



## طراحی الگوریتم - تکلیف اول

### سوال ۱

(آ)

$$T(n, m) = \mathcal{O} \left( \sum_{i=1}^{\log n} \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} \sum_{z=1}^{2j} 1 \right) = \mathcal{O} \left( \log n \times \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} 2j \right) = \mathcal{O} \left( \log n \times 2 \frac{\frac{m}{2} \left( \frac{m}{2} + 1 \right)}{2} \right) \\ = \mathcal{O} (\log n \times m^2)$$

(ب)

$$S(a) = \mathcal{O} \left( \sum_{i=0}^{a-1} T(2^i, i) \right) = \mathcal{O} \left( \sum_{i=0}^{a-1} \log 2^i \times i^2 \right) = \mathcal{O} \left( \sum_{i=0}^{a-1} i^3 \right) = \mathcal{O} \left( \frac{a^2(a+1)^2}{4} \right) = \mathcal{O} (a^4)$$

### سوال ۲

$f(x)$	$g(x)$	$\mathcal{O}$	$o$	$\omega$	$\Omega$	$\Theta$
$n^k$	$c^n$	✓	✓	✗	✗	✗
$2^n$	$2^{n/2}$	✗	✗	✓	✓	✗
$\log n!$	$\log n^n$	✓	✗	✗	✓	✓
$2^n$	$2^{n-2}$	✓	✗	✗	✓	✓
$n2^n$	$3^n$	✓	✓	✗	✗	✗

۱. سرعت رشد تابع نمایی از توابع چند جمله‌ای بیشتر است.

۲.

$$2^n = 2^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \geq c 2^{\frac{n}{2}}$$

۳.

$$\log n! \leq \log n^n$$

$$\log n! = \sum_{i=1}^n \log i \geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^n \log i \geq \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} = \frac{1}{2} (n(\log n - 1)) \geq cn \log n = c \log n^n$$

۴.

$$2^{n-2} = \frac{2^n}{4}$$

۵.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n2^n} = \infty$$

### سوال ۳

آ) درست است:  $n \leq n \log n$

ب) نادرست است:  $f(n) = n, g(n) = \frac{n}{2}$

ج) درست است.

$$f(n) + g(n) \leq 2 \max\{f(n), g(n)\}$$

$$f(n) + g(n) \geq \max\{f(n), g(n)\}$$

د)

$$1 + c + c^2 + \dots + c^n = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} = \Theta(c^n)$$

### سوال ۴

آ) طبق قضیه مستر متد داریم:

$$a = 7, b = 2, d = \frac{1}{2} \Rightarrow 7 > 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 7})$$

ب)

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2 \log n$$

$$= n^2 \log n + n^2 \log \frac{n}{2} + n^2 \log \frac{n}{4} + \dots + n^2 \log \frac{n}{n}$$

$$= n^2 \log^2 n - (0 + 1 + 2 + \dots + \log n)$$

$$= n^2 \log^2 n - \mathcal{O}(\log^2 n) = \mathcal{O}(n^2 \log^2 n)$$

## سوال ۵

الف)  $X^n$  را به صورت  $(X^{\frac{n}{2}})^2$  می‌نویسیم. حال ابتدا  $X^{\frac{n}{2}}$  را محاسبه می‌کنیم سپس آن را در خودش ضرب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(\log n)$$

دقت کنید که اگر  $n$  فرد باشد می‌توان  $X^n$  را به صورت  $X \left(X^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)^2$  نوشت.

ب) اعداد تولید شده حداکثر  $n$  بیت هستند. بنابراین می‌توان  $M(n)$  را یک کران بالا برای برای تعداد عملیات‌های لازم برای هر ضرب اسکالر در نظر گرفت.

برای ضرب دو ماتریس  $2 \times 2$  به ۸ عدد ضرب اسکالر نیاز داریم. و از آنجایی که کلا  $\mathcal{O}(\log n)$  ضرب ماتریسی داریم کلا  $\mathcal{O}(8M(n)\log n) = \mathcal{O}(M(n)\log n)$  عملیات لازم است.

ج)

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + M(n) = M(n) + M\left(\frac{n}{2}\right) + \cdots + M(1) = \mathcal{O}(M(n))$$