PD Dr. habil. Radu Ioan Boţ
Li Luo

Düsseldorf, 21. Oktober 2010
Abgabe am 28. Oktober 2010

Einführung in die Optimierung

2. Übungsblatt

7. Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{rl} \max & 4x+6y. \\ \text{u.d.N.} & x+4y \leq 22 \\ & 2x+3y \leq 19 \\ & 3x+2y \leq 21 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$$

   (a) Lösen Sie das Programm graphisch.
   (b) Überführen Sie das Programm in Normalform.
   (c) Bestimmen Sie alle zulässigen Basislösungen rechnerisch.

(3 Punkte)

8. Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die reellen Zahlen r, s und t, damit das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rl} \max & x_1+x_2 \\ \text{u.d.N.} & rx_1+sx_2 \leq t \\ & x_1,x_2 \geq 0 \end{array}$$

   (a) unzulässig ist;
   (b) unbeschränkt ist;
   (c) eine Optimallösung besitzt.

(4 Punkte)

9. Überführen Sie das folgende Problem in Normalform

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcr} \max & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & - & 2. & & \\ \text{u.d.N.} & 3x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & & \leq & -1 \\ & x_1 & + & 3x_2 & & & & & - & 2x_5 & & & \leq & 3 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & + & x_5 & & & = & -2 \\ & 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & & & = & 1 \\ & -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & - & 3x_5 & & & \geq & -3 \\ & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 2x_5 & & & \geq & 2 \\ & \multicolumn{13}{r}{x_1 \geq 3, x_2 \leq -2, x_3 \leq 0, x_4 \geq -1} \end{array}$$

(2 Punkte)

10. Ermitteln Sie alle zulässigen Basislösungen der folgenden Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4. & & \\ \text{u.d.N.} & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

(2 Punkte)

11. (Satz 3.4 aus der Vorlesung)

    Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geqq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\operatorname{grad}(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

    (a) x ist eine Ecke von P.

    (b) x ist ein zulässiger Basisvektor von P zu einer geeigneten Basis.

(2 Punkte)

12. Es sei x ein Basisvektor zur Basis B des durch

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geqq 0\},$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$, beschriebenen Polyeders. Zeigen Sie, dass ein Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^n$ existiert so, dass x die **einzige** Optimallösung von

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{u.d.N.} & Ax = b \\ & x \geqq 0 \end{array}$$

ist.

Hinweis. Verwenden Sie die Aussage (4.1) aus der Vorlesung. (3 Punkte)