1 Bucklin Wahlsystem: Resistenz unter DCPV im Modell TP

Beweis. Anfälligkeit wurde in Lemma 3.3 gezeigt. Um NP-Härte zu zeigen, folgt eine Reduktion von RESTRICTED HITTING SET auf unser Kontrollproblem. Sei $(B, \mathcal{S}, k)$ eine gegebene RESTRICTED HITTING SET-Instanz mit einer Menge $B = \{b_1, ..., b_m\}$ und $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_n\}$ ist eine Gruppe von nicht-leeren Teilmengen $S_i \subseteq B$, sodass $n > m$ und k ist eine positive ganze Zahl mit $1 < k < m$. Seien $S'_i \subseteq B$ die Teilmengen der S_i, die aber nur aus den k ausgewählten Elementen bestehen. Definiere die Wahl (C, V), mit $C = B \cup A \cup G \cup \{c, w, w'\}$ als die Menge der Kandidaten. Es gibt $6mn + 3$ Wähler mit den folgenden Präferenzen:

#	Für jedes...	Anzahl der Wähler	**Wählerpräferenzen**
· **1:**	$\forall i \in \{1, ..., n\}$	$m - k$	$S_i\ c\ ...$
· **2:**	$\forall i \in \{1, ..., n\}$	k	$S'_i\ c\ ...$
· **3:**		$2kn$	$c\ w\ ...$
· **4:**	$\forall i \in \{1, ..., n\}$	k	$w\ a_i\ c\ ...$
· **5:**		1	$a_0\ w\ c\ ...$
· **6:**		1	$c\ a_0\ ...$
· **7:**	$\forall i \in \{1, ..., n\}$	$2m - k$	$c\ g_i\ ...$
· **8:**		$3mn - 2kn + 1$	$w'\ c\ ...$

In dieser Wahl ist der Kandidat c der eindeutige Stufe 2 Gewinner mit der Punktzahl $5nm - kn + 2 > 3nm + 2$.

$Kandidat$	Stufe 1	Stufe 2
c	$n(2m + k) + 1$	$5nm - kn + 2$
w'	$n(3m - 2k) + 1 < 3nm + 2$	$n(3m - 2k) + 1 < 3nm + 2$
w	nk	$3nk + 2 < 3nm + 2$
b_i	$\leq nm$	$\leq nm$
a_0	1	2
a_i	/	1
g_i	/	1

Wir behaupten, dass eine Menge $||B'|| \leq k$ existiert mit $S_i \cup B' \neq \emptyset$ genau dann, wenn der Kandidat c durch eine Partition (V_1, V_2) im Modell TP am gewinnen gehindert werden kann.

Von links nach rechts: Es wird angenommen, dass eine solche Menge B' existiert. Teile V:

- V_1 beinhalte die gesamte Menge 2, Menge 3, Menge 4, Menge 5 und Menge 6

Sei $V_2 = V - V_1$. In der Unterwahl (C, V_2) ist w' der eindeutige Stufe 1 BV Gewinner mit einer Punktzahl von $n(3m - 2k) + 1$ (c hat eine Punktzahl von $\leq n(3m - 2k)$ in der Stufe 1). In der Unterwahl (C, V_1) ist w der eindeutige Stufe 2 BV Gewinner mit einer Punktzahl von $3kn + 2$. c hat höchstens $3kn + 1$ in der zweiten Stufe und $2kn + 1$ in der ersten Stufe, was nicht zum gewinnen ausreicht, da die Unterwahl (C, V_1) aus $4kn + 2$ Wählern besteht. Damit gewinnt c in keiner Unterwahl und kann auch nicht mehr gewinnen.

Von rechts nach links: Es wird angenommen, man habe c durch eine Partition (V_1, V_2) am gewinnen gehindert. Es folgt eine Fallunterscheidung:

Fall 1: Man hat entweder einen Kandidaten gefunden, der im Zweikampf Kandidat c schlagen kann. Dies ist bei unserer Wahl nicht möglich, da Kandidat c bei den Präferenzen immer vor den anderen Kandidaten steht, bis auf bei jeweils $nk + 1$ Stimmen hinter w, k hinter a_i,

$3mn - 2kn + 1$ hinter w' und höchstens n hinter b_i. Somit reicht die Punktzahl nicht aus um c in der gesamten Wahl vor der Stufe 2 zu schlagen.
Fall 2: Damit kann c nur am gewinnen gehindert werden, in dem er bei beiden Unterwahlen am gewinnen gehindert wird. Dafür kommen nur die Kandidaten w und w' in Frage, da nur sie zusammen die Majorität der Punkte erreichen. In der ersten Stufe kann w gegen höchstens $nk - 1$ Stimmen für andere Kandidaten gewinnen und w' $n(3m - 2k)$ und somit könnten wir bei einer Wahl mit $n(3m - 2k) + n(3m - 2k) + 1 + nk - 1 + nk = 4nm - 2k < 6mn + 3$ Stimmen c am Gewinnen hindern. Das reicht uns aber bei dieser Wahl nicht aus, also müssen wir die Punkteverteilung in der zweiten Stufe betrachten. w' kann immernoch gegen höchstens $n(3m - 2k)$ Stimmen für andere Kandidaten gewinnen, aber w kann nun gegen $3nk + 1$ antreten und damit könnten wir bestenfalls in einer Wahl mit $n(3m - 2k) + n(3m - 2k) + 1 + 3nk + 2 + 3nk + 1 = 6nm + 2nk + 4 > 6mn + 3$ Stimmen c am Gewinnen hindern. Da wir aber wissen, dass in der zweiten Stufe c auch der Gesamtgewinner ist, müssen wir bei der Separierung aufpassen. Nehmen wir die Menge 2. Nun haben wir $3mn - 2kn + 1$ Punkte, also können wir $3mn - 2kn$ Stimmen dazunehmen, wo c an der ersten Position ist. Dabei achten wir darauf, dass w die restliche Wahl gewinnt. Wir nehmen die Menge 8 dazu, da davon w keinen Nutzen hat. Es bleiben noch $mn - kn$ Stimmen, die wir dazunehmen könnten.
Betrachten wir aber erstmal die andere Teilwahl. Wie oben angemerkt erreichen wir genügend Stimmen erst in der zweiten Stufe und somit benötigen wir die Mengen 3,4,5 und die Menge 6. Damit hat w $3nk + 2$ Stimmen und c $2nk + 1$, aber bereits in der ersten Stufe. Die Grösse dieser Teilwahl muss mind. $4nk + 2$ sein um c nicht zum BV Gewinner der Stufe 1 zu haben. Also benötigen wir mind. nk Stimmen, wo c nicht auf Platz 1 im Ranking steht. Hierfür kommen nur die Mengen 2 und 1 unter bestimmten Umständen in Frage. Die Menge 2 wird aber in der anderen Unterwahl gebraucht und falls wir uns trotzdem an dieser vergreifen würden, wäre die Menge 1 in keiner Unterwahl mehr so unterzubringen, dass nur w und w' gewinnen in diesen die Gewinner siind. Es folgt, dass wir genau k Stimmen aus der ersten Menge in diese Unterwahl aufnehmen müssen, dabei darf c nicht an der ersten Position sein.
Es ergeben sich folgende Punkteverteilungen in den Unterwahlen:

$Kandidat$	Stufe 1 in (C, V_1)	Stufe 2 in (C, V_1)	Stufe 1 in (C, V_2)
c	$2kn + 1$	$\leq 3kn + 1$	$\leq n(3m - 2k)$
w'	/	/	$n(3m - 2k) + 1$
w	kn	$3nk + 2$	/
b_i	$\leq n$	$\leq n$	$\leq n$
a_0	1	1	/
a_i	/	1	/

Eine weitere wichtige Tatsache ist, dass die Unterwahl (C, V_2) nicht mehr als $6mn - 4kn + 1$ Wähler beinhalten darf, da sonst w nicht die Mehrheit der Stimmen in der ersten Stufe erreicht und c spätestens in der zweiten Stufe gewinnt. Es darf auch nicht weniger Wähler beinhalten, da keine der Präferenzen mit w an ersten Position entfernt werden dürfen und falls einer der Anderen bewegt wird, kann c in der Unterwahl (C, V_1) mehr als $2k+1$ Stimmen in der ersten Stufe bekommen, und ist damit in dieser Unterwahl Sieger. Verschieben wir mind. zwei wähler aus der zweiten in die erste Unterwahl, so hat c in der zweiten Runde eine Stimme mehr als w. Daraus ergibt sich, dass nur die angebene Aufteilung gültig ist und nur dann c vom gewinnen abgehalten werden kann, wenn es ein RESTRICTED HITTING SET der Grösse k existiert. $\square$