



## طراحی الگوریتم - تکلیف چهارم

موعد تحویل ۳۱ اردیبهشت ۱۴۰۰

پیش از حل سوالات به موارد زیر دقت کنید:

- پاسخ تکلیف را به صورت یک فایل PDF آماده کنید و با نام HW4\_NAME\_STDNUM.pdf در سامانه آپلود کنید. (به جای NAME، فقط نام خانوادگی و به جای STDNUM، شماره دانشجویی قرار بگیرد و حتما رعایت شود!)
- سوالات عملی تکلیف چهارم پس از پایان ددلاین سوالات عملی سری قبل در کلاس کوثرای درس قابل دسترسی خواهند بود.
- در تحویل تکالیف به زمان مجاز تعیین شده دقت نمایید. موعد تکالیف قابل تمدید نمی باشند.
- در صورتی که مجموع تاخیر کل تکالیف شما کمتر از ۲۴ ساعت باشد نمره‌ای از شما کسر نمی‌گردد. در غیر این صورت به ازای هر روز تاخیر درصدی از نمره تکالیف شما کسر می‌گردد.
- پاسخ تکالیف را حتما در سامانه آپلود کنید و از ارسال تکالیف به ایمیل یا تلگرام اکیدا خودداری نمایید.
- در صورت وجود شباهت واضح، نمره‌ای به سوال تعلق نمی‌گیرد.
- در صورت وجود هرگونه ابهام می‌توانید در گروه تلگرام یا گروه اسکایپ سوالات خود را مطرح کنید.
- از طریق ایمیل‌های زیر می‌توانید با TAهای مربوط به این تکلیف در ارتباط باشید.

– سوال ۱ تا ۳: mnaeimi+algo@ec.iut.ac.ir

– سوال ۴ تا ۶: kazemimaryam1998@gmail.com

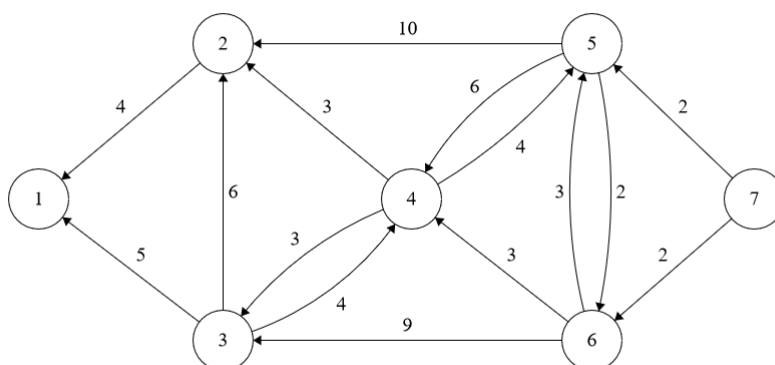
سوال ۱. (۱۵ نمره)  $m$  نوع اسکناس ( $d_i \in \mathbb{N}$ ) به صورت  $d_1 < d_2 < \dots < d_m$  در اختیار داریم. فرض کنید از هر نوع اسکناس به هر تعداد لازم در اختیار داریم و همچنین  $d_1 = 1$ . الگوریتم برنامه ریزی پویا ارائه دهید که با دریافت آرایه‌ای از انواع اسکناس ها و مقدار  $n$ ، کمترین تعداد اسکناس لازم برای پرداخت این مقدار ( $n$ ) را به دست آورد. پیچیدگی زمانی الگوریتم خود را بررسی نمایید.

سوال ۲. (۲۰ نمره) در بعضی از خانه‌های یک صفحه بازی  $n \times m$ ، یک سکه قرار گرفته است. یک نمونه صفحه از این بازی به صورت آرایه  $n \times m$  در اختیار شما قرار می‌گیرد، مقدار آن در خانه‌های دارای سکه 1 و در خانه‌های خالی 0 می‌باشد. مهره شما در خانه بالا چپ (1, 1) صفحه قرار دارد و تنها می‌توانید به سمت راست یا به سمت پایین حرکت نمایید تا به خانه پایین راست ( $n, m$ ) برسید. یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا بنویسید که با دریافت یک نمونه آرایه از صفحه، حداکثر تعداد سکه‌ای که ممکن است در این نمونه بازی جمع‌آوری شود را محاسبه نماید.

سوال ۳. (۲۵ نمره) قصد جابه‌جایی یک محموله حساس را داریم که هربار باید حداکثر تا قبل از فاصله معینی ( $D$ ) مورد بازرسی قرار بگیرد. باید زیرمجموعه‌ای از گره‌ها را برای بازرسی در طول مسیر انتخاب نماییم. یک مسیر  $\langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \rangle$  به ما داده شده است که شامل  $n$  ایستگاه بازرسی است. هر گره (Node) یک ایستگاه بازرسی را نمایش می‌دهد. برای هر گره  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )، یک هزینه بازرسی  $c(v_i)$  معین شده است. همچنین می‌دانیم  $c(v_1) = c(v_n) = 0$ . به علاوه برای هر یال  $(v_i, v_{i+1})$  که  $(1 \leq i \leq n-1)$ ، فاصله  $d(v_i, v_{i+1})$  داده شده است که از مقدار معین  $D$  کمتر است.  $(\forall (1 \leq i \leq n-1) : d(v_i, v_{i+1}) \leq D)$  در هر مسیر، فاصله بین هر دو جفت گره  $v_i$  و  $v_j$  ( $i < j$ ) برابر است با مجموع فاصله یال‌ها در مسیر بین دو گره. یک زیرمجموعه انتخابی از گره‌ها به صورت  $V' \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ، «قابل قبول» خواهد بود اگر فاصله بین هر دو جفت گره متوالی در  $V' \cup \{v_1, v_n\}$  حداکثر برابر با  $D$  باشد. هزینه هر مسیر برابر است با مجموع هزینه بازرسی‌های گره‌های داخل  $V'$ . یک زیرمجموعه  $V^*$  از گره‌ها انتخابی بهینه است، اگر قابل قبول باشد و کمترین هزینه را در میان همه انتخاب‌های قابل قبول داشته باشد.

یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا ارائه دهید که هزینه انتخاب بهینه را محاسبه نماید. ارائه خود مجموعه گره‌های انتخابی لازم نیست. همچنین نیاز به اجرای الگوریتم خود را روی یک مثال نیست. پیچیدگی زمانی الگوریتم خود را نیز بررسی کنید.

سوال ۴. (۲۰ نمره) درخت کوتاه‌ترین مسیر از هر گره به گره ۱ برای گراف زیر را با استفاده از الگوریتم Bellman-Ford به دست آورید. جدول زیر را کامل کنید.



| i | $C_i^1$ | $C_i^2$ | $C_i^3$ | $C_i^4$ | $C_i^5$ | Shortest path arcs† |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------------------|
| 1 |         |         |         |         |         |                     |
| 2 |         |         |         |         |         |                     |
| 3 |         |         |         |         |         |                     |
| 4 |         |         |         |         |         |                     |
| 5 |         |         |         |         |         |                     |
| 6 |         |         |         |         |         |                     |
| 7 |         |         |         |         |         |                     |

سوال ۵. (۲۰ نمره) سینا و عماد تصمیم دارند که به صورت قاقچی به سفر بروند. در این نوع سفر،  $n$  قاقچی وجود دارد که با شماره های ۱ تا  $n$  مشخص شده‌اند. قاقچی ۱ و قاقچی  $n$ ، قاقچی‌های مبدا و مقصد هستند و هدف سینا و عماد، جابه‌جایی از قاقچی مبدا به قاقچی مقصد است. هزینه انتقال از قاقچی  $i$  به قاقچی  $j$  که در آن  $1 \leq i < j \leq n$  را با  $c_{ij}$  نشان می‌دهیم. دقت کنید که هر قاقچی تنها می‌تواند عماد و سینا را به یک قاقچی با شماره بزرگتر برساند. همچنین  $c_{ij}$  ها قاعده‌ی خاصی ندارند، مثلاً ممکن است که  $c_{24} = 10$  و  $c_{26} = 3$  باشد. یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا ارائه دهید تا کمترین هزینه‌ای را که عماد و سینا باید بپردازند را محاسبه کند. همچنین پیچیدگی زمانی این الگوریتم را بررسی کنید.

سوال ۶. (۲۵ نمره - اختیاری) کشوری فرضی  $n$  شهر دارد که میان هر دو شهر آن، دو جاده وجود دارد: جاده اول از شهر اول به شهر دوم و جاده دوم از شهر دوم به شهر اول. مدت زمانی که طول می کشد در مسیر شهر  $i$  به شهر  $j$  حرکت کنیم را با  $t_{ij}$  نشان می دهیم. دقت کنید که لزومی ندارد که  $t_{ij}$  با  $t_{ji}$  برابر باشد. هم چنین کوتاه ترین مسیر بین دو شهر  $i$  و  $j$  لزوماً مسیر مستقیم  $i, j$  نیست. این کشور درگیر یک جنگ می شود و طی آن تعدادی از شهرها به دست دشمن می افتد. در نتیجه راه ارتباطی شهرها از طریق شهرهایی که به دست دشمن می افتد، بسته می شود و ممکن است کوتاه ترین فاصله ی میان دو شهر نیز تغییر کند. مسئولین این کشور تمایل دارند بدانند پس از تصرف هر شهر، کوتاه ترین مسیر از شهر  $i$  به  $j$  (که تصرف نشده اند) چه مقدار خواهد بود. یک الگوریتم برنامه ریزی پویا از مرتبه زمانی  $O(n^3)$  ارائه دهید که با دریافت شهرهای تصرف شده و زمان بندی ها بتواند حداقل مدت زمان حرکت بین هر دو شهر دلخواه را محاسبه نماید.