



الگوریتم‌های تقریبی

نیم‌سال اول ۱۴۰۴-۱۴۰۳

مدرس: حمید ضرابی‌زاده

زمان تحویل: ۶ آذر

تمرین سری دوم

مسئله‌ی ۱. توزیع سبدها

می‌خواهیم n سبد میوه هر یک با وزن کمتر مساوی یک کیلوگرم را بین تعدادی خانواده توزیع کنیم، طوری که به هر خانواده حداقل یک کیلوگرم میوه برسد. هدف پیدا کردن حداکثر تعداد خانواده‌هایی است که می‌توان با این شرط سبدهای میوه را بین آن‌ها توزیع کرد.

الف) یک الگوریتم ساده با ضریب تقریب $\frac{1}{4}$ برای این مسئله ارائه دهید و مرتبه‌ی زمانی آن را تحلیل کنید.

ب) یک FPTAS برای مسئله ارائه دهید.

مسئله‌ی ۲. دایره‌های ناهم‌پوشان

مجموعه‌ی C از n دایره با شعاع واحد در صفحه داده شده است. می‌خواهیم بیش‌ترین تعداد از این دایره‌ها را انتخاب کنیم طوری که دایره‌ها باهم هیچ اشتراکی نداشته باشند.

الف) الگوریتمی با ضریب تقریب $\frac{1}{4}$ برای مسئله ارائه دهید و مرتبه‌ی زمانی آن را تحلیل کنید.

ب) الگوریتمی با ضریب تقریب $1 - \epsilon$ برای مسئله ارائه دهید و مرتبه‌ی زمانی آن را تحلیل کنید.

مسئله‌ی ۳. زمان‌بندی

مجموعه‌ی J از n کار متفاوت را در نظر بگیرید. فرض کنید k ماشین برای انجام این کارها داریم. به عنوان کارشناس ارشد، کارها را به گونه‌ای به ماشین‌ها تخصیص دهید که بیش‌ترین زمانی که یکی از ماشین‌ها کار می‌کند کمینه شود. به عبارت دیگر زمانی که همه‌ی کارها به اتمام می‌رسند کمینه باشد.

الف) ثابت کنید حتی اگر تعداد ماشین‌ها دو باشد مسئله ان‌پی-سخت است.

ب) برای حالتی که فقط دو ماشین داریم یک FPTAS برای مسئله ارائه دهید.

ج) ثابت کنید برای حالت کلی این مسئله FPTAS نمی‌تواند وجود داشته باشد، مگر $P = NP$.

مسئله‌ی ۴. راهپیمایی

در جریان راهپیمایی افراد می‌توانند از مسیرهای مختلف یک‌طرفه از میدانی به میدان دیگر بروند. علی می‌خواهد از میدان A به میدان M برود. اگر طول هر خیابان را ℓ_e و میزان توجه دوربین‌ها در آن خیابان را c_e بگیریم، چگونه علی می‌تواند بیش‌ترین توجه را جلب کند طوری که حداکثر L متر راه رفته باشد؟ احمد دوست علی گفته که در شهر ما هیچ‌گاه از یک میدان و پی‌مودن چند خیابان پشت سر هم نمی‌توان هیچ میدانی را دو بار دید.

الف) با فرض آن که احمد راست گفته، یک الگوریتم FPTAS برای این مسئله معرفی کنید.

ب) اگر احمد دروغ گفته باشد، آیا باز هم برای مسئله FPTAS داریم؟

مسئله ۵. تمرین‌ها

دانش‌جویی باید n تمرین را تحویل دهد. هر تمرین i اگر تا زمان d_i انجام نشود، به اندازه p_i جریمه خواهد داشت. انجام هر تمرین نیز از دانش‌جو t_i وقت می‌گیرد. به دنبال ترتیبی برای انجام تمرین‌ها هستیم که مقدار جریمه کمینه شود.

الف) ثابت کنید یک ترتیب بهینه وجود دارد که در آن، دانش‌جو ابتدا تعدادی تمرین را به ترتیب بر اساس مهلت تحویلشان انجام می‌دهد؛ بدون این که در هیچ کدام جریمه شود. سپس تمرین‌هایی را انجام می‌دهد که در آن‌ها جریمه خواهد شد. (توجه کنید که دانش‌جو در نهایت همه‌ی تمرین‌ها را انجام می‌دهد.)

ب) یک راه حل شبه‌چندجمله‌ای برای این مسئله ارائه دهید.

ج) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (ب)، یک FPTAS برای این مسئله ارائه دهید.