

# Truth, Justice and Cake-Cutting

Alina Elterman

November 22, 2011



# Inhaltsverzeichnis

## 1 Einleitung

## 2 Grundbegriffe

- Der Kuchen und die Bewertung

## 3 Paper

- Voraussetzungen für den Algorithmus
- Beispiel

## 4 Quellenverzeichnis

# Cake-Cutting



Kuchen - Metapher für ein beliebig oft teilbares Gut

# Cake-Cutting

- Aufteilung einer beliebig teilbaren Ressource zwischen  $n$  Spielern
- Schwerpunkt: Aufteilung erfolgt unter bestimmten Gerechtigkeitskriterien
- Anwendungen: politische Konflikte, Scheidungen, Nachlässe, Aufteilung der Rechenzeit ...

# Cake-Cutting



# Cake-Cutting



Ich mag Kirschen!



Ich mag Ananas!



Ich habe Hunger!

# Cake-Cutting



Ich mag Kirschen!



Ich mag Ananas!



Ich habe Hunger!

**Die Präferenzen auf bestimmte Stücke können sich unterscheiden!**

# Grundbegriffe

- $P_n = \{p_1, \dots, p_n\}$  - Menge von  $n$  Spieler
- Intervall  $X = [0, 1]$  - einziges, heterogenes, beliebig teilbares Gut (Kuchen)



# Grundbegriffe

- $P_n = \{p_1, \dots, p_n\}$  - Menge von  $n$  Spieler
- Intervall  $X = [0, 1]$  - einziges, heterogenes, beliebig teilbares Gut (Kuchen)
- Bewertungsfunktion - subjektive und geheime Funktion, die jedem Spieler für jedes Stück einen Nutzwert zuordnet

# Grundbegriffe

- $P_n = \{p_1, \dots, p_n\}$  - Menge von  $n$  Spieler
- Intervall  $X = [0, 1]$  - einziges, heterogenes, beliebig teilbares Gut (Kuchen)
- Bewertungsfunktion - subjektive und geheime Funktion, die jedem Spieler für jedes Stück einen Nutzwert zuordnet
- Gesucht: Aufteilung  $X_1, \dots, X_n$  mit  $X_i$  Stück von  $p_i$  und  $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$

# Grundbegriffe

- $P_n = \{p_1, \dots, p_n\}$  - Menge von  $n$  Spieler
- Intervall  $X = [0, 1]$  - einziges, heterogenes, beliebig teilbares Gut (Kuchen)
- Bewertungsfunktion - subjektive und geheime Funktion, die jedem Spieler für jedes Stück einen Nutzwert zuordnet
- Gesucht: Aufteilung  $X_1, \dots, X_n$  mit  $X_i$  Stück von  $p_i$  und  $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$

Es werden komplette Aufteilungen mit beliebigen Bewertungsfunktionen betrachtet!

# Gerechtigkeitskriterien

- **Proportionalität**

Jeder Spieler bekommt (nach seiner Bewertung) mind.  $\frac{1}{n}$  des Kuchens.

- **Neidfreiheit**

Kein Spieler bewertet ein fremdes Stück besser als sein Eigenes.

- Bestimmt wie die Aufteilung zur Stande kommt
- Besteht aus Regeln und Strategien
- Die Prozedur kennt die Bewertungsfunktionen der Spieler nicht, erfragt diese aber durch die Regeln.

# Strategiesicherheit

Üblicherweise für Cake-Cutting:

Protokoll ist *strategiesicher*:

Es gibt mind. **einen** Fall, wo der Spieler durch Unehrllichkeit kein wervolleres Stück bekommt.

# Strategiesicherheit

Üblicherweise für Cake-Cutting:

Protokoll ist *strategiesicher*.

Es gibt mind. **einen** Fall, wo der Spieler durch Unehrllichkeit kein wervolleres Stück bekommt.

Genannt: *schwache Strategiesicherheit*

# Strategiesicherheit

In der Social Choice Theorie:

Protokoll ist *strategiesicher*:

In **keinem** Fall, bekommt ein Spieler durch Unehrllichkeit ein wertvolleres Stück.



# Strategiesicherheit

In der Social Choice Theorie:

Protokoll ist *strategiesicher*:

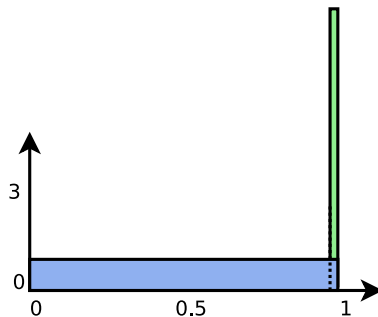
In **keinem** Fall, bekommt ein Spieler durch Unehrllichkeit ein wertvolleres Stück.

**Lügen bringt NIEMALS einen Vorteil!**

# Cut & Choose

Regeln	Strategie von $p_1$	Strategie von $p_2$
1. Spieler $p_1$ teilt den Kuchen in zwei Stücke	Teile den Kuchen in zwei gleich wertvolle Stücke	
2. Spieler $p_2$ wählt Eines aus		Wähle das wertvollere Stück
3. Spieler $p_1$ bekommt das Übrige		

# Strategiesicherheit gilt nicht bei Cut & Choose



Entwurf von einem polynomialzeit Algorithmus der proportional, neidfrei und stark strategiesicher ist.

# Einschränkungen von Cake-Cutting

Das Entsorgungsargument:  
Teile vom Kuchen dürfen entfernt werden.

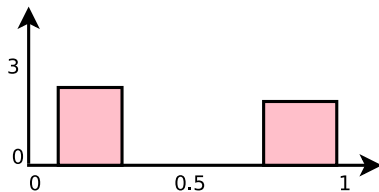
# Einschränkungen von Cake-Cutting

Das Entsorgungsargument:

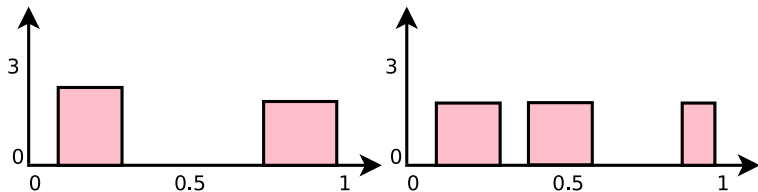
Teile vom Kuchen dürfen entfernt werden.

**NEU:** Aus Neidfreiheit folgt nicht mehr die Proportionalität. (zuvor ja! )

# Stückweise gleiche Bewertung

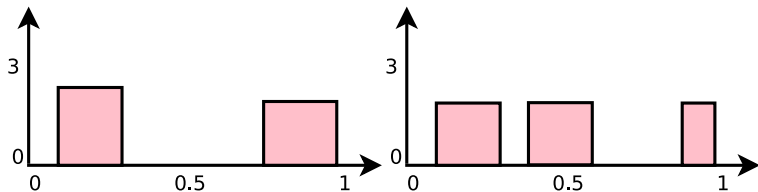


# Stückweise gleiche Bewertung





# Stückweise gleiche Bewertung

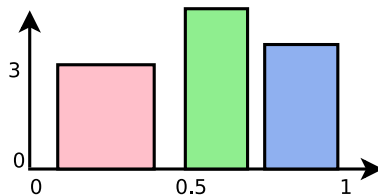


KEINE Stückweise gleiche Bewertung!

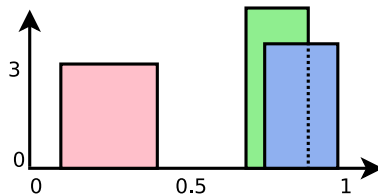
# Algorithmusidee

- Finde eine Menge von Spielern mit der am dichtesten bewerteten Fläche
- Teile diese auf
- Wiederhole bis jeder Spieler ein Stück hat und entsorge den Rest des Kuchens

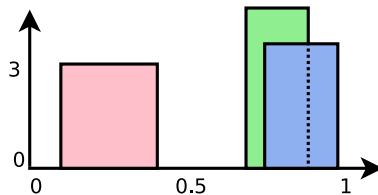
# Alle unterschiedlich



# Zwei gleich

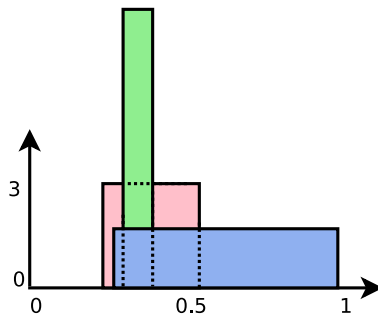


## Zwei gleich

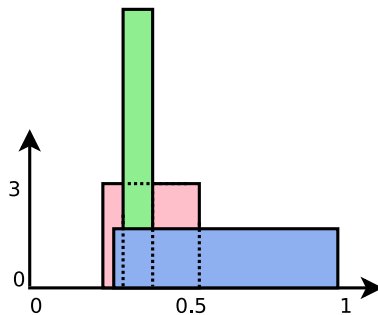


Länge  $X_2 = 0.2$  und Länge  $X_3 = 0.25$ .

# Drei gleich Fall.1

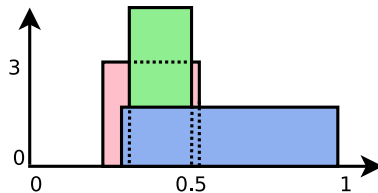


## Drei gleich Fall.1



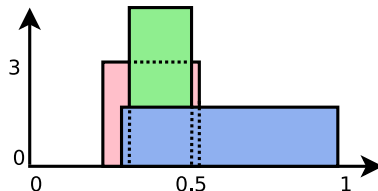
Länge  $X_2 = 0.1$ , Länge  $X_2 = 0.3$  und Länge  $X_3 = 0.25$ .

## Drei gleich Fall.2





## Drei gleich Fall.2



Länge  $X_3 = 0.25$ , Länge  $X_2 \& X_3 = 0.22$  und Länge  $X_2 \& X_3 \& X_1 = 0.2$ ,

# Fragen:

- Kann man Cake-Cutting weniger einschränken um das selbe Resultat zu erreichen?

# Fragen:

- Kann man Cake-Cutting weniger einschränken um das selbe Resultat zu erreichen?  
Y. Chen, J. Lai, D. Parkes und A. Procaccia wollen zunächst das Entsorgungsargument beseitigen.

# Fragen:

- Kann man Cake-Cutting weniger einschränken um das selbe Resultat zu erreichen?  
Y. Chen, J. Lai, D. Parkes und A. Procaccia wollen zunächst das Entsorgungsargument beseitigen.
- Unter welchen Einschränkungen gibt es neidfreie Algorithmen?

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

## Quelle:

[CLPP10] Y. Chen, J. Lai, D. Parkes und A. Procaccia: Truth, Justice and Cake Cutting. *AAAI-10: Proc. 24th AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pp. 756-761, Jul 2010.