HW5 Linar Algebra ۹۷۳۱۰۰۹ سید علیرضا اعزاز

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow \det(A-\lambda I)=۰$$

(۱)

$$(۳-\lambda)\big((۳-\lambda)(۳-\lambda)-۱\big)-۱\big((۳-\lambda)-۱\big)+۱\big(۱-(۳-\lambda)\big)$$

$$\rightarrow (۳-\lambda)(\lambda^۲-۶\lambda+۸) \quad +۲(\lambda-۲)=۰$$

$$\rightarrow -\lambda^۳+۹\lambda^۲-۲۶\lambda+۲۴+۲\lambda-۴=۰ \rightarrow -\lambda^۳+۹\lambda^۲-۲۴\lambda+۲۰=۰$$

$$\rightarrow (\lambda-۲)^۲(\lambda-۵)=۰$$

$$\lambda=۲ \rightarrow A-۲I=۰ : \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow x_۱=-x_۲-x_۳$$

$$\rightarrow v_۱=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad v_۲=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\lambda=۵ \rightarrow A-۵I=۰ : \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۲ & ۰ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{-۳}{۲} & \frac{۳}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} & \frac{-۳}{۲} & ۰ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_۲+x_۳=۰ \rightarrow x_۲=x_۳ \\ -۲x_۱+\cancel{x_۲}^{x_۳}+x_۳=۰ \rightarrow x_۱=x_۳ \end{cases} \rightarrow v_۳ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

می دانیم که $v_۳ \perp v_۱$ و $v_۳ \perp v_۲$ اما $v_۱$ و $v_۲$ برهم عمود نیستند و باید آنها را orthogonal کنیم

$$Z_۱=v_۱=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad Z_۲=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-۱}{۲} \\ \frac{-۱}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

حال باید $Z_۱$، $Z_۲$ و $v_۳$ را یکه کنیم

$$P=[Z_۱ \ Z_۲ \ Z_۳]=\begin{bmatrix} \frac{-۱}{\sqrt{۲}} & \frac{-۱}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ ۰ & \frac{-۱}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۲}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \rightarrow A=PDP^T=PDP^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{-۱}{\sqrt{۲}} & \frac{-۱}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ ۰ & \frac{-۱}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۲}{\sqrt{۶}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{-۱}{\sqrt{۲}} & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۶}} & \frac{-۱}{\sqrt{۶}} & \frac{۲}{\sqrt{۶}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \end{bmatrix}$$

نرم ماتریس

(۲)

$$\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = (\lambda_1 v_1)^T v_2 \overset{\text{مقدار ویژه}}{=\!=} (Bv_1)^T v_2$$

$$\overset{\text{ترانهاده}}{=\!=} (v_1^T B^T) v_2$$

$$\overset{B^T=B \text{ طبق فرض}}{=\!=} v_1^T (Bv_2) = v_1^T(\lambda_2 v_2)$$

$$\overset{\lambda \text{ مقدار ویژه}}{=\!=} \lambda_2 v_1^T v_2 = \lambda_2 v_1 \cdot v_2$$

$$\longrightarrow (\lambda_1-\lambda_2)(v_1 \cdot v_2) = 0 \xrightarrow[\lambda_1 \neq \lambda_2]{} v_1 \cdot v_2 = 0 \longrightarrow v_1 \perp v_2$$

---

(۳)

$$* \quad 10x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2 \qquad \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 & bx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + cx_1x_2 + bx_1x_2 + dx_2^2 \longrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b + c = -6 \xrightarrow{b=c} -3 \\ d = -3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$* \quad 20x_1^2 + 15x_1x_2 - 10x_2^2 = ax_1^2 + (c+b)x_1x_2 + dx_2 \longrightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b + c = 15 \xrightarrow{b=c} 7.5 \\ d = -10 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 7.5 \\ 7.5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$* \quad 5x_1^2 + 3x_1x_2 = ax_1^2 + (b+c)x_1x_2 + dx_2 \longrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b + c = 3 \xrightarrow{b=c} 1.5 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 1.5 \\ 1.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

---

(٤)

$$Q(x) = -3x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2 \qquad Max(Q(x)) = \lambda_{Max} \text{ طبق تعریف}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow -(3+\lambda)(5-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 16$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{1} = 1 \pm \sqrt{17} \longrightarrow Max(Q(x)) = 1 + \sqrt{17}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow A^TA=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۰ \\ -۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۳} \times \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ +۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times ۲} = \begin{bmatrix} ۲۰ & -۱۰ \\ -۱۰ & ۵ \end{bmatrix} = B$$

* ۵ *

$$\det(B-\lambda I)=۰ \longrightarrow (۲۰-\lambda)(۵-\lambda)-۱۰۰=۰ \longrightarrow -۲۵\lambda+\lambda^۲=۰ \longrightarrow \lambda(\lambda-۲۵)=۰$$

بزرگتره

$$\lambda_۱=۲۵ \longrightarrow B-\lambda_۱ I=۰ : \begin{bmatrix} -۵ & -۱۰ & ۰ \\ -۱۰ & -۲۰ & ۰ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -۵ & -۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{یکه}} \begin{bmatrix} \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} =$$

$$\lambda_۲=۰ \longrightarrow B-\lambda_۲ I=۰ : \begin{bmatrix} ۲۰ & -۱۰ & ۰ \\ -۱۰ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۲۰ & -۱۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{یکه}} \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix} = V_۲$$

$$\longrightarrow V=\begin{bmatrix} \frac{-۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}$$

* اکنون که ماتریس V را تشکیل دادیم باید ماتریس Σ را تشکیل دهیم

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \sqrt{۲۵} & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$$

* در آخرین قدم ماتریس U را بدست می آوریم

$$U_۱=\frac{Av_۱}{\sigma}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}\begin{bmatrix} \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}_{۲\times ۱}=\begin{bmatrix} \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۵}} \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow U_۲=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad (U_۲\cdot U_۱=۰,\ \|U_۲\|=۱)$$

$$U_۳=\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$U_۱$ و $U_۲$ و $U_۳$ یکه، متعامد و مستقل خطی اند

$$U=\begin{bmatrix} \frac{-۲}{\sqrt{۵}} & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۵}} & ۰ & \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix} \frac{-۲}{\sqrt{۵}} & ۰ & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۵}} & ۰ & \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{-۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}$$

الف

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 32 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 18 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 24 \\ -80x_1 - 65x_2 + M = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & M & \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 18 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ \hline -80 & -65 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(۶)

Basic Solution $\longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 32, \; x_4 = 18, \; x_5 = 24 \end{cases} \longrightarrow X = x_1 \longrightarrow \frac{32}{2} < \frac{18}{1} < \frac{24}{1}$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & M & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 & 0 & 8 \\ \hline 0 & -25 & 40 & 0 & 0 & 1 & 1280 \end{array}$$

$\longrightarrow$ Basic solution $\longrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 = 0 \\ x_1 = 16, \; x_4 = 2 \\ x_5 = 8 \end{cases}$

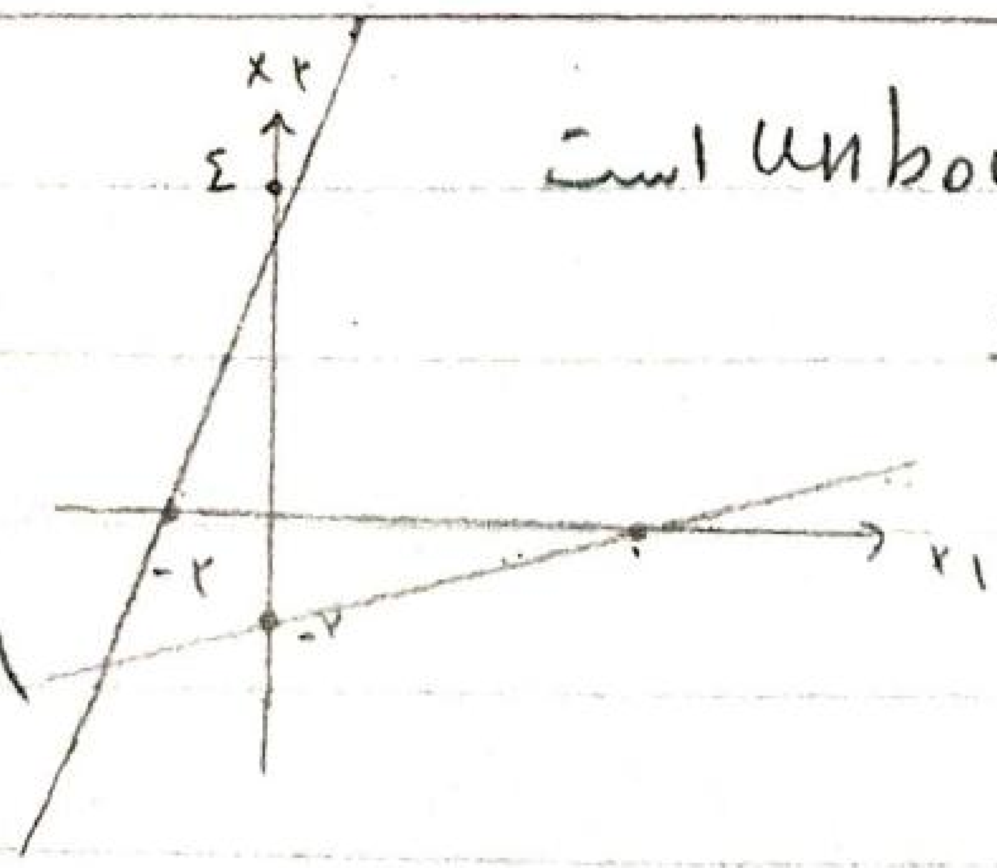
$\longrightarrow X = x_2 \longrightarrow \frac{8}{\frac{5}{2}} < \frac{2}{\frac{1}{2}} < \frac{16}{\frac{1}{2}}$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\ \hline 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{-1}{5} & 0 & \frac{72}{5} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{5} & 1 & \frac{-1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{16}{5} \\ \hline 0 & 0 & 35 & 0 & 10 & 1 & 1360 \end{array}$$

$\longrightarrow$ Basic Solution $\longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{72}{5}, \; x_2 = \frac{16}{5}, \; x_4 = \frac{2}{5} \\ x_3 = x_5 = 0 \end{cases}$

$\longrightarrow \text{Max} = 1360$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + 7x_2 = M \end{cases}$$



ب) چون محدود unbound است
مسئله جواب بهینه ندارد

۷

Maximize $۲۱x_۱ + ۲۵x_۲ + ۱۵x_۳$

subject to $۲x_۱ + ۷x_۲ + ۱۰x_۳ \leq ۲۰$

$۳x_۱ + ۴x_۲ + ۱۸x_۳ \leq ۲۵$

and $x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$

Dual $\longrightarrow$

Minimize $۲۰y_۱ + ۲۵y_۲$

subject to $۲y_۱ + ۳y_۲ \geq ۲۱$

$۷y_۱ + ۴y_۲ \geq ۲۵$

$۱۰y_۱ + ۱۸y_۲ \geq ۱۵$

$y_۱, y_۲ \geq ۰$

Scanned by TapScanner