Sistem de control al poziției unui satelit

Tudor Alinei

May 26, 2021

1 Enunțarea problemei

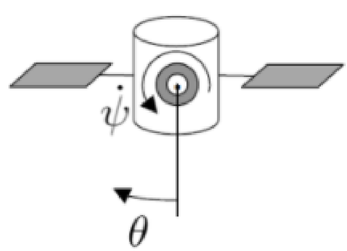
Sistemul de control al poziției unui satelit folosește adesea o roată cu reacție pentru a-i imprima o mișcare unghiulară. Un motor din interiorul satelitului generează un cuplu care modifică viteza unghiulară, $\dot{\psi}$, a volantului (roții de reacție) și care, de asemenea, imprimă satelitului un cuplu egal în modul și de sens opus. Volantul are un moment de ineție, J, astfel, ecuația cuplului ce acționează asupra satelitului este

$$T_{rw} = J \cdot \ddot{\psi} \tag{1}$$

unde $J = 10^3 kg/m^2$. Un senzor ce are funcția de transfer $\frac{\psi_m(s)}{\psi(s)} = \frac{1}{s+1}$ măsoară poziția unghiulară ψ și indică unghiul măsurat ψ_m. Cuplul generat de către motor este modelat prin următoarea ecuație:

$$T_{rw} = G_c(s) \cdot (\psi_r - \psi_m) \tag{2}$$

unde G_c reprezintă funcția de transfer a controller-ului, iar ψ_r unghiul de referință.



2 Analiza problemei

a)Intrarea sistemului este: $u(t) = u = T_{rw}$;

b)Stările sistemului sunt: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \psi_m \end{pmatrix}$ ceea ce înseamnă că vom avea un sistem de ordin 3;

c)Ieșirea sistemului este: $y = x_3 = \psi_m$;

3 Realizarea de stare

Primele două ecuații de stare le putem obține analizând prima parte a informațiilor oferite în enunțul problemei și anume:

a)Viteza unghiulară este derivata poziției unghiulare în funcție de timp:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \dot{\psi} \equiv \dot{x_1} = x_2 \tag{3}$$

b)Din relația $T_{rw} = J \cdot \ddot{\psi}$ putem obtine cea de-a doua stare x_2:

$$\ddot{\psi} = \frac{T_{rw}}{J} \equiv \dot{x_2} = \frac{1}{J} \cdot u \tag{4}$$

c)Starea x_3 împreună cu ieșirea y le vom obține scriind fie forma canonică de observare, fie forma canonică de control a subsistemului senzorului dat prin funcția de transfer $\frac{\psi_m(s)}{\psi(s)} = \frac{1}{s+1}$, unde intrarea este $\psi = x_1$, iar ieșirea este $y = x_3$. Astfel obținem: $\begin{cases} \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \\ y = x_3 \end{cases}$

d)Sistemul final este: $\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = \frac{1}{J} \cdot u \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \\ y = x_3 \end{cases} \equiv \begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = 0.001 \cdot u \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \\ y = x_3 \end{cases}$

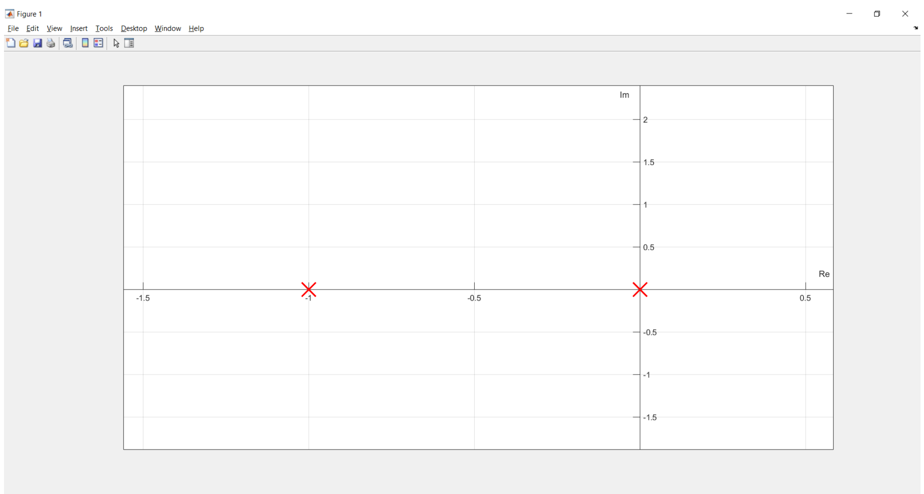
e)Ecuația diferețială intrare-ieșire: $y = x_3 / _{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \implies \dot{y} = \dot{x}_3 = x_1 - x_3 / _{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \implies$
$\implies \ddot{y} = \dot{x}_1 - \dot{y} \equiv \ddot{y} = x_2 - \dot{y} / _{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \implies \overset{(3)}{y} = \dot{x}_2 - \ddot{y} \implies \overset{(3)}{y} + \overset{(2)}{y} = \frac{1}{J} \cdot u$

$$\overset{(3)}{y} + \overset{(2)}{y} = \frac{1}{J} \cdot u \tag{5}$$

Aplicând transformata Laplace ecuației (5) vom obține:
$\overset{(3)}{y} + \overset{(2)}{y} = \frac{1}{J} \cdot u / _{\mathscr{L}\{\}(s)} \implies s^3 \cdot Y(s) + s^2 \cdot Y(s) = \frac{1}{J} \cdot U(s) \implies$
$\implies H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{J}}{s^3+s^2}$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{J}}{s^3 + s^2} = \frac{0.001}{s^3 + s^2} \tag{6}$$

f)Singularitățile sistemului sunt: $\begin{cases} \text{Polii} : \hat{s}_{1,2} = 0 \quad \text{și} \quad \hat{s}_3 = -1 \\ \text{Zerouri} : \text{nu} \quad \text{există} \end{cases}$

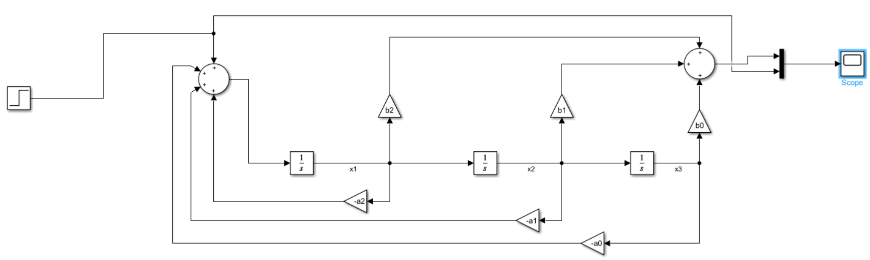


g)Realizările de stare:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{J}}{s^3+s^2} = \frac{0.001}{s^3+s^2}$$

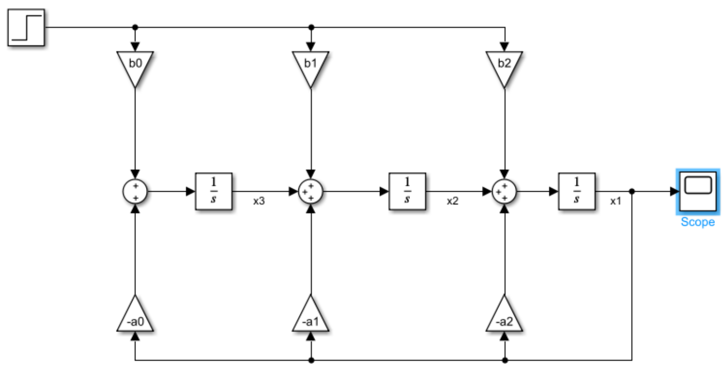
e1)Forma canonică de control: $\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1 \\ b_0 = \frac{1}{J}, b_1 = 0, b_2 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{J} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.001 & 0 \end{array}\right)$$



g1)Forma canonică de observare: $\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1 \\ b_0 = \frac{1}{J}, b_1 = 0, b_2 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$



. g3)Simulări:

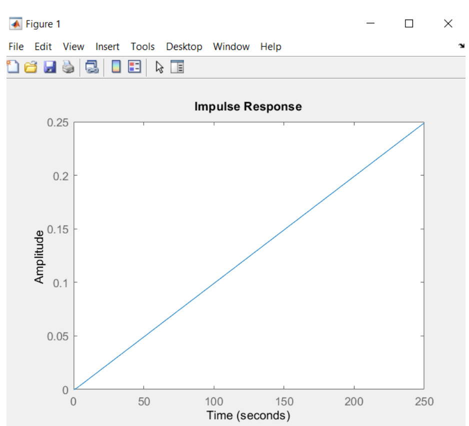


Figure 1: Răspunsul la impulsul Dirac

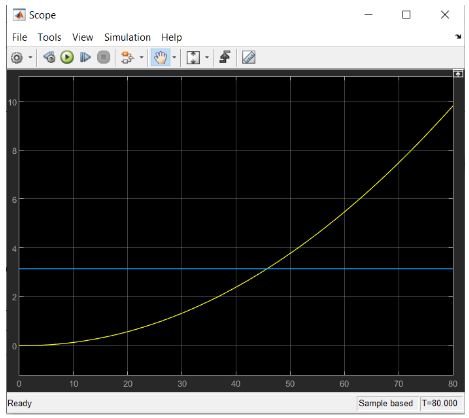


Figure 2: Răspunsul indicial

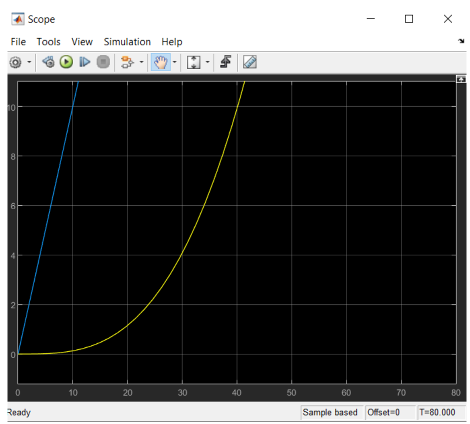


Figure 3: Răspuns la rampă

h)Forma minimală a funcției de transfer:

Se poate observa ca H(s) este deja în formă minimală, dar voi demonstra aceasta determinând parametrii Markov și matricea Henkel. Vom avea de determinat $2 \cdot 3 - 1 = 5$ parametri Markov.

$$\frac{\frac{1}{J}}{s^3 + s^2} = 0 \cdot s^{-1} + 0 \cdot s^{-2} + \frac{1}{J} \cdot s^{-3} - \frac{1}{J} \cdot s^{-4} + \frac{1}{J} \cdot s^{-5} + ... \implies$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \gamma_0 = 0; \\ \gamma_1 = 0; \\ \gamma_2 = 0; \\ \gamma_3 = \frac{1}{J} = 0.001; \\ \gamma_4 = -\frac{1}{J} = -0.001; \\ \gamma_5 = \frac{1}{J} = 0.001; \end{cases} \qquad (7)$$

Matricea Henkel va fi in acest caz: $\mathscr{H}_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{J} \\ 0 & \frac{1}{J} & -\frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & -\frac{1}{J} & \frac{1}{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.001 \\ 0 & 0.001 & -0.001 \\ 0.001 & -0.001 & 0.001 \end{pmatrix}$

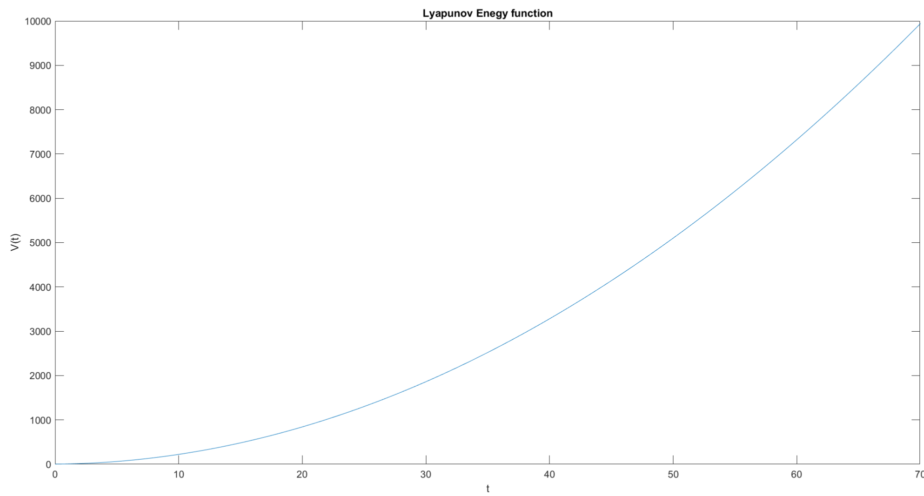
$\Longrightarrow$ det($\mathscr{H}_{3,3}$)=-$\frac{1}{J^3} \neq 0 \Longrightarrow$ H(s) e în formă minimală.

i) Stabilitatea internă si stabilitatea externă:
Până acum am obținut că $H(s) = H_{min}(s) \Longrightarrow$ stabilitatea internă coincide cu stabilitatea externă. Polinomul caracteristic pe care il vom folosi in determinarea stabilității interne cât și externe este: $P(s) = s^3 + s^2$.
Tabelul Routh-Hurwitz va avea urmatoarea formă:

s^3	1	0
s^2	1	0
$\cancel{s^1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
s^1	2	0
$\cancel{s^0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
s^0	2	0

Conform tabelului ar reieși că sistemul nostru este stabil, din moment ce nu avem nici o schimbare de semn, însă, luând în considerare faptul că am efectuat de două ori operația de derivare a liniei precedente va rezulta că 0 este rădăcină dublă a polinomului caracterisitic $\Longrightarrow$ sistemul este instabil(atât intern cât și extern).

j)Funcția-candidat Lyapunov:
Pentru a determina o astfel de funcție energie am folosit a doua metodă:
-Am considerat o matrice Q pozitiv definită; -Am rezolvat sistemul de ecuatii liniare de forma $A^T \cdot P + A \cdot P = -Q$, unde P este matrice pozitiv definită cu $P = P^T$. Fiindcă acest sistem este instabil, prin metoda de mai sus vom obține un sistem incompatibil, deci nu vom gasi o Funcție de tip energie Lyapunov astfel încât derivata sa să fie mai mică decât 0.
Astfel, vom considera $P = I_3$ și vom realiza reprezentarea lui $V(t) = x^T \cdot P \cdot x$, observând convergența funcției energie spre infinit.



Script MatLab:

```
A=[0 1 0; 0 0 0; 1 0 -1];
B=[0; 0.001; 0];
C=[0 ,0, 1];
D=0;
sys=ss(A,B,C,D);
t=0:0.01:70;
u=zeros(size(t));
x0=[1, 1, 1];
[y,t,x] = lsim(sys,u,t,x0);
P=eye(3);
V=x(:,1).*x(:,1)+x(:,2).*x(:,2)+x(:,3).*x(:,3);
plot(t,V),title('Lyapunov Enegy function'),xlabel('t'),ylabel('V(t)');
```

k)Avem:$H(s) = \frac{0.001}{s^3+s^2}$

k1)Funcția pondere: $h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{H(s)\right\}(t) = 0.001 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\right\}(t) \implies$

$\implies h(t) = 0.001 \cdot [-1(t) + t + e^{-t}]$. Semnal ce se regaseste și pe graficul raspunsului sistemului la impulsul Dirac. De asemenea, se poate observa că atunci când t tinde la infinit și h(t) tinde tot la infinit, ceea ce confirmă că sistemul este instabil extern.

k2)Răspunsul indiceal: $U(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s) = U(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0.001}{s^3+s^2} \implies y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{0.001}{s^3 \cdot (s+1)}\right\}(t) \implies$

$\Longrightarrow y_1(t) = 0.001 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s+1}\right\}(t) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y_1(t) = 0.001 \cdot [1(t) - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t}] \equiv \begin{cases} y_p(t) = 0.001 \cdot 1(t) \\ y_t(t) = 0.001 \cdot (-t + t^2 - e^{-t}) \end{cases}$

Fiindcă $\lim_{t\to\infty} y_t(t) = \infty$ și de aici vom obține că sistemul este extern instabil.

k3)Răspunsul la rampă: $U(s) = \frac{1}{s^2}$

$Y(s) = U(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{0.001}{s^3+s^2} \Longrightarrow y_v(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{0.001}{s^4 \cdot (s+1)}\right\}(t) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y_v(t) = 0.001 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s+1}\right\}(t) \Longrightarrow$

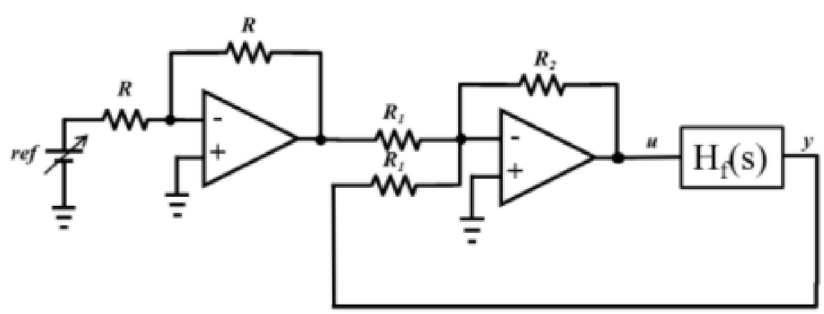
$\Longrightarrow y_v(t) = 0.001 \cdot [-1(t) + t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6} \cdot t^3 + e^{-t}] \equiv \begin{cases} y_p(t) = 0.001 \cdot [-1(t) + t] \\ y_t(t) = 0.001 \cdot (-\frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{6} \cdot t^3 + e^{-t}) \end{cases}$

Ca în cazul precedent, limita componentei tranzitorii este infinită, de unde rezultă instabilitatea externă a sistemului. De asemenea, acest lucru era de așteptat, fiindcă neputând să urmărească treapta, nu ar fi putut urmări nici rampa.

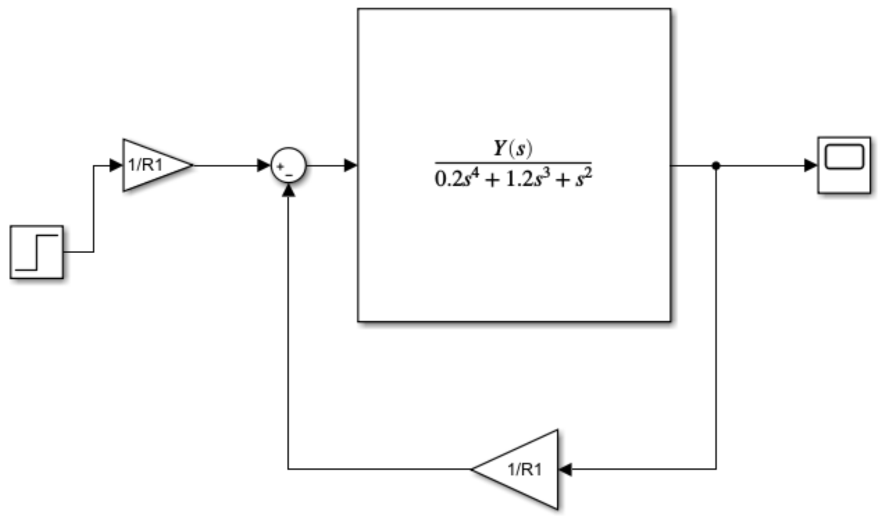
l)Constanta de timp corespunzătoare polului $\hat{s}_1 = -1$ este $\hat{T}_1 = 1$.
Factorul de proporționalitate este $K = \frac{1}{J} = 0.001$.
În cazul acestui sistem nu putem discuta despre factor de amortizare ζ și despre pulsația naturală ω_n.
Fiind un sistem instabil, timpul de răspuns $t_r \to \infty$ pentru orice semnal de intrare.
Eroarea staționară la poziție ε_{ssp}, respectiv la viteză ε_{ssv} se calculeaza cu formula $\lim_{s\to 0} s(U(s) - Y(s))$, iar amandouă vor fi -$\infty$.

4 Reglarea în buclă închisă a sistemului

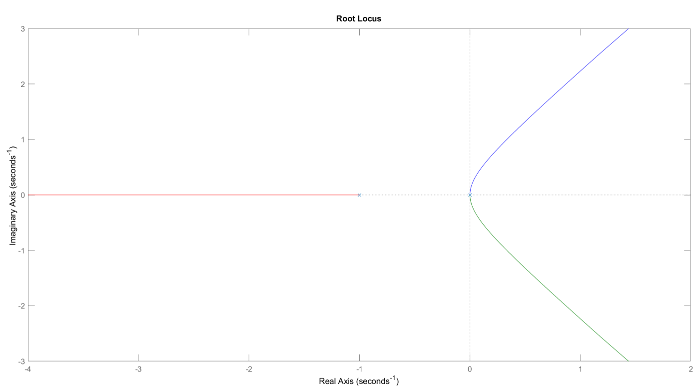
1)Reglare în buclă închisă cu ajutorul unui regulator proporțional P.



Schema bloc a acestui sistem in buclă închisă este următoarea:



Funcția de transfer a sistemului in bulcă închisă:
$H_0 = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)\cdot H_r(s)} = \frac{\frac{R_2}{R_1}\cdot H(s)}{1+\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{H(s)}{R_1}} \implies H_{des} = \frac{H(s)}{R_1}$. Dacă luăm în considerare doar un regulator de tip P, sistemul nu se va stabiliza, ba chiar, cu cât creștem raportul $\frac{R_2}{R_1}$, cu R_1 fixat, se va observa că sistemul in bulcă închisă va fi instabil, iar oscilațiile vor fi din ce în ce mai mari.



De aceea, în structura lui H(s) am introdus un regulator PD cu filtru $Hr(s) = \frac{0.02 \cdot s + 0.01}{0.2 \cdot s + 1}$.
Astfel, $H_f(s)$ devine: $H_f(s) = \frac{0.02 \cdot s + 0.01}{0.2 \cdot s + 1} \cdot \frac{0.001}{s^3 + s^2} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot s + 10^{-5}}{0.2 \cdot s^4 + 1.2 \cdot s^3 + s^2}$, iar
$H_0 = \frac{\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot s + 10^{-5}}{0.2 \cdot s^2 \cdot (s^2 + 6 \cdot s + 5)}}{1 + \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot s + 10^{-5}}{0.2 \cdot s^2 \cdot (s^2 + 6 \cdot s + 5)}} = \frac{\frac{R_2}{R_1}(2 \cdot 10^{-5} \cdot s + 10^{-5})}{0.2s^4 + 1{,}2s^3 + s^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{R_2}{{R_1}^2} \cdot s + \frac{R_2}{{R_1}^2} 10^{-5}}$.
Considerând $R_1 = 5\Omega$ și știind că $H_{des}(s) = \frac{H_f(s)}{R_1}$ obținem:

$$H_{des} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot s + 10^{-5}}{s^2 \cdot (s+1) \cdot (s+5)} \tag{8}$$

Singularitățile sistemului deschis sunt: $\begin{cases} \mathring{s}_1 = -0.5; m = 1 \\ \hat{s}_{1,2} = 0, \hat{s}_3 = -1, \hat{s}_4 = -5 \end{cases}$ $; n = 4 \implies$
$n_a = n - m = 3$ asimptote.

Centrul de greutate $\sigma_a = \frac{0+0-1-5+0.5}{3} = \frac{-5.5}{3} = -1.83$.

Unghiurile pe care le fac asimptotele cu axa reală: $\phi_{a_i} = \frac{2 \cdot i - 1}{3} \cdot \pi, i = \overline{1,3} \implies \phi_{a_1} = \frac{\pi}{3}, \phi_{a_2} = \pi, \phi_{a_3} = \frac{5 \cdot \pi}{3}$.

Unghiurile de plecare din polii egali cu 0 sunt:π și $-\pi$.

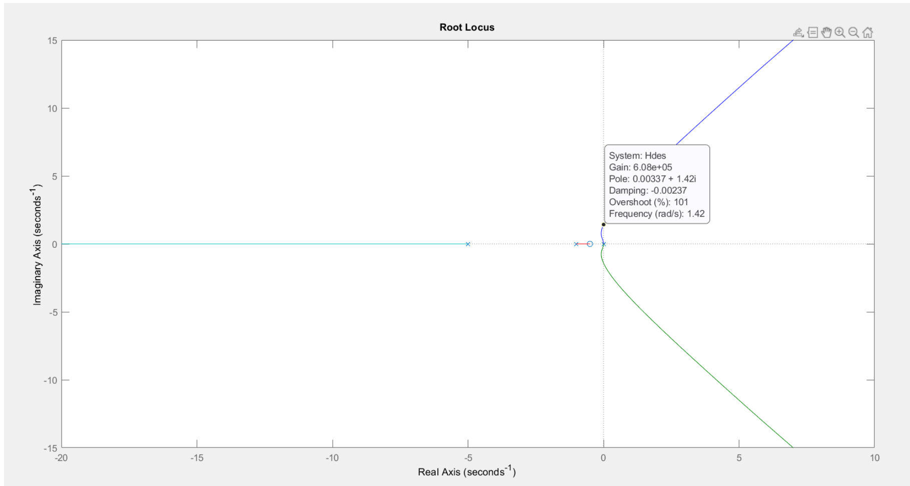
Intersecția cu axa imaginară (o obținem pornind de la polinomul caracteristic $1 + k \cdot H_{des}(s) = 0$ și impunând condiția $s = j \cdot \omega$):
$\begin{cases} s^4 + 6 \cdot s^3 + 5 \cdot s^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot k \cdot s + 10^{-5} \cdot k = 0 \\ s = j \cdot \omega \end{cases} \implies$
$\implies \omega^4 - 6 \cdot j \cdot \omega^3 - 5 \cdot \omega^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot k \cdot j \cdot \omega + 10^{-5} \cdot k = 0 \implies$
$\implies \begin{cases} \omega^4 - 5 \cdot \omega^2 + 10^{-5} \cdot k = 0 \\ -6 \cdot \omega^3 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot k\omega \implies \omega^2 = \frac{10^{-5} \cdot k}{3} \end{cases} \implies \frac{10^{-10} \cdot k^2}{9} - \frac{5}{3} \cdot 10^{-5} \cdot k +$
$+10^{-5} \cdot k = 0 \implies k_{cr} = 6 \cdot 10^5$ și $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Obs: Deoarece am împărțit H_{des} la R_1 k obținut va trebui să îl rescalez prin împărțirea cu $R_1 = 5\Omega$.

Stabilitatea sistemului: sistemul este stabil pentru $k \in (0; 1.2 \cdot 10^5]$, unde $k = \frac{R_2}{R_1}$ cu $R_1 = 5\Omega \implies R_2 \in (0, 0.6]M\Omega$.

Regimuri de funcționare și moduri:

-$k \in (0; 1.2 \cdot 10^5) \implies R_2 \in (0, 0.6)M\Omega$: regim oscilant amortizat, $\hat{s}_{1,2} \in \mathbb{C}_-$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 3 moduri: $e^{Re\{\hat{s}_1\} \cdot t} \cdot \sin{(Im\{\hat{s}_1\} \cdot t + \phi)}$,$e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$.



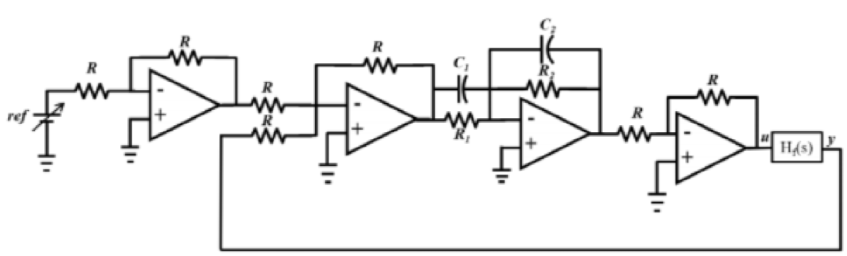
-$k = 1.2 \cdot 10^5 \implies R_2 = 0.6M\Omega$: regim oscilant întreținut: $\hat{s}_{1,2} = \pm\sqrt{2} \cdot j$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are următoarele 3 moduri: $\sin(\sqrt{2} \cdot t + \phi)$, $e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$.

-$k \in (1.2 \cdot 10^5, \infty) \implies R_2 \in (0.6, \infty)M\Omega$: regim oscilant neamortizat, $\hat{s}_{1,2} \in \mathbb{C}_+$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 3 moduri: $e^{Re\{\hat{s}_1\} \cdot t}$$\cdot\sin(Im\{\hat{s}_1\} \cdot t + \phi)$,$e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$.

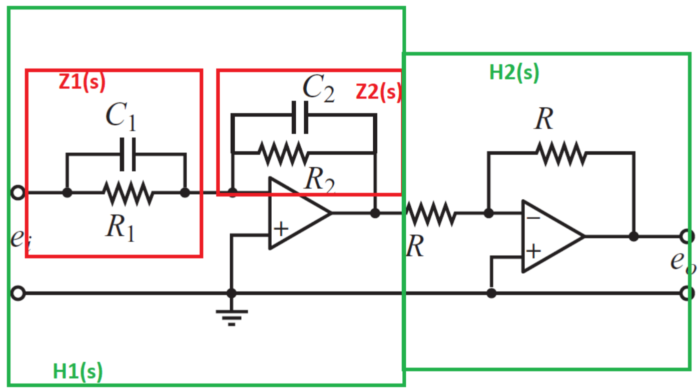
Suprareglajul minim este: $\sigma = 65,9\%$ pentru $\frac{R_2}{R_1} = 0.2 \cdot 10^5$ $(R_1 = 5\ \Omega) \equiv R_2 \approx 107k\Omega$.

Timpul de răspuns minim impune condiția necesară dar nu și suficientă ca $Re\{\hat{s}_{dominant}\}$ să fie cât mai aproape de axa imaginară. Din locul rădăcinilor reprezentat in MatLab am obținut că timpul minim de răspuns îl avem pentru $\hat{s}_{dominant} = -0.0858 \pm 0.754 \cdot j \implies t_r = \frac{4}{|Re\{\hat{s}_{dominant}\}|} = \frac{4}{0.0858} = 46.6s$.

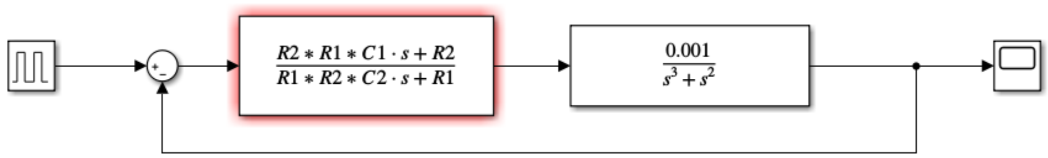
2)Reglare în bulcă închisă folosind un regulator Lead or Lag.



a)Determinarea funcției de transfer a regulatorului Lead or Lag.



$$\begin{cases} H_{ll}(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \\ H_1(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}; Z_1(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + s \cdot C_1}; Z_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + s \cdot C_2} \implies H_1(s) = -\frac{R_2}{R_2 \cdot C_2 \cdot s + 1} \cdot \frac{R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1}{R_2 \cdot C_2 \cdot s + 1} \\ H_2(s) = -\frac{R}{R} = -1 \end{cases}$$
$$\implies H_{ll}(s) = \frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1}{R_2 \cdot C_2 \cdot s + 1}.$$



b)Funcția de transfer a sistemului în bulcă închisă:

$$H_0 = \frac{H_{ll} \cdot H(s)}{1 + H_{ll} \cdot H(s)} = \frac{0.001 \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot (R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1)}{(s^3 + s^2) \cdot (R_2 \cdot C_2 \cdot s + 1) + 0.001 \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot (R_1 \cdot C_1 \cdot s + 1)}.$$

Discuția se va face după constanta de timp $T_1 = R_1 C_1$, considerând următoarele valori constante: $\begin{cases} R_2 = 1.5k\Omega; \\ R_1 = 750\Omega; \\ C_2 = 10\mu F. \end{cases}$

Astfel, vom obține:$H_0 = \frac{2\frac{(T_1 s+1)0.001}{(15\cdot 10^{-6}s+1)(s^3+s^2)}}{1+2\cdot\frac{(T_1 s+1)0.001}{(15\cdot 10^{-6}s+1)(s^3+s^2)}} = \frac{0.002T_1 s+0.002}{(15\cdot 10^{-6}s+1)(s^3+s^2)+(0.002T_1 s+0.002)} \implies$

$\implies H_0(s) = \frac{(0.002T_1 s+0.002)\frac{1}{(s^3+s^2)(15\cdot 10^{-6}s+1)+0.002}}{1+T_1\frac{0.002s}{(s^3+s^2)(15\cdot 10^{-6}s+1)+0.002}} \implies H_{des}(s) = \frac{0.002s}{15\cdot 10^{-6}s^4+(15\cdot 10^{-6}+1)s^3+s^2+0.002}.$

c)Trasarea și interpretarea locului rădăcinilor:

Singularitățile sistemului în bulcă deschisă sunt: $\begin{cases} \mathring{s}_1 = 0 \implies m = 1; \\ \hat{s}_1 = -66666, \hat{s}_2 = -1, \hat{s}_{3,4} = 0.001 \pm 0.044j; n = 4 \end{cases}$
$\implies n_a = 3\,asimptote.$
Centrul de greutate al locului rădăcinilor este: $\sigma_a = \frac{-66666-1-0.001-0.001+0}{3} \approx -22222.$
Unghiurile pe care le fac asimptotele cu axa reală:$\phi_{a_i} = \frac{2\cdot i-1}{3}\cdot\pi, i = \overline{1,3} \implies \phi_{a_1} = \frac{\pi}{3}, \phi_{a_2} = \pi, \phi_{a_3} = \frac{5\cdot\pi}{3}.$

Unghiurile de plecare din $\hat{s}_{3,4}$ sunt π și $-\pi$.

Intersecțiile cu axa imaginară:
$\begin{cases} 15\cdot 10^{-6}s^4 + (15\cdot 10^{-6}+1)s^3 + s^2 + 0.002 + 0.002ks = 0 \\ s = j\omega \end{cases} \implies$
$15\cdot 10^{-6}\omega^4 - j\omega^3 - \omega^2 + 0.002kj\omega + 0.002 = 0 \implies$

$$\implies \begin{cases} 15\cdot 10^{-6}\omega^4 - \omega^2 + 0.002 = 0 \\ -\omega^3 + 0.002k\omega = 0 \implies \omega^2 = 0.002k \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = 1; \omega_{1,2} = \pm 0.044 \\ k_2 = 3.333\cdot 10^7; \omega_{3,4} = \pm 258 \end{cases}.$$

Puncte de desprindere și de apropiere:
$\begin{cases} 1 + k\cdot H_{des} = 0 \\ \frac{dH_{des}}{ds} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} s_d = -0.48, k_d = 127 \\ s_a = -0.047, k_a = 43.6 \end{cases}$

Sensibilitate:
-relativ mare, deoarece în funcție de T_1 se schimbă stabilitatea sistemului.
-relativ mică, deoarece sistemul iese din stabilitate pentru valori foarte mari ale lui T_1, aproximativ un an.

Stabilitate: sistemul este stabil pentru $T_1 \in [1, 3.333\cdot 10^7]$
Regimuri și moduri:
-$T_1 \in (0,1)$: regim oscilant neamortizat, $\hat{s}_{1,2} \in \mathbb{C}_+$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 3 moduri: $e^{Re\{\hat{s}_1\}\cdot t}\cdot\sin(Im\{\hat{s}_1\}\cdot t+\phi)$,$e^{\hat{s}_3\cdot t}$,$e^{\hat{s}_4\cdot t}$.

-$T_1 = 1$: regim oscilant întreținut, $\hat{s}_{1,2} = \pm 0.044j$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 3 moduri: $\sin{(0.044 \cdot t + \phi)}$,$e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$.

-$T_1 \in (1, 43.6)$: regim oscilant amortizat, $\hat{s}_{1,2} \in \mathbb{C}_-$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 3 moduri: $e^{Re\{\hat{s}_1\} \cdot t} \cdot \sin{(Im\{\hat{s}_1\} \cdot t + \phi)}$,$e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$.

-$T_1 = 43.6$: regim aperiodic critic amortizat, $\hat{s}_{1,2} \in \mathbb{R}_-$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 4 moduri: $e^{-0.047 \cdot t}$,$t \cdot e^{-0.047 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$.

-$T_1 \in (43.6, 127)$: regim aperiodic amortizat, $\hat{s}_{1,2} \in \mathbb{R}_-$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 4 moduri: $e^{\hat{s}_1 \cdot t}$, $e^{\hat{s}_2 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$.

-$T_1 = 127$: regim aperiodic critic amortizat, $\hat{s}_{1,2} \in \mathbb{R}_-$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 4 moduri: $e^{-0.48 \cdot t}$, $t \cdot e^{-0.48 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$.

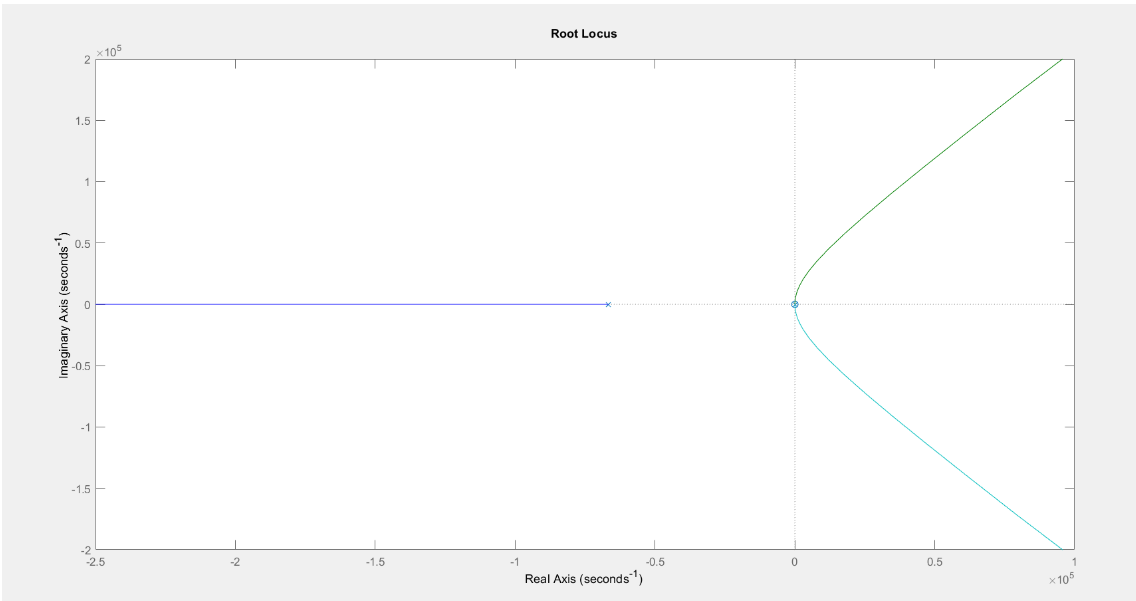
-$T_1 \in (127, 3.33 \cdot 10^7)$: regim oscilant amortizat, $\hat{s}_{1,2} \in \mathbb{C}_-$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 3 moduri: $e^{Re\{\hat{s}_1\} \cdot t} \cdot \sin{(Im\{\hat{s}_1\} \cdot t + \phi)}$,$e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$. Având în vedere că polul dominant este pe axa reală și foarte aproape de origine, putem afirma ca regimul este aperiodic amortizat.

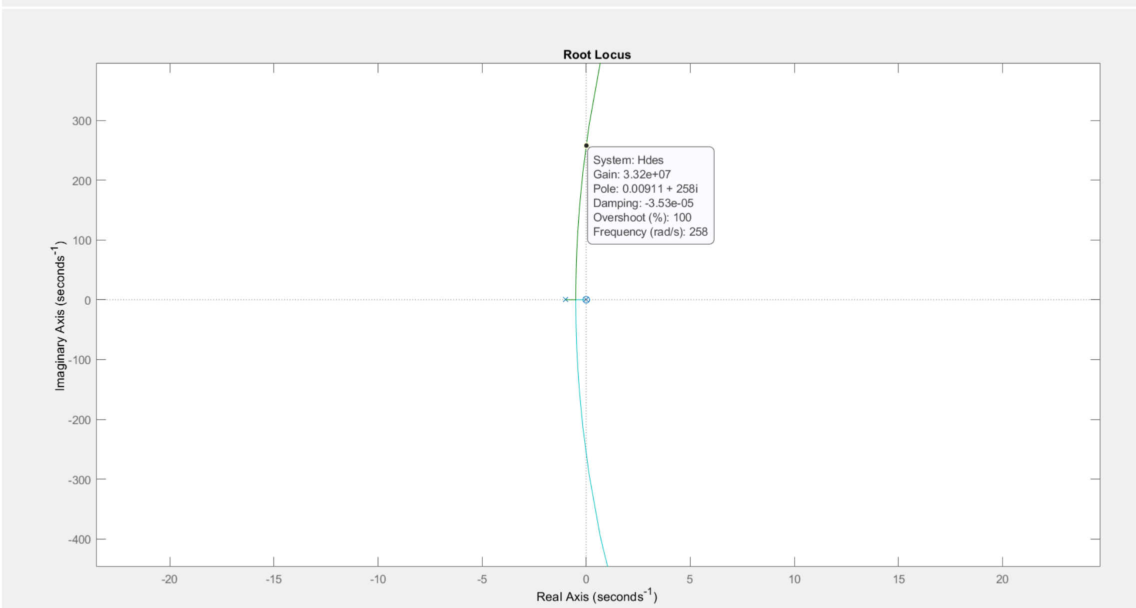
-$T_1 = 3.333 \cdot 10^7$: regim oscilant întreținut, $\hat{s}_{1,2} = \pm 258j$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 3 moduri: $\sin{(258 \cdot t + \phi)}$,$e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$.

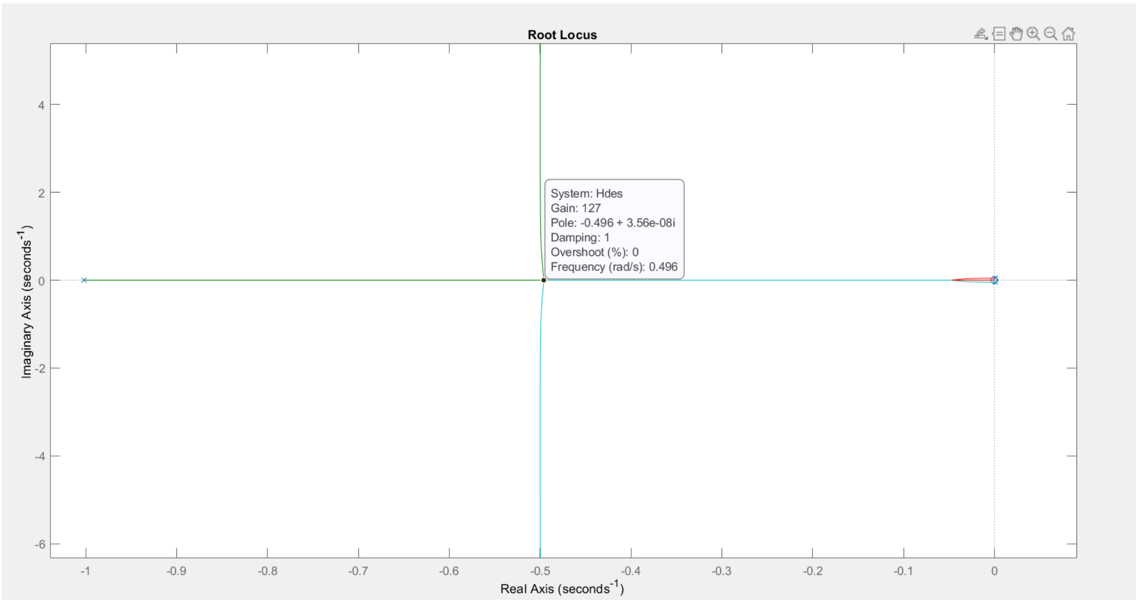
-$T_1 \in (3.333 \cdot 10^7, \infty)$: regim oscilant neamortizat, $\hat{s}_{1,2} \in \mathbb{C}_+$, $\hat{s}_3, \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_- \implies$ sistemul are 3 moduri: $e^{Re\{\hat{s}_1\} \cdot t} \cdot \sin{(Im\{\hat{s}_1\} \cdot t + \phi)}$,$e^{\hat{s}_3 \cdot t}$,$e^{\hat{s}_4 \cdot t}$.

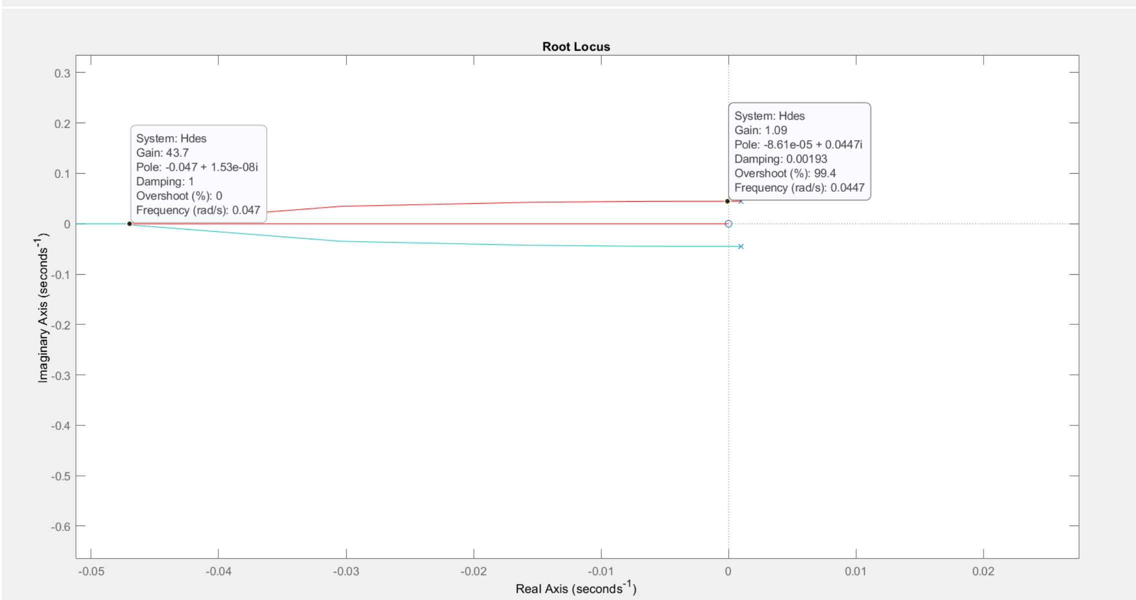
Pulsația maximă de oscilație se va obține pentru valoarea părții imaginare a polilor cât mai mare în modul. În acest caz se obține pentru $T_1 = 3.333 \cdot 10^7$, iar valoarea este $\omega_{osc} = 258$.

Sistemul e la limita de stabilitate când: $T_1 \in \{1, 3.333 \cdot 10^7\}$.


Root Locus
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)


Root Locus
System: Hdes
Gain: 3.32e+07
Pole: 0.00911 + 258i
Damping: -3.53e-05
Overshoot (%): 100
Frequency (rad/s): 258
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)


Root Locus
System: Hdes
Gain: 127
Pole: -0.496 + 3.56e-08i
Damping: 1
Overshoot (%): 0
Frequency (rad/s): 0.496
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)


Root Locus
System: Hdes
Gain: 43.7
Pole: -0.047 + 1.53e-08i
Damping: 1
Overshoot (%): 0
Frequency (rad/s): 0.047
System: Hdes
Gain: 1.09
Pole: -8.61e-05 + 0.0447i
Damping: 0.00193
Overshoot (%): 99.4
Frequency (rad/s): 0.0447
Imaginary Axis (seconds-1)
Real Axis (seconds-1)