Noțiuni introductive privind controlul (comanda) sistemelor dinamice (partea I)

Sistem dinamic

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}} \quad (1)$$

notație: $\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt}$

unde

$x \in \mathbb{R}^n \to$ vectorul stărilor (în cazul satelitului $x = [\omega_x\ \omega_y\ \omega_z]^T$)

$u \in \mathbb{R}^m \to$ vectorul comenzilor

$y \in \mathbb{R}^p \to$ vectorul ieșirilor măsurate

Aproximarea prin liniarizare a sistemelor dinamice

Definiție Se numește punct de echilibru, perechea (x_0, u_0) pentru care $f(x_0, u_0) = 0$

Dezvoltarea în serie Taylor în jurul punctului de echilibru (x_0, u_0)

$$f(x,u) = \underbrace{f(x_0,u_0)}_{0} + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0,u_0}(x - x_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x_0,u_0)}(u - u_0) + \cancel{\frac{1}{2!} \cdots}$$

0 deoarece $(x_0; u_0)$ este punct de echilibru

Rezultă astfel:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,u_0)}(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x_0,u_0)}(u - u_0)$$

Notând $x - x_0 = \delta x$ și $u - u_0 = \delta u$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,u_0)}\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x_0,u_0)}\delta u$$

Notații $A := \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,u_0)}$; $B := \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x_0,u_0)}$ $\Longrightarrow$

$$\dot{x} = A\delta x + B\delta u$$

Dar $\dot{x} = \dot{\overline{x - x_0}} = \delta\dot{x}$ deci $\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u$

Pentru simplificarea notației, $\delta x \leftarrow x$ și $\delta u \leftarrow u$ rezultând astfel

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}} \quad (2) \qquad \begin{aligned} &A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ &B \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ &C \in \mathbb{R}^{p \times n} \\ &D \in \mathbb{R}^{p \times m} \end{aligned}$$

și similar

Ecuațiile (2) reprezintă forma liniarizată în jurul punctului de echilibru (x_0, u_0) a sistemului neliniar (1).

Observație Pentru un alt punct de echilibru $(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0)$ se obțin alte matrici A, B, C, D în ecuațiile (2).

Definiție Reprezentările (1) și (2) se numesc reprezentări în spațiul stărilor ale sistemului dinamic considerat.

Soluția ecuației diferențiale (2)

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau \qquad (3)$$

unde $e^{At} := I_n + \frac{1}{1!}(At) + \frac{1}{2!}(At)^2 + \ldots\ldots \qquad \left(e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)$

e^{At} se numește matricea fundamentală a sistemului (2)

Reprezentarea intrare-ieșire a sistemelor dinamice liniare

Fie $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ cu $x(0) = 0$.

Aplic transformata Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^t e^{-ts} f(t)\,dt =: F(s)$

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \quad , s \in \mathbb{C} \;!!$$

$$\Rightarrow (sI - A)x(s) = Bu(s) \Rightarrow \boxed{x(s) = (sI-A)^{-1} Bu(s)} \quad (4)$$

Aplicând transformata Laplace și în ecuația $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, rezultă

$$y(s) = Cx(s) + Du(s)$$

deci, utilizând expresia $x(s)$ din (4) se obține

$$y(s) = \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]u(s) \quad (5)$$

__Definiție__ Expresia

$$\boxed{H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D} \quad (6)$$

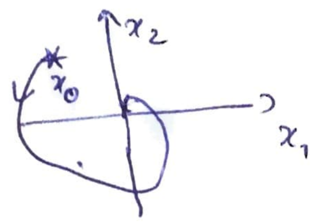
se numește __funcția de transfer__ a sistemului (2).

__Observație__ Cu notația (6), ecuația (5) devine

$$\boxed{y(s) = H(s) \cdot u(s)}$$

Stabilitatea sistemelor dinamice liniare

Definiție Sistemul liniar $\dot{x} = Ax + Bu$ se numește stabil exponențial (intern) dacă pentru $u(t) \equiv 0$, soluția $x(t)$ a ecuației diferențiale $\dot{x} = Ax$ are proprietatea că $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \quad \forall\, x(0)$ (sau, echivalent, dacă $\lim_{t\to\infty} e^{At} x(0) = 0, \ \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$)



Teoremă fundamentală

a) Sistemul $\dot{x} = Ax + Bu$ este exponențial stabil dacă și numai dacă valorile proprii ale matricii A au partea reală negativă

b) Sistemul liniar cu funcția de transfer $H(s)$ este stabil dacă și numai dacă polii funcției $H(s)$ au partea reală negativă.