# Appunti di Algebra Lineare

## Contents

1 Sistemi Lineari . . . . . . . . . . 2
2 VETTORI E MATRICI . . . . . . . . . . 2
2.1 DEFINIZIONI . . . . . . . . . . 2
2.2 MATRICI . . . . . . . . . . 5

# 1 Sistemi Lineari

**Definizione** Teorema Fondamentale dell'algebra

Considerando un polinomio di grado n, a coefficienti complessi:

- $P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + Q_0$ Dove $a_i \in \mathbb{C}, \ z_n \neq 0$

Si dice che $z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice di $P$ se:

$$P(z_0) = 0$$

# 2 VETTORI E MATRICI

## 2.1 DEFINIZIONI

**Definizione** Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ su un campo $\mathbb{F}$ è un insieme dotato di un'addizione e di una moltiplicazione per scalare che soddisfano le proprietà assiali (chiusura, associatività, elemento neutro, inverso additivo, distributività, compatibilità con scalari, moltiplicazione per 1).

**Esempio**:
$\mathbb{R}^n$

**Definizione** Linearmente Indipendenti/dipendenti

I vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ si dicono **linearmente indipendenti** se vale l'implicazione:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$$

In caso contrario si dice che $v_1, \ldots, v_k$ sono **linearmente dipendenti**.

**Nota:**

- Proprietà attribuibile ad una collezione di vettori, riga o colonna che siano.
- Le matrici sono una lista di vettori riga o vettori colonna, quindi si può stabilire la dipendenza lineare di righe e di colonne, vedere la definizione di **Rango**.

**Esempio**:
Confronto tra 1,2,3 vettori:

| | lin. Ind. | lin. Dip. |
|---|---|---|
| $v_1 \in \mathbb{R}^n$ | Se $v_1$ non nullo | nullo |
| $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ | Se non sono paralleli tra loro | paralleli |
| $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ | Se non complanari | Complanari |

## Definizione Base

Una base di un spazio vettoriale è una collezione di vettori linearmente indipendenti che genera lo spazio.

**Esempio**:

$$e = \begin{array}{c} \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

## Definizione Span

È lo spazio vettoriale generato dalla combinazione lineare di unsieme di vettori

## 2.2 MATRICI

**Definizione** Rango (o caratteristica)

Sia $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Mat}(m, n)$, si può dimostrare che il massimo numero di righe linearmente indipendenti coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

**Esempio**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (perchè non sono paralleli), per cui il numero massimo di colonne linearmente indipendenti sarà 2.