HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Mathematik

Bachelorarbeit

Neidfreiheit in Cake-Cutting-Protokollen

Name:	Alina Elterman
Matrikelnummer:	1810231
Betreuer:	Prof. Dr. Jörg Rothe
Abgabedatum:	21.09.2010

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

AMKP . . . . Austin Moving-Knife-Protokoll
AMKPn . . . Austin Moving-Knife-Protokoll fur $\underline{n}$ gleichwertige Stucke
CC . . . . Cake-Cutting
CCP . . . . . Cake-Cutting-Protokoll
MKP . . . . . Moving-Knife-Protokoll
n.s.M. . . . . nach seinem Mass

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Cake-Cutting: Was ist das eigentlich?
Viele Eltern quälen sich, wenn es darum geht, auf einem Geburtstag, gerecht den Kuchen unter den Kindern aufzuteilen. Man möchte alle Kinder glücklich machen und jedem ein solches Stück geben, dass es damit zufrieden ist und kein anderes haben möchte. Also wie lässt sich das Problem lösen?
Viele interdisziplinäre Wissenschaften, beispielweise in den Natur-, Geistes- und Wirtschaftswissenschaften versuchen eine Lösung auf die eben genannte Problematik zu geben.[1]
Doch nicht jeder Kuchen ist gleich. So kann die Form variieren und auch die Möglichkeiten diesen zu teilen können sich unterscheiden.[2]
Einen Kuchen zwischen zwei Kindern aufzuteilen, ist der leichteste Fall. Dieses Verfahren nennt sich Cut & Choose (-Protokoll) und wird im nachfolgenden erklärt. Bei drei Kindern birgt das mathematische Verfahren Selfridge-Conway (-Protokoll) eine Lösung.[3] Für vier Kinder existiert eine Ausnahmelösung, für fünf konnte bis jetzt kein allgemeingültiges Protokoll aufgestellt werden.
Genau an dieser Stelle liegt eine der Problematiken dieser Arbeit. Wie lässt sich dieser Zwiespalt lösen?
Seit den 40er Jahren befassen sich verschiedene Wissenschaftler und Theoretiker mit dem Teilgebiet Cake-Cutting. Immer wieder ergibt sich die Frage nach dem gerechten Teilen. Als Begründer und Problemsteller dieser Theorie gilt Hugo Dionizy Steinhaus in [Kna46] und [Ste48]. Ein weiteres Phänomen das sich beim Cake-Cutting bemerkbar macht, ist der Aspekt des Neides. Der Wirtschaftswissenschaftler Duncan Foley führte den Begriff der "Neidfreiheit" in [Fol67] ein. George Gamow und Marvin Stern haben sich am Beispiel des Weinteilungsproblems mit diesem Thema befasst und erweiterten die Fragestellung auf eine beliebige Anzahl von Personen in [GS58].
In den letzten Jahrzenten wurde viel in diesem Gebiet geforscht und das Interesse von den Computerwissenschaften geweckt. Hier liegt die Analyse der Komplexität solcher Aufteilungen im Vordergrund. Die Arbeit von Ariel Procaccia [Pro09] legte einen Meilenstein in der Komlexitätsanalyse von neidfreien Cake-Cutting-Protokollen.[4]
Im Folgenden, befasst sich diese Arbeit mit der Fragestellung von Steinhaus und den erzielten Fortschritten von ihm und seinen Kollegen. Dabei wird versucht neue Ansätze und Perspektiven zu eröffnen.

[1] Die genauen Schwerpunkte dieser Gebiete werden in Kapitel 2 aufgelistet.
[2] Es wird eine Einführung in die Möglichkeiten und Arten der Teilungen in Kapitel 3 gemacht.
[3] Eine Übersicht der bekannten Protokolle wird in Kapitel 4 gegeben.
[4] Das Verfahren wird in Kapitel 6 beschrieben und anhand eines Beispiels demonstriert.

2 Mehrere Ansichten der neidfreien Aufteilung

Die gerechte Aufteilung spielt in unterschiedlichen akademischen Bereichen eine wichtige Rolle. Der Begriff der Neidfreiheit bzw. des Neides ist in diesem Kontext ebenso interdisziplinär. Diese Themen spielen ebenfalls in der Psychologie, Politik und Sozialwissenschaften eine wichtige Rolle, doch nur die Forschungen aus Wirtschaft, Mathematik und Informatik, bzw. deren Zusammenarbeit führten zu den, in dieser Arbeit, erläuterten Ergebnissen, und werden hier beschrieben[5].

Wirtschaft
D. K. Foley hat 1967 den Begriff der Neidfreiheit in [Fol67] eingeführt. Interessanterweise wurde bei den Wirtschaftswissenschaften angefangen und intensiv an Existenzbeweisen geforscht. Es werden oft Resultate präsentiert die auf der Definition von Varian aus [Var74] beruhen, dass die Gerechtigkeit gleich der Effizienz im Zusammenhang mit der Neidfreiheit ist.

Mathematik
Angefangen bei Steinhaus und seinen Kollegen in der "polnischen Schule", wurde das Cake-Cutting-Problem der Analysis zugeordnet. Viele spätere Veröffentlichungen beschäftigen sich vor allem mit topologischen Eigenschaften z.B. Maßräumen und Konvexität. Dieser Einfluss macht sich vor allem in den Eigenschaften der Bewertung bemerkbar. Auch hier steht oft die Effizienz der Verteilungen im Vordergrund. Doch am wertvollsten für die Entwicklung sind die elementaren kombinatorischen Algorithmen (Protokolle) und deren Analyse.

Informatik
Die gerechte Aufteilung wird als Teilgebiet der "Computational Social Choice", sowie "Multiagent Systems" insbesondere von "Multiagent Ressource Allocation" gesehen. Vom Letzteren unterscheidet sie sich aber in der Konzentration auf die unterschiedlichen Gerechtigkeitskriterien.
Die Grundidee hat viele Parallelen zur Theorie kollektiver Entscheidungen (Social Choice Theory), denn es wird eine Aggregation von Entscheidungen durchgeführt und eine endgültigen Gruppenentscheidung getroffen (hier ist es eine Aufteilung des Kuchens). Dieser Vorgang wird anhand der Präferenzen der Beteiligten durchgeführt. Doch bereits diese Präferenzen haben sehr unterschiedliche Eigenschaften. Bei der gerechten Aufteilung haben die Präferenzen einen Hintergrund und gleichwertvolle Stücke werden gleich bevorzugt, während z.B. bei Wahltheorie die Prärenzordnungen sehr strikt und zufällig sein können. Dennoch werden beide Bereiche zum "Computational Social Choice" zugeordnet, und auf deren Komplexität erforscht. Bei "Multiagent Systems" und vor allem bei "Multiagent Ressource Allocation" geht es um den Entwurf von Allokationsalgorithmen. Doch hier geht es mehr die gemeinsame Lösung von dem Problem, als um die Zufriedenstellung der einzelnen Beteiligten.
Die gerechte Aufteilung spaltet sich in zwei Bereiche, die Teilung von unteilbaren Gütern und Cake-Cutting (Teilung von beliebig teilbaren Gütern). So ähnlich sie auch klingen mögen, sind die verwendeten Methoden dennoch kernunterschiedlich. Während es sich bei den unteilbaren Gütern eher um Optimierungsprobleme handelt, greift Cake-Cutting auf ganz andere mathematische Methoden zu, die in den nachfolgenden Kapitel aufgeführt werden.

[5] vgl. [End09] und [LR09]

3 Grundlagen

Für die gerechte Aufteilung müssen zunächst alle Möglichkeiten definiert werden welches Objekt, mit welchem Ziel, auf welche Art und Weise und zwischen welchen Subjekten aufgeteilt werden kann. Die Definitionen und grundlegende Annahmen wurden aus den Büchern [BT96] und [RW98] entnommen.

3.1 Grundbegriffe des Cake-Cutting

Sei P_n=$\{p_1, ..., p_n\}$ die Menge von n Spieler, die gemeinsam ein Objekt aufteilen möchten. Es wird angenommen, dass jeder von ihnen möglichst viel von diesem Objekt haben möchte.[6]

Der Kuchen

Im folgenden geht es nur um die Aufteilung von einem einzigen, heterogenen, beliebig teilbaren Gut.[7] Zur Veranschaulichung wird ein rechteckiger Kuchen (Stollen) verwendet. [8] Die Division wird durch eine Reihe von parallen Schnitten durchgeführt.[9] Der Ku-

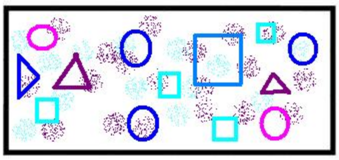

Abbildung 1: Ein rechteckiger Kuchen mit unterschiedlichen Merkmalen vgl.[HS05]. Die einzelnen Fragmente sind unterschiedlich wertvoll für die Spieler.

chen X wird dabei durch das Intervall $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ repräsentiert. Jedes Teilintervall $I' \subseteq I$, oder eine Vereinigung von solchen, wird als Stück bezeichnet. Diese Stücke sind immer disjunkt. Das Stück des Kuchens, welches der Spieler p_i bekommt, wird Portion genannt und als X_i bezeichnet. Jedes Stück hat eine objektive Länge, welche der Summe der Differenzen seiner Grenzen entspricht und eine subjektive Bewertung, die folgend entsteht:

Die Bewertung

Jeder Spieler $p_i \in P_N$ besitzt eine Bewertungsfunktion (Bewertung) $v_i : \{X'|X' \subseteq X\} \mapsto [0, 1]$ des Kuchens X. Sie erfüllt folgende Eigenschaften[10]:

[6] Im Gegensatz dazu werden in der Literatur auch Fälle über Aufteilung von unerwünschten Objekten (Chore Division) behandelt, z.B. zusätzliche Arbeit, wo alle daran interessiert sind möglichst, wenig zu erhalten.

[7] Es existieren auch Forschungen über die Aufteilung von mehreren Gütern (z.B. [CNS10]), die hier aber außer Acht gelassen wird.

[8] Es gibt mehrere Studien von einer Torte (runder Kuchen) nachzulesen in [Jon07]).

[9] Es gibt ebenfalls Aufteilungen mit parallelen und rechtwinkligen Schnitten (z.B. Protokoll von Webb).

[10] vgl. zusätzlich [WS07]

1. Nicht-Negativität[11]: $v_i(C) \geq 0$ für alle $C \subseteq [0,1]$.
2. Normalisierung: $v_i(\emptyset) = 0$ und $v_i([0,1]) = 1$.
3. Monotonität: Wenn $C' \subseteq C$, dann $v_i(C') \leq v_i(C)$.
4. Additivität: $v_i(C \cup C') = v_i(C) + v_i(C')$ für disjunkte $C, C' \subseteq [0,1]$.
5. Teilbarkeit: Für alle $C \subseteq [0,1]$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, existiert ein $B \subseteq C$, so dass $v_i(B) = \alpha \cdot v_i(C)$.
6. v_i ist kontinuierlich: Falls $0 < x < y \leq 1$ mit $v_i([0,x]) = \alpha$ und $v_i([0,y]) = \beta$, dann gilt für jedes $\gamma \in [\alpha, \beta]$ existiert ein $z \in [x,y]$ so dass $v_i([0,z]) = \gamma$.
7. Inhaltslosigkeit von Punkten: $v_i([x,x]) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Bei den Beispielen wird die folgende Darstellung für den Kuchen und deren Bewertung genutzt:

Die **Boxendarstellung**:

Abbildung 2: Eigenschaften: Ein solches Diagramm muss separat für jeden Spieler erstellt werden. Die Anzahl der Kästchen ist bei allen Spielern gleich und diese repräsentieren immer den gleichen Wert des Kuchens. Ab hier wird der Wert des Kuchens pro Kästchen genau 1/12 und er wird linear auf der Fläche des Kästchens verteilt, z.B: 1/2 Kästchen = 1/24 der Kuchens. Die Länge des Kuchens ist bei allen Spielern einheitlich sechs Kästchen. Diese Einschränkungen der Eigenschaften werden gemacht um die Beispiele verständlicher und einfacher zu machen. Der objektive Wert eines Kuchens sieht wie die linke Abbildung aus. Es werden die zwölf Kästchen nach der jeweiligen Bewertung des Spieler verteilt, wie z.B. in der rechten Abbildung. Die straffierte Fläche ist das Stück, welches der jeweilige Spieler erhält und dessen Summe ist der Wert seines Stückes. Die parallelen Schnitte werden wie abgebildet eingezeichnet.

Die unterschiedlichen Arten von Gerechtigkeit

Wie oben bereits definiert wurde, besitzt jeder Spieler eine Bewertungsfunktion. Diese Funktion ist geheim und subjektiv (ein Spieler kennt nur seine Bewertungen, und nur seine Bewertungen haben Einfluss auf sein Wohlbefinden). Nach einer Aufteilung wird die Güte dieser gemessen. Dafür werden Maßstäbe benötigt. Der Wichtigste ist die Gerechtigkeit. Aber was bedeutet überhaupt gerecht? Dies ist eine philosophische oder psychologische Frage und kann nicht so einfach und für das gegebene Ziel zufriedenstellend beantwortet werden.

[11]manchmal auch Positivität: $v_i(C) > 0$ für alle $C \subseteq [0,1], C \neq \emptyset$.

Also werden Kriterien benötigt um die Aufteilungen untereinander vergleichen und bewerten zu können. Alle Kriterien sind als subjektive Einschätzungen von den Spielern und nicht alss objektive Maßstäbe zu verstehen.

Definition 1. ***(Proportionalität oder einfache Gerechtigkeit)***
Eine Aufteilung ist proportional (einfach gerecht), falls $v_i(X_i) \geq 1/n$ *für jeden Spieler* $p_i \in P_N$ *gilt.*

Definition 2. ***(Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist neidfrei, falls $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N$*.*

Definition 3. ***(Starke Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist stark-neidfrei falls $v_i(X_i) > v_i(X_j)$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$*.*

Definition 4. ***(Super Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist super-neidfrei, falls $v_i(X_j) \leq 1/n$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$*.*

Definition 5. ***(Starke Super Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist stark-super-neidfrei, falls $v_i(X_j) < 1/n$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$*.*

Das Problem ist, dass für die stärkeren Einschränkungen nicht immer Aufteilungen existieren, z.B. wenn alle Spieler die gleiche Bewertungsfunktion auf den Kuchen besitzen.

Definition 6. ***(Exaktheit)***[12]
Eine Aufteilung ist exakt, falls $v_i(X_i) = v_j(X_j)$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N$*.*

In wirtschaftlichen Texten werden Aufteilungen, die gleichzeitig exakt und neidfrei, sind oft als besonders gerecht empfunden. Dennoch hat die Exaktheit sogar in Kombination mit der Proportionalität keinen direkten Zusammenhang mit der Neidfreiheit, wie man sich am folgenden Beispiel leicht veranschaulichen kann.

Beispiel 7. *Die Spieler Aleph, Beth und Gimel teilen einen Kuchen. Am Ende bekommt jeder Spieler genau 1/3 des Kuchens (nach seinem Maß). Diese Aufteilung ist exakt und proportional. Doch Aleph ist der Meinung, dasgBeths Stück genau die Hälfte des Kuchens ist und beneidet Beth. Damit ist die Aufteilung nicht neidfrei.*

Zusammenhänge der Gerechtigkeitskriterien:

Lemma 8. *Für alle Aufteilungen gilt:*

1. *Falls eine Aufteilung neidfrei ist, so ist sie auch proportional.*

2. *Für zwei Spieler ist eine Aufteilung proportional genau dann, wenn sie neidfrei ist.*

Beweis.

[12]In der Literatur wird an Stelle von Exaktheit oft der Begriff der Gerechtigkeit verwendet, was in gewissem Sinne den gesamten Konzept der Begriffe widerspricht, da alle diese Kriterien einzeln als unterschiedliche Maßstäbe von gerecht befunden werden.

1. Beweis durch Widerspruch:
   Sei A eine Aufteilung die neidfrei, aber nicht proportional ist. Da die Aufteilung A neidfrei ist, gilt $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$ für jedes Paar von Spielern $p_i, p_j \in P_N$ und somit hat jeder Spieler mind. soviel wie jeder andere. Daraus folgt, dass jeder Spieler mindestens genauso viel wie $(n-1)$ andere hat und somit mindestens $1/n$. Damit ist die Aufteilung A proportional. ↯
   Somit sind alle neidfreien Aufteilungen proportional.

2. "$\Rightarrow$" Für zwei Spieler ist eine Aufteilung proportional, wenn er mind. die Hälfte des Kuchens bekommt, damit kann der andere Spieler höchstens die Hälfte bekommen und wird nicht beneidet.
   "$\Leftarrow$" Die Rückrichtung folgt aus Zusammenhang 1.

□

Definition 9. ***(Effizienz)***
Eine Aufteilung ist effizient (Pareto optimal), falls keine andere Aufteilung existiert, die einem Spieler ein von ihm besser bewertetes Stück einbringt, ohne die Situation eines anderen Spielers zu verschlechtern.

Definition 10. ***(Ehrlichkeit)***[13]
Eine Aufteilung (Prozedur) ist ehrlich, falls es keine Bewertungen gibt, bei der Spieler am Ende durch Unaufrichtigkeit ein wertvolleres Stück bekommen hätten. [14]

Es besteht nur Interesse an Aufteilungen, wo die Ehrlichkeit die beste Strategie für alle Spieler ist und somit allein durch den Algorithmus erzwungen wird. Oft wird dies erreicht, indem der Spieler durch Unaufrichtigkeit Gefahr läuft die Garantie auf seinen gerechten Anteil zu verlieren.

3.2 Grundbegriffe der Komplexitätsanalyse von Protokollen

Komplexitätsklassen[15]

Um Algorithmen anhand ihrer Laufzeiten besser zuordnen und vergleichen zu können wurden die zwei nachfolgenden Funktionenklassen eingeführt.

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} | (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[f(n) \leq c \cdot g(n)]\}$$

Die Funktion $f \in \mathcal{O}(g)$ wächst asymptotisch nicht schneller als g. Es dürfen Konstanten und endlich viele Ausnahmen vernachlässigt werden. Die Funktion g wird als obere Schranke bezeichnet. In dieser Funktionsklasse liegt immer der ungünstigste Fall. Dies ist eine gültige

[13]In den letzten Jahren wurde dieser Aspekt konzentrierter untersucht vgl. [CLPD10]. Es kann als ein einzelnes Kriterium formuliert werden.
[14]"We say that a cake cutting procedure is truthful iff there are no valuations where a player will do better by lying." aus [Wal10].
[15]aus [Rot08]

Eingabe, für dessen Lösung der Algorithmus die längste Zeit benötigt.

$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} | (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[f(n) \geq c \cdot g(n)]\}$$

Die Funktion g wächst asymptotisch nicht schneller als jedes $f \in \Omega(g)$. Die Funktion g wird als untere Schranke bezeichnet. In dieser Funktionsklasse liegt immer der beste Fall. Üblicherweise ist diese Zeitangabe kleiner als das tatsächliche Resultat, aber man kann beweisen, dass ohne diesen Zeitaufwand das Problem nicht lösbar ist.

Klassen von Protokollen

Intuitive Beschreibung: Algorithmus
In der Mathematik, Informatik und verwandten Gebieten, ist ein Algorithmus eine effektive Methode zur Problemlösung, ausgedrückt durch eine endliche Folge von Anweisungen.

Definition 11. ***(Protokoll (Cake-Cutting-Protokoll)[16])***
Ein Protokoll (Cake-Cutting-Protokoll) ist ein Algorithmus mit mehreren Spielern und folgenden Eigenschaften:

- *Es besteht aus Regeln und Strategien.*
  Regeln sind Anweisungen, die gefordert werden ohne die Bewertungen der Spieler zu kennen.
  Strategien sind Empfehlungen, welchen der Spieler folgen muss um garantiert seinen gerechten Anteil zu bekommen.

- *Sofern ein Spieler sich nicht an die Strategie des Protokolls hält, verliert er seinen Anspruch nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein Stück des Kuchens zu bekommen, welches dem geforderten Gerechtigkeitskriterium entspricht. Sein Vorgehen hat aber keine Auswirkungen auf die Anteile der anderen Spieler.*

- *Jeder Spieler muss zu jeder Zeit in der Lage sein, völlig unabhängig von den anderen Spielern den Kuchen zu teilen (einen Schnitt zu machen).*

- *Das Protokoll besitzt keine Informationen über die Bewertungen der Spieler, ausser denen die angefragt wurden in dem jeweiligen oder in den vorherigen Schritten.*[17]

Definition 12. *Ein Cake-Cutting-Protokoll wird proportional, neidfrei, stark neidfrei etc. genannt, falls unabhängig von den Bewertungsfunktionen der Spieler, jede Aufteilung entsprechend proportional, neidfrei etc., unter der Vorraussetzung, dass alle Spieler die vom Protokoll vorgegebenen Regeln und Strategien befolgen, ist.*

Eines der Ziele von Cake-Cutting ist solche Protokolle anzugeben.

Definition 13. ***(endlich (diskret)/kontinuierlich)***
Ein endliches (diskretes) Protokoll liefert eine Lösung nach einer endlichen Anzahl von Entscheidungen (Bewertungen, Markierungen,...), dagegen muss ein Spieler bei einem kontinuierlichen Protokoll unendlich viele Entscheidungen treffen.

[16]Vgl. mit Definition aus [EP84], [RW95] und [WS07] oder [MIBK03].
[17]Diese Eigenschaft ist wichtig für die Komplexitätsanalyse.

Definition 14. ***(endlich beschränkt/endlich unbeschränkt))***
Ein endlich beschränktes Protokoll hat eine obere Grenze von Schritten, welche im ungünstigsten Fall betrachtet wird. Die gesamte Anzahl von Entscheidungen hängt, wenn überhaupt, dann nur von der Anzahl der beteiligten Personen ab. Ein endlich unbeschränktes Protokoll hat hingegen eine nicht im Voraus abschätzbare Anzahl.

Die begehrtesten Protokolle sind endlich beschränkt, da sie am einfachsten in der Realität umsetzbar sind. Aber es gibt eine Art von kontinuierlichen Protokollen, an denen ebenfalls Interesse besteht.

Definition 15. ***(Moving-Knife-Protokoll)***
Ein Schiedsrichter, welcher unparteisch gegenüber den Spielern ist und unbeteiligt an der Verteilung der Stücke, schwenkt ein Messer kontinuierlich von links nach rechts und macht parallele Schnitte sofern ein Spieler "Halt!" ruft. Bei manchen MKP wird der Schiedsrichter ausgelassen und nur ein Messer oder Schwert geschwungen.

Bemerkung: In der Literatur (z.B.: [End09]) werden manchmal kontinuierliche Protokolle nicht als Protokolle bezeichnet sondern zu neuen Klassen zusammengefasst, die von der Anzahl der Messer abhängen.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Cake-Cutting ist, dass nur komplette Aufteilungen des Kuchens,also wo jedes Stück einem Spieler zugeordnet wird, betrachtet werden.

4 Neidfreie Cake-Cutting-Protokolle

Bekannte Ergebnisse:
Die neidfreie Aufteilung wurde für bis zu vier Spieler im kontinuierlichen und bis zu drei Spieler im endlich beschränkten Fall gelöst. Es gibt ein endliches Protokoll für beliebig viele Spieler. Dieser unterscheidet sich stark von den bisherigen und ist nicht endlich beschränkt, vgl. [BTZ97]. Es gibt mehrere fast neidfreie Lösungen, siehe dazu [Su99] und [Zen00].
Es folgen wichtige neidfreie Cake-Cutting-Protokolle. Diese sind mit Ausnahme von AMKP für n Spieler und dem exakten Protokoll aus den Büchern [BT96] und [RW98] und der Vorlesung [Rot10] entnommen. Bei den Protokollen wird erläutert, wie die Neidfreiheit erreicht wird und begründet, woran eine Verallgemeinerung scheitert. Außerdem wird nach Möglichkeit an einem Beispiel die Funktionsweise gezeigt. Es werden nur Protokolle für einen rechteckigen Kuchen mit parallelen Schnitten betrachtet.

4.1 Zwei Spieler

Es folgt das intuitivste und bekannteste endlich beschränkte CCP, das eine neidfreie Aufteilung liefert. Es werden ein Schnitt und eine Bewertung gemacht.

	Cut & Choose-Protokoll
· **Schritt 1**	Spieler p_1 schneidet den Kuchen in zwei gleichwertige Teile (nach seinem Maß).
· **Schritt 2**	Spieler p_2 sucht sich ein Stück aus, das andere Stück bekommt Spieler p_1.

Die Neidfreiheit wird elementar erreicht, da der erste Spieler zufrieden mit jedem der zwei Stücke ist, und der andere Spieler das Privileg hat zu wählen. Eine Verallgemeinerung ist ausgeschlossen, da das Verfahren nur dadurch funktioniert, dass der jeweils andere Spieler den Rest des Kuchens von dem jeweiligen Spieler bekommt.
Bemerkung: Der erste Spieler kann nie mehr als die Hälfte des Kuchens bekommen.

Beispiel 16.

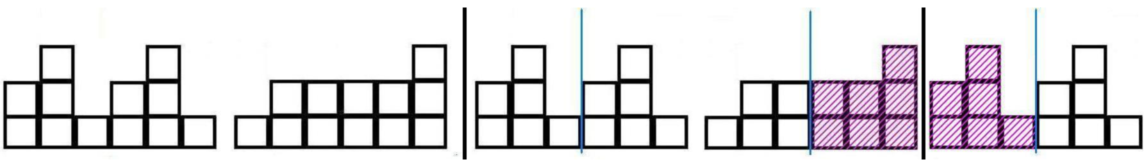

Abbildung 3: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1 (links) und p_2 (rechts); Spieler p_1 halbiert den Kuchen(n.s.M.) (links) und Spieler p_2 wählt das wertvollere Stück (rechts); Spieler p_1 bekommt das übriggebliebene Stück

Es folgt ein kontinuierlich beschränktes, exaktes und neidfreies CCP. Es werden höchstens zwei Schnitte gemacht.

	Austin Moving-Knife-Protokoll
· **Schritt 1**	Ein Messer wird kontinuierlich von links nach rechts über den Kuchen geschwenkt, bis ein Spieler (sei dies Spieler p_1) :"Halt!" ruft, weil das Messer den Kuchen dort halbiert (nach seinem Maß).
· **Schritt 2**	Dieser Spieler platziert ein zweites Messer über dem linken Rand des Kuchens und schwenkt beide Messer parallel und kontinuierlich von links nach rechts so über den Kuchen, dass zwischen ihnen (nach seinem Maß) stets der Wert des Kuchens 1/2 ist.
· **Schritt 3**	Der andere Spieler ruft:"Halt!", sobald der Wert dieses Stückes 1/2 erreicht.

Dieses Protokoll ist neidfrei, da jeder der Spieler genau die Hälfte des Kuchens bekommt (nach seinem Maß).
Die Idee: Wenn der erste Spieler "Halt!" ruft, ist das Stück vom linken Rand bis zum Messer für den zweiten Spieler weniger Wert als die Hälfte des Kuchens (sonst würde er auch: "Halt!" rufen und damit wäre das gewünschte Ergebnis bereits erzielt). Daraus folgt, dass das Stück von dem Messer bis zu dem rechten Rand für den zweiten Spieler mehr Wert hat als die Hälfte des Kuchens. Da der erste Spieler nun aber mit zwei Messern aus dem linken Stück in das rechte Stück übergeht, ist gesichert, dass es einen Zeitpunkt gibt, wo das Stück zwischen den beiden Messern genau die Hälfte des Kuchens für den zweiten Spieler ist.
Bis jetzt konnte kein Protokoll aufgestellt werden, welches für $n > 2$ Spieler eine Aufteilung in zwei gleichwertvolle Stücke liefert.

Beispiel 17.

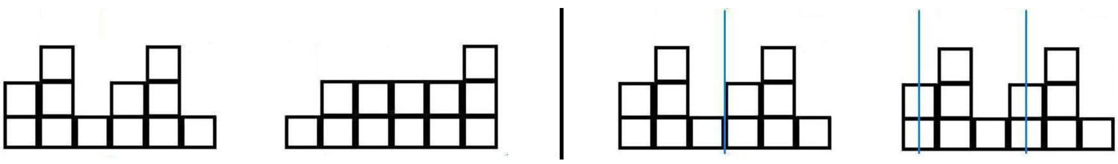

Abbildung 4: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1 (links) und p_2 (rechts); Spieler p_1 ruft:"Halt!" wenn die Hälfte erreicht wird (links), und fügt ein zweites Messer hinzu und schwenkt diese über den Kuchen (rechts)

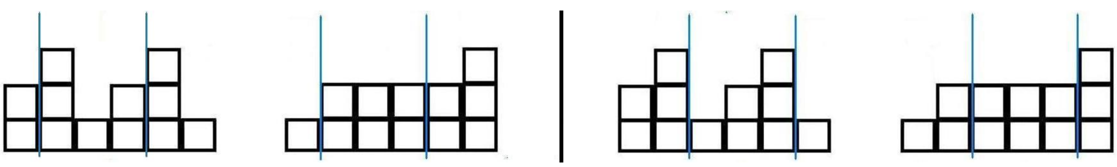

Abbildung 5: Spieler p_2 ruft: "Halt!". Beide Stücke haben zwischen den Messern den Wert 1/2; Die Situation in Schritt 3 ist nicht eindeutig! Der erste Zustand in dem der Wert des Kuchens für beide Spieler zwischen den Messern 1/2 ist, gilt als Ergebnis der Aufteilung.

Diese Prozedur funktioniert auch für jedes beliebige $1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ nach der Aussage von Austin aus [Aus82], muss aber im ungünstigsten Fall $(n-1)$- mal durchgeführt werden. Denn es entsteht nach jeder Durchführung ein Reststück, welches zur nächsten Durchführung übertragen werden muss. Es folgt die Bemerkung von Austin als ausgeschriebenes Protokoll:

	Austin Moving-Knife-Protokoll für n gleichwertige Stücke
· **Schritt 1**	Der Spieler p_1 schneidet den Kuchen in n gleichwertige Stücke (n.s.M.).
· **Schritt 2**	Der Spieler p_2 wählt zwei Stücke $\{X_1, X_2\}$ davon aus mit der Eigenschaft: $v_2(X_1) \leq 1/n, v_2(X_2) \geq 1/n$. Alle Stücke mit $v_2(X_i) = 1/n$ für $3 \leq i \leq n$ werden als fertig markiert und stehen nicht mehr zur Wahl.
· **Schritt 3**	Diese zwei Stücke $\{X_1, X_2\}$ werden zu einem verschmolzen und darauf wird das Austin Moving-Knife-Protokoll angewendet. Das resultierende Stück wird ebenfalls als fertig markiert. Der Rest wird zu einem Stück verschmolzenund zu den übrigen unfertigen Stücken zugeordnet, sofern einer der beiden Spieler es nicht als $1/n$ bewertet.
· **Schritt 4**	Schritt 2 und Schritt 3 werden wiederholt, bis alle Stücke markiert sind.

Beispiel 18.

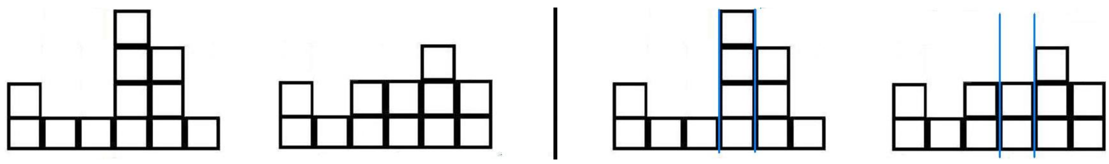

Abbildung 6: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1 (links) und p_2 (rechts); Spieler p_1 schneidet den Kuchen in 3 gleichwertige Stücke (n.s.M)(links)

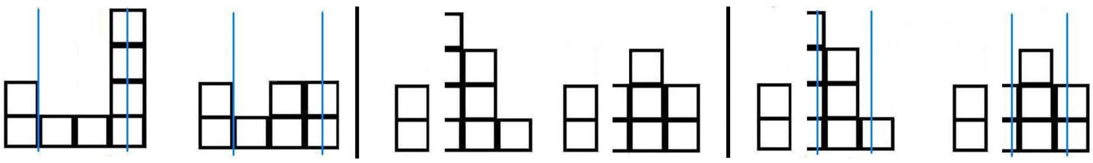

Abbildung 7: Spieler p_2 sucht sich 2 Stücke aus mit der geforderten Eigenschaft aus Schritt 2. Beide Spieler führen AMKP aus. Dadurch entsteht ein Stück, welches beide Spieler gleich bewerten (zwischen den Schnitten); Das andere Stück ist nicht gleich bewertet worden, also wird es zusammengesetzt und als unfertiges Stück markiert. Es wird das nächste Stück dazu genommen (mitte); AMKP wird ausgeführt (rechts)

4.2 Drei Spieler

Es folgt ein endlich beschränktes, neidfreies CCP. Es werden höchstens fünf Schnitte gebraucht. Dies ist das einzige bekannte endlich beschränkte neidfreie Protokoll für $n \geq 3$.

	Selfridge-Conway-Protokoll
· **Schritt 1**	Der erste Spieler p_1 schneidet den Kuchen X in drei gleiche Stücke (nach seinem Maß). Der zweite Spieler p_2 sortiert $\{X_1, X_2, X_3\}$ mit: $v_1(X_1) = v_1(X_2) = v_1(X_3) = 1/3$ und $v_2(X_1) \geq v_2(X_2) \geq v_2(X_3)$.
· **Schritt 2**	Ist $v_2(X_1) > v_2(X_2)$, so schneidet p_2 von X_1 etwas ab, so dass er $X_1' = X_1 - R$ erhält mit $v_2(X_1') = v_2(X_2)$. Ist $v_2(X_1) = v_2(X_2)$, so sei $X_1' = X_1$.
· **Schritt 3**	Aus $\{X_1', X_2, X_3\}$ wählen p_3, p_2, p_1 in dieser Reihenfolge je ein Stück. Wenn p_3 X_1' nicht nimmt, muss p_2 es tun.
· **Schritt 4** (nur falls $R \neq \emptyset$)	Entweder p_2 oder p_3 hat X_1'. Nenne diesen Spieler P, den anderen Q. Q schneidet den Rest R in drei gleiche Stücke (nach seinem Maß): $v_Q(R_1) = v_Q(R_2) = v_Q(R_3) = 1/3 \cdot R$ P, p_1, Q wählen in dieser Reihenfolge je ein Stück.

Um zu zeigen, dass die erste Aufteilung von $X - R$ neidfrei ist, werden alle Spieler und ihre Portionen einzeln betrachtet. Der dritte Spieler hat die freie Wahl sich das wertvollste Stück zu nehmen (n.s.M.) und kann somit keinen beneiden, für den zweiten Spieler existieren zwei Stücke und da er als zweiter wählen darf, ist eines davon immer vorhanden. Der erste Spieler bekommt ein unbeschnittenes Stück und ist somit der Meinung, dass die anderen entweder gleichgrosse oder kleinere Stücke als er haben. Danach wird, falls nötig, der Rest R verteilt, hier ist der erste Spieler der Meinung, dass der gesamte Rest eigentlich dem Spieler P gehört und hat kein Problem diesen als ersten wählen zu lassen. Damit beneidet P niemanden, denn er durfte sich (nach seinem Maß) das grösste Stück aussuchen. Der Spieler p_1 wählt nun sein Stück und kann den Spieler Q nicht beneiden. Weiterhin ist Spieler Q der Meinung, dass alle Reststücke waren gleich gross, und damit ist R neidfrei aufgeteilt. Da auch $X - R$ neidfrei aufgeteilt wurde folgt mit der Additivität von Bewertungen, dass die gesamte Aufteilung neidfrei ist.
Die Verallgemeinerung scheitert vor allem an der zweiten Aufteilung. Der erste Teil lässt sich als das unendliche Protokoll in Kapitel 4.4 formulieren. Aber bereits hier entsteht das Problem mit den Resten. Bei mehr als drei Spieler braucht der zweite Spieler mindestens drei gleichwertige Stücke und müsste damit eventuell von zwei Stücke etwas abschneiden. Damit ergibt sich mehr als ein Rest und eine gesonderte Behandlung für jeden von diesen Resten wird benötigt. Bei der Restaufteilung mit mehr als drei Spieler entsteht auch das Problem, dass es zwar immer einen Spieler gibt, welcher der Meinung ist, dass der Rest einem bestimmten Spieler gehört, aber es gibt mehr als einen Spieler der diese Meinung nicht teilen muss. Eine kontinuierliche Verallgemeinerung auf vier Spieler ist das Brams,Taylor & Zwicker Moving-Knife-Protokoll.

Beispiel 19.

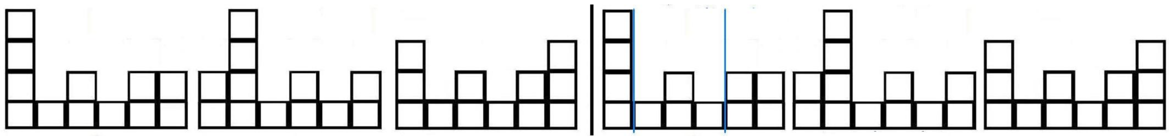

Abbildung 8: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1 (links), p_2 (mitte) und p_3 (rechts); Der Spieler p_3 teilt den Kuchen in 3 gleichwertige Stücke(n.s.M.)

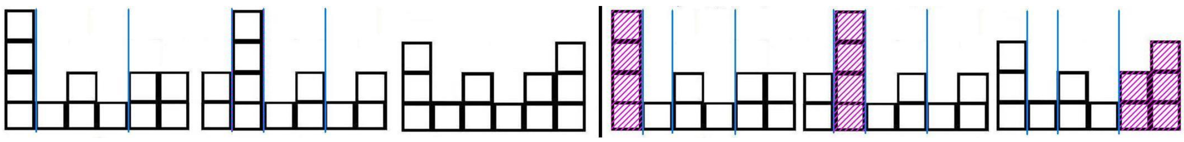

Abbildung 9: Spieler p_2 schneidet etwas von seinem wertvollsten Stück ab, damit zwei gleichwertvolle Stücke entstehen; Spieler p_3, p_2 und p_1 wählen in dieser Reihenfolge je ein Stück

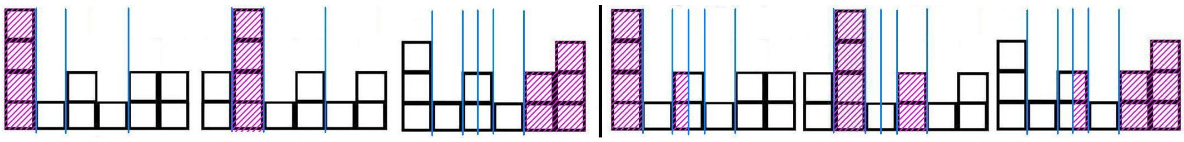

Abbildung 10: Spieler p_3 unterteilt den Rest in 3 gleichwertige Stücke (n.s.M.); Spieler p_2, p_1 und p_3 wählen in dieser Reihenfolge je ein Reststück.

Es folgt ein kontinuierliches, neidfreies CCP. Es werden zwei Schnitte gemacht.

	Stromquist Moving-Knife-Protokoll
· **Schritt 1**	Ein Schwert wird kontinuierlich von links nach rechts über den Kuchen geschwenkt und teilt ihn (hypothetisch) in ein linkes Stück X_L und ein rechtes Stück X_R: $X = X_L \cup X_R$. Jeder der drei Spieler hält sein Messer parallel zum Schwert und bewegt es (während das Schwert geschwenkt wird) so, dass es das rechte Stück nach seinem Maß stets genau halbiert. Dabei teilt das mittlere der drei Messer X_R in Stücke:$X_R = X_{RL} \cup X_{RR}$
· **Schritt 2**	Der erste Spieler, der glaubt, X_L sei mindestens so gut wie sowohl X_{RL} als auch X_{RR}, ruft: "Halt!" und bekommt X_L. Das mittlere der drei Messer schneidet X_R in zwei Stücke: $X_R = X_{RL} \cup X_{RR}$. Der übriggebliebene Spieler, der seine Markierung am nähesten an X_L hatte, bekommt X_{RL}. Der letzte Spieler bekommt X_{RR}.

Um hier die Neidfreiheit nachzuvollziehen, betrachtet man jeden Spieler einzeln. Der Spieler, der "Halt!" ruft, ist der Meinung, dass das linke Stück mehr oder gleich viel wert ist als jedes der beiden Stücke rechts von dem Schwert, und wird somit auch keinen beneiden. Die übrigen zwei Spieler teilen seine Meinung nicht, sonst hätten sie auch "Halt!" gerufen. Nun müssen die Stücke rechts neidfrei verteilt werden. Es gibt drei Markierungen, als Schnitt wird die mittlere genommen. Mindestens einem der übrigen Spieler gehört eine andere Markierung, damit kriegt er ein Stück, das sogar noch mehr wert ist als die Hälfte von dem rechten Stück (n.s.M.) und beneidet den anderen Spieler nicht. Für den letzten Spieler gilt entweder exakt das selbe oder er ist der Meinung genauso viel wie der vorherige Spieler bekommen zu haben (sofern seine Markierung die mittlere war). Damit ist die gesamte Aufteilung neidfrei.
Die Prozedur lässt sich leider nicht auf $n \geq 4$ übertragen. Entweder wird eine ungerade Anzahl von Spielern benötigt, um links ein Schwert zu haben und das rechte Stück in die entsprechenden Teile zu markieren und eine mittlere Markierung für den Schnitt zu besitzen, oder es werden mehr als ein Schwert verlangt (von links und rechts). Ein solches Konstrukt würde den kontinuirlichen Ablauf des Protokolls stören. Für $n = 5$ tritt ein Problem in

der Aufteilung der rechten Stücke auf, da man wieder hier alle Bewertungen von Allen bis auf den Spieler, der das linke Stück bekommen hat, beachten muss und man nicht mehr bestimmen kann, welcher Schnitt der mittlere und somit der entscheidende ist.

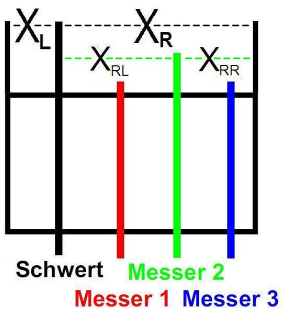

Abbildung 11: Die Vorgehensweise bei Stromquist Moving-Knife-Protokoll. Die Markierung von Messer 2 wird zum Schnitt.

4.3 Vier Spieler

Es folgt ein kontinuierliches, neidfreies CCP. Es werden höchstens elf Schnitte nach [BB04] gebraucht. Dies ist das einzige bekannte, beschränkte, neidfreie Protokoll für $n \geq 4$.

	Brams,Taylor & Zwicker Moving-Knife-Protokoll
· **Schritt 1**	Der erste Spieler p_1 und der zweite Spieler p_2 erzeugen mit Austin Moving-Knife-Protokoll für beide Spieler vier gleichwertige Stücke. Der Spieler p_3 sortiert diese mit: $v_1(X_1) = v_1(X_2) = v_1(X_3) = v_1(X_4) = 1/4$. $v_2(X_1) = v_2(X_2) = v_2(X_3) = v_2(X_4) = 1/4$. $v_3(X_1) \geq v_3(X_2) \geq v_3(X_3) \geq v_3(X_4)$.
· **Schritt 2**	Ist $v_3(X_1) > v_3(X_2)$, so schneidet p_3 von X_1 etwas ab, so dass er $X_1' = X_1 - R$ erhält mit $v_3(X_1') = v_3(X_2)$. Ist $v_3(X_1) = v_3(X_2)$, so sei $X_1' = X_1$.
· **Schritt 3**	Die Spieler p_4, p_3, p_2, p_1 wählen (in dieser Reihenfolge) je ein Stück aus $\{X_1', X_2, X_3, X_4\}$. Falls p_4 X_1' nicht nimmt, muss p_3 es tun.
· **Schritt 4** (nur falls $R \neq \emptyset$)	Entweder p_4 oder p_3 hat X_1'. Nenne diesen Spieler P, den anderen Q. Q und p_2 schneiden den Rest R mit Austin Moving-Knife-Protokoll in vier gleichwertige Stücke: $v_Q(R_1) = v_Q(R_2) = v_Q(R_3) = v_Q(R_4) = 1/4 \cdot v_Q(R)$. $v_2(R_1) = v_2(R_2) = v_2(R_3) = v_2(R_4) = 1/4 \cdot v_2(R)$. Die Spieler P, p_1, Q, p_2 wählen (in dieser Reihenfolge) je ein Stück.

Die Idee hier ist ähnlich wie in dem Selfridge-Conway-Protokoll. Es werden in den nötigen Schritten immer zwei Spieler zusammengefasst um die Vorteile des Protokolls auszunutzen. Die erste Aufteilung von $X - R$ ist neidfrei, da der vierte Spieler die freie Wahl hat und somit keinen beneiden kann, für den dritten Spieler existieren zwei Stücke und da er als zweiter wählen darf, ist eines davon immer vorhanden. Der erste Spieler und der zweite

Spieler bekommen ein unbeschnittenes Stück und jeder von ihnen ist somit der Meinung, dass die anderen entweder gleichgrosse oder kleinere Stücke als er haben. Dannach wird, falls nötig, der Rest R verteilt, hier ist der erste Spieler p_1 der Meinung, dass der gesamte Rest eigentlich dem Spieler P gehört und hat kein Problem diesen als ersten wählen zu lassen. P beneidet keinen, denn er durfte sich (nach seinem Maß) das grösste Stück aussuchen. Der Spieler p_1 wählt nun sein Stück und kann den Spieler Q und p_2 nicht beneiden. Und die Spieler Q und p_2 sind der Meinung alle Reststücke gleich gross waren und wählen als letzte. Damit ist R neidfrei aufgeteilt und da $X - R$ neidfrei aufgeteilt wurde folgt mit der Additivität von Bewertungen, dass die gesamte Aufteilung neidfrei ist.
Das Protokoll lässt sich nicht diskretisieren, da sich AMKP nicht diskretisieren lässt und es lässt sich nicht verallgemeinern bevor eine Möglichkeit gefunden wurde AMKP für 3 Spieler anzuwenden.

Beispiel 20.

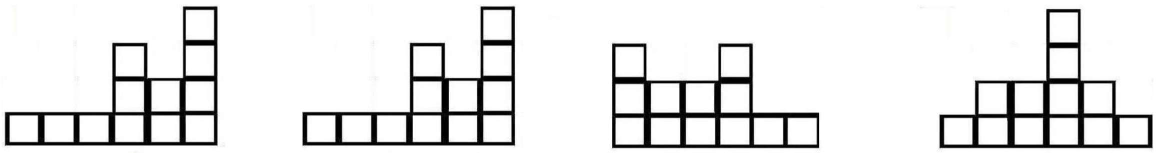

Abbildung 12: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1, p_2, p_3 und p_4 (von links nach rechts)

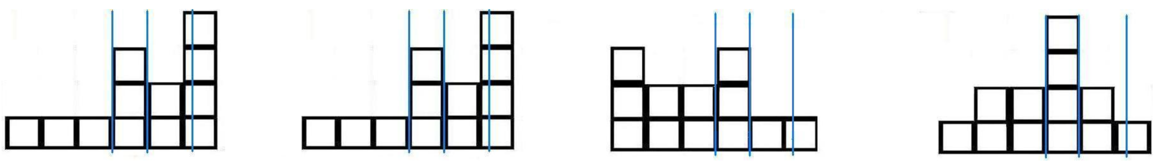

Abbildung 13: Die Spieler p_1 und p_2 teilen zusammen den Kuchen in vier gleichwertige Stücke auf.

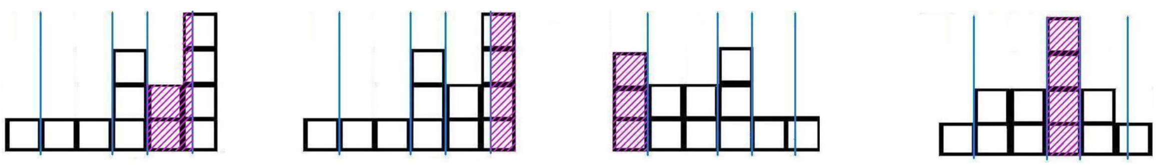

Abbildung 14: Der Spieler p_3 schneidet den Rest von dem wertvollsten Stück ab (n.s.M.) und die Spieler p_4, p_3, p_2, p_1 wählen (in dieser Reihenfolge) je ein Stück aus.

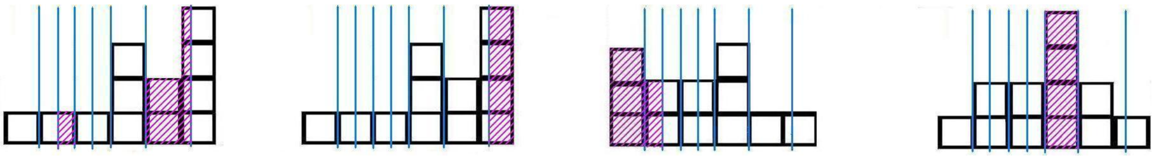

Abbildung 15: Es teilen p_2 und p_4 zusammen den Rest in vier gleichwertige Stücke auf und die Spieler p_3 und p_1 wählen (in dieser Reihenfolge) je ein Reststück aus.

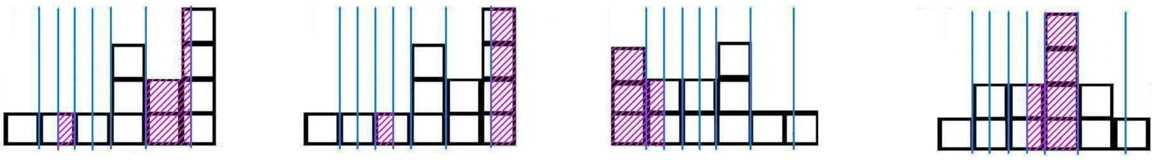

Abbildung 16: Die Spieler p_2 und p_4 nehmen je ein Reststück.

4.4 n Spieler

Es existiert ein endlich unbegrenztes, neidfreies Protokoll in [BTZ97] für eine beliebige Anzahl von Spielern.
Es folgt ein unendliches neidfreies Protokoll für eine beliebige Anzahl von Spielern. Es wird hier für $n = 4$ aufgeführt.

	Ein unendliches Protokoll
· **Schritt 1**	Der erste Spieler p_1 schneidet den Kuchen X in fünf gleiche Stücke (nach seinem Maß). Der zweite Spieler p_2 sortiert diese als X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 mit: $v_1(X_1) = v_1(X_2) = v_1(X_3) = v_1(X_4) = v_1(X_5) = 1/5$ $v_2(X_1) \geq v_2(X_2) \geq v_2(X_3) \geq v_2(X_4) \geq v_2(X_5)$
· **Schritt 2**	Ist $v_2(X_1) > v_2(X_3)$ oder $v_2(X_2) > v_2(X_3)$, so schneidet p_2 ggf. von X_1 und X_2 etwas ab, so dass er $X_1' = X_1 - R_1$ und $X_2' = X_2 - R_2$ erhält mit $v_2(X_1') = v_2(X_2') = v_2(X_3)$. Ist $v_2(X_1) = v_2(X_3)$ oder $v_2(X_2) = v_2(X_3)$, so sei $X_1' = X_1$ und $X_2' = X_2$.
· **Schritt 3**	Der dritte Spieler p_3 sortiert $\{X_1', X_2', X_3, X_4, X_5\}$ als Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 mit: $v_3(Y_1) \geq v_3(Y_2) \geq v_3(Y_3) \geq v_3(Y_4) \geq v_3(Y_5)$
· **Schritt 4**	Ist $v_3(Y_1) > v_3(Y_2)$, so schneidet p_3 von Y_1 etwas ab, so dass er $Y_1' = Y_1 - R_3$ erhält mit $v_3(X_Y') = v_3(Y_2)$. Ist $v_3(Y_1) = v_3(Y_2)$, so sei $Y_1' = Y_1$.
· **Schritt 5**	Aus $\{Y_1', Y_2, Y_3, Y_4, Y_5\}$ wählen p_4, p_3, p_2, p_1 in dieser Reihenfolge je ein Stück. Falls solche Stücke noch zur Wahl stehen, muss jeder Spieler eines von den Stücken nehmen, die er selber geschnitten hat.
· **Schritt 6**	Die Reste und das übriggebliebene Stück werden verschmolzen und das Protokoll kann beliebig oft wiederholt werden.

Das folgende Protokoll lässt sich verallgemeinern, indem die Anzahl der Stücke in welche der erste Spieler in Schritt 1 den Kuchen teilt immer um zwei grösser ist als die Summe der Schnitte ab Schritt 2 und bis zu dem Analogon von Schritt 5 (üblicherweise von Schritt 2 bis Schritt (2·n-3)). Es muss davon ausgegangen werden, dass alle Spieler die Möglichkeit

haben müssen unterschiedliche Stücke beschneiden zu können. Somit wird einkalkuliert, dass der letzte Spieler p_n ein unbeschnittenes Stück nehmen kann und für den Spieler p_1 ein unbeschnittenes Stück übrig bleiben muss. Der i-te Spieler mit $2 \leq i \leq (n-1)$ darf immer $n-i$ Stücke beschneiden.
Bemerkung: Es bleibt nach jedem Schritt ein Rest übrig.

Beispiel 21.

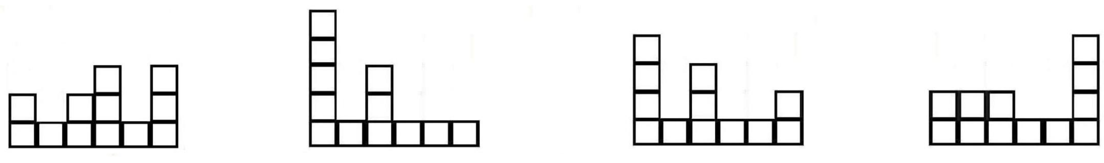

Abbildung 17: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1, p_2, p_3 und p_4 (v.l.n.r.)

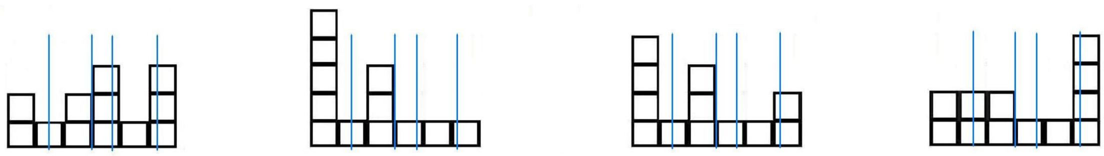

Abbildung 18: Der Spieler p_1 viertelt den Kuchen (n.s.M.).

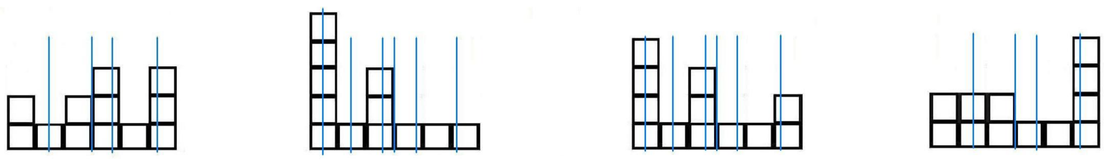

Abbildung 19: Der Spieler p_2 schneidet je einen Rest von seinen zwei wertvollsten Stücken. Der Spieler p_3 muss damit kein Stück mehr beschneiden.

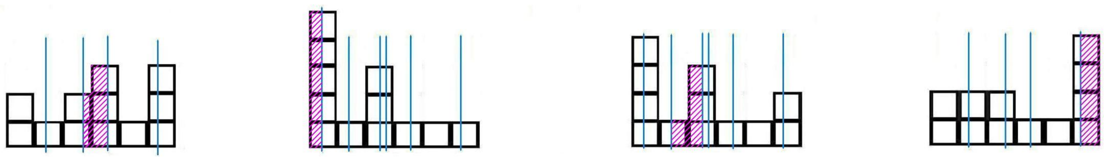

Abbildung 20: Die Spieler p_4, p_3, p_2, p_1 wählen (in dieser Reihenfolge) je ein Stück aus.

Wie bereits gesehen, gibt es auch Protokolle die keine komplette Aufteilung liefern, aber in der Teilaufteilung neidfrei sind. So könnte man solche Teilaufteilungen untersuchen und versuchen zu vereinen. Durch die Additivität von Bewertungen bleiben solche Verfahren neidfrei. Dabei kann man auch von einem vorgegebenen Zustand ausgehen und den Kuchen bis zum Ende aufteilen. So gibt es eine neidfreie Aufteilung für fünf Spieler, wenn man aus einem neidfreien Zustand ausgeht, der eine bestimmte Eigenschaft erfüllt. Das genaue Vorgehen wird in [SW09] geschildert.

Es folgt ein kontinuierliches, exaktes Protokoll aus [Aus82] für eine beliebige Anzahl von Spielern. Austin selbst hat es am Beispiel für $n = 3$ ausformuliert.

	Austin exaktes Protokoll
· **Runde 1**	Der Spieler p_1 und Spieler p_2 benutzen AMKP und bekommen: $v_1(X_1) = v_1(X_2) = 1/2$ und $v_2(X_1) = v_2(X_2) = 1/2$.
· **Runde 2**	Der Spieler p_1 und Spieler p_3 benutzen AMKP3 und bekommen ein Stück mit der Eigenschaft: $v_1(X_{11}) = 1/3 \cdot v_1(X_1) = v_3(X_{11}) = 1/3 \cdot v_3(X_1)$. Der Spieler p_2 und Spieler p_3 benutzen AMKP3 und bekommen: $v_2(X_{21}) = 1/3 \cdot v_2(X_2) = v_3(X_{21}) = 1/3 \cdot v_3(X_2)$. Dannach bekommt der Spieler p_3 jeweils die Stücke von den Aufteilungen und diese werden zu X_3 verschmolzen. Die übrigen zwei Stücke werden wieder als X_1 und X_2 bezeichnet.
· **Runde** $\cdots$	$\cdots$
· **Runde** $n-1$	Der Spieler p_1 und Spieler p_n benutzen AMKPn und bekommen: $v_1(X_{11}) = 1/n \cdot v_1(X_1) = v_n(X_{11}) = 1/n \cdot v_n(X_1)$. Der Spieler p_2 und Spieler p_n benutzen AMKP3 und bekommen: $v_2(X_{21}) = 1/n \cdot v_2(X_2) = v_n(X_{21}) = 1/n \cdot v_n(X_2)$. $\cdots$ Der Spieler p_{n-1} und Spieler p_n benutzen AMKPn und bekommen: $v_{n-1}(X_{(n-1)1}) = 1/n \cdot v_{n-1}(X_{n-1}) = v_n(X_{(n-1)1}) = 1/n \cdot v_n(X_{n-1})$. Der Spieler p_n bekommt jeweils die Stücke von den Aufteilungen.

Das Protokoll ist exakt, denn der n-te Spieler bekommt

$$1/n \cdot v_n(X_1) + 1/n \cdot v_n(X_2) + \cdots + 1/n \cdot v_n(X_{n-1}) = 1/n \cdot (v_n(X_1) + v_n(X_2) + \cdots + \cdot v_n(X_{n-1}))$$

$$=^{Additivität} 1/n \cdot v_n(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) = 1/n \cdot 1 = 1/n$$

und jeder i-te Spieler mit $1 \leq i \leq (n-1)$ behält den $(n-1)/n$ Anteil von seinem Stück mit dem jeweiligen Wert $1/(n-1)$. Also

$$(n-1) \cdot 1/n \cdot 1/(n-1) = 1/n$$

.
Dieses Protokoll ist nicht neidfrei, da aus der Exaktheit keine Neidfreiheit folgt. Durch eine einfache Modifikation kann dieses Protokoll für $n \leq 4$ neidfrei gemacht werden. Das Vorgehen bleibt gleich, bis auf die Tatsache, dass sich der Spieler aus jeder Ausführung von AMKP,

wo er nicht beteiligt war, das wertvollste Stück nehmen muss. Bei Runde 1 wäre dies Cut & Choose. Bei Runde 2 muss Spieler p_2 ein Stück von Spieler p_1 und Spieler p_1 ein Stück von Spieler p_2 nehmen. Bei Runde 3 könnten drei Reste entstehen, welche aber nach dem Prinzip vom Brams, Taylor & Zwicker-Protokoll neidfrei aufgeteilt werden könnten.
Bei Runde 4 und fünf Spieler entsteht wieder das bekannte Problem. Hier könnte aber eine Lösung möglich sein, in dem man die Aufteilung in zwei Schritte spaltet, und im ersten die Stücke unter den Spielern die bereits ein Stück haben aufteilt, und in der zweiten den neu dazukommenden Spieler p_5 beachtet. Das AMKP führen nun die Spieler mit Stücken untereinander aus. Dieses Protokoll könnte eine kontinuierliche Verallgemeinerung auf n Spieler der neidfreien Protokolle liefern.

5 Komplexität von Protokollen

5.1 Anfragemodell nach J. Robertson und W. Webb

Erinerung:
Ein Protokoll hat am Anfang keine Informationen über die Bewertungen der Spieler, bis auf die Normalisierung. Der Kuchen X wird durch das Intervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ repräsentiert. Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ bezeichnet man als einen α-Punkt vom Spieler p_i für $p_i \in P_N$ die kleinste Zahl x mit der Eigenschaft $v_i([0,x]) = \alpha$ (aus den Eigenschaften der Bewertung folgt $v_i([x,1]) = 1 - \alpha$).

Definition 22 (Anfragen im Robertson-Webb Modell)**.** [18]

- *Schnitt($p_i; \alpha$): Der Spieler p_i macht einen Schnitt in seinem α-Punkt. Der Wert x wird an das Protokoll zurückgegeben.*

- *Bewertung($p_i; x$): Der Spieler p_i bewertet den Schnitt x (x ist dabei ein Schnitt, welcher zuvor vom Protokoll ausgeführt wurde). Dieser Wert $v_i(x)$ wird an das Protokoll zurückgegeben.*

- *Zuordnung($p_i; x_i, x_j$): Dem Spieler p_i wird das Intervall $[x_i, x_j]$ ($x_i \leq x_j$ sind zwei zuvor ausgeführte Schnitte vom Protokoll oder 0 oder 1) zugeordnet. Alle solche Intervalle sind disjunkt.*

Die Komplexität eines Protokolls ist die Summe der Anzahlen der Schnitte und Bewertungen im ungünstigsten Fall.

[18] vgl. [WS03]

5.2 Resultat von M. Magdon-Ismail, C. Busch und M. S. Krishnamoorthy

Es wurden zwei Theoreme über die unteren Schranken von starken und super-neidfreien Cake-Cutting-Protokolle in [MIBK05] bewiesen.

Theorem 23. *(Untere Schranke von starken neidfreien Protokollen)*
Es gibt Bewertungsfunktionen, für welche ein starkes neidfreies Cake-Cutting-Protokoll die Komplexität $\Omega(0.086 \cdot n^2)$ *besitzt.*

Theorem 24. *(Untere Schranke von super-neidfreien Protokollen)*
Es gibt Bewertungsfunktionen für welche ein super-neidfreies Cake-Cutting-Protokoll die Komplexität $\Omega(0.25 \cdot n^2)$ *besitzt.*

Das Resultat zeigt bereits einen Unterschied zu den proportionalen Protokollen ($\mathcal{O}(n\log n)$ aus [EP84]), ist aber leider sehr schwach, da starke und super-neidfreie Cake-Cutting-Protokolle sehr starke Einschränkungen sind, und nicht immer existieren. Dagegen lieferte das folgende Theorem die lang vermutete endgültige Separation von der Proportionalität.

5.3 Resultat von A. Procaccia

In der Arbeit [Pro09] wird ein neues kompliziertes Problem formuliert und gezeigt, dass eine Aufteilung nur dann neidfrei ist, wenn das Problem eine Lösung hat. Eine Lösung dafür zu finden liegt in $\Omega(n^2)$ und daraus folgt:

Theorem 25.
Die Anfragekomplexität (im Robertson-Webb-Modell) für eine neidfreie Aufteilung beträgt $\Omega(n^2)$.

Die Idee:
Die Aufgabe von jedem Spieler ist es einzeln und unabhängig von den anderen Spielern den Kuchen in Intervalle I zu unterteilen. Für jedes $I = [x_1, x_2]$ mit $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ist die Länge $|I| = x_2 - x_1$. Solche Intervalle werden in Π_k^i mit $i \in \mathbb{N}$ für jeweils den p_i-ten Spieler und $k \in \mathbb{N}$, für die k-te Etappe der Gliederung, dargestellt. Das Einteilen in Intervalle ist gleich dem Anfragemodell von Robertson und Webb. Es gibt auch gleichzeitige Bewertungen von zwei Schnitten: Bewertung$(p_i; x_1, x_2)$. Dabei werden die Werte $v_i(0, x_1), v_i(x_1, x_2)$ und $v_i(x_2, 1)$ an das Protokoll zurückgegeben.
Wenn zwei Eigenschaften erfüllt werden, erfolgt eine Aufteilung der Stücke unter den Spieler. Die erste Eigenschaft muss für die Hälfte der Spieler gelten, welche gewährleisten müssen, dass ihre Portion, welche aus einem oder mehreren Intervallen besteht, höchstens die Länge $2/n$ hat. Ansonsten hätte der gesamte Kuchen eine Länge grösser 1.
Die zweite Eigenschaft nennt sich ausschlaggebend (critical). Nur wenn die Portionen ausschlaggebend sind, kann eine Aufteilung neidfrei sein. Ein ausschlagebendes Stück muss aus Intervallen bestehen deren Wertesumme mindestens so gross ist, wie der Wert von jedem anderen Intervall während der Aufteilung. Denn gäbe es ein Intervall, das mehr Wert ist als das betrachtete Stück (potentielle Portion), so würde es ein Gegenspieler bekommen, und es würde Neid entstehen.
Für die Komplexität gilt: Mindestens $n/4$ Ausführungen der Aufteilung werden gebraucht um Intervalle mit höchstens der Länge $2/n$ zu bekommen. Diese Anzahl folgt aus der

Durchführung (siehe Beispiel), denn es lassen sich höchstens zwei zusätzliche Intervalle in einer Etappe der Gliederung erzeugen. Damit kann nach $n/4-1$ Ausführungen der Kuchen aus höchstens $Anzahl\ neuer\ Intervalle\ pro\ Ausführung \cdot Anzahl\ Ausführungen + Anzahl\ Intervalle\ im\ Anfangszustand = 2 \cdot (n/4-1)+1 = n/2-1$ Stücken bestehen. Also muss mind. ein Intervall eine Länge von mehr als $2/n$ haben, sonst wäre die Länge des gesamten Kuchens kleiner als 1. Sei die Bewertung von allen Spielern von einem Stück immer gleich seiner Länge. Es gilt, dass bevor nicht alle Intervalle eine Länge kleiner $2/n$ haben, gibt es Spieler mit einer nicht ausschlaggebenden Portion und damit kann die Aufteilung nicht neidfrei sein. Es reicht einen solchen Fall zu betrachten, denn eine untere Schranke muss für alle möglichen Bewertungen gelten. Damit gilt für die Komplexität $\Omega(AnzahlSpieler \cdot AnzahlAusführungen) = \Omega(n/2 \cdot n/4) = \Omega(n^2)$.

Veranschaulichung an einem Beispiel:
Man führt solange Schnitt- und Bewertungsanfragen aus bis mindestens für $n/2$ Spieler Intervalle der Länge kleiner gleich $2/n$ gibt und diese werden untersucht, ob sie ausschlaggebend sind. Die Länge der Intervalle muss bei jedem Spieler kleiner gleich der Länge seiner Portion sein, da jedes Stück Kuchen die Vereinigung von endlich vielen disjunkten Intervallen ist. Bevor man versucht den Kuchen aufzuteilen, muss jeder Spieler mindestens eine Anfrage ausgeführt haben.

Beispiel für vier Spieler mit mindestens drei Schnitten:

- Ausgangssituation: $\Pi_1^0 = \{[0,1]\}$, $\Pi_2^0 = \{[0,1]\}$, $\Pi_3^0 = \{[0,1]\}$, $\Pi_4^0 = \{[0,1]\}$
- Schnitt($p_1; 1/3$)=1/4 Der erste Spieler hat ein Stück, dessen Länge kleiner gleich 1/2 ist. Dieses Stück ist nicht ausschlaggebend.
  $\Pi_1^1 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^1 = \{[0,1]\}$, $\Pi_3^1 = \{[0,1]\}$, $\Pi_4^1 = \{[0,1]\}$
- Schnitt($p_2; 1/2$)=3/4 Der zweite Spieler hat ein Stück, dessen Länge kleiner gleich 1/2 ist. Dieses Stück ist ausschlaggebend.
  $\Pi_1^2 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^2 = \{[0,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_3^2 = \{[0,1]\}$, $\Pi_4^2 = \{[0,1]\}$
- Bewertung($p_3; [1/4,3/4]$)=7/8, Protokoll erfährt zusätzlich $v_3([0,1/4]) = 1/16$ und $v_3([3/4,1]) = 1/16$.
  $\Pi_1^3 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^3 = \{[0,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_3^3 = \{[0,1/4],[1/4,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_4^3 = \{[0,1]\}$
- Schnitt($p_4; 1/2$)=1/2 (Das Minimum der Schnitte wurde erreicht und alle Spieler haben den Kuchen geschnitten oder bewertet.)
  $\Pi_1^4 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^4 = \{[0,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_3^4 = \{[0,1/4],[1/4,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_4^4 = \{[0,1/2],[1/2,1]\}$
- Spieler p_3 und p_4 haben aber keine ausschlaggebenden Stücke, denn es wurde noch kein passendes Stück für diese Spieler gefunden.
- Bewertung($p_4; [1/4,3/4]$)=7/10, Protokoll erfährt zusätzlich $v_4([0,1/4]) = 1/10$, $v_4([1/4,1/2]) = 4/10$, $v_4([1/2,3/4]) = 3/10$ und $v_4([3/4,1]) = 2/10$.
  $\Pi_1^5 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^5 = \{[0,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_3^5 = \{[0,1/4],[1/4,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_4^5 = \{[0,1/4],[1/4,1/2],[1/2,3/4],[3/4,1]\}$

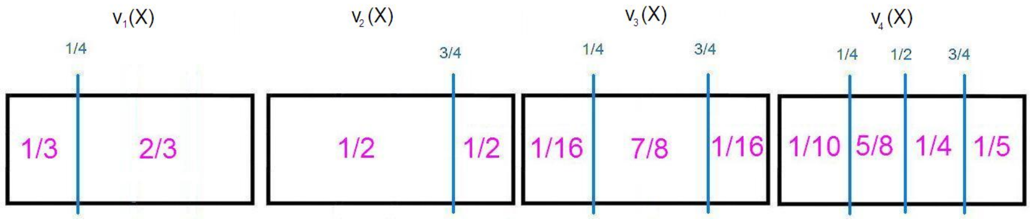

Abbildung 21: Der Kenntnisstand des Protokolls in dieser Etappe.

- Bewertung(p_3; $[1/4, 1/2]$)=5/8, Protokoll erfährt zusätzlich $v_3([1/2, 3/4]) = 2/8$. Nun ist das Stück von Spieler p_3 auch ausschlaggebend.
  $\Pi_1^6 = \{[0, 1/4], [1/4, 1]\}$, $\Pi_2^6 = \{[0, 3/4], [3/4, 1]\}$, $\Pi_3^6 = \{[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]\}$, $\Pi_4^6 = \{[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]\}$

- Der Spieler p_1 würde das Stück X_1 bekommen. Dieses Stück ist nicht ausschlaggebend, denn für das Intervall I_1 gilt $1/3 = v_1(X_1) < v_1(X - X_1) = 2/3$, damit könnten X_4, X_3 oder X_2 mehr Wert sein (n.s.M.). Also wird ein weiterer Schritt ausgeführt.

- Bewertung(p_1; $[1/2, 3/4]$)=1/4, Protokoll erfährt zusätzlich $v_1([1/4, 1/2]) = 1/6$ und $v_1([3/4, 1]) = 1/4$
  $\Pi_1^7 = \{[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]\}$, $\Pi_2^7 = \{[0, 3/4], [3/4, 1]\}$, $\Pi_3^7 = \{[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]\}$, $\Pi_4^7 = \{[0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 1]\}$

- Nun sind alle Stücke ausschlaggebend und über die Hälfte der Spieler haben Intervalle mit der Länge kleiner gleich 1/2. Also liegt einer Aufteilung nichts mehr im Wege und diese wird ausgeführt. Die Bewertungen der einzelnen Stücke werden aufgelistet:

$$\begin{array}{llll}
v_1(X_1) = 1/3 & v_1(X_4) = 1/6 & v_1(X_3) = 1/4 & v_1(X_2) = 1/4 \\
v_2(X_1) \leq 1/2 & v_2(X_4) \leq 1/2 & v_2(X_3) \leq 1/2 & v_2(X_2) = 1/2 \\
v_3(X_1) = 1/16 & v_3(X_4) = 5/8 & v_3(X_3) = 1/4 & v_3(X_2) = 1/16 \\
v_4(X_1) = 1/10 & v_4(X_4) = 2/5 & v_4(X_3) = 3/10 & v_4(X_2) = 1/5
\end{array}$$

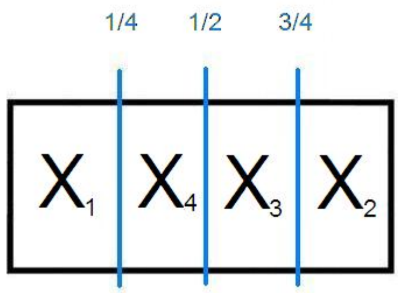

Abbildung 22: Die Endaufteilung

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine Einführung in die Problematik des neidfreien Teilens gegeben. Es wurden alle wichtigen endlich beschränkten neidfreien Protokolle mit parallelen Schnitten auf einem rechteckigen Kuchen ausführlich behandelt und anhand von Beispielen erläutert. Dabei wurden zwei Möglichkeiten gefunden inwiefern sich in Zukunft eine Verallgemeinerung auf eine beliebige Anzahl von Spielern ermöglichen könnte. Ausserdem wurde die für die Komplexitätsanalyse von neidfreien Cake-Cutting-Protokollen wichtige Aussage von Ariel Procaccia erklärt und an einem Beispiel demonstriert.

Eine weitere in diesem Kontext interessante Frage, die sich stellt ist die Aufteilung mit Vollmachten. So übertragen z.B. ein Teil der Spieler ihre Vollmacht an einen Verantwortlichen, dieser sieht ihre Bewertungen und kann somit Ihnen Stücke zuordnen. Hier untersuche man, ob die Neidfreiheit leichter oder schwieriger erreicht werden kann. Außerdem kann nun in Abhängigkeit der Ehrlichkeit des Verantwortlichen die Effizienz der Aufteilungen geprüft werden. Es kann auch geprüft werden, wie sich die Aufteilung entwickelt, wenn ein Spieler die Vollmacht von allen anderen hat. Oder wenn mehrere Spieler Vollmachtbeauftragte sind z.B. bei einer Scheidung, wo eines der Kind die Vollmacht auf beide Elternteile überträgt.

Literaturverzeichnis

[Aus82] A. K. Austin. Sharing a Cake. *Mathematikal Gazette*, 66, 1982.

[BB04] J. B. Barbanel and S. J. Brams, Cake Division with Minimal Cuts: Envy-Free Procedures for 3 Persons, 4 Persons, and Beyond.*Math. Social Sciences 48*: 251-269, 2004.

[BT96] S. Brams and A. Taylor. *Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution.* Cambridge University Press, 1996.

[BTZ97] S. J. Brams, A. D. Taylor, and W. S. Zwicker. A moving-knife solution to the four-person envy free cake division problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(2):547-554, 1997.

[CLPD10] Y. Chen, J. Lai, D. Parkes, and A. Procaccia. Truth, Justice, and Cake Cutting. *In the Proceedings 24th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI '10)*, 2010.

[CNS10] J. Cloutier, C. Nyman and F. Su. Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division.*Mathematical Social Sciences* Volume 59, Issue 1, Pages 26-37, 2010.

[End09] Ulle Endriss. Lecture Notes on Fair Division. ILLC, University of Amsterdam, September 2009.

[EP84] S. Even and A. Paz. A note on cake-cutting. *Discrete Applied Mathematics*, 7:285-296, 1984.

[EP06] J. Edmonds and K. Pruhs. Cake cutting really is not a piece of cake. In*Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 271-278, 2006.

[Fol67] D. Foley, Resource allocation and the public sector,*Yale Economic Essays 7*,45-98,1967.

[GS58] G. Gamow and M. Stern.*Puzzle-Math.*Viking, New York, 1958.

[HS05] C.- J. Haake and F. Su. Fair Division Procedures: Why use Mathematics?*Procedural Approaches to Conflict Resolution*, M. Raith (ed.), Springer Verlag, 2005.

[Jon07] M. A. Jones. Some Recent Results on Pie Cutting. Fair Division,*Dagstuhl Seminar Proceedings* 2007.

[Kna46] B. Knaster, Sur le probleme du partage pragmatique de H. Steinhaus,*Ann. Soc. Polon. Math.*19 (1946), 228-230.

[LR09] C. Lindner and J. Rothe. Degrees of Guaranteed Envy-Freeness in Finite Bounded Cake-Cutting Protocols. *Proceedings of the 5th Workshop on Internet & Network Economics (WINE 2009)*, Rome, Italy. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science 5929, pages 149-159, 2009.

[MIBK03] M. Magdon-Ismail, C. Busch, and M. Krishnamoorthy. Cake-cutting is not a piece of cake. In *Proceedings of the 20th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 596-607. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science #2607, 2003.

[MIBK05] M.Magdon-Ismail, C. Busch, and M. S. Krishnamoorthy. Hardness results for cake cutting. *Bulletin of the EATCS*, 86:85-106, 2005

[Pro09] A. Procaccia. Thou shalt covet thy neighbor's cake. In *Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 239-244. IJCAI, July 2009.

[Rot08] J. Rothe,*Komplexitätstheorie und Kryptologie: Eine Einführung in Kryptokomplexität* Springer, Berlin. 2008.

[Rot10] J. Rothe, Cake-Cutting Algorithms, Düsseldorf, WS 2009/2010.

[RW95] J. M. Robertson and W. A. Webb. Approximating fair division with a limited number of cuts, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 72, 340-344, 1995.

[RW98] J. Robertson and W. Webb. *Cake-Cutting Algorithms: Be Fair If You Can.* A K Peters, 1998.

[Ste48] H. Steinhaus. The problem of fair division. *Econometrica*, 16:101-104, 1948.

[Su99] F. Su. Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. *Amer. Math. Monthly*, 106(10):930-942, 1999.

[SW09] A. Saberi and Y. Wang. Cutting a Cake for Five People. *AAIM '09: Proceedings of the 5th International Conference on Algorithmic Aspects in Information and Management*, pages 292-300. Springer-Verlag.2009.

[Var74] H. Varian. Equity, envy, and efficiency. *Journal of Economic Theory*, 9(1):63-91, 1974.

[Wal10] T. Walsh. Online Cake Cutting. *COMSOC'10: Third International Workshop on Computational Social Choice*, pages 247-258. Düsseldorf University Press.2010.

[WS03] G. J. Woeginger and J. Sgall. A Lower Bound for Cake Cutting,*In European Symposium on Algorithms (ESA*, pages 459-469, 2003.

[WS07] G. J. Woeginger and J. Sgall. On the complexity of cake cutting. *Discrete Optimization*, 4:213-220, 2007.

[Zen00] D. Zeng. Approximate Envy-Free Procedures. *Game Practice: Contributions from Applied Game Theory.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 259-271, 2000.

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Düsseldorf, 21. September 2010 Alina Elterman