

Note di:

Healthcare
Finance

CONTENTS

1	Sistemi sanitari	6
1.1	L'Importanza dell'Healthcare Finance e gli Attori Coinvolti	6
1.2	Modelli di Finanziamento dei Sistemi Sanitari	7
1.3	Il Finanziamento del Sistema Sanitario Italiano	7
1.3.1	Fondi: da f. statale a f. regionale	8
1.3.2	Allocazione dei Fondi: Dalle Regioni alle ASL/AO	9
1.3.3	Il Sistema DRG (Diagnosis-Related Group)	9
2	Struttura capitale: Parte I	11
2.1	Leverage	11
2.2	Finanziamento con Debito o Equity?	11
2.3	Indici	12
2.3.1	Debt-Equity Ratio	13
2.3.2	ROI (Return on Investment)	13
2.3.3	ROE (Return On Equity)	13
2.3.4	ROD (Return On Debt)	13
2.3.5	V (Valore)	14
2.3.6	UN,MON,OF	14
2.4	Valore di Mercato VS Valore di Libro	14
2.5	Differenza ROE/ROD e r_e/r_d	14
2.6	Importante	15
3	Teorie della Struttura del Capitale	17

3.1	Modigliani Miller I:	17
3.2	Modigliani Miller II:	17
3.3	Trade Off Theory:	18
3.4	Pecking Order Theory:	18
4	Matematica Finanziaria	21
4.1	Unità temporali di Capitalizzazione	21
4.2	Capitalizzazione semplice	23
4.2.1	Interessi	23
4.2.2	Montante	23
4.2.3	Relazione t e k	24
4.2.4	Conversione tassi di interesse	24
4.2.5	Conversione in tasso annuale	24
4.2.6	Formula di conversione	24
4.3	Capitalizzazione Composta	24
4.3.1	Tassi di interesse	25
4.3.1.1	TAE	25
4.3.1.2	Conversione	25
4.3.1.2.1	Formula	26
4.4	Relazione TAN e TAE	26
4.4.1	Conversione $TAN \Rightarrow TAE$	26
4.5	Attualizzazione dei flussi di cassa	27
4.6	Capitalizzazione dei flussi di cassa	27
4.7	Perpetuity	28
4.8	Annuity	28
4.8.1	Formula	29

4.9	Le 3 forme dell'annuity	29
4.9.1	Forma 1	30
4.9.2	Forma 2	30
4.9.3	Forma 3	30
4.10	Annuity con ANTICIPO	30
4.11	Present & Future value	31
4.11.1	Relazione	31
4.12	Annuity per flussi di cassa futuri	32
4.13	Relazione tra $s_{t i}$ e $a_{t i}$	33
5	Piani di Ammortamento	35
5.1	Piano alla Francese	35
5.1.1	Descrizione	35
5.1.2	Calcolo rata	36
5.2	Piano all'Italiana	36
5.3	Piano all'Americana	36

Document made with typst: [Link to typst documentation](#)

1 SISTEMI SANITARI

1.1 L'Importanza dell'Healthcare Finance e gli Attori Coinvolti

Studiare l'Healthcare Finance è **fondamentale** perché il settore della salute è di cruciale importanza per l'economia nazionale e il benessere collettivo. Contribuisce in modo significativo al Prodotto Interno Lordo (PIL) (10,7% nel 2018) e all'occupazione (10% degli occupati nel 2018), investendo ingenti risorse in ricerca e sviluppo. L'integrazione tra pubblico e privato è **necessaria per garantire sufficienti livelli di cure**, introducendo sussidi, agevolazioni e forme di partenariato che complicano le dinamiche finanziarie. L'intervento pubblico è giustificato da **esternalità positive** (es. vaccinazioni, ricerca scientifica), **asimmetria informativa** (es. stato di salute), **difficile quantificazione di costi e benefici**, e **costi elevati, imprevedibili e non discrezionali**. L'intervento pubblico mira a garantire l'**equità** (tutela universale) e il **pooling** (gestione collettiva del rischio sanitario).

Gli attori chiave della filiera della salute che contribuiscono alla realizzazione, finanziamento e utilizzo di beni e servizi sanitari includono:

- **Produttori/Fornitori:** come le industrie farmaceutiche (Pharma), biotecnologiche (Biotech) e di tecnologie mediche (Medtec).
- **Erogatori di Beni/Servizi Sanitari:** come Aziende Ospedaliere (AO), Aziende Sanitarie Locali (ASL), strutture convenzionate, strutture private e farmacie.
- **Utenti Finali:** i cittadini che ricevono le prestazioni.
- **Policy Makers:** enti come il Servizio Sanitario Nazionale (SSN) e le Regioni, che definiscono le politiche e i meccanismi di finanziamento.

I **flussi finanziari** tra questi attori sono complessi e includono pagamenti diretti (es. ticket, prestazioni), premi da compagnie assicurative, acquisto di prodotti e detrazioni/agevolazioni fiscali, oltre a finanziamenti pubblici derivanti dalla fiscalità generale.

1.2 Modelli di Finanziamento dei Sistemi Sanitari

A livello internazionale, le fonti di finanziamento dei sistemi sanitari si basano su quattro modelli principali:

- **National Health Service (NHS):** si basa sulla tassazione generale come principale fonte di finanziamento (es. Italia, Regno Unito, Spagna).
- **Social Insurance Organization:** si fonda principalmente su una compartecipazione a livello salariale dei cittadini (es. Germania, Francia).
- **Compulsory Savings Fund:** prevede l'obbligo da parte dei cittadini di accumulare quote di previdenza sanitaria in appositi fondi (es. Singapore).
- **Private Health Insurance Fund:** basato sul versamento di contributi volontari da parte dei cittadini in appositi fondi (es. Australia, USA).

1.3 Il Finanziamento del Sistema Sanitario Italiano

Il sistema sanitario italiano si basa principalmente sul modello **National Health Service**.

Le fonti di finanziamento del fabbisogno sanitario in Italia sono:

1. **Fiscalità generale delle Regioni:** include l'Imposta Regionale sulle Attività Produttive (IRAP) e l'addizionale regionale all'Imposta sul Reddito delle Persone Fisiche (IRPEF), quantificate in base alle aliquote base nazionali.
2. **Entrate proprie delle aziende del Servizio Sanitario Nazionale:** come i ticket e i ricavi derivanti dall'attività intramoenia. Queste entrate sono definite e cristallizzate in seguito ad un'intesa tra Stato e Regioni.
3. **Bilancio dello Stato:** finanzia il fabbisogno non coperto dalle altre fonti, principalmente attraverso la compartecipazione all'Imposta sul Valore Aggiunto (IVA) (destinata alle Regioni a statuto ordinario), le accise sui carburanti e altre integrazioni.

Nel 2016, queste fonti si ripartivano in: IRAP e Addizionale IRPEF (59%), IVA e Accise (28%), Compartecipazione Regioni a Statuto Speciale (11%), e Altro (2%).

1.3.1 Fondi: da f. statale a f. regionale

Il riparto del finanziamento del SSN alle singole Regioni si basa sul Decreto Legislativo 6 maggio 2011, n. 68. Il punto di partenza è il **livello programmato di finanziamento a livello centrale**, che rappresenta le risorse assicurabili per l'erogazione dei Livelli Essenziali di Assistenza (LEA).

Per l'assegnazione a ciascuna regione si utilizzano:

- **Regioni benchmark:** regioni di riferimento (es. Emilia Romagna, Umbria, Marche, Lombardia e Veneto nel 2020) che servono a determinare i parametri di riferimento (costi standard) in sanità. La loro identificazione si basa su prossimità della spesa alle risorse ordinarie, efficienza, appropriatezza, qualità dei servizi e rappresentatività geografica.
- Il **fabbisogno standard** di ciascuna regione si basa sulla standardizzazione dei costi rilevati nelle regioni benchmark, rapportati alla **popolazione pesata** (per classi di età e natura del livello di assistenza: specialistica, ospedaliera).

- **Quota capitaria pesata:** questo modello di finanziamento mira a garantire che ogni ASL abbia una capacità di spesa sufficiente per erogare servizi che corrispondano ai LEA.
- **Criteri di ripartizione:**
 - **Semplice:** basata solo sulla numerosità della popolazione.
 - **Ponderata:** considera le differenze nei bisogni sanitari tra individui (es. composizione per età e sesso, mobilità infra-regionale passiva e attiva, tipologia di servizi fruibili e bisogni sanitari) per garantire equità nell'accesso.

Il finanziamento indistinto complessivo (es. 113.257.674.550 € nel 2020) viene poi suddiviso in sub-livelli (es. prevenzione, medicina di base, farmaceutica, specialistica, territoriale, ospedaliera) con criteri di riparto misti, basati sulla popolazione pesata e non.

1.3.2 Allocazione dei Fondi: Dalle Regioni alle ASL/AO

Il livello regionale assume un ruolo cruciale nella definizione dell'organizzazione dei servizi territoriali e ospedalieri. Esistono diversi **modelli di riparto regionali** dei finanziamenti alle Aziende Sanitarie Locali (ASL) e Aziende Ospedaliere

(AO): Modello a centralità ASL (es. Toscana, Emilia Romagna, Veneto e Piemonte): l'ASL ha una **doppia funzione di erogatore diretto e acquirente di prestazioni**. La Regione assegna la maggior parte delle risorse all'ASL su base capitaria (semplice o corretta), e l'ASL remunera su base tariffaria la mobilità verso altre strutture. **Modello di separazione acquirente/fornitore** (es. Lombardia): le Regioni separano dalle ASL tutte le forniture di servizi ospedalieri e specialistici. L'ASL è finanziata "a quota capitaria" e ha l'obbligo di pagare le prestazioni erogate da strutture pubbliche e private accreditate ai propri residenti. Questo modello si basa sulla separazione tra acquirenti e fornitori e sulla libertà di scelta.

- **Modello a centralità regionale** (es. Umbria, Friuli Venezia Giulia, regioni del Sud): la Regione è il principale soggetto responsabile della remunerazione di tutti i produttori (ASL, AO, strutture private accreditate) con il sistema "tariffa per prestazione". L'attività negoziale con gli erogatori è gestita direttamente dalla Regione.

1.3.3 Il Sistema DRG (Diagnosis-Related Group)

Il sistema DRG è uno **strumento fondamentale per il finanziamento prospettico** delle strutture ospedaliere e la misurazione dell'attività di cura. Nato negli Stati Uniti, è stato introdotto in Italia con la Legge Finanziaria del 1995.

Obiettivo: determinare l'ammontare del finanziamento da destinare a ciascun ospedale per le tipologie di ricovero, in base alle caratteristiche cliniche e assistenziali dei pazienti, e all'assorbimento di risorse (principio ISO-RISORSE). **Applicazione:** Si applica a tutte le aziende ospedaliere pubbliche, private accreditate e ai presidi delle ASL. **Definizione dei DRG:** I DRG sono identificati da un numero a tre cifre (001-579) per un totale di 538 DRG (versione 24, attiva dal 2009). Sono raggruppati in 25 Major Diagnostic Categories (MDC), che suddividono malattie e traumatismi in aree diagnostiche mutualmente esclusive (es. MDC 1 - Malattie e disturbi del sistema nervoso, MDC 6 - Malattie e disturbi dell'apparato digerente). **Criteri di Classificazione:** Esaustività: copre la globalità della casistica ospedaliera acuta. **Mutua esclusività:** ogni paziente è attribuito a una sola categoria in base a diagnosi, interventi, età, sesso e modalità di dimissione. **Numero limitato di categorie.** **Classificazione iso-risorse:** profili di carico assistenziale e consumo di risorse simili all'interno della categoria, pur con variabilità interna residua. **Significatività clinica: tipologie di pazienti simili dal punto di vista clinico.** **Tariffe DRG:** L'ente finanziatore determina ex-ante una tariffa standard per ogni ricovero, a prescindere dalle prestazioni effettivamente rese o dai costi realmente sostenuti. Non si stabilisce un prezzo assoluto, ma un **peso relativo** per ogni DRG, che rappresenta il grado di impegno rispetto al costo medio standard per ricovero (fattore k). La

remunerazione è proporzionale al peso. Quando il valore soglia dei giorni di degenza viene superato, è previsto un rimborso extra. **Regimi di Erogazione: Le tariffe DRG sono definite in base al regime (ricovero ordinario, assistenza giornaliera per acuti in Day Hospital, riabilitazione ospedaliera in ricovero diurno o ordinario).** **Processo:** Le informazioni sulla diagnosi e le procedure del paziente dalla cartella clinica sono codificate nella Scheda di Dimissione Ospedaliera (SDO). La SDO viene poi processata dal software GROUPER, che attribuisce il DRG in base a diagnosi principale, interventi/procedure, sesso, età, stato alla dimissione e diagnosi secondarie. **Vantaggi e Limiti: Vantaggi:** incentiva dimissioni tempestive, attenzione ai tempi di degenza, appropriatezza dei ricoveri, miglioramento di qualità ed efficienza. **Limiti: elevata varietà di procedure che ricadono nello stesso codice DRG (aggregazione), il sistema di pesatura è un'approssimazione della complessità organizzativa e dei costi, e il valore del DRG riflette il costo medio solo se la casistica riflette quella alla base del calcolo del costo standard. Nelle strutture profit-oriented, può portare a selezione di pazienti/procedure più remunerative e/o meno complesse e a manipolazione della scheda di dimissione.** **Progetto It.DRG:** nato dall'iniziativa "Mattoni SSN – Evoluzione del sistema DRG nazionale" (2011) per superare l'obsolescenza e la staticità del sistema precedente. Si propone di revisionare i sistemi di codifica e classificazione, predisporre nuovi pesi relativi e adeguare gli strumenti informativi.

2 STRUTTURA CAPITALE: PARTE I

Ripassino Stato Patrimoniale:

La struttura del capitale si compone in generale di:

- Equity: Capitale di rischio, così chiamato perchè per gli investitori, non ci sono garanzie assicurate di ritorno, come invece per i debiti
 - Debito
 - Debito ed Equity sono le due parti che costituiscono il passivo dello stato patrimoniale.
 - L'**ATTIVO** rappresenta gli impieghi del capitale, cioè come è stato investito. Risponde alla domanda “**Come hai investito il capitale?**”
 - Il **PASSIVO** rappresenta il finanziamento, risponde alla domanda: “**Come hai finanziato i tuoi investimenti?**”
-

2.1 Leverage

Un'azienda **LEVERAGE** è un'azienda con una parte di finanziamento del proprio capitale derivante da **DEBITO**. Quindi paga gli interessi ai propri creditori.

Nota:

Equivalenze:

- A è creditore di B
- B è debitore di A
- A ha B come debitore
- B ha A come creditore

$$\frac{D}{E} > 0 \quad \text{eq. 1}$$

Un debito che non può venire ripagato viene chiamato **sofferenza**.

2.2 Finanziamento con Debito o Equity?

Il **DEBITO** ha:

- Interesse concordato r_d
- Basso rendimento (per i creditori)
- Minore rischio (generalmente)

L'**EQUITY** ha:

- Interesse variabile r_e – varia in base alla parte di utile che viene distribuito
- Alto rendimento
- Rischio dipendente dal mercato

Si ha che $r_e > r_d$ per giustificare il maggior rischio assunto dall'investire in Equity.

Il rischio aggiuntivo dell'Equity per chi investe in un'azienda è il fatto che oltre che sui dividendi e sulla proprietà delle azioni, l'investitore non ha diritti su altre proprietà dell'azienda messi a garanzia nel caso l'azienda non produca il rendimento atteso.

Nel caso invece in cui un'azienda non risani il debito nei termini pattuiti, una banca, può impugnare il diritto per appropriarsi di altra ricchezza dell'azienda, per risanare il proprio credito.

Cioè per un'azienda interamente finanziata con Equity
 $ROI=ROE$

2.3 Indici

2.3.1 Debt-Equity Ratio

Definito come : $\frac{D}{E}$ eq. 2

2.3.2 ROI (Return on Investment)

$$ROI = \frac{MON}{A} = \frac{MON}{CI} \quad \text{eq. 3}$$

Dove:

- A: Attivo, $A = CI$ (Capitale Investito)

Se non c'è debito, $OF=0 \Rightarrow UN=MON-OF=MON$ e $CI=D+E=E$:

$$ROI = \frac{MON}{E} = \frac{UN}{CI} = ROE \quad \text{eq. 4}$$

2.3.3 ROE (Return On Equity)

$$ROE = \frac{UN}{E} \quad \text{eq. 5}$$

- UN: Utile Netto
- E: Equity, capitale di rischio, parte del proprio capitale ottenuto tramite vendita di azioni

2.3.4 ROD (Return On Debt)

$$ROD = \frac{OF}{D} \quad \text{eq. 6}$$

- OF: Oneri Finanziari
- D: Capitale di Debito

2.3.5 V (Valore)

$$V = A = CI = P \quad \text{eq. 7}$$

Cioè il valore di un'azienda è pari al Capitale Investito.

2.3.6 UN, MON, OF

$$UN = MON - OF \quad OF = D \cdot ROD \quad \text{eq. 8}$$

- MON = EBIT: Margine Operativo Netto, cioè $MON = RICA VI - COSTI$
- EBIT: Earnings Before Interests and Taxes

2.4 Valore di Mercato VS Valore di Libro

M: Market

B: Book

Valore di Mercato o (Market Value):

$$\begin{aligned} V &= D_M + E_M \\ &| \\ &= D_M + P_E \cdot N_E \end{aligned} \quad \text{eq. 9}$$

Valore di Libro o (Book Value):

$$V = D_B + E_B \quad \text{eq. 10}$$

2.5 Differenza ROE/ROD e r_e/r_d

- ROI
- ROE/ROD: Tassi di rendimento **EFFETTIVI** rispettivamente su EQUITY e DEBITO
- r_e/r_d : Tassi di rendimento **ATTESI** rispettivamente EQUITY e DEBITO

2.6 Importante

$$V_L = P_{az.} \cdot N_{az.} + D \quad \text{eq. 11}$$

Notare che questa formula non si può utilizzare a seguito del variare di D/E poichè il prezzo delle azioni cambierebbe, e non sarebbe più il precedente.

Più in generale se ad esempio è stato convertito una parte di debito in equity, allora dipende se la parte aggiuntiva è stata messa come aumento di prezzo o come aumento di numero della azioni, analogamente nel caso da equity a debito in verso negativo per l'equity.

- Quindi come fare per calcolare V_L dopo un operazione di rifinanziamento?

Al variare della struttura del capitale V_U (valore dell'azienda unlevered) non cambia.

V_L invece cambia al variare della struttura del capitale.

$$V_L = V_U + D \cdot T_c \quad \text{eq. 12}$$

- T_c : aliquota fiscale

V_L beneficia del tax shield, mentre V_U rimane costante al variare di D/E .

Si ha che $V_L = V_U$ **solo se** si è in **ASSENZA di TASSE**

- Grazie alla Equation 12 è possibile calcolare V_U come:

$$V_U = \underbrace{(P_{az.} \cdot N_{az.} + D)}_{V_L} - D \cdot T_c \quad \text{eq. 13}$$

3_ TEORIE DELLA STRUTTURA DEL CAPITALE

Assunzione \Rightarrow conseguenza

3.1 Modigliani Miller I:

- No tasse, mercato perfetto \Rightarrow D/E non cambia valore dell'impresa

3.2 Modigliani Miller II:

- Inclusionione della tassazione \Rightarrow Tax Shield ($VAN_{\text{tax shield}}$)
- Introduce la possibilità di usare la leva finanziaria.

3.3 Trade Off Theory:

- Inclusionione del costo del rischio di insolvenza dei debiti \Rightarrow Bankruptcy Cost of Debt ($VAN_{\text{Bankruptcy costs}}$)
- Esiste un valore ottimo di D/E che minimizza il WACC (Costo medio ponderato del capitale).

3.4 Pecking Order Theory:

Short: Propone che le imprese preferiscano fonti di finanziamento interne (utili non distribuiti), poi debito e solo in ultima istanza l'emissione di nuove azioni, tutto **in funzione dei problemi di asimmetria informativa**.

La Pecking Order Theory, o teoria dell'ordine di scelta delle fonti di finanziamento, afferma che le imprese hanno una preferenza specifica per le fonti di finanziamento.

Questa teoria si basa sul concetto di **asimmetria informativa** tra i **manager** e gli **investitori esterni**, ovvero coloro che non sono coinvolti nella gestione dell'azienda.

Ecco i punti chiave della Pecking Order Theory e le sue implicazioni:

- Assunzione di asimmetria informativa: I manager e gli azionisti interni di un'impresa possiedono una conoscenza superiore riguardo al vero valore e alla qualità dell'azienda (se sia di alta o bassa qualità), mentre il mercato esterno non è in grado di distinguere accuratamente tra di esse e tende ad assegnare un valore "medio".
- Questo crea un incentivo per le imprese di bassa qualità a effettuare aumenti di capitale, poiché verrebbero valutate più del loro reale valore, raccogliendo più denaro a spese dei nuovi azionisti.
- Al contrario, le imprese di alta qualità avrebbero un disincentivo ad aumentare il capitale, poiché il mercato le valuterebbe meno del loro valore effettivo, facendole raccogliere meno soldi di quanto meriterebbero.
- Meccanismo di selezione avversa e "effetto annuncio": L'asimmetria informativa porta a un meccanismo di selezione avversa, dove solo le imprese di minore qualità si rivolgono al mercato per un aumento di capitale, dato che quelle di buona qualità sarebbero penalizzate. Questo si traduce nell'"effetto annuncio": una richiesta di fondi al mercato (in particolare l'emissione di nuove azioni) tende ad essere interpretata negativamente dagli investitori, come un segnale che l'impresa potrebbe essere sopravvalutata. Di conseguenza, il prezzo dell'azione dell'impresa tende a scendere subito dopo l'annuncio di un aumento di capitale.
- Ordine di preferenza delle fonti di finanziamento: In presenza di asimmetria informativa, le imprese seguono un ordine gerarchico nella scelta delle fonti di finanziamento:

1. Autofinanziamento: L'impresa preferisce utilizzare gli utili generati internamente per sostenere le proprie attività.
2. Debito: Se l'autofinanziamento non è sufficiente, l'impresa si rivolge a creditori esterni, come l'emissione di obbligazioni. Il debito è preferito all'equity esterno perché comporta un minore "messaggio di sopravvalutazione" e offre un vantaggio fiscale (deducibilità degli oneri finanziari).
3. Equity (esterno): L'emissione di nuove azioni sul mercato per attrarre nuovi azionisti è l'ultima risorsa. Questo metodo è il meno preferito a causa del forte messaggio di sopravvalutazione che trasmette al mercato e della conseguente potenziale reazione negativa sul prezzo delle azioni.

- Spiegazione del comportamento aziendale:

- La teoria della Pecking Order spiega perché le aziende meno profittevoli, che non hanno sufficienti fondi interni o parametri migliori per indebitarsi, tendono a emettere debito come prima alternativa di finanziamento esterno.
- Tuttavia, la teoria si adatta meglio alle aziende mature piuttosto che a quelle in rapida crescita (ad esempio, settori high-tech o nano-tech), che spesso utilizzano il

finanziamento tramite equity come prima alternativa per sostenere la loro espansione

4 MATEMATICA FINANZIARIA

4.1 Unità temporali di Capitalizzazione

Il tempo finanziariamente ha senso esprimerlo non in termini di mesi o anni, ma piuttosto in termini di numero di capitalizzazioni con un determinato tasso che chiameremo j nel caso di c. annuale e j_k dove k è il numero di **PERIODI** in un anno. Notare j_1 equivale a j .

Capitalizzare con tasso bimestrale significa che in 1 anno si hanno 2 capitalizzazioni, ovvero $t=2$.

nota. Il numero di capitalizzazioni ad anno sono equivalenti al numero di periodi k (in un anno)

- Varianti del **PERIODO**:
- Mensile:

$$t = \frac{12 \text{ mesi}}{1 \text{ mesi}} = 12 \text{ capitalizzazioni} \quad \text{eq. 14}$$
$$j_{12} = \frac{j}{12}$$

- Bimestrale:

$$t = \frac{12 \text{ mesi}}{2 \text{ mesi}} = 6 \text{ capitalizzazioni}$$

$$j_6 = \frac{j}{6}$$

eq. 15

- Trimestrale:

$$t = \frac{12 \text{ mesi}}{3 \text{ mesi}} = 4 \text{ capitalizzazioni}$$

$$j_4 = \frac{j}{4}$$

eq. 16

- Quadrimestrale:

$$t = \frac{12 \text{ mesi}}{4 \text{ mesi}} = 3 \text{ capitalizzazioni}$$

$$j_3 = \frac{j}{3}$$

eq. 17

- Semestrale:

$$t = \frac{12 \text{ mesi}}{6 \text{ mesi}} = 2 \text{ capitalizzazioni}$$

$$j_2 = \frac{j}{2}$$

eq. 18

- Annuale:

$$t = \frac{12 \text{ mesi}}{12 \text{ mesi}} = 1 \text{ capitalizzazioni}$$

$$j_1 = \frac{j}{1}$$

eq. 19

Notare che negli esercizi il valore di interesse è il numero di capitalizzazioni

Esempi:

- $j_k = 3\%$ bimestrale $\Rightarrow k = 6$
- quindi: $j = 3\% \cdot 2 = 6\%$
- poichè in 1 anno avvengono 2 capitalizzazioni:

$$M_1 = C \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right) \text{ (fine primo bimestre)}$$

eq. 20

$$M_2 = C \cdot \left(1 + \frac{3}{100} \cdot 2\right) \text{ (fine secondo bimestre)}$$

• M_1

4.2 Capitalizzazione semplice

4.2.1 Interessi

$$I = C \cdot j \cdot t \quad \text{eq. 21}$$

- C: Capitale prestato
- j: tasso di interesse sull'unità del periodo t
- t: Numero di capitalizzazioni al tasso j

4.2.2 Montante

$$M_0 = C$$

$$M_1 = C + C \cdot j_k \cdot 1 \quad \text{eq. 22}$$

$$M_2 = C + C \cdot j_k \cdot 2$$

Quindi:

$$M_n = C(1 + j_k \cdot t) \quad \text{eq. 23}$$

4.2.3 Relazione t e k

$$t = k \cdot \text{anni} \quad \text{eq. 24}$$

4.2.4 Conversione tassi di interesse

Esempio:

- Convertire un tasso del 17% bimestrale (j_n) in un tasso semestrale (j_m)

Dati

bimestrale = 2 mesi

$$j_n = 17\% \text{ bimestrale} \quad \text{eq. 25}$$

semestrale = 6 mesi

$$j_m = \dots?$$

Soluzione:

$$n = \frac{12 \frac{\text{mesi}}{\text{anno}}}{2 \frac{\text{mesi}}{\text{bimestre}}} = 6 \frac{\text{bimestri}}{\text{anno}}$$

$$m = \frac{12}{6} = 2 \frac{\text{semestri}}{\text{anno}} \quad \text{eq. 26}$$

$$j_1 = j_n \cdot 6 = j_m \cdot 2$$

4.2.5 Conversione in tasso annuale

Da un tasso con $k \geq 1$ a tasso equivalente annuale (TAE):

$$j = j_k \cdot k \quad \text{eq. 27}$$

Essendo valido per tutti i k

$$j_n \cdot n = j_m \cdot m \quad \text{eq. 28}$$

4.2.6 Formula di conversione

$$j_n = j_m \cdot \frac{m}{n} \quad \text{eq. 29}$$

4.3.1 Tassi di interesse

4.3 Capitalizzazione Composta

Gli interessi sono calcolati sul montante precedente anzichè solo sul capitale iniziale.

$$M_0 = C \quad \text{eq. 30}$$

$$M_1 = C + C \cdot j_k \quad \text{eq. 31}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= M_1 + M_1 \cdot j_k \\ &= M_1(1 + j_k) \\ &= C \cdot (1 + j_k)(1 + j_k) \\ &= C \cdot (1 + j_k)^2 \end{aligned} \quad \text{eq. 32}$$

Quindi:

$$M_n = C \cdot (1 + j_k)^n \quad \text{eq. 33}$$

$$(1 + i_k)^k = (1 + i_1)^1 = (1 + i_n)^n \quad \text{eq. 34}$$

4.3.1.1 TAE

Tasso Annuale Effettivo

Ricavato dalla Equation 34:

$$i = (1 + i_k)^k - 1 \quad \text{eq. 35}$$

4.3.1.2 Conversione

Sempre ricavando dalla Equation 34:

$$\begin{aligned}
 (1 + i_k)^k &= (1 + i_n)^n \\
 (1 + i_k)^{\frac{k}{k}} &= (1 + i_n)^{\frac{n}{k}} \quad (k < 0) \\
 1 + i_k &= (1 + i_n)^{\frac{n}{k}} \\
 i_k &= (1 + i_n)^{\frac{n}{k}} - 1
 \end{aligned}
 \quad \text{eq. 36}$$

4.3.1.2.1 Formula

$$i_k = (1 + i_n)^{\frac{n}{k}} - 1 \quad \text{eq. 37}$$

4.4 Relazione TAN e TAE

$$1 + \text{TAE} = \left(1 + \frac{\text{TAN}}{k}\right)^k \quad \text{eq. 38}$$

Cioè il TAN è un tasso che non viene scontato per il regime di capitalizzazione considerato ed è quindi pari al TAE solamente quando $k=1$ quindi il regime di capitalizzazione è annuale, interessi annuali.

Nota. In tutti gli altri casi ($k>1$) si ha $\text{TAE} > \text{TAN}$

4.4.1 Conversione TAN \Rightarrow TAE

$$\text{TAE} = \left(1 + \frac{\text{TAN}}{k}\right)^k - 1 \quad \text{eq. 39}$$

$$(1 + \text{TAE})^{\frac{1}{k}} = \left(1 + \frac{\text{TAN}}{k}\right)^{\frac{k}{k}}$$

$$(1 + \text{TAE})^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{\text{TAN}}{k}$$

$$(1 + \text{TAE})^{\frac{1}{k}} - 1 = \frac{\text{TAN}}{k}$$

$$\left((1 + \text{TAE})^{\frac{1}{k}} - 1\right)k = \text{TAN}$$

eq. 40

4.5 Attualizzazione dei flussi di cassa

Formula per il valore attuale dei flussi di cassa F_i al tasso di sconto i .

Nota. i è di solito il costo del capitale

Esempio con 5 flussi di cassa:

$$\text{VA} = \frac{F_1}{(1+i)^1} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3} + \frac{F_4}{(1+i)^4} + \frac{F_5}{(1+i)^5}$$

4.6 Capitalizzazione dei flussi di cassa

FV Future Value

Esempio con 5 flussi di cassa con durata 5 anni:

$$FV = F_1 \cdot (1+i)^5 + F_2 \cdot (1+i)^4 + F_3 \cdot (1+i)^3 + F_4 \cdot (1+i)^2 + F_5 \cdot (1+i)^1$$

Il primo FC capitalizza per 5 anni, il secondo 4 anni, il terzo 3, il quarto 2, etc...

4.7 Perpetuity

Un flusso di cassa costante per sempre: $F_n = F$

Con:

p : tasso finale di perpetuity

$$VA_{\text{perp}} = F \cdot p$$

$$VA_{\text{perp}} = F \cdot \left(\frac{1}{1+i} + \dots + \frac{1}{(1+i)^\infty} \right) \text{ eq. 41}$$

Grazie ai risultati sulle serie geometriche o telescopiche si ha:

$$p = \frac{1}{i} \text{ eq. 42}$$

Quindi:

$$VA_{\text{perp}} = F \cdot p$$
$$VA_{\text{perp}} = \frac{F}{i} \text{ eq. 43}$$

4.8 Annuity

Flussi di cassa costanti come la perpetuity ma per un tempo Finito.

Le formule di annuity e perpetuity forniscono il valore attuale delle rispettive serie di flussi di cassa al periodo antecedente il primo pagamento cioè il primo flusso di cassa F_1 .

$$VA_{\text{perp}} = F \cdot \left(\frac{1}{1+i} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right) \text{ eq. 44}$$

4.8.1 Formula

Di gran lunga più realistica:

$$\begin{aligned} VA_{\text{annuity}} &= F \cdot a_{n|i} \\ &= F \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \end{aligned} \text{ eq. 45}$$

- n : numero di flussi di cassa
- i : tasso di sconto (costo-opportunità)

$$a_{n|i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(1+i)^n}$$

O anche:

$$a_{n|i} = i^{-1} - \frac{i^{-1}}{(1+i)^n} \text{ eq. 46}$$

Con:

4.9 Le 3 forme dell'annuity

Sono

4.9.1 Forma 1

$$a = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad \text{eq. 47}$$

4.9.2 Forma 2

Utile per confrontarla con s

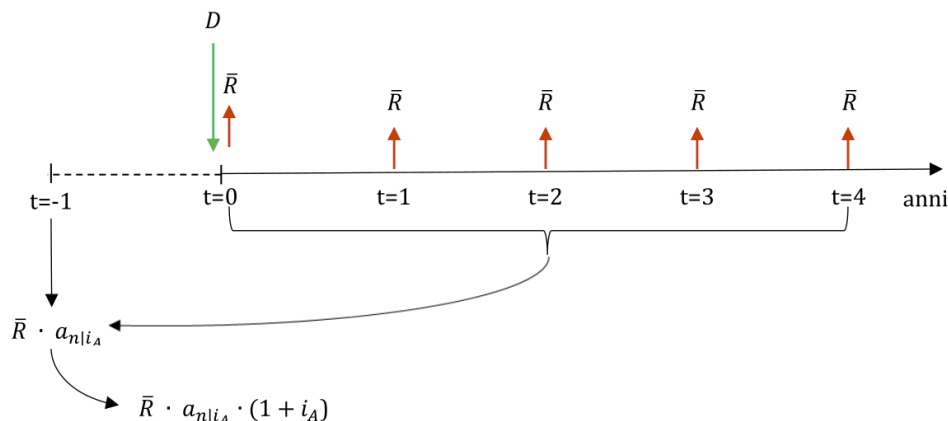
$$a = \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} \quad \text{eq. 48}$$

4.9.3 Forma 3

$$a = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(1 + i)^n} \quad \text{eq. 49}$$

4.10 Annuity con ANTICIPO

$$VA = R \cdot a_{n|i} \cdot (1 + i) \quad \text{eq. 50}$$



$$D = \bar{R} \cdot a_{n|i_A}(1 + i_A) \rightarrow \bar{R} = \frac{D}{a_{n|i_A}(1 + i_A)}$$

Figure 1: Preso da soluzioni exe III: esercizio n. 2

4.11 Present & Future value

4.11.1 Relazione

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^t} \quad \text{eq. 51}$$

È il valore finanziario attuale di una somma di denaro.

- **ATTUALE:** 100 euro disponibili oggi sono 100 euro finanziari (oggi) ma sono meno di 100 euro finanziari (disponibili domani)

Portare al presente delle somme di denaro significa scontarle di un tasso.

Scontare significa ridurre, quindi le somme che verranno date in futuro hanno un valore finanziario più piccolo rispetto a quello nominale.

Le somme che sono state date in passato, sono capitalizzate e quindi hanno un valore finanziario maggiore rispetto a quello nominale.

Quindi un certo quantitativo nominale di denaro disponibile oggi vale X.

Il PV è quella quantità di denaro che si investe per ottenere un certo valore di FV maggiore di PV, allo scadere del tempo t.

Esempietto:

Se investo oggi $PV = 10'000\text{€}$, con un rendimento annuo del 2%, quanti soldi diventeranno dopo 5 anni?

$$\begin{aligned} FV &= 10'000\text{€} \cdot (1 + 0.02)^5 \\ &= 11040.808\text{€} \end{aligned} \quad \text{eq. 52}$$

Se voglio ottenere $FV = 11'000\text{€}$ fra 5 anni con un rendimento annuo del 2%, quanti soldi devo investire oggi?

• **Esercizio inverso**

$$\begin{aligned} PV &= \frac{FV}{(1 + r)^n} \\ &= \frac{11'000}{(1 + 0.02)^5} \\ &= 9963.04\text{€} \end{aligned} \quad \text{eq. 53}$$

4.12 Annuity per flussi di cassa futuri

$$s_{t|v} = \frac{(1 + v)^t - 1}{v} \quad \text{eq. 54}$$

Esempio:

- A quanto devono ammontare le rate annuali costanti da versare su un fondo di risparmio per avere 40'000 euro tra 10 anni, con un rendimento effettivo del 0.5% semestrale?

Dati

- $FV = 40\,000$ euro
- $v = 3/100$
- $t = 20$ semestri

$$R = \frac{40'000}{s_{t|v}} \quad \text{eq. 55}$$

Calcolo s:

$$s = \frac{(1 + 0.03)^{10} - 1}{0.03} = 11.464 \quad \text{eq. 56}$$

Calcolo R:

$$R = \frac{40000}{11.46} = 3489.22\text{€} \quad \text{eq. 57}$$

4.13 Relazione tra $s_{t|i}$ e $a_{t|i}$

Definizione in **Equation 54**

$$s = \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad \text{eq. 58}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 - (1+i)^{-t}}{i} \\ &= \frac{1}{i} - \frac{1}{i(1+i)^t} \\ &= \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} \quad \text{eq. 59} \\ &= \underbrace{\left(\frac{(1+i)^t - 1}{i} \right)}_s \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \end{aligned}$$

Extra:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \\
 &= \frac{1}{i} - \frac{1}{i(1 + i)^t} \\
 &= \frac{1}{i} - \frac{(1 + i)^{-t}}{i} \\
 &= \frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i}
 \end{aligned}$$

eq. 60

5_ PIANI DI AMMORTAMENTO

5.1 Piano alla Francese

5.1.1 Descrizione

Rate costanti da calcolare con la formula della **ANNUITY**:

$$VA_{\text{annuity}} = D = R \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad \text{eq. 61}$$

Notare che ci sono diverse forme equivalenti:

$$\begin{aligned} \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} &= \\ \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n} &= \\ \frac{1}{i} - \frac{1}{i(1 + i)^n} & \end{aligned} \quad \text{eq. 62}$$

5.1.2 Calcolo rata

Se senza anticipo:

$$R = D \cdot \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \quad \text{eq. 63}$$

Con anticipo invece, riferimento a Equation 50:

$$R = D \cdot \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \cdot (1 + i) \quad \text{eq. 64}$$

5.2 Piano all'Italiana

- Quote costanti

$$Q = \frac{D}{n} \quad \text{eq. 65}$$

- Interessi variabili

$$I_n = D_n \cdot i \quad \text{eq. 66}$$

- Rate variabili:

$$R_n = Q + I_n \quad \text{eq. 67}$$

5.3 Piano all'Americana

In questo piano la gestione è molto diversa.

1. Ricevimento del prestito a $t=0$
 2. Per ogni $t>0$:
 1. Pagamento degli interessi su D (totale) alla banca
 2. Versamento sul fondo di investimento di una quota Q
- Interessi costanti

$$I = D \cdot i \quad \text{eq. 68}$$

- Quota da calcolare come accumuli di flussi di cassa futuri fino a raggiungimento di D al tempo n

$$s_{t|v} = \frac{(1+v)^t - 1}{v} \quad \text{eq. 69}$$