دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

الگوریتم‌های تقریبی

نیم‌سال اول ۱۴۰۴-۱۴۰۳

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

تمرین سری اول

زمان تحویل: ۸ آبان

مسئله‌ی ۱. تأمین‌کنندگان

گراف کامل متریک G با مجموعه رئوس V به همراه عدد صحیح k داده شده است. رئوس گراف به دو دسته‌ی تأمین‌کننده‌ها $F \subseteq V$ و مشتریان $D = V \setminus F$ افراز شده‌اند. هدف این است که k تأمین‌کننده پیدا کنیم طوری که بیشترین فاصله‌ی تأمین‌کنندگان تا مشتریان به حداقل برسد. به عبارت دیگر، می‌خواهیم مجموعه‌ی $S \subseteq F$ با اندازه‌ی $|S| \leqslant k$ بیابیم که عبارت $\max_{j \in D} d(j, S)$ را کمینه کند. الگوریتمی چندجمله‌ای با ضریب تقریب ۳ برای این مسئله ارائه دهید.

مسئله‌ی ۲. برش بیشینه

گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ و عدد صحیح k داده شده است. می‌خواهیم افرازی از V به مجموعه‌های $S_۱, \dots, S_k$ بیابیم که تعداد یال‌های رو به جلو بیشینه شود. یال رو به جلو یالی است که اندیس مجموعه‌ی حاوی راس مبدا آن از اندیس مجموعه‌ی شامل راس مقصد آن اکیدا کمتر باشد. الگوریتمی چندجمله‌ای با ضریب تقریب $\frac{۱}{۲}(۱ - \frac{۱}{k})$ برای این مسئله ارائه دهید.

مسئله‌ی ۳. فروشنده‌ی دوره‌گرد

گراف کامل بدون جهت G را در نظر بگیرید، طوری که وزن تمام یال‌ها ۱ یا ۲ است. می‌خواهیم مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد را در این گراف خاص حل کنیم. الگوریتمی چندجمله‌ای با ضریب تقریب $\frac{۴}{۳}$ برای این مسئله ارائه دهید. (می‌توانید فرض کنید که ۲ــ عامل کمینه‌ی گراف را می‌توان در زمان چندجمله‌ای پیدا کرد. یک ۲ــ عامل زیرمجموعه‌ای از یال‌ها است که درجه ی هر راس در آن دقیقا برابر ۲ است.)

مسئله‌ی ۴. درخت اشتاینر جهت‌دار

در مسئله‌ی درخت اشتاینر جهت‌دار، گراف جهت‌دار و وزن‌دار $G = (V, E)$، رأس دلخواه $r \in V$ و زیرمجموعه‌ی $R \subseteq V \setminus \{r\}$ از رئوس مورد نیاز (Required) داده شده است. هدف یافتن زیرگرافی با کمترین وزن است طوری که از r به تمام رأس‌های موردنیاز مسیری وجود داشته باشد. اگر n برابر با تعداد رئوس مورد نیاز باشد، نشان دهید با فرض $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ مسئله‌ی درخت اشتاینر جهت‌دار با ضریب $o(\log n)$ قابل تقریب نیست. (راهنمایی: می‌توانید از این موضوع استفاده کنید که مسئله‌ی پوشش مجموعه‌ای ضریب تقریب $o(\log n)$ ندارد.)

مسئله‌ی ۵. پوشش مجموعه‌ای بیشینه

در مسئله‌ی پوشش مجموعه‌ای بیشینه، m زیرمجموعه‌ی $S = \{S_۱, S_۲, \dots, S_m\}$ از مجموعه‌ی $U = \{۱, \dots, n\}$ به همراه عدد طبیعی k داده شده است. هدف یافتن زیرمجموعه‌ای مانند $I \subseteq \{۱, \dots, m\}$ با اندازه‌ی k است، طوری که $|\bigcup_{i \in I} S_i|$ بیشینه شود. الگوریتم حریصانه‌ی زیر برای محاسبه‌ی I ارائه شده است.

۱. قرار بده $I = \emptyset$ و $C = \emptyset$

۲. برای i از ۱ تا k:

- j را برابر با اندیسی از $[m] \setminus I$ قرار بده که عبارت $x_i = |S_j \setminus (C \cap S_j)|$ را بیشینه می‌کند.
- $I \leftarrow I \cup \{j\}$
- $C \leftarrow C \cup S_j$

۳. مجموعه‌ی I را برگردان.

فرض کنید OPT نشان‌دهنده‌ی تعداد عناصر پوشش‌یافته در جواب بهینه باشد.

الف) با فرض $y_i = \sum_{j=1}^{i} x_j$ نشان دهید:

$$x_{i+1} \geqslant \frac{\mathrm{OPT} - y_i}{k}.$$

ب) نشان دهید $\mathrm{OPT} - y_i \leqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right)^i \mathrm{OPT}$.

ج) نشان دهید الگوریتم ارائه‌شده دارای ضریب تقریب $1 - \frac{1}{e}$ است.