INSTITUT FÜR
INFORMATIK
Lehrstuhl für Komplexitätstheorie und
Kryptologie

Universitätsstr. 1 D–40225 Düsseldorf

Game-theoretic Analysis of Strategyproofness in Cake-cutting Protocols

Alina Elterman

Bachelorarbeit

Beginn der Arbeit:	01. September 2011
Abgabe der Arbeit:	05. Dezember 2011
Gutachter:	Prof. Dr. Jörg Rothe
	Prof. Dr. Peter Kern

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst habe. Ich habe dazu keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet.

Düsseldorf, den 05. Dezember 2011

Alina Elterman

Abstract

Hier kommt eine ca. einseitige Zusammenfassung der Arbeit rein.

Contents

1 Inroduction

Cake Cutting is an interdisciplinairy field which is commonly researched and part of economics, political science, mathematics, operations research, and computer science. Game Theory is fulfilling the same property. Except for the fact, they have hardly something in common. While CC is about a fair division of a heterogenous divisible good, game theory is used for mathematically defining lifes procceses and analysing them.

2 Preliminaries

2.1 Preliminaries of Game Theory

2.2 Preliminaries of Cake-cutting

2.2.1 Basics

First of all we need to define the components of cake-cutting. The following example sketches the problem statement.

Beispiel. *It was the year 1922 in London, Alan Mathison Turing was visiting a friend on his birthday. There was aswell Vilfredo Federico Pareto, Karl Popper, Felix Hausdorff und Charles West Churchman.*

Now, what exactly is cake-cutting about? It involves a discrete set of $n \in \mathbb{N}$ agents (or players[1]) $P_n = \{p_1, \cdots, p_n\}$. After the assumption each of them wants to get as much as possible of the good. Only the allocation of a single, divisible and heterogenous good is included in the consideration of this work. It is common to use for the visualization a rectangular cake.

bild kuchen

The division is performed by parallel cuts. The cake X is represented by the unit interval $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Each subinterval $I' \subseteq I$ or a union of subintervals with $I_m \subseteq I$ is named as a boundle (piece). All boundles are disjoint. The boundle of the cake, which the player p_i receives is denoted as X_i. When all boundles of the cake are owned by players, this state is called an ALLOCATION. Each piece has a public length, which can be computed as the sum of all bourderdifferences and the private value of a player.

Each player $p_i \in P_n$ has a valuation function (valuation) $v_i : \{X' | X' \subseteq X\} \mapsto [0, 1]$ on the cake X with the following properties:

1. Non-negativity[2]: $v_i(C) \geq 0$ forall $C \subseteq [0, 1]$.
2. Normalisation: $v_i(\emptyset) = 0$ and $v_i([0, 1]) = 1$.
3. Monotonicity: if $C' \subseteq C$ then $v_i(C') \leq v_i(C)$.
4. Additivity: $v_i(C \cup C') = v_i(C) + v_i(C')$ for disjoint $C, C' \subseteq [0, 1]$.
5. Divisibility: forall $C \subseteq [0, 1]$ and all $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, exist a $B \subseteq C$, so that $v_i(B) = \alpha \cdot v_i(C)$.
6. v_i is continuous: if $0 < x < y \leq 1$ with $v_i([0, x]) = \alpha$ and $v_i([0, y]) = \beta$, than for every $\gamma \in [\alpha, \beta]$ there exist a $z \in [x, y]$ so that $v_i([0, z]) = \gamma$.
7. Emptyness of single points: $v_i([x, x]) = 0$ forall $x \in [0, 1]$.

[1] common used in the game theoretic sence

[2] It is common to require positivity: $v_i(C) > 0$ forall $C \subseteq [0, 1]$ and $C \neq \emptyset$

Different Types of Fairness

The goal of the fair division of a heterogeneous, continious good is to allocate the resource in a fair manner. But what is fair? It can be seen as a efficiency criteria of an allocation, which can be normalized and gives a possibility to compare different allocations. We distinguish between the following fairness criteria.

Definition. ***(Proportional or simple fair)***
An allocation is proportional (simple fair), if $v_i(X_i) \geq 1/n$ *for each player* $p_i \in P_N$*.*

Definition. ***(Envy-freeness)***
An allocation is envy-free, if $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$ *for each couple of players* $p_i, p_j \in P_N$*.*

The following conditions can also be used on the proportional case.

Definition. ***(Strong Envy-freeness)***
An allocation is strong-envy-free, if $v_i(X_i) > v_i(X_j)$ *for each couple of players* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$*.*

Definition. ***(Super Envy-freeness)***
An allocation is super-envy-free, if $v_i(X_j) \leq 1/n$ *for each couple of players* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$*.*

Definition. ***(Strong Super Envy-freeness)***
An allocation is stong-super-envy-free, if $v_i(X_j) < 1/n$ *for each couple of players* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$*.*

Hereby is the problem, that for the stronger conditions an allocations cannot exist always, like in the case when all players have equal values on the cake.

Correlation between the Fairness-Properties

Lemma. *Forall allocations* [3]*:*

1. *Every envy-free allocation is proportional.*
2. *For two players an allocation is envy-free iff it is proportional.*

Definition. ***(Efficiency)***
An allocation is efficient (Pareto optimal) if no other allocation exist, where one player do better, without becomming worse for an other player.

[3] the proof can be found in []

MEHR UEBER EHRLICHKEIT UND STRATEGIESICHERHEIT (mind. eine SEITE)

2.2.2 Strategyproofness

Definition. ***(Thruthfully)*** *An allocation is thruthful if there are no valuations where a player will do better by lying.*

Only such divions are interesting, where without explicit compelling the players to be thruthful, they will be it, because it is their best strategy It is common that by not following the strategy of the protocol the player get into the risk to loose the garanty for their fair share. At the end of an allocation it can be proven whether every player got his fair share. Each protocol

Different Types of Protocols

Since the protocols are going to be analysed in this work, it is very important to understand the types, structure and design of them. **Classes of Protocols**

Intuitive Beschreibung:(Algorithmus)
In der Mathematik, Informatik und verwandten Gebieten, ist ein Algorithmus eine effektive Methode zur Probleml"osung, ausgedr"uckt durch eine endliche Folge von Anweisungen.

Definition. ***(Protokoll (Cake-Cutting-Protokoll))***
Ein Protokoll (Cake-Cutting-Protokoll) ist ein adaptiver Algorithmus mit mehreren Spielern und folgenden Eigenschaften:

- *It consists of rules and strategies.*
  Rules sind Anweisungen, die gefordert werden ohne die Bewertungen der Spieler zu kennen.
  Strategies sind Empfehlungen, welchen der Spieler folgen muss um garantiert seinen gerechten Anteil zu bekommen.
- *Sofern ein Spieler sich nicht an die Strategie des Protokolls h"alt, verliert er seinen Anspruch nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein St"uck des Kuchens zu bekommen, welches dem geforderten Gerechtigkeitskriterium entspricht. Sein Vorgehen hat aber keine Auswirkungen auf die Anteile der anderen Spieler.*
- *Jeder Spieler muss zu jeder Zeit in der Lage sein v"ollig unabh"angig von den anderen Spielern den Kuchen zu teilen (einen Schnitt zu machen).*
- *Das Protokoll besitzt keine Informationen "uber die Bewertungen der Spieler, ausser denen die angefragt wurden in dem jeweiligen oder in den vorherigen Schritten.*

Definition. *Ein Cake-Cutting-Protokoll wird proportional, neidfrei, stark neidfrei etc. genannt, falls unabh"angig von den Bewertungsfunktionen der Spieler, jede Aufteilung entsprechend proportional, neidfrei etc., unter der Vorraussetzung, dass alle Spieler die vom Protokoll vorgegebenen Regeln und Strategien befolgen, ist.*

Eines der Ziele von Cake-Cutting ist solche Protokolle anzugeben.[4]

Definition. ***(endlich (diskret)/kontinuierlich)***
Ein endliches (diskretes) Protokoll liefert eine L"osung nach einer endlichen Anzahl von Entscheidungen (Bewertungen, Markierungen,...), dagegen muss ein Spieler bei einem kontinuierlichen Protokoll unendlich viele Entscheidungen treffen.

Definition. ***(endlich beschr"ankt/endlich unbeschr"ankt))***
Ein endlich beschr"anktes Protokoll hat eine obere Grenze von Schritten, welche im ung"unstigsten Fall betrachtet wird. Die gesamte Anzahl von Entscheidungen h"angt, wenn "uberhaupt, dann nur von der Anzahl der beteiligten Personen ab. Ein endlich unbeschr"anktes Protokoll hat hingegen eine nicht im Voraus absch"atzbare Anzahl.

[4]Siehe auch Definition von [**?**], Robertson und Webb:"Approximating ..." und Woeginger,Sgall:"An Aproximation Scheme..." oder "CC is not a piece of cake" von magdon....

Die am meisten gesuchten Protokolle sind endlich beschr"ankt, da sie am einfachsten in der Realit"at umsetzbar sind. Aber es gibt eine Art von kontinuierlich Protokollen, an denen ebenfalls Interesse besteht.

Definition. ***(Moving-Knife-Protokoll)***
Ein Schiedsrichter, welcher unparteisch gegen"uber den Spielern ist und unbeteiligt an der Verteilung der St"ucke, schwenkt ein Messer kontinuierlich von links nach rechts und macht parallele Schnitte sofern ein Spieler "Halt!" ruft. Bei manchen MKP wird der Schiedsrichter ausgelassen und nur ein Messer oder Schwert geschwungen.

2.3 The Degree of Guaranteed Envy-freeness

Motivation For $n \geq 4$ ist es offen, ob es ein neidfreies, endlich beschranktes CCP gibt!

$\Rightarrow$ Abschwachen des Ideals der Neidfreiheit.

Definition. *Sei eine Aufteilung des Kuchens* $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ *fur die Menge* $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ *der Spieler gegeben, wobei* v_i *das Mass von* p_i *und* X_i *die Portion von* p_i *ist.*

- *Eine Neidrelation("envy relation")* $\Vdash$ *ist eine Binarrelation auf* $P(\Vdash, PxP)$: p_i *beneidet* p_j $(p_i \Vdash p_j)$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, *falls* $v_i(X_i) < v_i(X_j)$.
- *Eine Neidfrei-Relation ("envy-free relation")* $\nVdash$ *ist eine Binarrelation auf* P : p_i *beneidet nicht* p_j $(p_j \nVdash p_j)$,$1 \leq i, j \leq n$,$i \neq j$, *falls* $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$.

Eigenschaften von $\Vdash$ und $\nVdash$:

- $\Vdash$ ist irreflexiv, denn $v_i(X_i) < v_i(X_i)$ gilt nie
- $\nVdash$ ist reflexiv, denn $v_i(X_i) \geq v_i(X_i)$ gilt immer
  Die triviale Beziehung $p_i \nVdash p_i$ zahlt in der Regel nicht mit.
- $\Vdash$ und $\nVdash$ sind nicht transitiv.
  Gilt z.B. $p_i \Vdash p_j$ und $p_j \Vdash p_k$, so kann man daraus nichts uber $v_i(X_k)$ schliessen: $p_i \nVdash p_k$ ist moglich

$\Rightarrow$ Es gibt die folgenden Moglichkeiten:

1. Zwei-Wege-Neid: $p_i \Vdash p_j$ und $p_j \Vdash p_i$
   (Tausch der Portionen macht beide glucklich.)
2. Zwei-Wege-Neidfreiheit: $p_i \nVdash p_j$ und $p_j \nVdash p_i$
   (Alles ist gut.)
3. Ein-Weg-Neid: $p_i \Vdash p_j$ und $p_j \nVdash p_i$
   Ein-Weg-Neidfreiheit: $p_j \Vdash p_i$ und $p_i \nVdash p_j$

Fallerzwungene Neid- bzw. Neidfrei-Relationen: hangen ab von einem Fall geeigneter Masse.
Garantierte Neid- bzw. Neidfrei-Relationen: gelten in jeden Fall (auch im worst case), also unabhangig von den Massen der Spieler.
Anzahl garantierter Neidfrei-Relationen = $\min\limits_{alleFaelle}$ Anzahl der fallerzwungenen Neidfrei-Relationen.

Beispiel. *Aufteilung* $X = X_F \cup X_G \cup X_H$ *des Kuchens mit*

	$X_F = \begin{array}{ccc} & & \square \\ & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$	$X_G = \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ 7 & 8 & 9 \end{array}$	$X_H = \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$
F	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
G	$\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
H	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ *nicht proportional wegen* $v_G(X_g) = \frac{1}{6} < \frac{1}{3}$.
Es gibt:

Ein-Weg-Neid von G zu F:
$G \Vdash F$ *wegen* $v_G(X_G) = \frac{1}{6} < v_G(X_F) = \frac{1}{2}$
Gleichzeitig ist dies
$F \nVdash G$ *wegen* $v_F(X_G) = \frac{1}{3} = v_F(X_F)$

Ein-Weg-Neidfreiheit von F zu G

Zwei-Wege-Neidfreiheit zwischen F und H
$F \nVdash H$, *da* $v_F(X_F) = \frac{1}{3} = v_F(X_H)$
$H \nVdash F$, *da* $v_H(X_H = \frac{6}{18} > \frac{5}{18} = v_H(X_F)$

Zwei-Wege-Neid zwischen G und H
$G \Vdash H$, *da* $v_g(X_G) = \frac{1}{6} < \frac{1}{3} = v_G(X_H)$
$H \Vdash G$, *da* $v_H(X_H) = \frac{1}{3} < \frac{7}{18} = v_H(X_G)$

DGEF = Anzahl der Neidfrei-Relationen im worst case

Protokoll. *Jorg erhalt den Kuchen.*
DGEF $: n - 1 + (n-1)(n-2) = n - 1 - n^2 - 3n + 2 = n^2 - 2n - 1$

Satz. 1. *Jedes neidfreie CCP fÃ$\frac{1}{4}$r $n \geq 1$ Spieler hat einen **DGEF** von $n(n-1)$.*

2. *Sei $d(n)$ der **DGEF** eines proportionalen CCPs mit $n \geq 2$ Spielern. Dann gilt: $n \leq d(n) \leq n(n-1)$.*

Proof. 1. Da wir $p_i \nVdash p_i$ fur alle i, $1 \leq i \leq n$, ausser 8 lassen, hat jeder der n Spieler zu jedem anderen Spieler eine Neidfreie-Relation, insgesamt also $n(n-1)$.

2. $n = 2$ Offenbar gilt: $d(2) = 2$, denn da das CCP proportional ist, gilt: $v_1(X_1) \geq \frac{1}{2}$ und $v_2(X_2) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow v_1(X_1) \geq v_1(X_2)$ und $v_2(X_2) \geq v_2(X_1)$

$n \geq 3$ Da $p_i \nVdash p_i$ fÃ$\frac{1}{4}$r alle i ignoriert wird, gilt $d(n) \leq n(n-1)$.

In einer proportionalen Aufteilung gilt:
$v_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$ fÃ$\frac{1}{4}$r $1 \leq i \leq n$.

$\Rightarrow$ Keiner der n Spieler kann gleichzeitig alle anderen Spieler bendeidenl, denn: Angenommen, das ware nicht so. Konkret: $p_1 \nVdash p_2$

$\Rightarrow$ $v_1(X_2) > v_1(X_1) \geq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow$ $v_1((X - X_1) - X_2) < \frac{n-2}{n}$
$\Rightarrow$ $(X - X_1) - X_2$ kann nicht so in $n-2$ Portionen aufgeteilt werden, dass $v_i(X_j) \geq \frac{1}{n}$ fÃ¼r alle $j, 3 \leq j \leq n$, gilt.
$\Rightarrow$ es gibt ein $j, 3 \leq j \leq n$, so dass $v_i(X_j) < \frac{1}{n}$, gilt.
$\Rightarrow$ $p_i \nVdash p_j$

Also hat jeder der n Spieler mindestens eine garantierte Neidfrei-Relation zu einem anderen Spieler: $n \leq d(n)$

□

Definition (lemma). *Verlangen die Regeln/Strategien eines proportionalen CCPs fÃ¼r $n \geq 2$ Spielern von keinem Spieler, die Portionen der anderen Spieler zu bewerten, dann ist der **DGEF** $= n$.*

Proof. $n = 2$ Proportionalitat $\Rightarrow$ Neidfreiheit
best case = worst case
und wie vorher: **DGEF** $= 2 = n$

$n \geq 3$ Betrachte das folgende Szenario: FÃ¼r eine gegebene Aufteilung $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, die proportional ist, aber sonst keinerlei Einschrankungen unterliegt, setzen wir die Masse der Spieler so:
FÃ¼r jedes $i, 1 \leq i \leq n$, bewertet p_i:

- die eigene Portion X_i mit $v_i(X_i) = \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} \Rightarrow$ proportional!
- die Portion X_j eines Spielers $p_j, j \neq i : v_i(X_j) = \frac{2}{n} < \frac{1}{n}$
- jede der $n-2$ Ã¼brigen Portionen X_k der Spieler $p_k, |i,j,k| = 3, v_i = (X_k) = \frac{n+1}{n^2} > \frac{1}{n}$

Insgesamt gilt dann fÃ¼r jedes $i, 1 \leq i \leq n$:

1. $v_i(X) = v_i(\bigcup_{j=1}^{n} X_j) \overset{\text{Additivitat}}{=} \sum_{j=1}^{n} v_i(X_j) = \frac{1}{n^2}(n + 2 + (n-2)(n+1)) = \frac{1}{n^2}(n + 2 + n^2 + n - 2n - 2) = 1$
2. p_i hat $n-2$ Neidrelationen und nur eine Neidfrei-Relation
$\Rightarrow$ Insgesamt gibt es n garantierte Neidfrei-Relationen, eine fÃ¼r jeden Spieler.

□

Satz. *Das Last-Diminisher-Protokoll hat einen **DGEF** von* $\frac{n(n-1)}{2} + 2$

Proof. **Runde 1** Sei $\bar{p}_1$ der Spieler, der die erste Portion erhalt. Jeder andere Spieler bewertet diese mit $\leq \frac{1}{n}$, beneidet also $\bar{p}_1$ nicht
$\Rightarrow n - 1$ garantierte Neidfrei-Relationen

Runde $i, 1 < i < n$ Analog zu Runde 1 konnen $n - i$ Neidfrei-Relationen garantiert werden. $\bar{p}_i$, der die ite Portion erhalt, wird von den verbleibenden Spielern nicht beneidet.
$\Rightarrow$ mindestens $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n-1}{2}$ garantierte Neidfrei-Relationen

Letzte Runde

1. Cut & Choose zwischen $\bar{p}_{n-1}$ und $\bar{p}_n$. Keiner dieser beiden beneidet den anderen.
   $\Rightarrow$ eine zusatzliche garantierte Neidfrei-Relation.
2. Da Last-Diminisher proportional ist, gibt es eine weitere garantierte Neidfrei-Relation fÃ¼r $\bar{p}_1$

$\Rightarrow$ **DGEF** $= \frac{(n-1)n}{2} + 2$ □

Satz. *Das Lone-Chooser-Protokoll hat einen* ***DGEF*** *von n.*

Proof. Kein Spieler bewertet die Portion irgendeines anderen Spielers.
$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ **DGEF** $= n$ □

3 Proportional Procedures and their DGEF

Each proportional procedure consist of rules and strategies. Since the rules are compulsory, the strategies of e... . In this chapter the strategies of common used procedures are shown (probably specialised, if doible(?)) and explained with examples. Then their strategyproofness is analysed. During complications the effect on the DGEF is shown. Complete procedures can be found in [].

3.1 The Steinhaus-Kuhn lone divider procedure

3.2 The Banach-Knaster last-diminisher procedure

satz

Falls die Bewertungsfunktionen der Spieler nicht "ubereinstimmen, gibt es eine nicht ehrliche Strategie f"ur den ersten Spieler in jeder Runde ein St"uck mit $v_i(S_i) > 1/N$ zu bekommen. **satz proof** Im Schritt 1: Das abgeschnittene St"uck soll den Wert $1/N+$ Rest von S_1 haben.
Fallunterscheidung: Entweder Spieler p_1 kriegt dieses St"uck oder Spieler p_i beschneidet es und somit kann Spieler p_1 ein solches St"uck in der darauffolgenden Runde bekommen, oder bei Cut und Choose am Ende. **proof**

3.3 The Fink lone-chooser procedure

3.4 The Cut-Your-Own-Piece procedure

3.5 The Divide-and-Conquer procedure

3.6 Erweiterte procedure

3.7 Erweitertung der Erweiterten procedure

4 Related Work

5 Conclusions and Open Questions/Problems

List of Figures

List of Tables