Technische Universität Chemnitz
S. Dienelt

Chemnitz, 14. November 2007
Abgabe: 27. November 2007

# Einführung in die Diskrete Mathematik
# Lösung 5

1. (2 Punkte) Auf eine Eingabe der Länge $n$ führe ein Algorithmus $n$ Schritte aus, wobei der $i$-te Schritt $i^9$ Operationen benötige. Zeigen Sie, dass die Laufzeit des Algorithmus $O(n^{10})$ ist.

   **Lösung:**

   Untersumme: $\sum_{i=1}^{n} i^9 \leq \int_1^{n+1} x^9 dx = (n+1)^{10}/10 - 1/10 = O(n^{10})$.

2. (5 Punkte) Lösen Sie das folgende Problem, indem Sie einen geeigneten Graphen konstruieren:

   Ein Wolf, eine Ziege und ein Kohlkopf sind von einem Fährmann über einen Fluss zu setzen. Der Wolf möchte gern die Ziege fressen, und die hat es auf den Kohlkopf abgesehen. Deshalb dürfen weder Wolf-Ziege noch Ziege-Kohlkopf ohne Aufsicht vom Fährmann allein gelassen werden. Das Boot trägt außer dem Fährmann jeweils nur einen der drei. Wie kann er sie alle heil ans andere Ufer bringen?

   **Lösung:**

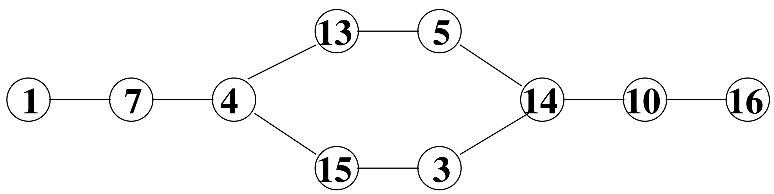
   Betrachten alle möglichen Zustände und ermitteln mögliche Folgezustände: Wir bezeichnen W-Wolf, Z-Ziege, K-Kohlkopf und F-Fährmann.

| Nr. | linkes Ufer | rechtes Ufer | Folgezustand |
|---|---|---|---|
| 1 | WZKF | - | 7 |
| 2 | WZK | F | |
| 3 | WZF | K | 14, 15 |
| 4 | WKF | Z | 7, 13, 15 |
| 5 | ZKF | W | 13, 14 |
| 6 | WZ | KF | |
| 7 | WK | ZF | 1, 4 |
| 8 | ZK | WF | |
| 9 | WF | ZK | |
| 10 | ZF | WK | 14, 16 |
| 11 | FK | ZW | |
| 12 | F | WZK | |
| 13 | K | WZF | 4, 5 |
| 14 | Z | WKF | 3, 5, 10 |
| 15 | W | ZKF | 3, 4 |
| 16 | - | WZKF | 10 |

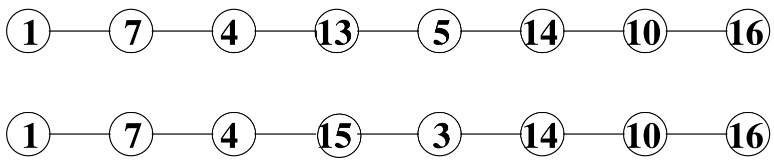
Die Zustände 2, 6, 8, 9, 11 und 12 sind dabei nicht erlaubt und können gestrichen werden.

Es ergibt sich der folgende Graph:

Knoten entsprechen den zulässigen Zuständen, zwei Knoten sind adjazent, wenn sie jeweils Folgezustände sind.




Man erkennt zwei mögliche, kürzeste Lösungen:




3. (2 + 2 Punkte) Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Zeigen Sie, dass jeder Graph mit $n$ Knoten und $m$ Kanten wenigstens einen Knoten der Valenz $\geq \left\lceil \frac{2m}{n} \right\rceil$ hat, wobei für reelles $x$ mit $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl bezeichnet wird, die nicht kleiner $x$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass in einem zusammenhängenden Graphen je zwei längste Wege immer einen gemeinsamen Knoten haben.

**Lösung:**

(a) **Variante 1:**

Sei $s = \left\lceil \frac{2m}{n} \right\rceil$. Angenommen, es existiert kein Knoten der Valenz mindestens $s$, d.h. für alle Knoten $v$ gilt $d(v) \leq s - 1$. Dann gilt (siehe Satz der Vorlesung):

$$\sum_{v \in V} (s-1) \geq \sum_{v \in V} d(v) = 2m \;\Rightarrow\; n(s-1) \geq 2m \;\Rightarrow\; s \geq \frac{2m}{n} + 1.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $s = \left\lceil \frac{2m}{n} \right\rceil$.

**Variante 2 (Verallgemeinerter Schubfachschluss):**

Sei $k = \left\lceil \frac{2m}{n} \right\rceil - 1 < \frac{2m}{n}$, d.h. $2m > kn$.

Da der Graph $m$ Kanten enthält, verteilen wir $2m$ Inzidenzen auf $n$ Knoten (Schubfächer). Da aber obige Ungleichung gilt, ist mindestens ein Knoten zu mehr als $k$, also mindestens $k + 1$, Kanten inzident.

Damit gibt es mindestens einen Knoten mit Valenz $\geq \left\lceil \frac{2m}{n} \right\rceil$.

(b) **Variante 1 (in Worten):**

Seien $P_A$ und $P_B$ zwei disjunkte Wege maximaler Länge. Da $G$ zusammenhängend, gibt es Weg, der Knoten aus $P_A$ und $P_B$ verbindet. Wählen kürzesten solchen Weg $P$. $P$ hat mit $P_A$ nur einen Knoten ($v$) und mit $P_B$ nur einen Knoten ($w$) gemeinsam. $v$ und $w$ sind Endknoten von $P$. $v$ teilt $P_A$ in zwei Teilstücke $P_A^1$ und $P_A^2$ mit $|P_A^1| \geq |P_A^2|$, ebenso für $w$: $|P_B^1| \geq |P_B^2|$. Damit ist $P_A^1 \cup P \cup P_B^1$ länger als $P_A$ bzw. $P_B$.

**Variante 2 (ganz ausführlich):**

Angenommen der Graph $G$ hat zwei disjunkte längste Wege $P_A$ und $P_B$ der Länge $n$. Sei $P_A := \{a_1a_2, \ldots, a_{i-1}a_i, a_ia_{i+1}, \ldots, a_na_{n+1}\}$ und $P_B := \{b_1b_2, \ldots, b_{j-1}b_j, b_jb_{j+1}, \ldots, b_nb_{n+1}\}$.

Da $G$ zusammenhängend ist, existiert ein Weg (oder Wege), der Knoten aus $P_A$ mit Knoten aus $P_B$ verbindet. Sei $P := \{v_1v_2, \ldots, v_mv_{m+1}\}$ ein kürzester solcher Weg. Dabei ist $m \geq 1$, da $P_A$ und $P_B$ disjunkt sind.

O.B.d.A. sei $v_1 = a_i$ und $v_{m+1} = b_j$ (mehr gemeinsame Knoten mit $P_A$ bzw. $P_B$ hat $P$ nicht, da er sonst kein kürzester Weg wäre).

$v_1 = a_i$ teilt $P_A$ in zwei Teilwege $P_A^1$, der Länge $i$ und $P_A^2$ der Länge $n + 1 - i$.

$v_{m+1} = b_j$ teilt $P_B$ in zwei Teilwege $P_B^1$, der Länge $j$ und $P_B^2$ der Länge $n + 1 - j$.

O.B.d.A. sei $i - 1 \geq n + 1 - i$ und $j - 1 \geq n + 1 - j$ und damit $i,\ j \geq \frac{n+2}{2}$.

Betrachten den Weg

$$P_A^1 \cup P \cup P_B^1 = \{a_1a_2, \ldots, a_{i-1}a_i, v_1v_2, \ldots, v_mv_{m+1}, b_jb_{j-1}, \ldots, b_2b_1\}.$$

Dessen Länge ist $i - 1 + m + j - 1 \geq 2 \cdot \frac{n+2}{2} - 2 + m \geq n + m \geq n + 1$. Widerspruch dazu, dass $P_A$ und $P_B$ zwei längste Wege sind.

Also besitzen in einem zusammenhängenden Graphen zwei längste Wege immer einen gemeinsamen Knoten.

4. (1 + 2 + 2 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

(a) Bei welchen Graphen sind alle Kanten Brücken?

(b) Zeige, dass eine Kante genau dann eine Brücke ist, wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.

(c) Zeige ferner, dass $G$ keine Brücke hat, falls alle Grade gerade sind.

**Lösung:**

(a) Kreisfreie, also Wälder.

(b) Aus Kante $uv$ im Kreis folgt keine Brücke (da $u$ und $v$ verbunden bleiben), aus Kante $uv$ keine Brücke folgt $uv$ in einem Kreis (da $u$ und $v$ in $G - uv$ noch über Weg $P$ verbunden; $P \cup uv$ ergibt den Kreis).

(c) Keine Brücken falls Grade gerade: Starte von einem Knoten mit Grad $> 0$ und gehe entlang einer beliebigen Kante $\in E$ und setze fort (möglich weil Grad gerade), bis durch die gewählte Kante zum ersten mal ein Knoten zum zweiten Mal besucht wird $\rightarrow$ Kreis $C$. $G - C$ entfernt keine Brücken, hat wieder lauter Knoten mit geradem Grad, und weniger Kanten. Setze fort, bis alle Knoten Grad 0 haben. Also sind alle Kanten in Kreisen enthalten.

5. (4 Punkte) Ein Graph auf 10 Knoten sei durch die folgenden Adjazenzlisten gegeben:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1: 6,5,3,2 | 4: 2,3,5 | 7: 10 | 10: 7 |
| 2: 1,3,4 | 5: 4,3,1,6 | 8: 9 | |
| 3: 1,5,4,2 | 6: 1,9,5 | 9: 8,6 | |

Führe den BFS und DFS Algorithmus beginnend mit $v_0 = 1$ und der gegebenen Adjazenzreihenfolge durch und bestimme die erzeugten Kantenmengen und Knotennummerierungen.

**Lösung:**

BFS: $E' = \{16, 15, 13, 12, 69, 54, 98\}$
DFS: $E' = \{16, 69, 98, 65, 54, 42, 23\}$
Die Reihenfolge der Knoten, wie in der Übung besprochen.