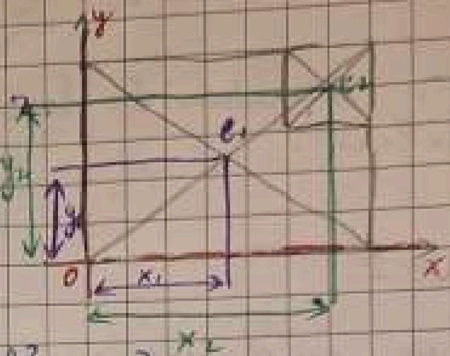
# Problema 2

Să se determine coordonatele centrului de greutate $C(x_c, y_c)$ a plăcii omogene




Pasul 1.

Pasul 2




## Pasul 3

Corp 1

$A_1 = L \cdot l = 6a \cdot 4a = 24a^2$

$x_1 = \frac{L}{2} = 3a$

$y_1 = \frac{l}{2} = 2a$

Corp 2

$A_2 = l^2 = 4a^2$

$x_2 = 6a - \frac{2a}{2} = 5a$

$y_2 = 4a - \frac{2a}{2} = 3a$

## Pasul 4.

| Nr Corpuri | $A_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $A_i x_i$ | $A_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. (6a, 4a) | $24a^2$ | $3a$ | $2a$ | $72a^3$ | $48a^3$ |
| 2. (2a, 2a) | $-4a^2$ | $5a$ | $3a$ | $-20a^3$ | $-12a^3$ |
| Sumele | $\Sigma A_i$ | | | $\Sigma A_i x_i$ | $\Sigma A_i y_i$ |

$\Sigma A_i = 24a^2 - 4a^2 = 20a^2$

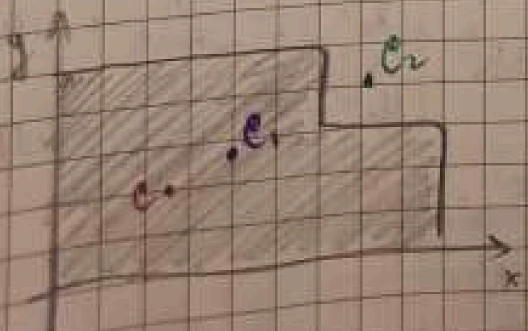
$\Sigma A_i x_i = 72a^3 - 20a^3 = 52a^3$

$\Sigma A_i y_i = 48a^3 - 12a^3 = 36a^3$

Coordonatele centrelor de greutate sunt:

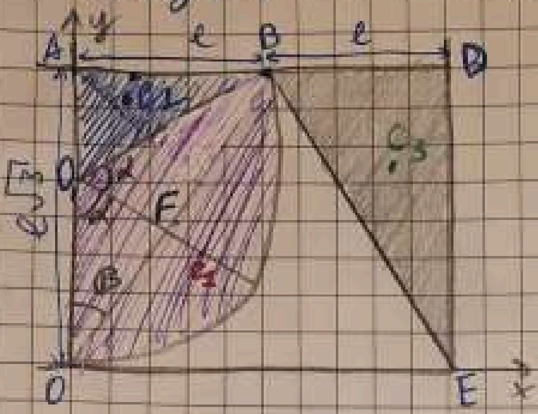
$$x_c = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} = \frac{52a^3}{20a^2} = 2{,}6a$$

$$y_c = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{36a^3}{20a^2} = 1{,}8a$$



# Problema 3

Să se determine coordonatele de centru de greutate $C(x_c, y_c)$ a plăcii omogene, știind că arcul de cerc este tangent la latura OE




$$OB^2 = (l\sqrt{3})^2 + l^2 \Rightarrow OB = 2l$$

$$OF = \frac{OB}{2} = l$$

$$tg\,\beta = \frac{AB}{OA} = \frac{l}{l\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$OO_1 = O_1B = \frac{OF}{\cos\beta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2l\sqrt{3}}{3} = R$$

$$OB = BE = OE = 2l \quad \widehat{OBE} = \frac{\pi}{3} \quad \widehat{OO_1B} = \widehat{O_1OB} = \frac{\pi}{6} \quad \widehat{O_1BE} = \frac{\pi}{2}$$

deci BE este tangentă în B la $O_1B$

$$O_1A = OA - OO_1 = l\sqrt{3} - \frac{2l\sqrt{3}}{3} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

$$O_1C_1 = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2l\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} =$$

| Nr | $A_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $A_i x_i$ | $A_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\frac{4\pi l^2}{9}$ | $\frac{l\sqrt{3}}{\pi}$ | $l\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\pi}\right)$ | $\frac{4\sqrt{3}\,l^3}{9}$ | $l^3\left(\frac{8\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{4}{9}\right)$ |
| 2. | $\frac{l^2\sqrt{3}}{6}$ | $\frac{l}{3}$ | $\frac{8l\sqrt{3}}{9}$ | $\frac{l^3\sqrt{3}}{18}$ | $\frac{4l^3}{9}$ |
| 3. | $\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{5l}{3}$ | $\frac{2l\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{5l^3\sqrt{3}}{6}$ | $l^3$ |
| $\Sigma$ | $l^2\frac{6\sqrt{3}+4\pi}{9}$ | — | — | $\frac{4l^3\sqrt{3}}{3}$ | $l^3\left(1 + \frac{8\pi\sqrt{3}}{27}\right)$ |

$$x_c = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} = \frac{\frac{4l^3\sqrt{3}}{3}}{l^2\frac{6\sqrt{3}+4\pi}{9}} = \frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{3}+4\pi}\,l = 0{,}9\,l$$

$$y_c = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{l^3\left(1 + \frac{8\pi\sqrt{3}}{27}\right)}{l^2\left(\frac{6\sqrt{3}+4\pi}{9}\right)} = \frac{27 + 8\pi\sqrt{3}}{3(6\sqrt{3}+4\pi)}\,l = 1.02\,l$$