Prof. J. Rothe Düsseldorf, 20.01.2011

Übung zur Vorlesung im WS 2010/2011
Algorithmische Eigenschaften von Wahlsystemen I

(Lösungsvorschläge)

Blatt 12, Abgabe am 27. Januar 2011

Aufgabe 1 (Beeinflussbarkeit): Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(a) Ist ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ beeinflussbar durch konstruktive Kontrolle durch Partitionieren der Wähler (im Model TE oder TP), dann ist $\mathcal{E}$ auch beeinflussbar durch konstruktive Kontrolle durch Entfernen von Kandidaten.

(b) Zeigen Sie, dass ein Wahlsystem $\mathcal{E}$, das die voiced-Eigenschaft besitzt, beeinflussbar durch destruktive Kontrolle durch Hinzufügen von Kandidaten ist.

Lösungsvorschläge:

(a) Es sei $\mathcal{E}$ ein Wahlsystem, das beeinflussbar ist durch konstruktive Kontrolle durch Partitionieren der Wähler. Es sei nun (C, V) eine $\mathcal{E}$-Wahl, so dass Kandidat c nicht der eindeutige Gewinner in (C, V) ist. Es sei nun weiterhin (V_1, V_2) eine erfolgreiche Partitionierung der Wählerliste, so dass c die resultierende 2-Stufen-Wahl gewinnt. Das heißt, Kandidat c ist eindeutiger Gewinner der finalen Wahl (D, V), wobei $D \subseteq C$ die Kandidaten beinhaltet, die sich über die Vorwahlen für die finale Wahl qualifiziert haben. Damit kann jedoch c durch das Entfernen der Kandidaten in $C - D$ zum eindeutigen Gewinner gemacht werden und $\mathcal{E}$ ist beeinflussbar durch konstruktive Kontrolle durch Entfernen von Kandidaten.

(b) Es sei $\mathcal{E}$ ein Wahlsystem, das die voiced-Eigenschaft besitzt und es sei (C, V) eine $\mathcal{E}$-Wahl mit dem eindeutigen Gewinner $c \in C$. Da $\mathcal{E}$ die voiced-Eigenschaft besitzt, ist $d \in C - \{c\}$ eindeutiger Gewinner der Wahl $(\{d\}, V)$. Das heißt, das Hinzufügen der Kandidaten in $C - \{d\}$ zu der Wahl $(\{d\}, V)$ ist eine erfolgreiche destruktive Kontrolle bezüglich des ausgezeichneten Kandidaten d.

Aufgabe 2 (Beeinflussbarkeit von Plurality voting):

(a) Besitzt Plurality voting die voiced-Eigenschaft? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie, dass Plurality voting beeinflussbar ist durch konstruktive Kontrolle durch Hinzufügen von Kandidaten (im unbeschränkten Fall).

Lösungsvorschläge:

(a) Ja, denn in einer Ein-Kandidaten-Wahl ist dieser Kandidat in allen Stimmen auf dem ersten Platz und ist somit der eindeutige Gewinner.

(b) Beispiel: Gegeben sei die Menge $C = \{a, b, c\}$ der qualifizierten Kandidaten, die Menge $D = \{d\}$ der unqualifizierten Kandidaten und es sei c der ausgezeichnete Kandidat. Die Wählerliste V über $C \cup D$ bestehe aus den folgenden 7 Wählern:

$$\begin{array}{lcccc} v_1: & c & d & a & b \\ v_2: & c & d & a & b \\ v_3: & c & b & a & d \\ v_4: & d & a & b & c \\ v_5: & d & a & c & b \\ v_6: & a & d & c & b \\ v_7: & a & d & c & b \end{array}$$

In (C, V) haben die Stimmen die folgende Form:

$$\begin{array}{lccc} v_1: & c & a & b \\ v_2: & c & a & b \\ v_3: & c & b & a \\ v_4: & a & b & c \\ v_5: & a & c & b \\ v_6: & a & c & b \\ v_7: & a & c & b \end{array}$$

Folglich ist in (C, V) Kandidat a eindeutiger PV-Gewinner mit einer Punktzahl von 4. In $(C \cup \{d\}, V)$ jedoch ist Kandidat c eindeutiger Gewinner mit einer Punktzahl von 3.

Aufgabe 3 (PV-CCAUC): Das Entscheidungsproblem `Hitting Set` sei wie folgt definiert:

	HITTING SET (HS)
Gegeben:	Eine Menge $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, wobei $m \geq 1$, und eine Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $S_i \subseteq B$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$.
Frage:	Gibt es eine Teilmenge $B' \subseteq B$ derart, dass jedes Element aus B' in mindestens einer der Teilmengen aus $\mathcal{S}$ enthalten ist?

(a) Entscheiden Sie, ob die `HS` Instanzen $(B_1, \mathcal{S}_1, k_1)$ und $(B_2, \mathcal{S}_2, k_2)$ JA-Instanzen für `HS` sind. Es seien

$B_1 = \{b_1, \dots, b_6\}, \quad \mathcal{S}_1 = \{\{b_2, b_3\}, \{b_4\}, \{b_1, b_2\}, \{b_3, b_6\}\}$ und $k_1 = 3$ und
$B_2 = \{b_1, \dots, b_7\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{\{b_1\}, \{b_3, b_5\}, \{b_2, b_4\}, \{b_5, b_7\}, \{b_3, b_7\}, \{b_6\}\}$ und $k_2 = 4$.

(b) Aus einer HS Instanz $(B, \mathcal{S}, k)$ kann wie folgt eine PV-CCAUC Instanz (C, D, V, p) konstruiert werden: $C = \{c, d, p\}$ ist die Menge der qualifizierten Kandidaten, $D = B$ ist die Menge der unqualifizierten Kandidaten. Die Wählerliste über $C \cup D$ sei wie folgt:

(1)		$2n - m$	Wähler:	$p \dots$
(2)		$2n - m - 1$	Wähler:	$c \dots$
(3)		$2n - k - 1$	Wähler:	$d \dots$
(4)	Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, wenn $S_i = \{b_x, b_y, b_z\}$	1	Wähler:	$b_x\, b_y\, b_z\, c \dots$
(5)	Für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$	1	Wähler:	$b_j\, p \dots$
		1	Wähler:	$b_j\, c \dots$

Konstruieren Sie wie angegeben die PV-CCAUC-Instanz (C, D, V, p) aus der HS Instanz $(B_1, \mathcal{S}_1, k_1)$. Bestimmen Sie den Gewinner in der Wahl (C, V) und bestimmen Sie eine erfolgreiche Kontrolle durch Hinzufügen von Kandidaten aus D.

Lösungsvorschläge:

(a) $(B_1, \mathcal{S}_1, k_1)$ ist eine JA-Instanz mit $B_1' = \{b_2, b_3, b_4\}$.

$(B_2, \mathcal{S}_2, k_2)$ ist eine NEIN-Instanz, denn: Um S_1 und S_6 abzudecken, müssen b_1 und b_6 in B_2' enthalten sein. Damit S_3 getroffen wird, muss entweder b_2 oder b_4 in B_2' enthalten sein. Es bleibt also noch ein Element über, um die Mengen S_2, S_4 und S_5 zu treffen. Da $S_2 \cap S_4 \cap S_5 = \emptyset$ gilt, ist dies nicht möglich. Ein hitting set für $\mathcal{S}_2$ muss also mindestens die Größe 5 haben.

(b) Es gilt: $n = 4, m = 6$ und $k = 3$. Die Kandidatenmengen sind $C = \{c, d, p\}$ und $D = \{b_1, \dots, b_6\}$. Die Wählerliste V über $C \cup D$ bzw. C ist von folgender Form:

				über $C \cup D$	über C
(1)		$2 \cdot 4 - 6 = 2$	Wähler:	$p \dots$	$p \dots$
(2)		$2 \cdot 4 - 6 - 1 = 1$	Wähler:	$c \dots$	$c \dots$
(3)		$2 \cdot 4 - 3 - 1 = 4$	Wähler:	$d \dots$	$d \dots$
(4)		1	Wähler:	$b_2\, b_3\, c \dots$	$c \dots$
		1	Wähler:	$b_4\, c \dots$	$c \dots$
		1	Wähler:	$b_1\, b_2\, c \dots$	$c \dots$
		1	Wähler:	$b_3\, b_6\, c \dots$	$c \dots$
(5)	Für jedes $j \in \{1, \dots, 6\}$	1	Wähler:	$b_j\, p \dots$	$p \dots$
		1	Wähler:	$b_j\, c \dots$	$c \dots$

Damit gelten die folgenden Punktwerte in (C, V):

	p	c	d
Pktwert	8	11	4

Es gilt, dass in (C, V) Kandidat c eindeutiger Gewinner mit einem Punktwert von 11 ist. Füge nun die Kandidaten $D' = \{b_2, b_3, b_4\}$ hinzu. Die Wählerliste sieht dann wie folgt aus:

				über $C \cup D'$
(1)		$2 \cdot 4 - 6 = 2$	Wähler:	$p \dots$
(2)		$2 \cdot 4 - 6 - 1 = 1$	Wähler:	$c \dots$
(3)		$2 \cdot 4 - 3 - 1 = 4$	Wähler:	$d \dots$
(4)		1	Wähler:	$b_2\, b_3\, c \dots$
		1	Wähler:	$b_4\, c \dots$
		1	Wähler:	$b_2\, c \dots$
		1	Wähler:	$b_3\, c \dots$
(5)	Für jedes $j \in \{1, 5, 6\}$	1	Wähler:	$p \dots$
		1	Wähler:	$c \dots$
(5)	Für jedes $j \in \{2, 3, 4\}$	1	Wähler:	$b_j\, p \dots$
		1	Wähler:	$b_j\, c \dots$

Damit gelten die folgenden Punktwerte:

	p	c	d	b_2	b_3	b_4
Pktwert	5	4	4	4	3	3

Damit ist p eindeutiger Gewinner der Wahl $(C \cup D', V)$.