Prof. J. Rothe Düsseldorf, 9.12.2010

Übung zur Vorlesung im WS 2010/2011

# Algorithmische Eigenschaften von Wahlsystemen I

(Lösungsvorschläge)

Blatt 9, Abgabe am 16. Dezember 2010

**Aufgabe 1 ( $\leq_m^p$ -Reduktion):** Eine Menge $\mathcal{C}$ heißt *komplementabgeschlossen*, wenn aus $A \in \mathcal{C}$ folgt, dass auch $\overline{A} \in \mathcal{C}$. Es gilt, dass die Komplexitätsklasse NP abgeschlossen unter $\leq_m^p$ ist. Angenommen, NP sei *nicht* komplementabgeschlossen. Zeigen Sie damit, dass es Mengen gibt, für die folgendes nicht gilt:

$$A \ \leq_m^p \ \overline{A}.$$

**Lösungsvorschläge:** Setze $B := \overline{A}$. Damit ist $\overline{B} = A$. Wir beweisen durch Widerspruch, dass es Mengen gibt, für die obiges nicht gilt.
<u>WA</u>: Die Aussage gilt für alle Mengen.

Aus WA folgt, dass die Aussage auch für $B \in$ NP gilt. Da jedoch NP abgeschlossen ist unter $\leq_m^p$, folgt aus $A \ \leq_m^p \ B$, dass $A = \overline{B} \in$ NP gilt. Damit wäre dann gezeigt, dass für alle $B \in$ NP auch $\overline{B} \in$ NP gilt. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass NP nicht komplementabgeschlossen ist.

**Aufgabe 2 (P, NP und NP-vollständige Mengen):** Es sei $B$ eine NP-vollständige Menge. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\mathrm{NP} = \mathrm{P} \Leftrightarrow B \in \mathrm{P}.$$

**Lösungsvorschläge:**

Von links nach rechts: Klar, da $B \in$ NP $=$ P.

Von rechts nach links: Wir wissen, dass P $\subseteq$ NP gilt. Bleibt also zu zeigen, dass NP $\subseteq$ $P$ gilt. Es sei nun $A \in$ NP eine beliebige Menge. Da $B$ NP-vollständig ist, gilt $A \ \leq_m^p \ B$. Da nach Voraussetzung aber gilt, dass $B \in$ P und P nun wiederum abgeschlossen ist unter $\leq_m^p$, folgt $A \in P$. Somit gilt NP $\subseteq$ P und NP $=$ P.

**Aufgabe 3 (Copeland-CCWM für 4 Kandidaten):** In der Vorlesung haben Sie das Manipulationsproblem Copeland-CCWM für 4 Kandidaten im uneindeutigen Gewinnermodell kennengelernt. Es wurde gezeigt, dass dieses Problem NP-hart ist.

(a) Zeigen Sie, dass Copeland-CCWM in NP enthalten ist.

(b) Es sei die Copeland-CCWM-Instanz $(C, V, S, c)$ gegeben. Es sei $C = \{a, b, c, d\}$, $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit

$$\begin{array}{lllll} v_1: & a & b & c & d \\ v_2: & a & b & c & d \\ v_3: & c & b & a & d \\ v_4: & b & d & c & a \end{array}$$

$S = (1, 3)$ und $c$ sei der ausgezeichnete Kandidat.

Erläutern Sie an dieser Instanz die Vorgehensweise aus Aufgabenteil (a).

(c) Erläutern Sie, warum der NP-Härte-Beweis aus der Vorlesung nur für das uneindeutige Gewinnermodell korrekt ist.

**Lösungsvorschläge:**

(a) Angenommen, es sei eine Copeland-CCWM-Instanz $(C, V, S, c)$ gegeben. Rate zu jedem Gewicht in $S$ eine Präferenz. Überprüfe dann, ob $c$ ein Copeland-Gewinner der Wahl $(C, V \cup S)$ ist. Die Überprüfung ist in Polynomialzeit möglich, da die Gewinnerbestimmung in Copeland in Polynomialzeit möglich ist.

(b) Für die Wahl $(C, V)$ haben wir die folgenden paarweisen Vergleiche und Copeland-Scores:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | #Siege | #Ties | Copeland-Score |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | - | 2:2 | 2:2 | 3:1 | 1 | 2 | 2 |
| $b$ | 2:2 | - | 3:1 | 4:0 | 2 | 1 | 2,5 |
| $c$ | 2:2 | 1:3 | - | 3:1 | 1 | 1 | 1,5 |
| $d$ | 1:3 | 0:4 | 1:3 | - | 0 | 0 | 0 |

Mögliche Präferenzen bei $4$ Kandidaten:

$$\begin{array}{llll@{\qquad}llll@{\qquad}llll@{\qquad}llll} a & b & c & d & b & a & c & d & c & a & b & d & d & a & b & c \\ a & b & d & c & b & a & d & c & c & a & d & b & d & a & c & b \\ a & c & b & d & b & c & a & d & c & b & a & d & d & b & a & d \\ a & c & d & b & b & c & d & a & c & b & d & a & d & b & d & a \\ a & d & b & c & b & d & a & c & c & d & a & b & d & c & a & b \\ a & d & c & b & b & d & c & a & c & d & b & a & d & c & b & a \end{array}$$

Um $c$ zum eindeutigen Copeland-Gewinner zu machen, muss er/sie z.B. die Kandidaten $a$ und $b$ schlagen. Eine Möglichkeit, dies zu erreichen ist beide Manipulatoren mit $c\,b\,d\,a$ abstimmen zu lassen.

Damit sind in $(C, V \cup S)$ die folgenden Verhältnisse und Copeland-Scores gegeben:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | #Siege | #Ties | Copeland-Score |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | - | 2:6 | 2:6 | 3:5 | 0 | 0 | 0 |
| $b$ | 6:2 | - | 3:5 | 8:0 | 2 | 0 | 2 |
| $c$ | 6:2 | 5:3 | - | 7:1 | 3 | 0 | 3 |
| $d$ | 5:3 | 0:8 | 1:7 | - | 1 | 0 | 1 |

Kandidat $c$ ist also eindeutiger Copeland-Gewinner in der manipulierten Wahl.

(c) Die Reduktion funktioniert nicht für das eindeutige Gewinnermodell, da $p$ nicht zum eindeutigen Gewinner gemacht werden kann, auch wenn die gegebene PARTITION-Instanz eine Ja-Instanz ist (die Kandidaten $a$ und $b$ erreichen Gleichstand mit dem ausgezeichneten Kandidaten $p$). Die benötigte Äquivalenz ist folglich nicht gegeben.