

**eXamen.press**

**eXamen.press** ist eine Reihe, die Theorie und Praxis aus allen Bereichen der Informatik für die Hochschulausbildung vermittelt.

Frank Gurski · Irene Rothe · Jörg Rothe ·  
Egon Wanke

# Exakte Algorithmen für schwere Graphenprobleme

 Springer

Priv.-Doz. Dr. Frank Gurski  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Institut für Informatik  
Universitätsstr. 1  
40225 Düsseldorf  
Deutschland  
gurski-springer@acs.uni-duesseldorf.de

Prof. Dr. Irene Rothe  
Hochschule Bonn-Rhein-Sieg  
Fachbereich für Maschinenbau  
Elektrotechnik und Technikjournalismus  
53754 Sankt Augustin  
Deutschland  
irene.rothe@hochschule-bonn-rhein-sieg.de

Prof. Dr. Jörg Rothe  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Institut für Informatik  
Universitätsstr. 1  
40225 Düsseldorf  
Deutschland  
rothe@cs.uni-duesseldorf.de

Prof. Dr. Egon Wanke  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Institut für Informatik  
Universitätsstr. 1  
40225 Düsseldorf  
Deutschland  
wanke@acs.uni-duesseldorf.de

ISSN 1614-5216  
ISBN 978-3-642-04499-1 e-ISBN 978-3-642-04500-4  
DOI 10.1007/978-3-642-04500-4  
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Einbandentwurf:* KuenkelLopka GmbH

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

Für Fritz Grunewald und Helmut Stoyan  
*in memoriam*



---

## Vorwort

Dies ist ein Buch über schwere Probleme auf Graphen, für die es vermutlich keine effizienten Algorithmen gibt. Es werden Methoden vorgestellt, mit denen sich exakte Algorithmen zur Lösung solcher Probleme entwerfen lassen. Im ersten Teil des Buches werden die erforderlichen Grundlagen der Algorithmik, Graphentheorie, Logik und Komplexitätstheorie behandelt. Der zweite Teil befasst sich mit Fest-Parameter-Algorithmen, die die den schweren Problemen innewohnende Berechnungshärte in geeigneten Parametern einfangen und sie dort unschädlich machen, sowie mit exakten Exponentialzeit-Algorithmen für schwere Graphenprobleme, die effizienter als die naiven Exponentialzeit-Algorithmen für diese Probleme sind. Im dritten Teil des Buches werden Algorithmen vorgestellt, mit denen die im Allgemeinen schweren Graphenprobleme effizient gelöst werden können, sofern sie auf geeignete Graphklassen eingeschränkt werden. Dabei wird einerseits eine geeignete Baumstruktur von Graphen ausgenutzt, andererseits werden Fest-Parameter-Algorithmen angewandt, die effiziente Lösungen erlauben, sofern gewisse Graphparameter klein sind.

Dieses Lehrbuch, das eine breite Übersicht über dieses Gebiet gibt, richtet sich in erster Linie an Studierende im Masterstudium Informatik und in den höheren Semestern des Bachelorstudiums Informatik. Zahlreiche erklärende Abbildungen, Beispiele und Übungsaufgaben erleichtern den Zugang zum Stoff, und das Sach- und Autorenverzeichnis mit seinen 878 Einträgen sowie die Randnotizen ermöglichen das schnelle Auffinden von Schlüsselbegriffen. Dieses Buch ist aber auch für all jene geeignet, die sich tiefer mit den aktuellen Forschungsfragen in diesem neuen Teilgebiet der Algorithmik beschäftigen wollen.

Wir wünschen viel Freude beim Lesen!

## Danksagungen

Lena Piras und Patrick Gwydion Poullie danken wir herzlich für das Lesen von Teilen dieses Buches und ihre hilfreichen Korrekturvorschläge. Den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Springer-Verlags sind wir für ihre stets professionelle und freundliche Unterstützung sehr verbunden.

## VIII Vorwort

Während der Arbeit an diesem Buch wurde der dritte Autor durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen der DFG-Projekte RO 1202/11-1 und RO 1202/12-1 sowie im EUROCORES-Programm LogICCC der European Science Foundation gefördert.

Düsseldorf, Juli 2010

Frank Gurski  
Irene Rothe  
Jörg Rothe  
Egon Wanke



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	VII
----------------------	-----

<b>1 Einleitung</b> .....	1
---------------------------	---

---

## Teil I Grundlagen

---

<b>2 Aufwandsabschätzung von Algorithmen</b> .....	7
2.1 Algorithmen .....	7
2.2 Komplexitätsfunktionen .....	9
2.3 Asymptotische Wachstumsfunktionen .....	12
2.4 Einige wichtige Klassen von Funktionen .....	15
2.4.1 Konstante Funktionen .....	16
2.4.2 Logarithmische Funktionen .....	16
2.4.3 Polynome .....	17
2.4.4 Exponentielle Funktionen .....	18
2.5 Literaturhinweise .....	18
<b>3 Graphen</b> .....	19
3.1 Grundbegriffe .....	19
3.2 Spezielle Graphen und Grapheigenschaften .....	26
3.3 Einige Algorithmen für Graphen .....	33
3.3.1 Topologische Anordnungen .....	33
3.3.2 Durchlaufordnungen für Graphen .....	35
3.3.3 Zusammenhangsprobleme .....	39
3.3.4 Transitiver Abschluss .....	43
3.3.5 Matching-Probleme .....	45
3.4 Ausgewählte Probleme auf Graphen .....	50
3.4.1 Unabhängige Mengen, Cliques und Knotenüberdeckungen ..	50
3.4.2 Partition in unabhängige Mengen und Cliques .....	52
3.4.3 Dominierende Mengen und domatische Zahl .....	56

3.4.4	Das Problem des Handelsreisenden . . . . .	58
3.5	Ausgewählte Algorithmenentwurfstechniken . . . . .	60
3.5.1	Backtracking . . . . .	60
3.5.2	Teile und herrsche . . . . .	61
3.5.3	Dynamische Programmierung . . . . .	61
3.6	Entscheidungs-, Optimierungs- und Suchprobleme . . . . .	62
3.7	Literaturhinweise . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Logik . . . . .</b>	<b>65</b>
4.1	Boolesche Ausdrücke . . . . .	65
4.2	SAT, 3-SAT, 2-SAT und Horn-SAT . . . . .	71
4.3	Boolesche Funktionen und Schaltkreise . . . . .	75
4.4	Relationale Strukturen und Logik höherer Ordnung . . . . .	79
4.5	Logik erster Ordnung . . . . .	82
4.6	Logik zweiter Ordnung . . . . .	88
4.7	Monadische Logik zweiter Ordnung . . . . .	92
4.8	Die Komplexität der Logik . . . . .	97
4.9	Literaturhinweise . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Komplexitätstheorie . . . . .</b>	<b>105</b>
5.1	Klassische Komplexitätstheorie . . . . .	105
5.1.1	Deterministische Zeit- und Platzklassen . . . . .	105
5.1.2	Naiver Exponentialzeit-Algorithmus für Dreifärbbarkeit . . . . .	109
5.1.3	Nichtdeterminismus, Reduktionen und NP-Vollständigkeit . . . . .	113
5.1.4	Die Polynomialzeit-Hierarchie . . . . .	125
5.2	Parametrisierte Komplexitätstheorie . . . . .	130
5.2.1	Parametrisierte Probleme, FPT und XP . . . . .	130
5.2.2	W-Hierarchie . . . . .	138
5.3	Literaturhinweise . . . . .	142

---

## Teil II Exakte Algorithmen für Graphen

---

<b>6</b>	<b>Fest-Parameter-Algorithmen für ausgewählte Graphenprobleme . . . .</b>	<b>147</b>
6.1	Knotenüberdeckung . . . . .	148
6.1.1	Problemkernreduktion . . . . .	148
6.1.2	Verbesserter Suchbaum mit beschränkter Höhe . . . . .	153
6.2	Hitting Set für Mengen der Größe drei . . . . .	153
6.3	Graphmodifikation . . . . .	156
6.4	Parameterwahl . . . . .	161
6.5	Offene Probleme . . . . .	161
6.6	Literaturhinweise . . . . .	162

<b>7</b>	<b>Exponentialzeit-Algorithmen für Färbbarkeitsprobleme</b>	163
7.1	Motivation und einfache Ideen	163
7.1.1	Erste Idee: Breitensuche	163
7.1.2	Zweite Idee: Auflisten unabhängiger Mengen beschränkter Größe	164
7.1.3	Dritte Idee: Zufälliges Ausschließen einer Farbe	164
7.1.4	Vierte Idee: Randomisierte lokale Suche	165
7.1.5	Motivation für die Verbesserung von Exponentialzeit-Algorithmen	166
7.2	Berechnung der Färbungszahl mit Lawlers Algorithmus	167
7.3	Constraint Satisfaction	172
7.4	CSP-Algorithmen	179
7.4.1	Erste Vereinfachungen	179
7.4.2	Ein randomisierter CSP-Algorithmus	186
7.4.3	Ein deterministischer CSP-Algorithmus	192
7.5	Anwendung auf Färbbarkeitsprobleme für Graphen	220
7.6	Literaturhinweise	226
<b>8</b>	<b>Exponentialzeit-Algorithmen für TSP und DNP</b>	229
8.1	Das Problem des Handelsreisenden	229
8.1.1	Pseudo-Polynomialzeit und starke NP-Vollständigkeit	229
8.1.2	Naiver Algorithmus	231
8.1.3	Algorithmus mit dynamischer Programmierung	234
8.2	Das Domatische-Zahl-Problem	238
8.2.1	Vorbereitungen	239
8.2.2	Kombination zweier Algorithmen	240
8.3	Literaturhinweise	242
<hr/>		
<b>Teil III Algorithmen auf speziellen Graphen</b>		
<hr/>		
<b>9</b>	<b>Bäume und Co-Graphen</b>	247
9.1	Algorithmen auf Bäumen	247
9.1.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	247
9.1.2	Algorithmen	249
9.2	Algorithmen auf Co-Graphen	251
9.2.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	251
9.2.2	Algorithmen	254
9.3	Literaturhinweise	258
<b>10</b>	<b>Baumweitebeschränkte Graphen</b>	259
10.1	Grundlagen	259
10.2	Unabhängige Menge und Knotenüberdeckung	273
10.3	Clique	278
10.4	Partition in unabhängige Mengen	279

10.5 Partition in Cliques . . . . .	282
10.6 $\text{MSO}_2$ -definierbare Grapheigenschaften . . . . .	283
10.7 Literaturhinweise . . . . .	283
<b>11 Cliquenweitebeschränkte Graphen . . . . .</b>	<b>285</b>
11.1 Grundlagen . . . . .	285
11.2 Unabhängige Menge und Knotenüberdeckung . . . . .	295
11.3 Clique . . . . .	299
11.4 Partition in unabhängige Mengen . . . . .	300
11.5 Partition in Cliques . . . . .	303
11.6 $\text{MSO}_1$ -definierbare Grapheigenschaften . . . . .	304
11.7 Literaturhinweise . . . . .	305
<b>Tabellenverzeichnis . . . . .</b>	<b>307</b>
<b>Abbildungsverzeichnis . . . . .</b>	<b>309</b>
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>313</b>
<b>Sach- und Autorenverzeichnis . . . . .</b>	<b>323</b>