Prof. J. Rothe Düsseldorf, 4.11.2010

Übung zur Vorlesung im WS 2010/2011
Algorithmische Eigenschaften von Wahlsystemen I

(Lösungsvorschläge)

Blatt 4, Abgabe am 11. November 2010

Wir definieren die folgenden Eigenschaften von Wahlsystemen. Ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ erfüllt das

(1) *Monotonie-Kriterium*, wenn für jede $\mathcal{E}$-Wahl (C, V) gilt: Ist Kandidat c ein $\mathcal{E}$-Gewinner in (C, V) und verbessern wir die Position von c in einigen Stimmen in V, wobei sonst keine Veränderungen vorgenommen werden, so ist c ein $\mathcal{E}$-Gewinner der veränderten Wahl.

(2) *strenge Monotonie-Kriterium*, wenn für jede $\mathcal{E}$-Wahl (C, V) gilt: Jeder $\mathcal{E}$-Gewinner der Wahl (C, V) bleibt der $\mathcal{E}$-Gewinner, auch wenn die Stimmen in V derart verändert werden, dass lediglich gewährleistet ist, dass Kandidaten, die vor der Änderung hinter dem Gewinner standen, auch nach der Veränderung hinter dem Gewinner stehen.

(3) *Homogenitätskriterium*, wenn für jede $\mathcal{E}$-Wahl (C, V) gilt: Ist Kandidat c ein $\mathcal{E}$-Gewinner in (C, V), so ist er auch $\mathcal{E}$-Gewinner in der Wahl (C, qV) für jedes $q \in \mathbb{N}$. (qV bedeutet hier, dass die neue Wählermenge die Wähler aus V genau q mal enthält.)

Aufgabe 1 (Monotonie-Kriterium):

(a) Vervollständigen Sie das Beispiel aus der Vorlesung, mit dem gezeigt wurde, dass Dodgson nicht monoton ist. Das heißt, zeigen Sie, dass Kandidat a der Dodgson-Gewinner in (C, V) ist und Kandidat c der Dodgson-Gewinner in (C, V') ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

$C = \{a, b, c, d\}$ und V und V' sind gegeben durch:

Anzahl	Präferenz in V	Präferenz in V'
15	$c\,a\,d\,b$	$c\,a\,d\,b$
9	$b\,d\,c\,a$	$b\,d\,c\,a$
9	$a\,b\,d\,c$	$a\,b\,d\,c$
5	$a\,c\,b\,d$	$a\,c\,b\,d$
5	$b\,a\,c\,d$	$a\,b\,c\,d$

(b) Erörtern Sie, ob die Wahlsysteme Copeland und Young das Monotonie-Kriterium erfüllen. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir beginnen mit (C, V) ($\|V\| = 43$):

	a	b	c	d
a	-	29:14	19:24	34:9
b	14:29	-	23:20	28:15
c	24:19	20:23	-	25:18
d	9:34	15:28	18:25	-

Es gibt keinen Condorcet-Gewinner. Bestimme also die D-Scores.

Kandidat a: Benötigt mind. 3 Vertauschungen, um c zu schlagen (sind möglich, in Wählergruppe 1). $\Rightarrow$ D-$score(a) = 3$.

Kandidat b: Benötigt mind. 8 Vertauschungen, um a zu schlagen (sind möglich in der 3. Wählergruppe). $\Rightarrow$ D-$score(b) = 8$.

Kandidat c: Benötigt mind. 2 Vertauschungen, um b zu schlagen (sind nicht möglich, weil c nirgends direkt hinter b steht). Es müssen 4 Vertauschungen durchgeführt werden (z.B. in Wählergruppe 5) $\Rightarrow$ D-$score(c) = 4$.

Kandidat d: Offensichtlich gilt D-$score(d) > 3$.

Damit ist a Dodgson-Gewinner in (C, V).

Betrachten wir nun (C, V'):

	a	b	c	d
a	-	34:9	19:24	34:9
b	9:34	-	23:20	28:15
c	24:19	20:23	-	25:18
d	9:34	15:28	18:25	-

Es gibt keinen Condorcet-Gewinner. Bestimme also die D-Scores.

Kandidat a: Benötigt mind. 3 Vertauschungen, um c zu schlagen (sind möglich, in Wählergruppe 1). $\Rightarrow$ D-$score(a) = 3$.

Kandidat b: Benötigt mind. 13 Vertauschungen, um a zu schlagen (sind möglich in der 3. und 5. Wählergruppe). $\Rightarrow$ D-$score(b) = 13$.

Kandidat c: Benötigt mind. 2 Vertauschungen, um b zu schlagen. Diese reichen nun aus, da c in der 5. Wählergruppe nun direkt hinter b steht $\Rightarrow$ D-$score(c) = 2$.

Kandidat d: Offensichtlich gilt D-$score(d) > 2$.

Damit ist b der Dodgson-Gewinner in (C, V').

(b) Jedes Vertauschen des Gewinners kann dessen Copeland-Score nur erhöhen und nicht verringern. Gleichzeitig können die Scores der anderen an dem Tausch beteiligten Kandidaten nur verringert werden.

Durch das Vertauschen des Gewinners nach vorne, kann dessen Young-Score höchstens verringert werden, d.h., es müssen weniger Wähler gelöscht werden, damit dieser Kandidat zum Condorcet-Gewinner gemacht werden kann. Die Young-Scores der Kandidaten, die ebenfalls an der Vertauschung beteiligt sind, können entweder gleich bleiben oder sich erhöhen.

Aufgabe 2 (Strenges Monotonie-Kriterium): Kennen Sie Wahlsysteme, die das strenge Monotonie-Kriterium erfüllen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:
Condorcet ist streng monoton, denn solange die Kandidaten, die hinter einem Condorcet-Gewinner platziert sind, durch die Veränderung in der Wählermenge nicht vor dem Condorcet-Gewinner platziert werden können, so können sie diesen nicht schlagen. Wenn jedoch kein anderer Kandidat existiert, der den Condorcet-Gewinner schlagen kann, so bleibt dieser der Condorcet-Gewinner.

Folgene Wahlsysteme erfüllen das Monotonie-Kriterium nicht und damit auch nicht das strenge Monotonie-Kriterium: Dodgson, PV with runoff, STV.

Auch die restlichen uns bekannten Wahlsysteme erfüllen das strenge Monotonie-Kriterium nicht:

- PV: (C_1, V_1), $C_1 = \{a, b, c, d\}$ und V_1, V_1':

V_1	V_1'
$c\,b\,a\,d$	$\underline{b\,c}\,a\,d$
$a\,c\,b\,d$	$a\,c\,b\,d$
$a\,b\,c\,d$	$a\,b\,c\,d$
$b\,c\,a\,d$	$b\,c\,a\,d$
$d\,b\,a\,c$	$b\,d\,a\,c$

In (C_1, V_1) ist a der PV-Gewinner. In (C_1, V_1') ist b der PV-Gewinner.

- Borda: (C_2, V_2), $C_2 = \{a, b, c, d, e\}$ und V_2, V_2' ((C_2, V_2) ist Wahl von Blatt 2):

V_2	V_2'
$d\,c\,a\,e\,b$	$d\,c\,a\,e\,b$
$d\,c\,b\,a\,e$	$d\,c\,b\,a\,e$
$d\,b\,e\,a\,c$	$d\,b\,e\,a\,c$
$e\,c\,b\,a\,d$	$e\,c\,\underline{d\,b\,a}$
$b\,c\,a\,d\,e$	$b\,c\,\underline{d\,a}\,e$
$a\,c\,b\,d\,e$	$a\,c\,\underline{d\,b}\,e$

c ist Borda-Gewinner in (C_2, V_2), d ist Boda-Gewinner in (C_2, V_2').

- Veto: (C_3, V_3), $C_3 = \{a, b, c, d\}$ und V_3, V_3':

Anzahl	V_3	V_3'
2	$a\,d\,c\,b$	$a\,d\,\underline{b\,c}$
2	$a\,b\,d\,c$	$a\,b\,d\,c$
1	$d\,b\,c\,a$	$d\,b\,c\,a$
2	$a\,b\,c\,d$	$a\,b\,c\,d$

a ist Veto-Gewinner in (C_3, V_3), b ist Veto-Gewinner in (C_3, V_3').

- Black: Wahl (C_2, V_2) mit V_2' ist Gegenbeispiel.
- Copeland: Wahl (C_4, V_4), $C_4 = \{a, b, c, d\}$ und V_4, V_4' :

V_4	V_4'
$a\,b\,c\,d$	$a\,\underline{d\,b}\,c$
$c\,b\,a\,d$	$c\,b\,a\,d$
$d\,a\,b\,c$	$d\,a\,b\,c$
$d\,c\,a\,b$	$d\,c\,a\,b$

a ist Copeland-Gewinner in (C_4, V_4), aber d ist Copeland-Gewinner in (C_4, V_4').

- Young: Wahl (C_5, V_5), $C_5 = \{a, b, c\}$ und V_5, V_5' ((C_5, V_5) ist (C_3, V_3') von Blatt 3):

Anzahl	V_5	V_5'
7	$a\,b\,c$	$a\,b\,c$
5	$b\,c\,a$	$\underline{c\,b}\,a$
4	$c\,a\,b$	$c\,a\,b$

In (C_5, V_5) haben wir die Young-Scores: Y-$score(a) = 3$, Y-$score(b) = 7$, Y-$score(c) = 8$. Damit ist a Young-Gewinner in (C_5, V_5). In (C_5, V_5') ist c Condorcet-Gewinner, somit auch Young-Gewinner.

Aufgabe 3 (Homogenitätskriterium):

(a) Überlegen Sie sich, ob es zu einem Ihnen bereits bekannten Kriterium einen Zusammenhang zum Homogenitätskriterium gibt. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Welche der Ihnen bekannten Wahlsysteme erfüllen das Homogenitätskriterium? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt: Aus der Konsistenz folgt die Homogenität, denn ist ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ konsistent, so gilt für eine $\mathcal{E}$-Wahl (C, V) mit $\mathcal{E}$-Gewinnern, dass diese auch $\mathcal{E}$-Gewinner in $(C, V \cup V) = (C, 2V)$ sind. Daraus wiederum folgt, dass diese ebenfalls $\mathcal{E}$-Gewinner in $(C, V \cup 2V) = (C, 3V)$ usw. sind. Dies kann fortgeführt werden für beliebige $q \in \mathbb{N}$.

(b) Mit (a) können wir folgern, dass PV, Borda, Veto und Condorcet homogen sind. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Dodgson nicht homogen ist. Die anderen uns bekannten Wahlsysteme sind homogen, denn:

- Copeland: Gibt es einen Condorcet-Gewinner in (C, V), folgt mit der Homogenität von Condorcet die Aussage direkt. Gibt es keinen Condorcet-Gewinner, gilt: Durch das vervielfachen der Wähler mit dem Faktor q wird der Copeland-Score nicht verändert. Die Anzahl der Siege, Niederlagen und Unentschieden bleibt gleich, somit bleiben die Copeland-Gewinner aus (C, V) auch Copeland-Gewinner in (C, qV).
- Young: Gibt es in (C, V) einen Condorcet-Gewinner, so ist dieser auch Condorcet-Gewinner in (C, qV). Angenommen, es gibt in (C, V) keinen Condorcet-Gewinner. Sei k der Young- Score eines Kandidaten $c \in C$ über der Wählermenge V. Das heißt, in V müssen k Stimmen gelöscht werden, damit c ein Condorcet-Gewinner wird. In qV ist jede Stimme aus V nun q-mal enthalten und damit auch jede der k Stimmen, die gelöscht werden müssen, um Kandidat c zum Condorcet-Gewinner zu machen (in (C, V)). Damit müssen in in (C, qV) mindestens qk Stimmen gelöscht werden, damit c zum Condorcect-Gewinner in (C, qV) wird. Dies gilt für alle Kandidaten, folglich bleiben die Young-Gewinner in (C, V) auch Young-Gewinner in (C, qV).
- Black: Folgt aus der Homogenität von Condorcet und Borda.
- STV: Beim Übergang von V zu qV werden die Scores der Kandidaten (auf jeder Stufe) mit q multipliziert. Da dies für alle Kandidaten gilt, sind die STV-Gewinner aus (C, V) auch STV-Gewinner in (C, qV).
- PV wro: Analog zur Argumentation für STV.

Überblick über Ergebnisse auf dem Übungsblatt (fett gedruckte Einträge):

	Maj	Cond	Cons	Mon	str Mon	Hom
Plurality	1	0	1	1	**0**	**1**
Borda	0	0	1	1	**0**	**1**
Veto	0	0	1	1	**0**	**1**
Condorcet	1	1	1	1	**1**?	**1**
Copeland	1	1	0	**1**	**0**	**1**
Dodgson	1	1	0	0	**0**	0
Young	1	1	0	**1**	**0**	**1**
Black	1	1	0	1	**0**	**1**
STV	1	0	0	0	**0**	**1**
Plurality with Runoff	1	0	0	0	**0**	**1**