علیرضا اعزاز ۹۷۳۱۰۰۹

۱/ به سوالات زیر پاسخ دهید

الف/ بدون حل کامل حکم کنید آیا دستگاه معادلات زیر سازگار است یا خیر توضیح دهید.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_4 = -10 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_3 + 4x_4 = -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده‌ی دستگاه معادلات

Pivot

$$\xrightarrow{R_4 = R_4 + \frac{3}{2}R_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 = R_4 - \frac{2}{3}R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 = R_4 - R_3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 21 \end{bmatrix}$$

از آنجا که در فرم نردبانی دستگاه معادلات سطری به فرم [b ... 0 0 0] وجود ندارد پس دستگاه معادلات: سازگار «Consistant» است

ب/ معادله‌ای خطی برحسب h، k و g که منجر به سازگاری ماتریس زیر گردد.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & k+2g \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & k+2g+h \end{bmatrix}$$

برای آنکه دستگاه معادلات سازگار باشد نباید سطری به فرم [b ... 0 0] داشته باشد پس

«$k+2g+h=0$» باید برقرار باشد تا معادله سازگار شود.

■ ج / ماتریس بنویسید که دارای پاسخ $x_1=3$ و $x_2=-2$ و $x_3=-1$ (ماتریس افزوده، که فاقد درایه‌ی صفر باشد).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3+R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2+2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1=R_1+5R_3} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3=R_1+R_3} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 7 & 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

با انجام عملیات های سطری به یک ماتریس دلخواه با جواب های $x_1=3$ و $x_2=-2$ و $x_3=-1$ می رسیم

■ د / در چه صورت ماتریس ضرایب/افزوده 3×5 سازگار است؟

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

اگر در هر ردیف یک موقعیت محوری داشته باشیم آنگاه هیچگاه ردیفی به فرم $[0 \;\cdots\; 0 \;\; b]$ نخواهیم داشت و دستگاه همواره سازگار خواهد بود پس $\frac{3}{4}$ ستون محوری (به جز سمت راست ترین ستون) باید داشته باشیم (یا ۳ موقعیت محوری)

۲ / درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید (دلیل یا مثال نقض).

■ الف / تجسم هندسی $\text{Span}\{u, v\}$ که u و v هرکدام برداری در $\mathbb{R}^3$ هستند صفحه‌ای گذرا از مبدا است.

True ← با هر دو بردار می توان یک صفحه ساخت و چون $\vec{0}$ را به صورت ترکیب خطی u و v می توان نوشت این صفحه از مبدا هم عبور می کند

■ ب / معادله‌ی $[A \;\; b]$ به ازای تمامی b ها سازگار است اگر در تمامی سطرها درایه‌ی محوری موجود باشد.

در این ماتریس همه‌ی سطرها درایه‌ی محوری دارند اما دستگاه جواب ندارد
(اگر منظور فقط ماتریس ضرایب باشد جمله درست خواهد بود)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

False ← * توضیح مهم

■ ج / مجموعه جواب $Ax=b$ تمام بردارهایی هستند به فرم $w=p+v_h$ که v_h مجموعه جواب $Ax=0$ است

False ← قضیه‌ی شماره‌ی ۶ نیز همین مطلب را بیان می کند به شرطی که منظور جواب غیربدیهی باشد
(با شرط توضیح)

■ د / اگر $\forall i \;\; v_i \in \mathbb{R}^n$ در $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ یک مجموعه‌ی وابسته‌ی خطی باشد هر یک از v_i ها را می توان به صورت ترکیب خطی از بقیه‌ی اعضا نوشت.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

False ← وابسته‌ی خطی اند یعنی حداقل یک متغیر Free وجود دارد که نمی توان آنرا براساس دیگر متغیر ها نوشت

■ ه/ اگر T یک تبدیل خطی باشد، $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی است اگر و تنها اگر $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ مستقل خطی باشند True

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \dots + c_nv_n = 0 \xleftrightarrow[\text{مستقل خطی اند}]{v_n \text{ تا } v_1}$$

$$\longleftrightarrow T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = T(0)$$

$$\longleftrightarrow c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \dots + c_nT(v_n) = 0 \longleftrightarrow$$ $T(v_1), \dots, T(v_n)$ مستقل خطی اند

■ و/ فرض کنید A یک ماتریس $n*n$ و b یک بردار در R^n باشد. با این شرط که $Ax=b$ جواب یکتا دارد. در این صورت ستون های A فضای R^n را تولید می‌کنند (True)

Ax جواب یکتا دارد یعنی Ax n ستون محوری دارد پس چون ماتریس $n \times n$ است یعنی n سطر دارای موقعیت محوری اند پس ستون های A فضای R^n را span می‌کند (قضیه‌ی ۴)

■ ز/ اگر $S \subset R^n$ مستقل خطی باشد و $v \in (R^n - span(S))$ آنگاه $S \cup \{v\}$ مستقل خطی است

True

$v \in R^n - span(S) \longrightarrow$ v را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی اعضای S نوشت } v نفیش → هیچ عضوی از $S \cup \{v\}$ را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت پس مستقل خطی اند

S مستقل خطی است → هیچ عضوی را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت

■ ح/ اگر x یک جواب غیربدیهی $Ax=0$ باشد آنگاه تمام مولفه‌های x غیرصفر است

False اگر $Ax=0$ جواب غیربدیهی داشته باشد یعنی جواب معادل $x \neq \vec{0}$ دارد که حداقل یک مولفه غیرصفر دارد

مثلا $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

۳/ ماتریس های A و B داده شده اند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 = R_4 - 2R_1]{R_2 = R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & -6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 = R_4 + 3R_2]{R_3 = R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 , R_3]{\text{جابجایی}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■ الف/ چند سطر A دارای درایه‌ی محوری است؟ ۳ سطر

آیا معادله‌ی $Ax=b$ به ازای تمام b ها در R^4 جواب دارد؟ خیر چون سطر ۴ محوری ندارد

ب/

$$B=\begin{bmatrix}1&4&1&2\\0&1&3&-4\\0&2&6&7\\2&9&5&-7\end{bmatrix}\xrightarrow{R_4=R_4-2R_1}\begin{bmatrix}1&4&1&2\\0&1&3&-4\\0&2&6&7\\0&1&3&-11\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4=R_4-R_2]{R_3=R_3-2R_2}\begin{bmatrix}1&4&1&2\\0&1&3&-4\\0&0&0&15\\0&0&0&-7\end{bmatrix}$$

آیا b ها در R^4 را می‌توان به‌لزوم ترکیب خطی ستون‌های B نوشت. خیر چون باید ۴ موقعیت محوری می‌داشت

آیا ستون‌های B فضای R^3 را span می‌کنند

خیر چون ۳ موقعیت محوری داریم

در مورد A چطور؟ خیر

۴/ در موارد زیر مقدار h را طوری تعیین کنید که بردارها وابسته خطی باشند

الف/

$$\begin{bmatrix}2\\-2\\4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}4\\-6\\7\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}-2\\2\\h\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2&4&-2\\-2&-6&2\\4&7&h\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3=R_3-2R_1]{R_2=R_1+R_2}\begin{bmatrix}2&4&-2\\0&-2&0\\0&-1&h+4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3-\frac{R_2}{2}}\begin{bmatrix}2&4&-2\\0&-2&0\\0&0&h+4\end{bmatrix}\longrightarrow$$

برای آنکه وابسته خطی باشند x_3 باید Free باشد پس $h+4=0 \Rightarrow h=-4$

ب/

$$\begin{bmatrix}3\\-6\\1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}-6\\4\\3\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}9\\h\\3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}3&-6&9\\-6&4&h\\1&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\div 3}\begin{bmatrix}1&-2&3\\-6&4&h\\1&3&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3=R_3-R_1]{R_2=R_2+6R_1}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-8&h+18\\0&5&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3=R_3+\frac{5}{8}R_2}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-8&h+18\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow$$

h می‌تواند هر مقداری باشد

بیان کنید

درموارد زیر فرض کنید مجموعه ی بردارها مستقل خطی باشند در مورد $a, \dots, f$ چه می توان گفت

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

ج/ هر مقداری b, d, e

$a \neq 0$

$c \neq 0$

$f \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & d \\ 1 & c & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

د/ با توجه به این قطرها ۳ موقعیت محوری داریم متغیرها می توانند هر مقداری باشند

۵/ با در نظر داشتن $p, v \neq 0$ در فضای R^n خطی که از p در جهت v می گذرد با معادله $x = p + tv$ نمایش داده می شود. نشان دهید $T: R^n \to R^n$ این خط را به خطی دیگر یا نقطه تبدیل می کند

$$x = p + tv \longrightarrow T(x) = T(p+tv) = T(p) + tT(v)$$

$$\longrightarrow T(x) = at + b \text{ — خط یا نقطه است}$$

۶/ ثابت کنید اگر $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ بردارهای مستقل خطی باشند، در نتیجه $\{v_1+v_2, v_2+v_3, \dots, v_{n-1}+v_n, v_n+v_1\}$ به ازای n های فرد مستقل خطی اند

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0 \quad \forall c_i = 0$$

$$c_n v_1 + c_1 v_2 + c_2 v_3 + \dots + c_n v_n = 0$$

$$\xrightarrow{+} c_1(v_1+v_2) + c_2(v_2+v_3) + \dots + c_n(v_n+v_1) = 0 \quad \forall c_i = 0 \longrightarrow$$ مستقل خطی اند

اگر $\{v_1, v_1+v_2, \dots, v_1+v_2+\dots+v_n\}$ مستقل خطی باشند ثابت کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مستقل خطی اند

$$c_1 v_1 + c_2(v_1+v_2) + \dots + c_n(v_1+v_2+\dots+v_n) = 0 \quad \forall c_i = 0$$

$$\longrightarrow (c_1+c_2+\dots+c_n) v_1 + (c_2+\dots+c_n) v_2 + \dots + c_n v_n = 0 \quad \exists c_i \neq 0$$

$$\longrightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$ مستقل خطی اند

۱۷/ آیا می‌توان ماتریس تبدیل یافت که بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{۳\times۱}$ را به $\begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z+1 \end{bmatrix}_{۳\times۱}$ تبدیل کند؟ پاسخ خود را اثبات کنید.

خیر

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}_{۳\times۳} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{۳\times۱} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z+1 \end{bmatrix}$$

$\to ax + by + cz = x+1 \to b=0,\ c=0 \to a = \frac{1}{x}+1$

$\to dx + ey + fz = y+1 \to d=0,\ f=0 \to e = \frac{1}{y}+1$

$\to gx + hy + iz = z+1 \to g=0,\ h=0 \to i = \frac{1}{z}+1$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{z} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

با توجه به اینکه درایه‌های ماتریس تبدیل فقط باید اعداد ثابت باشند و نه متغیر

پس هیچ ماتریس تبدیلی وجود ندارد