Prof. J. Rothe Düsseldorf, 16.12.2010

Übung zur Vorlesung im WS 2010/2011
Algorithmische Eigenschaften von Wahlsystemen I

(Lösungsvorschläge)

Blatt 10, Abgabe am 23. Dezember 2010

Aufgabe 1 (Strategisches Wählen in Borda-Wahlen mit 3 Kandidaten): Gegeben sei eine Borda-Wahl (C, V) über 3 Kandidaten. Es sei a der eindeutige Gewinner dieser Wahl.

(a) Kann ein Wähler aus V, der einen der anderen Kandidaten bevorzugt, durch strategisches Wählen seinen Favoriten zum eindeutigen Gewinner machen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Entspricht diese Situation einem der Manipulationsprobleme, die Sie aus der Vorlesung kennen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschläge:

(a) Es gilt, dass a der eindeutige Gewinner in (C, V) ist, also B-$score(a) >$ B-$score(b)$ und B-$score(a) >$ B-$score(c)$.

Es sei nun b der bevorzugte Kandidat des Manipulators v. Das heißt, die ehrliche Stimme von v ist $b\,a\,c$ oder $b\,c\,a$. Ist sie von letzterer Form, so kann v nichts mehr erreichen, denn diese Stimme ist bereits optimal für b und am schlechtesten für a. Sei also die Stimme von v von der Form $b\,a\,c$.

Die beste Situation für Kandidat b wäre, dass folgendes gilt:

$$\text{B-}score(a) = \text{B-}score(b) + 1.$$

Angenommen, dies gilt und v ändert seine Stimme von $b\ a\,c$ zu $b\,c\,a$, so würde a einen Punkt verlieren. (Diese Veränderung ist die bestmögliche für b, da b selbst keine Punkte verliert.) Es gilt also

$$\text{B-}score(a) = \text{B-}score(b).$$

Damit ist b jedoch nur uneindeutiger Gewinner von (C, V). Es ist dem Manipulator in dieser Situation also nicht möglich, durch strategisches Wählen seinen bevorzugten Kandidaten zum eindeutigen Gewinner der Wahl zu machen. (Analog kann argumentiert werden, wenn c der bevorzugte Kandidat ist).

(b) Nein. Die Stimme des Manipulators ist Teil der ursprünglichen Wahl. Sie wird nicht zusätzlich hinzugefügt. Zudem ist die Stimme des Manipulators zum Teil festgelegt (dadurch, dass einer der anderen Kandidaten sein bevorzugter Kandidat ist und somit auf dem ersten Platz steht).

Zusatz: Dies hat die folgenden Auswirkungen: Der bevorzugte Kandidat kann keine zusätzlichen Punkte durch die Veränderung der Stimme erreichen. Der ursprüngliche Gewinner kann maximal einen Punkt verlieren. Nur dadurch ist gewährleistet, dass der bevorzugte Kandidat eben nicht zum eindeutigen Gewinner gemacht werden kann.

Aufgabe 2 (PARTITION): Überlegen Sie sich zwei PARTITION-Instanzen $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ und $(k'_1, k'_2, \ldots, k'_n)$ mit mindestens 5 Elementen, so dass

(a) $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ eine JA-Instanz von PARTITION ist und

(b) $(k'_1, k'_2, \ldots, k'_n)$ eine NEIN-Instanz von PARTITION ist.

Lösungsvorschläge:

(a) $(k_1, k_2, \ldots, k_5) = (1, 9, 5, 3, 8)$ von Blatt 8 Aufgabe 1. Ist eine JA-Instanz mit $A = \{1, 2, 4\}$. Es gilt $K = 13$.

(b) $(k'_1, k'_2, \ldots, k'_5) = (1, 14, 6, 2, 3)$ ist eine NEIN-Instanz, denn $K = 13$, aber $k'_4 = 14 > 13$. In einer erfolgreichen Partition muss k'_4 in einer der Teilmengen enthalten sein. Ist dies jedoch der Fall, ist die Summe dieser Teilmenge bereits größer als 13.

Aufgabe 3 (CCWM für Maximin und 4 Kandidaten): In der Vorlesung haben Sie die Reduktion von PARTITION auf das Manipulationsproblem CCWM für das Wahlsystem Maximin mit 4 Kandidaten kennengelernt.

(a) Konstruieren Sie gemäß der Reduktion die Maximin-Wahl (C, V) aus der PARTITION-Instanz $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ aus Aufgabe 2(a). Bestimmen Sie die Stimmen und Gewichte der Manipulatoren in S und berechnen Sie die Maximin-Scores in den Wahlen (C, V) und $(C, V \cup S)$.

(b) Konstruieren Sie gemäß der Reduktion die Maximin-Wahl (C', V') aus der PARTITION-Instanz $(k'_1, k'_2, \ldots, k'_n)$ aus Aufgabe 2(b). Bestimmen Sie die Gewichte der Manipulatoren in S' und berechnen Sie die Maximin-Scores in der Wahl (C', V'). Erläutern Sie, weshalb hier keine erfolgreiche Manipulation möglich ist.

Lösungsvorschläge:

(a) $(k_1, k_2, \ldots, k_5) = (1, 9, 5, 3, 8)$, also ist $K = 13$. $C = \{a, b, c, p\}$ und V besteht aus $23 \cdot 13 - 3 = 296$ Wählern:

$$\begin{array}{rl} 7 \cdot 13 - 1 = 90 & a\,b\,c\,p \\ 7 \cdot 13 - 1 = 90 & b\,c\,a\,p \\ 4 \cdot 13 - 1 = 51 & c\,a\,b\,p \\ 5 \cdot 13 = 65 & p\,c\,a\,b \end{array}$$

Punktwerte in (C, V):

$N(i,j)$	a	b	c	p	m-score
a	-	206	90	231	90
b	90	-	180	231	90
c	206	116	-	231	116
p	65	65	65	-	65

Die Manipulatoren in $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_5\}$ haben die folgenden Gewichte und Präferenzen:

s_1 mit Gewicht $2 \cdot 1 = 2$ und Präferenz $p\,a\,b\,c$
s_2 mit Gewicht $2 \cdot 9 = 18$ und Präferenz $p\,a\,b\,c$
s_3 mit Gewicht $2 \cdot 5 = 10$ und Präferenz $p\,b\,c\,a$
s_4 mit Gewicht $2 \cdot 3 = 6$ und Präferenz $p\,a\,b\,c$
s_5 mit Gewicht $2 \cdot 8 = 18$ und Präferenz $p\,b\,c\,a$

Damit ergeben sich in $(C, V \cup S)$ die folgenden Punktwerte:

$N(i,j)$	a	b	c	p	m-score
a	-	232	116	231	116
b	116	-	232	231	116
c	232	116	-	231	116
p	117	117	117	-	117

(b) $(k'_1, k'_2, \ldots, k'_5) = (1, 14, 6, 2, 3)$, also ist $K = 13$. $C' = C$ und $V' = V$. Die Manipulatoren in $S' = \{s'_1, s'_2, \ldots, s'_5\}$ haben die folgenden Gewichte:

s'_1 hat Gewicht $2 \cdot 1 = 2$
s'_2 hat Gewicht $2 \cdot 14 = 28$
s'_3 hat Gewicht $2 \cdot 6 = 12$
s'_4 hat Gewicht $2 \cdot 2 = 4$
s'_5 hat Gewicht $2 \cdot 3 = 6$

Die Manipulatoren können entweder mit $p\,a\,b\,c$ oder mit $p\,b\,c\,a$ abstimmen. Kandidat p kann maximal 117 Punkte haben.

Angenommen, der Manipulator s'_2 stimmt mit $p\,a\,b\,c$ ab. Dann hat a einen Score von 118 und p kann die Wahl $(C', V' \cup S')$ nicht gewinnen.

Angenommen, der Manipulator s'_2 stimmt mit $p\,b\,c\,a$ ab. Dann hat b einen Score von 118 und p kann die Wahl $(C', V' \cup S')$ nicht gewinnen.

Es kann also keine erfolgreiche Manipulation geben, wenn den Manipulatoren die vorliegenden Gewichte zugeteilt werden.