Appunti di Algebra Lineare

Contents

1 Sistemi Lineari

Definizione Teorema Fondamentale dell’algebra

Considerando un polinomio di grado n, a coefficienti complessi:

- $P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ Dove $a_i \in \mathbb{C}, \; z_n \neq 0$

Si dice che $z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice di P se:

$$P(z_0) = 0$$

In tal caso esiste un polinomio Q di grado $n - 1$ tale che:

$$P(z) = (z - z_0)Q(z)$$

Definizione Molteplicità

La molteplcità di $z_0 \in \mathbb{C}$ come radice di un polinomio P, è il massimo numero $m \geq 0$ per il quale esiste un polinomio Q tale che:

$$P(z) = (z - z_0)^m Q(z) \quad \text{con } Q(z_0) \neq 0$$

2 MATRICI

2.1 OPERAZIONI

2.1.1 Prodotto Matriciale

Definizione Prodotto Matriciale

- A: Mat(m,n)
- B: Mat(n,p)
- **Risultato:** Mat(m,p)
- **Sintassi:** AB
- **Ordine dei fattori:** Importante perchè **non vale** la propr. commutativa
- **Requisito:** Righe di A == Colonne di B

L'elemento c_{ij} della matrice risultante è dato dal prodotto scalare del **vettore riga i-esimo** di A, per il **vettore colonna j-esimo**.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

2.2 DEFINIZIONI

Definizione Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ su un campo $\mathbb{F}$ è un insieme dotato di un'addizione e di una moltiplicazione per scalare che soddisfano le proprietà assiali (chiusura, associatività, elemento neutro, inverso additivo, distributività, compatibilità con scalari, moltiplicazione per 1).

Esempio:
$\mathbb{R}^n$

Definizione Linearmente Indipendenti/dipendenti

I vettori $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ si dicono **linearmente indipendenti** se vale l'implicazione:

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$$

In caso contrario si dice che $v_1, ..., v_k$ sono **linearmente dipendenti**.

Nota:
- Proprietà attribuibile ad una collezione di vettori, riga o colonna che siano.
- Le matrici sono una lista di vettori riga o vettori colonna, quindi si può stabilire la dipendenza lineare di righe e di colonne, vedere la definizione di **Rango**.

Esempio:
Confronto tra 1,2,3 vettori:

	lin. Ind.	lin. Dip.
$v_1 \in \mathbb{R}^n$	Se v_1 non nullo	nullo
$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$	Se non sono paralleli tra loro	paralleli
$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$	Se non complanari	Complanari

Definizione Base

Una base di un spazio vettoriale è una collezione di vettori linearmente indipendenti che genera lo spazio.

Esempio:

$$e = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione Span

È lo spazio vettoriale generato dalla combinazione lineare di unsieme di vettori

Definizione Rango (o caratteristica)

Numero massimo di vettori riga o vettori colonna della matriche tra loro linearmente indipendenti.

Proposizione Rango (o caratteristica)

Sia $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Mat}(m, n)$, si può dimostrare che il massimo numero di righe linearmente indipendenti coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (perchè non sono paralleli), per cui il numero massimo di colonne linearmente indipendenti sarà 2.