



طراحی الگوریتم - پاسخ نامه تکلیف ششم

پیش از حل سوالات به موارد زیر دقت کنید:

- پاسخ های صحیح و متفاوت با این پاسخ نامه نیز نمره سوال را دریافت می کنند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام می توانید در گروه تلگرام یا گروه اسکایپ سوالات خود را مطرح کنید.
- از طریق ایمیل زیر می توانید با TA مربوط به این تکلیف در ارتباط باشید.

– mnaeimi+algo@ec.iut.ac.ir

سوال ۱. (۵۰ نمره) برای هریک از موارد زیر درستی یا نادرستی را توضیح دهید.

- در صورتی که مسئله‌ای متعلق به کلاس NP باشد، هیچ الگوریتم در زمان چندجمله‌ای برای آن وجود ندارد. نادرست است زیرا مجموعه NP شامل P (قابل حل در زمان چندجمله‌ای) و NP-Complete است.
- مسئله تشخیص وجود دور در یک گراف بدون جهت، یک مسئله NP است. درست است زیرا تشخیص دور می‌تواند در زمان چندجمله‌ای با استفاده از DFS انجام شود.
- مسئله یافتن میانه‌ی آرایه را می‌توان به مسئله مرتب‌کردن آرایه کاهش داد. درست است زیرا پس از مرتب‌سازی آرایه می‌توانیم عنصر میانی را برگردانیم.
- مسئله یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو جفت گره یک گراف را، می‌توان به مسئله یافتن کوتاه‌ترین مسیر هریک از گره‌های گراف از یک گره منبع کاهش داد. درست است زیرا می‌توانیم الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر از یک منبع را برای هر انتخاب ممکن راس منبع در گراف ورودی فراخوانی می‌کنیم.
- مسئله مجموعه مستقل (Independent Set Problem)، هنگامی که ورودی گراف دوبخشی (Bipartite) است، در زمان چندجمله‌ای قابل حل می‌باشد. درست است زیرا هریک از بخش‌های گراف، مجموعه مستقل هستند و مسئله تشخیص بخش‌های گراف دوبخشی با استفاده از BFS در زمان چندجمله‌ای قابل حل می‌باشد.

سوال ۲. (۳۰ نمره) با فرض NP-Complete بودن مسئله Vertex Cover، نشان دهید مسئله Set Cover نیز NP-Complete است.

برای نشان دادن NPC بودن Set Cover، کافیست مسئله Vertex Cover را در زمان چندجمله‌ای به مسئله Set Cover کاهش دهیم. $(VertexCover \leq_P SetCover)$

با توجه به نمونه‌ای از Vertex Cover، ما نمونه‌ای از مسئله Set Cover را خواهیم ساخت. یک نمونه از Set Cover را به صورت مجموعه U از m عضو و تعداد n زیرمجموعه از U ($S_i \subseteq U$) که حاصل اجتماع همه آن‌ها برابر با مجموعه U می‌شود، تعریف می‌کنیم و به دنبال دسته‌ای از کمترین تعداد زیرمجموعه هستیم که اشتراک آنها برابر با مجموعه U شود. با فرض گراف $G = (V, E)$ ، در نظر بگیرید $U = E$. همچنین n زیرمجموعه U را به این صورت تعریف می‌کنیم که گره‌های G از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم و S_i را مجموعه یال‌هایی در نظر می‌گیریم که یک سوی آنها به گره i متصل است. توجه کنید که $\forall i; S_i \subseteq U$. این کاهش را می‌توان در زمانی انجام داد که در اندازه نمونه Vertex Cover چند جمله‌ای باشد.

سوال ۳. (۲۰ نمره) با فرض اینکه A و B به صورت زیر بوده و همچنین اعداد صحیح ورودی می‌توانند بسیار بزرگ باشند. یک کاهش در زمان چندجمله‌ای از A به B ارائه دهید.

- $A = \{x \mid x \text{ is an even positive integer}\}$
- $B = \{x \mid x \text{ is a positive integer that is divisible by } 3\}$

تابع $f(x)$ را که در زمان چندجمله‌ای قابل محاسبه است را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

- $f(x) = 1$ when x is odd
- $f(x) = 3$ when x is even

برای هر عدد صحیح مثبت x ، A است اگر و فقط اگر $f(x)$ در B باشد. یعنی x زوج است اگر و فقط اگر $f(x)$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

کاهش دیگری که می‌تواند درست باشد، $f(x) = 3 + (x \bmod 2)$ است.