بسمه تعالی

جبرخطی

فصل 1

مطهره باقری

1400

دانشگاه گیلان

۱-۲ بردارها، ماتریس ها و قواعد عملیات آنها

یک **بردار**[۱] کمیتی است که هم دارای اندازه و هم دارای جهت باشد. کمیت های طول، سطح، حجم، جرم و اعداد حقیقی تنها دارای اندازه هستند. چنین کمیت هایی را **اسکالر**[۲] می نامند. در حالیکه کمیت هایی چون سرعت، نیرو و شتاب علاوه بر اندازه دارای جهت نیز هستند.

بردار را می توان بصورت یک لیست محدودی از اعداد، بصورت سطری یا ستونی نمایش داد،

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}_{1\times n} \quad , \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad (۱-۱)$$

هر یک از این اعداد اسکالر را **عناصر** یا **درایه** های آن بردار گویند، که می تواند اعداد حقیقی، مختلط یا گویا باشند. **بعد** یک بردار بستگی به تعداد عناصر آن دارد. بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ به ترتیب ابعاد $n\times 1$ و $1\times n$ دارند. گاهی برای سهولت $\mathbf{u}$ را بردار ستونی n تایی و $\mathbf{v}$ را بردار سطری n تایی می نامند.

مثال۱-۱

بردار $\mathbf{v}$ با ابعاد 1×4 (یک سطر و چهار ستون) و بردار $\mathbf{u}$ ابعاد 3×1 (سه سطر و یک ستون) را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1.1 & 2 & 0 & -7.8 \end{bmatrix}_{1\times 4} \quad , \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1+2j \\ -5.3 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

□

حال اگر داده های مرتبط را با ابعاد $m \times n$ ذخیره نماییم **ماتریس**[1] بدست می آید،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

مثال۱-۲

در زیر نمونه هایی از ماتریس های مربعی و غیر مربعی آورده شده است،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -j & 5 & -9 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1-5j & 0 & -2-j \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

□

۱-۲-۱- عملیات جمع و تفریق در بردارها و ماتریس ها

بردارها و ماتریس ها نیز همانند اعداد قابلیت جمع و تفریق شدن را دارند به شرطی که از نظر ابعاد یکسان باشد.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}-\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1-v_1 \\ u_2-v_2 \\ \vdots \\ u_n-v_n \end{bmatrix} \qquad (۳\text{-}۱)$$

برای ماتریس A و B داریم،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad (۴\text{-}۱)$$

۱-۲-۲- ضرب یک عدد اسکالر در بردار و ماتریس

حاصلضرب یک بردار یا ماتریس در یک عدد اسکالر، بردار یا ماتریسی است که هر درایه آن در عدد اسکالر مذکور ضرب شده است،

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad k\mathbf{u} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \vdots \\ ku_n \end{bmatrix} \tag{۵-۱}$$

به لحاظ هندسی ضرب یک عدد اسکالر در بردار می تواند سبب تغییر طول و جهت بردار گردد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix} \tag{۶-۱}$$

مثال ۱-۴

برای بردار $\mathbf{u}$ تعریف شده، بردارهای $2\mathbf{u}$ و $(-3j)\mathbf{u}$ به شکل زیر بدست می آید،

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1.2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad 2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2.4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (-3j)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -9j \\ 3.6j \\ 0 \end{bmatrix}$$

۱-۲-۳- ترکیب خطی بردارها

بنا به تعریف بردار $\mathbf{u}$ یک **ترکیب خطی**[۱] از بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ می باشد، اگر اسکالرهای $c_1, c_2, \ldots, c_n$ وجود داشته باشد که بتوان $\mathbf{u}$ را بصورت زیر نمایش داد،

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n \qquad (۷-۱)$$

مثال۱-۵

در هر یک از سه حالت زیر بررسی نمایید، که آیا می توان بردار $\mathbf{u}$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت.

برای این منظور در هر سه حالت باید معادله $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ را نوشته و حل کرد.

1. $\mathbf{u} = (-12,20), \quad \mathbf{v}_1 = (-1,2), \quad \mathbf{v}_2 = (4,-6)$

معادله $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ بصورت زیر خواهد شد،

$$(-12,20) = c_1(-1,2) + c_2(4,-6) \rightarrow \begin{array}{c} -c_1 + 4c_2 = -12 \\ 2c_1 - 6c_2 = 20 \end{array} \rightarrow \quad c_1 = 4, \quad c_2 = -2$$

بنابراین بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می باشد و می توان آن را بصورت $\mathbf{u} = 4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$ نوشت.

2. $\mathbf{u} = (4,20), \quad \mathbf{v}_1 = (2,10), \quad \mathbf{v}_2 = (-3,-15)$

---

[۱] Linear Combination

معادلات به شکل می باشند،

$$(4,20)=c_1(2,10)+c_2(-3,-15)\rightarrow \begin{matrix} 2c_1-3c_2=4 \\ 10c_1-15c_2=20 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} c_1=2+\dfrac{3}{2}t \\ c_2=t \end{cases} \quad t\in\Re$$

در این حالت نیز بردار **u** یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ می باشد، ولی برخلاف حالت قبل فقط یک جواب وجود ندارد و بینهایت ترکیب خطی مختلف می توان بدست آورد.

3. $\mathbf{u}=(1,-4),\quad \mathbf{v}_1=(2,10),\quad \mathbf{v}_2=(-3,-15)$

در این حالت معادلات به شکل زیر خواهند بود،

$$(1,-4)=c_1(2,10)+c_2(-3,-15)\rightarrow \begin{matrix} 2c_1-3c_2=1 \\ 10c_1-15c_2=-4 \end{matrix}$$

همانطور که از معادلات بالا مشاهده می شود، جوابی برای c_1 و c_2 وجود ندارد. بنابراین بردار **u** را نمی توان بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ نوشت.

□

مثال۱-۶

بردار $\mathbf{u}$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{u} = [1,2,1]$$

برای کدامیک از دسته بردارهای زیر امکان نوشتن یک ترکیب خطی بصورت زیر وجود دارد؟

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

الف) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

طبق تعریف ترکیب خطی داریم،

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \\ -c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2c_3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 + 2c_3 = 2 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا در می یابیم، که هیچ جوابی برای حل این دستگاه معادلات وجود ندارد. لذا بردار $\mathbf{u}$ را نمی توان بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ نوشت.

ب) $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

طبق تعریف ترکیب خطی داریم،

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_1\\c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4c_2\\c_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_3\\-c_3\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}c_1+c_3=1\\c_1+4c_2-c_3=2\\c_1+c_2=1\end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات بالا مقادیر زیر بدست می آید،

$$c_1=c_2=c_3=\frac{1}{2}$$

بنابراین بردار $\mathbf{u}$ یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ می باشد و می توان آن را بصورت $\mathbf{u}=\frac{1}{2}\mathbf{v}_1+\frac{1}{2}\mathbf{v}_2+\frac{1}{2}\mathbf{v}_3$ نوشت.

۱-۲-۴- ضرب داخلی و نُرم بردارها

هر قاعده ای که به یک جفت بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ یک کمیت اسکالر را اختصاص دهد یک **ضرب داخلی**[1] نامیده می شود و با نماد $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ نشان داده می شود، به شرط اینکه چهار اصل زیر را برآورده سازد،

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (خط تیره نشانگر مزدوج یک عدد مختلط است)
2. $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \bar{c}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \bar{c}\mathbf{v} \rangle$ (c یک عدد مختلط است)
3. $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}+\mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{s} \rangle$
4. $\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \rightarrow \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$

با توجه به شرایط بالا ضرب داخلی یک جفت بردار مختلط $\mathbf{u}_{n\times 1}$ و $\mathbf{v}_{n\times 1}$ در یک فضای برداری V بصورت زیر بیان می شود،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \cdots + \bar{u}_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i \qquad (۸-۱)$$

که حاصل آن یک عدد مختلط است و $\bar{u}_i$ها مزدوج های u_iها هستند. در اینصورت ضرب داخلی را بصورت زیر می توان بیان کرد،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} = \overline{\mathbf{v}^{*}\mathbf{u}} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{*}\mathbf{v} \qquad (۹-۱)$$

که در آن $\mathbf{u}^{*}$ ترانهاده مزدوج $\mathbf{u}$ را نشان می دهد. بنابراین ضرب داخلی دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ با عناصر حقیقی بصورت زیر داده می شود،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad (۱۰-۱)$$

بدیهی است که در این حالت داریم،

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} \qquad (۱۱-۱)$$

مثال۱-۷

ضرب داخلی بردارهای **u** و **v** و سپس **v** و **u** را بدست آورید.

$$\mathbf{u} = [2 + j3, 3 + j, 4], \qquad \mathbf{v} = [4 - j6, 3, 3 + j2]$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \overline{(2 + j3)}(4 - j6) + \overline{(3 + j)}(3) + \overline{(4)}(3 + j2) \\
&= (2 - j3)(4 - j6) + (3 - j)(3) + (4)(3 + j2) \\
&= (-10 - j24) + (9 - j3) + (12 + j8) \\
&= 11 - j19
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle &= \overline{(4 - j6)}(2 + j3) + \overline{(3)}(3 + j) + \overline{(3 + j2)}(4) \\
&= (4 + j6)(2 + j3) + (3)(3 + j) + (3 - j2)(4) \\
&= (-10 + j24) + (9 + j3) + (12 - j8) \\
&= 11 + j19
\end{aligned}$$

همانطور که پیداست $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ می باشد.

□

نکته۱: برای بردار $\mathbf{u}_{n\times1}$ مقدار $\mathbf{u}^*\mathbf{u}$ یک عدد اسکالر نامنفی و $\mathbf{u}\mathbf{u}^*$ یک ماتریس $n \times n$ می باشد،

$$\mathbf{u}^*\mathbf{u} = \langle \mathbf{u},\mathbf{u} \rangle = \bar{u}_1 u_1 + \bar{u}_2 u_2 + \cdots + \bar{u}_n u_n = |u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2$$

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_1\bar{u}_1 & u_1\bar{u}_2 & \cdots & u_1\bar{u}_n \\ u_2\bar{u}_1 & u_2\bar{u}_2 & \cdots & u_2\bar{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n\bar{u}_1 & u_n\bar{u}_2 & \cdots & u_n\bar{u}_n \end{bmatrix}$$

مفهوم یک **نُرم**[۱] تا اندازه ای شبیه به مفهوم قدر مطلق می باشد. یک نُرم تابعی است که برای هر بردار $\mathbf{u}$ داده شده یک عدد حقیقی تخصیص می دهد که با نماد $\|\mathbf{u}\|$ نشان داده می شود، بطوریکه شرایط زیر را بر آورده سازد،

1. $\|\mathbf{u}\| > 0, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0, \quad if \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\|k\mathbf{u}\| = |k|\,\|\mathbf{u}\|$ (در اینجا k یک اسکالر و $|k|$ قدرمطلق k است)
4. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (نامساوی مثلثاتی[۲])
5. $|\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ (نامساوی کوشی- شوارتز[۳])

---

[۱] Norm
[۲] Triangle Inequality
[۳] Cauchy - Schwarz Inequality

در حالت کلی $\mathbf{u}$ می تواند، بردار، ماتریس و یا سیگنال باشد. با توجه به شرایط بالا نُرم یک بردار را بصورت ریشه دوم نامنفی $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ می توان تعریف کرد،

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \left(\mathbf{u}^* \mathbf{u}\right)^{1/2} = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2} \qquad (۱-۱۲)$$

مثال۱-۸

نُرم بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را بدست آورید.

$$\mathbf{u} = [j2, -1, 3+j], \qquad \mathbf{v} = [4, -1, 2, 0]$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|j2|^2 + |-1|^2 + |3+j|^2} = \sqrt{4+1+10} = \sqrt{15}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|4|^2 + |-1|^2 + |2|^2 + |0|^2} = \sqrt{16+1+4+0} = \sqrt{21}$$

سپس برای هر یک از دسته بردارهای زیر حاصل $2\mathbf{u}-5\mathbf{v}$، $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$، $\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\|$ را بیابید.

الف) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$2\mathbf{u}-5\mathbf{v}=2\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}-5\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -14 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\mathbf{u}^T\mathbf{v}=(3\times 0)+(-2\times 2)+(0\times(-4))=-4$$

$$\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\|=\left\|\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}\right\|$$

$$=\sqrt{|3|^2+|-6|^2+|8|^2}=\sqrt{109}$$

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1+2j\\0\\6-3j\end{bmatrix},\mathbf{v}=\begin{bmatrix}3j\\3\\-1\end{bmatrix}$$ ب)

$$2\mathbf{u}-5\mathbf{v}=2\begin{bmatrix}1+2j\\0\\6-3j\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}3j\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+4j\\0\\12-6j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-15j\\-15\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-11j\\-15\\17-6j\end{bmatrix}$$

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\mathbf{u}^*\mathbf{v}=((1-2j)\times(3j))+(0\times 3)+((6+3j)\times(-1))=0$$

$$\|\mathbf{u}-2\mathbf{v}\|=\left\|\begin{bmatrix}1+2j\\0\\6-3j\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3j\\3\\-1\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}1+2j\\0\\6-3j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6j\\-6\\2\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}1-4j\\-6\\8-3j\end{bmatrix}\right\|$$

$$=\sqrt{|1-4j|^2+|-6|^2+|8-3j|^2}=\sqrt{126}$$

علاوه بر رابطه گفته شده تعاریف دیگری هم برای نُرم وجود دارد که در زیر آورده شده است.

۱- یک نُرم که به **نُرم** p [۱] یا **نُرم** L_p معروف است، بصورت کلی زیر تعریف می گردد.

$$\|\mathbf{u}\|_p = (\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (|u_1|^p + |u_2|^p + \cdots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \le p < \infty \qquad (۱۶-۱)$$

۲- نُرم ممکن است بصورت مجموع اندازه های تمام مؤلفه های u_i تعریف شود، که به ازای $p=1$ در حالت قبل بدست می آید و به آن **نُرم یک**[۲] یا **نُرم** L_1 گفته می شود.

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|u_i| = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| \qquad (۱۷-۱)$$

۳- نُرم ممکن است بصورت بزرگترین مقدار در بین تمام مؤلفه های u_i تعریف گردد، که به آن **نُرم ماکزیمم** یا **نُرم بینهایت**[۱] یا **نُرم** L_∞ نیز می گویند.

(۱۸-۱)

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \lim_{p\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty}(|u_1|^p + |u_2|^p + \cdots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty}(\max_{1\le i\le n}|u_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\le i\le n}\{|u_i|\}$$

۴- در بین این تعاریف، نُرم $(\mathbf{u}^*\mathbf{u})^{1/2}$ که همان **نُرم دو**[۲] یا **نُرم** L_2 می باشد، از همه متداول تر است و بصورت زیر نیز نمایش داده می شود.

$$\|\mathbf{u}\|_2 = (\sum_{i=1}^{n}|u_i|^2)^{\frac{1}{2}} = (|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۹-۱)$$

که به آن **نُرم اقلیدسی**[۳] نیز گفته می شود.

مثال۱-۹

برای بردار $\mathbf{u}=[3,4\text{-}j2,1]$ مقدار نُرم L_1، نُرم L_2 و نُرم L_∞ را بدست آورید.

$$\|\mathbf{u}\|_1=|3|+|4-j2|+|1|=3+\sqrt{20}+1=4+2\sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{u}\|_2=\left(|3|^2+|4-j2|^2+|1|^2\right)^{1/2}=(9+20+1)^{1/2}=\sqrt{30}$$

$$\|\mathbf{u}\|_\infty=\max\{|3|,|4-j2|,|1|\}=\max\{3,\sqrt{20},1\}=\sqrt{20}$$

با توجه به تعریف دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را **متعامد**[۱] گویند، اگر ضرب داخلی دو بردار برابر صفر باشد،

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=0 \qquad (۲۲-۱)$$

به عبارتی برای بردارهای حقیقی $\mathbf{u}^T\mathbf{v}=0$ و برای بردارهای مختلط $\mathbf{u}^*\mathbf{v}=0$ باشد. برای بردارهای متعامد $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ رابطه زیر برقرار است،

$$\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \qquad (۲۳-۱)$$

که در واقع همان رابطه **فیثاغورث**[۲] می باشد. اگر علاوه بر متعامد بودن نُرم بردارها هم برابر یک باشد، به آن بردارها **یکامتعامد**[۳] گفته می شود.

---

[۱] Orthogonal
[۲] Pythagorean
[۳] Orthonormal

نکته۳: اگر مجموعه ای مانند S شامل بردارهایی باشد که تمامی آنها دو به دو متعامد باشند، به آن مجموعه یک مجموعه متعامد گفته می شود، حال اگر در یک مجموعه متعامد نُرم تمامی بردارها برابر یک باشد، به آن مجموعه **یکامتعامد** گفته می شود.

مثال۱-۱۲

بردارهای زیر را در نظر بگیرید،

$$S:\left\{\mathbf{v}_1=[2,0,-1],\quad \mathbf{v}_2=[0,-1,0],\quad \mathbf{v}_3=[2,0,4]\right\}$$

الف) متعامد و یکامتعامد بودن بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ را بررسی کنید.

برای متعامد بودن ضرب داخلی دو به دوی این بردارها را محاسبه می کنیم،

$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle=(2)(0)+(0)(-1)+(-1)(0)=0$$

$$\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\rangle=(2)(2)+(0)(0)+(-1)(4)=0$$

$$\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\rangle=(0)(2)+(-1)(0)+(0)(4)=0$$

بنابراین مجموعه S یک مجموعه متعامد می باشد. برای بررسی یکامتعامد بودن، نُرم بردارها را محاسبه می کنیم.

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$
$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = 1$$
$$\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{5}$$

از آنجائیکه نُرم تمامی بردارها برابر یک نمی باشد، پس مجموعه S یک مجموعه یکامتعامد نیست.

ب) بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ را به بردارهای یکامتعامد تبدیل کنید.

برای این منظور باید بردارها را به نحوی تبدیل کنیم که نرم آنها برابر یک گردد. اگر هر یک از بردارها را به نُرم خودش تقسیم کنیم چنین هدفی بدست می آید،

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{1}(0,-1,0) = (0,-1,0)$$
$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{2\sqrt{5}}(2,0,4) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

حال می توان براحتی نشان داد که بردارهای جدید $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ یکامتعامد هستند،

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = 0$$
$$\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = \|\mathbf{u}_3\| = 1$$

□

۱-۲-۶- ضرب ماتریس ها

ضرب یک ماتریس در ماتریس دیگر هنگامی امکان پذیر است که تعداد ستونهای ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. در غیر اینصورت عمل ضرب تعریف نشده است. بنا به تعریف حاصلضرب یک ماتریس $A_{n\times m}$ با درایه های a_{ij} در یک ماتریس $B_{m\times r}$ با درایه های b_{jk} ماتریسی مانند $C_{n\times r}$ است که درایه های آن بصورت زیر محاسبه می شوند،

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk} \qquad (۲۷-۱)$$

مثال۱-۱۵

ماتریس های $A_{3\times 4}$ و $B_{4\times 2}$ را در نظر بگیرید، حاصلضرب آنها بصورت زیر خواهد بود،

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} \boxed{(2\times 1)+(4\times 2)+(3\times 0)+(-1\times 3)} & (2\times 4)+(4\times 3)+(3\times -2)+(-1\times 1) \\ (3\times 1)+(1\times 2)+(5\times 0)+(2\times 3) & (3\times 4)+(1\times 3)+(5\times -2)+(2\times 1) \\ (-1\times 1)+(0\times 2)+(7\times 0)+(6\times 3) & \boxed{(-1\times 4)+(0\times 3)+(7\times -2)+(6\times 1)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \boxed{7} & 13 \\ 11 & 7 \\ 17 & \boxed{-12} \end{bmatrix}$$

همانطور که پیداست حاصلضرب BA امکان پذیر نمی باشد.

نکته۱: بدیهی است که در حالت کلی ضرب ماتریسی جابجایی پذیر نمی باشد، $AB \neq BA$ ، از این رو ترتیب حائز اهمیت است. لیکن اگر $AB = BA$ باشد ماتریس های A و B را جابجایی پذیر گویند. بطور مثال در ماتریسهای زیر اگر $a_{12} = a_{21} = b_{12} = b_{21} = 0$ باشد، آنگاه A و B جابجایی پذیر خواهد بود.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

نکته۲: برای ماتریس های $A_{n\times m}$، $B_{m\times r}$ و $C_{r\times p}$ قانون شرکت پذیری صادق است،

$$(AB)C = A(BC)$$

از اینرو داریم،

$$ABCD = (AB)(CD) = A(BCD) = (ABC)D$$

$$A^{m+n} = A^m A^n \quad , \quad m,n = 1,2,3,\cdots$$

نکته۳: برای ماتریس های $A_{n\times m}$، $B_{n\times m}$، $C_{m\times r}$ و $D_{m\times r}$ قانون توزیع پذیری زیر صادق خواهد بود،

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

۱-۲-۸- اثر ماتریس مربعی

اثر[۱] یک ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ بصورت زیر تعریف می شود،

$$\operatorname{trace}(A)=\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \qquad (۳۰-۱)$$

به عبارتی مجموع عناصر روی قطر اصلی خواهد بود.

نکته۱: برای ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم،

$$\operatorname{tr}(\alpha A)=\alpha\operatorname{tr}(A) \quad , \quad \operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$$

برای ماتریس های $A_{n\times m}$ و $B_{m\times n}$ بدون توجه به اینکه $AB=BA$ و یا $AB\neq BA$ باشد داریم،

$$\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{ji}$$

اگر $m=1$ باشد داریم،

$$\operatorname{tr}(AB)=BA$$

---

[۱] Trace

مثال ۱-۱۷

به موارد زیر توجه نمایید،

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad trace(A)=2+4+5=11$$

$$\left.\begin{aligned} A&=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & -4 & 7\end{bmatrix}\\ B&=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -8 & 6\\ 3 & -4\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} AB&=\begin{bmatrix}16 & -18\\ 55 & -48\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad trace(AB)=16-48=-32\\ BA&=\begin{bmatrix}5 & -8 & 19\\ 4 & -24 & 2\\ -5 & 16 & -13\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad trace(BA)=5-24-13=-32\end{aligned}\right.$$

مشخص است که $tr(AB)=tr(BA)$ می باشد.

۱-۲-۹- دترمینان ماتریس ها

برای هر ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ عددی را به عنوان **دترمینان**[1] می توان نسبت داد که بصورت زیر تعریف می گردد،

$$\det(A)=|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) \qquad (۱-۳۱)$$

A_{ij} یک ماتریس مربعی $(n-1)\times(n-1)$ است که از حذف سطر iام و ستون jام در ماتریس $A_{n\times n}$ بدست می آید.

با توجه به تعریف بالا دترمینان ماتریس های 2×2، 3×3 و 4×4 بصورت زیر قابل بیان هستند،

- برای یک ماتریس 2×2 داریم،

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (۱-۳۲)$$

مثال ۱-۱۸

دترمینان ماتریس $A_{2\times2}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad \to \quad |A| = 1\times4-2\times3=-2$$

- برای یک ماتریس 3×3 داریم،

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \qquad (۱-۳۳)$$

مثال ۱-۱۹

دترمینان ماتریس $A_{3\times3}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix} \quad \to \quad |A| = 2(20-2)-3(5-4)+5(1-8)=36-3-35=-2$$

□

- برای یک ماتریس 4×4 داریم،

$$|A|=\left|\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{۳۴-۱}$$

به این رابطه **بسط لاپلاس**[۱] گویند.

مثال ۱-۲۰

دترمینان ماتریس $A_{4\times4}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}2&3&0&5\\1&4&0&2\\5&4&8&5\\2&1&0&5\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}8&5\\0&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3\\5&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&2\\0&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&2\\8&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4\\5&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&5\\0&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&4\\2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&5\\8&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&4\\2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&5\\0&2\end{vmatrix}$$

$$=(5\times40)-(-7\times0)+(-4\times(-16))+(-16\times0)-(-7\times(-40))+(-3\times0)=-16$$

□

۱-۲-۱۰- خواص دترمینان

دترمینان یک ماتریس مربعی $n \times n$ دارای خواص زیر است،

۱- اگر جای دو سطر (یا دو ستون) دترمینان با یکدیگر تعویض شوند، تنها علامت دترمینان تغییر خواهد کرد.

مثال ۱-۲۱

ماتریس A را در نظر بگیرید، با تعویض سطر دوم و سوم آن ماتریس B بدست خواهد آمد، که دترمینان آن منفی دترمینان ماتریس A است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = -2$$

تعویض سطر دوم و سوم: $r_2 \leftrightarrow r_3$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |B| = 2(2-20) - 3(4-5) + 5(8-1) = -36 + 3 + 35 = 2$$

۲- اگر یک سطر(یا یک ستون) دترمینان را با یک سطر(یا یک ستون) دیگر جمع کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی کند.

مثال ۱-۲۲

ماتریس A را در نظر بگیرید، سطر دوم را با سطر اول جمع می کنیم تا ماتریس B بدست آید، که دترمینان آن همان دترمینان ماتریس A است.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A|=-2$$

سطر دوم را با سطر اول جمع می کنیم و در جایگزین سطر دوم می کنیم: $r_1+r_2\rightarrow r_2$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 7\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}\rightarrow \quad |B|=2(35-7)-3(15-14)+5(3-14)=56-3-55=-2$$

۳- اگر یک ماتریس دو سطر(یا دو ستون) یکسان داشته باشد، آنگاه دترمینان آن صفر است.

مثال ۱-۲۳

دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \quad |A| = 1(0+10)-6(-15+15)+1(-10-0)=10-10=0$$

□

۴- دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ برابر حاصلضرب دترمینان های آنها است.

$$|AB| = |A||B| = |BA|$$

۵- اگر در یک ماتریس یک سطر (یا یک ستون) در یک عدد اسکالر k ضرب شود، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k ضرب می شود.

۶- اگر تمامی درایه های یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در عدد اسکالر k ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس در k^n ضرب خواهد شد.

$$|kA| = k^n |A|$$

۱-۲-۱۱- ماتریس های منفرد، غیر منفرد و ماتریس معکوس

یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ را ماتریس **غیرمنفرد**[۱] یا **ناویژه** گویند، اگر یک ماتریسی مانند $B_{n\times n}$ چنان وجود داشته باشد، که $AB = BA = I$ باشد، آن ماتریس را با نماد A^{-1} نشان داده و به آن **معکوس**[۲] ماتریس A می گویند. اگر A^{-1} وجود نداشته باشد، ماتریس A را **منفرد**[۳] یا **ویژه** گویند.

نکته۱: ماتریس معکوس A^{-1} زمانی وجود دارد که $|A|$ غیر صفر باشد.

نکته۲: اگر ماتریس های مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ غیرمنفرد باشند، آنگاه حاصلضرب AB نیز یک ماتریس غیرمنفرد است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ می باشد.

نکته۳: اگر k یک عدد اسکالر غیر صفر و ماتریس $A_{n\times n}$ غیرمنفرد باشد، آنگاه داریم،

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \quad , \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

نکته۴: دترمینان ماتریس معکوس A^{-1} همان معکوس دترمینان A است.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \rightarrow \quad |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1$$

نکته۵: اگر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ غیرمنفرد باشد، می توان یک جواب منحصربفرد برای حل آن بصورت زیر بدست آورد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

با توجه به تعاریف بالا معکوس ماتریس های 2×2 و 3×3 بصورت زیر قابل بیان هستند.

- برای یک ماتریس غیرمنفرد 2×2 داریم،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}a_{22} & (-1)^{1+2}a_{12} \\ (-1)^{2+1}a_{21} & (-1)^{2+2}a_{11} \end{bmatrix} \quad (۳۵\text{-}۱)$$

در رابطه فوق adj(A) **ماتریس الحاقی** است که برابر است با ترانهاده ماتریس همسازه A:

$$adj(A) = C^T$$

ماتریس همسازه ماتریس Aماتریسی است که درایه هایش از رابطه زیر به دست می آید

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

مثال ۱-۲۵

معکوس ماتریس $A_{2\times2}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

- برای یک ماتریس غیرمنفرد 3×3 داریم،

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{bmatrix} \quad (۱-۳۶)$$

مثال ۱-۲۶

معکوس ماتریس $A_{3\times 3}$ زیر را بدست آورید،

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad |A| = 1(0-9)-1(0+6)+2(9-0)=3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -9 & 6 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 9 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

۱-۲-۱۴- ماتریس مختلط و ماتریس مختلط مزدوج

ماتریس **مختلط**[1] ماتریسی است که همه یا برخی از عناصر آن اعداد مختلط باشند.

مثال ۱-۳۲

ماتریس A در زیر نمونه ای از یک ماتریس مختلط است،

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1+j & -1 & -2+3j \\ -1+4j & 3-3j & -2 \end{bmatrix}$$

---

[1] Complex

مزدوج[1] ماتریس مختلط A ماتریس است که هر یک از درایه های آن مزدوج مختلط درایه های متناظر در ماتریس مختلط A باشد. مزدوج ماتریس مختلط A را با $\overline{A}=\left[\overline{a}_{ij}\right]$ نشان می دهند، که در آن $\overline{a}_{ij}$ مزدوج مختلط a_{ij} است.

مثال ۱-۳۳

مزدوج ماتریس مختلط A بصورت زیر بیان می گردد،

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1+j & -1 & -2+3j \\ -1+4j & 3-3j & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{A}=[\overline{a}_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1-j & -1 & -2-3j \\ -1-4j & 3+3j & -2 \end{bmatrix}$$

---

[1] Conjugated

۱-۲-۱۵- ماتریس ترانهاده و ماتریس ترانهاده مزدوج

اگر جای سطرها و ستون های یک ماتریس $A_{n\times m}$ با یکدیگر عوض شوند، یک ماتریس $m\times n$ حاصل می شود که آن را ماتریس **ترانهاده**[1] $A_{n\times m}$ می نامند و با نماد A^T نشان می دهند.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (۵۶-۱)$$

نکته۱: بدیهی است که $(A^T)^T = A$ می باشد.

نکته۲: در صورتیکه $A+B$ و AB قابل تعریف باشند،

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad , \quad (AB)^T = B^T A^T$$

نکته۳: برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ همواره $|A^T|=|A|$ و $\mathrm{tr}(A^T)=\mathrm{tr}(A)$ می باشد.

نکته۴: برای ماتریس غیرمنفرد $A_{n\times n}$ همواره $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ است.

ماتریس **ترانهاده مزدوج**[2]، همان مزدوج ترانهاده یک ماتریس است. برای یک ماتریس $A=[a_{ij}]$ ، ترانهاده مزدوج با نماد $\overline{A}^T$ یا A^* نشان داده می شود.

مثال ۱-۳۴

ترانهاده مزدوج ماتریس مختلط A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1+j & -1 & -2+3j \\ -1+4j & 3-3j & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{A}^{T}=A^{*}=[\overline{a}_{ji}]=\begin{bmatrix} 0 & -1-j & -1-4j \\ 1 & -1 & 3+3j \\ 3 & -2-3j & -2 \end{bmatrix}$$

نکته۱: بدیهی است که مزدوج A^{T} همان ترانهاده $\overline{A}$ است و $(A^{*})^{*}=A$ می باشد.

نکته۲: همچنین در صورتیکه $A+B$ و AB قابل تعریف باشند، آنگاه،

$$(A+B)^{*}=A^{*}+B^{*} \quad , \quad (AB)^{*}=B^{*}A^{*}$$

نکته۳: اگر c یک عدد مختلط باشد، آنگاه، $(cA)^{*}=\overline{c}A^{*}$ است.

نکته۴: در صورتیکه A یک ماتریس حقیقی باشد، آنگاه $A^{T}=A^{*}$ می باشد.

نکته۵: برای یک ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ همواره $|A^{*}|=|\overline{A}|$ می باشد.

نکته۶: برای ماتریس غیرمنفرد $A_{n\times n}$ همواره $(A^{*})^{-1}=(A^{-1})^{*}$ است.

۱-۲-۱۶- ماتریس متقارن و ماتریس شبه متقارن

ماتریس متقارن[1] ماتریسی است که ترانهاده اش با خودش برابر باشد. به عبارتی برای هر ماتریس متقارن A داریم،

$$A = A^T \quad , \quad a_{ij} = a_{ji} \tag{۱-۵۷}$$

اگر ماتریس A با منفی ترانهاده اش برابر باشد، آن را **ماتریس شبه متقارن**[2] نامند،

$$A = -A^T \quad , \quad a_{ij} = -a_{ji} \tag{۱-۵۸}$$

نکته۱: بدیهی است که برای هر ماتریس مربعی A، حاصل $A+A^T$ یک ماتریس متقارن و $A-A^T$ یک ماتریس شبه متقارن است، به مثال زیر توجه نمایید،

مثال ۱-۳۵

برای ماتریس مربعی A بصورت زیر داریم،

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \quad A + A^T = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 8 \\ -3 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 14 \end{bmatrix} \quad , \quad A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

□

---

[1] Symmetric
[2] Skew-Symmetric

نکته۲: برای ماتریس $A_{m\times n}$، ماتریس $B = A^T A$ یک ماتریس متقارن خواهد بود.

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$$

مثال ۱-۳۷

برای ماتریس A داریم،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 20 & -2 \\ 9 & -2 & 106 \end{bmatrix}$$

□

نکته۳: معکوس یک ماتریس متقارن، در صورتیکه وجود داشته باشد، یک ماتریس متقارن است.

$$AA^{-1} = I \rightarrow (A^{-1})^T A^T = I^T \xrightarrow[I=I^T]{A=A^T} (A^{-1})^T A = I = A^{-1} A \rightarrow \boxed{(A^{-1})^T = A^{-1}}$$

۱-۲-۱۹- ماتریس قطری و ماتریس مثلثی

ماتریس قطری[1] ماتریس مربعی است که تمام درایه های آن به جز عناصر روی قطر اصلی همگی صفر هستند. فرم کلی یک ماتریس قطری به شکل زیر می باشد،

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad a_{ij}=0, \quad i\neq j \qquad (۱-۶۴)$$

نکته۱: دترمینان یک ماتریس قطری برابر با حاصلضرب کلیه عناصر روی قطر اصلی می باشد،

$$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

لذا ماتریس قطری A غیرمنفرد است، اگر هیچ یک از عناصر روی قطر اصلی آن صفر نباشند.

نکته۲: فرم دیگر نمایش ماتریس قطری به شکل زیر است،

$$diag(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$$

مثال۱-۴۶

ماتریس های زیر نمونه هایی از ماتریس های قطری می باشند،

$$A=\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ماتریس های مثلثی را می توان به دو صورت **بالا مثلثی**[۱] و **پایین مثلثی**[۲] بیان کرد، شکل کلی یک ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی بصورت زیر می باشد،

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad U_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \le j \\ 0 & i > j \end{cases} \tag{۶۵-۱}$$

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad L_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \ge j \\ 0 & i < j \end{cases} \tag{۶۶-۱}$$

---

[۱] Upper Triangular
[۲] Lower Triangular

نکته۱: دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر با حاصلضرب کلیه عناصر قطر اصلی می باشد،

$$|L| = |U| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

لذا ماتریس مثلثی A غیرمنفرد است، اگر هیچ یک از عناصر روی قطر اصلی آن صفر نباشند.

مثال۱-۴۷

ماتریس های زیر نمونه ای از ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی می باشد،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

۱-۲-۲۰- ماتریس متعامد[1]

به ماتریس A **متعامد** گفته می شود، اگر حقیقی بوده و رابطه زیر را برآورده سازد،

$$A^T A = AA^T = I \qquad (۱-۶۷)$$

نکته۱: ستون های ماتریس متعامد بردارهای یکامتعامد هستند.

نکته۲: در یک ماتریس متعامد، بدیهی است که باید $|A| = \pm 1$ باشد و لذا ماتریس A غیر منفرد است.

نکته۳: در یک ماتریس متعامد معکوس ماتریس برابر با ترانهاده آن ماتریس است. $A^{-1} = A^T$

نکته۴: اگر A و B ماتریس های مربعی متعامد باشند، آنگاه A^{-1}، A^T و AB نیز ماتریس های متعامد هستند.

$$\begin{matrix} A^T A = AA^T = I \\ B^T B = BB^T = I \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 1.\ (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1} = I = (A^T A)^{-1} \\ \qquad = A^{-1}(A^T)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^T \\ 2.\ (A^T)^T A^T = AA^T = I = A^T A = A^T (A^T)^T \\ 3.\ \begin{matrix} (AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = I \\ AB(AB)^T = ABB^T A^T = AA^T = I \end{matrix} \end{cases}$$