



# Rapport projet Calcul Scientifique Partie 1

ALIOUI ILYASSE

Département Sciences du Numérique - Première année  
2022-2023

## Table des matières

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1 Limitation de la méthode de la puissance</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>2 Extension de la méthode de la puissance pour calculer les vecteurs dominants de l'espace propre</b> . . . . .	<b>8</b>
2.1 Subspace_iter_v0 : une méthode de base pour calculer un espace propre dominant	8
2.2 Subspace_iter_v1 :version améliorée faisant appel à la projection de Raleigh-Ritz	9
2.3 Subspace_iter_v2 et subspace_iter_v3 : vers un solveur efficace . . . . .	9
2.3.1 Approche par bloc (subspace_iter_v2) . . . . .	9
2.3.2 Méthode de la déflation (subspace_iter_v3) . . . . .	10
<b>3 Compression d'image</b> . . . . .	<b>14</b>

## Table des figures

1 – Matrice $200 \times 200$ de type 1 . . . . .	3
2 – Matrice $200 \times 200$ de type 2 . . . . .	4
3 – Matrice $200 \times 200$ de type 3 . . . . .	4
4 – Matrice $200 \times 200$ de type 4 . . . . .	5
5 – Matrice $20 \times 20$ de type 1 . . . . .	6
6 – Matrice $100 \times 100$ de type 1 . . . . .	6
7 – Matrice $200 \times 200$ de type 1 . . . . .	7
8 – Matrice $1000 \times 1000$ de type 1 . . . . .	7
9 Comparaison de temps de convergence lorsqu'on augmente la valeur de p . . . . .	9
10 Valeurs propres pour différents types de matrice . . . . .	10
11 Comparaison entre les 4 types de matrices en terme de qualité de valeurs propres(convergence) pour la méthode v0 . . . . .	11
12 Comparaison entre les 4 types de matrices en terme de qualité de valeurs propres(convergence) pour la méthode v1 . . . . .	12
13 Temps en secondes de calcul des différentes méthodes subspace_iter . . . . .	13

## Introduction

### 1 Limitation de la méthode de la puissance

#### Question 1 :

Nous commençons d'abord par comparer le temps d'exécution en changeant le type de la matrice pour l'algorithme de suivant :

Input : Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Output :  $(\lambda_1, v_1)$  eigenpair associated to the largest (in module) eigenvalue.

```
 $v \in \mathbb{R}^n$  given  
 $\beta = v^\top \cdot A \cdot v$   
repeat  
   $y = A \cdot v$   
   $v = y / \|y\|$   
   $\beta_{old} = \beta$   
   $\beta = v \cdot A \cdot v$   
until  $|\beta - \beta_{old}| / |\beta_{old}| < \varepsilon$   
 $\lambda_1 = \beta$  and  $v_1 = v$ 
```

```
Matrice 200 x 200 - type 1  
  
***** création de la matrice *****  
  
Temps de création de la matrice = 1.250e-01  
  
***** calcul avec eig *****  
  
Temps eig = 1.094e-01  
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [8.074e-16 , 1.420e-13]  
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 5.029e-14]  
  
Matrice 200 x 200 - type 1  
  
***** calcul avec la méthode de la puissance itérée *****  
  
Temps puissance itérée = 2.109e+00  
Nombre de valeurs propres pour attendre le pourcentage = 46  
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [9.977e-09 , 1.422e-08]  
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 1.961e-14]
```

FIGURE 1 -- Matrice  $200 \times 200$  de type 1

```

Matrice 200 x 200 - type 2

***** création de la matrice *****

Temps de création de la matrice = 1.562e-01

***** calcul avec eig *****

Temps eig = 0.000e+00
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [4.563e-16 , 1.251e-06]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 1.332e-07]

Matrice 200 x 200 - type 2

***** calcul avec la méthode de la puissance itérée *****

Temps puissance itérée = 4.688e-02
Nombre de valeurs propres pour attendre le pourcentage = 5
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [9.767e-09 , 1.794e-08]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [2.921e-16 , 2.080e-15]

```

FIGURE 2 – Matrice  $200 \times 200$  de type 2

```

Matrice 200 x 200 - type 3

***** création de la matrice *****

Temps de création de la matrice = 1.094e-01

***** calcul avec eig *****

Temps eig = 0.000e+00
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [7.762e-16 , 5.970e-11]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 1.181e-11]

Matrice 200 x 200 - type 3

***** calcul avec la méthode de la puissance itérée *****

Temps puissance itérée = 1.250e-01
Nombre de valeurs propres pour attendre le pourcentage = 9
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [9.733e-09 , 1.487e-08]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [1.571e-16 , 1.554e-15]

```

A

FIGURE 3 – Matrice  $200 \times 200$  de type 3

```

Matrice 200 x 200 - type 4

***** création de la matrice *****

Temps de création de la matrice = 3.438e-01

***** calcul avec eig *****

Temps eig = 0.000e+00
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [7.148e-16 , 6.946e-14]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 4.510e-14]

Matrice 200 x 200 - type 4

***** calcul avec la méthode de la puissance itérée *****

Temps puissance itérée = 2.281e+00
Nombre de valeurs propres pour attendre le pourcentage = 46
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [9.954e-09 , 1.422e-08]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 2.010e-14]

```

Active  
Accéléré

FIGURE 4 – Matrice  $200 \times 200$  de type 4

Les résultats obtenus indiquent que la méthode eig présente une stabilité en termes de temps d'exécution sur les différentes catégories de matrices, avec des temps de l'ordre de la centième de seconde. La qualité des couples propres est également satisfaisante car elle reste constante pour la première valeur avec une précision de l'ordre de grandeur de  $10^{-16}$ , mais la seconde valeur varie davantage, avec une précision comprise entre  $10^{-6}$  et  $10^{-13}$ . Cette variation est plus prononcée pour le type 2 de matrice, qui présente la valeur la plus élevée.

En ce qui concerne la méthode de la puissance itérée, elle ne parvient jamais à trouver tous les couples propres. Elle est moins rapide sur le type 4 de matrice, avec un temps d'exécution de 2,281 s, tandis que les autres types restent dans l'ordre de grandeur de la centième de seconde. Cependant, il convient de noter que sur les types 2 et 3, moins de dix valeurs propres ont été trouvées, contre 46 pour les types 1 et 4. Enfin, la qualité des couples propres est constante, avec des précisions de l'ordre de grandeur de  $10^{-9}$  et  $10^{-8}$ .

Nous allons maintenant comparer les temps d'exécution en variant la taille de la matrice :

```

Matrice 20 x 20 - type 1

***** création de la matrice *****

Temps de création de la matrice = 7.812e-02

***** calcul avec eig *****

Temps eig = 0.000e+00
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [3.131e-16 , 1.049e-14]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 2.887e-15]

Matrice 20 x 20 - type 1

***** calcul avec la méthode de la puissance itérée *****

Temps puissance itérée = 3.125e-02
Nombre de valeurs propres pour attendre le pourcentage = 5
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [9.753e-09 , 1.465e-08]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [1.974e-16 , 2.309e-15]

```

FIGURE 5 – – Matrice  $20 \times 20$  de type 1

```

Matrice 100 x 100 - type 1

***** création de la matrice *****

Temps de création de la matrice = 9.375e-02

***** calcul avec eig *****

Temps eig = 0.000e+00
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [5.100e-16 , 7.056e-14]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 1.421e-14]

Matrice 100 x 100 - type 1

***** calcul avec la méthode de la puissance itérée *****

Temps puissance itérée = 5.625e-01
Nombre de valeurs propres pour attendre le pourcentage = 23
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [9.941e-09 , 1.428e-08]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 9.805e-15]

```

FIGURE 6 – – Matrice  $100 \times 100$  de type 1

```

Matrice 200 x 200 - type 1

***** création de la matrice *****

Temps de création de la matrice = 1.250e-01

***** calcul avec eig *****

Temps eig = 1.094e-01
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [8.074e-16 , 1.420e-13]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 5.029e-14]

Matrice 200 x 200 - type 1

***** calcul avec la méthode de la puissance itérée *****

Temps puissance itérée = 2.109e+00
Nombre de valeurs propres pour attendre le pourcentage = 46
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [9.977e-09 , 1.422e-08]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 1.961e-14]

```

FIGURE 7 – Matrice  $200 \times 200$  de type 1

```

Matrice 1000 x 1000 - type 1

***** création de la matrice *****

Temps de création de la matrice = 4.819e+01

***** calcul avec eig *****

Temps eig = 5.938e-01
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [1.051e-15 , 9.757e-13]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 1.288e-13]

Matrice 1000 x 1000 - type 1

***** calcul avec la méthode de la puissance itérée *****
puissance_itérée : convergence non atteinte pour un des couples propres
Qualité des couples propres (par rapport au critère d'arrêt) = [0.000e+00 , 0.000e+00]
Qualité des valeurs propres (par rapport au spectre de la matrice) = [0.000e+00 , 0.000e+00]

```

FIGURE 8 – Matrice  $1000 \times 1000$  de type 1

Les résultats montrent que la méthode eig est plus rapide et précise que la méthode de la puissance itérée pour calculer les couples propres, indépendamment de la taille de la matrice. Cependant, la méthode de la puissance itérée présente des limitations pour les matrices de grande taille, comme l'absence de convergence pour une matrice de taille  $1000 \times 1000$  de type 1. En conclusion, la méthode eig est plus rapide que la méthode de la puissance itérée, mais cela ne garantit pas nécessairement une meilleure précision.

## Question 2

Input : Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Output :  $(\lambda_1, v_1)$  eigenpair associated to the largest (in module) eigenvalue.

```
v ∈ ℝn given
z=A.v
β = vT · z
repeat
y = z
v = y / ||y||
z=A.v
βold = β
β = vT · z
until |β - βold| / |βold| < ε
λ1 = β and v1 = v
```

Cet algorithme contient qu'un seul produit d'un vecteur\*matrice dans la boucle

## 2 Extension de la méthode de la puissance pour calculer les vecteurs dominants de l'espace propre

### 2.1 Subspace\_iter\_v0 : une méthode de base pour calculer un espace propre dominant

#### Question 4 :

Lorsque l'on applique l'algorithme de la méthode de puissance à un ensemble de  $m$  vecteurs, on ne sait pas vers quelle matrice le vecteur  $V$  converge. Cela est dû au fait que l'algorithme de la méthode de puissance ne garantit pas la convergence vers un vecteur propre spécifique. Si l'on applique la méthode d'itération de sous-espaces (subspace iteration method) avec la matrice de départ  $V_0$ , la matrice  $V$  converge vers la matrice de changement de base qui relie les vecteurs propres de  $H$  (une matrice qui contient les mêmes valeurs propres que  $A$ ) aux vecteurs propres de  $A$ . Cette matrice de changement de base permet de diagonaliser la matrice  $A$  et de trouver ses valeurs propres et vecteurs propres associés.

#### Question 5 :

Nous avons :  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $v \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Donc, en posant  $H = v^T A v$ , nous avons  $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Étant donné que  $m \ll n$ ,  $H$  a une taille raisonnable et il n'y a donc pas de problème pour calculer la décomposition spectrale de  $H$ .



## 2.2 Subspace\_iter\_v1 :version améliorée faisant appel à la projection de Raleigh-Ritz

### Question 7 :

#### Algorithm 4 Subspace iteration method v1 with Raleigh-Ritz projection

**Input :** Symmetric matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tolerance  $\epsilon$ , MaxIter (max nb of iterations) and PercentTrace the target percentage of the trace of  $A$ .

**Output :**  $n_{\text{nev}}$  dominant eigenvectors  $V_{\text{out}}$  and the corresponding eigenvalues  $\Lambda_{\text{out}}$ .

Generate an initial set of  $m$  orthonormal vectors  $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ;  $k = 0$ ; PercentReached = 0  
 repeat  
 1.54      $k = k + 1$   
 1.56     Compute  $Y$  such that  $Y = A \cdot V$   
 1.58      $V \leftarrow$  orthonormalisation of the columns of  $Y$   
 1.61     Rayleigh-Ritz projection applied on matrix  $A$  and orthonormal vectors  $V$   
 1.64–113     Convergence analysis step : save eigenpairs that have converged and update PercentReached  
 until (PercentReached > PercentTrace or nev =  $m$  or  $k > \text{MaxIter}$ )

## 2.3 Subspace\_iter\_v2 et subspace\_iter\_v3 : vers un solveur efficace

### 2.3.1 Approche par bloc (subspace\_iter\_v2)

#### Question 8 :

Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$  et  $B$  est une matrice de taille  $n \times p$ , alors le coût en termes de flops de la multiplication de  $A$  et  $B$  est de l'ordre de  $O(2 \times m \times n \times p)$ . Dans notre cas,  $A$  est une matrice de taille  $n \times n$  et nous effectuons la multiplication  $A \times A$ , donc le coût de cette multiplication est de l'ordre de  $O(2 \times n^3)$ . Ainsi, pour effectuer  $A^p$ , le coût est de l'ordre de  $O(2p \times n^3)$  car nous effectuons la multiplication  $A \times A$   $p$  fois.

Nous savons que  $V$  est une matrice de taille  $n \times m$  avec  $m \ll n$ , donc effectuer  $A^p \times V$  revient à effectuer la multiplication de la matrice de taille  $n \times n$  et la matrice de taille  $n \times m$ . Le coût de cette dernière multiplication est de l'ordre de  $O(2 \times m \times n^2)$ , donc le coût total de ce calcul est de l'ordre de  $O(2p \times n^3 + 2 \times m \times n^2) = O(2p \times n^3)$ .

Pour réduire le coût de ce calcul, nous devons effectuer une fois la multiplication  $A^p$  avant d'entrer dans la boucle. Ensuite, il ne reste plus qu'à effectuer la multiplication avec  $V$  dans la boucle, ce qui coûte  $O(2 \times m \times n^2)$ , ce qui est moins onéreux car  $m \ll n$ .

#### Question 10 :

On remarque que lorsqu'on augmente  $p$ , la convergence est plus rapide, comme le montre les figures ci-dessous.

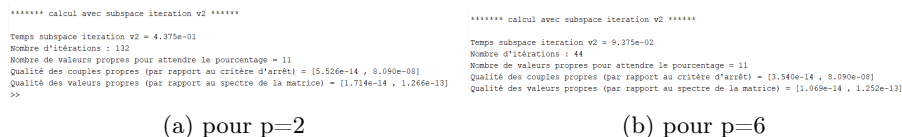


FIGURE 9 – Comparaison de temps de convergence lorsqu'on augmente la valeur de  $p$

### 2.3.2 Méthode de la déflation (subspace\_iter\_v3)

#### Question 11 :

La précision des vecteurs est différente selon leur valeur propre, plus leur valeur propre est grande, plus il est facile d'avoir une grande précision concernant leur vecteur propre.

#### Question 12 :

La convergence des eigenfaces doit pour sûr être plus rapide, mais moins précise. Du fait que l'on ne cherche qu'à préciser les couples propres non encore déterminés.

#### Question 14 :

Des figures qui montrent la distribution des valeurs propres de ces différents types (1,2,3,4) :

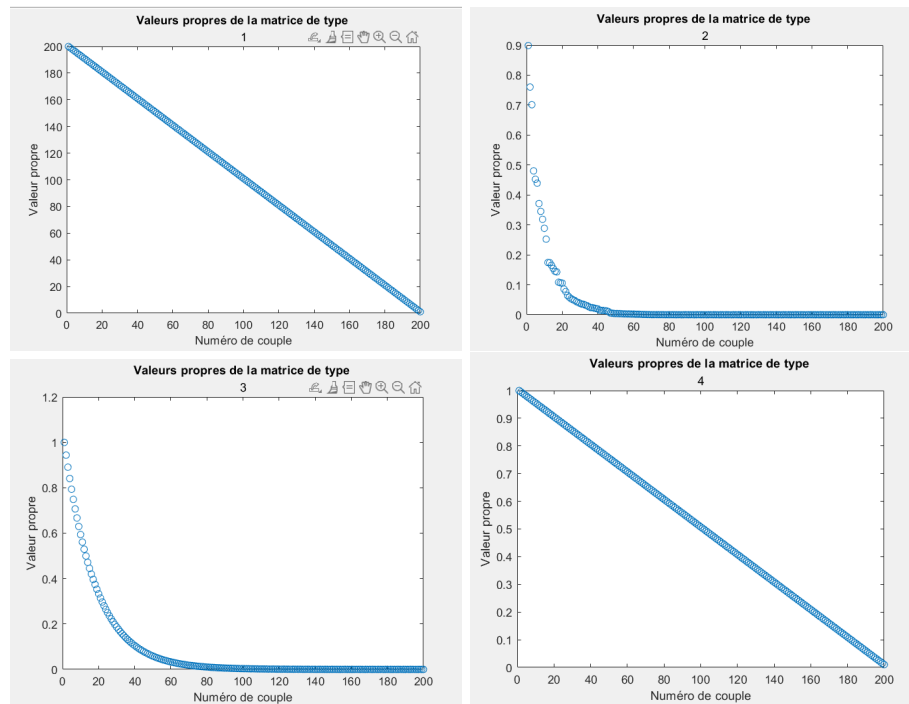


FIGURE 10 – Valeurs propres pour différents types de matrice

Question 15 :

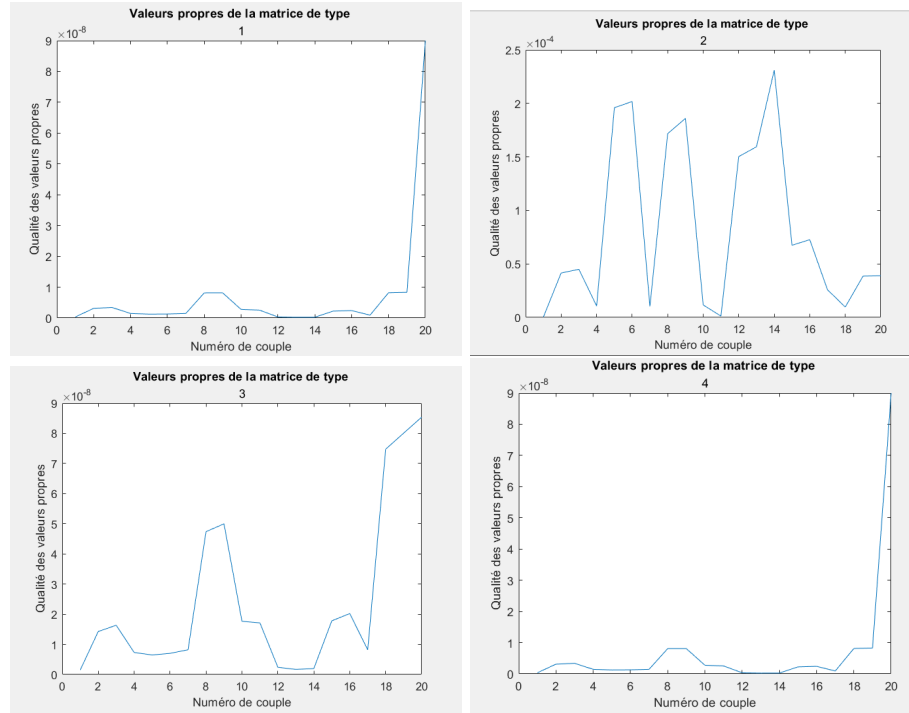


FIGURE 11 – Comparaison entre les 4 types de matrices en terme de qualité de valeurs propres (convergence) pour la méthode v0

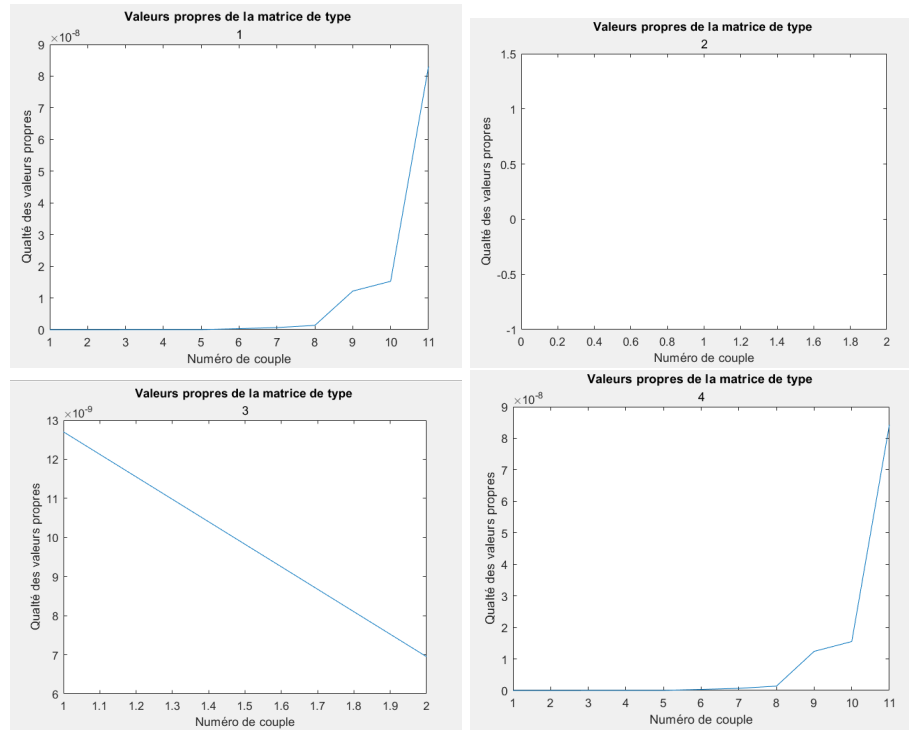


FIGURE 12 – Comparaison entre les 4 types de matrices en terme de qualité de valeurs propres (convergence) pour la méthode v1

		iter_v0	iter_v1	iter_v2	iter_v3
matrice 200x200	Type 1	6.800e-01	1.060e+00	5.500e-01	5.300e-01
	Type 2	2.400e-01	1.500e-01	6.600e-01	1.400e-01
	Type 3	1.160e+00	1.900e-01	4.400e-01	1.500e-01
	Type 4	8.600e-01	1.290e+00	4.800e-01	6.000e-01
matrice 10x10	Type 1	0.000e+00	1.000e-02	2.000e-02	1.000e-02
	Type 2	1.000e-02	1.000e-02	non conv	2.000e-02
	Type 3	1.000e-02	1.000e-02	3.000e-02	1.000e-02
	Type 4	1.000e-02	1.000e-02	3.000e-02	1.000e-02
matrice 50x50	Type 1	2.000e-02	5.000e-02	5.000e-02	2.000e-02
	Type 2	4.000e-02	6.000e-02	non conv	3.000e-02
	Type 3	1.000e-02	3.000e-02	7.000e-02	3.000e-02
	Type 4	2.000e-02	3.000e-02	6.000e-02	3.000e-02

FIGURE 13 – Temps en secondes de calcul des différentes méthodes subspace\_iter

### Remarque

il semble que La différence entre les 4 types de matrices réside dans leurs spectres. En effet, les valeurs propres des matrices de type 1 et 4 sont uniformément distribuées, celles des matrices de type 3 sont de plus en plus espacées et celles des matrices de type 2 sont aléatoirement distribuées. Cela aura un impact surement sur la précision de calcul des couples propres , comme le montre les figures ,chaque type réagit differement lorsqu'on applique l'une des methodes de "subspace iteration", par exemple :les types 1 et 4 , la méthode v0 semble plus efficace.

### 3 Compression d'image

#### Question 1 :

$\Sigma_k$  est de taille  $(k, k)$ ,  $U_k$  est de taille  $(q, k)$  et  $V_k$  est de taille  $(p, k)$ .

#### Question 2 :

Voici un tableau comparant le temps de calcul (en secondes) des différents algorithmes au rang maximum :

Pourcentage	Pourcentage	99.6%	99.5%	99.8%	99.7%
Eig		0.4	0.38	0.22	0.34
Power_v12 and v11		non convergé	non convergé	non convergé	non convergé
subspace_iter_v0		4.2	4.4	5	4.1
subspace_iter_v1		Erreur	1.1	1.4	1.8
subspace_iter_v2		1.2	non convergé	non convergé	non convergé
subspace_iter_v3		1.4	non convergé	non convergé	non convergé

TABLE 1 – Comparaison du temps de calcul (en secondes) des différents algorithmes au rang maximum.