Prof. J. Rothe Düsseldorf, 21.10.2010

Übung zur Vorlesung im WS 2010/2011
Algorithmische Eigenschaften von Wahlsystemen I

(Lösungsvorschläge)
Blatt 2, Abgabe am 28. Oktober 2010

Aufgabe 1 (Die Wahlsysteme Plurality Voting, Borda, k-Approval, Veto und Copeland): Gegeben sei die Wahl (C, V) mit der Kandidatenmenge $C = \{a, b, c, d, e\}$ und sechs Wählern in der Wählermenge V mit den folgenden Präferenzen:

Wähler v_1 : $d \; c \; a \; e \; b$
Wähler v_2 : $d \; c \; b \; a \; e$
Wähler v_3 : $d \; b \; e \; a \; c$
Wähler v_4 : $e \; c \; b \; a \; d$
Wähler v_5 : $b \; c \; a \; d \; e$
Wähler v_6 : $a \; c \; b \; d \; e$

(Die Ordnungszeichen „<“ werden ab nun weggelassen. Als Konvention vereinbaren wir, dass die Kandidaten in absteigender Reihenfolge sortiert sind, also der beliebteste Kandidat stets links steht.)

Bestimmen Sie in dieser Wahl den Plurality-Gewinner, den Borda-Gewinner, den 2-Approval-Gewinner, den 3-Approval-Gewinner, den Veto-Gewinner und den Copeland-Gewinner.

Lösungsvorschlag:
Verhältnisse in (C, V):

	a	b	c	d	e	#Siege
a	-	2:4	2:4	3:3	4:2	1
b	4:2	-	2:4	2:4	4:2	2
c	4:2	4:2	-	3:3	4:2	3
d	3:3	4:2	3:3	-	5:1	2
e	2:4	2:4	2:4	1:5	-	0

Es gibt keinen Condorcet-Gewinner und Kandidat c ist der Copeland-Gewinner in (C, V).
Punktwerte in den verschiedenen Wahlsystemen für die Kandidaten:

	a	b	c	d	e	Gewinner
PV	1	1	0	3	1	d
2-AV	1	2	5	3	1	c
3-AV	1	5	5	3	2	b,c
Veto	6	5	5	5	3	a
Borda	11	13	15	14	7	c

Aufgabe 2 (Zusammenhänge zwischen Wahlsystemen): Wie hängt das Wahlsystem k-Approval Voting mit den Wahlsystemen Plurality Voting bzw. Veto Voting zusammen?

Lösungsvorschlag:
1-Approval Voting entspricht Plurality Voting. Sei in einer Wahl (C, V) $n = \|C\|$. Dann entspricht $(n-1)$-Approval Voting Veto Voting.

Aufgabe 3 (Scoring-Protokolle): Gegeben sei ein Scoring-Protokoll $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) Für alle natürlichen Zahlen k ist $\alpha_{+k} := \alpha + k := (\alpha_1 + k, \alpha_2 + k, \ldots, \alpha_m + k)$ ein Scoring-Protokoll und es gilt für alle Kandidaten $c \in C$ über jeder Wählermenge V:

Kandidat c ist (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α genau dann, wenn Kandidat c (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α_{+k} ist.

(b) Für alle natürlichen Zahlen k ist $\alpha_{\cdot k} := k\alpha := (k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_m)$ ein Scoring-Protokoll und es gilt für alle Kandidaten $c \in C$ über jeder Wählermenge V:

Kandidat c ist (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α genau dann, wenn Kandidat c (eindeutiger) Gewinner in (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls $\alpha_{\cdot k}$ ist.

Lösungsvorschlag:
Gegeben sei das Scoring-Protokoll $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Es gilt also

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_m. \tag{1}$$

Sei $score_\alpha(c)$ die Punktzahl von c in der Wahl (C, V) bezüglich des Scoring-Protokolls α.

(a) Da $k \geq 0$, folgt mit (1) $\alpha_1 + k \geq \alpha_2 + k \geq \ldots \geq \alpha_m + k$. Damit ist α_{+k} ein Scoring-Protokoll und es gilt $score_{\alpha_{+k}}(c) = score_\alpha(c) + k\|V\|$.

„$\Rightarrow$“ Angenommen, c habe den höchstens Score bezüglich α, dann hat c auch den höchsten Score bezüglich α_{+k}, da jeder Kandidat bezüglich α_{+k} genau $k\|V\|$ Punkte hinzubekommt (im Vergleich zu α).
„$\Leftarrow$“ Angenommen, c habe den höchsten Score bezüglich α_{+k}, so hat c auch den höchsten Score bezüglich α, weil alle Kandidaten genau $k\|V\|$ Punkte verlieren (im Vergleich zu α_{+k}).

(b) Da $k \geq 0$, folgt mit (1) $k\alpha_1 \geq k\alpha_2 \geq \ldots \geq k\alpha_m$. Damit ist $\alpha_{\cdot k}$ ein Scoring-Protokoll und es gilt $score_{\alpha_{\cdot k}}(c) = k \cdot score_\alpha(c)$.

„$\Rightarrow$“ Angenommen, c habe den höchstens Score bezüglich α, dann hat c auch den höchsten Score bezüglich $\alpha_{\cdot k}$, da jeder Kandidat das k-fache seines Scores bezüglich

α erhält.
„$\Leftarrow$" Angenommen, c habe den höchsten Score bezüglich $\alpha_{\cdot k}$, so hat c auch den höchsten Score bezüglich α, weil alle Kandidaten genau ein k-tel ihrer Punkte bezüglich $\alpha_{\cdot k}$ erhalten.