دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

عنوان: تکلیف دوم درس مبانی یادگیری ماشین (بخش تئوری)

نام و نام خانوادگی: علیرضا ابره فروش

شماره دانشجویی: ۹۸۱۶۶۰۳

نیم‌سال تحصیلی: پاییز ۱۴۰۱

مدرّس: دکتر مهران صفایانی

۱

۱.۱ الف

$$\theta = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مرز تصمیم $\theta^t x = 0$ است. پس داریم:

$$\begin{aligned} &\theta^t x = 0 \\ \Rightarrow\ & (3) \times (1) + (0) \times (x_1) + (-1) \times (x_2) = 0 \\ \Rightarrow\ & x_2 = 3 \end{aligned}$$

مرز تصمیم $x_2 = 3$ است.

۲.۱ ب

$$\theta = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

مرز تصمیم $\theta^t x = 0$ است. پس داریم:

$$\begin{aligned} &\theta^t x = 0 \\ \Rightarrow\ & (-2) \times (1) + (1) \times (x_1) + (1) \times (x_2) = 0 \\ \Rightarrow\ & x_2 = -x_1 + 2 \end{aligned}$$

مرز تصمیم $x_2 = -x_1 + 2$ است.

۳.۱ ج

؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟

۲

$$z = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{K-1} \end{bmatrix}, \sigma(z) = \begin{bmatrix} \frac{e^{z_0}}{\sum_{i=1}^{K-1} e^{z_i}} \\ \frac{e^{z_1}}{\sum_{i=1}^{K-1} e^{z_i}} \\ \vdots \\ \frac{e^{z_{K-1}}}{\sum_{i=1}^{K-1} e^{z_i}} \end{bmatrix}$$

$$\forall i \in \{0, \cdots, K-1\}$$

$$\sigma(z)_i = \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=0}^{K-1} e^{z_j}}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma(z)_0}{\partial z_0} & \cdots & \frac{\partial \sigma(z)_0}{\partial z_{K-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma(z)_{K-1}}{\partial z_0} & \cdots & \frac{\partial \sigma(z)_{K-1}}{\partial z_{K-1}} \end{bmatrix}$$

$$\forall i, j \in \{0, \cdots, K-1\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\ln\left(\sigma(z)_i\right)=\frac{1}{\sigma(z)_i}\cdot\frac{\partial\sigma(z)_i}{\partial z_j}$$
$$\Rightarrow J_{ij}=\frac{\partial\sigma(z)_i}{\partial z_j}=\sigma(z)_i\frac{\partial}{\partial z_j}\ln\left(\sigma(z)_i\right)=\sigma(z)_i\frac{\partial}{\partial z_j}\left(z_i-\ln\left(\sum_{k=0}^{K-1}e^{z_k}\right)\right)$$
$$=\sigma(z)_i\left[1\left\{i=j\right\}-\frac{1}{\sum_{k=0}^{K-1}e^{z_k}}\cdot e^{z_j}\right]=\sigma(z)_i\left[1\left\{i=j\right\}-\sigma(z)_j\right]$$
$$\Rightarrow J=\begin{bmatrix}\sigma(z)_0\left(1-\sigma(z)_0\right) & -\sigma(z)_0\sigma(z)_1 & \cdots & -\sigma(z)_0\sigma(z)_{K-1}\\ -\sigma(z)_1\sigma(z)_0 & \sigma(z)_1\left(1-\sigma(z)_1\right) & \cdots & -\sigma(z)_1\sigma(z)_{K-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\sigma(z)_{K-1}\sigma(z)_0 & -\sigma(z)_{K-1}\sigma(z)_1 & \cdots & \sigma(z)_{K-1}\left(1-\sigma(z)_{K-1}\right)\end{bmatrix}\mathcal{L}\left(y\right)=-\sum_{i=0}^{K-1}y_i\cdot\ln\left(\sigma\left(z\right)_i\right)$$
$$\Rightarrow\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z_j}=-\frac{\partial}{\partial z_j}\sum_{i=0}^{K-1}y_i\cdot\ln\left(\sigma\left(z\right)_i\right)$$
$$=-\sum_{i=0}^{K-1}y_i\cdot\frac{\partial}{\partial z_j}\ln\left(\sigma\left(z\right)_i\right)$$
$$=-\sum_{i=0}^{K-1}\frac{y_i}{\sigma(z)_i}\cdot\frac{\partial\sigma(z)_i}{\partial z_j}$$
$$=-\sum_{i=0}^{K-1}\frac{y_i}{\sigma(z)_i}\cdot\sigma\left(z\right)_i\cdot\left(1\left\{i=j\right\}-\sigma\left(z\right)_j\right)$$
$$=-\sum_{i=0}^{K-1}y_i\cdot\left(1\left\{i=j\right\}-\sigma\left(z\right)_j\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{K-1}y_i\cdot\sigma\left(z\right)_j-\sum_{i=1}^{K-1}y_i\cdot1\left\{i=j\right\}$$
$$=\sum_{i=0}^{K-1}y_i\cdot\sigma\left(z\right)_j-y_j$$
$$=\sigma\left(z\right)_j\cdot\sum_{i=0}^{K-1}y_i-y_j$$
$$=\sigma\left(z\right)_j-y_j$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}=\sigma\left(z\right)-y$$

۳

ستون A که به نسبت سایر ستون‌ها ضرایب بزرگتری دارد فاقد regularization term است. پس مربوط به تابع هزینه‌ی اول است.
ستون B فاقد ضرایب صفر است. می‌دانیم که امکان صفر شدن ضرایب در lasso regression موجود است. پس مربوط به تابع دوم است.
ستون C دارای ضرایب صفر است. می‌دانیم که در ridge regression هرگز ضرایب صفر نمی‌شوند. پس مربوط به تابع سوم است.

۴

$$p\left(x_k|\theta\right)=\sqrt{\theta}x_k^{\sqrt{\theta}-1}$$
$$p\left(X|\theta\right)=\prod_{k=1}^{n}p\left(x_k|\theta\right)$$

$$\ln\left(p\left(X|\theta\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(p\left(x_k|\theta\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\sqrt{\theta}x_k^{\sqrt{\theta}-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\theta\right)+\left(\sqrt{\theta}-1\right)\ln\left(x_k\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left(p\left(X|\theta\right)\right)=\frac{n}{2\theta}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)}{2\sqrt{\theta}}=0$$

$\theta = \left(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)} \right)^2$

۵

$p\left(\mu|X\right) \propto p\left(x_k|\mu\right).p\left(\mu\right)$

$p\left(\mu|X\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'^2}} e^{-\frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma'^2}}\right].\frac{1}{(2\pi)^{\frac{l}{2}}\sigma_\mu^2} e^{-\frac{\|\mu-\mu_0\|^2}{2\sigma_\mu^2}}$

$\ln\left(p\left(\mu|X\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[-\ln\left(\sqrt{2\pi\sigma'^2}\right) - \frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma'^2}\right] - \ln\left((2\pi)^{\frac{l}{2}}\sigma_\mu^2\right) - \frac{\|\mu-\mu_0\|^2}{2\sigma_\mu^2}$

$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left(p\left(\mu|X\right)\right) = 0$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k-\mu}{\sigma'^2} = \frac{\|\mu-\mu_0\|}{2\sigma_\mu^2}$

$\mu = \frac{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sigma'^2} + \frac{\mu}{2\sigma_\mu^2}}{n+\frac{1}{2\sigma_\mu^2}}$

۶

$\mathcal{L}(w)$: تابع هزینه

$\mathcal{L}_i(w)$: هزینه‌ی i training exampleام

w^t: وزن‌ها در گام tام

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_9 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} (X_1)^2 & X_1 & 1 \\ (X_2)^2 & X_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (X_9)^2 & X_9 & 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$\mathcal{L}_i(w^{(t)}) = \frac{1}{2}\left(y_i - X_i^T w^{(t)}\right)^2$

$\nabla\mathcal{L}_i(w^{(t)}) = -X_i\left(y_i - X_i^T w^{(t)}\right)$

$w^{(t+1)} = w^{(t)} - \alpha\nabla\mathcal{L}_i(w^{(t)})$

$$w^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \end{bmatrix} - 0.1 \times \left(- \begin{bmatrix} 35.38^2 \\ 35.38 \\ 1 \end{bmatrix} \left(2955.53 - \begin{bmatrix} 35.38^2 & 35.38 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \\ 0.00000000e+00 \end{bmatrix} \right) \right) =$$
$$\begin{bmatrix} 3.69956813e+05 \\ 1.04566651e+04 \\ 2.95553000e+02 \end{bmatrix}$$

$$w^{(2)} = \begin{bmatrix} 3.69956813e+05 \\ 1.04566651e+04 \\ 2.95553000e+02 \end{bmatrix} - 0.1 \times \left(- \begin{bmatrix} 15.32^2 \\ 15.32 \\ 1 \end{bmatrix} \left(560.30 - \begin{bmatrix} 15.32^2 & 15.32 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.69956813e+05 \\ 1.04566651e+04 \\ 2.95553000e+02 \end{bmatrix} \right) \right) =$$
$$\begin{bmatrix} -2.04129879e+09 \\ -1.33257738e+08 \\ -8.69867277e+06 \end{bmatrix}$$

$$w^{(3)} = \begin{bmatrix} -2.04129879e+09 \\ -1.33257738e+08 \\ -8.69867277e+06 \end{bmatrix} - 0.1 \times \left(- \begin{bmatrix} 11.74^2 \\ 11.74 \\ 1 \end{bmatrix} \left(334.32 - \begin{bmatrix} 11.74^2 & 11.74 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.04129879e+09 \\ -1.33257738e+08 \\ -8.69867277e+06 \end{bmatrix} \right) \right) =$$
$$\begin{bmatrix} 3.89738346e+12 \\ 3.32015359e+11 \\ 2.82833471e+10 \end{bmatrix}$$

$$w^{(4)} = \begin{bmatrix} 3.89738346e+12 \\ 3.32015359e+11 \\ 2.82833471e+10 \end{bmatrix} - 0.1 \times \left(- \begin{bmatrix} 19.05^2 \\ 19.05 \\ 1 \end{bmatrix} \left(864.44 - \begin{bmatrix} 19.05^2 & 19.05 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.89738346e+12 \\ 3.32015359e+11 \\ 2.82833471e+10 \end{bmatrix} \right) \right) =$$
$$\begin{bmatrix} -5.15545092e+16 \\ -2.70614602e+15 \\ -1.42044054e+14 \end{bmatrix}$$

$$w^{(5)} = \begin{bmatrix} -5.15545092e+16 \\ -2.70614602e+15 \\ -1.42044054e+14 \end{bmatrix} - 0.1 \times \left(- \begin{bmatrix} 26.85^2 \\ 26.85 \\ 1 \end{bmatrix} \left(1709.09 - \begin{bmatrix} 26.85^2 & 26.85 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.15545092e+16 \\ -2.70614602e+15 \\ -1.42044054e+14 \end{bmatrix} \right) \right) =$$
$$\begin{bmatrix} 2.68463555e+21 \\ 9.99856406e+19 \\ 3.72381873e+18 \end{bmatrix}$$

$$w^{(6)} = \begin{bmatrix} 2.68463555e+21 \\ 9.99856406e+19 \\ 3.72381873e+18 \end{bmatrix} - 0.1 \times \left(-\begin{bmatrix} 39.45^2 \\ 39.45 \\ 1 \end{bmatrix} \left(3670.48 - \begin{bmatrix} 39.45^2 & 39.45 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.68463555e+21 \\ 9.99856406e+19 \\ 3.72381873e+18 \end{bmatrix} \right) \right) =$$

$$\begin{bmatrix} -6.50851298e+26 \\ -1.64980998e+25 \\ -4.18201594e+23 \end{bmatrix}$$

$$w^{(7)} = \begin{bmatrix} -6.50851298e+26 \\ -1.64980998e+25 \\ -4.18201594e+23 \end{bmatrix} - 0.1 \times \left(-\begin{bmatrix} 30.51^2 \\ 30.51 \\ 1 \end{bmatrix} \left(2202.93 - \begin{bmatrix} 30.51^2 & 30.51 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6.50851298e+26 \\ -1.64980998e+25 \\ -4.18201594e+23 \end{bmatrix} \right) \right) =$$

$$\begin{bmatrix} 5.64425427e+31 \\ 1.84997346e+30 \\ 6.06351097e+28 \end{bmatrix}$$

$$w^{(8)} = \begin{bmatrix} 5.64425427e+31 \\ 1.84997346e+30 \\ 6.06351097e+28 \end{bmatrix} - 0.1 \times \left(-\begin{bmatrix} 3.98^2 \\ 3.98 \\ 1 \end{bmatrix} \left(13.08 - \begin{bmatrix} 30.51^2 & 30.51 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.64425427e+31 \\ 1.84997346e+30 \\ 6.06351097e+28 \end{bmatrix} \right) \right) =$$

$$\begin{bmatrix} -1.37156316e+33 \\ -3.56945428e+32 \\ -9.00889632e+31 \end{bmatrix}$$

$$w^{(9)} = \begin{bmatrix} -1.37156316e+33 \\ -3.56945428e+32 \\ -9.00889632e+31 \end{bmatrix} - 0.1 \times \left(-\begin{bmatrix} 0.29^2 \\ 0.29 \\ 1 \end{bmatrix} \left(2.28 - \begin{bmatrix} 0.29^2 & 0.29 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.37156316e+33 \\ -3.56945428e+32 \\ -9.00889632e+31 \end{bmatrix} \right) \right) =$$

$$\begin{bmatrix} -1.36896487e+33 \\ -3.47985832e+32 \\ -5.91938034e+31 \end{bmatrix}$$

در هر گام از بین training exampleها یکی را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. این کار را به تعداد training exampleها تکرار می‌کنیم تا کل داده‌ها توسط مدل دیده شوند.

منابع