پاسخ سؤال اول

الف

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

مراحل پاسخ تا هنگامی که اطمینان حاصل شود از تعداد درایه‌های محوری باید ادامه پیدا کند.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

چون در هر سطر یک درایه محوری داریم لذا معادله جواب دارد.

ب

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & k+2g \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & k+2g+h \end{array}\right]$$

برای اینکه درایهٔ محوری در ستون آخر قرار نگیرد باید $k+2g+h=0$ شود.

ج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \cdots$$

سؤال بی‌نهایت جواب دارد چراکه برای هر ماتریس بی‌نهایت حالت می‌توان در نظر گرفت و با اعمال row operation، داده‌ها را عوض کرد. هدف سؤال آشنایی دانشجو با روند معکوس می‌باشد

د (I) ماتریس ضرایب هنگامی سازگار است که ۱) در هر سطر آن لااقل یک درایه Pivot پس از تبدیل آن به اشلون کاهش‌یافته داشته باشد سپس در صورت نبود درایه Pivot در سطر آخر نمی‌توان در مورد سازگاری یا عدم سازگاری صحبت کرد

(II) ماتریس افزوده هنگامی سازگار است که ستون آخر دارای درایه محوری نباشد.

پاسخ سؤال دوم

الف غلط. ممکن است دو بردار ضریبی از هم باشند و خط را مدل کنند.

ب غلط. در ماتریس افزوده، ممکن است ستون آخر دارای درایه Pivot باشد.

ج غلط. ممکن است $Ax=0$ اصلاً دارای جواب نباشد (منظور جواب غیر بدیهی است)

د

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سوال دوم ۱

د) برای حل این قسمت مثال نقض در $\mathbb{R}^3$ می‌زنیم، فرض شود

$$A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,2,2)\}$$

این A یک مجموعه‌ی وابسته‌ی خطی است زیرا: $(0,2,2) = 2(0,1,0) + 2(0,0,1)$

اما $(1,0,0)$ را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی بقیه بردارها نوشت.

ه) فرض شود T تمام بردارها را به نقطه صفر نگاشت کند، در این صورت مجموعه بردارهای نگاشت شده مستقل خطی نخواهد بود. تنها یک طرف این گزاره برقرار است.

و) فرض کنیم $n = b$ در این صورت چون دستگاه به ازای b جواب دارد پس ستون‌های A مستقل خطی هستند و چون تعداد آن‌ها n تاست پس فضای $\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کنند.

ز) به برهان خلف فرض کنیم $S \cup \{v\}$ مستقل خطی نباشد و $\forall i,\ w_i \in S$ آن گاه:

$$\exists \alpha_i,\ \alpha_i \neq 0 \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n + \beta v = 0$$

حالا دو حالت پیش می‌آید اگر $\beta = 0$ باشد آن گاه:

$$\exists \alpha_i,\ \alpha_i \neq 0 \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n = 0$$

که این با مستقل خطی بودن S در تناقض است. زیرا توانستیم ترکیب خطی از بردارهای S را بسازیم که مساوی صفر باشد اما ضرایب آن‌ها صفر نباشد. پس در این حالت فرض خلف باطل و حکم درست است.

در حالت دیگر فرض کنیم که $\beta \neq 0$ آن گاه می‌نویسیم:

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n = -\beta v$$

در نتیجه:

$$v = \frac{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n}{-\beta}$$

پس از این‌ها نتیجه می‌شود $v \in span(S)$ آن گاه $v \notin (\mathbb{R}^n - span(S))$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خواهد بود. با فرض سوال در تناقض است. در حالیکه فرض خلف باطل و حکم درست است

۱۳) فرض کنید ماتریس ما ۱۲ سطر مقابل باشد [۱ ۱- ۱- ۱] در این صورت جواب غیر بدیهی داریم آ، تمامی مولفه های آن غیر صفر نیستند.

۱۴)

الف) $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$

اگر معادله ی بالا پاسخ غیر بدیهی داشته باشد، آنگاه بردارها وابسته خطی هستند.

$$x_1\begin{bmatrix}2\\-2\\4\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}4\\-6\\7\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-2\\2\\h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & -2 & 0\\-2 & -6 & 2 & 0\\4 & 7 & h & 0\end{bmatrix} \overset{①}{\sim} \begin{bmatrix}2 & 4 & -2 & 0\\0 & -2 & 0 & 0\\0 & -1 & h+4 & 0\end{bmatrix}$$

$$\overset{②}{\sim} \begin{bmatrix}2 & 4 & -2 & 0\\0 & -2 & 0 & 0\\0 & 0 & h+4 & 0\end{bmatrix}$$

① :: $\{R_2 = R_2 + R_1 ;\ R_3 = R_3 - 2R_1\}$

② :: $\{R_3 = R_3 - \frac{1}{2}R_2\}$

برای این که معادله ی بالا جواب غیر بدیهی داشته باشد باید حداقل یک متغیر آزاد داشته باشد و باید تمام درایه های سطر سوم برابر با صفر باشد.

$h+4=0 \Rightarrow h=-4$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

س ۱) مطابق قسمت الف،

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} , v_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ h \\ 3 \end{bmatrix}$$

اگر معادله‌ی فوق پاسخ غیربدیهی داشته باشد، آنگاه بردارها وابسته‌ی خطی هستند

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 9 \\ h \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 \\ -6 & 4 & h & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & h & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & h & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{6R_1+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & h+18 & 0 \end{bmatrix} \overset{-R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & h+18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2/5}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & h+18 & 0 \end{bmatrix} \overset{8R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+18 & 0 \end{bmatrix}$$

برای وجود پاسخ غیربدیهی باید حداقل یک متغیر آزاد داشته باشیم،
در این حالت باید تمام درایه‌های سطر سوم برابر صفر باشد

$$h + 18 = 0 \Rightarrow h = -18$$

ج)
$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

برای این که این ۳ بردار مستقل خطی باشند، در صورتی که این بردارها را ستون‌های ماتریسی مثل A در نظر بگیریم معادله $Ax=0$ باید تنها یک جواب بدیهی داشته باشد. در این صورت باید دقیقا ۳ نقطه‌ی محوری داشته باشد که در این صورت کل درایه‌های محوری f، c و a هستند. پس اگر این درایه‌ها غیرصفر باشند، این ۳ بردار مستقل خطی می‌شوند.

د)
$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 1 \end{bmatrix}$$

طبق قضیه‌ای بردارهای $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مستقل خطی هستند اگر هر کدام را نتوان به صورت ترکیب خطی بردارهای قبلی آن نوشت. در اینجا داریم:

$$v_1 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 1 \end{bmatrix}$$

مشخص است v_2 به صورت ضریبی از v_1 نیست زیرا مولفه سوم v_2 غیرصفر است و این یعنی نمی‌تواند ضریبی از v_1 باشد. همینطور v_3 نیز نمی‌تواند ترکیب خطی v_1 و v_2 باشد زیرا مولفه چهارم این دو بردار صفر است پس در هر ترکیب خطی این دو بردار این مولفه صفر خواهد بود و برابر با 1 نمی‌شود. پس این ۳ برای هر مقادیری از مجهولات مستقل خطی هستند.

پاسخ سؤال سوم

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

الف ۳ درایه محوری دارد

✓ چون سطر انتهایی، حاوی درایه محوری نیست ⇐ برای هر b، معادله $Ax = b$ پاسخ نخواهد داشت.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 5 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب)

✓ مجدداً مانند قسمت الف چون ۳ درایه محوری دارد، برای هر b، معادله $Ax = b$ پاسخ ندارد. فلذا تمام b ها را نمی‌توان برحسب ترکیب خطی ستون‌های B نوشت. ستون‌های B در فضای R^4 هستند پس نمی‌توانند R^3 را اسپن کنند. همچنین برای A هم همینگونه است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سوال یکم)

$x = p + tv$

اگر تبدیل خطی باشد، آنگاه:

$$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$$

تبدیل را بر x اعمال میکنیم:

$$T(x) = T(p + tv) = T(p) + tT(v)$$

از آن جایی که تبدیل خطی است و تصاویر بردارهای p و v بردار در $\mathbb{R}^n$ است. تبدیل فوق نشان دهنده‌ی خطی است که از نقطه $T(p)$ میگذرد و در جهت $T(v)$ است.

اگر $T(v) = 0$ باشد، خط به نقطه‌ی $T(p)$ تبدیل میشود.

بنابراین تبدیل خطی ذکر شده، این خط را یا به خط دیگر و یا به یک نقطه نگاشت میدهد

۶- اگر $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ مستقل خطی باشند ⇐

$$a_1V_1 + a_2V_2 + \dots + a_nV_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

حال باید ثابت کنیم که ضرایب b_1 تا b_n در معادله‌ی زیر، همگی ۰ اند:

$$b_1(V_1+V_2) + b_2(V_2+V_3) + \dots + b_{n-1}(V_{n-1}+V_n) + b_n(V_n+V_1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{(b_n+b_1)}V_1 + \underline{(b_1+b_2)}V_2 + \dots + \underline{(b_{n-2}+b_{n-1})}V_{n-1} + \underline{(b_{n-1}+b_n)}V_n = 0$$

حال چون می‌دانیم که V_1 تا V_n مستقل خطی اند، پس ضرایب مشخص شده در معادله بالا، همگی ۰ هستند ⇐

$$\begin{cases} b_1+b_2=0 \\ b_2+b_3=0 \\ \vdots \\ b_{n-1}+b_n=0 \\ b_1+b_n=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{ماتریس افزوده تشکیل می‌دهیم}]{\text{برای حل این دستگاه،}} \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

حال باید عملیات کاهش سطری انجام دهیم:

$$\sim \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

مشاهده می‌کنیم که در هر مرحله، سطر آخر یک درایه دارد که بین ۱ و ۱- تناوب می‌کند. حال چون داریم که n فرد می‌باشد $\Leftarrow$ تا درست آوردن فرم اشلون، $n-1$ بار که عددی زوج است، روی سطر آخر، عملیات صورت می‌گیرد $\Leftarrow$ در آخر، سطر آخر به فرم

$0\ 0\ 0 \dots 0\ 0\ 2 \mid 0$ در می‌آید. در نتیجه، تمام سطرها دارای درایه محوری خواهند بود و تنها جواب معادله، $b_1, b_2, \dots, b_n = 0$ خواهد بود، که این بدین معناست که بردارهای داده شده، مستقل خطی هستند.

(* اگر n زوج بود، سطر آخر تماماً ۰ می‌شد و دستگاه بیشمار جواب داشت $\Leftarrow$ ...)

می‌خواهیم ثابت کنیم که از استقلال خطی $\{v_1, v_1+v_2, \ldots, v_1+v_2+\cdots+v_n\}$ می‌توان نتیجه گرفت که خود v_1 تا v_n نیز مستقل خطی خواهند بود. تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} v_1 \to u_1 \\ v_1+v_2 \to u_2 \\ \vdots \\ v_1+v_2+\cdots+v_n \to u_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_1 \quad u_1 \\ v_2 \quad u_2-u_1 \\ \vdots \\ v_n \quad u_n-u_{n-1} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ می‌خواهیم ثابت کنیم که با استقلال خطی u_1 تا u_n، می‌توان نتیجه گرفت که u_1، u_2-u_1، $\ldots$، u_n-u_{n-1} مستقل خطی هستند.

همانند قسمت قبل، باید ثابت کنیم که تنها جواب معادله زیر $a_1, a_2, \ldots, a_n = 0$ است:

$$a_1(u_1) + a_2(u_2-u_1) + a_3(u_3-u_2) + \cdots + a_n(u_n-u_{n-1}) = 0$$

$$\sim (a_1-a_2)u_1 + (a_2-a_3)u_2 + \cdots + (a_{n-1}-a_n)u_{n-1} + a_n u_n = 0$$

$$\xRightarrow{\text{داریم}} \begin{cases} a_1-a_2=0 \\ a_2-a_3=0 \\ \vdots \\ a_{n-1}-a_n=0 \\ a_n=0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

$\Leftarrow$ تمام ضرایب a_i باید ۰ باشند $\Leftarrow$ این بردارها مستقل خطی هستند $\Leftarrow$ v_1 تا v_n مستقل خطی هستند.

۷- جواب این سؤال اندکی بدیهی است، چون یک تبدیل خطی باید مبدأ مختصات یعنی $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ را تغییر ندهد، اما تبدیل داده شده، $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ را به $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ تبدیل می‌کند ⇐ غیرخطی است.

نکته ⇐ ما می‌توانیم Rotation و Scale را به کمک تبدیل خطی انجام دهیم، اما تبدیل جابجایی (Transition) تبدیل خطی نیست و در نتیجه آن را نمی‌توان به کمک ماتریس تبدیل نمایش داد :(

و خوبی ماتریس تبدیل این بود که می‌توانستیم از طریق ضرب چند ماتریس تبدیل، آن‌ها را فقط با یک ماتریس بیان کنیم، اما دیگر transition از این خوبی برخوردار نخواهد بود و قابل ترکیب با تبدیل های خطی نخواهد بود.

البته با یک trick ای می‌توانیم transition را هم به کمک ماتریس بیان کنیم، که بعداً توی اسلایدها بهش می‌پردازیم :)