Prof. J. Rothe Düsseldorf, 25.11.2010

Übung zur Vorlesung im WS 2010/2011
Algorithmische Eigenschaften von Wahlsystemen I

(Lösungsvorschläge)

Blatt 7, Abgabe am 2. Dezember 2010

Aufgabe 1 (Greedy-Manipulation): Stellen Sie für die Wahlsysteme Borda und Plurality die in Aufgabe 4 auf Blatt 6 definierte Funktion S_P auf.

Lösungsvorschläge:

PV: $S_P(a) = \max\{0, \|\{b \in C - \{a\} \mid a \text{ steht vor } b\}\| - n + 2\}$.

Borda: $S_P(a) = \|\{b \in C - \{a\} \mid a \text{ steht vor } b\}\|$.

Aufgabe 2 (X3C **und** SC)**:** Die beiden Entscheidungsprobleme X3C und SC seien wie folgt definiert.

	SET COVER (SC)
Gegeben:	Eine Menge $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$, wobei $l \geq 1$, und eine Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq B$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$ und eine natürliche Zahl k mit $k \leq \|\mathcal{S}\|$.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ mit $\|\mathcal{S}'\| \leq k$ derart, dass jedes Element aus B in mindestens einer der Teilmengen aus $\mathcal{S}'$ enthalten ist?

	EXACT COVER BY THREE SETS (X3C)
Gegeben:	Eine Menge $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{3m}\}$, wobei $m \geq 1$, und eine Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $\|S_i\| = 3$ und $S_i \subseteq B$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ derart, dass jedes Element aus B in genau einer der Teilmengen aus $\mathcal{S}'$ enthalten ist?

(a) Entscheiden Sie, ob die folgende X3C-Instanz eine Ja-Instanz ist: $(B, \mathcal{S})$ mit

- $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{12}\}$
- $\mathcal{S} = \{\{b_1, b_2, b_7\}, \{b_{11}, b_2, b_7\}, \{b_2, b_8, b_3\}, \{b_{11}, b_{10}, b_{12}\}, \{b_6, b_1, b_{10}\}, \{b_3, b_9, b_8\}, \{b_7, b_{11}, b_6\}, \{b_4, b_{12}, b_{10}\}, \{b_9, b_5, b_3\}, \{b_4, b_5, b_6\}\}$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Es sei

- $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$ und
- $\mathcal{S} = \{\{b_2, b_5, b_7\}, \{b_7\}, \{b_1, b_4\}, \{b_3, b_4, b_6, b_7\}, \{b_5, b_6\}, \{b_1, b_3, b_5\}, \{b_2, b_4\}\}$.

Entscheiden Sie für jedes k, $2 \leq k \leq 7$, ob $(B, \mathcal{S}, k)$ eine Ja-Instanz für SET COVER ist. Geben Sie gegebenenfalls die Überdeckung explizit an oder begründen Sie, warum es keine Überdeckung dieser Größe geben kann.

Lösungsvorschläge:

(a) $\mathcal{S}' = \{\{b_1, b_2, b_7\}, \{b_{11}, b_{10}, b_{12}\}, \{b_3, b_9, b_8\}, \{b_4, b_5, b_6\}\}$ ist eine exakte Überdeckung für B.

(b)
- $k = 7$: ganz $\mathcal{S}$ ist eine Überdeckung.
- $k = 6$: $\{\{b_2, b_5, b_7\}, \{b_1, b_4\}, \{b_3, b_4, b_6, b_7\}, \{b_5, b_6\}, \{b_1, b_3, b_5\}, \{b_2, b_4\}\}$ ist eine Überdeckung.
- $k = 5$: $\{\{b_2, b_5, b_7\}, \{b_1, b_4\}, \{b_3, b_4, b_6, b_7\}, \{b_1, b_3, b_5\}, \{b_2, b_4\}\}$ ist eine Überdeckung.
- $k = 4$: $\{\{b_2, b_5, b_7\}, \{b_3, b_4, b_6, b_7\}, \{b_1, b_3, b_5\}, \{b_2, b_4\}\}$ ist eine Überdeckung.
- $k = 3$: $\{\{b_2, b_5, b_7\}, \{b_1, b_4\}, \{b_3, b_4, b_6, b_7\}\}$ ist eine Überdeckung.
- $k = 2$: Es gibt keine Überdeckung der Größe 2. Angenommen, es gäbe eine solche, so müsste sie wegen $\|B\| = 7$ aus der Menge S_4 und entweder S_1 oder S_6 bestehen. Da aber $S_4 \cap S_i \neq \emptyset$ für $i \in \{1, 6\}$, kann es keine Überdeckung der Größe 2 geben.

Aufgabe 3 **(X3C$\leq_m^p$SC):**

(a) Es gilt, dass von den beiden Entscheidungsproblemen X3C und SC eines ein Spezialfall des anderen ist. Zeigen Sie, wie man aus einer Instanz des Spezialfalls eine Instanz des allgemeineren Problems konstruieren kann. Angenommen, der Spezialfall sei NP-hart, was gilt dann für das allgemeinere Problem?

(b) Geben Sie eine Reduktion X3C$\leq_m^p$SC an.

Lösungsvorschläge:

(a) X3C ist ein Spezialfall von SC. Sei also $(B, \mathcal{S})$ eine X3C-Instanz mit $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{3m}\}$. Dann ist $(B, \mathcal{S}, m)$ eine SC-Instanz.

Da die NP-Härte eine untere Schranke der Härte ist, vererbt sich die NP-Härte eines Spezialfalles auf das allgemeine Problem. Ist also X3C NP-hart, so ist es auch SC.

(b) Offensichtlich ist die Transformation in (a) in Polynomialzeit möglich. Es bleibt für die Reduktion also zu zeigen: $\mathcal{S}$ enthält eine exakte Überdeckung für B genau dann, wenn $\mathcal{S}$ eine Überdeckung der Größe m für B enthält.

Von links nach rechts: Sei $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ eine exakte Überdeckung für B. Es gilt nach Definition, dass $\|\mathcal{S}'\| = m$. Da nun jede exakte Überdeckung eine Überdeckung ist, ist $\mathcal{S}'$ eine Überdeckung der Größe m für B.

Von rechts nach links: Sei nun $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ eine Überdeckung der Größe m für B. Da B genau $3m$ Elemente enthält und jedes $S_i \in \mathcal{S}$ genau 3-elementig ist, kann jedes b_j aus B in genau einem der $S_i \in \mathcal{S}'$ enthalten sein. Damit ist $\mathcal{S}'$ eine exakte Überdeckung für B.

Aufgabe 4 (STV-CONSTRUCTIVE MANIPULATION)**:** In der Vorlesung haben Sie die Reduktion von X3C auf das Entscheidungsproblem STV-CONSTRUCTIVE MANIPULATION kennengelernt. Gegeben sei die folgende X3C-Instanz:

- $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{12}\}$
- $\mathcal{S} = \{\{b_1, b_2, b_7\}, \{b_{10}, b_{11}, b_{12}\}, \{b_3, b_8, b_9\}, \{b_4, b_5, b_6\}, \{b_2, b_7, b_{11}\}\}$.

Bestimmen Sie die Kandidatenmenge C der resultierenden STV-Wahl und bestimmen Sie für $I_j \subseteq \{1, 2, \ldots, 5\}$, $j \in \{1, 2\}$, mit $I_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ und $I_2 = \{2, 3, 4\}$

(a) die Reihenfolge der ersten 5 Kandidaten in der Stimme des Manipulators,

(b) die ersten 15 Kandidaten, die aus der Wahl ausscheiden,

(c) die Punktwerte der Kandidaten aus B, nachdem die ersten 15 Kandidaten ausgeschieden sind.

Lösungsvorschläge: Die Kandidatenmenge ist

$$C = \{c, w\} \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_5\} \cup \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_5\} \cup \{d_1, d_2, \ldots, d_5\} \cup \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_5\} \cup \{b_0, b_1, \ldots, b_{12}\} \cup \{g_1, g_2, \ldots, g_5\}.$$

(a) Die ersten 5 Kandidaten in der Präferenz des Manipulators sind (in dieser Reihenfolge) für I_1 :

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \bar{a}_5$$

Die ersten 5 Kandidaten in der Präferenz des Manipulators sind (in dieser Reihenfolge) für I_2 :

$$\bar{a}_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \bar{a}_5$$

(b) Die Reihenfolge der ersten 15 Kandidaten, die ausscheiden für I_1:

i=1: $1 \in I_1 \Rightarrow \bar{a}_1, d_1, a_1$ scheiden aus.

i=2: $2 \in I_1 \Rightarrow \bar{a}_2, d_2, a_2$ scheiden aus.

i=3: $3 \in I_1 \Rightarrow \bar{a}_3, d_3, a_3$ scheiden aus.

i=4: $4 \in I_1 \Rightarrow \bar{a}_4, d_4, a_4$ scheiden aus.

i=5: $5 \notin I_1 \Rightarrow a_5, \bar{d}_5, \bar{a}_5$ scheiden aus.

Die Reihenfolge der ersten 15 Kandidaten, die ausscheiden für I_2:

i=1: $1 \notin I_2 \Rightarrow a_1, \bar{d}_1, \bar{a}_1$ scheiden aus.

i=2: $2 \in I_2 \Rightarrow \bar{a}_2, d_2, a_2$ scheiden aus.

i=3: $3 \in I_2 \Rightarrow \bar{a}_3, d_3, a_3$ scheiden aus.

i=4: $4 \in I_2 \Rightarrow \bar{a}_4, d_4, a_4$ scheiden aus.

i=5: $5 \notin I_2 \Rightarrow a_2, \bar{d}_2, \bar{a}_2$ scheiden aus.

(c)

b_i	Pktwerte für I_1	Pktwerte für I_2
b_1	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_1}$	$12 \cdot 5 - 2$
b_2	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_1}$	$12 \cdot 5 - 2$
b_3	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_3}$	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_3}$
b_4	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_4}$	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_4}$
b_5	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_4}$	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_4}$
b_6	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_4}$	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_4}$
b_7	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_1}$	$12 \cdot 5 - 2$
b_8	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_3}$	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_3}$
b_9	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_3}$	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_3}$
b_{10}	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_2}$	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_2}$
b_{11}	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_2}$	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_2}$
b_{12}	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_2}$	$12 \cdot 5 - 2 + \underbrace{2}_{S_2}$