Prof. J. Rothe Düsseldorf, 28.10.2010

# Übung zur Vorlesung im WS 2010/2011
# Algorithmische Eigenschaften von Wahlsystemen I

(Lösungsvorschläge)

Blatt 3, Abgabe am 4. November 2010

Wir definieren die folgenden Eigenschaften von Wahlsystemen. Ein Wahlsystem $\mathcal{E}$ erfüllt das

(1) *Mehrheitskriterium*, wenn in jeder $\mathcal{E}$-Wahl, immer derjenige Kandidat gewinnt, der von einer absoluten Mehrheit der Wähler auf den ersten Platz gewählt wird (sofern dieser existiert).

(2) *Condorcet-Kriterium*, wenn in jeder $\mathcal{E}$-Wahl, immer der Condorcet-Gewinner gewinnt (sofern dieser existiert).

(3) *Konsistenz-Kriterium*, wenn für jede $\mathcal{E}$-Wahl $(C, V)$ gilt: Wird die Wählermenge $V$ aufgeteilt in zwei disjunkte Teilmengen $V_1, V_2$ und ist Kandidat $c$ ein $\mathcal{E}$-Gewinner in beiden Unterwahlen $(C, V_1)$ und $(C, V_2)$, so ist $c$ auch ein $\mathcal{E}$-Gewinner in der Wahl $(C, V)$.

**Aufgabe 1 (Mehrheitskriterium):**

(a) Welche der folgenden Wahlsysteme erfüllen das Mehrheitskriterium: Veto, Condorcet, Single Transferable Vote (STV), Plurality with Runoff? (Um zu zeigen, dass eine Eigenschaft nicht erfüllt ist, reicht die Angabe eines Gegenbeispiels aus.) Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Was kann aus dem Ergebnis aus Aufgabenteil (a) für das Condorcet-Wahlsystem für die Wahlsysteme Copeland, Dodgson, Young und Black gefolgert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösungsvorschlag:**

(a) **Veto:** Gegenbeispiel ist die Wahl $(C_1, V_1)$ mit $C_1 = \{a, b, c, d, e\}$ und $V_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$:

$$\begin{array}{lccccc} v_1: & a & b & c & d & e \\ v_2: & a & b & c & d & e \\ v_3: & a & b & c & d & e \\ v_4: & b & c & d & e & a \end{array}$$

Kandidat $a$ ist der Mehrheitsgewinner, die Kandidaten $b$ und $c$ sind jedoch Veto-Gewinner.

**Condorcet:** Condorcet erfüllt das Mehrheitskriterium, denn wenn es einen Kandidaten gibt, der in mehr als der Hälfte aller Stimmen auf dem ersten Platz platziert ist, so schlägt er in diesen Stimmen alle anderen Kandidaten. Durch die absolute Mehrheit ist damit garantiert, dass dieser Kandidat jeden anderen Kandidaten strikt schlägt und er ist somit auch Condorcet-Gewinner.

**STV:** Gibt es einen Kandidaten, der auf dem ersten Platz bereits eine absolute Mehrheit der Stimmen hat, so hat dieser immer einen strikt größeren PV-Score als die anderen Kandidaten, er bleibt also bei der Eliminierung in den einzelnen Runden immer übrig. (Anmerkung: STV kann auch so definiert werden, dass nach abs. Mehrheit geschaut wird, und nur so lange eliminiert wird, bis ein Kandidat abs. Mehrheit hat.)

**PV-wro:** Gibt es einen Kandidaten, der eine absolute Mehrheit erreicht, so nimmt dieser immer an der Stichwahl teil und gewinnt diese auch immer.

(b) Es gilt, dass Condorcet das Mehrheitskriterium erfüllt. Somit folgt, dass wenn es einen Mehrheitsgewinner in einer Wahl gibt, dieser auch Condorcet-Gewinner ist. Damit folgt für jedes Wahlsystem, das wiederum das Condorcet-Kriterium erfüllt direkt, dass es auch das Mehrheitskriterium erfüllt.

**Aufgabe 2 (Condorcet-Kriterium):**

(a) Gegeben sei die Wahl $(C_1, V_1)$ mit $C_1 = \{a, b, c, d, e\}$ und $V_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$:

$$\begin{array}{lccccc} v_1: & a & b & c & d & e \\ v_2: & a & b & c & d & e \\ v_3: & a & b & c & d & e \\ v_4: & b & c & d & e & a \end{array}$$

Für welche Ihnen bekannten Wahlsysteme zeigt diese Wahl, dass das Condorcet-Kriterium nicht erfüllt ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Gegeben sei die Wahl $(C_2, V_2)$ mit $C_2 = \{a, b, c, d\}$ und $V_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_5)$:

$$\begin{array}{lcccc} v_1: & a & b & c & d \\ v_2: & a & b & c & d \\ v_3: & b & c & a & d \\ v_4: & c & b & a & d \\ v_5: & d & b & a & c \end{array}$$

Für welche Ihnen bekannten Wahlsysteme zeigt diese Wahl, dass das Condorcet-Kriterium nicht erfüllt ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösungsvorschlag:**

(a) In $(C_1, V_1)$ gelten die folgenden Verhältnisse und Punktwerte für Borda (B-Sc) und Veto (V-Sc):

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | B-Sc | V-Sc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | - | 3:1 | 3:1 | 3:1 | 3:1 | 12 | 3 |
| $b$ | 1:3 | - | 4:0 | 4:0 | 4:0 | 13 | 4 |
| $c$ | 1:3 | 0:4 | - | 4:0 | 4:0 | 9 | 4 |
| $d$ | 1:3 | 0:4 | 0:4 | - | 4:0 | 5 | 4 |
| $e$ | 1:3 | 0:4 | 0:4 | 0:4 | - | 1 | 1 |

Kandidat $a$ ist Condorcet-Gewinner, Kandidat $b$ ist jedoch Borda-Gewinner und die Kandidaten $b, c$ und $d$ sind Veto-Gewinner.

(b) In $(C_2, V_2)$ gelten die folgenden Verhältnisse:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | - | 2:3 | 3:2 | 4:1 |
| $b$ | 3:2 | - | 3:2 | 4:1 |
| $c$ | 2:3 | 2:3 | - | 4:1 |
| $d$ | 1:4 | 1:4 | 1:4 | - |

Kandidat $b$ ist Condorcet-Gewinner. In einer STV-Auszählung scheiden in der ersten Runde $b, c$ und $d$ aus; Kandidat $a$ ist also STV-Gewinner. In einer PV-Wahl mit Stichwahl nimmt $a$ am Finale teil (mit allen anderen Kandidaten?) und gewinnt die Stichwahl.

**Aufgabe 3 (Konsistenz-Kriterium):**

(a) Gegeben sei die Wahl $(C_3, V_3)$ mit $C_3 = \{a, b, c\}$, 25 Wählern in $V_3$ und eine Partition $(V_3', V_3'')$ von $V_3$:

| | Gruppe | Anzahl | Präferenz |
|---|---|---|---|
| $V_3'$ | 1 | 7 | $a\,b\,c$ |
| | 2 | 5 | $b\,c\,a$ |
| | 3 | 4 | $c\,a\,b$ |
| $V_3''$ | 4 | 5 | $a\,c\,b$ |
| | 5 | 4 | $c\,b\,a$ |

Für welche Ihnen bekannten Wahlsysteme zeigt diese Wahl mit dieser Partition, dass das Konsistenz-Kriterium nicht erfüllt ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Welche Wahlsysteme, die Sie kennen, erfüllen das Konsistenz-Kriterium? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösungsvorschlag:**

(a) Es ergeben sich die Verhältnisse und Young-Scores (Y-Sc), die Copeland-Scores (C-Sc) und Borda-Scores (B-Sc) aus Tabelle 1.

| $(C_3, V_3)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | Y-Sc | C-Sc | B-Sc |
| $a$ | - | 16:9 | 12:13 | | 1 | - |
| $b$ | 9:16 | - | 12:13 | | 0 | - |
| $c$ | 13:12 | 13:12 | - | 0 | 2 | - |
| $(C_3, V_3')$ | | | | | | |
| | $a$ | $b$ | $c$ | Y-Sc | C-Sc | B-Sc |
| $a$ | - | 11:5 | 7:9 | 3 | 1 | 18 |
| $b$ | 5:11 | - | 12:4 | 7 | 1 | 17 |
| $c$ | 9:7 | 4:12 | - | 8 | 1 | 13 |
| $(C_3, V_3'')$ | | | | | | |
| | $a$ | $b$ | $c$ | Y-Sc | C-Sc | B-Sc |
| $a$ | - | 5:4 | 5:4 | 0 | 2 | - |
| $b$ | 4:5 | - | 0:9 | | 0 | - |
| $c$ | 4:5 | 9:0 | - | | 1 | - |

Tabelle 1: Verältnisse und Scores in den Wahlen $(C_3, V_3)$,$(C_3, V_3')$ und $(C_3, V_3'')$

- $(C_3, V_3')$: Es gibt *keinen Condorcet-Gewinner* in dieser Wahl, jeder Kandidat schlägt genau einen Kandidaten und es gibt keine Unentschieden. Damit sind *alle Kandidaten Copeland-Sieger* (also auch Kandidate $a$).

  Kandidat $a$ hat den höchsten Borda-Score, ist somit *Black-Gewinner*.

  Durch das Löschen von 3 Stimmen aus der 2. Wählergruppe wird $a$ zum Condorcet-Gewinner. Durch das Löschen von 7 Stimmen aus der 1. Wählergruppe kann $b$ zum Condorcet-Gewinner gemacht werden. Durch das Löschen von 7 Stimmen aus der 1. Wählergruppe und einer aus der 2. Wählergruppe kann $c$ zum Condorcet-Gewinner gemacht werden. Damit ist $a$ der *Young-Gewinner*.

  In einer Plurality-Stichwahl treten $a$ und $b$ gegeneinander an, und Kandidat $a$ gewinnt die *Stichwahl*.

  In STV besteht die zweite Runde aus den Kandidaten $a$ und $b$ und Kandidat $a$ bleibt über, ist somit *STV-Gewinner*.

- $(C_3, V_3'')$: Kandidat $a$ ist der *Condorcet-Gewinner*, damit auch der *Black-*, *Copeland-* und *Young-Gewinner*.

  Kandidat $a$ hat eine Mehrheit auf dem ersten Platz, ist somit *STV-Gewinner* und gewinnt ebenfalls eine *Plurality-Stichwahl*.

- $(C_3, V_3)$: Kandidat $c$ ist der Condorcet-Gewinner, damit auch der *Black-, Copeland-* und *Young-Gewinner*. In einer *Plurality-Stichwahl* nehmen Kandidat $a$ und $c$ teil, $c$ ist jedoch der Gewinner.

  In *STV* scheidet Kandidat $b$ in der ersten Runde aus, somit ist $c$ auch STV-Gewinner.

Diese Wahl ist ein Gegenbeispiel für Black, Young, Copeland, STV, Plurality mit Stichwahl.

(b) Sei $(C, V)$ eine **PV-Wahl** und wir partitionieren $V$ in $V_1, V_2$. Es sei $c \in C$ der PV-Gewinner in $(C, V_i)$ für $i \in \{1, 2\}$ also, gilt

$$\text{P-}score_{(C,V_i)}(c) \geq \text{P-}score_{(C,V_i)}(d)$$

für alle $d \in C - \{c\}$ und $i \in \{1, 2\}$. Für $m_i = \text{P-}score_{(C,V_i)}(c)$ für $i \in \{1, 2\}$ gilt:

$$\text{P-}score_{(C,V)}(c) = m_1 + m_2 \geq \text{P-}score_{(C,V_1)}(d) + \text{P-}score_{(C,V_2)}(d) = \text{P-}score_{(C,V)}(d)$$

für alle $d \in C - \{c\}$. Damit ist $c$ auch PV-Gewinner in $(C, V)$.

Gegeben sei eine **Borda-Wahl** $(C, V)$ und eine Partition von $V$ in $V_1, V_2$. Kandidat $c \in C$ sei der Borda-Gewinner in $(C, V_i)$ für $i \in \{1, 2\}$. Es gilt also:

$$\text{B-}score_{(C,V_i)}(c) = m_i \geq \text{B-}score_{(C,V_i)}(d)$$

für alle $d \in C - \{c\}$ und $i \in \{1, 2\}$. Also gilt in $(C, V)$:

$$\text{B-}score_{(C,V)}(c) = m_1 + m_2 \geq \text{B-}score_{(C,V_1)}(d) + \text{B-}score_{(C,V_2)}(d) = \text{B-}score_{(C,V)}(d)$$

für alle $d \in C - \{c\}$. Damit ist $c$ auch Borda-Gewinner in $(C, V)$.

Für eine Partition $V_1, V_2$ der Wählermenge $V$ in einer **Veto-Wahl** $(C, V)$ gilt

$$\text{V-}score_{(C,V_1)}(d) + \text{V-}score_{(C,V_2)}(d) = \text{V-}score_{(C,V)}(d)$$

für alle $d \in C$. Es kann also analog zu PV oder Borda argumentiert werden.

Sei (analog zur Notation zur Bestimmung des Copeland-Gewinners von den Folien) $N_{(C,V)}(c, d)$ die Anzahl der Wähler, die in der Wählermenge $V$ den Kandidaten $c$ gegenüber $d$ bevorzugen. Gilt $N_{(C,V)}(c, d) > N_{(C,V)}(d, c)$, so schlägt $c$ den Kandidaten $d$ strikt in $V$. Sei nun $(V_1, V_2)$ eine Partition der Wählermenge $V$, dann gilt

$$N_{(C,V)}(c, d) = N_{(C,V_1)}(c, d) + N_{(C,V_2)}(c, d).$$

Sei nun Kandidat $c$ Condorcet-Gewinner in beiden Unterwahlen $(C, V_i)$ für $i \in \{1, 2\}$, d.h., es gilt:

$$N_{(C,V_i)}(c, d) > N_{(C,V_i)}(d, c)$$

für alle $d \in C - \{c\}$ und $i \in \{1, 2\}$. Es gilt also

$$N_{(C,V)}(c, d) = N_{(C,V_1)}(c, d) + N_{(C,V_2)}(c, d) > N_{(C,V_1)}(d, c) + N_{(C,V_2)}(d, c) = N_{(C,V)}(d, c)$$

für alle $d \in C - \{c\}$ und $i \in \{1, 2\}$. Also ist $c$ auch Condorcet-Gewinner in der Wahl $(C, V)$.

Überblick über Ergebnisse auf dem übungsblatt (fett gedruckte Einträge):

| | Maj | Cond | Cons |
|---|---|---|---|
| Plurality | 1 | 0 | **1** |
| Borda | 0 | **0** | **1** |
| Veto | **0** | **0** | **1** |
| Condorcet | **1** | 1 | **1** |
| Copeland | **1** | 1 | **0** |
| Dodgson | **1** | 1 | 0 |
| Young | **1** | 1 | **0** |
| Black | **1** | 1 | **0** |
| STV | **1** | **0** | **0** |
| Plurality with Runoff | **1** | **0** | **0** |