



## طراحی الگوریتم - تکلیف سوم

موعد تحویل ۳ اردیبهشت ۱۴۰۰

پیش از حل سوالات به موارد زیر دقت کنید:

- پاسخ تکلیف را به صورت یک فایل PDF آماده کنید و با نام HW3\_{Student Number} در سامانه آپلود کنید.
- در تحویل تکالیف به زمان مجاز تعیین شده دقت نمایید. موعد تکالیف قابل تمدید نمی باشند.
- در صورتی که مجموع تاخیر کل تکالیف شما کمتر از ۲۴ ساعت باشد نمره‌ای از شما کسر نمی‌گردد. در غیر این صورت به ازای هر روز تاخیر درصدی از نمره تکلیف شما کسر می‌گردد.
- پاسخ تکالیف را حتما در سامانه آپلود کنید و از ارسال تکالیف به ایمیل یا تلگرام اکیدا خودداری نمایید.
- در صورت وجود شباهت غیر قابل اغماض نمره‌ای به سوال تعلق نمی‌گیرد.
- در صورت وجود هرگونه ابهام می‌توانید در گروه تلگرام یا گروه اسکایپ سوالات خود را مطرح کنید.
- از طریق ایمیل زیر می‌توانید با TA های مربوط به این تکلیف در ارتباط باشید.

– ka12121376@gmail.com

– Kazemimaryam1998@gmail.com

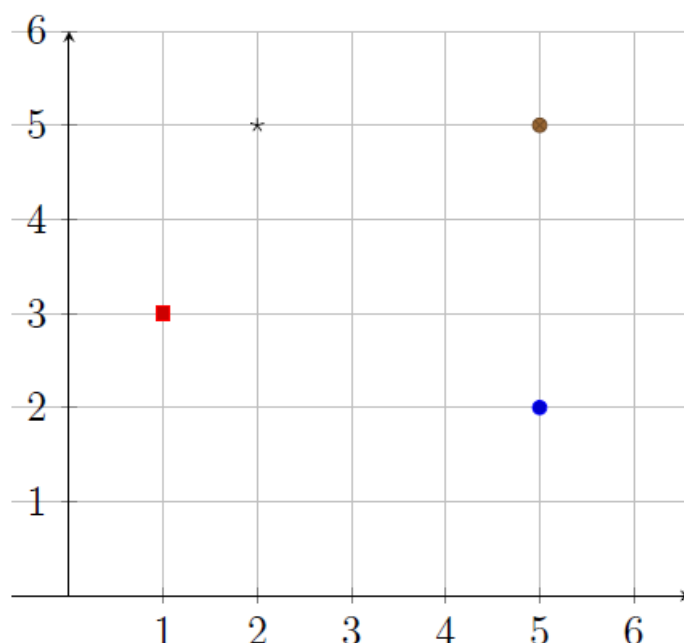
سوال ۱. (۱۵ نمره) در یک مزرعه، گاوی وجود دارد که می‌تواند  $n$  کیلو علف از دو نوع (یونجه و شبدر) را بخورد. این گاو نمی‌تواند بیشتر از  $m$  کیلو از یک نوع بخورد و حتماً باید جنس علفش را عوض کند! اما فقط می‌تواند  $k$  بار جنس علفش را عوض کند. گاو ابتدا با یونجه شروع می‌کند. با استفاده از برنامه‌ریزی پویا مشخص کنید که این گاو به چند روش می‌تواند  $n$  کیلو علف را بخورد؟

سوال ۲. (۲۰ نمره) بر روی یک رشته به طول  $n$ ، با استفاده از برنامه‌ریزی پویا الگوریتمی ارائه دهید که طول بزرگترین زیر رشته متقارن آن را محاسبه کند.

زیر رشته متقارن، رشته‌ای است که از حذف کردن تعدادی از عناصر رشته‌ی اصلی به دست می‌آید و متقارن نیز هست (توالی رشته اصلی باید حفظ شود). برای مثال برای رشته‌ی BBABCBCAB خروجی الگوریتم شما باید ۷ باشد چون BACBCAB بزرگترین زیر رشته متقارن آن است. زیر رشته‌های متقارن دیگری مانند BBBB و BBCBB نیز وجود دارد که بزرگترین نیستند.

سوال ۳. (۲۵ نمره) دو تاکسی در مبدا مختصات در فضای  $\mathcal{R}^2$  و  $n$  نقطه‌ی  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  را در اختیار داریم که هر کدام نماینده یک درخواست برای تاکسی هستند. مختصات هر نقطه عددی صحیح است و تاکسی‌ها فقط روی خطوط مشبک می‌توانند حرکت کنند. شما باید کوتاه‌ترین گذری را بیابید که دو تاکسی می‌توانند به کمک آن، به این درخواست‌ها به ترتیب جواب دهند.

منظور از کوتاه‌ترین گذر، کمینه مجموع مسافت طی شده توسط این دو تاکسی است. «به ترتیب جواب دادن» یعنی اگر یک تاکسی به درخواست نقطه  $p_i$  زودتر از  $p_j$  جواب داد، حتماً  $i < j$  باشد. الگوریتمی از  $O(n^2)$  برای یافتن این گذر طراحی کنید.



سوال ۴. (۲۰ نمره) در رودخانه زاینده رود  $n$  نقطه وجود دارد که می‌توان از آنها قایق اجاره کرد. فرض کنید این نقاط در راستای رودخانه به ترتیب از ۱ تا  $n$  شماره گذاری شده‌اند. همچنین فرض کنید هزینه اجاره کردن قایق از نقطه‌ی  $i$  و رفتن تا نقطه‌ی  $j$  برابر  $a_{ij}$  باشد. با استفاده از برنامه‌ریزی پویا روشی ارائه دهید که با اجاره کردن تعدادی قایق و با کمترین هزینه از نقطه ۱ به نقطه  $n$  برسیم.

سوال ۵. (۲۰ نمره) در یک دنباله از اعداد نامرتب، «مقدار نظیر» یک زیردنباله عبارت است از حاصل ضرب طول زیردنباله در کوچک ترین عضو زیردنباله. برای یک دنباله دلخواه، زیردنباله‌ی متوالی‌ای را بیابید که مقدار نظیر آن، از همه‌ی زیردنباله‌های متوالی دیگر بیشتر باشد (با استفاده از برنامه‌ریزی پویا).

مثال: در دنباله‌ی  $\{6, 1, 5, 4, 5, 2, 6\}$  زیر دنباله‌ی متوالی  $\{5, 4, 5\}$  بیشترین مقدار نظیر را دارد. این مقدار برابر است با ۱۲.

سوال ۶. (۱۵ نمره، اختیاری) قطاری در یک ایستگاه آماده جابه‌جایی تعدادی ماشین است. اما در این قطار ماشین‌ها باید به صورت مرتب (از نظر وزن) قرار بگیرند. همانطور که میدانید در قطار فضا محدود است به همین دلیل ماشین‌هایی که به ایستگاه آورده می‌شوند، باید یا به قطار اضافه شوند یا اصلاً وارد قطار نشوند. در ابتدا ما لیستی از وزن  $n$  ماشین، به ترتیب وارد شدن به ایستگاه داریم. الگوریتمی ارائه دهید که حداکثر تعداد ماشینی که میتوانیم وارد قطار کنیم را پیدا کند. مثلاً به ازای لیستی از ماشین‌ها به وزن‌های  $3, 2, 1, 4, 3 \rightarrow$ ، می‌توان ماشین‌های به وزن ۱، ۲ و ۳ را داخل قطار قرار داد. پس جواب برابر ۳ است.