Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Informatik

Bachelorarbeit

Der Einfluss von nicht ehrlichen Strategien auf den DGEF

Name:	Alina Elterman
Matrikelnummer:	1810231
Betreuer:	Prof. Dr. Jörg Rothe
Abgabedatum:	01.02.2011

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Cake-Cutting: Was ist das eigentlich?
Viele Eltern quälen sich, wenn es darum geht, auf einem Geburtstag, gerecht den Kuchen unter den Kindern aufzuteilen. Man möchte alle Kinder glücklich machen und jedem ein solches Stück geben, dass es damit zufrieden ist und kein anderes haben möchte. Also wie lässt sich das Problem lösen?
Viele interdisziplinäre Wissenschaften, beispielweise in den Natur-, Geistes- und Wirtschaftswissenschaften versuchen eine Lösung auf die eben genannte Problematik zu geben.[1]
Doch nicht jeder Kuchen ist gleich. So kann die Form variieren und auch die Möglichkeiten diesen zu teilen können sich unterscheiden.[2]
Einen Kuchen zwischen zwei Kindern aufzuteilen, ist der leichteste Fall. Dieses Verfahren nennt sich Cut & Choose (-Protokoll) und wird im nachfolgenden erklärt. Bei drei Kindern birgt das mathematische Verfahren Selfridge-Conway (-Protokoll) eine Lösung.[3] Für vier Kinder existiert eine Ausnahmelösung, für fünf konnte bis jetzt kein allgemeingültiges Protokoll aufgestellt werden.
Genau an dieser Stelle liegt eine der Problematiken dieser Arbeit. Wie lässt sich dieser Zwiespalt lösen?
Seit den 40er Jahren befassen sich verschiedene Wissenschaftler und Theoretiker mit dem Teilgebiet Cake-Cutting. Immer wieder ergibt sich die Frage nach dem gerechten Teilen. Als Begründer und Problemsteller dieser Theorie gilt Hugo Dionizy Steinhaus in [Kna46] und [Ste48]. Ein weiteres Phänomen das sich beim Cake-Cutting bemerkbar macht, ist der Aspekt des Neides. Der Wirtschaftswissenschaftler Duncan Foley führte den Begriff der "Neidfreiheit" in [Fol67] ein. George Gamow und Marvin Stern haben sich am Beispiel des Weinteilungsproblems mit diesem Thema befasst und erweiterten die Fragestellung auf eine beliebige Anzahl von Personen in [GS58].
In den letzten Jahrzenten wurde viel in diesem Gebiet geforscht und das Interesse von den Computerwissenschaften geweckt. Hier liegt die Analyse der Komplexität solcher Aufteilungen im Vordergrund. Die Arbeit von Ariel Procaccia [Pro09] legte einen Meilenstein in der Komlexitätsanalyse von neidfreien Cake-Cutting-Protokollen.[4]
Im Folgenden, befasst sich diese Arbeit mit der Fragestellung von Steinhaus und den erzielten Fortschritten von ihm und seinen Kollegen. Dabei wird versucht neue Ansätze und Perspektiven zu eröffnen.

[1] Die genauen Schwerpunkte dieser Gebiete werden in Kapitel 2 aufgelistet.
[2] Es wird eine Einführung in die Möglichkeiten und Arten der Teilungen in Kapitel 3 gemacht.
[3] Eine Übersicht der bekannten Protokolle wird in Kapitel 4 gegeben.
[4] Das Verfahren wird in Kapitel 6 beschrieben und anhand eines Beispiels demonstriert.

2 Grundlagen

Für die gerechte Aufteilung müssen zunächst alle Möglichkeiten definiert werden welches Objekt, mit welchem Ziel, auf welche Art und Weise und zwischen welchen Subjekten aufgeteilt werden kann. Die Definitionen und grundlegende Annahmen wurden aus den Büchern [BT96] und [RW98] entnommen.

2.1 Grundbegriffe des Cake-Cutting

Sei P_n={$p_1, ..., p_n$} die Menge von n Spieler, die gemeinsam ein Objekt aufteilen möchten. Es wird angenommen, dass jeder von ihnen möglichst viel von diesem Objekt haben möchte.[5]

Der Kuchen

Im folgenden geht es nur um die Aufteilung von einem einzigen, heterogenen, beliebig teilbaren Gut.[6] Zur Veranschaulichung wird ein rechteckiger Kuchen (Stollen) verwendet. [7] Die Division wird durch eine Reihe von parallen Schnitten durchgeführt.[8] Der Ku-

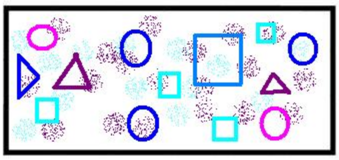

Abbildung 1: Ein rechteckiger Kuchen mit unterschiedlichen Merkmalen vgl.[HS05]. Die einzelnen Fragmente sind unterschiedlich wertvoll für die Spieler.

chen X wird dabei durch das Intervall $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ repräsentiert. Jedes Teilintervall $I' \subseteq I$, oder eine Vereinigung von solchen, wird als Stück bezeichnet. Diese Stücke sind immer disjunkt. Das Stück des Kuchens, welches der Spieler p_i bekommt, wird Portion genannt und als X_i bezeichnet. Jedes Stück hat eine objektive Länge, welche der Summe der Differenzen seiner Grenzen entspricht und eine subjektive Bewertung, die folgend entsteht:

Die Bewertung

Jeder Spieler $p_i \in P_N$ besitzt eine Bewertungsfunktion (Bewertung) $v_i : \{X'|X' \subseteq X\} \mapsto [0,1]$ des Kuchens X. Sie erfüllt folgende Eigenschaften[9]:

[5]Im Gegensatz dazu werden in der Literatur auch Fälle über Aufteilung von unerwünschten Objekten (Chore Division) behandelt, z.B. zusätzliche Arbeit, wo alle daran interessiert sind möglichst, wenig zu erhalten.

[6]Es existieren auch Forschungen über die Aufteilung von mehreren Gütern (z.B. [CNS10]), die hier aber außer Acht gelassen wird.

[7]Es gibt mehrere Studien von einer Torte (runder Kuchen) nachzulesen in [Jon07]).

[8]Es gibt ebenfalls Aufteilungen mit parallelen und rechtwinkligen Schnitten (z.B. Protokoll von Webb).

[9]vgl. zusätzlich [WS07]

1. Nicht-Negativität[10]: $v_i(C) \geq 0$ für alle $C \subseteq [0,1]$.
2. Normalisierung: $v_i(\emptyset) = 0$ und $v_i([0,1]) = 1$.
3. Monotonität: Wenn $C' \subseteq C$, dann $v_i(C') \leq v_i(C)$.
4. Additivität: $v_i(C \cup C') = v_i(C) + v_i(C')$ für disjunkte $C, C' \subseteq [0,1]$.
5. Teilbarkeit[11]: Für alle $C \subseteq [0,1]$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, existiert ein $B \subseteq C$, so dass $v_i(B) = \alpha \cdot v_i(C)$.
6. v_i ist kontinuierlich: Falls $0 < x < y \leq 1$ mit $v_i([0,x]) = \alpha$ und $v_i([0,y]) = \beta$, dann gilt für jedes $\gamma \in [\alpha, \beta]$ existiert ein $z \in [x,y]$ so dass $v_i([0,z]) = \gamma$.

Bei den Beispielen wird die folgende Darstellung für den Kuchen und deren Bewertung genutzt:

Die **Boxendarstellung**:

Abbildung 2: Eigenschaften: Ein solches Diagramm muss separat für jeden Spieler erstellt werden. Die Anzahl der Kästchen ist bei allen Spielern gleich und diese repräsentieren immer den gleichen Wert des Kuchens. Ab hier wird der Wert des Kuchens pro Kästchen genau 1/12 und er wird linear auf der Fläche des Kästchens verteilt, z.B: 1/2 Kästchen = 1/24 der Kuchens. Die Länge des Kuchens ist bei allen Spielern einheitlich sechs Kästchen. Diese Einschränkungen der Eigenschaften werden gemacht um die Beispiele verständlicher und einfacher zu machen. Der objektive Wert eines Kuchens sieht wie die linke Abbildung aus. Es werden die zwölf Kästchen nach der jeweiligen Bewertung des Spieler verteilt, wie z.B. in der rechten Abbildung. Die straffierte Fläche ist das Stück, welches der jeweilige Spieler erhält und dessen Summe ist der Wert seines Stückes. Die parallelen Schnitte werden wie abgebildet eingezeichnet.

Die unterschiedlichen Arten von Gerechtigkeit

Wie oben bereits definiert wurde, besitzt jeder Spieler eine Bewertungsfunktion. Diese Funktion ist geheim und subjektiv (ein Spieler kennt nur seine Bewertungen, und nur seine Bewertungen haben Einfluss auf sein Wohlbefinden). Nach einer Aufteilung wird die Güte dieser gemessen. Dafür werden Maßstäbe benötigt. Der Wichtigste ist die Gerechtigkeit. Aber was bedeutet überhaupt gerecht? Dies ist eine philosophische oder psychologische Frage und kann nicht so einfach und für das gegebene Ziel zufriedenstellend beantwortet werden. Also werden Kriterien benötigt um die Aufteilungen untereinander vergleichen und bewerten

[10] manchmal auch Positivität: $v_i(C) > 0$ für alle $C \subseteq [0,1], C \neq \emptyset$.
[11] daraus folgt auch die Inhaltslosigkeit von Punkten: $v_i([x,x]) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

zu können. Alle Kriterien sind als subjektive Einschätzungen von den Spielern und nicht alss objektive Maßstäbe zu verstehen.

Definition. ***(Proportionalität oder einfache Gerechtigkeit)***
Eine Aufteilung ist proportional (einfach gerecht), falls $v_i(X_i) \geq 1/n$ *für jeden Spieler* $p_i \in P_N$ *gilt.*

Definition. ***(Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist neidfrei, falls $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N$.

Definition. ***(Starke Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist stark-neidfrei falls $v_i(X_i) > v_i(X_j)$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$.

Definition. ***(Super Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist super-neidfrei, falls $v_i(X_j) \leq 1/n$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$.

Definition. ***(Starke Super Neidfreiheit)***
Eine Aufteilung ist stark-super-neidfrei, falls $v_i(X_j) < 1/n$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N, i \neq j$.

Das Problem ist, dass für die stärkeren Einschränkungen nicht immer Aufteilungen existieren, z.B. wenn alle Spieler die gleiche Bewertungsfunktion auf den Kuchen besitzen.

Definition. ***(Exaktheit)***[12]
Eine Aufteilung ist exakt, falls $v_i(X_i) = v_j(X_j)$ *für jedes Paar von Spielern* $p_i, p_j \in P_N$.

In wirtschaftlichen Texten werden Aufteilungen, die gleichzeitig exakt und neidfrei, sind oft als besonders gerecht empfunden. Dennoch hat die Exaktheit sogar in Kombination mit der Proportionalität keinen direkten Zusammenhang mit der Neidfreiheit, wie man sich am folgenden Beispiel leicht veranschaulichen kann.

Beispiel. *Die Spieler Aleph, Beth und Gimel teilen einen Kuchen. Am Ende bekommt jeder Spieler genau* 1/3 *des Kuchens (nach seinem Maß). Diese Aufteilung ist exakt und proportional. Doch Aleph ist der Meinung, dasgBeths Stück genau die Hälfte des Kuchens ist und beneidet Beth. Damit ist die Aufteilung nicht neidfrei.*

Zusammenhänge der Gerechtigkeitskriterien:

Lemma. *Für alle Aufteilungen gilt:*

1. *Falls eine Aufteilung neidfrei ist, so ist sie auch proportional.*
2. *Für zwei Spieler ist eine Aufteilung proportional genau dann, wenn sie neidfrei ist.*

[12] In der Literatur wird an Stelle von Exaktheit oft der Begriff der Gerechtigkeit verwendet, was in gewissem Sinne den gesamten Konzept der Begriffe widerspricht, da alle diese Kriterien einzeln als unterschiedliche Maßstäbe von gerecht befunden werden.

Beweis. 1. Beweis durch Widerspruch:
Sei A eine Aufteilung die neidfrei, aber nicht proportional ist. Da die Aufteilung A neidfrei ist, gilt $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$ für jedes Paar von Spielern $p_i, p_j \in P_N$ und somit hat jeder Spieler mind. soviel wie jeder andere. Daraus folgt, dass jeder Spieler mindestens genauso viel wie $(n-1)$ andere hat und somit mindestens $1/n$. Damit ist die Aufteilung A proportional. ↯
Somit sind alle neidfreien Aufteilungen proportional.

2. "⇒" Für zwei Spieler ist eine Aufteilung proportional, wenn er mind. die Hälfte des Kuchens bekommt, damit kann der andere Spieler höchstens die Hälfte bekommen und wird nicht beneidet.
"⇐" Die Rückrichtung folgt aus Zusammenhang 1.

□

Definition. ***(Effizienz)***
Eine Aufteilung ist effizient (Pareto optimal), falls keine andere Aufteilung existiert, die einem Spieler ein von ihm besser bewertetes Stück einbringt, ohne die Situation eines anderen Spielers zu verschlechtern.

2.2 Grundbegriffe der Spieltheorie

Definition. ***(Risikoaversion)***[13]
Eine Aufteilung (Prozedur) ist ehrlich, falls es keine Bewertungen gibt, bei der Spieler am Ende durch Unaufrichtigkeit ein wertvolleres Stück bekommen hätten. [14]

Definition. ***(Ehrlichkeit)***[15]
Eine Aufteilung (Prozedur) ist ehrlich, falls es keine Bewertungen gibt, bei der Spieler am Ende durch Unaufrichtigkeit ein wertvolleres Stück bekommen hätten. [16]

Es besteht nur Interesse an Aufteilungen, wo die Ehrlichkeit die beste Strategie für alle Spieler ist und somit allein durch den Algorithmus erzwungen wird. Oft wird dies erreicht, indem der Spieler durch Unaufrichtigkeit Gefahr läuft die Garantie auf seinen gerechten Anteil zu verlieren.

2.3 Grundbegriffe der Komplexitätsanalyse von Protokollen

Komplexitätsklassen[17]

[13] In den letzten Jahren wurde dieser Aspekt konzentrierter untersucht vgl. [CLPD10]. Es kann als ein einzelnes Kriterium formuliert werden.
[14] "We say that a cake cutting procedure is truthful iff there are no valuations where a player will do better by lying." aus [Wal10].
[15] In den letzten Jahren wurde dieser Aspekt konzentrierter untersucht vgl. [CLPD10]. Es kann als ein einzelnes Kriterium formuliert werden.
[16] "We say that a cake cutting procedure is truthful iff there are no valuations where a player will do better by lying." aus [Wal10].
[17] aus [Rot08]

Um Algorithmen anhand ihrer Laufzeiten besser zuordnen und vergleichen zu können wurden die zwei nachfolgenden Funktionenklassen eingeführt.

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} | (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[f(n) \leq c \cdot g(n)]\}$$

Die Funktion $f \in \mathcal{O}(g)$ wächst asymptotisch nicht schneller als g. Es dürfen Konstanten und endlich viele Ausnahmen vernachlässigt werden. Die Funktion g wird als obere Schranke bezeichnet. In dieser Funktionsklasse liegt immer der ungünstigste Fall. Dies ist eine gültige Eingabe, für dessen Lösung der Algorithmus die längste Zeit benötigt.

$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} | (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[f(n) \geq c \cdot g(n)]\}$$

Die Funktion g wächst asymptotisch nicht schneller als jedes $f \in \Omega(g)$. Die Funktion g wird als untere Schranke bezeichnet. In dieser Funktionsklasse liegt immer der beste Fall. Üblicherweise ist diese Zeitangabe kleiner als das tatsächliche Resultat, aber man kann beweisen, dass ohne diesen Zeitaufwand das Problem nicht lösbar ist.

Klassen von Protokollen

Intuitive Beschreibung: Algorithmus
In der Mathematik, Informatik und verwandten Gebieten, ist ein Algorithmus eine effektive Methode zur Problemlösung, ausgedrückt durch eine endliche Folge von Anweisungen.

Definition. ***(Protokoll (Cake-Cutting-Protokoll)[18])***
Ein Protokoll (Cake-Cutting-Protokoll) ist ein Algorithmus mit mehreren Spielern und folgenden Eigenschaften:

- *Es besteht aus Regeln und Strategien.*
  Regeln sind Anweisungen, die gefordert werden ohne die Bewertungen der Spieler zu kennen (deren Befolgung kann kontrolliert werden).
  Strategien sind Empfehlungen, welchen der Spieler folgen kann um garantiert seinen gerechten Anteil zu bekommen.

- *Sofern ein Spieler sich nicht an die Strategie des Protokolls hält, verliert er seinen Anspruch nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein Stück des Kuchens zu bekommen, welches dem geforderten Gerechtigkeitskriterium entspricht. Sein Vorgehen hat aber keine Auswirkungen auf die Anteile der anderen Spieler.*

- *Jeder Spieler muss zu jeder Zeit in der Lage sein, völlig unabhängig von den anderen Spielern den Kuchen zu teilen (einen Schnitt zu machen).*

- *Das Protokoll besitzt keine Informationen über die Bewertungen der Spieler, ausser denen die angefragt wurden in dem jeweiligen oder in den vorherigen Schritten.*

Beispiel. *Regel:*
Spieler p_1 schneide ein Stück ab. Strategien:
Spieler p_1 halbiere das Stück nach seinem Mäß.

[18] Vgl. mit Definition aus [EP84], [RW95] und [WS07] oder [MIBK03].

Definition. *Ein Cake-Cutting-Protokoll wird proportional, neidfrei, stark neidfrei etc. genannt, falls unabhängig von den Bewertungsfunktionen der Spieler, jede Aufteilung entsprechend proportional, neidfrei etc., unter der Vorraussetzung, dass alle Spieler die vom Protokoll vorgegebenen Regeln und Strategien befolgen, ist.*

Eines der Ziele von Cake-Cutting ist solche Protokolle anzugeben.

Definition. ***(endlich (diskret)/kontinuierlich)***
Ein endliches (diskretes) Protokoll liefert eine Lösung nach einer endlichen Anzahl von Entscheidungen (Bewertungen, Markierungen,...), dagegen muss ein Spieler bei einem kontinuierlichen Protokoll unendlich viele Entscheidungen treffen.

Definition. ***(endlich beschränkt/endlich unbeschränkt))***
Ein endlich beschränktes Protokoll hat eine obere Grenze von Schritten, welche im ungünstigsten Fall betrachtet wird. Die gesamte Anzahl von Entscheidungen hängt, wenn überhaupt, dann nur von der Anzahl der beteiligten Personen ab. Ein endlich unbeschränktes Protokoll hat hingegen eine nicht im Voraus abschätzbare Anzahl.

Die begehrtesten Protokolle sind endlich beschränkt, da sie am einfachsten in der Realität umsetzbar sind. Aber es gibt eine Art von kontinuierlichen Protokollen, an denen ebenfalls Interesse besteht.

Definition. ***(Moving-Knife-Protokoll)***
Ein Schiedsrichter, welcher unparteisch gegenüber den Spielern ist und unbeteiligt an der Verteilung der Stücke, schwenkt ein Messer kontinuierlich von links nach rechts und macht parallele Schnitte sofern ein Spieler "Halt!" ruft. Bei manchen MKP wird der Schiedsrichter ausgelassen und nur ein Messer oder Schwert geschwungen.

Bemerkung: In der Literatur (z.B.: [End09]) werden manchmal kontinuierliche Protokolle nicht als Protokolle bezeichnet sondern zu neuen Klassen zusammengefasst, die von der Anzahl der Messer abhängen.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Cake-Cutting ist, dass nur komplette Aufteilungen des Kuchens,also wo jedes Stück einem Spieler zugeordnet wird, betrachtet werden.

3 Der Grad der garantierten Neidfreiheit

Motivation Für $n \geq 4$ ist es offen, ob es ein neidfreies, endlich beschränktes CCP gibt!

$\Rightarrow$ Abschwächen des Ideals der Neidfreiheit.

Definition. *Sei eine Aufteilung des Kuchens $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ für die Menge $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ der Spieler gegeben, wobei v_i das Maß von p_i und X_i die Portion von p_i ist.*

- *Eine Neidrelation("envy relation") $\Vdash$ ist eine Binärrelation auf $P(\Vdash, PxP) : p_i$ beneidet p_j $(p_i \Vdash p_j)$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, falls $v_i(X_i) < v_i(X_j)$.*
- *Eine Neidfrei-Relation ("envy-free relation") $\nVdash$ ist eine Binärrelation auf $P : p_i$ beneidet nicht p_j $(p_j \nVdash p_j)$,$1 \leq i, j \leq n$,$i \neq j$, falls $v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$.*

Eigenschaften von $\Vdash$ und $\nVdash$:

- $\Vdash$ ist irreflexiv, denn $v_i(X_i) < v_i(X_i)$ gilt nie
- $\nVdash$ ist reflexiv, denn $v_i(X_i) \geq v_i(X_i)$ gilt immer
  Die triviale Beziehung $p_i \nVdash p_i$ zählt in der Regel nicht mit.
- $\Vdash$ und $\nVdash$ sind nicht transitiv.
  Gilt z.B. $p_i \Vdash p_j$ und $p_j \Vdash p_k$, so kann man daraus nichts über $v_i(X_k)$ schließen: $p_i \nVdash p_k$ ist möglich

$\Rightarrow$ Es gibt die folgenden Möglichkeiten:

1. Zwei-Wege-Neid: $p_i \Vdash p_j$ und $p_j \Vdash p_i$
   (Tausch der Portionen macht beide glücklich.)
2. Zwei-Wege-Neidfreiheit: $p_i \nVdash p_j$ und $p_j \nVdash p_i$
   (Alles ist gut.)
3. Ein-Weg-Neid: $p_i \Vdash p_j$ und $p_j \nVdash p_i$
   Ein-Weg-Neidfreiheit: $p_j \Vdash p_i$ und $p_i \nVdash p_j$

Fallerzwungene Neid- bzw. Neidfrei-Relationen: hängen ab von einem Fall geeigneter Maße.
Garantierte Neid- bzw. Neidfrei-Relationen: gelten in jeden Fall (auch im worst case), also unabhängig von den Maßen der Spieler.
Anzahl garantierter Neidfrei-Relationen $= \min\limits_{alleFaelle}$ Anzahl der fallerzwungenen Neidfrei-Relationen.

Beispiel. *Aufteilung $X = X_F \cup X_G \cup X_H$ des Kuchens mit*

	$X_F = \begin{array}{ccc} & & \square \\ & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$	$X_G = \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ 7 & 8 & 9 \end{array}$	$X_H = \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$
F	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
G	$\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
H	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ nicht proportional wegen $v_G(X_g) = \frac{1}{6} < \frac{1}{3}$.
Es gibt:

Ein-Weg-Neid von G zu F:
$G \Vdash F$ wegen $v_G(X_G) = \frac{1}{6} < v_G(X_F) = \frac{1}{2}$
Gleichzeitig ist dies
$F \nVdash G$ wegen $v_F(X_G) = \frac{1}{3} = v_F(X_F)$

Ein-Weg-Neidfreiheit von F zu G

Zwei-Wege-Neidfreiheit zwischen F und H
$F \nVdash H$, da $v_F(X_F) = \frac{1}{3} = v_F(X_H)$
$H \nVdash F$, da $v_H(X_H = \frac{6}{18} > \frac{5}{18} = v_H(X_F)$

Zwei-Wege-Neid zwischen G und H
$G \Vdash H$, *da* $v_g(X_G) = \frac{1}{6} < \frac{1}{3} = v_G(X_H)$
$H \Vdash G$, *da* $v_H(X_H) = \frac{1}{3} < \frac{7}{18} = v_H(X_G)$

DGEF = Anzahl der Neidfrei-Relationen im worst case

Protokoll. *Jörg erhält den Kuchen.*
DGEF $: n-1+(n-1)(n-2) = n-1-n^2-3n+2 = n^2-2n-1$

Satz. *1. Jedes neidfreie CCP für $n \geq 1$ Spieler hat einen **DGEF** von $n(n-1)$.*

*2. Sei $d(n)$ der **DGEF** eines proportionalen CCPs mit $n \geq 2$ Spielern. Dann gilt: $n \leq d(n) \leq n(n-1)$.*

Beweis. 1. Da wir $p_i \nVdash p_i$ für alle i, $1 \leq i \leq n$, außer 8 lassen, hat jeder der n Spieler zu jedem anderen Spieler eine Neidfreie-Relation, insgesamt also $n(n-1)$.

2. $n = 2$ Offenbar gilt: $d(2) = 2$, denn da das CCP proportional ist, gilt: $v_1(X_1) \geq \frac{1}{2}$ und $v_2(X_2) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow v_1(X_1) \geq v_1(X_2)$ und $v_2(X_2) \geq v_2(X_1)$

$n \geq 3$ Da $p_i \nVdash p_i$ für alle i ignoriert wird, gilt $d(n) \leq n(n-1)$.

In einer proportionalen Aufteilung gilt:
$v_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$ für $1 \leq i \leq n$.

$\Rightarrow$ Keiner der n Spieler kann gleichzeitig alle anderen Spieler bendeidenl, denn: Angenommen, das wäre nicht so. Konkret: $p_1 \nVdash p_2$
$\Rightarrow$ $v_1(X_2) > v_1(X_1) \geq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow$ $v_1((X - X_1) - X_2) < \frac{n-2}{n}$
$\Rightarrow$ $(X - X_1) - X_2$ kann nicht so in $n-2$ Portionen aufgeteilt werden, dass $v_i(X_j) \geq \frac{1}{n}$ für alle $j, 3 \leq j \leq n$, gilt.
$\Rightarrow$ es gibt ein $j, 3 \leq j \leq n$, so dass $v_i(X_j) < \frac{1}{n}$, gilt.
$\Rightarrow$ $p_i \nVdash p_j$

Also hat jeder der n Spieler mindestens eine garantierte Neidfrei-Relation zu einem anderen Spieler: $n \leq d(n)$

□

Lemma. *Verlangen die Regeln/Strategien eines proportionalen CCPs für $n \geq 2$ Spielern von keinem Spieler, die Portionen der anderen Spieler zu bewerten, dann ist der **DGEF** $= n$.*

Beweis. $n = 2$ Proportionalität $\Rightarrow$ Neidfreiheit
best case = worst case
und wie vorher: **DGEF** $= 2 = n$

$n \geq 3$ Betrachte das folgende Szenario: Für eine gegebene Aufteilung $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, die proportional ist, aber sonst keinerlei Einschränkungen unterliegt, setzen wir die Maße der Spieler so:
Für jedes $i, 1 \leq i \leq n$, bewertet p_i:

- die eigene Portion X_i mit $v_i(X_i) = \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} \Rightarrow$ proportional!

- die Portion X_j eines Spielers $p_j, j \neq i : v_i(X_j) = \frac{2}{n} < \frac{1}{n}$
- jede der $n-2$ übrigen Portionen X_k der Spieler $p_k, |i, j, k| = 3, v_i = (X_k) = \frac{n+1}{n^2} > \frac{1}{n}$

Insgesamt gilt dann für jedes $i, 1 \leq i \leq n$:

1. $v_i(X) = v_i(\bigcup_{j=1}^{n} X_j) \overset{\text{Additivität}}{=} \sum_{j=1}^{n} v_i(X_j) = \frac{1}{n^2}(n+2+(n-2)(n+1)) = \frac{1}{n^2}(n+2+n^2+n-2n-2) = 1$
2. p_i hat $n-2$ Neidrelationen und nur eine Neidfrei-Relation
   $\Rightarrow$ Insgesamt gibt es n garantierte Neidfrei-Relationen, eine für jeden Spieler.

□

4 Die Protokolle und ihr DGEF

4.1 Das Last-Diminisher-Protokoll

Satz. *Das Last-Diminisher-Protokoll hat einen* ***DGEF*** *von* $\frac{n(n-1)}{2} + 2$

Beweis. **Runde 1** Sei $\bar{p}_1$ der Spieler, der die erste Portion erhält. Jeder andere Spieler bewertet diese mit $\leq \frac{1}{n}$, beneidet also $\bar{p}_1$ nicht
$\Rightarrow n-1$ garantierte Neidfrei-Relationen

Runde $i, 1 < i < n$ Analog zu Runde 1 können $n-i$ Neidfrei-Relationen garantiert werden. $\bar{p}_i$, der die ite Portion erhält, wird von den verbleibenden Spielern nicht beneidet.
$\Rightarrow$ mindestens $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ garantierte Neidfrei-Relationen

Letzte Runde
1. Cut & Choose zwischen $\bar{p}_{n-1}$ und $\bar{p}_n$. Keiner dieser beiden beneidet den anderen.
   $\Rightarrow$ eine zusätzliche garantierte Neidfrei-Relation.
2. Da Last-Diminisher proportional ist, gibt es eine weitere garantierte Neidfrei-Relation für $\bar{p}_1$

$\Rightarrow$ **DGEF** $= \frac{(n-1)n}{2} + 2$ □

	Die Regeln des Last-Diminisher-Protokolls
· **Schritt 1**	Setze $N := n$. Der Spieler p_1 schneidet vom Kuchen ein Stück S_1 ab.
· **Schritt 2**	Die Spieler $p_2, ..., p_n$ geben dieses Stück von einem zum nächsten, wobei sie es ggf. beschneiden. Dabei sei $S_{i-1}, 2 \leq i \leq n$, das Stück, das p_i von p_{i-1} bekommt. Der letzte Spieler, der etwas davon abgeschnitten hat, erhält dieses Stück und scheidet aus.
· **Schritt 3**	Setze die Reste zusammen zum neuen Kuchen $X := X - S_n$, benenne ggf. die im Spiel verbliebenen Spieler um in $p_1, ..., p_{n-1}$ und setze $n := n-1$.
· **Schritt 4**	Schritt 1 bis Schritt 3 werden wiederholt, bis $n = 2$ gilt. Die Spieler p_1 und p_2 spielen "Cut & Choose".

Strategien:

- Schritt 1: Das abgeschnittene Stück soll den Wert $1/N$ haben.
- Schritt 2: Im Fall $v_i(S_i) > 1/N$ schneidet p_i etwas ab, so dass $v_i(S_i) = 1/N$, sonst reicht er das Stück weiter.

Satz. *Falls die Bewertungsfunktionen der Spieler nicht übereinstimmen, gibt es eine nicht ehrliche Strategie für den ersten Spieler in jeder Runde ein Stück mit $v_i(S_i) > 1/N$ zu bekommen.*

Beweis. Im Schritt 1: Das abgeschnittene Stück soll den Wert $1/N+$ Rest von S_1 haben.
Fallunterscheidung: Entweder Spieler p_1 kriegt dieses Stück oder Spieler p_i beschneidet es und somit kann Spieler p_1 ein solches Stück in der darauffolgenden Runde bekommen, oder bei Cut und Choose am Ende. □

4.2 Das Lone-Chooser-Protokoll

Satz. *Das Lone-Chooser-Protokoll hat einen **DGEF** von n.*

Beweis. Kein Spieler bewertet die Portion irgendeines anderen Spielers.
$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ **DGEF** $= n$ □

	Die Regeln des Lone-Chooser-Protokolls
· **Schritt 1**	Spieler p_1 und p_2 spielen "Cut & Choose".
· **Schritt 2**	Die Spieler $p_2, ..., p_n$ geben dieses Stück von einem zum nächsten, wobei sie es ggf. beschneiden. Dabei sei $S_{i-1}, 2 \leq i \leq n$, das Stück, das p_i von p_{i-1} bekommt. Der letzte Spieler, der etwas davon abgeschnitten hat, erhält dieses Stück und scheidet aus.
· **Schritt 3**	Setze die Reste zusammen zum neues Kuchen $X := X - S_n$, benenne ggf. die im Spiel verbliebenen Spieler um in $p_1, ..., p_{n-1}$ und setze $n := n - 1$.
· **Schritt 4**	Schritt 1 bis Schritt 3 werden wiederholt, bis $n = 2$ gilt. Die Spieler p_1 und p_2 spielen "Cut & Choose".

Strategien:

- Runde 1: Der Spieler p_1 halbiert die Stücke.
- Runde 1: Der Spieler p_2 wählt das größere Stück.
- Runde j $2 \leq j \leq n-1$: Die Spieler $\{p_1, ..., p_j\}$ schneiden das Stück in i, $3 \leq i \leq j+1$ gleichwertvolle Stücke nach ihrem Maß.
- Runde j $2 \leq j \leq n-1$: Der Spieler p_{j+1} wählt von den $j+1$ Spielern jeweils das wertvollste Stück nach seinem Maß.

4.3 Das Lone-Divider-Protokoll

Strategien:

- Schritt 1: Das abgeschnittene Stück soll den Wert $1/N$ haben.
- Schritt 2: Im Fall $v_i(S_i) > 1/N$ schneidet p_i etwas ab, so dass $v_i(S_i) = 1/N$, sonst reicht er das Stück weiter.

4.4 Das Cut-Your-Own-Piece-Protokoll

Strategien:

- Schritt 2(a): Das abgeschnittene Stück soll den Wert $1/N$ haben.
- Schritt 2: Im Fall $v_i(S_i) > 1/N$ schneidet p_i etwas ab, so dass $v_i(S_i) = 1/N$, sonst reicht er das Stück weiter.

4.5 Das Divide-and-Conquer-Protokoll

Strategien:

- Schritt 1: Das abgeschnittene Stück soll den Wert $1/N$ haben.
- Schritt 2: Im Fall $v_i(S_i) > 1/N$ schneidet p_i etwas ab, so dass $v_i(S_i) = 1/N$, sonst reicht er das Stück weiter.

Literaturverzeichnis

[Aus82] A. K. Austin. Sharing a Cake. *Mathematikal Gazette*, 66, 1982.

[BB04] J. B. Barbanel and S. J. Brams, Cake Division with Minimal Cuts: Envy-Free Procedures for 3 Persons, 4 Persons, and Beyond.*Math. Social Sciences 48*: 251-269, 2004.

[BT96] S. Brams and A. Taylor. *Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution.* Cambridge University Press, 1996.

[BTZ97] S. J. Brams, A. D. Taylor, and W. S. Zwicker. A moving-knife solution to the four-person envy free cake division problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(2):547-554, 1997.

[CLPD10] Y. Chen, J. Lai, D. Parkes, and A. Procaccia. Truth, Justice, and Cake Cutting. *In the Proceedings 24th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI '10)*, 2010.

[CNS10] J. Cloutier, C. Nyman and F. Su. Two-Player Envy-Free Multi-Cake Division.*Mathematical Social Sciences* Volume 59, Issue 1, Pages 26-37, 2010.

[End09] Ulle Endriss. Lecture Notes on Fair Division. ILLC, University of Amsterdam, September 2009.

[EP84] S. Even and A. Paz. A note on cake-cutting. *Discrete Applied Mathematics*, 7:285-296, 1984.

[EP06] J. Edmonds and K. Pruhs. Cake cutting really is not a piece of cake. In*Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 271-278, 2006.

[Fol67] D. Foley, Resource allocation and the public sector,*Yale Economic Essays 7*,45-98,1967.

[GS58] G. Gamow and M. Stern.*Puzzle-Math.*Viking, New York, 1958.

[HS05] C.- J. Haake and F. Su. Fair Division Procedures: Why use Mathematics?*Procedural Approaches to Conflict Resolution*, M. Raith (ed.), Springer Verlag, 2005.

[Jon07] M. A. Jones. Some Recent Results on Pie Cutting. Fair Division,*Dagstuhl Seminar Proceedings* 2007.

[Kna46] B. Knaster, Sur le probleme du partage pragmatique de H. Steinhaus,*Ann. Soc. Polon. Math.*19 (1946), 228-230.

[LR09] C. Lindner and J. Rothe. Degrees of Guaranteed Envy-Freeness in Finite Bounded Cake-Cutting Protocols. *Proceedings of the 5th Workshop on Internet & Network Economics (WINE 2009)*, Rome, Italy. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science 5929, pages 149-159, 2009.

[MIBK03] M. Magdon-Ismail, C. Busch, and M. Krishnamoorthy. Cake-cutting is not a piece of cake. In *Proceedings of the 20th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 596-607. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science #2607, 2003.

[MIBK05] M.Magdon-Ismail, C. Busch, and M. S. Krishnamoorthy. Hardness results for cake cutting. *Bulletin of the EATCS*, 86:85-106, 2005

[Pro09] A. Procaccia. Thou shalt covet thy neighbor's cake. In *Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 239-244. IJCAI, July 2009.

[Rot08] J. Rothe,*Komplexitätstheorie und Kryptologie: Eine Einführung in Kryptokomplexität* Springer, Berlin. 2008.

[Rot10] J. Rothe, Cake-Cutting Algorithms, Düsseldorf, WS 2009/2010.

[RW95] J. M. Robertson and W. A. Webb. Approximating fair division with a limited number of cuts, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 72, 340-344, 1995.

[RW98] J. Robertson and W. Webb. *Cake-Cutting Algorithms: Be Fair If You Can.* A K Peters, 1998.

[Ste48] H. Steinhaus. The problem of fair division. *Econometrica*, 16:101-104, 1948.

[Su99] F. Su. Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. *Amer. Math. Monthly*, 106(10):930-942, 1999.

[SW09] A. Saberi and Y. Wang. Cutting a Cake for Five People. *AAIM '09: Proceedings of the 5th International Conference on Algorithmic Aspects in Information and Management*, pages 292-300. Springer-Verlag.2009.

[Var74] H. Varian. Equity, envy, and efficiency. *Journal of Economic Theory*, 9(1):63-91, 1974.

[Wal10] T. Walsh. Online Cake Cutting. *COMSOC'10: Third International Workshop on Computational Social Choice*, pages 247-258. Düsseldorf University Press.2010.

[WS03] G. J. Woeginger and J. Sgall. A Lower Bound for Cake Cutting,*In European Symposium on Algorithms (ESA*, pages 459-469, 2003.

[WS07] G. J. Woeginger and J. Sgall. On the complexity of cake cutting. *Discrete Optimization*, 4:213-220, 2007.

[Zen00] D. Zeng. Approximate Envy-Free Procedures. *Game Practice: Contributions from Applied Game Theory.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 259-271, 2000.

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Düsseldorf, 31. Januar 2011 Alina Elterman