یادگیری ماشین برای بیوانفورماتیک

نیم‌سال دوم ۹۸ـ۹۹

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورنده: متین خواجوی

تمرین صفر

آمار و احتمال ـ جبرخطی

آمار و احتمال

مسئله‌ی ۱.

اگر چگالی توزیع توام متغیرهای تصادفی X و Y ،به صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(c-x-y) & 0<x<1, 0<y<2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

c یک عدد ثابت است.

- c را بیابید.
- توزیع حاشیه‌ای X را بیابید.

مسئله‌ی ۲.

برای هر دو متغیر تصادفی دلخواه X و Y ثابت کنید:

- $E[E[X|Y] = E[X]$
- $var(X) = E[var(X|Y)] + var(E[X|Y])$
- $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y)$

مسئله‌ی ۳.

در این مسأله قصد داریم تخمین های MAP و MLE را برای توزیع نرمال با واریانس مشخص σ^2 و میانگین نامعلوم μ به‌دست آوریم. فرض کنید نمونه های $x_1, x_2, ... x_N$ که مستقل از هم از توزیع نمونه برداری شده اند، در اختیار داریم.

- MLE را برای میانگین این توزیع به دست آورید.
- تخمین MAP را با فرض آنکه میانگین از توزیع نرمال با میانگین v و واریانس β^2 پیروی کند، به‌دست آورید.
- اگر مقدار N به سمت بی نهایت میل کند، دو تخمین را با یکدیگر مقایسه کنید.

مسئله‌ی ۴.

دانشجویی قصد دارد براي گرفتن پذیرش از دانشگاهی اقدام کند. او براي ارزیابی شانس پذیرش خود، اطلاعات پذیرش دانشجویان سال هاي پیش را جمع آوري کرده و حال قصد دارد با استفاده از درخت تصمیم گیري شانس پذیرش خود را بسنجد. جدول زیر اطلاعات مربوط به دانشجویان سال هاي پیش است. پارامترهایی که او در نظر گرفته مقاله، توصیه نامه، تعداد دروس با نمره کمتر از ۱۶ و مقطع پذیرش است.

پذیرفته شده	تعداد دروس با نمره پایین تر از ۱۶	مقاله	توصیه نامه	مقطع پذیرش
۱	۵	۱	قوی	کارشناسی ارشد
۱	۹	۱	قوی	پسادکترا
۱	۶	۰	قوی	دکترا
۱	۶	۱	متوسط	کارشناسی
۱	۷	۰	متوسط	کارشناسی ارشد
۱	۸	۱	ضعیف	کارشناسی ارشد
۱	۵	۱	ضعیف	دکترا مستقیم
۰	۹	۰	قوی	دکترا مستقیم
۰	۸	۰	متوسط	کارشناسی ارشد
۰	۸	۰	متوسط	کارشناسی ارشد
۰	۶	۰	ضعیف	پسادکترا
۰	۷	۰	ضعیف	کارشناسی

- آنتروپی اولیه پذیرفته شدن چقدر است؟
- بهره اطلاعاتی[۱] دو ویژگی توصیه نامه و مقاله را بدست آورید.

[۱] Information Gain

جبرخطی

مسئله‌ی ۵.

۱

اگر a و x بردارهای ستونی و A ماتریس مربعی باشد موارد زیر را ثابت کنید:

- $\frac{da^\top x}{dx} = \frac{dx^\top a}{dx} = a^\top$
- $\frac{dx^\top x}{dx} = ۲x^\top$
- $\frac{d(x^\top a)^۲}{dx} = ۲x^\top a a^\top$
- $\frac{dAx}{dx} = A$
- $\frac{dx^\top A}{dx} = A^\top$
- $\frac{dx^\top Ax}{dx} = x^\top(A + A^\top)$

۲

اگر α را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\alpha = y^\top x$$

که در آن x و y دو بردار ستونی $n \times ۱$ و هر دو تابعی ز بردار z هستند، آنگاه ثابت کنید:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = x^\top \frac{\partial y}{\partial z} + y^\top \frac{\partial x}{\partial z}$$

۳

ماتریس H را در نظر بگیرید. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را برای ماتریس $HH^\top$ به دست آورید.

$$H = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۴

اگر A یک ماتریس مربعی و λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A باشد، ثابت کنید λ یک مقدار ویژه برای ماتریس $A^\top$ نیز می‌باشد.

مسئله‌ی ۶.

اگر X و Y دو بردار به ترتیب n و m بعدی باشند و $Y = f(X)$ باشد، آنگاه مشتق بردار Y نسبت به بردار X را ژاکوبین گویند و به صورت ماتریس $m \times n$ زیر نمایش دهند :

$$J_y(x) = \frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

اگر بردارهای X و Z و Y هرکدام در فضای ۳ بعدی باشند و تابع f به صورت زیر تعریف شود:

$$Y = AX + Z \qquad z_i = \begin{cases} (x_i x_{i+1} + 1)^2 & i \neq 3 \\ (x_1 x_3 + 1)^2 & i = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

که در آن x_i و z_i به ترتیب مولفه های بردار X و Z هستند، ژاکوبین تابع f را در نقطه $X = (1, 3, -1)$ محاسبه کنید.