علیرضا ابرفروش - ۹۸۱۶۶۰۳

سوال ۱.

آ) به غیر از بلاک هایی که حلقه دارند، سایر خطوط در $O(1)$ انجام می‌شوند.
پیچیدگی حلقه ها را محاسبه می‌کنیم.

پیچیدگی ناشی از حلقه ۳ $= O(\log_3 n) = O(\log n)$

پیچیدگی ناشی از حلقه ۴ و ۵ $= O(0 + 2 + 4 + \dots + 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor) = O(2 + 4 + \dots + 2(\frac{m}{2}))$

$$= O((m+2)(\frac{m}{2})(\frac{1}{2})) = O(m^2)$$

$\Longrightarrow$ پیچیدگی کل $= O((\log n) m^2)$

ب) همانند قسمت قبل، به غیر از بلاک شامل حلقه سایر خطوط در $O(1)$ انجام می‌شوند. اما پیچیدگی حلقه را به شکل زیر حساب می‌کنیم:

$1 << i \equiv 2^i$ پیچیدگی تابع $f(p,q) = O((\log p) q^2)$

پیچیدگی کل $= \sum_{i=0}^{a-1} O((\log 2^i) i^2) = \sum_{i=0}^{a-1} O(i^3 \log 2)$

$$= (\log 2)(\sum_{i=0}^{a-1} O(i^3)) = (\log 2) O(0^3 + 1^3 + \dots + (a-1)^3)$$

$$\overset{*}{=} O((0 + 1 + \dots + (a-1))^2) = O((\frac{a^2 - a}{2})^2) = O(a^4)$$

$*$ $P(k)$: $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + \dots + k)^2$

$P(1)$ بدیهی

$P(k)$ فرض درست

حکم استقرا $P(k+1)$: $1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + \dots + k)^2 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \dots + (1+k))^2$

سوال ۲

	$f(x)$	$g(x)$	1: O	2: o	3: ω	4: Ω	5: Θ
A	x^k	c^x	T	T	F	F	F
B	2^x	$2^{\frac{x}{2}}$	F	F	T	T	F
C	$\log x!$	$\log x^x$	T	T	F	F	F
D	2^x	2^{x-2}	T	F	F	T	T
E	$x2^x$	3^x	T	T	F	F	F

A: به ازای k, c ثابت داریم: رشد تابع نمایی بیشتر است.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{c^x} = 0$$

$$\iff f(x) = o(g(x)) \implies f(x) = O(g(x))$$

:B

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^x} = \lim_{x\to\infty} 2^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x = 0$$

$$\iff f(x) = \omega(g(x)) \implies f(x) = \Omega(g(x))$$

:C

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x!}{\log x^x} \simeq \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1+\frac{1}{12x}\right)\right)}{\log x^x}$$

طبق تقریب استرلینگ

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log\sqrt{2\pi x} + \log\left(\frac{x}{e}\right)^x + \log\left(1+\frac{1}{12x}\right)}{\log x^x} = 0$$

$$\iff f(x) = o(g(x)) \implies f(x) = O(g(x))$$

D:

$$۲^x = \Theta\left(\frac{۱}{۴}۲^x\right) \implies ۲^x = \Theta(۲^{x-۲})$$

$$\iff ۲^x = O(۲^{x-۲}) = \Omega(۲^{x-۲})$$

E:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x۲^x}{۳^x} = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{۲}{۳}\right)^x = ۰$$

$$\iff x۲^x = o(۳^x) \implies x۲^x = O(۳^x)$$

سوال ۳.

آ) طبق تعریف داریم:

و مثبت

$$f(n)=O(g(n)) \iff \exists c, n_0 \mid 0\le f(n)\le cg(n),\ n\ge n_0$$

پس برای اثبات درستی $n=O(n\log n)$ کافی است یک c و یک n_0 ارائه دهیم. فرض می‌کنیم: $c=1$ و $n_0=k$ (k در اینجا مبنای لگاریتم است که در ریاضیات این نوشتار $k=10$ و در علوم کامپیوتر $k=2$ می‌باشد). پس با $c=1$ و $n_0=2$ داریم:

$$0\le n\le n\log n \iff n\ge 0,\ n-n\log n\le 0$$

به ازای $n\ge n_0$

$$\iff n(1-\log n)\le 0 \iff \log n\ge 1$$

$$\iff n\ge 2^1=n_0 \iff n_0=2$$

پس چنین c و n_0 ای وجود دارند. درنتیجه گزاره درست است.

ب) طبق فرض:

و مثبت

$$f(n)=O(g(n)) \iff \exists c, n_0 \mid 0\le f(n)\le cg(n),\ n\ge n_0$$

$$f(n)\le cg(n) \xrightarrow{f(n),\,g(n)\ge 0} \ \iff 2^{f(n)}\le 2^{cg(n)},\ n\ge n_0$$

$$h(n):=2^{f(n)},\quad k(n):=2^{g(n)}$$

$$\iff \exists c', n_0' \mid 0\le h(n)\le c'k(n),\ n\ge n_0'$$

$$\iff 0\le h(n)\le 2^c k(n),\ n\ge n_0 \iff \begin{matrix} c'=2^c \\ n_0'=n \end{matrix}$$

$$\iff h(n)=O(k(n)) \iff 2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$$

ج) مسئله را به دو حالت زیر افراز می کنیم.

۱- عددی مانند k در دامنهٔ f و g وجود داشته باشد که به ازای مقادیر موجود در دامنهٔ f و g و بزرگتر یا مساوی k، مقادیر توابع مثبت باشند. به عبارتی دیگر،

$$\exists \alpha \in D_f \cap D_g \mid \forall n \geq \alpha \wedge n \in D_f \cap D_g \,;\, f(n) \geq 0 \wedge g(n) \geq 0$$

۲- چنین عددی وجود نداشته باشد.

در حالت اول داریم:

$$h(n) := f(n) + g(n) \quad , \quad k(n) = \max\{f(n), g(n)\}$$

طبق تعریف داریم:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \overset{\text{مثبت}}{\Longleftrightarrow} \exists c_1, c_2, n_0 \mid 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

به ازای $n \geq n_0$

با توجه به حالت اول و $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ و $n_0 = \alpha$ داریم:

$$0 \leq c_1 k(n) \leq h(n) \leq c_2 k(n) \quad , n \geq n_0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$0 \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq 2\max\{f(n), g(n)\} \quad , n \geq \alpha$$

که بدیهی است. در نتیجه گزاره درست است در این حالت.

در حالت دوم چون چنین α ای وجود ندارد، در نتیجه با c_1 , c_2 , n_0 های مثبت نمی توان تابع $h(n)$ را ساندویچ کرد. در نتیجه در این حالت گزاره نادرست می باشد.

د) با توجه به تعریف داریم:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff \exists\, c_1, c_2, n_0 \mid 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$$

به ازای $n \geq n_0$

$$f(n) := 1 + c + \dots + c^n \quad , \quad g(n) := c^n$$

$$f(n) = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} \iff 0 \le c_1 c^n \le f(n) \le c_2 c^n$$

به ازای $n \geq n_0$

$$c > 1 \iff c - 1 > 0 \xrightarrow[\text{در } c-1]{\text{طرفین را}}$$

ضرب و پس با ۱ جمع می‌کنیم

$$(c-1) c_1 c^n + 1 \le c^{n+1} \le (c-1) c_2 c^n + 1$$

$$c_1 = \frac{1}{c-1} \quad , \quad c_2 = \frac{c}{c-1} \quad , \quad n_0 = \log_c \frac{1}{c-1}$$

در اینصورت داریم:

$$0 \le c^n + 1 \le c^{n+1} \le c^{n+1} + 1 \quad , \quad n \geq n_0$$

در نتیجه گزاره درست است.

سوال ۴.

آ)

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \theta(2\sqrt{n})$$

$$\Rightarrow a=7,\ b=2,\ f(n)=\theta(2\sqrt{n})$$

$$\left.\begin{array}{l} n^{\log_b a-\epsilon} = n^{\log_2 7-\epsilon} \\ \text{به ازای } \epsilon=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta(2\sqrt{n}) = n^{\log_2 7-\epsilon} \simeq n^{2.585}$$

طبق کیس اول قضیه اصلی (Master Theorem) چون $f(n)=O(\log_b a-\epsilon)$

آنگاه $T(n)=\Theta(n\log_b a)$ است که با توجه به خواص نماد θ

داریم $T(n)=O(n\log_b a)$ درنتیجه داریم:

$$T(n)=O(n^{\log_2 7})$$

ب)

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\log n$$

$$\Rightarrow a=4,\ b=2,\ f(n)=n^2\log n$$

$$\Rightarrow f(n)=\theta(n^2\log n) \Rightarrow$$

طبق کیس دوم قضیه اصلی چون $f(n)=\theta(n^2\log n)$ آنگاه داریم:

$$T(n)=\theta(n^2\log^{1+1} n)=\theta(n^2(\log n)^2)$$

$$\Rightarrow T(n)=O(n^2(\log n)^2)$$

سوال ۵

آ) در ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری وجود دارد. یعنی

$(AB)C = A(BC)$.

می خواهیم X^n را محاسبه کنیم.

$$X^n = (\underbrace{X.X.\cdots.X}_{n\ \text{تا}}) = (\underbrace{X.X\cdots X}_{\frac{n}{2}\ \text{تا}})(\underbrace{X.X\cdots X}_{\frac{n}{2}\ \text{تا}})$$

$$= [(\underbrace{X.X.\cdots.X}_{\frac{n}{4}\ \text{تا}})(\underbrace{X.X.\cdots.X}_{\frac{n}{4}\ \text{تا}})][(\underbrace{X.X.\cdots.X}_{\frac{n}{4}\ \text{تا}})(\underbrace{X.X\cdots X}_{\frac{n}{4}\ \text{تا}})]$$

$$= \cdots = (X.X)(X.X)\cdots(X.X)$$

به این ترتیب می توان حاصل X^n را به شکل زیر محاسبه کرد.

$$X^n \; \overbrace{((((X^2)^2)^2)^{\cdots})^2}^{\log n}$$

پس با تعداد $O(\log n)$ ضرب می توان X^n را محاسبه کرد.

توجه شود که حکم در صورتی که n توانی از ۲ نیز نباشد برقرار است.

در نهایت تعداد ضرب ها از مرتبه‌ی $O(\log n)$ خواهد بود.

ب)

در هر مرحله (که ماتریس به توان ۲ می‌رسد) اتفاق زیر می‌افتد:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+yz & xy+yw \\ zx+wz & zy+w^2 \end{bmatrix}$$

در صورتی که x و y و z و w، k-بیتی باشند برای انجام ضرب بالا $O(M(k))$ عملیات انجام می‌گیرد. x و y و z و w پس از هر بار به توان ۲ رسیدن طولشان تقریبا ۲ برابر می‌شود در نتیجه پس از انجام شدن ضرب تعداد کل عملیات انجام شده برابر است با:

$$M(1) + M(2) + M(4) + \dots + M(2^{\log n}) \leq (\log n) M(n)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{\log n} O(M(2^i)) = O(M(n)\log n)$$

ج) طبق فرض داریم

$$M(n) \geq 2M\left(\frac{n}{2}\right)$$

پس داریم:

$$M(1)$$

$$M(2) \geq 2M(1)$$

$$M(4) \geq 2M(2) \geq 4M(1)$$

$$\vdots$$

$$M(2^{\log n}) \geq \dots \geq 2^{\log n} M(1)$$

$$M(1)+M(2)+M(4)+\dots+M(2^{\log n}) \geq (2^0+2^1+\dots+2^{\log n})M(1)$$

$$= (2^{(\log n)+1}-1)M(1) = O(nM(1)) = O(M(n))$$