

Appunti di Algebra Lineare

Contents

- 1 Sistemi Lineari 2
- 2 Vettori e Matrici 3
 - 2.1 OPERAZIONI 3
 - 2.1.1 Prodotto Matriciale 3
 - 2.2 Elemento neutro di un vettore (rispetto al prod. matriciale) 3
 - 2.3 Inverso di un vettore 3
 - 2.4 Elemento neutro di una Matrice 3
 - 2.5 DEFINIZIONI 3

1 Sistemi Lineari

Definizione Teorema Fondamentale dell'algebra

Considerando un polinomio di grado n , a coefficienti complessi:

$$\bullet P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \quad \text{Dove } a_i \in \mathbb{C}, z_n \neq 0$$

Si dice che $z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice di P se:

$$P(z_0) = 0$$

In tal caso esiste un polinomio Q di grado $n - 1$ tale che:

$$P(z) = (z - z_0)Q(z)$$

Definizione Molteplicità

La molteplicità di $z_0 \in \mathbb{C}$ come radice di un polinomio P , è il massimo numero $m \geq 0$ per il quale esiste un polinomio Q tale che:

$$P(z) = (z - z_0)^m Q(z) \quad \text{con } Q(z_0) \neq 0$$

2 Vettori e Matrici

2.1 OPERAZIONI

2.1.1 Prodotto Matriciale

Definizione Prodotto Matriciale

- A : $\text{Mat}(m,n)$
- B : $\text{Mat}(n,p)$
- **Risultato**: $\text{Mat}(m,p)$
- **Sintassi**: AB
- **Ordine dei fattori**: Importante perchè **non vale** la propr. commutativa
- **Requisito**: Righe di A == Colonne di B

L'elemento c_{ij} della matrice risultante è dato dal **prodotto scalare** del **vettore riga i -esimo** di A , per il **vettore colonna j -esimo**.

ffrf — dedbeudbe — dde

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} & (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ (3 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & (3 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} & (3 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

2.2 Elemento neutro di un vettore (rispetto al prod. matriciale)

È pari allo scalare 1.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.3 Inverso di un vettore

Non è possibile perchè per un vettore $1 \times n$ richiede che l'elemento neutro abbia forma $n \times 1$ o $1 \times n$ per poter applicare il prodotto matriciale, ma l'elemento neutro è 1×1 per un vettore $1 \times n$.

2.4 Elemento neutro di una Matrice

2.5 DEFINIZIONI

Definizione Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale \mathbb{V} su un campo \mathbb{F} è un insieme dotato di un'addizione e di una moltiplicazione per scalare che soddisfano le proprietà assiali (chiusura, associatività, elemento neutro, inverso additivo, distributività, compatibilità con scalari, moltiplicazione per 1).

Esempio:
 \mathbb{R}^n

Definizione Linearmente Indipendenti/dipendenti

I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ si dicono **linearmente indipendenti** se vale l'implicazione:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

In caso contrario si dice che v_1, \dots, v_k sono **linearmente dipendenti**.

Nota:

- Proprietà attribuibile ad una collezione di vettori, riga o colonna che siano.
- Le matrici sono una lista di vettori riga o vettori colonna, quindi si può stabilire la dipendenza lineare di righe e di colonne, vedere la definizione di **Rango**.

Esempio:
Confronto tra 1,2,3 vettori:

	lin. Ind.	lin. Dip.
$v_1 \in \mathbb{R}^n$	Se v_1 non nullo	nullo
$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$	Se non sono paralleli tra loro	paralleli
$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$	Se non complanari	Complanari

Definizione Base

Una base di un spazio vettoriale è una collezione di vettori linearmente indipendenti che genera lo spazio.

Esempio:

$$e = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione Span

È lo spazio vettoriale generato dalla combinazione lineare di un insieme di vettori

Definizione Rango (o caratteristica)

Numero massimo di vettori riga o vettori colonna della matrice tra loro linearmente indipendenti.

Proposizione Rango (o caratteristica)

Sia $A \in \text{Mat}(m, n)$, si può dimostrare che il massimo numero di righe linearmente indipendenti coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(1 \ 0 \ 2)$ e $(-1 \ 1 \ 0)$ sono linearmente indipendenti (perchè non sono paralleli), per cui il numero massimo di colonne linearmente indipendenti sarà 2.