Prof. J. Rothe Düsseldorf, 2.12.2010

Übung zur Vorlesung im WS 2010/2011
Algorithmische Eigenschaften von Wahlsystemen I

(Lösungsvorschläge)

Blatt 7, Abgabe am 9. Dezember 2010

Aufgabe 1 (PARTITION und SS): Die Entscheidungsprobleme PARTITION und SUBSET SUM seien wie folgt definiert:

PARTITION	
Gegeben:	Eine Folge $(s_1, \ldots, s_n)$ positiver ganzer Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} s_i$ ist eine gerade Zahl.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass gilt $\sum_{i \in A} s_i = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}-A} s_i$?

SUBSET SUM (SS)	
Gegeben:	Eine Folge $(s_1, \ldots, s_n)$ positiver ganzer Zahlen und eine positive natürliche Zahl k.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass gilt $\sum_{i \in A} s_i = k$?

Es sei nun $(1, 9, 5, 3, 8)$ gegeben.

(a) Ist $(1, 9, 5, 3, 8)$ eine Ja-Instanz für PARTITION? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Entscheiden Sie für jedes $k \in \{2, 12, 15, 17\}$, ob $((1, 9, 5, 3, 8), k)$ eine Ja-Instanz für SUBSET SUM ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschläge: Es gilt $\sum_{i=1}^{5} s_i = 26$.

(a) Es ist eine Ja-Instanz mit der Partition $(A, \{1, \ldots, 5\} - A)$, wobei $A = \{1, 2, 4\}$. Es gilt $\sum_{i \in A} s_i = 1 + 9 + 3 = 13$.

(b) $k = 2$**:** $((1, 9, 5, 3, 8), 2)$ ist eine Nein-Instanz, da aufgrund der Werte der s_i die Summe 2 nie erreicht werden kann.

$k = 12$**:** $((1, 9, 5, 3, 8), 12)$ ist eine Ja-Instanz: Z.B. mit $A = \{2, 4\}$, $\sum_{i \in A} s_i = 9 + 3 = 12$ oder mit $A = \{1, 4, 5\}$, $\sum_{i \in A} s_i = 1 + 8 + 3 = 12$.

$k = 15$**:** $((1, 9, 5, 3, 8), 15)$ ist eine Ja-Instanz mit $A = \{1, 2, 3\}$, $\sum_{i \in A} s_i = 1 + 9 + 5 = 15$.

$k = 17$**:** $((1, 9, 5, 3, 8), 17)$ ist eine JA-Instanz mit $A = \{2, 5\}$, $\sum_{i \in A} s(a) = 9 + 8 = 17$.

Aufgabe 2 (SS$\leq_m^p$PARTITION, PARTITION$\leq_m^p$SS): Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

(a) PARTITION$\leq_m^p$SS und

(b) SS$\leq_m^p$PARTITION.

Lösungsvorschläge:

(a) Es sei $(s_1, \ldots, s_n)$ eine PARTITION-Instanz mit $\sum_{i=1}^{n} s_i = 2l$. Wir konstruieren daraus die SS-Instanz $((s_1, \ldots, s_n), l)$. Dies ist offensichtlich in Polynomialzeit möglich. Bleibt die Äquivalenz zu zeigen:

Von links nach rechts: Es sei $(s_1, \ldots, s_n)$ eine Ja-Instanz für PARTITION mit $(A, \{1, \ldots, n\} - A)$. Es gilt also $\sum_{i \in A} s_i = l$. Somit ist A die gesuchte Teilmenge für $((s_1, \ldots, s_n), l)$.

Von rechts nach links: Es sei $((s_1, \ldots, s_n), l)$ eine Ja-Instanz für SS mit der Teilmenge $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Es gilt also $\sum_{i \in A} s_i = l$. Somit ist $(A, \{1, \ldots, n\} - A)$ eine Partition für $(s_1, \ldots, s_n)$.

(b) Es sei $((s_1, \ldots, s_n), k)$ eine SS-Instanz mit $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$. Wir definieren die PARTITION-Instanz $(s_1, \ldots, s_n, s_{n+1})$ mit $s_{n+1} = S - 2k$.

Es gilt $\sum_{i=1}^{n+1} s_i = 2S - 2k = 2(S - k)$. Es gilt $k \leq S$, also ist $(s_1, \ldots, s_n, s_{n+1})$ eine PARTITION-Instanz und diese Transformation ist offensichtlich in Polynomialzeit möglich. Bleibt die Äquivalenz zu zeigen:

Von links nach rechts: Es sei $((s_1, \ldots, s_n), k)$ eine Ja-Instanz für SS, dann gibt es ein $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in A} s_i = k$. Damit gilt dann, dass $(A \cup \{n+1\}, \{1, \ldots, n+1\} - (A \cup \{n+1\}))$ eine Partition von $\{1, \ldots, n+1\}$ ist, denn $\sum_{i \in A \cup \{n+1\}} s_i = k + S - 2k = S - k$.

Von rechts nach links: Es sei $(s_1, \ldots, s_n, s_{n+1})$ eine Ja-Instanz für PARTITION mit der Partition $(A, \{1, \ldots, n+1\} - A)$. Es gilt, dass $n+1 \in A$ oder $n+1 \in \{1, \ldots, n+1\} - A$. OBdA sei nun $n+1 \in A$. Dann gilt $\sum\limits_{i \in A - \{n+1\}} s_i = S - k - S + 2k = k$. Da $A - \{n+1\}$ eine echte Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$ ist, ist $((s_1, \ldots, s_n), k)$ eine Ja-Instanz für *SS* mit der Teilmenge A.

Aufgabe 3 (CCWM **für Scoring-Protokolle und** 3 **Kandidaten**)**:** Aus der Vorlesung kennen Sie die Reduktion von Partition auf CCWM für Scoring-Protokolle und 3 Kandidaten. Betrachten Sie die PARTITION-Instanz $(1, 9, 5, 3, 8)$ aus Aufgabe 1.

(a) Konstruieren Sie aus $(1, 9, 5, 3, 8)$ die Wahl (C, V) gemäß der Reduktion und bestimmen Sie die Punktwerte der Kandidaten in (C, V).

(b) Wieviele Manipulatoren gibt es in dieser CCWM-Instanz und welche Gewichte haben diese?

(c) Bestimmen Sie die Präferenzen der einzelnen Manipulatoren und die Punktwerte der Kandidaten in der Wahl $(C, V \cup S)$.

(d) Erläutern Sie an diesem Beispiel, wieso diese Reduktion für das Wahlsystem Plurality Voting nicht funktioniert.

Lösungsvorschläge: Es ist $(1, 9, 5, 3, 8)$ gegeben und es existiert die Partition $(\{1, 2, 4\}, \{3, 5\})$.

(a) $C = \{a, b, p\}$, $V = \{v_1, \ldots, v_{2(2\alpha_1 - \alpha_2)13-1)}\}$:

- es gibt $(2\alpha_1 - \alpha_2)13 - 1$ Wähler der Form $a\,b\,p$ und
- es gibt $(2\alpha_1 - \alpha_2)13 - 1$ Wähler der Form $b\,a\,p$.

$$
\begin{aligned}
\mathit{score}_{(C,V)}(a) &= \alpha_1((2\alpha_1 - \alpha_2)13 - 1) + \alpha_2((2\alpha_1 - \alpha_2)13 - 1) \\
&= ((2\alpha_1 - \alpha_2)13 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2), \\
\mathit{score}_{(C,V)}(b) &= \alpha_2((2\alpha_1 - \alpha_2)13 - 1) + \alpha_1((2\alpha_1 - \alpha_2)13 - 1) \\
&= ((2\alpha_1 - \alpha_2)13 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2), \\
\mathit{score}_{(C,V)}(p) &= 0.
\end{aligned}
$$

(b) Es gibt 5 Manipulatoren mit den Gewichten

Manipulator i	1	2	3	4	5
Gewicht	$1(\alpha_1 + \alpha_2)$	$9(\alpha_1 + \alpha_2)$	$5(\alpha_1 + \alpha_2)$	$3(\alpha_1 + \alpha_2)$	$8(\alpha_1 + \alpha_2)$

(c) Die Stimmen der Manipulatoren:

Manipulator i	1	2	3	4	5
Gewicht	$1(\alpha_1 + \alpha_2)$	$9(\alpha_1 + \alpha_2)$	$5(\alpha_1 + \alpha_2)$	$3(\alpha_1 + \alpha_2)$	$8(\alpha_1 + \alpha_2)$
Präferenz	$p\,a\,b$	$p\,a\,b$	$p\,b\,a$	$p\,a\,b$	$p\,b\,a$

Die Punktwerte in $(C, V \cup S)$:

$$\begin{aligned} score_{(C,V\cup S)}(a) &= ((2\alpha_1 - \alpha_2)13 - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) + 13(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_2 \\ &= 26(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)), \\ score_{(C,V\cup S)}(b) &= 26(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)), \\ score_{(C,V\cup S)}(p) &= 26(\alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned}$$

(d) An den Punktwerten in Aufgabenteil (c) ist zu sehen, dass Kandidat c mit dieser Manipulation im Plurality- Wahlsystem nicht zum eindeutigen Gewinner gemacht werden kann. Denn in PV gilt $\alpha_2 = 0$ und somit haben alle Kandidaten in der Wahl $(C, V \cup S)$ den gleichen Punktwert.