Prof. J. Rothe Düsseldorf, 11.11.2010

Übung zur Vorlesung im WS 2010/2011
Algorithmische Eigenschaften von Wahlsystemen I

(Lösungsvorschläge)

Blatt 5, Abgabe am 18. November 2010

Aufgabe 1 (Condorcet-Verlierer): Der *Condorcet-Verlierer* einer Wahl ist derjenige Kandidat, der im paarweisen Vergleich von allen anderen Kandidaten in mehr als der Hälfte der Stimmen geschlagen wird.

(a) Zeigen Sie, dass ein Condorcet-Verlierer ein Plurality-Gewinner sein kann. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie, dass ein Borda-Gewinner nie ein Condorcet-Verlierer ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis zu (b): Wir definieren $N(c, d) = \|\{v \in V \mid c \text{ steht in } v \text{ vor } d\}\|$. Zeigen Sie zunächst, dass für eine Borda-Wahl (C, V) folgendes gilt:

$$Bscore(c) = \sum_{d \in C - \{c\}} N(c, d), \tag{1}$$

wobei $Bscore(c)$ der Borda-Score von Kandidat c ist. Beweisen Sie daraufhin mithilfe von (1) die Aussage in (b) durch Widerspruch.

Lösungsvorschlag:

(a) Gegenbeispiel (C, V) mit $C = \{a, b, c, d\}$ und $V = (v_1, v_2, \ldots, v_5)$:

$$\begin{array}{lllll}
v_1: & a & b & c & d \\
v_2: & a & b & c & d \\
v_3: & b & c & d & a \\
v_4: & c & d & b & a \\
v_5: & d & c & b & a
\end{array}$$

a ist Condorcet-Verlierer, aber PV-Gewinner.

(b) Moulin: Axioms of cooperative decision making, 1988.

Es sei (C, V) eine Borda-Wahl und es gelte $n = \|V\|$ und $p = \|C\|$.

Zeige (1):

Allgemein gilt in Borda-Wahlen, dass c aus der Stimme v genau i Punkte bekommt, wenn c in v auf dem $(n-i)$ten Platz positioniert ist (wir schreiben dann $score_v(c) = i$). Damit steht c in der Stimme v also genau vor i anderen Kandidaten. Es folgt:

$$\begin{aligned} Bscore(c) &= \sum_{v \in V} score_v(c) \\ &= \sum_{v \in V} \|\{d \in C - \{c\} \mid c \text{ steht in } v \text{ vor } d\}\| \\ &= \sum_{d \in C - \{c\}} N(c, d) \end{aligned}$$

In einer Bordawahl werden insgesamt $n \sum_{i=1}^{p-1} i = \frac{n(p-1)p}{2}$ Punkte vergeben.

Sei nun c ein Condorcet-Verlierer. Dann gilt:

$$Bscore(c) = \sum_{d \in C - \{c\}} \underbrace{N(c, d)}_{< \frac{n}{2}} < \frac{n(p-1)}{2}.$$

Damit müssen auf die restlichen $p-1$ Kandidaten in der Wahl mehr als $\frac{n(p-1)(p-1)}{2}$ Punkte verteilt werden. Die beste Situation für c wäre, wenn alle anderen Kandidaten gleich viele Punkte bekämen. Doch selbst dann wäre der Borda-Score der Kandidaten höher als der von c. Also kann c kein Borda-Gewinner in (C, V) sein.

Aufgabe 2 (Theorem von Muller und Satterthwaite): Warum wird die Resolut-Eigenschaft für die Gültigkeit des Theorems von Muller und Satterthwaite benötigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag: Sonst wäre Condorcet ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3 (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen): Ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ ist *unabhängig von irrelevanten Alternativen (erfüllt die IIA-Eigenschaft)*, wenn für jede $\mathcal{E}$-Wahl gilt: Ist c im Gesamtergebnis der Wahl vor d platziert, so ändert sich an dieser Reihenfolge nichts, auch wenn die Stimmen in V derart verändert werden, dass lediglich die Reihenfolge von c und d erhalten bleibt.

Es sei (C, V) die Wahl von Blatt 2: Die Kandidatenmenge sei $C = \{a, b, c, d, e\}$, die Wählermenge V enthalte sechs Wähler mit den folgenden Präferenzen:

$$\begin{array}{lccccc} v_1: & d & c & a & e & b \\ v_2: & d & c & b & a & e \\ v_3: & d & b & e & a & c \\ v_4: & e & c & b & a & d \\ v_5: & b & c & a & d & e \\ v_6: & a & c & b & d & e \end{array}$$

(a) Stellen Sie für Borda, Plurality Voting und Veto das Ergebnis der Wahl (C, V) als Präferenz dar. (Gleichstände werden mit „=“ gekennzeichnet.)

(b) Zeigen Sie anhand dieser Wahl, dass Borda, Plurality Voting und Veto nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Angenommen, wir definieren das strenge Monotonie-Kriterium analog zu der IIA-Eigenschaft für den paarweisen Vergleich von Kandidaten:

Ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ sei streng monoton, wenn für jede $\mathcal{E}$-Wahl (C, V) gilt: Steht im Gesamtergebnis der Wahl c vor d, so bleibt diese Reihenfolge erhalten, selbst wenn in V die Stimmen derart verändert werden, dass lediglich gewährleistet ist, dass Kandidaten, die vor der Änderung hinter c positioniert waren, auch nach der Änderung hinter c positioniert sind.

Worin besteht der Unterschied zwischen der IIA-Eigenschaft und der so definierten strengen Monotonie? Was können Sie daraus für den Zusammenhang zwischen diesen beiden Eigenschaften folgern? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag: Punktwerte in den verschiedenen Wahlsystemen für die Kandidaten:

	a	b	c	d	e	Gewinner
PV	1	1	0	3	1	d
Veto	6	5	5	5	3	a
Borda	11	13	15	14	7	c

(a) Borda: $c > d > b > a > e$, PV: $d > a = b = e > c$, Veto: $a > b = c = d > 3$.

(b)
- Borda: Betrachte d und b; $v_4 \rightarrow v_4' : b\,e\,c\,a\,d$. Damit gelten die folgenden Scores:

	a	b	c	d	e
BScore	11	15	14	14	6

Gesamtergebnis: $b > c = d > a > e$.

- PV: Betrachte e und c; $v_1 \rightarrow v_1' : c\,b\,a\,e\,b$ und $v_2 \rightarrow v_2' : c\,d\,b\,a\,e$. Damit gelten die folgenden Scores:

	a	b	c	d	e
PV-Score	1	1	2	3	1

Gesamtergebnis: $d > c > a = b = e$.

- Veto: Betrachte a und b; $v_2 \rightarrow v_2' : d\,c\,b\,e\,a$ und $v_3 \rightarrow v_3' : d\,b\,e\,c\,a$ Damit gelten die folgenden Scores:

	a	b	c	d	e
VScore	4	5	6	5	4

Gesamtergebnis: $c > b = d > a = e$.

(c) Wir betrachten die Veränderungen an der Wählermenge, die bei den beiden Eigenschaften vorgenommen werden dürfen und betrachten dafür zwei Kandidaten c und d, wobei c im Gesamtergebnis der Wahl vor d platziert ist.

Bei der strengen Monotonie darf jede Stimme derart verändert werden, dass die Position von c bezüglich d verbessert wird oder gleich bleibt. Das heißt, es ist erlaubt, die Position von c und d zugunsten von c zu tauschen.

Bei der IIA-Eigenschaft dürfen die Stimmen nur so weit verändert werden, dass sich an der Reihenfolge von c und d nichts ändert. Damit sind solche Veränderungen, die c vor d platzieren (wenn dies vor der Änderung nicht der Fall war) hier nicht zulässig.

Ist die IIA-Eigenschaft nicht erfüllt, so auch nicht die strenge Monotonie.