INSTITUT FÜR
INFORMATIK
Lehrstuhl für Komplexitätstheorie und
Kryptologie

Universitätsstr. 1 D–40225 Düsseldorf

Game-theoretic Analysis of Strategyproofness in Cake-cutting Protocols

Alina Elterman

Bachelorarbeit

Beginn der Arbeit:	01. September 2011
Abgabe der Arbeit:	05. Dezember 2011
Gutachter:	Prof. Dr. Jörg Rothe
	Prof. Dr. Peter Kern

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbstständig verfasst habe. Ich habe dazu keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet.

Düsseldorf, den 05. Dezember 2011

Alina Elterman

Abstract

Hier kommt eine ca. einseitige Zusammenfassung der Arbeit rein.

Contents

1 Inroduction

Cake Cutting is an interdisciplinairy field which is commonly researched and part of economics, political science, mathematics, operations research, and computer science. Game Theory is fulfilling the same property. Except of this fact, they have hardly something in common. While CC is about a fair division of a heterogenous divisible good, game theory is used for

2 Preliminaries

2.1 Preliminaries of Cake-cutting

2.1.1 Basics

First of all we need to define the components of cake-cutting. The following example is going to show the problem statement.
Example
It was the year 1922 in London, Alan Mathison Turing was visiting a friend on his birthday. There was aswell Vilfredo Federico Pareto, Karl Popper, Felix Hausdorff und Charles West Churchman.

Now, what exactly is cake-cutting about? It involves a discrete set of $n \in \mathbb{N}$ agents (or players[1]) $P_n = \{p_1, \cdots, p_n\}$. After the assumption each of them wants to get as much as possible of the good. Only the allocation of a single, divisible and heterogenous good is included in the consideration of this work. It is common to use for the visualization a rectangular cake.

bild kuchen

The division is performed by parallel cuts. The cake X is represented by the unit interval $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Each subinterval $I' \subseteq I$ or a union of subintervals with $I_m \subseteq I$ is named as a boundle (piece). All boundles are disjoint. The boundle of the cake, which the player p_i receives is denoted as X_i. Only the allocation of the full cake matter. Each piece has a public length, which can be computed as the sum of all bourderdifferences and the private value of a player.

Each player $p_i \in P_n$ has a valuation function (valuation) $v_i : \{X'|X' \subseteq X\} \mapsto [0,1]$ on the cake X with the following properties:

1. Non-negativity[2]: $v_i(C) \geq 0$ forall $C \subseteq [0,1]$.
2. Normalisation: $v_i(\emptyset) = 0$ and $v_i([0,1]) = 1$.
3. Monotonicity: if $C' \subseteq C$ then $v_i(C') \leq v_i(C)$.
4. Additivity: $v_i(C \cup C') = v_i(C) + v_i(C')$ for disjoint $C, C' \subseteq [0,1]$.
5. Divisibility: forall $C \subseteq [0,1]$ and all $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, exist a $B \subseteq C$, so that $v_i(B) = \alpha \cdot v_i(C)$.
6. v_i is continuous: if $0 < x < y \leq 1$ with $v_i([0,x]) = \alpha$ and $v_i([0,y]) = \beta$, than for every $\gamma \in [\alpha, \beta]$ there exist a $z \in [x,y]$ so that $v_i([0,z]) = \gamma$.
7. Emptyness of single points: $v_i([x,x]) = 0$ forall $x \in [0,1]$.

[1]common used in the game theoretic sence
[2]It is common to require positivity: $v_i(C) > 0$ forall $C \subseteq [0,1]$ and $C \neq \emptyset$

2.1.2 Different Types of Fairness

The goal of the fair division of a heterogeneous, continous good is to allocate the resource in a fair manner. But what is fair? It can be seen as a efficiency criteria of an allocation, which can be normalized and gives a passibility to compary different allocations. We distinguish between the following fairness criteria.

Definition. ***(Proportionalit"at oder einfache Gerechtigkeit)***
Eine Aufteilung ist proportional (einfach gerecht), falls $v_i(X_i) \geq 1/n$ f"ur jeden Spieler $p_i \in P_N$ gilt.

Definition. ***(Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist neidfrei, falls $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$ f"ur jedes Paar von Spielern $p_i, p_j \in P_N$.

Definition. ***(Starke Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist stark-neidfrei falls $v_i(X_i) > v_i(X_j)$ f"ur jedes Paar von Spielern $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$.

Definition. ***(Super Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist super-neidfrei, falls $v_i(X_j) \leq 1/n$ f"ur jedes Paar von Spielern $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$.

Definition. ***(Starke Super Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist stark-super-neidfrei, falls $v_i(X_j) < 1/n$ f"ur jedes Paar von Spielern $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$.

Das Problem ist, dass f"ur die st"arkeren Einschr"ankungen nicht immer Aufteilungen existieren, z.B. wenn alle Spieler die gleiche Bewertungsfunktion besitzen.

Definition. ***(Exaktheit)***[3]
Eine Aufteilung ist exakt, falls $v_i(X_i) = v_j(X_j)$ f"ur jedes Paar von Spielern $p_i, p_j \in P_N$.

In wirtschaftlichen Texten werden Aufteilungen, die gleichzeitig exakt und neidfrei, sind oft als besonders gerecht empfunden. Dennoch hat die Exaktheit sogar in Kombination mit der Proportionalit"at keinen direkten Zusammenhang mit der Neidfreiheit, wie man sich am folgenden Beispiel leicht veranschaulichen kann.

Beispiel. *Die Spieler Aleph, Beth und Gimel teilen einen Kuchen. Am Ende bekommt jeder Spieler genau 1/3 des Kuchens (nach seinem Ma"s). Diese Aufteilung ist exakt und proportional. Doch Aleph ist der Meinung, dass Beths St"uck genau die H"alfte des Kuchens ist und beneidet Beth. Damit ist die Aufteilung nicht neidfrei.*

Zusammenh"ange der Gerechtigkeitskriterien:

Lemma. *F"ur alle Aufteilungen gilt:*

[3] In der Literatur wird an Stelle von Exaktheit oft der Begriff der Gerechtigkeit verwendet, was in gewissem Sinne den gesamten Konzept der Begriffe widerspricht, da alle diese Kriterien einzeln als Ma"sst"abe von gerecht befunden werden.

1. *Falls eine Aufteilung neidfrei ist, so ist sie auch proportional.*
2. *F"ur zwei Spieler ist eine Aufteilung proportional genau dann, wenn sie neidfrei ist.*

Definition. ***(Effizienz)***
Eine Aufteilung ist effizient (Pareto optimal) falls keine andere Aufteilung existiert, die einem Spieler ein von ihm besser bewertetes St"uck einbringt, ohne die Situation eines anderen Spielers zu verschlechtern.

Definition. ***(Ehrlichkeit)***[4]
Eine Aufteilung ist ehrlich, falls es keine Bewertung gibt, bei der ein Spieler am Ende ein besseres St"uck bekommen h"atte durch Unaufrichtigkeit.

Es besteht nur Interesse an Aufteilungen, wo die Ehrlichkeit die beste Strategie f"ur alle Spieler ist und somit allein durch den Algorithmus erzwungen wird. Oft wird dies erreicht, in dem der Spieler durch Unaufrichtigkeit in die Gefahr kommt die Garantie auf seinen fairen Anteil zu verlieren.

[4] In den letzten Jahren wurde diesem Aspekt ein neuer Forschungshintergrund gegeben und Brams,Kilgour vgl. [**?**]. Doch man kann es als ein einzelnes Kriterium interpretieren.

MEHR UEBER EHRLICHKEIT UND STRATEGIESICHERHEIT (mind. eine SEITE)

2.1.3 Strategyproofness

Definition (Thruthfully)**.** *A division is thruthful if there are no valuations where a player will do better by lying.*

We are only interested in divisions, where without explicit compelling the players be thruthful, they will be it, because it is their best strategy At the end of an allocation it can be proven whether every player got his fair share. Each protocol

2.1.4 Different Types of Protocols

Klassen von Protokollen

Intuitive Beschreibung:(Algorithmus)
In der Mathematik, Informatik und verwandten Gebieten, ist ein Algorithmus eine effektive Methode zur Probleml"osung, ausgedr"uckt durch eine endliche Folge von Anweisungen.

Definition. ***(Protokoll (Cake-Cutting-Protokoll))***
Ein Protokoll (Cake-Cutting-Protokoll) ist ein adaptiver Algorithmus mit mehreren Spielern und folgenden Eigenschaften:

- *Es besteht aus Regeln und Strategien.*
  Regeln sind Anweisungen, die gefordert werden ohne die Bewertungen der Spieler zu kennen.
  Strategien sind Empfehlungen, welchen der Spieler folgen muss um garantiert seinen gerechten Anteil zu bekommen.
- *Sofern ein Spieler sich nicht an die Strategie des Protokolls h"alt, verliert er seinen Anspruch nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein St"uck des Kuchens zu bekommen, welches dem geforderten Gerechtigkeitskriterium entspricht. Sein Vorgehen hat aber keine Auswirkungen auf die Anteile der anderen Spieler.*
- *Jeder Spieler muss zu jeder Zeit in der Lage sein v"ollig unabh"angig von den anderen Spielern den Kuchen zu teilen (einen Schnitt zu machen).*
- *Das Protokoll besitzt keine Informationen "uber die Bewertungen der Spieler, ausser denen die angefragt wurden in dem jeweiligen oder in den vorherigen Schritten.*

Definition. *Ein Cake-Cutting-Protokoll wird proportional, neidfrei, stark neidfrei etc. genannt, falls unabh"angig von den Bewertungsfunktionen der Spieler, jede Aufteilung entsprechend proportional, neidfrei etc., unter der Vorraussetzung, dass alle Spieler die vom Protokoll vorgegebenen Regeln und Strategien befolgen, ist.*

Eines der Ziele von Cake-Cutting ist solche Protokolle anzugeben.[5]

Definition. ***(endlich (diskret)/kontinuierlich)***
Ein endliches (diskretes) Protokoll liefert eine L"osung nach einer endlichen Anzahl von Entscheidungen (Bewertungen, Markierungen,...), dagegen muss ein Spieler bei einem kontinuierlichen Protokoll unendlich viele Entscheidungen treffen.

Definition. ***(endlich beschr"ankt/endlich unbeschr"ankt))***
Ein endlich beschr"anktes Protokoll hat eine obere Grenze von Schritten, welche im ung"unstigsten Fall betrachtet wird. Die gesamte Anzahl von Entscheidungen h"angt, wenn "uberhaupt, dann nur von der Anzahl der beteiligten Personen ab. Ein endlich unbeschr"anktes Protokoll hat hingegen eine nicht im Voraus absch"atzbare Anzahl.

[5] Siehe auch Definition von [?], Robertson und Webb:"Approximating ..." und Woeginger,Sgall:"An Aproximation Scheme..." oder "CC is not a piece of cake" von magdon....

Die am meisten gesuchten Protokolle sind endlich beschr"ankt, da sie am einfachsten in der Realit"at umsetzbar sind. Aber es gibt eine Art von kontinuierlich Protokollen, an denen ebenfalls Interesse besteht.

Definition. ***(Moving-Knife-Protokoll)***
Ein Schiedsrichter, welcher unparteisch gegen"uber den Spielern ist und unbeteiligt an der Verteilung der St"ucke, schwenkt ein Messer kontinuierlich von links nach rechts und macht parallele Schnitte sofern ein Spieler "Halt!" ruft. Bei manchen MKP wird der Schiedsrichter ausgelassen und nur ein Messer oder Schwert geschwungen.

Bemerkung: In der Literatur (z.B.:Ulle Endriss:[**?**] "Lecture Notes on Fair Division") werden manchmal kontinuierliche Protokolle nicht als Protokolle bezeichnet sondern zu neuen Klassen zusammengefasst, die von der Anzahl der Messer abh"angen.

Eine wichtige Eigenschaft von Cake-Cutting ist, dass nur komplette Aufteilungen, wo jedes St"uck einem Spieler zugeordnet wird, des Kuchens betrachtet werden.

2.2 Preliminaries of Game Theory

3 The Degree of Guaranteed Envy-freeness

Motivation FÃ$\frac{1}{4}$r $n \geq 4$ ist es offen, ob es ein neidfreies, endlich beschranktes CCP gibt!

$\Rightarrow$ Abschwachen des Ideals der Neidfreiheit.

Definition. *Sei eine Aufteilung des Kuchens* $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ *fur die Menge* $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ *der Spieler gegeben, wobei* v_i *das Mass von* p_i *und* X_i *die Portion von* p_i *ist.*

- *Eine* <u>*Neidrelation*</u>*("envy relation")* $\Vdash$ *ist eine Binarrelation auf* $P(\Vdash, PxP)$: p_i *beneidet* p_j $(p_i \Vdash p_j)$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, *falls* $v_i(X_i) < v_i(X_j)$.
- *Eine* <u>*Neidfrei-Relation*</u> *("envy-free relation")* $\nVdash$ *ist eine Binarrelation auf* P : p_i *beneidet nicht* p_j $(p_j \nVdash p_j)$,$1 \leq i, j \leq n$,$i \neq j$, *falls* $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$.

<u>Eigenschaften von $\Vdash$ und $\nVdash$:</u>

- $\Vdash$ ist irreflexiv, denn $v_i(X_i) < v_i(X_i)$ gilt nie
- $\nVdash$ ist reflexiv, denn $v_i(X_i) \geq v_i(X_i)$ gilt immer
  Die triviale Beziehung $p_i \nVdash p_i$ zahlt in der Regel nicht mit.
- $\Vdash$ und $\nVdash$ sind nicht transitiv.
  Gilt z.B. $p_i \Vdash p_j$ und $p_j \Vdash p_k$, so kann man daraus nichts uber $v_i(X_k)$ schliessen: $p_i \nVdash p_k$ ist moglich

$\Rightarrow$ Es gibt die folgenden Moglichkeiten:

1. Zwei-Wege-Neid: $p_i \Vdash p_j$ und $p_j \Vdash p_i$
   (Tausch der Portionen macht beide glucklich.)
2. Zwei-Wege-Neidfreiheit: $p_i \nVdash p_j$ und $p_j \nVdash p_i$
   (Alles ist gut.)
3. Ein-Weg-Neid: $p_i \Vdash p_j$ und $p_j \nVdash p_i$
   Ein-Weg-Neidfreiheit: $p_j \Vdash p_i$ und $p_i \nVdash p_j$

Fallerzwungene Neid- bzw. Neidfrei-Relationen: hangen ab von einem Fall geeigneter Masse.
Garantierte Neid- bzw. Neidfrei-Relationen: gelten in jeden Fall (auch im worst case), also unabhangig von den Massen der Spieler.
Anzahl garantierter Neidfrei-Relationen = $\min_{alleFaelle}$ Anzahl der fallerzwungenen Neidfrei-Relationen.

Beispiel. *Aufteilung $X = X_F \cup X_G \cup X_H$ des Kuchens mit*

	$X_F = \begin{array}{ccc} & & \square \\ & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$	$X_G = \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ 7 & 8 & 9 \end{array}$	$X_H = \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$
F	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
G	$\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
H	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ *nicht proportional wegen* $v_G(X_g) = \frac{1}{6} < \frac{1}{3}$.
Es gibt:

Ein-Weg-Neid von G zu F:
$G \Vdash F$ *wegen* $v_G(X_G) = \frac{1}{6} < v_G(X_F) = \frac{1}{2}$
Gleichzeitig ist dies
$F \nVdash G$ *wegen* $v_F(X_G) = \frac{1}{3} = v_F(X_F)$

Ein-Weg-Neidfreiheit von F zu G

Zwei-Wege-Neidfreiheit zwischen F und H
$F \nVdash H$, *da* $v_F(X_F) = \frac{1}{3} = v_F(X_H)$
$H \nVdash F$, *da* $v_H(X_H = \frac{6}{18} > \frac{5}{18} = v_H(X_F)$

Zwei-Wege-Neid zwischen G und H
$G \Vdash H$, *da* $v_g(X_G) = \frac{1}{6} < \frac{1}{3} = v_G(X_H)$
$H \Vdash G$, *da* $v_H(X_H) = \frac{1}{3} < \frac{7}{18} = v_H(X_G)$

DGEF = Anzahl der Neidfrei-Relationen im worst case

Protokoll. *Jorg erhalt den Kuchen.*
DGEF: $n - 1 + (n-1)(n-2) = n - 1 - n^2 - 3n + 2 = n^2 - 2n - 1$

Satz. *1. Jedes neidfreie CCP fÃ$\frac{1}{4}$r $n \geq 1$ Spieler hat einen **DGEF** von $n(n-1)$.*

*2. Sei $d(n)$ der **DGEF** eines proportionalen CCPs mit $n \geq 2$ Spielern. Dann gilt: $n \leq d(n) \leq n(n-1)$.*

Proof. 1. Da wir $p_i \nVdash p_i$ fur alle i, $1 \leq i \leq n$, ausser 8 lassen, hat jeder der n Spieler zu jedem anderen Spieler eine Neidfreie-Relation, insgesamt also $n(n-1)$.

2. $n = 2$ Offenbar gilt: $d(2) = 2$, denn da das CCP proportional ist, gilt: $v_1(X_1) \geq \frac{1}{2}$ und $v_2(X_2) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow v_1(X_1) \geq v_1(X_2)$ und $v_2(X_2) \geq v_2(X_1)$

$n \geq 3$ Da $p_i \nVdash p_i$ fÃ$\frac{1}{4}$r alle i ignoriert wird, gilt $d(n) \leq n(n-1)$.

In einer proportionalen Aufteilung gilt:
$v_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$ fÃ$\frac{1}{4}$r $1 \leq i \leq n$.

$\Rightarrow$ Keiner der n Spieler kann gleichzeitig alle anderen Spieler bendeidenl, denn: Angenommen, das ware nicht so. Konkret: $p_1 \not\Vdash p_2$
$\Rightarrow$ $v_1(X_2) > v_1(X_1) \geq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow$ $v_1((X - X_1) - X_2) < \frac{n-2}{n}$
$\Rightarrow$ $(X - X_1) - X_2$ kann nicht so in $n-2$ Portionen aufgeteilt werden, dass $v_i(X_j) \geq \frac{1}{n}$ fÃ$\frac{1}{4}$r alle $j, 3 \leq j \leq n$, gilt.
$\Rightarrow$ es gibt ein $j, 3 \leq j \leq n$, so dass $v_i(X_j) < \frac{1}{n}$, gilt.
$\Rightarrow$ $p_i \not\Vdash p_j$

Also hat jeder der n Spieler mindestens eine garantierte Neidfrei-Relation zu einem anderen Spieler: $n \leq d(n)$

□

Definition (lemma)**.** *Verlangen die Regeln/Strategien eines proportionalen CCPs fÃ$\frac{1}{4}$r $n \geq 2$ Spielern von keinem Spieler, die Portionen der anderen Spieler zu bewerten, dann ist der **DGEF** $= n$.*

Proof. $n = 2$ Proportionalitat $\Rightarrow$ Neidfreiheit
best case = worst case
und wie vorher: **DGEF** $= 2 = n$

$n \geq 3$ Betrachte das folgende Szenario: FÃ$\frac{1}{4}$r eine gegebene Aufteilung $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, die proportional ist, aber sonst keinerlei Einschrankungen unterliegt, setzen wir die Masse der Spieler so:
FÃ$\frac{1}{4}$r jedes $i, 1 \leq i \leq n$, bewertet p_i:

- die eigene Portion X_i mit $v_i(X_i) = \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} \Rightarrow$ proportional!
- die Portion X_j eines Spielers $p_j, j \neq i : v_i(X_j) = \frac{2}{n} < \frac{1}{n}$
- jede der $n-2$ Ã$\frac{1}{4}$brigen Portionen X_k der Spieler $p_k, |i, j, k| = 3, v_i = (X_k) = \frac{n+1}{n^2} > \frac{1}{n}$

Insgesamt gilt dann fÃ$\frac{1}{4}$r jedes $i, 1 \leq i \leq n$:

1. $v_i(X) = v_i(\bigcup_{j=1}^{n} X_j) \overset{\text{Additivitat}}{=} \sum_{j=1}^{n} v_i(X_j) = \frac{1}{n^2}(n + 2 + (n-2)(n+1)) = \frac{1}{n^2}(n + 2 + n^2 + n - 2n - 2) = 1$
2. p_i hat $n-2$ Neidrelationen und nur eine Neidfrei-Relation
   $\Rightarrow$ Insgesamt gibt es n garantierte Neidfrei-Relationen, eine fÃ$\frac{1}{4}$r jeden Spieler.

□

Satz. *Das Last-Diminisher-Protokoll hat einen **DGEF** von* $\frac{n(n-1)}{2} + 2$

Proof. **Runde 1** Sei $\bar{p}_1$ der Spieler, der die erste Portion erhalt. Jeder andere Spieler bewertet diese mit $\leq \frac{1}{n}$, beneidet also $\bar{p}_1$ nicht
$\Rightarrow n - 1$ garantierte Neidfrei-Relationen

Runde $i, 1 < i < n$ Analog zu Runde 1 konnen $n - i$ Neidfrei-Relationen garantiert werden. $\bar{p}_i$, der die ite Portion erhalt, wird von den verbleibenden Spielern nicht beneidet.
$\Rightarrow$ mindestens $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n-1}{2}$ garantierte Neidfrei-Relationen

Letzte Runde

1. Cut & Choose zwischen $\bar{p}_{n-1}$ und $\bar{p}_n$. Keiner dieser beiden beneidet den anderen.
   $\Rightarrow$ eine zusatzliche garantierte Neidfrei-Relation.
2. Da Last-Diminisher proportional ist, gibt es eine weitere garantierte Neidfrei-Relation fÃ¼r $\bar{p}_1$

$\Rightarrow$ **DGEF** $= \frac{(n-1)n}{2} + 2$ □

Satz. *Das Lone-Chooser-Protokoll hat einen **DGEF** von n.*

Proof. Kein Spieler bewertet die Portion irgendeines anderen Spielers.
$\xRightarrow{\text{Lemma}}$ **DGEF** $= n$ □

4 The Procedures and their DGEF

Each proportional procedure consist of rules and strategies. Since the rules are compulsory, the strategies of e... . In this chapter the strategies of common used procedures are shown (probably specialised, if you can do it) and explained with examples. Then their strategyproofness is analysed. During complications the effect on the DGEF is shown. Complete procedures can be found in [].

4.1 The Steinhaus-Kuhn lone divider procedure

4.2 The Banach-Knaster last-diminisher procedure

satz Falls die Bewertungsfunktionen der Spieler nicht "ubereinstimmen, gibt es eine nicht ehrliche Strategie f"ur den ersten Spieler in jeder Runde ein St"uck mit $v_i(S_i) > 1/N$ zu bekommen. **satz proof** Im Schritt 1: Das abgeschnittene St"uck soll den Wert $1/N+$ Rest von S_1 haben.
Fallunterscheidung: Entweder Spieler p_1 kriegt dieses St"uck oder Spieler p_i beschneidet es und somit kann Spieler p_1 ein solches St"uck in der darauffolgenden Runde bekommen, oder bei Cut und Choose am Ende. **proof**

4.3 The Fink lone-chooser procedure

4.4 The Cut-Your-Own-Piece procedure

4.5 The Divide-and-Conquer procedure

4.6 Erweiterte procedure

4.7 Erweitertung der Erweiterten procedure

5 Related Work

6 Conclusions and Open Questions/Problems

List of Figures

List of Tables