Prof. J. Rothe Düsseldorf, 13.01.2011

Übung zur Vorlesung im WS 2010/2011
Algorithmische Eigenschaften von Wahlsystemen I

(Lösungsvorschläge)

Blatt 11, Abgabe am 20. Januar 2011

Aufgabe 1 (Plurality with Runoff-CCWM für 3 Kandidaten): Zeigen Sie, dass das Manipulationsproblem CCWM für das Wahlsystem Plurality with Runoff für 3 Kandidaten NP-hart ist.

Lösungsvorschläge: Bei 3 Kandidaten entspricht Pwro dem Wahlsystem STV. Damit gilt nach der Vorlesung, dass Plurality with Runoff-CCWM für 3 Kandidaten NP-hart ist.

Aufgabe 2 (Non-monotonicity in STV): Das aus der Vorlesung bekannte Monotonie-Kriterium kann auch wie folgt definiert werden:

Ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ heißt monoton, wenn für jede $\mathcal{E}$-Wahl gilt: Ist Kandidat c kein Gewinner der Wahl, so kann er nicht zum Gewinner gemacht werden, indem die Position von c in einigen Stimmen verschlechtert wird.

Es lässt sich das folgende Entscheidungsproblem definieren:

NON-MONOTONICITY	
Gegeben:	Eine $\mathcal{E}$-Wahl (C, V) für ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ und ein ausgezeichneter Kandidat c, der nicht $\mathcal{E}$-Gewinner der Wahl (C, V) ist.
Frage:	Gibt es ein $V' \subseteq V$ derart, dass c zum Gewinner gemacht werden kann, wenn die Position von c in den Stimmen in V' verschlechtert wird?

Für das Wahlsystem STV sei nun der folgende Ansatz für eine Reduktion von X3C auf NON-MONOTONICITY gegeben:

Es sei $(B, \mathcal{S})$ eine X3C Instanz mit $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{3m}\}$ und einer Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ mit $\|S_i\| = 3$ und $S_i \subseteq B$ für alle i, $1 \leq i \leq n$. Wir konstruieren daraus die STV-Wahl (C, V) mit der Kandidatenmenge

$$C = \{c\} \cup \{b_0, b_1, \ldots, b_{3m}\} \cup \{d_1, d_2, \ldots, d_n\} \cup \{\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_n\} \cup \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \cup \{w, w'\}$$

und der Wählerliste V:

(1)		$12n$	Wähler:	$c\,w ...$
(2)		$12n-1$	Wähler:	$w\,c ...$
(3)		$12n$	Wähler:	$w'\,w\,c ...$
(4)		$10n+2m$	Wähler:	$b_0\,w\,c ...$
(5)	Für jedes $j \in \{1, \ldots, 3m\}$	$12n-2$	Wähler:	$b_j\,w\,c ...$
(6)	Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$	$12n$	Wähler:	$g_i\,w\,c ...$
(7)	Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$	$6n$	Wähler:	$d_i\,\bar{d}_i\,w\,c ...$
	und wenn $S_i = \{b_x, b_y, b_z\}$, dann	2	Wähler:	$d_i\,b_x\,w ...$
		2	Wähler:	$d_i\,b_y\,w ...$
		2	Wähler:	$d_i\,b_z\,w ...$
(8)	Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$	$6n$	Wähler:	$\bar{d}_i\,d_i\,w\,c ...$
		2	Wähler:	$\bar{d}_i\,b_0\,w\,c ...$
(9)	Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$	1	Wähler:	$c\,d_i ...$
		6	Wähler:	$c\,\bar{d}_i ...$

(a) Zeigen Sie, dass c die Wahl (C, V) nicht gewinnt.

(b) Es sei eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Wir vertauschen in den Stimmen der Wählergruppe (9) nun für alle $i \in I$ die Position von c und d_i bzw. $\bar{d}_i$ und es sei V' die so veränderte Wählerliste. Zeigen Sie, dass c die Wahl (C, V') gewinnt, wenn I die Indexmenge einer exakten Überdeckung für B ist.

Lösungsvorschläge:

(a) In (C, V) sehen die Punktwerte in den Runden wie folgt aus:

	1. Runde	2. Runde	3. Runde
c	$19n$	$19n$	$19n$
w	$12n-1$	$12n-1$	$3m(12n-2)+12n-1$
w'	$12n$	$12n$	$12n$
b_0	$10n+2m$	$12n+2m$	$12n+m$
b_j	$12n-2$	$12n-2$	-
g_i	$12n$	$12n$	$12n$
d_i	$6n+6$	$12n+6$	$12n+6$
$\bar{d}_i$	$6n+2$	-	-

Kandidat c kann ab hier Kandidat w nicht mehr einholen. c wird also vor w ausscheiden und somit kein Gewinner der Wahl (C, V) sein.

(b) Es sei nun $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Indexmenge einer exakten Überdeckung für B. Das heißt, dass $\|I\| = m$ gilt. Zudem gilt folgendes für die Wahl (C, V') :

	1. Runde	2. Runde	3. Runde
c	$12n + 7(n - m)$	$12n + 7(n - m)$	$12n + 7(n - m) + m$
w	$12n - 1$	$12n - 1$	$12n - 1$
w'	$12n$	$12n$	$12n$
b_0	$10n + 2m$	$10n + 2m + 2(n - m)$	$12n$
b_j	$12n - 2$	$12n - 2$	$12n$
g_i	$12n$	$12n$	$12n$
d_i	$6n + 6(+1, i \in I)$	$6n + 7(+6n - 1, i \notin I)$	$12n + 6, i \notin I$
$\bar{d}_i$	$6n + 2(+6, i \in I)$	$6n + 8, i \in I$	$12n + 8, i \in I$

1. Runde: $\bar{d}_i$ mit $i \notin I$ scheiden aus.

2. Runde: d_i mit $i \in I$ scheiden aus.

3. Runde: w scheidet aus, weil nun jedes b_j aufgrund der exakten Überdeckung noch 2 zusätzliche Punkte bekommt. Somit wird c dann die Wahl gewinnen, weil ihm alle Stimmen von w und im Verlauf der restlichen Wahl die Punkte der anderen Kandidaten zukommen.