Marin Alina CT1-20, 1D.01.01

Determinarea experimentală a constantei elastice a unui resort

1. Scopul lucrării

În lucrarea de față ne propunem să determinăm constanta elastică a unui resort prin două metode: metoda statică (prin determinarea alungirii) și metoda dinamică (prin determinarea perioadei de oscilație

2. Introducere

În continuare, pentru determinarea constantei elastice, sunt prezentate două metode de calcul.

A. Metoda statică

Fie un sistem format dintr-un resort, caracterizat de constanta elastică, k, și un corp de masă, m. Să considerăm că resortul are masa neglijabilă și lungimea nedeformată l_o și este suspendat de capătul său superior. La capătul inferior al resortului se atârnă un corp (fig. 1) (real nu este punctiform și practic se folosește și un cârlig).

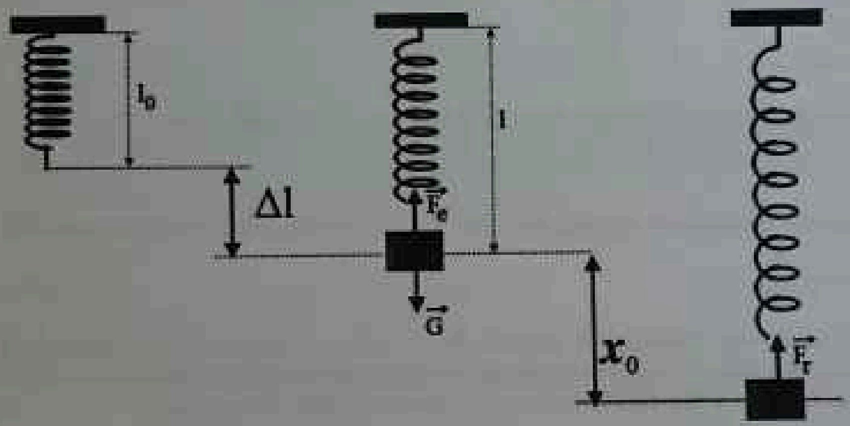


Fig. 1. Deformarea unui resort sub acțiunea forței de greutate

Sub acțiunea greutății $m\vec{g}$ a corpului, resortul se alungește cu $\Delta l = l - l_o$. Asupra sistemului, pe lângă forța de greutate, mai acționează și forța elastică definită prin relația:

$$\vec{F_e} = -k\overline{\Delta l} \quad (1)$$

Pentru ca sistemul corp-resort să fie menținut în echilibru, trebuie ca forța elastică și forța deformatoare (în experiment =forța de greutate $F \equiv G = mg$) să fie egale. Conform legii lui Newton rezultă:

$$mg - k \cdot \Delta l = 0 \iff mg = k\Delta l \quad (2)$$

Din ecuația 2 se obține constanta elastică a resortului, k, ca fiind raportul dintre forța deformatoare (greutatea masei atîrnate) și alungirea resortului:

$$k = \frac{F}{\Delta l} \quad (3)$$

Ecuația anterioară permite calcularea lui k, prin metoda statică. Masa m a corpului se determină prin cântărire, Δl se măsoară cu o riglă, iar g este accelerația gravitațională (pe care pentru simplitate o considerăm $10 m/s^2$).

B. Metoda dinamică

Dacă asupra sistemului acționează o forță exterioară, acesta este scos din poziția de echilibru, întinzându-se **suplimentar** cu o anumită lungime, notată cu x. Lăsat liber, sistemul va începe să oscileze în jurul poziției de echilibru, datorită forței de revenire (în acest caz forța elastică minus greutatea corpului atârnat) cu o amplitudine A, având următoarea ecuația de mișcare conform legii lui Newton:

$$ma = -kx$$

Ecuația de mișcare a corpului devine:

$$ma + kx = 0 \quad (4)$$

Dacă ecuația anterioară se împarte la m, iar accelerația corpului se scrie ca fiind derivata de ordinul doi în funcție de timp a vectorului deplasare, atunci ecuația de mișcare devine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (5)$$

Notăm cu $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsația mișcării oscilatorii (sau frecvența unghiulară a mișcării), exprimată în rad/sec, atunci ecuația (5) devine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (6)$$

Aceasta este o ecuație diferențială liniară și omogenă, iar soluția ei reprezintă legea de mișcare a corpului sub acțiunea forței elastice:

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (7)$$

Dar, pulsația mișcării oscilatorii se poate exprima și în funcție de perioada de oscilație, T, astfel:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (8)$$

Din cele două ecuații ale pulsației mișcării oscilatorii rezultă formula pentru constanta elastică:

$$k = m\omega^2 = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} \quad (9)$$

Din relația (9) rezultă că, determinând perioada de oscilație, se poate calcula constanta elastică prin metoda dinamică. Perioada T a mișcării oscilatorii se află cronometrând durata de timp, t a unui număr n de oscilații complete ($T = t/n$), iar masa m a corpului se determină prin cântărire.

3. Descrierea instalației experimentale

Dispozitivul experimental este alcătuit dintr-un stativ de care se fixează un resort elastic. La capătul inferior al resortului se agață succesiv discuri crestate pe cârlig. Se vor folosi discurile crestate, respectiv cârligul, cu masa de 10 g. De asemenea, pentru determinarea alungirii se folosește rigla atașata stativului, cu o precizie de 1 mm, iar pentru a calcula perioada unei oscilației se va folosi un cronometru cu o precizie de 0.1 s.

4. Modul de lucru și prelucrarea datelor experimentale

Metoda statică

1) Se măsoară lungimea nedeformată a resortului, l_o.
2) Se atârnă cârligul de resortul elastic și se măsoară lungimea deformată, după care succesiv se adaugă discurile crestate pe cârlig, măsurându-se de fiecare dată, lungimea deformată.
3) Datele obținute din măsurători se trec în tabelul 1 calculîndu-se alungirea Δl corespunzătoare fiecărei mase atârnate.
4) Se calculează constanta elastică cu relația 3.
5) Cu datele din tabelul 1 se reprezintă grafic F(Δl), iar din pantă se obține valoarea constante elastice.
6) Calculul erorii absolute se face cu relația:

$\Delta k_i = k_i - \bar{k}$, unde $\bar{k}$ este media

Marin Alina, CTI-20, 1D.01.1

7) Rezultatul final se dă sub forma: $k_{ad} = \bar{k} \pm \sigma_{\bar{k}}$, unde $\bar{k}$ este media aritmetică iar $\sigma_{\bar{k}}$ este abaterea standard a mediei

$\Delta k_i = k_i - \bar{k}$ $\qquad \overline{\Delta k} = \frac{\sum |\Delta k_i|}{n}$ $\qquad \sigma_{\bar{k}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta k_i)^2}{n(n-1)}}$

Tabelul 1. Determinarea constantei elastice prin metoda statică și calcul erorilor

$l_0 = 44$ cm

Nr. crt	m [kg]	l [cm]	Δl [m]	F [N]	k [N/m]	$\bar{k}$ [N/m]	Δk [N/m]	$\sigma_{\bar{k}}$ [N/m]	k_{ad} [N/m]
1	0,05	50	0,06	0,49	8,166	8,0004	0,1656	0,0521	8,0004 ± 0,0521
2	0,083	54	0,1	0,81	8,1		0,0996		
3	0,106	57,5	0,135	1,03	7,629		-0,3714		
4	0,129	60	0,16	1,26	7,875		-0,1254		
5	0,187	66,5	0,225	1,83	8,133		0,1326		
6	0,2	68	0,24	1,96	8,166		0,1656		
7	0,236	73	0,29	2,31	7,965		-0,0354		
8	0,252	75	0,33	2,47	7,967		-0,0334		
9	0,28	78	0,34	2,74	8,058		0,0576		
10	0,3	81	0,37	2,94	7,945		-0,0554		

$\Delta l_{10} = 81cm - 44cm = 37cm = 0,37m$ $\quad K_{10} = 2,94N / 0,37 = 7,945 N/m$ $\quad \sigma_{\bar{k}} = \sqrt{\frac{\ldots}{\ldots}} = 0,0521$

Metoda dinamică $F_{10} = 0,3kg \cdot 9,81 m/s^2 = 2,94N$ $\quad \Delta k_{10} = 7,945 - 8,0004 = -0,0554$

1) Se atârnă cârligul cu masă m_1 de resort și se stabilește poziția de echilibru a sistemului.
2) Se scoate din poziția de echilibru sistemul corp-resort, producând o alungire suplimentară de 2-3 cm, după care se lasă liber sistemul, care începe să oscileze.
3) Se cronometrează n=20 de oscilații complete și se determină perioada de oscilație utilizând relația: $T = t/n$.
4) Se repetă pașii 1-3 folosind discurile crestate m_1, m_2, etc.
5) Se calculează constanta elastică cu relația 9.
6) Rezultatele se trec în tabelul 2.
7) Cu datele din tabelul 2 se reprezintă grafic $T^2(m)$, iar din pantă se obține valoarea constantei elastice.
8) Rezultatul final se dă sub forma: $k_{ad} = \bar{k} \pm \sigma_{\bar{k}}$, unde $\bar{k}$ este media aritmetică iar $\sigma_{\bar{k}}$ este abaterea standard a mediei

$\Delta k_i = k_i - \bar{k}$ $\qquad \overline{\Delta k} = \frac{\sum |\Delta k_i|}{n}$ $\qquad \sigma_{\bar{k}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta k_i)^2}{n(n-1)}}$

Tabelul 2. Determinarea constantei elastice prin metoda dinamică și calcul erorilor

Nr. crt.	m [kg]	n	t [s]	T [s]	T^2 [s^2]	k [kg/s²]	$\bar{k}$ [kg/s²]	Δk [kg/s²]	$\sigma_{\bar{k}}$ [kg/s²]	k_{ad} [kg/s²]
1	0,1	12	8,408	0,700	0,49	8,056	8,103	-0,047	$\sqrt{\frac{0,028}{42}} = 0,025$	8,103 ± 0,025
2	0,13	12	9,491	0,790	0,624	8,124		0,121		
3	0,16	12	10,593	0,882	0,777	8,129		0,026		
4	0,19	12	11,573	0,964	0,929	8,074		-0,029		
5	0,22	12	12,406	1,033	1,067	8,139		0,036		
6	0,25	12	13,33	1,11	1,232	8,011		-0,092		
7	0,28	12	14,03	1,169	1,366	8,092		-0,011		

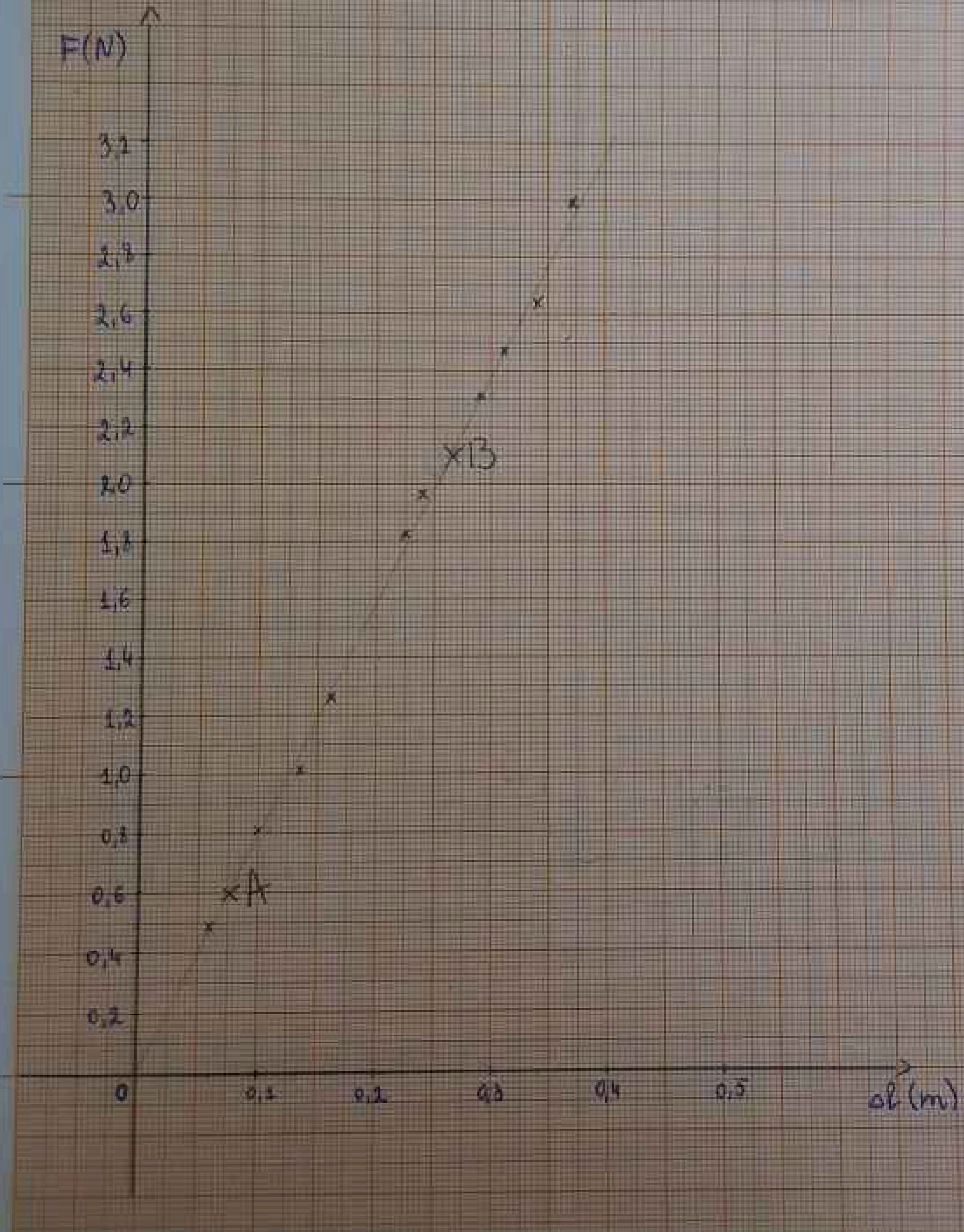
$T_1^2 = (0,700)^2 = 0,49$ $\qquad \Delta k_1 = 8,056 - 8,103 = -0,047$

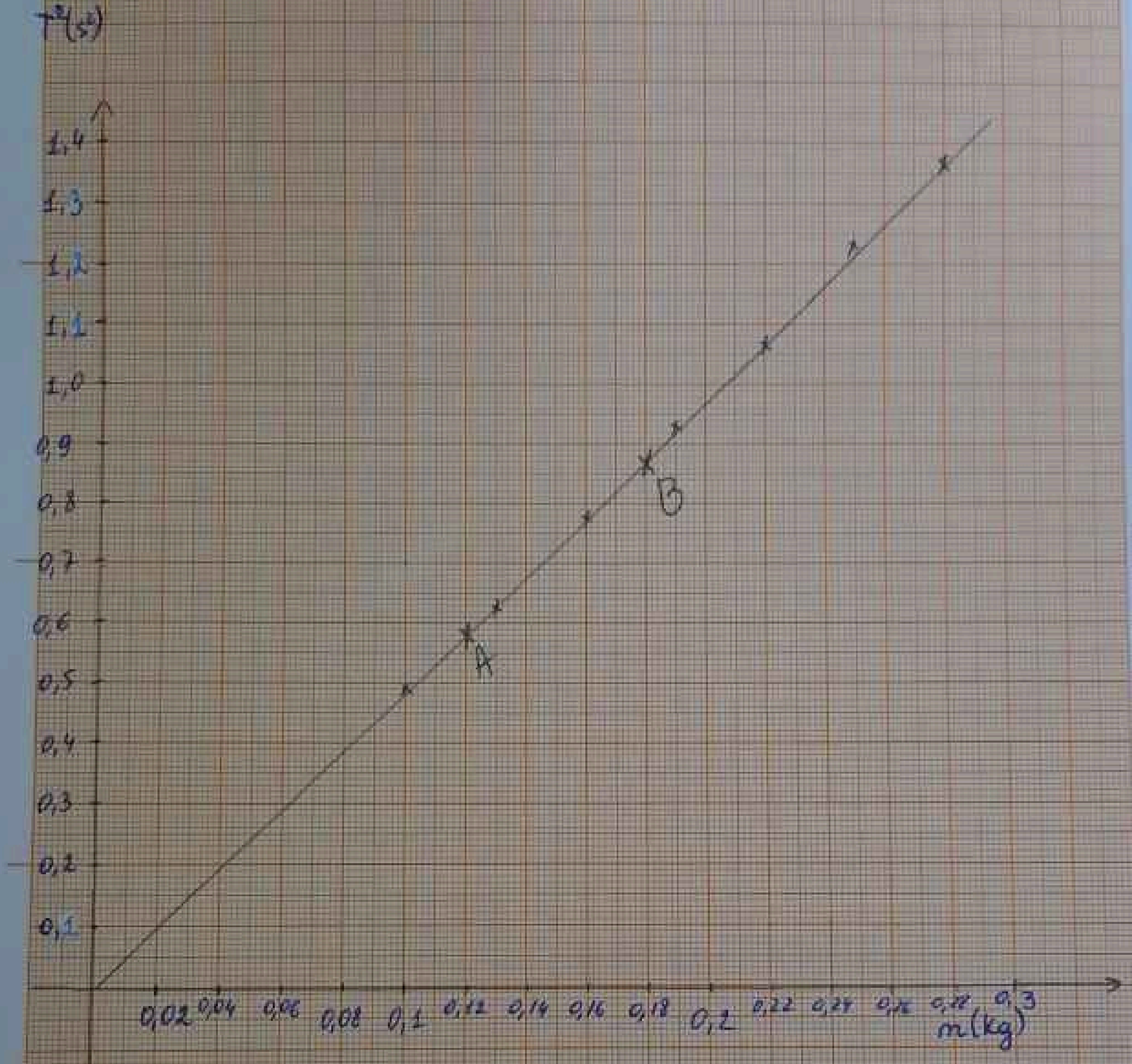
$k_1 = 4\pi^2 \frac{0,1}{0,49} = 8,056$

Se vor compara rezultatele obținute prin cele două metode, respectiv prin medierea aritmetică și cea grafică!!!

A(0,075; 0,6)
B(0,265; 2,1)
m pante

$m = \dfrac{2,1 - 0,6}{0,265 - 0,075} = \dfrac{1,5}{0,19}$ $m = 7,89$





A(0,12 , 0,58)
B(0,18 , 0,86)
m-panta

$$m = \frac{0,86-0,58}{0,18-0,12} = \frac{0,28}{0,06} \quad m = 4,666$$