Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Mathematik

Bachelorarbeit

Neidfreiheit in Cake-Cutting-Protokollen

Name:	Alina Elterman
Matrikelnummer:	1810231
Betreuer:	Prof. Dr. Jörg Rothe
Abgabedatum:	21.09.2010

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation und Aufbau

Cake-Cutting: Was ist das eigentlich?
Viele Eltern quälen sich, wenn es darum geht, auf einem Geburtstag, gerecht den Kuchen unter den Kindern aufzuteilen. Man möchte alle Kinder glücklich machen und jedem ein solches Stück geben, dass es damit zufrieden ist und kein anderes haben möchte. Also wie lässt sich das Problem lösen?
Viele interdisziplinäre Wissenschaften, beispielweise in den Natur-,Geistes- und Wirtschaftswissenschaften versuchen eine Lösung auf die eben genannte Problematik zu geben.[1]
Doch nicht jeder Kuchen ist gleich. So kann die Form variieren und auch die Möglichkeiten diesen zu teilen können sich unterscheiden.[2]
Einen Kuchen zwischen zwei Kindern aufzuteilen, ist der leichteste Fall. Dieses Verfahren nennt sich Cut & Choose (-Protokoll) und wird im nachfolgenden ausführlich erklärt. Bei drei Kindern birgt das mathematische Verfahren Selfridge-Conway (-Protokoll) eine Lösung.[3]
Für vier Kinder existiert eine Ausnahmeregel, für fünf konnte bis jetzt kein allgemeingültiges Protokoll aufgestellt werden.
Genau an dieser Stelle liegt eine der Problematiken dieser Arbeit. Wie lässt sich dieser Zwiespalt lösen?
Seit den 40er Jahren befassen sich verschiedene Wissenschaftler und Theoretiker mit dem Teilgebiet Cake-Cutting. Immer wieder ergibt sich die Frage nach dem gerechten Teilen. Als Begründer und Problemsteller dieser Theorie gilt Hugo Dionizy Steinhaus mit[**?**](Knaster1944: bfrihbf und Steinhaus 1948). Ein weiteres Phänomen das sich beim Cake-Cutting bemerkbar macht, ist der Aspekt des Neides. Gamow et al. haben sich am Beispiel des Weinteilungsproblems mit diesem Thema befasst und stellten dabei den Begriff der "Neidfreiheit" fest in [**?**]. In den letzten Jahrzenten wurde viel in diesem Gebiet geforscht und das Interesse von den Computerwissenschaften geweckt. Hier ist die Analyse der Komplexität solcher Aufteilungen primär und insbesondere die Arbeit von Ariel Procaccia [**?**] legte einen Meilenstein in der Entwicklung der Komlexitätsanalyse.[4]
Im Folgenden, befasst sich diese Arbeit ausführlich mit der Fragestellung von Steinhaus und den erzielten Fortschritten seiner Kollegen. Dabei wird versucht neue Ansätze und Perspektiven zu eröffnen.

[1] Die genauen Schwerpunkte dieser Gebiete werden in Kapitel 2 aufgelistet.
[2] Es wird eine Einführung in die Möglichkeiten und Arten der Teilungen in Kapitel 3 gemacht.
[3] Eine Übersicht der bekannten Protokolle wird in Kapitel 4 gegeben.
[4] Sie wird in Kapitel 6 beschrieben und anhand eines Beispieles demonstriert.

2 Mehrere Ansichten der neidfreien Aufteilung

Die gerechte Aufteilung spielt in unterschiedlichen akademischen Bereichen eine wichtige Rolle. Der Begriff der Neidfreiheit bzw. des Neides ist in diesem Kontext ebenso interdisziplinär. Es folgt eine Übersicht der Schwerpunkte bezüglich dieser Themen aus der Wirtschaft, Psychologie, Politik & Sozialwissenschaften, Mathematik und Informatik.
Wirtschaft D.K.Foley hat 1967 den Begriff der Neidfreiheit eingeführt. Interessanterweise wurde bei der Wirtschaft angefangen und intensiv an Existenzbeweisen geforscht. Es werden oft Resultate präsentiert die auf der Definition von Varian beruhen, dass die Gerechtigkeit gleich der Effizienz im Zusammenhang mit der Neidfreiheit (genannt Exaktheit in der Fachliteratur) sind.
Psychologie Hier wird untersucht inwiefern individualpsychologische Faktoren oder Besonderheiten der verschiedenen Verfahren zur Aufteilung die Wahl dieser und das Ergebnis beeinflussen. Mit der Annahme nach Elster(1999), dass Emotionen und verinnerlichte Einstellungen als Störfaktoren für rationale Entscheidungen gelten wird nach "fairëmpfundenen Verhandlungslösungen gesucht. Dabei untersucht man ausserdem das Verhältnis der Beteiligten zueinander und die Auswirkungen der Ergebnisse und Einstellungen während der Verhandlungen auf die Zukunft (z.B. Gebietsteilungen und Kriegsrisiko).
Politik & Sozialwissenschaften
Mathematik Viele ältere Veröffentlichungen beschäftigen sich vor allem mit topologischen Eigenschaften (Maßräumen und auf σ-Algebren). Auch steht hier oft die Effizienz der Verteilungen im Vordergrund. Doch am wertvollsten sind die elementaren kombinatorischen Algorithmen und deren Analyse.
Informatik Die gerechte Aufteilung wird als Teilgebiet der Computational Social Choice, sowie Multiagent Systems insbesondere bei Multiagent Ressource Allocation (MARA) gesehen. Von dem Letzteren unterscheidet sie sich aber in der Konzentration auf die unterschiedlichen Gerechtigkeitskriterien.
Die gerechte Aufteilung spaltet sich in zwei Unterbereiche, die Teilung von unteilbaren Gütern und Cake-Cutting (Teilung von beliebig teilbaren Gütern). So ähnlich sie auch klingen mögen, sind die verwendeten Methoden dennoch kernunterschiedlich. Während es sich bei den unteilbaren Gütern eher um Optimierungsprobleme handelt, greift Cake-Cutting auf ganz andere mathematische Methoden zu, die in den nachfolgenden Kapitel aufgeführt werden.

3 Grundlagen

Bei der gerechten Aufteilung müssen wir zunächst einmal alle Möglichkeiten definieren welches Objekt, mit welchem Ziel und zwischen welchen Subjekten aufgeteilt werden kann.

3.1 Die Spieler

Sei P_n=$\{p_1, ..., p_n\}$ die Menge von n Spieler (oder Agenten), die ein Interesse an unserem Gut haben. Es wird angenommen, dass jeder von ihnen möglichst viel von der Ressource haben möchte.[5] Außerdem sind unsere Spieler nur an ihrem eigenen Wohl interessiert, d.h., die Verschlechterung oder Verbesserung der Situationen von ihren Mitspielern hat keinen direkten Einfluss auf ihr Wohlbefinden.

3.2 Der Kuchen

Wir beschäftigen uns mit der Aufteilung von einem einzigen, heterogenen, beliebig teilbaren Gut.[6] Ein Objekt ist heterogen, wenn es uneinheitlich hinsichtlich eines oder mehrerer Merkmale ist oder wie in diesem Zusammenhang, wird ein Merkmal uneinheitlich auf dem gesammten Gut verteilt. Zur Veranschaulichung wird ein rechteckiger Kuchen (Stollen) verwendet. [7] Die Division wird bei uns durch eine Reihe von parallen Schnitten durchgeführt.[8] Der Kuchen X wird dabei durch das Intervall $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ repräsentiert. Wir nennen jedes Teilintervall $I' \subseteq I$, oder eine Vereinigung von solchen, ein Stück. Diese Stücke sind immer disjunkt. Eine wichtige Eigenschaft von Cake-Cutting ist, dass wir nur komplette Aufteilungen, wo jedes Stück einem Spieler zugeordnet wird, des Kuchens betrachten. Wir bezeichnen als X_i das Stück des Kuchens, welches der Spieler p_i bekommt.

3.3 Die Bewertung

Jeder Spieler $p_i \in P_N$ besitzt eine Bewertungsfunktion (Bewertung) $v_i : \{X'|X' \subseteq X\} \mapsto [0, 1]$ des Kuchens X. Sie erfüllt folgende Eigenschaften:

1. Nicht-Negativität: $v_i(C) \geq 0$ für alle $C \subseteq [0, 1]$.
2. Normalisierung: $v_i(\emptyset) = 0$ und $v_i([0, 1]) = 1$.
3. Monotonität: Wenn $C' \subseteq C$, dann $v_i(C') \leq v_i(C)$.
4. Additivität: $v_i(C \cup C') = v_i(C) + v_i(C')$ für disjunkte $C, C' \subseteq [0, 1]$.
5. Teilbarkeit: Für alle $C \subseteq [0, 1]$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, existiert ein $B \subseteq C$, so dass $v_i(B) = \alpha \cdot v_i(C)$.
6. v_i ist kontinuierlich: Falls $0 < x < y \leq 1$ mit $v_i([0, x]) = \alpha$ und $v_i([0, y]) = \beta$, dann gilt für jedes $\gamma \in [\alpha, \beta]$ existiert ein $z \in [x, y]$ so dass $v_i([0, z]) = \gamma$.

[5] Im Gegensatz dazu werden in der Literatur auch Fälle über Aufteilung von unerwünschten Objekten (Chore Division) behandelt, z.B. zusätzliche Arbeit, wo alle daran interessiert sind möglichst, wenig zu erhalten.

[6] Es existieren auch Forschungen über die Aufteilung von mehreren Gütern (z.B. [Su]), die wir hier aber außer Acht lassen.

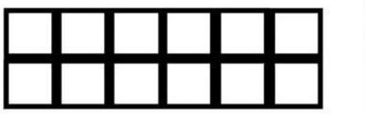
[7] Es gibt mehrere Studien von einer Torte (runder Kuchen) nachzulesen in M.A.Jones:"Some Recent Results on Pie Cutting").

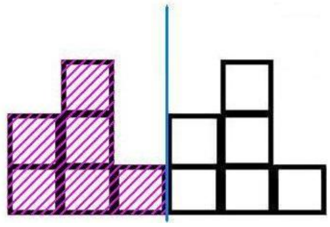
[8] Es gibt ebenfalls Aufteilungen mit parallelen und rechtwinkligen Schnitten (z.B. Protokoll von Webb).

7. Inhaltslosigkeit von Punkten: $v_i([x, x]) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

Außerdem wird üblicherweise verlangt, dass jede nicht leere Teilmenge des Kuchens auch einen positiven Wert für jeden Spieler besitzt.
Folgend werden zwei unterschiedliche Darstellungen für den Kuchen und deren Bewertung genutzt.

Die **Boxendarstellung**:





Eigenschaften: Ein solches Diagramm muss separat für jeden Spieler erstellt werden. Die Anzahl der Kästchen ist bei allen Spielern gleich und diese repräsentieren immer den gleichen Wert des Kuchens. Ab hier wird der Wert des Kuchens pro Kästchen genau 1/12. Der objektive Wert eines Kuchens sieht wie die linke Abbildung aus. Es werden die 12 Kästchen nach der jeweiligen Bewertung des Spieler verteilt, wie z.B. in der rechten Abbildung. Die straffierte Fläche ist das Stück, welches der jeweilige Spieler erhält und dessen Summe ist der Wert seines Stückes. Die parallelen Schnitte werden wie abgebildet eingezeichnet.

3.4 Die unterschiedlichen Arten von Gerechtigkeit

Wie oben bereits definiert wurde, besitzt jeder Spieler eine Bewertungsfunktion. Diese Funktion ist geheim und subjektiv (ein Spieler kennt nur seine Bewertungen, und nur seine Bewertungen haben Einfluss auf sein Wohlbefinden). Nach einer Aufteilung versuchen wir die Güte dieser zu messen. Damit brauchen wir aber Maßstäbe. Das Wichtigste ist die Gerechtigkeit. Aber was bedeutet überhaupt gerecht? Dies ist eine philosophische oder psychologische Frage und kann nicht so einfach und für unser Ziel zufriedenstellend beantwortet werden, somit brauchen wir Kriterien um unsere Aufteilungen vergleichen und bewerten zu können. Alle Kriterien sind subjektive Einschätzungen und keine objektiven Maßstäbe.

Definition 1. ***(Proportionalität oder einfache Gerechtigkeit)***
Eine Aufteilung ist proportional (einfach gerecht), falls $v_i(X_i) \geq 1/n$ *für jeden Spieler* $p_i \in P_N$ *gilt.*

Definition 2. ***(Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist neidfrei, falls $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N$*.*

Es gibt stärkere Einschränkungen für diese zwei Kriterien. Ich werde diese an dem Beispiel der Neidfreiheit demonstieren.

Definition 3. ***(Starke Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist stark-neidfrei falls $v_i(X_i) > v_i(X_j)$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$*.*

Definition 4. ***(Super Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist super-neidfrei, falls $v_i(X_j) \leq 1/n$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$*.*

Definition 5. ***(Starke Super Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist stark-super-neidfrei, falls $v_i(X_j) < 1/n$ für jedes Paar von Spielern $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$.

Das Problem ist, dass für die stärkeren Einschränkungen nicht immer Aufteilungen existieren, z.B. wenn alle Spieler die gleiche Bewertungsfunktion besitzen.

Definition 6. ***(Exaktheit)***[9]
Eine Aufteilung ist exakt, falls $v_i(X_i) = v_j(X_j)$ für jedes Paar von Spielern $p_i, p_j \in P_N$.

In wirtschaftlichen Texten werden Aufteilungen, die gleichzeitig exakt und neidfrei, sind oft als besonders gerecht empfunden. Dennoch hat die Exaktheit sogar in Kombination mit der Proportionalität keinen direkten Zusammenhang mit der Neidfreiheit, wie man sich am folgenden Beispiel leicht veranschaulichen kann.

Beispiel 7. *Die Spieler Aleph, Beth und Gimel teilen einen Kuchen. Am Ende bekommt jeder Spieler genau $1/3$ des Kuchens (nach seinem Maß). Diese Aufteilung ist exakt und proportional. Doch Aleph ist der Meinung, dass Beths Stück genau die Hälfte des Kuchens ist und beneidet Beth. Damit ist die Aufteilung nicht neidfrei.*

Zusammenhänge der Gerechtigkeitskriterien:

Lemma 8. *Für alle Aufteilungen gilt:*

1. *Falls eine Aufteilung neidfrei ist, so ist sie auch proportional.*

2. *Für zwei Spieler ist eine Aufteilung proportional genau dann, wenn sie neidfrei ist.*

Beweis.

1. Beweis durch Widerspruch:
   Sei A eine Aufteilung die neidfrei, aber nicht proportional ist. Da die Aufteilung A neidfrei ist, gilt $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$ für jedes Paar von Spielern $p_i, p_j \in P_N$ und somit hat jeder Spieler mind. soviel wie jeder Andere, damit hat ein Spieler mindestens genauso viel wie $(n-1)$ Andere und damit kriegt Jeder mindestens $1/n$ und damit ist die Aufteilung A proportional. $\lightning$
   Somit sind alle neidfreien Aufteilungen proportional.

2. "$\Rightarrow$" Für zwei Spieler ist eine Aufteilung proportional, wenn er mind. die Hälfte des Kuchens bekommt, damit kann der andere Spieler höchstens die Hälfte bekommen und wird nicht beneidet.
   "$\Leftarrow$" Die Rückrichtung folgt aus Zusammenhang 1.

$\square$

[9] In der Literatur wird an Stelle von Exaktheit oft der Begriff der Gerechtigkeit verwendet, was in gewissem Sinne den gesamten Konzept der Begriffe widerspricht, da wir alle diese Kriterien einzeln als Maßstäbe von gerecht befinden.

Definition 9. ***(Effizienz)***
Eine Aufteilung ist effizient (Pareto optimal) falls keine andere Aufteilung existiert, die einem Spieler ein von ihm besser bewertetes Stück einbringt, ohne die Situation eines anderen Spielers zu verschlechtern.

Definition 10. ***(Ehrlichkeit)***[10]
Eine Aufteilung ist ehrlich, falls es keine Bewertung gibt, bei der ein Spieler am Ende ein besseres Stück bekommen hätte durch Unaufrichtigkeit.

Wir sind nur an Aufteilungen interessiert, wo die Ehrlichkeit die beste Strategie für alle Spieler ist und somit allein durch den Algorithmus erzwungen wird. Oft wird dies erreicht, in dem der Spieler durch Unaufrichtigkeit in die Gefahr kommt die Garantie auf seinen fairen Anteil zu verlieren.

3.5 Komplexitätsklassen

3.6 Klassen von Protokollen

Intuitive Beschreibung:(Algorithmus)
In der Mathematik, Informatik und verwandten Gebieten, ist ein Algorithmus eine effektive Methode zur Problemlösung, ausgedrückt durch eine endliche Folge von Anweisungen.

Definition 11. ***(Protokoll (Cake-Cutting-Protokoll))***
Ein Protokoll (Cake-Cutting-Protokoll) ist ein adaptiver Algorithmus mit mehreren Spielern und folgenden Eigenschaften:

- *Es besteht aus Regeln und Strategien.*
  Regeln sind Anweisungen, die gefordert werden ohne die Bewertungen der Spieler zu kennen.
  Strategien sind Empfehlungen, welchen der Spieler folgen muss um garantiert seinen gerechten Anteil zu bekommen.
- *Sofern ein Spieler das Protokoll befolgt, bekommt er nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein Stück des Kuchens, welches dem geforderten Gerechtigkeitskriterium entspricht. Dies geschieht unabhängig von den Taten seiner Mitspieler.*
- *Jeder Spieler muss zu jeder Zeit in der Lage sein völlig unabhängig von den anderen Spielern den Kuchen zu teilen (einen Schnitt zu machen).*
- *Das Protokoll besitzt keine Informationen über die Bewertungen der Spieler, ausser denen die angefragt wurden in dem jeweiligen oder in den vorherigen Schritten.*

Definition 12. *Ein Cake-Cutting-Protokoll wird proportional, neidfrei, stark neidfrei etc. genannt, falls unabhängig von den Bewertungsfunktionen der Spieler, jede Aufteilung entsprechend proportional, neidfrei etc., unter der Vorraussetzung, dass alle Spieler die vom Protokoll vorgegebenen Regeln und Strategien befolgen, ist.*

[10] In den letzten Jahren wurde diesem Aspekt ein neuer Forschungshintergrund gegeben und Brams,Kilgour blabla. Doch man kann es als ein einzelnes Kriterium interpretieren.

Eines der Ziele von Cake-Cutting ist solche Protokolle anzugeben.[11]

Definition 13. ***(endlich (diskret)/kontinuierlich)***
Ein endliches (diskretes) Protokoll liefert eine Lösung nach einer endlichen Anzahl von Entscheidungen (Bewertungen, Markierungen,...), dagegen muss ein Spieler bei einem kontinuierlichen Protokoll unendlich viele Entscheidungen treffen.

Definition 14. ***(endlich beschränkt/endlich unbeschränkt))***
Ein endlich beschränktes Protokoll hat eine obere Grenze von Schritten, welche im ungünstigsten Fall betrachtet wird. Die gesamte Anzahl von Entscheidungen hängt, wenn überhaupt, dann nur von der Anzahl der beteiligten Personen ab. Ein endlich unbeschränktes Protokoll hat hingegen eine nicht im Voraus abschätzbare Anzahl.

Die am meisten gesuchten Protokolle sind endlich beschränkt, da sie am einfachsten in der Realität umsetzbar sind. Aber es gibt eine Art von kontinuierlich Protokollen, an denen ebenfalls Interesse besteht.

Definition 15. ***(Moving-Knife-Protokoll)***
Ein Schiedsrichter, welcher unparteisch gegenüber den Spielern ist und unbeteiligt an der Verteilung der Stücke, schwenkt ein Messer kontinuierlich von links nach rechts und macht parallele Schnitte sofern ein Spieler "Halt!" ruft. Bei manchen M-K-Protokollen wird der Schiedsrichter ausgelassen und nur ein Messer oder Schwert geschwungen.

Bemerkung: In der Literatur (z.B.:Ulle Endriss:[**?**] "Lecture Notes on Fair Division") werden manchmal kontinuierliche Protokolle nicht als Protokolle bezeichnet sondern zu neuen Klassen zusammengefasst, die von der Anzahl der Messer abhängen.

Definition 16. ***(zusammenhängend)***
Ein zusammenhängendes Protokoll liefert eine Aufteilung die aus genau einem zusammenhängendem Stück pro Spieler besteht. Hier dürfen die Stücke nicht geteilt und wieder zusammengesetzt werden.

Definition 17. ***(Grad der garantierten Neidfreiheit (DGEF))***
Als Grad der garantierten Neidfreiheit (DGEF) eines bestimmten Protokolls wird die kleinste Summe von allen Spielern von der Anzahl von Verhältnissen jedes Spielers zu einem Anderen bezeichnet, in der bei beliebigen Bewertungen des Kuchens kein Neid entstehen kann.

Bemerkung: Der DGEF von neidfreien Protokollen ist $n \cdot (n-1)$.

4 Neidfreie Cake-Cutting-Protokolle

Bekannte Ergebnisse:
Bei der proportionalen Aufteilung gibt es verschiedene Protokolle für beliebig viele Spieler. Eine Übersicht befindet sich in den Büchern [**?**] und [**?**]. Für die Neidfreiheit benutzt man diese unter dem Aspekt des DGEF, wie in [**?**] oder in der Simulation in Kapitel 7.
Für die exakte Aufteilung existiert nur ein Moving-Knife-Protokoll für zwei Spieler. Die neidfreie Aufteilung wurde für bis zu vier Spieler im kontinuierlichen und bis zu drei Spieler im

[11] Siehe auch Definition von [Even and Paz, 1984], Robertson und Webb:"Approximating ..." und Woeginger,Sgall:"An Aproximation Scheme..." oder "cc is not a piece of cake" von magdon....

endlich beschränkten Fall gelöst. Es gibt ein endliches Protokoll für beliebig viele Spieler. Dieser unterscheidet sich stark von den bisherigen und ist nicht endlich beschränkt. Es gibt mehrere fast neidfreie Lösungen, siehe dazu Su[**?**]:"SL:Rental Harmony", Zeng:[**?**]"Approximate EFP".
Es folgen wichtige neidfreie Cake-Cutting-Protokolle (CCP). Dabei wird erläutert wie die Neidfreiheit erreicht wird, begründet, woran eine Verallgemeinerung scheitert, und an einem Beispiel die Funktionalität gezeigt. Es werden nur Protokolle für einen rechteckigen Kuchen mit parallelen Schnitten betrachtet.

4.1 Zwei Spieler

Es folgt das intuitivste und bekannteste endlich beschränkte CCP, das eine neidfreie Aufteilung liefert. Es werden ein Schnitt und eine Bewertung gemacht.

	Cut & Choose-Protokoll
· **Schritt 1**	Spieler p_1 schneidet den Kuchen in zwei gleichwertige Teile (nach seinem Maß).
· **Schritt 2**	Spieler p_2 sucht sich ein Stück aus, das andere Stück bekommt Spieler p_1.

Die Neidfreiheit wird elementar erreicht, da der erste Spieler zufrieden mit jedem der zwei Stücke ist, und der andere Spieler das Privileg hat zu wählen. Eine Verallgemeinerung ist ausgeschlossen, da das Verfahren nur dadurch funktioniert, dass der jeweils andere Spieler den Rest des Kuchens von dem jeweiligen Spieler bekommt.
Bemerkung: Der erste Spieler kann nie mehr als die Hälfte des Kuchens bekommen.

Beispiel 18.

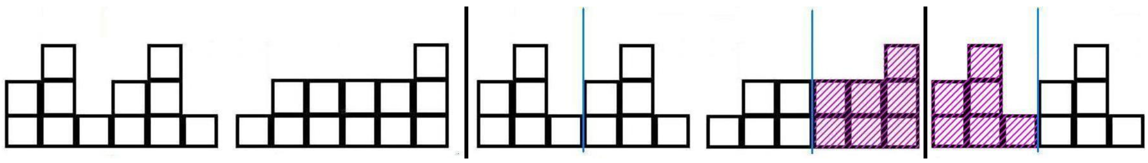


Abbildung 1: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1 (links) und p_2 (rechts); Spieler p_1 halbiert den Kuchen(n.s.M.) (links) und Spieler p_2 wählt das wertvollere Stück (rechts); Spieler p_1 bekommt das übriggebliebene Stück

Es folgt ein kontinuierlich beschränktes, exaktes und neidfreies CCP. Es werden höchstens zwei Schnitte gemacht. Dies ist das einzige bekannte exakte Protokoll.

	Austins Moving-Knife-Protokoll
· **Schritt 1**	Ein Messer wird kontinuierlich von links nach rechts über den Kuchen geschwenkt, bis ein Spieler (sagen wir: p_1) :"Halt!" ruft, weil das Messer den Kuchen dort halbiert (nach seinem Maß).
· **Schritt 2**	Dieser Spieler platziert ein zweites Messer über dem linken Rand des Kuchens und schwenkt beide Messer parallel und kontinuierlich von links nach rechts so über den Kuchen, dass zwischen ihnen nach seinem Maß stets der Wert des Kuchens 1/2 ist.
· **Schritt 3**	Der andere Spieler ruft:"Halt!", sobald der Wert dieses Stückes 1/2 erreicht.

Dieses Protokoll ist neidfrei, da beide Spieler genau die Hälfte des Kuchens bekommen (nach ihrem Maß). Die Idee hier ist: In dem Augenblick, wenn der erste Spieler "Halt!" ruft, ist das Stück vom linken Rand bis zum Messer für den zweiten Spieler weniger Wert als die Hälfte des Kuchens (sonst würde er auch:"Halt!" rufen und damit wäre das gewünschte Ergebnis bereits erzielt). Daraus folgt, dass das Stück von dem Messer bis zu dem rechten Rand für den zweiten Spieler mehr Wert hat als die Hälfte des Kuchens. Da der erste Spieler nun aber mit zwei Messern aus dem linken Stück in das rechte Stück übergeht, ist gesichert, dass es einen Moment gibt, wo das Stück zwischen den beiden Messern genau die Hälfte des Kuchens für den zweiten Spieler ist.
Um dieses Protokoll auf mehr Spieler zu verallgemeinern, muss man zeigen, dass es immer so ein Stück geben muss, dass für alle beteiligten Spieler den gleichen, oder in unserem Fall den Wert 1/2 besitzt. Das nachfolgende Beispiel 21 zeigt, dass genau dies für bestimmte Bewertungen des Kuchens nicht möglich ist.

Beispiel 19.

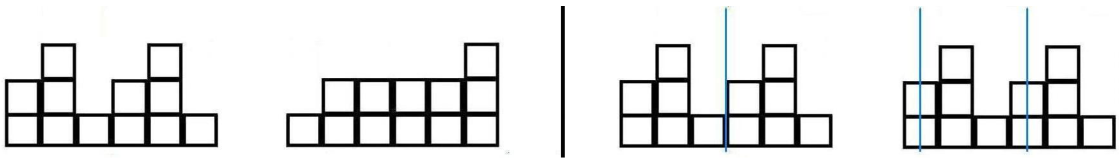


Abbildung 2: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1 (links) und p_2 (rechts); Spieler p_1 ruft:"Halt!" wenn die Hälsfte erreicht wird (links), und fügt ein zweites Messer hinzu und schwenkt diese über den Kuchen (rechts)

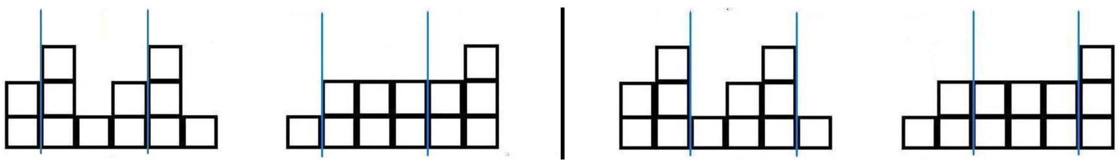


Abbildung 3: Spieler p_2 ruft: "Halt!". Beide Stücke haben zwischen den Messern den Wert 1/2; Die Situation in Schritt 3 ist nicht eindeutig! Der erste Zustand in dem der Wert für den Kuchen für beide Spieler 1/2 ist, gilt als Ergebnis der Aufteilung.

Beispiel 20.

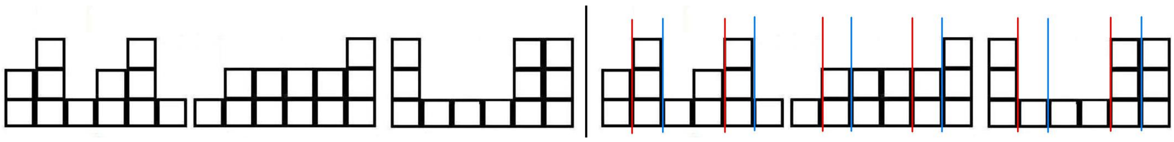


Abbildung 4: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1 (links) und p_2 (mitte) und p_3 (rechts); Man sieht das für alle Aufteilungen in zwei gleiche Stücke zwischen den Messern bei Spieler p_1 und p_2, der Spieler p_3 eine Bewertung kleiner 1/2 hat.

Diese Prozedur funktioniert auch für jedes beliebige $1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ nach der Aussage von Austin: [?], muss aber im "worst case" $(n-1)$- mal durchgeführt werden. Da ein Stück und die Reste aus seiner Aufteilung immer bis zum letzten Stück übertragen werden müssen. Es folgt die Bemerkung von Austin als ausgeschriebenes Protokoll:

	Austins Moving-Knife-Protokoll für n gleichwertige Stücke
· **Schritt 1**	Der Spieler p_1 schneidet den Kuchen in n gleichwertige Stücke (n.s.M.).
· **Schritt 2**	Der Spieler p_2 wählt zwei Stücke $\{X_1, X_2\}$ davon aus mit der Eigenschaft: $v_2(X_1) \leq 1/n, v_2(X_2) \geq 1/n$. Alle Stücke mit $v_2(X_i) = 1/n$ für $3 \leq i \leq n$ werden als fertig markiert und stehen nicht mehr zur Wahl.
· **Schritt 3**	Diese zwei Stücke $\{X_1, X_2\}$ werden zu einem verschmolzen und darauf wird das Austins Moving Knife Protokoll angewendet. Das resultierende Stück wird ebenfalls als fertig markiert. Der Rest wird verschmolzen und zu den übrigen unfertigen Stücken zugeordnet, sofern einer der beiden Spieler es nicht als $1/n$ bewertet.
· **Schritt 4**	Schritt 2 und Schritt 3 werden wiederholt, bis alle Stücke markiert sind.

Beispiel 21.

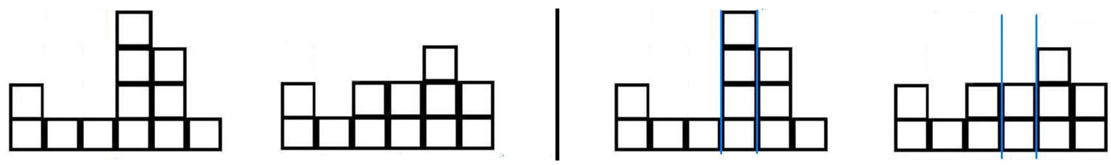


Abbildung 5: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1 (links) und p_2 (rechts); Spieler p_1 schneidet den Kuchen in 3 gleichwertige Stücke(n.s.M)(links)

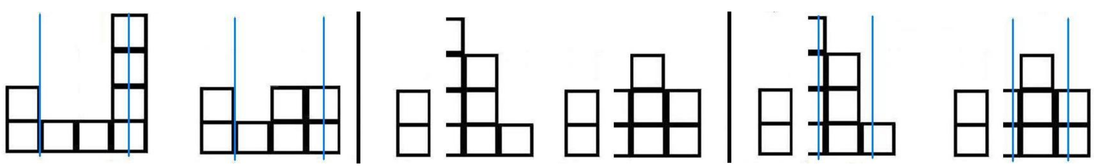


Abbildung 6: Spieler p_2 sucht sich 2 Stückee aus mit der geforderten Eigenschaft aus Schritt 2. Beide Spieler führen A-M-K-P aus; Die Reste werden übertragen (mitte) und A-M-K-P wiederholt ausgeführt (rechts)

4.2 Drei Spieler

Es folgt ein endlich beschränktes, neidfreies CCP. Es werden höchstens fünf Schnitte gebraucht. Dies ist das einzige bekannte endlich beschränkte neidfreie Protokoll für $n \geq 3$.

	Selfridge-Conway-Protokoll
· **Schritt 1**	Der erste Spieler p_1 schneidet den Kuchen X in drei gleiche Stücke (nach seinem Maß). Der zweite Spieler p_2 sortiert $\{X_1, X_2, X_3\}$ mit: $v_1(X_1) = v_1(X_2) = v_1(X_3) = 1/3$ und $v_2(X_1) \geq v_2(X_2) \geq v_2(X_3)$.
· **Schritt 2**	Ist $v_2(X_1) > v_2(X_2)$, so schneidet p_2 von X_1 etwas ab, so dass er $X'_1 = X_1 - R$ erhält mit $v_2(X'_1) = v_2(X_2)$. Ist $v_2(X_1) = v_2(X_2)$, so sei $X'_1 = X_1$.
· **Schritt 3**	Aus $\{X'_1, X_2, X_3\}$ wählen p_3, p_2, p_1 in dieser Reihenfolge je ein Stück. Wenn p_3 X'_1 nicht nimmt, muss p_2 es tun.
· **Schritt 4** (nur falls $R \neq \emptyset$)	Entweder p_2 oder p_3 hat X'_1. Nenne diesen Spieler P, den anderen Q. Q schneidet den Rest R in drei gleiche Stücke (nach seinem Maß): $v_Q(R_1) = v_Q(R_2) = v_Q(R_3) = 1/3 \cdot R$ P, p_1, Q wählen in dieser Reihenfolge je ein Stück.

Die erste Aufteilung von $X - R$ ist neidfrei, da der dritte Spieler die freie Wahl hat und somit keinen beneiden kann, für den zweiten Spieler existieren zwei Stücke und da er als Zweiter wählen darf, ist eines davon immer vorhanden. Der erste Spieler bekommt ein unbeschnittenes Stück und ist somit der Meinung, dass die Anderen entweder gleichgrosse oder kleinere Stücke als er haben. Dannach wird, falls nötig, der Rest R verteilt, hier ist der erste Spieler der Meinung, dass der gesamte Rest eigentlich dem Spieler P gehört und hat kein Problem diesen als Ersten wählen zu lassen. Damit beneidet P keinen, denn er durfte sich (nach seinem Maß) das grösste Stück aussuchen. Der erste Spieler wählt nun sein Stück und kann den Spieler Q nicht benneiden. Und Spieler Q ist der Meinung alle Reststücke waren gleich gross, und damit ist die gesamte Aufteilung neidfrei.
Die Verallgemeinerung scheitert vor Allem an der zweiten Aufteilung. Der erste Teil lässt sich als das unendliche Protokoll in Kapitel 4.4 formulieren. Aber bereits hier entsteht das Problem mit den Resten. Der zweite Spieler braucht mindestens drei gleichwertige Stücke und müsste damit eventuell von zwei Stücke etwas abschneiden. Damit hätten wir mehr als einen Rest und bräuchten eine gesonderte Behandlung für jeden von denen. Bei dem zweiten Teil entsteht auch das Problem, dass es zwar einen Spieler gibt, welcher der Meinung ist, dass der Rest einem bestimmten Spieler gehört, aber es gibt mehr als einen Spieler der dieser Meinung nicht sein muss, und somit nur neidfrei aufgeteilt werden könnte, wenn es möglich wäre für mehr als zwei Spieler das Austins Moving-Knife-Protokoll auszuführen. Eine kontinuierliche Verallgemeinerung auf vier Spieler ist das Brams,Taylors & Zwickers Moving-Knife-Protokoll.

Beispiel 22.

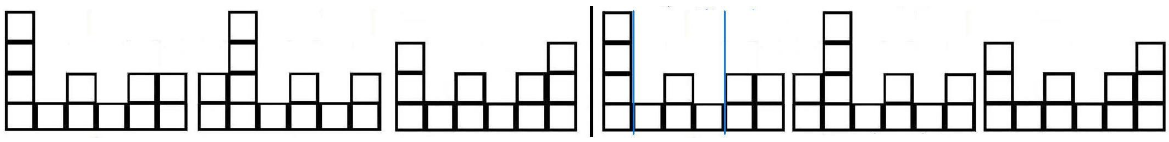


Abbildung 7: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1 (links), p_2 (mitte) und p_3 (rechts); Der Spieler p_3 teilt den Kuchen in 3 gleichwertige Stücke(n.s.M.)

Es folgt ein kontinuierliches, neidfreies CCP. Es werden zwei Schnitte gemacht.

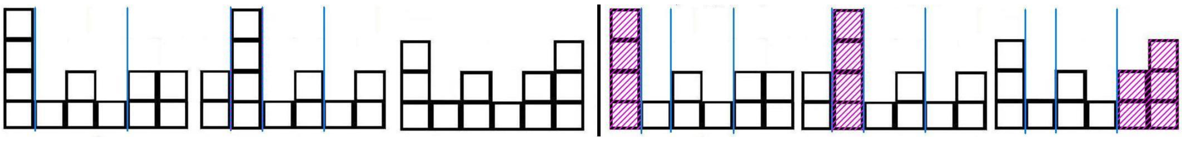


Abbildung 8: Spieler p_2 schneidet den Rest von seinem wertvollsten Stück ab; Spieler p_3, p_2 und p_1 wählen in dieser Reihenfolge je ein Stück

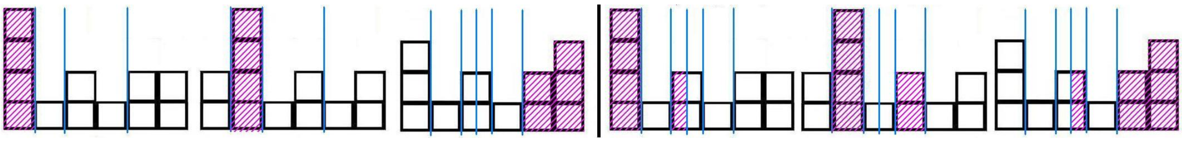


Abbildung 9: Spieler p_3 unterteilt den Rest in 3 gleichwertige Stücke (n.s.M.); Spieler p_2, p_1 und p_3 wählen in dieser Reihenfolge je ein Reststück.

	Stromquists Moving-Knife-Protokoll
· **Schritt 1**	Ein Schwert wird kontinuierlich von links nach rechts über den Kuchen geschwenkt und teilt ihn (hypothetisch) in ein linkes Stück X_L und ein rechtes Stück X_R: $X = X_L \cup X_R$. Jeder der drei Spieler hält sein Messer parallel zum Schwert und bewegt es (während das Schwert geschwenkt wird) so, dass es das rechte Stück nach seinem Maß stets genau halbiert. Dabei teilt das mittlere der drei Messer X_R in Stücke:$X_R = X_{RL} \cup X_{RR}$
· **Schritt 2**	Der erste Spieler, der glaubt, X_L sei mindestens so gut wie sowohl X_{RL} als auch X_{RR}, ruft: "Halt!" und bekommt X_L. Das mittlere der drei Messer schneidet X_R in zwei Stücke: $X_R = X_{RL} \cup X_{RR}$. Der übriggebliebene Spieler, der seine Markierung am nähesten an X_L hatte, bekommt X_{RL}. Der letzte Spieler bekommt X_{RR}.

Um hier die Neidfreiheit nachzuvollziehen, betrachtet man jeden Spieler einzeln. Der Spieler, der "Halt!" ruft, ist der Meinung, dass das linke Stück mehr oder gleich viel wert ist als jedes der beiden Stücke rechts von dem Schwert, und wird somit auch keinen beneiden. Die übrigen zwei Spieler teilen seine Meinung nicht, sonst hätten sie auch "Halt!" gerufen. Nun müssen wir die Stücke rechts neidfrei verteilen. Es gibt drei Markierungen, als Schnitt wird die mittlere genommen. Mindestens einem der übrigen Spieler gehört eine andere Markierung, damit kriegt er ein Stück, das sogar noch mehr wert ist und beneidet den anderen Spieler nicht. Für den letzten Spieler gilt entweder exakt das selbe oder er ist der Meinung genauso viel wie der Vorherige bekommen zu haben. Damit ist die gesamte Aufteilung neidfrei.
Die Prozedur lässt sich leider nicht auf $n \geq 4$ übertragen, denn sie muss eine ungerade Anzahl von Spielern haben, um das Stück in die entsprechenden Teile zu Markieren, oder es werden mehr als ein Schwert verlangt, was den kontinuirlichen Ablauf des Protokolls stören würde. Für $n = 5$ tritt ein Problem in der Aufteilung der rechten Stücke auf, da man wieder hier alle Bewertungen von Allen bis auf den Spieler, der das linke Stück bekommen hat beachten muss und man nicht nehr bestimmen kann, welcher Schnitt der mittlere und somit der entscheidende ist.
Dieses Protokoll lässt sich nicht diskretisieren.

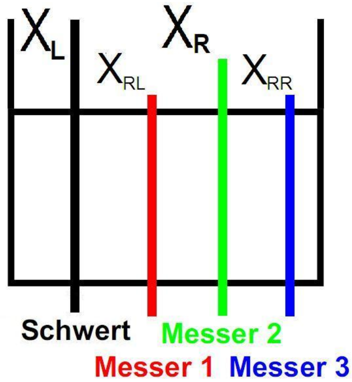


Abbildung 10: Die Vorgehensweise bei Stromquists Moving-Knife-Protokoll

4.3 Vier Spieler

Es folgt ein kontinuierliches, neidfreies CCP. Es werden höchstens 13 (11 in[**?**] CD with minimal cuts Barbanel & Brams) Schnitte gebraucht. Dies ist das einzige bekannte, beschränkte, neidfreie Protokoll für $n \geq 4$.

	Brams,Taylors & Zwickers Moving-Knife-Protokoll
· **Schritt 1**	Der erste Spieler p_1 und der zweite Spieler p_2 erzeugen mit Austins Moving-Knife-Protokoll für beide Spieler vier gleichwertige Stücke. Der Spieler p_3 sortiert diese mit: $v_1(X_1) = v_1(X_2) = v_1(X_3) = v_1(X_4) = 1/4$ $v_2(X_1) = v_2(X_2) = v_2(X_3) = v_2(X_4) = 1/4$ $v_3(X_1) \geq v_3(X_2) \geq v_3(X_3) \geq v_3(X_4)$
· **Schritt 2**	Ist $v_3(X_1) > v_3(X_2)$, so schneidet p_3 von X_1 etwas ab, so dass er $X_1' = X_1 - R$ erhält mit $v_3(X_1') = v_3(X_2)$. Ist $v_3(X_1) = v_3(X_2)$, so sei $X_1' = X_1$.
· **Schritt 3**	Die Spieler p_4, p_3, p_2, p_1 wählen (in dieser Reihenfolge) je ein Stück aus $\{X_1', X_2, X_3, X_4\}$. Falls p_4 X_1' nicht nimmt, muss p_3 es tun.
· **Schritt 4** (nur falls $R \neq \emptyset$)	Entweder p_4 oder p_3 hat X_1'. Nenne diesen Spieler$P$, den anderen Q. Q und p_2 schneiden den Rest R mit Austins Moving-Knife-Protokoll in vier gleichwertige Stücke: $v_Q(R_1) = v_Q(R_2) = v_Q(R_3) = v_Q(R_4) = 1/4 \cdot v_Q(R)$. $v_2(R_1) = v_2(R_2) = v_2(R_3) = v_2(R_4) = 1/4 \cdot v_2(R)$. Die Spieler P, p_1, Q, p_2 wählen (in dieser Reihenfolge) je ein Stück.

Die Idee hier ist dieselbe wie in dem Selfridge-Conway-Protokoll. Es werden in den nötigen Schritten immer zwei Spieler zusammengefasst um die Vorteile des Protokolls auszunutzen. Es lässt sich aus den gleichen Gründen nicht verallgemeinern wie das Selfridge-Conway-Protokoll.

Beispiel 23.

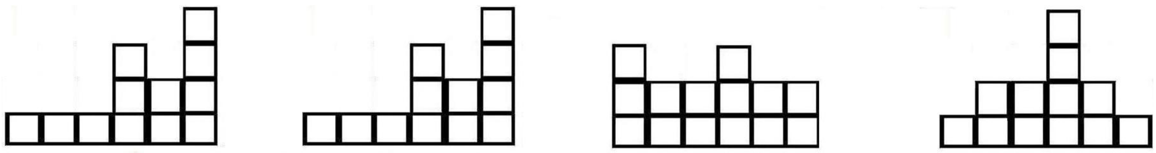


Abbildung 11: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1, p_2, p_3 und p_4 (von links nach rechts)

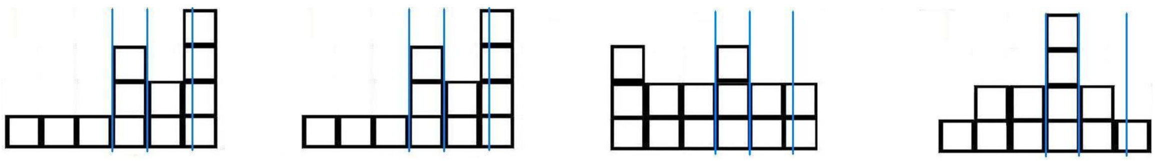


Abbildung 12: Die Spieler p_1 und p_2 teilen zusammen den Kuchen in vier gleichwertige Stücke auf.

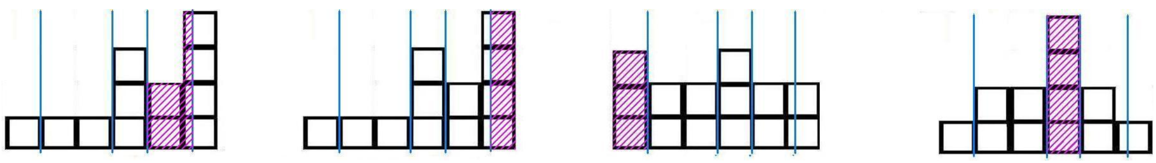


Abbildung 13: Der Spieler p_3 schneidet den Rest von dem wertvollsten Stück ab (n.s.M.) und die Spieler p_4, p_3, p_2, p_1 wählen (in dieser Reihenfolge) je ein Stück aus.

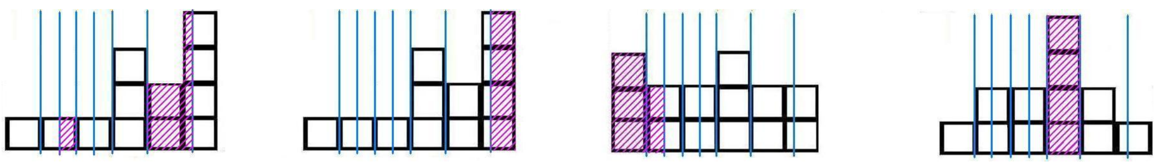


Abbildung 14: Es teilen p_2 und p_4 zusammen den Rest in vier gleichwertige Stücke auf und die Spieler p_3 und p_1 wählen (in dieser Reihenfolge) je ein Reststück aus.

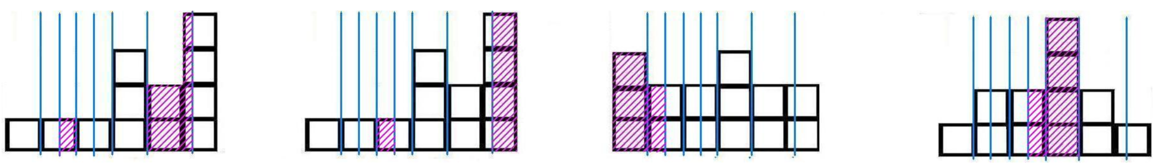


Abbildung 15: Die Spieler p_2 und p_4 nehmen je ein Reststück.

4.4 n Spieler

Es existiert ein endlich unbegrenztes, neidfreies Protokoll in [Brams et al., 1997] für eine beliebige Anzahl von Spielern.
Es folgt ein unendliches neidfreies Protokoll für eine beliebige Anzahl von Spielern.

	Ein unendliches Protokoll
· **Schritt 1**	Der erste Spieler p_1 schneidet den Kuchen X in fünf gleiche Stücke (nach seinem Maß). Der zweite Spieler p_2 sortiert diese als X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 mit: $v_1(X_1) = v_1(X_2) = v_1(X_3) = v_1(X_4) = v_1(X_5) = 1/5$ $v_2(X_1) \geq v_2(X_2) \geq v_2(X_3) \geq v_2(X_4) \geq v_2(X_5)$
· **Schritt 2**	Ist $v_2(X_1) > v_2(X_3)$ oder $v_2(X_2) > v_2(X_3)$, so schneidet p_2 ggf. von X_1 und X_2 etwas ab, so dass er $X_1' = X_1 - R_1$ und $X_2' = X_2 - R_2$ erhält mit $v_2(X_1') = v_2(X_2') = v_2(X_3)$. Ist $v_2(X_1) = v_2(X_3)$ oder $v_2(X_2) = v_2(X_3)$, so sei $X_1' = X_1$ und $X_2' = X_2$.
· **Schritt 3**	Der dritte Spieler p_3 sortiert $\{X_1', X_2', X_3, X_4, X_5\}$ als Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 mit: $v_3(Y_1) \geq v_3(Y_2) \geq v_3(Y_3) \geq v_3(Y_4) \geq v_3(Y_5)$
· **Schritt 4**	Ist $v_3(Y_1) > v_3(Y_2)$, so schneidet p_3 von Y_1 etwas ab, so dass er $Y_1' = Y_1 - R_3$ erhält mit $v_3(X_Y') = v_3(Y_2)$. Ist $v_3(Y_1) = v_3(Y_2)$, so sei $Y_1' = Y_1$.
· **Schritt 5**	Aus $\{Y_1', Y_2, Y_3, Y_4, Y_5\}$ wählen p_4, p_3, p_2, p_1 in dieser Reihenfolge je ein Stück. Falls solche Stücke noch zur Wahl stehen, muss jeder Spieler eines von den Stücken nehmen, die er selber beschnitten hat.
· **Schritt 6**	Die Reste und das übriggebliebene Stück werden verschmolzen und das Protokoll kann beliebig oft wiederholt werden.

Das folgende Protokoll lässt sich verallgemeinern, indem die Anzahl der Stücke in welche der erste Spieler in Schritt 1 den Kuchen teilt immer um einz grösser ist als die Summe der Schnitte ab Schritt 2 und bis zu dem Analogon von Schritt 5 (üblicherweise von Schritt 2 bis Schritt 2·n-3). Der i-te Spieler mit $2 \leq i \leq (n-1)$ darf immer $n - i$ Stücke beschneiden.

Beispiel 24.

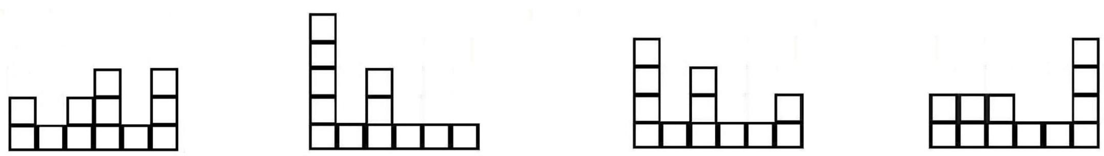


Abbildung 16: Boxendarstellungen des Kuchens für die Spieler p_1, p_2, p_3 und p_4 (v.l.n.r.)

Abbildung 17: Der Spieler p_1 viertelt den Kuchen (n.s.M.).

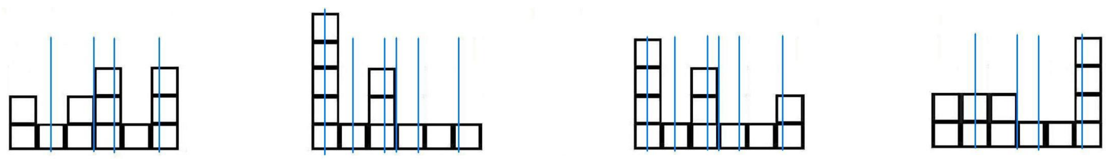


Abbildung 18: Der Spieler p_2 schneidet je einen Rest von seinen zwei wertvollsten Stücken. Der Spieler p_3 muss damit kein Stück mehr beschneiden.

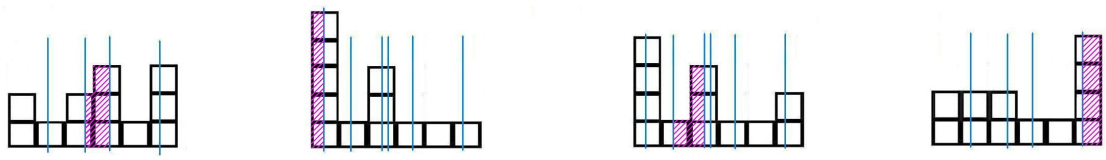


Abbildung 19: Die Spieler p_4, p_3, p_2, p_1 wählen (in dieser Reihenfolge) je ein Stück aus.

4.5 Ein Absolutum

Wie wir im Kapitel davor bereits gesehen haben, gibt es auch Protokolle die keine komplette Aufteilung liefern, aber in der Teilaufteilung neidfrei sind. So könnte man solche Teilaufteilungen untersuchen und versuchen zu vereinen. Dabei kann man auch von einem vorgegebenen Zustand ausgehen und den Kuchen bis zum Ende aufteilen. Eine solche Teilaufteilung ist hier gebenen:

Definition 25. ***(Absolutum)***
Eine Kuchenaufteilung für vier Spieler ist ein Absolutum, falls es eine Aufteilung $\{X_1, X_2, X_3, X_4, R\}$ in einem neidfreien Zustand gibt mit der Eigenschaft, dass jedem Spieler p_i das Stück X_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ bereits zugeodnet, und es gilt: Es gibt einen Spieler, so dass $v_i(X_i) > v_i(X_j) + 1/2 \cdot v_i(R)$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j$.

Satz 26. *Falls eine Kuchenaufteilung ein Absolutum ist, so existiert eine neidfreie, endlich unbeschränkte Aufteilung für vier Spieler.*

Beweis. Falls eine Kuchenaufteilung ein Absolutum ist, so ist sie in einem neidfreien Zustand und es gilt: Es gibt einen Spieler so dass $v_i(X_i) > v_i(X_j) + 1/2 \cdot R$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j$. O.B.d.A. sei dies der Spieler p_1. Der Spieler p_1 schneidet das kleinste Stück R_1 von X_1 ab, so dass $v_1(X_1')=v_1(X_j)$ für ein beliebiges $j \in \{1, 2, 3\}$. O.B.d.A. sei dies das Stück X_2. Es gilt $R' = R + R_1$ und $v_1(R_1) > 1/3 \cdot v_1(R')$, denn $v_1(X_1) > v_1(X_2) + 1/2 \cdot v_1(R)$. Sei $R_1' + \epsilon = R_1$ mit der Eigenschaft $v_1(R_1) = 1/3 \cdot v_1(R')$. Da R_1 ursprünglich zu X_1 gehört hat und unsere Teilaufteilung neidfrei war, bekommt p_1 R_1 ohne Probleme zurück. Nun schneidet p_1 von R vier gleichwertige Stücke (n.s.M.) $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ ab mit der Eigenschaft, dass $v_1(Y_i) = 1/3 \cdot v_1(R_1')$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Die Spieler suchen sich nach einem bestimmten Verfahren drei Stücke aus. Das übrige Stück bekommt p_1. Er wiederholt den letzten Schnitt aber für $1/9 \cdot v_1(R_1')$ und dannach für $(1/3)^k \cdot v_1(R_1')$ für $k \geq 3$. Das n hängt von der genauen Zahl um wieviel $v_i(X_i) > v_i(X_j) + 1/2 \cdot R$. Sei dies die Zahl c für *constant*. Also $c = v_i(X_i) - v_i(X_j) - 1/2 \cdot R$. Durch diese Zahl c können wir annehmen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}((1/3)^k) = 1/2$[1] $\iff \sum_{k=1}^{n}((1/3)^k) + \sum_{k=n+1}^{\infty}((1/3)^k) = 1/2 \iff \sum_{k=1}^{n}((1/3)^k) = 1/2 - \sum_{k=n+1}^{\infty}((1/3)^k)$ sei

[1]Dies ist der Grenzwert der geometrischen Reihe für n=3

$\sum_{k=n+1}^{\infty}((1/3)^k) =: c$ und zwar genau unsere oben definierte Zahl c. Diese Zahl ist kleiner unendlich, da die Reihe $\sum_{k=1}^{n}((1/3)^k)$ absolut[2] konvergiert und somit endlich ist. D.h. jede Teilfolge gestartet von einem $j > 1$ bis ∞ ist ebenfalls endlich und somit konstant.
Damit wurde gezeigt, dass $\sum k = 1^n(1/3)^k \cdot v_1(R_1') = 1/2 \cdot v_1(R_1')$. Dies bedeutet, dass der Spieler p_1 glaubt genau die Hälfte von dem Rest bekommen zu haben. Und würde somit bei der Restaufteilung keinen Mitspieler beneiden, auch wenn dieser den gesamten Rest bekommen würde. Nun bleibt zu zeigen, dass der Kuchen komplett aufgeteilt wurde. Aus der Sicht von Spieler p_1 gilt:
$1/3 \cdot v_1(R_1') + c + 4 \cdot \sum_{k=2}^{n}(1/3)^k \cdot v_1(R_1') = 1/3 \cdot v_1(R_1') + 4 \cdot (\sum_{k=2}^{n}(1/3)^k \cdot v_1(R_1') + 1/4 \cdot c) \Rightarrow^{c_2 := 1/4 \cdot c}$ $1/3 \cdot v_1(R_1') + 4 \cdot (\sum_{k=2}^{n}(1/3)^k \cdot v_1(R_1') + c_2) = 1/3 \cdot v_1(R_1') + 4 \cdot (1/2 - 1/3) \cdot v_1(R_1') = 1/3 \cdot v_1(R_1') + 4/6 \cdot v_1(R_1') = v_1(R_1')$. Damit ist nach Spieler p_1 der gesamte Kuchen aufgeteilt. Und aus der Eigenschaft, dass für alle Spieler eine nicht leere Teilmenge des Kuchens auch einen positiven Wert besitzt, folgt, dass der Kuchen für alle Spieler damit aufgeteilt ist. □

5 Komplexität von Protokollen

5.1 Anfragemodell nach J. Robertson und W. Webb

Erinerung:
Ein Protokoll hat am Anfang keine Informationen über die Bewertungen der Spieler, bis auf die Normalisierung. Der Kuchen X wird durch das Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ repräsentiert. Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ bezeichnet man als ein α-Punkt vom Spieler p_i für $p_i \in P_N$ die kleinste Zahl x mit der Eigenschaft $v_i([0, x]) = \alpha$ (aus den Eigenschaften der Bewertung folgt $v_i([x, 1]) = 1 - \alpha$).

Definition 27 (Anfragen im Robertson-Webb Modell)**.**

- *Schnitt($p_i; \alpha$): Der Spieler p_i macht einen Schnitt in seinem α-Punkt. Der Wert x wird an das Protokoll zurückgegeben.*

- *Bewertung($p_i; x$): Der Spieler p_i bewertet den Schnitt x (x ist dabei ein Schnitt, welcher zuvor vom Protokoll ausgeführt wurde). Dieser Wert $v_i(x)$ wird an das Protokoll zurückgegeben.*

- *Zuordnung($p_i; x_i, x_j$): Dem Spieler p_i wird das Intervall $[x_i, x_j]$ ($x_i \leq x_j$ sind zwei zuvor ausgeführte Schnitte vom Protokoll oder 0 oder 1) zugeordnet. Alle solche Intervalle sind disjunkt.*

Die Komplexität eines Protokolls ist die Summe der Anzahlen der Schnitte und Bewertungen im worst case.

5.2 Resultat von M. Magdon-Ismail, C. Busch und M. S. Krishnamoorthy

Es wurden zwei Theoreme über die unteren Schranken von starken und super neidfreien Cake-Cutting-Protokolle in [Edmonds and Pruhs, 2006] bewiesen.

[2]Aus dieser Eigenschaft folgt auch die Namensgebung

Theorem 28. *(Untere Schranke von starken neidfreien Protokollen)*
Es gibt Bewertungsfunktionen, für welche ein starkes neidfreies Cake-Cutting-Protokoll die Komplexität $\Omega(0.086 \cdot n^2)$ besitzt.

Theorem 29. *(Untere Schranke von super-neidfreien Protokollen)*
Es gibt Bewertungsfunktionen für welche ein super-neidfreies Cake-Cutting-Protokoll die Komplexität $\Omega(0.25 \cdot n^2)$ besitzt.

Das Resultat zeigt bereits einen Unterschied zu den proportionalen Protokollen ($\mathcal{O}(n\log n)$ aus Even & Paz), ist aber leider sehr schwach, da starke und super-neidfreien Cake-Cutting-Protokolle sehr starke Einschränkungen sind, und nicht immer existieren. Dagegen lieferte das folgende Theorem die lang vermutete endgültige Separation von der Proportionalität.

5.3 Resultat von A. Procaccia

Die Komplexität bei der neidfreien Aufteilung muss höher sein als bei der proportionalen, da man bei jeder Veränderung eines Stückes jeden beteiligten und unbeteiligten Spieler beachten muss.So lässt sich diese Eigenschaft, formuliert als ein kompliziertes Problem ausnutzen um $\Omega(n^2)$ als untere Schranke für die Neidfreiheit zu setzen.

Die Idee:
Die Aufgabe von jedem Spieler ist es einzeln und unabhängig von den anderen Spielern den Kuchen in Intervalle zu unterteilen. Diese Intervalle werden in Π_k^i mit $i \in \mathbb{N}$ für jeweils den p_i-ten Spieler und $k \in \mathbb{N}$, für die k-te Etappe der Gliederung, dargestellt. Wenn zwei Eigenschaften erfüllt werden, erfolgt eine Aufteilung der Stücke unter den Spieler. Die erste Eiigenschaft gilt für die Hälfte der Spieler, welche gewährleisten müssen, dass ihre Stücke, die aus einem oder mehreren Intervallen bestehend, höchstens die Länge $2/n$ haben. Ansonsten hätte der gesamte Kuchen eine Länge > 1. Die zweite Eigenschaft ist die Ausschlaggebendheit (critical). Nur wenn jedes Stück nach jedem Spieler ausschlaggebend ist, kann eine Aufteilung neidfrei sein. Ein ausschlagebendes Stück muss aus Intervallen bestehen deren Summe der Werte mindestens so gross ist, wie der Wert jedes anderen Intervalls während der Aufteilung. Denn gäbe es ein Intervall, dass mehr Wert ist als unser betrachtetes Stück, so würde es ein Gegenspieler bekommen, und es würde Neid entstehen. Jeder Spieler braucht mindestens $n/4$ Ausführungen der Aufteilung um nur Intervalle mit höchstens Länge $2/n$ zu bekommen. Diese Anzahl folgt aus der Durchführung, denn es lassen sich höchstens zwei zusätzliche Intervalle in einer Etappe der Gielderung erzeugen. Bevor dies der Fall ist, kann das Stück des jeweiligen Spieler nicht ausschlaggebend und damit die Aufteilung nicht neidfrei sein. Damit gilt für die Komplexität $\Omega(\#Spieler \cdot \#Ausführungen) = \Omega(n/2 \cdot n/4) = \Omega(n^2)$.
Hier wird eine untere Schranke gezeigt, damit kann die tatsächliche Anzahl der Etappen der Gliederung weit aus höcher sein, als das hier angegebene Minimum $n/2 * n/4$. Dies ist vergleichbar mit einer Dauerangabe einer Wegbeschreibung. Der direkte und kürzeste Weg ist nicht immer möglich, aber nur auf Grund der Entfernung lassen sich die Mindestangaben formulieren. Genauso ist es nichtssagend über die kürzeste Wegdauer, wenn die betrachtete Person zunächst im Kreis läuft und erst dann die Distanz hinterlegt.

Veranschaulichung an einem Beispiel:

Man führt solange Schnitt- und Bewertungsanfragen aus bis mindestens $n/2$ Spieler nur Intervalle der Länge kleiner gleich $2/n$ haben und diese werden dann auf Ausschlaggebenheit untersucht. Die Länge der Intervalle muss kleiner gleich der Länge des Stückes sein, welches der Spieler bekommt, sein, da jedes Stück Kuchen die Vereinigung von endlich vielen disjunkten Intervallen ist.

Beispiel für vier Spieler mit mindestens drei Schnitten:(dies ist das Minimum um vier Stücke zu erhalten):

- Ausgangssituation: $\Pi_1^0 = \{[0,1]\}$, $\Pi_2^0 = \{[0,1]\}$, $\Pi_3^0 = \{[0,1]\}$, $\Pi_4^0 = \{[0,1]\}$
- Schnitt($p_1; 1/3$)=1/4
  $\Pi_1^1 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^1 = \{[0,1]\}$, $\Pi_3^1 = \{[0,1]\}$, $\Pi_4^1 = \{[0,1]\}$
- Schnitt($p_2; 1/2$)=3/4
  $\Pi_1^2 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^2 = \{[0,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_3^2 = \{[0,1]\}$, $\Pi_4^2 = \{[0,1]\}$
- Bewertung($p_3; [1/4,3/4]$)=7/8, Protokoll erfährt zusätzlich $v_3([0,1/4]) = 1/16$ und $v_3([3/4,1]) = 1/16$.
  $\Pi_1^3 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^3 = \{[0,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_3^3 = \{[0,1/4],[1/4,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_4^3 = \{[0,1]\}$
- Schnitt($p_4; 1/2$)=1/2 (Das Minimum der Schnitte wurde erreicht.)
  $\Pi_1^4 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^4 = \{[0,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_3^4 = \{[0,1/4],[1/4,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_4^4 = \{[0,1/2],[1/2,1]\}$
- Bewertung($p_4; [1/4,3/4]$)=7/10, Protokoll erfährt zusätzlich $v_4([0,1/4]) = 1/10$, $v_4([1/4,1/2]) = 4/10$, $v_4([1/2,3/4]) = 3/10$ und $v_3([3/4,1]) = 2/10$. Damit sind alle Intervalle bewertet und die Länge aller Intervalle ist kleiner 1/2.
  $\Pi_1^5 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^5 = \{[0,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_3^5 = \{[0,1/4],[1/4,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_4^5 = \{[0,1/4],[1/4,1/2],[1/2,3/4],[3/4,1]\}$
- Bewertung($p_3; [1/4,1/2]$)=5/8, Protokoll erfährt zusätzlich $v_3([1/2,3/4]) = 2/8$. Auch hier ist die Länge kleiner 1/2. Nun haben wir 2 Spieler mit dieser Eigenschaft und können eine Aufteilung versuchen und die Ausschlaggebendheit untersuchen.
  $\Pi_1^6 = \{[0,1/4],[1/4,1]\}$, $\Pi_2^6 = \{[0,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_3^6 = \{[0,1/4],[1/4,1/2],[1/2,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_4^6 = \{[0,1/4],[1/4,1/2],[1/2,3/4],[3/4,1]\}$
- Der Spieler p_1 würde das Stück X_1 bekommen. Dieses Stück ist nicht ausschlaggebend, denn für das Intervall I_1 gilt $v_1(X_1) < v_1(I_1)$, damit könnten X_4 oder X_3 mehr Wert sein (n.s.M.). Also führen wir noch einen Schritt aus.
- Bewertung($p_1; [1/2,3/4]$)=1/4, Protokoll erfährt zusätzlich $v_1([1/4,1/2]) = 1/6$ und $v_1([3/4,1]) = 1/4$
  $\Pi_1^7 = \{[0,1/4],[1/4,1/2],[1/2,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_2^7 = \{[0,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_3^7 = \{[0,1/4],[1/4,1/2],[1/2,3/4],[3/4,1]\}$, $\Pi_4^7 = \{[0,1/4],[1/4,1/2],[1/2,3/4],[3/4,1]\}$
- Nun sind alle Stücke ausschlaggebend und über die Hälfte der Spieler haben nur Intervalle mit der Länge kleiner gleich 1/2. Als liegt einer Aufteilung nichts mehr im Wege und wir führen diese aus.

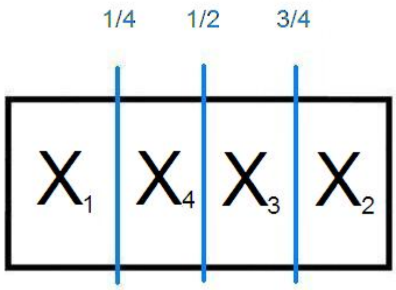


Abbildung 20: Die Aufteilung

6 Zusammenfassung und Ausblick

Es kann untersucht werden, ob einige Protokolle Neid garantieren. Wenn man z.B. dem ersten Spieler seinen proportionalen Anteil zuordnet und davon ausgeht, dass die Bewertungsfunktionen nicht gleich sind, so ist Neid garantiert.
Ein weiteres natürliches Problem ist die Aufteilung mit Vollmachten. So übertragen z.B. ein Teil der Spieler ihre Vollmacht an einen Verantwortlichen, dieser sieht ihre Bewertungen und kann somit Ihnen Stücke zuordnen. Hier untersuche man, ob die Neidfreiheit leichter oder schwieriger erreicht werden kann. Außerdem kann nun in Abhängigkeit der Ehrlichkeit des Verantwortlichen die Effizienz der Aufteilungen geprüft werden. Es kann auch geprüft werden, wie sich die Aufteilung entwickelt, wenn ein Spieler die Vollmacht von allen Anderen hat. Oder wenn mehrere Spieler Vollmachtbeauftragte sind (z.B. Scheidung und das Kind lässt beide Eltern für es alles regeln).
Es kann untersucht werden, ob die Aufteilung mit offenen Bewertungsfunktionen gleichwertig mit dem Finden eines Nash-Gleichgewichtes ist.

6.1 Simulation durch ein Programm

Um die Forschungen in diesem Gebiet zu erleichtern, könnte ein Computerprogramm mit folgenden Eigenschaften erstellt werden.

Spieler
Die Anzahl der Spieler wird am Anfang eingegeben und für jeden der Spieler wird eine eigene Kopie des Kuchens, sowie eine Bewertungsfunktion für den Kuchen die er bekommt erstellt.

Kuchen
Der Kuchen wird für jeden Spieler durch zufällig verstreute Punkte in dem Bereich des Kuchens (Intervall $[0, 1]$) repräsentiert.
Man kann es sich vorstellen, als ob in eine Backform Salz, Zucker, Pfeffer etc. verstreut wird.

Maß
Jeder Spieler bewertet ein Stück Kuchen in Abhängigkeit von der Anzahl seiner Punkte. Zum Beispiel ist ein Spieler nur am Salz interessiert, ein Anderer nur am Zucker.

Vorgehensweise
Die einzelnen Schritte des geprüften Protokolls werden eingegeben und ausgeführt.

Ergebnis
Am Ende ist der gesamte Kuchen aufgeteilt und jeder Spieler bewertet sein Stück und die Stücke der Mitspieler. Es wird geprüft ob die entstandene Allokation neidfrei ist.

Bemerkungen
Es können Spezialfälle eingestellt werden z.B. ein Spieler hat nur seine Punkte im Bereich$[0, 1/2]$. Somit ist das Programm sehr realitätsbezogen.
Es können neue Prokolle auf ihre Neidfreiheit geprüft werden.
Man kann hiermit auch proportionale Protokolle auf neidfreie Erwartungswerte überprüfen und somit vergleichen.
Beispiel: Man lässt zwei proportionale Protokolle 1000 mal durchlaufen mit stets unterschiedlicher Punkteverteilungen des Kuchens und bekommt an Ende einen Durchschnittswert über die Anzahl der Spieler und die Häufigkeit ihrer Beneidung der Anderen.

Literaturverzeichnis

[Su] Cloutier,Nyman,Su: "Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division"

[Brams and Taylor, 1995] S. J. Brams and A. D. Taylor. An envy-free cake division protocol. *The American Mathematical Monthly*, 102(1):9-18, 1995.

[Brams et al., 1997] S. J. Brams, A. D. Taylor, and W. S. Zwicker. A moving-knife solution to the four-person envy free cake division problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(2):547-554, 1997.

[Busch et al., 2005] C. Busch, M. S. Krishnamoorthy, and M.Magdon-Ismail. Hardness results for cake cutting. *Bulletin of the EATCS*, 86:85-106, 2005

[Edmonds and Pruhs, 2006] J. Edmonds and K. Pruhs. Cake cutting really is not a piece of cake. In*Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 271-278, 2006.

[Even and Paz, 1984] S. Even and A. Paz. A note on cake-cutting. *Discrete Applied Mathematics*, 7:285-296, 1984.

[Robertson and Webb, 1998] . M. Robertson and W. A. Webb. *Cake Cutting Algorithms: Be Fair If You Can.* A. K. Peters, 1998.

[Steinhaus, 1948] H. Steinhaus. The problem of fair division. *Econometrica*, 16:101-104, 1948.

[Stromquist, 1980] W. Stromquist. How to cut a cake fairly. *American Mathematical Monthly*, 87(8):640-644, 1980.

[Stromquist, 2008] W. Stromquist. Envy-free cake divisions cannot be found by finite protocols. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 15:#R11, 2008.

[Woeginger and Sgall, 2007] G. J. Woeginger and J. Sgall. On the complexity of cake cutting. *Discrete Optimization*, 4:213-220, 2007.

[MIBK03] M. Magdon-Ismail, C. Busch, and M. Krishnamoorthy. Cake-cutting is not a piece of cake. In *Proceedings of the 20th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 596-607. Springer-Verlag *Lecture Notes in Computer Science* #2607, 2003.

[Pro09] A. Procaccia. Thou shalt covet thy neighbor's cake. In *Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 239-244. IJCAI, July 2009.

[BT96] S. Brams and A. Taylor. *Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution.* Cambridge University Press, 1996.

[BTZ97] S. Brams, A. Taylor, and W. Zwicker. A moving-knife solution to the four-person envy-free cake-division problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(2):547-554, 1997.

[Cha85] A. Chauduri. Formal properties of interpersonal envy. *Theory and Decision*, 18:301-312, 1985.

[EP06b] J. Edmonds and K. Pruhs. Cake cutting really is not a piece of cake. In *Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 271-278. ACM Press, 2006.

[FK74] A. Feldman and A. Kirman. Fairness and Envy. *The American Economic Review*, 64(6):995-1005, 1974.

[MIBK03] M. Magdon-Ismail, C. Busch, and M. Krishnamoorthy. Cake-cutting is not a piece of cake. In *Proceedings of the 20th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 596-607. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science #2607, 2003.

[RW98] J. Robertson and W. Webb. *Cake-Cutting Algorithms: Be Fair If You Can.* A K Peters, 1998.

[Var74] H. Varian. Equity, envy, and efficiency. *Journal of Economic Theory*, 9(1):63-91, 1974.

[Ste49] H. Steinhaus. Sur la division pragmatique. *Econometrica*, 17:315-319, 1949. Supplement.

[Wel85] D.Weller. Fair division of a measurable space. *Journal of Mathematical Economics*, 14(1):5-17, 1985.

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

[Su] Cloutier,Nyman,Su: ”Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division”

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Düsseldorf, 21. September 2010 Alina Elterman