

INSTITUT FÜR
INFORMATIK
Lehrstuhl für Komplexitätstheorie und
Kryptologie

Universitätsstr. 1 D-40225 Düsseldorf



Game-theoretic Analysis of Strategyproofness in Cake-cutting Protocols

Alina Elterman

Bachelorarbeit

Beginn der Arbeit:	01. September 2011
Abgabe der Arbeit:	05. Dezember 2011
Gutachter:	Prof. Dr. Jörg Rothe Prof. Dr. Peter Kern

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst habe. Ich habe dazu keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet.

Düsseldorf, den 05. Dezember 2011

Alina Elterman

Abstract

Hier kommt eine ca. einseitige Zusammenfassung der Arbeit rein.

Contents

Contents	1
1 Introduction	2
2 Preliminaries	3
2.1 Preliminaries of Game Theory	3
2.2 Preliminaries of Cake-cutting	4
2.2.1 Basics	4
2.2.2 Strategyproofness	6
2.3 The Degree of Guaranteed Envy-freeness	9
3 Proportional Procedures and their DGEF	13
3.1 The Steinhaus-Kuhn Lone Divider Procedure	13
3.2 The Banach-Knaster Last-Diminisher Procedure	14
3.3 The Fink Lone-Chooser Procedure	15
3.4 The Cut-Your-Own-Piece Procedure	16
3.5 The Divide-and-Conquer Procedure	17
3.6 The Extended Procedure	18
3.7 The Extension of the Extended Procedure	19
4 Related Work	20
5 Conclusions and Open Questions/Problems	21
List of Figures	22
List of Tables	22

1 Introduction

Cake Cutting is an interdisciplinary field which is commonly researched and part of economics, political science, mathematics, operations research, and computer science. Game Theory is fulfilling the same property. Except for this fact, they have hardly something in common. While CC is about fair division of a heterogeneous divisible good, game theory is used for defining life processes in a mathematical way and analysing them. Example Cost Sharing from Algorithmic GT Noam Nissan chap. 15

2 Preliminaries

2.1 Preliminaries of Game Theory

cooperative vs. noncooperative
algorithmic gt

2.2 Preliminaries of Cake-cutting

2.2.1 Basics

First of all we need to define the components of cake-cutting. Example 1 sketches the problem statement.

Example 1. *It was the year 1922 in London, Alan Mathison Turing was visiting a friend on his birthday. There was aswell Vilfredo Federico Pareto, Karl Popper, Felix Hausdorff und Charles West Churchman.*

Now, what exactly is cake-cutting about? It involves a discrete set of $n \in \mathbb{N}$ agents (or players) $P_n = \{p_1, \dots, p_n\}$. After the assumption each of them wants to get as much as possible of the good. Only the allocation of a single, divisible and heterogenous good is included in the consideration of this work. It is common to use for the visualization a rectangular cake.

image cake

The division is performed by parallel cuts. The cake X is represented by the unit interval $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Each subinterval $I' \subseteq I$ or a union of subintervals with $I_m \subseteq I$ is called a bundle (piece). All bundles are disjoint. The bundle of the cake, which the player p_i receives is denoted as X_i . When all bundles of the cake are owned by players, this state is called an ALLOCATION. Each piece has a public length, which can be computed as the sum of all boulder differences, and the private value of each player.

Every player $p_i \in P_n$ has a valuation function (valuation) $v_i : \{X' | X' \subseteq X\} \mapsto [0, 1]$ on the cake X with the following properties:

1. Non-negativity¹: $v_i(C) \geq 0$ for all $C \subseteq [0, 1]$.
2. Normalisation: $v_i(\emptyset) = 0$ and $v_i([0, 1]) = 1$.
3. Monotonicity: if $C' \subseteq C$ then $v_i(C') \leq v_i(C)$.
4. Additivity: $v_i(C \cup C') = v_i(C) + v_i(C')$ for disjoint $C, C' \subseteq [0, 1]$.
5. Divisibility: for all $C \subseteq [0, 1]$ and all $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, exist a $B \subseteq C$, so that $v_i(B) = \alpha \cdot v_i(C)$.
6. v_i is continuous: if $0 < x < y \leq 1$ with $v_i([0, x]) = \alpha$ and $v_i([0, y]) = \beta$, than for every $\gamma \in [\alpha, \beta]$ there exist a $z \in [x, y]$ so that $v_i([0, z]) = \gamma$.
7. Emptiness of single points: $v_i([x, x]) = 0$ for all $x \in [0, 1]$.

¹It is common to require positivity: $v_i(C) > 0$ for all $C \subseteq [0, 1]$ and $C \neq \emptyset$

Different Types of Fairness

The goal of the fair division of a heterogeneous, continuous good is to allocate the resource in a fair manner. But what is fair? It can be seen as an efficiency criteria of an allocation, which can be normalized and gives a possibility to compare different allocations. We distinguish between the following fairness criteria.

Definition. (*Proportional or simple fair*)

An allocation is proportional (simple fair), if $v_i(X_i) \geq 1/n$ for each player $p_i \in P_N$.

Definition. (*Envy-freeness*)

An allocation is envy-free, if $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$ for each couple of players $p_i, p_j \in P_N$.

The following conditions can also be used on the proportional case.

Definition. (*Strong Envy-freeness*)

An allocation is strong-envy-free, if $v_i(X_i) > v_i(X_j)$ for each couple of players $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$.

Definition. (*Super Envy-freeness*)

An allocation is super-envy-free, if $v_i(X_j) \leq 1/n$ for each couple of players $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$.

Definition. (*Strong Super Envy-freeness*)

An allocation is strong-super-envy-free, if $v_i(X_j) < 1/n$ for each couple of players $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$.

Hereby is the problem, that for the stronger conditions an allocations cannot exist always, like in the case when all players have equal values on the cake.

Correlation between the Fairness-Properties

Lemma. For all allocations ²:

1. Every envy-free allocation is proportional.
2. For two players an allocation is envy-free iff it is proportional.

Definition. (*Efficiency*)

An allocation is efficient (Pareto optimal) if no other allocation exist, where one player do better, without becoming worse for an other player.

²the proof can be found in []

MEHR UEBER EHRLICHKEIT UND STRATEGIESICHERHEIT (mind. eine SEITE)

2.2.2 Strategyproofness

Definition. (*Truthfully*) An allocation is truthful if there are no valuations where a player will do better by lying.

Only such divisions are interesting, where without explicit compelling the players to be truthful, they will be it, because it is their best strategy. It is common that by not following the strategy of the protocol the player get into the risk to lose the guarantee for their fair share. At the end of an allocation it can be proven whether every player got his fair share. Each protocol

Different Types of Protocols

Since the protocols are going to be analysed in this work, it is very important to understand the types, structure and design of them.

Classes of Protocols

Intuitiv:(Algorithm)

In mathematics, computer science and related subjects, an algorithm is an effective method for solving a problem, hich can be denoted as a finite set of sequences.

Definition. (Protocol (Cake-Cutting-Protocol))

A Protocol (Cake-Cutting-Protocol) is an adaptive algorithm with a fixed number of players and the following properties:

- *It consists of rules and strategies.*
Rules are requirements, which has to be followed by the players without knowledge of their valuations.
Strategies are recommendations, which can be followed for getting the guaranteed fair share.
- *If a player does not follow the strategy of a protocol, he loses the guarantee to get after a fixed number of steps . His actions does not harm the other players.*
verliert er seinen Anspruch nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein St"uck des Kuchens zu bekommen, welches dem geforderten Gerechtigkeitskriterium entspricht. Sein Vorgehen hat aber keine Auswirkungen auf die Anteile der anderen Spieler.
- *Jeder Spieler muss zu jeder Zeit in der Lage sein v"ollig unabh"angig von den anderen Spielern den Kuchen zu teilen (einen Schnitt zu machen).*
- *Das Protokoll besitzt keine Informationen "uber die Bewertungen der Spieler, ausser denen die angefragt wurden in dem jeweiligen oder in den vorherigen Schritten.*

Definition. *Ein Cake-Cutting-Protokoll wird proportional, neidfrei, stark neidfrei etc. genannt, falls unabh"angig von den Bewertungsfunktionen der Spieler, jede Aufteilung entsprechend proportional, neidfrei etc., unter der Vorraussetzung, dass alle Spieler die vom Protokoll vorgegebenen Regeln und Strategien befolgen, ist.*

Eines der Ziele von Cake-Cutting ist solche Protokolle anzugeben.³

Definition. (endlich (diskret)/kontinuierlich)

Ein endliches (diskretes) Protokoll liefert eine L"osung nach einer endlichen Anzahl von Entscheidungen (Bewertungen, Markierungen,...), dagegen muss ein Spieler bei einem kontinuierlichen Protokoll unendlich viele Entscheidungen treffen.

Definition. (endlich beschr"ankt/endlich unbeschr"ankt))

Ein endlich beschr"anktes Protokoll hat eine obere Grenze von Schritten, welche im

³Siehe auch Definition von [?], Robertson und Webb:"Approximating ..." und Woeginger,Sgall:"An Approximation Scheme..." oder "CC is not a piece of cake" von magdon....

ungünstigsten Fall betrachtet wird. Die gesamte Anzahl von Entscheidungen hängt, wenn überhaupt, dann nur von der Anzahl der beteiligten Personen ab. Ein endlich unbeschränktes Protokoll hat hingegen eine nicht im Voraus abschätzbare Anzahl.

Die am meisten gesuchten Protokolle sind endlich beschränkt, da sie am einfachsten in der Realität umsetzbar sind. Aber es gibt eine Art von kontinuierlich Protokollen, an denen ebenfalls Interesse besteht.

Definition. (Moving-Knife-Protokoll)

Ein Schiedsrichter, welcher unparteiisch gegenüber den Spielern ist und unbeteiligt an der Verteilung der Stücke, schwenkt ein Messer kontinuierlich von links nach rechts und macht parallele Schnitte sofern ein Spieler "Halt!" ruft. Bei manchen MKP wird der Schiedsrichter ausgelassen und nur ein Messer oder Schwert geschwungen.

2.3 The Degree of Guaranteed Envy-freeness

Motivation For $n \geq 4$ ist es offen, ob es ein neidfreies, endlich beschränktes CCP gibt!

\Rightarrow Abschwachen des Ideals der Neidfreiheit.

Definition. Sei eine Aufteilung des Kuchens $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ für die Menge $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ der Spieler gegeben, wobei v_i das Mass von p_i und X_i die Portion von p_i ist.

- Eine Neidrelation (“envy relation”) \models ist eine Binarrelation auf P (\models, PxP) : p_i beneidet p_j ($p_i \models p_j$), $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, falls $v_i(X_i) < v_i(X_j)$.
- Eine Neidfrei-Relation (“envy-free relation”) $\not\models$ ist eine Binarrelation auf P : p_i beneidet nicht p_j ($p_j \not\models p_i$), $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, falls $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$.

Eigenschaften von \models und $\not\models$:

- \models ist irreflexiv, denn $v_i(X_i) < v_i(X_i)$ gilt nie
- $\not\models$ ist reflexiv, denn $v_i(X_i) \geq v_i(X_i)$ gilt immer
Die triviale Beziehung $p_i \not\models p_i$ zählt in der Regel nicht mit.
- \models und $\not\models$ sind nicht transitiv.
Gilt z.B. $p_i \models p_j$ und $p_j \models p_k$, so kann man daraus nichts über $v_i(X_k)$ schliessen:
 $p_i \not\models p_k$ ist möglich

\Rightarrow Es gibt die folgenden Möglichkeiten:

1. Zwei-Wege-Neid: $p_i \models p_j$ und $p_j \models p_i$
(Tausch der Portionen macht beide glücklich.)
2. Zwei-Wege-Neidfreiheit: $p_i \not\models p_j$ und $p_j \not\models p_i$
(Alles ist gut.)
3. Ein-Weg-Neid: $p_i \models p_j$ und $p_j \not\models p_i$
Ein-Weg-Neidfreiheit: $p_j \models p_i$ und $p_i \not\models p_j$

Fallerzwungene Neid- bzw. Neidfrei-Relationen: hängen ab von einem Fall geeigneter Masse.

Garantierte Neid- bzw. Neidfrei-Relationen: gelten in jeden Fall (auch im worst case), also unabhängig von den Massen der Spieler.

Anzahl garantierter Neidfrei-Relationen = $\min_{\text{alle Faelle}} \text{Anzahl der fallerzwungenen Neidfrei-Relationen.}$

Beispiel. Aufteilung $X = X_F \cup X_G \cup X_H$ des Kuchens mit

	$X_F = \begin{array}{ccc} & & \square \\ & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$	$X_G = \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ 7 & 8 & 9 \end{array}$	$X_H = \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$
F	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
G	$\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
H	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

\Rightarrow nicht proportional wegen $v_G(X_G) = \frac{1}{6} < \frac{1}{3}$.

Es gibt:

Ein-Weg-Neid von G zu F:

$G \Vdash F$ wegen $v_G(X_G) = \frac{1}{6} < v_G(X_F) = \frac{1}{2}$

Gleichzeitig ist dies

$F \nVdash G$ wegen $v_F(X_G) = \frac{1}{3} = v_F(X_F)$

Ein-Weg-Neidfreiheit von F zu G

Zwei-Wege-Neidfreiheit zwischen F und H

$F \nVdash H$, da $v_F(X_F) = \frac{1}{3} = v_F(X_H)$

$H \nVdash F$, da $v_H(X_H) = \frac{6}{18} > \frac{5}{18} = v_H(X_F)$

Zwei-Wege-Neid zwischen G und H

$G \Vdash H$, da $v_G(X_G) = \frac{1}{6} < \frac{1}{3} = v_G(X_H)$

$H \Vdash G$, da $v_H(X_H) = \frac{1}{3} < \frac{7}{18} = v_H(X_G)$

DGEF = Anzahl der Neidfrei-Relationen im worst case

Protocol. Jorg erhält den Kuchen.

DGEF: $n - 1 + (n - 1)(n - 2) = n - 1 - n^2 - 3n + 2 = n^2 - 2n - 1$

Satz. 1. Jedes neidfreie CCP fÄ $\frac{1}{4}$ r $n \geq 1$ Spieler hat einen **DGEF** von $n(n - 1)$.

2. Sei $d(n)$ der **DGEF** eines proportionalen CCPs mit $n \geq 2$ Spielern. Dann gilt:
 $n \leq d(n) \leq n(n - 1)$.

Proof. 1. Da wir $p_i \nVdash p_i$ für alle i , $1 \leq i \leq n$, ausser 8 lassen, hat jeder der n Spieler zu jedem anderen Spieler eine Neidfreie-Relation, insgesamt also $n(n - 1)$.

2. $n = 2$ Offenbar gilt: $d(2) = 2$, denn da das CCP proportional ist, gilt: $v_1(X_1) \geq \frac{1}{2}$ und $v_2(X_2) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow v_1(X_1) \geq v_1(X_2)$ und $v_2(X_2) \geq v_2(X_1)$

$n \geq 3$ Da $p_i \nVdash p_i$ fÄ $\frac{1}{4}$ r alle i ignoriert wird, gilt $d(n) \leq n(n - 1)$.

In einer proportionalen Aufteilung gilt:

$v_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$ fÄ $\frac{1}{4}$ r $1 \leq i \leq n$.

\Rightarrow Keiner der n Spieler kann gleichzeitig alle anderen Spieler bendeidenl, denn:
 Angenommen, das wäre nicht so. Konkret: $p_1 \nVdash p_2$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow v_1(X_2) > v_1(X_1) \geq \frac{1}{n} \\
&\Rightarrow v_1((X - X_1) - X_2) < \frac{n-2}{n} \\
&\Rightarrow (X - X_1) - X_2 \text{ kann nicht so in } n-2 \text{ Portionen aufgeteilt werden, dass} \\
&\quad v_i(X_j) \geq \frac{1}{n} \text{ f\"{A}}\frac{1}{4}\text{r alle } j, 3 \leq j \leq n, \text{ gilt.} \\
&\Rightarrow \text{es gibt ein } j, 3 \leq j \leq n, \text{ so dass } v_i(X_j) < \frac{1}{n}, \text{ gilt.} \\
&\Rightarrow p_i \not\preceq p_j
\end{aligned}$$

Also hat jeder der n Spieler mindestens eine garantierte Neidfrei-Relation zu einem anderen Spieler: $n \leq d(n)$

□

Definition (lemma). *Verlangen die Regeln/Strategien eines proportionalen CCPs f\"{A}}\frac{1}{4}\text{r } n \geq 2 \text{ Spielern von keinem Spieler, die Portionen der anderen Spieler zu bewerten, dann ist der } \mathbf{DGEF} = n.*

Proof. $n = 2$ Proportionalität \Rightarrow Neidfreiheit

best case = worst case

und wie vorher: $\mathbf{DGEF} = 2 = n$

$n \geq 3$ Betrachte das folgende Szenario: f\"{A}}\frac{1}{4}\text{r eine gegebene Aufteilung $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, die proportional ist, aber sonst keinerlei Einschränkungen unterliegt, setzen wir die Masse der Spieler so:

f\"{A}}\frac{1}{4}\text{r jedes } i, 1 \leq i \leq n, \text{ bewertet } p_i:

- die eigene Portion X_i mit $v_i(X_i) = \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} \Rightarrow$ proportional!
- die Portion X_j eines Spielers $p_j, j \neq i : v_i(X_j) = \frac{2}{n} < \frac{1}{n}$
- jede der $n-2$ f\"{A}}\frac{1}{4}\text{brigen Portionen } X_k \text{ der Spieler } p_k, |i, j, k| = 3, v_i(X_k) = \frac{n+1}{n^2} > \frac{1}{n}

Insgesamt gilt dann f\"{A}}\frac{1}{4}\text{r jedes } i, 1 \leq i \leq n:

1. $v_i(X) = v_i(\bigcup_{j=1}^n X_j) \stackrel{\text{Additivität}}{=} \sum_{j=1}^n v_i(X_j) = \frac{1}{n^2}(n + 2 + (n-2)(n+1)) = \frac{1}{n^2}(n + 2 + n^2 + n - 2n - 2) = 1$
2. p_i hat $n-2$ Neidrelationen und nur eine Neidfrei-Relation
 \Rightarrow Insgesamt gibt es n garantierte Neidfrei-Relationen, eine f\"{A}}\frac{1}{4}\text{r jeden Spieler.

□

Theorem. *Das Last-Diminisher-Protokoll hat einen } \mathbf{DGEF} \text{ von } \frac{n(n-1)}{2} + 2*

Proof. Runde 1 Sei \bar{p}_1 der Spieler, der die erste Portion erhalt. Jeder andere Spieler bewertet diese mit $\leq \frac{1}{n}$, beneidet also \bar{p}_1 nicht
 $\Rightarrow n-1$ garantierte Neidfrei-Relationen

Runde $i, 1 < i < n$ Analog zu Runde 1 können $n-i$ Neidfrei-Relationen garantiert werden. \bar{p}_i , der die i te Portion erhalt, wird von den verbleibenden Spielern nicht beneidet.

\Rightarrow mindestens $\sum_{i=1}^n i = \frac{n-1}{2}$ garantierte Neidfrei-Relationen

Letzte Runde 1. Cut & Choose zwischen \bar{p}_{n-1} und \bar{p}_n . Keiner dieser beiden beneidet den anderen.

\Rightarrow eine zusätzliche garantierte Neidfrei-Relation.

2. Da Last-Diminisher proportional ist, gibt es eine weitere garantierte Neidfrei-Relation für \bar{p}_1 .

$$\Rightarrow \mathbf{DGEF} = \frac{(n-1)n}{2} + 2$$

□

Theorem. Das Lone-Chooser-Protokoll hat einen **DGEF** von n .

Proof. Kein Spieler bewertet die Portion irgendeines anderen Spielers.

$$\stackrel{\text{Lemma}}{\implies} \mathbf{DGEF} = n$$

□

3 Proportional Procedures and their DGEF

Each proportional procedure consist of rules and strategies. Since the rules are compulsory, the strategies of e... . In this chapter the strategies of common used procedures are shown (probably specialised, if possible) and explained with examples. Then their strategyproofness is analysed. During complications the effect on the DGEF is shown. Complete procedures can be found in [].

3.1 The Steinhaus-Kuhn Lone Divider Procedure

3.2 The Banach-Knaster Last-Diminisher Procedure

satz

Falls die Bewertungsfunktionen der Spieler nicht "ubereinstimmen, gibt es eine nicht ehrliche Strategie f"ur den ersten Spieler in jeder Runde ein St"uck mit $v_i(S_i) > 1/N$ zu bekommen. **satz proof** Im Schritt 1: Das abgeschnittene St"uck soll den Wert $1/N +$ Rest von S_1 haben.

Fallunterscheidung: Entweder Spieler p_1 kriegt dieses St"uck oder Spieler p_i beschneidet es und somit kann Spieler p_1 ein solches St"uck in der darauffolgenden Runde bekommen, oder bei Cut und Choose am Ende. **proof**

3.3 The Fink Lone-Chooser Procedure

3.4 The Cut-Your-Own-Piece Procedure

3.5 The Divide-and-Conquer Procedure

3.6 The Extended Procedure

3.7 The Extension of the Extended Procedure

4 Related Work

5 Conclusions and Open Questions/Problems

List of Figures

List of Tables