۱. اجناس را با توجه به نسبت $\frac{\text{قیمت}}{\text{وزن}}$ مرتب می کنیم، به ترتیب از بزرگترین شروع می کنیم اجناس را برمی داریم تا جایی که دیگر نتوانیم جنسی را به طور کامل درون کوله پشتی قرار دهیم. سپس آن شی را به اندازه وزن باقی مانده در کوله پشتی برش می دهیم.

برای اثبات از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض می کنیم نسبت ها به شکل زیر مرتب شده اند.

$$\frac{v_1}{s_1} > \frac{v_2}{s_2} > \dots > \frac{v_n}{s_n}$$

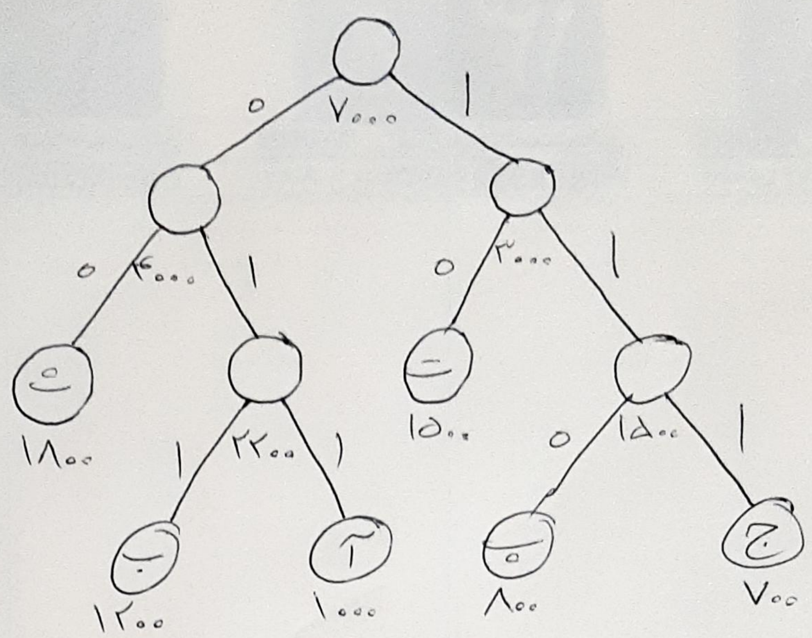
فرض می کنیم طبق الگوریتم حریصانه ذکر شده، حداکثر تا شی با ارزش k درون کوله پشتی قرار داده ایم. فرض می کنیم حالتی بهینه وجود دارد که شی ای وجود دارد که از میان k شی اول حالت حریصانه مذکور نیست. فرض می کنیم شی $i > k$ ام به جای شی $k > j$ ام وزن c را اشغال کرده است.

$$\frac{c}{s_i} v_i - \frac{c}{s_j} v_j < 0 \Rightarrow$$

برداشتن جنس jام ارزش کوله پشتی را بیش تر از برداشتن iام افزایش می دهد. پس در نتیجه بهینه نیست در نتیجه تناقض رخ می دهد.

۲-

آ ۱۰۰۰
ب ۱۲۰۰
پ ۸۰۰
ت ۱۵۰۰
ث ۱۸۰۰
ج ۷۰۰

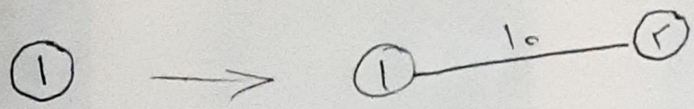


تعداد بیت های لازم $= (۱۰۰۰ + ۱۲۰۰ + ۸۰۰ + ۷۰۰) \times ۳ + (۱۸۰۰ + ۱۵۰۰) \times ۲ =$

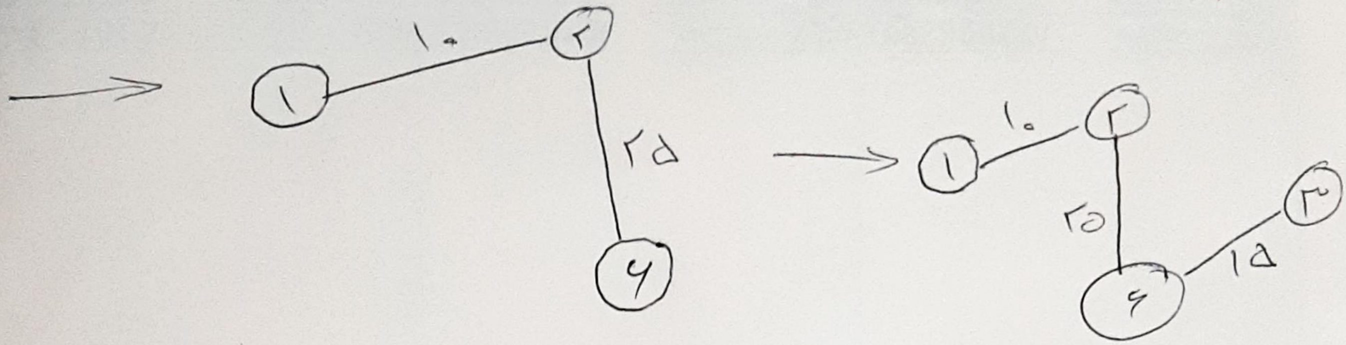
$= ۱۷۷۰۰$

۳ـ

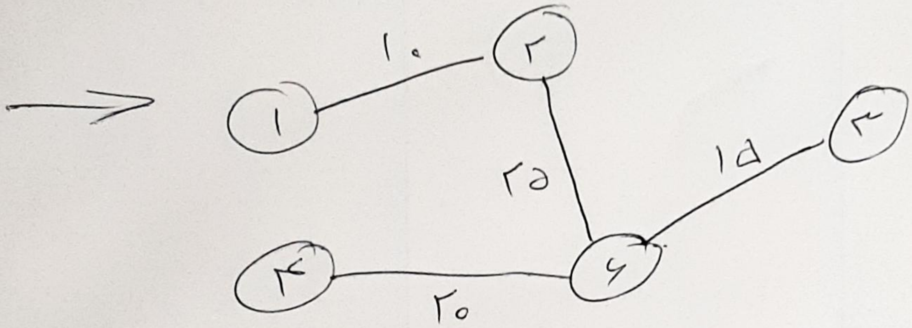
پریم:



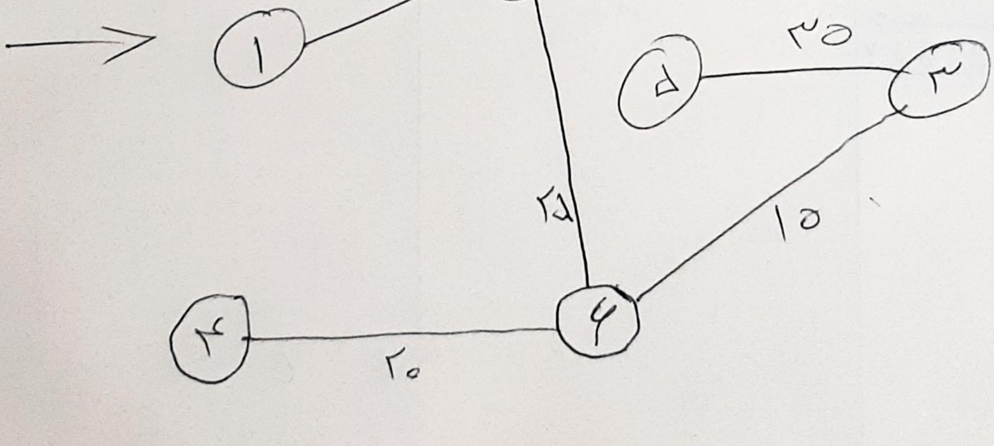
۱
۱
۱۰
۲



۱
۱۰
۲
۲۵
۶
۱
۱۰
۲
۲۵
۶
۱۵
۳



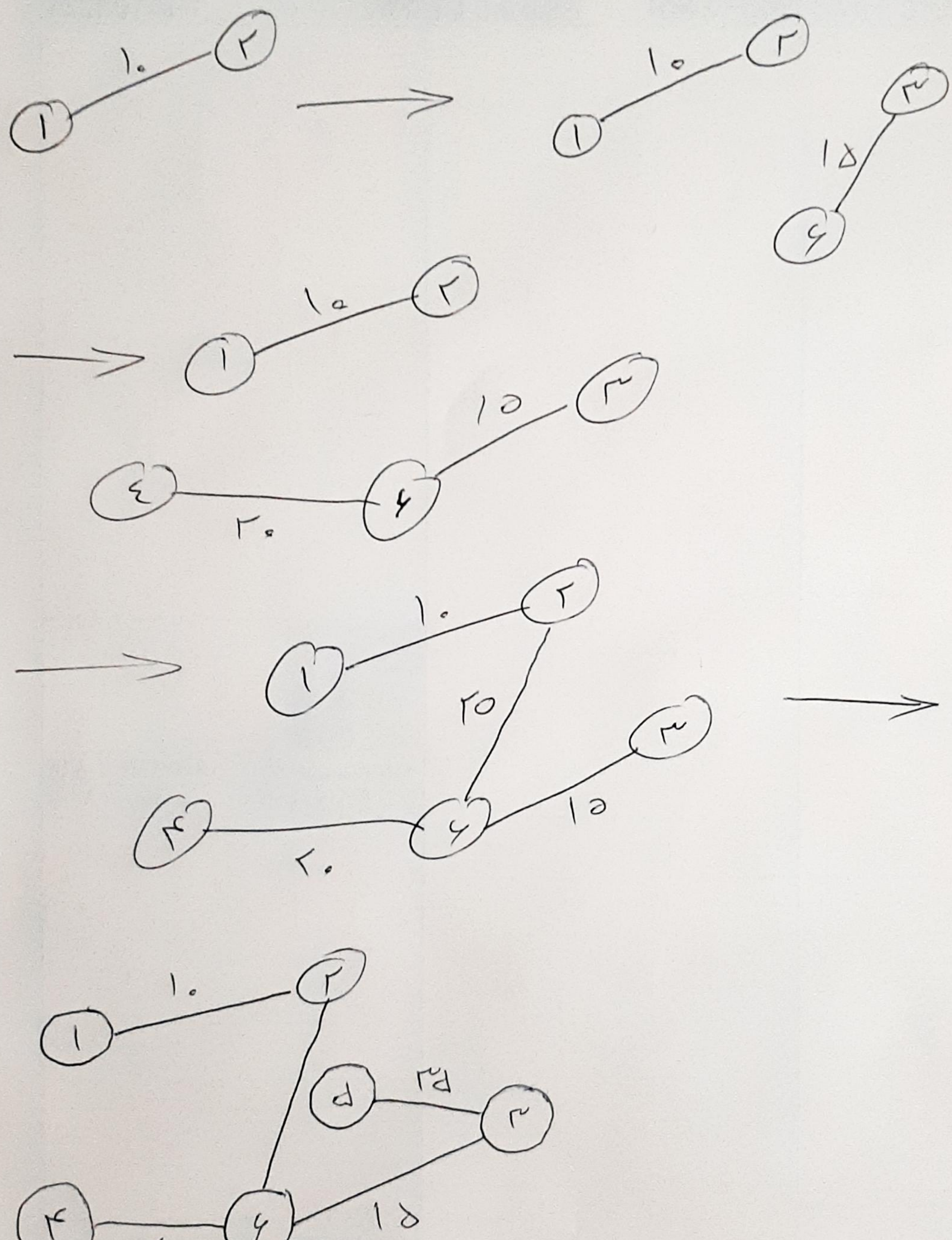
۱
۱۰
۲
۲۵
۶
۱۵
۳
۴
۲۰



۱
۱۰
۲
۲۵
۶
۱۵
۳
۳۵
۵
۴
۲۰

کراسکال :

۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, ۴۰, ۴۵, ۵۰

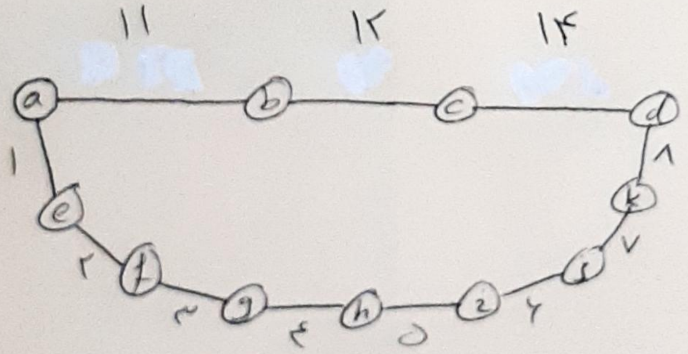


۴ـ یک صف دو طرفه را در نظر می گیریم. با اعمال BFS یال با وزن صفر را به جلوی صف و یال با وزن ۱ (غیر صفر) را به پشت صف push می کنیم.

تنها در صورتی که کوتاه ترین فاصله از راس توسط راس قبلی آزاد شده باشد به صف push می شود. در صورتی یک راس از میان رئوس pop می شود که کمینه وزن را در میان بقیه رئوس داشته باشد. اگر یک راس با وزن ۰ مجاور آن داشته باشیم، راس مجاور نیز همان فاصله را دارد. اگر یک راس با وزن ۱ مجاور آن باشد، این راس ماکسیمم فاصله را از آن دارد نسبت به سایر رئوس در صف دو طرفه.

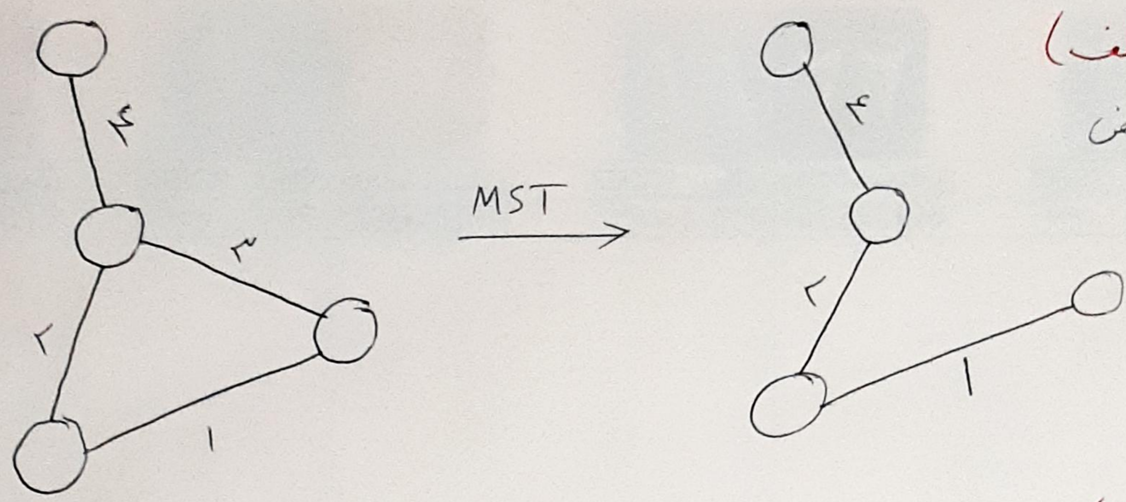
۵- الف) فرض خلف می کنیم که T (درخت پوشای کمینه قبل از اضافه کردن وزن یال ها) MST برای گراف نیست (G). فرض می کنیم T′، یک MST برای G است (که $T' \neq T$). فرض کنید یک برش (R,S) از G است و T و T′ به ترتیب دقیقا یک یال e و e′ که برش را قطع می کنند دارند. اگر $e \neq e'$ باشد و وزن e′ کمتر از e باشد، جابه جا کردن e با e′ به یک درخت پوشا با وزن کم تر از T می رسیم. از آن جا که همه یال ها وزن آن ها یک واحد افزایش یافته است، ترتیب وزن یال ها حفظ می شود. و این با فرض خلف تناقض دارد که نتیجه می گیریم MST باقی می ماند.

۵- ب) مثال نقض زیر را در نظر بگیرید.



در این گراف کوتاه ترین مسیر از a به d طولش ۳۶ است (مسیر aefghijkd) اما بعد از اضافه شدن ۱ واحد به همه یال ها کوتاه ترین مسیر abcd است. (مسیر abcd طولش ۴۰ می شود در حالی که مسیر aefghijkd طولش ۴۴ می شود)

۶ـ الف)
مثال نقض



۶ـ ب)
برهان. با حذف آن یال (سنگین ترین) راس های دو سر آن حذف نمی شوند، چون یال در یک دور قرار دارد. در نتیجه همبندی همچنان برقرار است؛ در نتیجه این یال حتما در MST نخواهد بود.

۶ـ ج) الزاما اینگونه نیست. برای مثال اگر تمام یال ها وزن برابر داشته باشند و دور بسازند، یال با وزن کمترین حتما در MST قرار ندارد. اما اگر فرض کنیم که وزن یال ها متمایز است این گزاره درست است و طبق الگوریتم کروسکال اولین یالی است که به MST اضافه می شود.

۶ـ د) فرض می کنیم اینگونه نباشد. یعنی مسیری وجود داشته باشد (در MST) که یالی با وزن بزرگتر از ۲ داشته باشد. اگر مسیر قبلی را با مسیر فعلی جایگزین کنیم مجموع وزن یال های MST کاهش می یابد. پس MST نبوده است و در نتیجه فرض نادرست است.