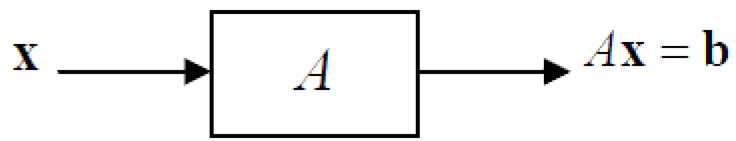
فصل چهارم

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۵-۲ مقدار ویژه، بردار ویژه و معادله مشخصه

دستگاه معادلات $A_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{n\times 1}$ را در نظر بگیرید. این سیستم را می توان بصورت نگاشتی در فضای برداری $\Re^n$ در نظر گرفت، که هر بردار $\mathbf{x}$ را به یک بردار $\mathbf{b}$ تبدیل می کند،



در بین این نگاشت ها مواردی وجود دارند که تنها اندازه بردار $\mathbf{x}$ را تغییر می کند و امتداد آن حفظ می گردد، به عبارتی بردار $\mathbf{b}$ بصورت مضربی از بردار $\mathbf{x}$ تعریف می گردد. در اینصورت نگاشت حاصل به شکل زیر تعریف می شود،

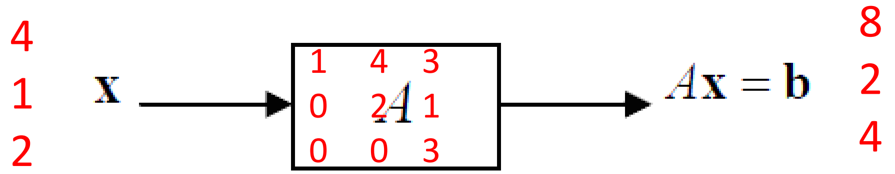
$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \tag{۵-۱}$$

به بردارهای $\mathbf{x}_i$ غیر صفر که چنین خاصیتی را دارند **بردار ویژه**[۱] ماتریس $A_{n\times n}$ گویند و ضریب ثابت λ_i را **مقدار ویژه**[۲] ماتریس $A_{n\times n}$ می نامند. با توجه به تعریف داریم،

$$(\lambda_i I-A)\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$$

۲-۵ مقدار ویژه، بردار ویژه و معادله مشخصه

دستگاه معادلات $A_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}=\mathbf{b}_{n\times 1}$ را در نظر بگیرید. این سیستم را می توان بصورت نگاشتی در فضای برداری $\Re^n$ در نظر گرفت، که هر بردار $\mathbf{x}$ را به یک بردار $\mathbf{b}$ تبدیل می کند،



در بین این نگاشت ها مواردی وجود دارند که تنها اندازه بردار $\mathbf{x}$ را تغییر می کند و امتداد آن حفظ می گردد، به عبارتی بردار $\mathbf{b}$ بصورت مضربی از بردار $\mathbf{x}$ تعریف می گردد. در اینصورت نگاشت حاصل به شکل زیر تعریف می شود،

$$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \tag{۱-۵}$$

به بردارهای $\mathbf{x}_i$ غیر صفر که چنین خاصیتی را دارند **بردار ویژه**[۱] ماتریس $A_{n\times n}$ گویند و ضریب ثابت λ_i را **مقدار ویژه**[۲] ماتریس $A_{n\times n}$ می نامند. با توجه به تعریف داریم،

$$(\lambda_i I - A)\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$$

لذا بردارهای ویژه $\mathbf{x}_i$ متعلق به فضای پوچی ماتریس $(\lambda_i I - A)$ بوده و مقادیر ویژه λ_i ریشه های چندجمله ای **مونیک**[۳] و مرتبه n حاصل از $|\lambda I - A|$ هستند. حال اگر $|\lambda I - A|$ را بسط دهیم، چند جمله ای بصورت زیر بیان می گردد،

دترمینان

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

که به آن **چندجمله ای مشخصه**[۴] ماتریس $A_{n\times n}$ می گویند. ریشه های چندجمله ای مشخصه همان مقادیر ویژه خواهند بود که به تعداد n تا هستند.

نکته۱: برای ماتریس حقیقی $A_{n\times n}$ معادله مشخصه $|\lambda I-A|=0$ یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه بصورت حقیقی یا به فرم مختلط مزدوج $\alpha \pm j\beta$ هستند.

نکته۲: اگر بردار $\mathbf{v}_i$ یک بردار ویژه باشد، آنگاه برای هر اسکالر مخالف صفر مانند α، حاصل $\alpha\mathbf{v}_i$ نیز یک بردار ویژه خواهد بود.

نکته۳: اگر λ یک مقدار ویژه برای ماتریس A و بردار $\mathbf{v}$ بردار ویژه متناظر با آن باشد، در اینصورت λ^k نیز یک مقدار ویژه برای ماتریس A^k با بردار ویژه متناظر $\mathbf{v}$ خواهد بود. (k مقدار صحیح مثبت می باشد).

$$\begin{aligned}A^k\mathbf{v} &= A^{k-1}(A\mathbf{v}) = A^{k-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A^{k-2}(A\mathbf{v})\\ &= \lambda A^{k-2}(\lambda\mathbf{v}) = \cdots = \lambda^{k-1}(A\mathbf{v}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^k\mathbf{v}\end{aligned}$$

نکته۴: برای ماتریس $A_{n\times n}$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ دترمینان و اثر ماتریس بصورت زیر قابل محاسبه است،

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad \text{و} \quad \operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{۳-۵}$$

می دانیم چندجمله ای مشخصه برای ماتریس $A_{n\times n}$ یک چندجمله ای مرتبه n و مونیک است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

این چندجمله ای را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n)$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه هستند که می توانند حقیقی یا مختلط مزدوج و متمایز یا تکراری باشند. حال اگر در رابطه بالا $\lambda = 0$ قرار دهیم مقدار $|A|$ بدست می آید،

$$|A| = (\lambda_1)(\lambda_2)\cdots(\lambda_{n-1})(\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

برای اثبات اثر ماتریس بصورت زیر عمل می کنیم،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

حال دترمینان را برحسب ستون اول بسط می دهیم،

$$|\lambda I-A|=(\lambda-a_{11})|M_{11}|-\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}|M_{i1}|$$

اگر حاصل $|M_{11}|$ را بدست آوریم داریم،

$$|M_{11}|=(\lambda-a_{22})|M'_{11}|-\sum_{i=3}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}|M'_{i1}|$$

به همین ترتیب اگر بسط را ادامه دهیم داریم،

$$|\lambda I-A|=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})+P(\lambda)$$

$P(\lambda)$ یک چندجمله ای با درجه $n-2$ است. لذا ضریب بزرگترین درجه یک و ضریب درجه بعدی $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ خواهد بود. از طرفی داریم،

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_{n-1})(\lambda-\lambda_n)$$

و در اینجا ضریب دومین جمله $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ است. پس داریم،

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = \mathrm{trace}(A)$$

نکته۵: اگر λ_i یک مقدار ویژه برای ماتریس A باشد، λ_i^{-1} مقدار ویژه ماتریس A^{-1} خواهد بود.

$$|\lambda I - A| = |\lambda A^{-1}A - A| = |(\lambda A^{-1} - I)A| = |\lambda A^{-1} - I|\ |A| = |\lambda|\ |A^{-1} - \lambda^{-1} I|\ |A| = 0$$

$$|\lambda^{-1} I_n - A^{-1}| = 0$$

نکته۶: ستون های غیر صفر ماتریس $adj(\lambda_i I - A)$ بردارهای ویژه ماتریس A هستند.

$$adj(\lambda I - A) = (\lambda I - A)^{-1}|\lambda I - A|$$

$$(\lambda I - A)adj(\lambda I - A) = |\lambda I - A|I$$

$$(\lambda_i I - A)adj(\lambda_i I - A) = |\lambda_i I - A|I = \mathbf{0}$$

رابطه اخیر نشان می دهد که ستون های غیر صفر ماتریس $adj(\lambda_i I - A)$ باید متعلق به فضای پوچی ماتریس $(\lambda_i I - A)$ باشند، لذا همان بردارهای ویژه ماتریس A هستند.

نکته۷: ضرایب معادله مشخصه یک ماتریس را می توان با استفاده از الگوریتم بازگشتی زیر بدست آورد،

$$\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 \\
c_{n-1} &= -W_1 \\
c_{n-2} &= -\frac{1}{2}(c_{n-1}W_1 + W_2) \\
c_{n-3} &= -\frac{1}{3}(c_{n-2}W_1 + c_{n-1}W_2 + W_3) \\
&\vdots \\
c_0 &= -\frac{1}{n}(c_1W_1 + c_2W_2 + \cdots + c_{n-1}W_{n-1} + W_n)
\end{aligned} \tag{۴-۵}$$

در اینجا $W_k = \mathrm{trace}(A^k)$ است. اثبات به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

نکته۹: در ماتریس های قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی عناصر روی قطر اصلی همان مقادیر ویژه ماتریس هستند. در مورد ماتریس های خاص شرایط ویژه ای برای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه وجود دارد،

- ماتریس متقارن و هرمیتی($A = A^T , A = A^*$) مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه متعامد،

- ماتریس متعامد و یکین($A^{-1} = A^T , A^{-1} = A^*$) مقادیر ویژه $|\lambda_i| = 1$ و بردارهای ویژه متعامد،

- ماتریس شبه متقارن ($A = -A^T$) مقادیر ویژه موهومی و بردارهای ویژه متعامد،

- ماتریس تصویر ($A = A^2 = A^T$) مقادیر ویژه صفر و یک و بردارهای ویژه پایه های فضای گستره و فضای پوچی ماتریس،

مثال ۵-۲

معادله مشخصه ماتریس زیر را با استفاده از الگوریتم ارائه شده بر حسب اثر ماتریس بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس بصورت زیر است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

و ضرایب c_1 و c_0 بصورت زیر بدست می آیند،

$$c_2 = -W_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}(c_2 W_1 + W_2)$$

$$c_0 = -\frac{1}{3}(c_1 W_1 + c_2 W_2 + W_3)$$

لذا ماتریس های A^2 و A^3 را تشکیل می دهیم،

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 24 & -12 \\ 8 & 29 & -14 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{bmatrix} -43 & -148 & 74 \\ -51 & -177 & 88 \\ 9 & 28 & -15 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \text{trace}(A) = -7, \quad W_2 = \text{trace}(A^2) = 39, \quad W_3 = \text{trace}(A_3) = -235$$

$$c_2 = 7$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}(7 \times (-7) + 39) = 5$$

$$c_0 = -\frac{1}{3}(5 \times (-7) + 7 \times 39 + (-235)) = -1$$

بنابراین معادله مشخصه بصورت زیر بدست می آید،

$$\left|\lambda I - A\right| = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 5\lambda - 1$$

مثال ۵-۴

ثابت کنید که برای ماتریس های مربعی $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ داریم،

$$|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$$

برای اثبات بصورت زیر عمل می کنیم، می دانیم $AA^{-1} = I$ است،

$$|\lambda I - AB| = |\lambda AA^{-1} - ABAA^{-1}| = |A(\lambda I - BA)A^{-1}| = |A||\lambda I - BA||A^{-1}|$$

$$= |A||\lambda I - BA|\frac{1}{|A|} = |\lambda I - BA|$$

□

مثال۵-۵

ماتریس A را در حالتهای مختلف در نظر بگیرید برای هر حالت معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda+4 & -2\\ -3 & \lambda+5\end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2+9\lambda+14=0$$

- با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^2+9\lambda+14=(\lambda+7)(\lambda+2)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=-7, \lambda_2=-2$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی متمایز یا غیر تکراری دارد.

- حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه را محاسبه می کنیم،

روش اول: استفاده از تعریف بردار ویژه،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow (\lambda_i I - A)\mathbf{v}_i = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_i + 4 & -2 \\ -3 & \lambda_i + 5 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -7 \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -3x_1 - 2x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-2}{3} x_2 \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2x_3 - 2x_4 = 0 \rightarrow x_3 = x_4 \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

روش دوم: استفاده از ماتریس الحاقی،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda+4 & -2 \\ -3 & \lambda+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+5 & 2 \\ 3 & \lambda+4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -7 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(-7\mathrm{I} - A) = \begin{bmatrix} -2 & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}} \\ 3 & \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(-2\mathrm{I} - A) = \begin{bmatrix} 3 & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}} \\ 3 & \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که در این حالت بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند،

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-6) = 10$$

از آنجائیکه مقدار دترمینان مخالف صفر است، لذا بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند.

ب) $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -5 \\ 8 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 + 4 = 0$$

- با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^2 + 4 = (\lambda - j2)(\lambda + j2) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = j2, \lambda_2 = -j2$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه مزدوج موهومی دارد.

- بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda_1 = j2 \rightarrow A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = j2 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \rightarrow v_{11} = (\frac{-3}{4} - j\frac{1}{4}) v_{21}$$

$$\lambda_2 = -j2 \rightarrow A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = -j2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \rightarrow v_{12} = (\frac{-3}{4} + j\frac{1}{4}) v_{22}$$

از این رو بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ را می توان بدین صورت نوشت،

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} - j\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} + j\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که در این حالت بردارهای ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ مستقل خطی هستند،

$$\begin{vmatrix} \frac{-3}{4} - j\frac{1}{4} & \frac{-3}{4} + j\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

قضیه۱: اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n مقدار ویژه متمایز $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ باشد، آنگاه n بردار ویژه مستقل خطی $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$ وجود خواهد داشت.

اثبات: فرض کنیم فقط k تا از این بردارها مستقل خطی باشند،

$$\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k \qquad (۵-۵)$$

طرفین رابطه بالا را در A ضرب کنیم،

$$A\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1 A\mathbf{v}_1+\alpha_2 A\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k A\mathbf{v}_k$$

می دانیم $A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$ ،

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_k\mathbf{v}_k \qquad (۶-۵)$$

اگر طرفین رابطه(۵-۵) را در λ_{k+1} ضرب می کنیم،

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}=\alpha_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1+\alpha_2\lambda_{k+1}\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k\lambda_{k+1}\mathbf{v}_k \qquad (۷-۵)$$

با تفاضل رابطه(۵-۶) و (۵-۷) داریم،

$$\alpha_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\mathbf{v}_1+\alpha_2(\lambda_{k+1}-\lambda_2)\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$$

طبق فرض $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_k$ مستقل خطی و مقادیر ویژه مجزا هستند، لذا باید،

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$$

بنابراین طبق رابطه(۵-۵) باید $\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{0}$ باشد که با شرط $\mathbf{v}_{k+1}\neq\mathbf{0}$ بردار ویژه منافات دارد. پس نمی توان $\mathbf{v}_{k+1}$ را بصورت ترکیب خطی از $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_k$ نوشت و $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$ مستقل خطی هستند.

نکته: اگر ماتریس $A_{n\times n}$ یک مقدار ویژه تکراری از مرتبه k داشته باشد، آنگاه حداقل یک و حداکثر k بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقدار ویژه تکراری λ_i وجود خواهد داشت و تعداد بردارهای مستقل خطی در این حالت برابر با $n-\operatorname{rank}(A-\lambda_i I)$ است.

مثال ۵-۶

برای ماتریس A معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بدست آورید.

الف) $$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 2 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^3-12\lambda^2+46\lambda-60=0$$

- پس از حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 46\lambda - 60 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 6, \lambda_{2,3} = 3 \pm j$$

بنابراین ماتریس A یک مقدار ویژه حقیقی و دو مقدار ویژه مختلط مزدوج دارد.

- بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را با استفاده از تعریف بردار ویژه بدست می آوریم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 6 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 + j \rightarrow \begin{bmatrix} -1+j & 2 & 0 \\ -1 & 1+j & 0 \\ 0 & 0 & -3+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 - j \rightarrow \begin{bmatrix} -1-j & 2 & 0 \\ -1 & 1-j & 0 \\ 0 & 0 & -3-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1-j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب) $A=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

- معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$\left|\lambda I_3 - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & -3 & 8 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3-\lambda^2-16\lambda-20=0$$

- با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه را بدست می آوریم،

$$\lambda^3-\lambda^2-16\lambda-20=(\lambda+2)^2(\lambda-5)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2}=-2, \lambda_3=5$$

بنابراین ماتریس A دو مقدار ویژه حقیقی تکراری و یک مقدار ویژه متمایز دارد.

- حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از مقادیر ویژه را محاسبه می کنیم، از آنجاییکه $n-\mathrm{rank}(A-\lambda_1 I)=3-2=1$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=-2$ فقط یک بردار ویژه مستقل خطی داریم. با استفاده از تعریف بردار ویژه داریم،

$$\lambda_1=-2\rightarrow A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1\rightarrow\begin{bmatrix}6&3&-8\\0&-2&0\\1&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\\v_{31}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}v_{11}=v_{31}\\v_{21}=0\end{cases}$$

$$\lambda_3=5\rightarrow A\mathbf{v}_3=\lambda_3\mathbf{v}_3\rightarrow\begin{bmatrix}6&3&-8\\0&-2&0\\1&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}v_{13}\\v_{23}\\v_{33}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}v_{13}=8v_{33}\\v_{23}=0\end{cases}$$

از این رو بردار ویژه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_3$ را می توان بدین صورت نوشت،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad,\quad\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}8\\0\\1\end{bmatrix}$$

بطور مشابه با روش ماتریس الحاقی نیز می توان محاسبه کرد،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda-6 & -3 & 8 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2+5\lambda+6 & 3\lambda+9 & -8\lambda-16 \\ 0 & \lambda^2-3\lambda-10 & 0 \\ \lambda+2 & 3 & \lambda^2-4\lambda-12 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj(-2I - }A) = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj(5I - }A) = \begin{bmatrix} 56 & \boxed{24} & -56 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 7 & \boxed{3} & -7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۴-۵ قطری سازی ماتریس های مربعی

یکی از کاربردهای مهم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در قطری سازی ماتریس های مربعی است. اگر یک ماتریس $A_{n\times n}$ دارای n بردار ویژه مستقل خطی باشد، این ماتریس را با تبدیل همانندی می توان قطری نمود. ولی ماتریسی که مجموعه کاملی از n بردار ویژه مستقل خطی را نداشته باشد نمی تواند قطری گردد، چنین ماتریسی را باید به فرم کانونیکال جردن تبدیل کرد.

۵-۴-۱- ماتریس های همانند

ماتریس های $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ را **همانند**[۱] گویند اگر یک ماتریس غیرمنفرد مانند T وجود داشته باشد، چنانکه عبارت زیر برقرار گردد،

$$T^{-1}AT = B \qquad (۸-۵)$$

در اینصورت می گوییم ماتریس B با یک **تبدیل همانندی**[۲] از ماتریس A بدست آمده است و ماتریس غیرمنفرد T را **ماتریس تبدیل** گویند. همچنین ماتریس A را می توان از طریق ماتریس تبدیل T^{-1} بدست آورد،

$$A = TBT^{-1} \qquad (۹-۵)$$

نکته۱: دترمینان دو ماتریس همانند $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$ یکسان می باشد،

$$|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}|\ |A|\ |T| = \frac{1}{|T|}|A|\ |T| = |A|$$

لذا با اعمال یک تبدیل همانندی دترمینان ماتریس تغییر نمی کند.

نکته۲: معادله مشخصه یک ماتریس مانند $A_{n\times n}$ تحت تبدیل همانندی تغییر نمی یابد،

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - B| = 0$$

این موضوع را می توان به این شکل نشان داد،

$$|\lambda I - B| = |\lambda I - T^{-1}AT| = |\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT| = |T^{-1}(\lambda I - A)T|$$

$$= |T^{-1}|\ |\lambda I - A|\ |T| = \frac{1}{|T|}|\lambda I - A|\ |T| = |\lambda I - A|$$

لذا با اعمال یک تبدیل همانندی مقادیر ویژه ماتریس تغییر نمی کند.

نکته۳: یک خاصیت از یک ماتریس را **تغییرناپذیر** گویند، اگر کلیه ماتریس های همانند ماتریس A ، آن خاصیت را دارا باشند. این خواص عبارتند از اثر، دترمینان، رتبه، مقادیر ویژه، تعداد بردارهای مستقل خطی و فرم جردن یک ماتریس که تمامی این موارد تحت تبدیل های همانندی تغییرناپذیر هستند.

مثال ۵-۱۲

ماتریس های A و B تحت ماتریس تبدیل T همانند هستند،

$$A=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}8 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=B$$

$$TBT^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 0 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -4 & 3\end{bmatrix}=A$$

حال برخی از خواص تغییر ناپذیر تحت تبدیل های همانندی را بررسی می نماییم،

$$\mathrm{trace}(A)=6+3=9 \qquad \mathrm{trace}(B)=8+1=9$$

$$\det(A)=18-8=10 \qquad \det(B)=8+2=10$$

$$\mathrm{rank}(A)=2 \qquad \mathrm{rank}(B)=2$$

$$\lambda_{1A}=7.7016, \lambda_{2A}=1.298 \quad \lambda_{1B}=7.7016, \lambda_{2B}=1.2984$$

□

۵-۴-۲- قطری سازی ماتریس ها با مقادیر ویژه متمایز و حقیقی

اگر مقادیر ویژه یک ماتریس $A_{n\times n}$ متمایز باشند، آنگاه دقیقاً n بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد که می توان با استفاده از آنها یک ماتریس تبدیل T بدست آورد که می تواند ماتریس $A_{n\times n}$ را به یک ماتریس قطری تبدیل کند. اگر $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ بردارهای ویژه مستقل خطی برای ماتریس $A_{n\times n}$ باشند، در اینصورت ماتریس تبدیل T را بصورت زیر تعریف می کنیم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

$$A\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$AT = T\Lambda$$

$$T = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n] \qquad (۵-۱۰)$$

به این ماتریس تبدیل T که ماتریس $A_{n\times n}$ را به فرم قطری تبدیل می کند، **ماتریس مُدال** [1] گویند و فرم قطری سازی شده ماتریس $A_{n\times n}$ بصورت زیر نمایش داده می شود،

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (۵-۱۱)$$

λ_i ها مقادیر ویژه ماتریس A هستند و به ماتریس Λ **صورت قطری** [2] ماتریس A گفته می شود.

نکته۱: اگر ماتریس A بصورت $\Lambda = T^{-1}AT$ قطری سازی شده باشد،

۱- برای هر مقدار صحیح مثبت k داریم، $A^k = T\Lambda^k T^{-1}$.

۲- اگر کلیه عناصر قطری Λ غیر صفر باشند، در اینصورت A معکوس پذیر بوده و داریم،

$$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1}$$

مثال۵-۱۳

فرم قطری سازی شده ماتریس A را بدست آورید، سپس مقدار A^{-1} و A^{20} را محاسبه نمایید.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda+6 & 2 \\ -5 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3+2\lambda^2-29\lambda-30=0$$

با حل معادله مشخصه مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 29\lambda - 30 = (\lambda+6)(\lambda+1)(\lambda-5) = 0 \rightarrow \qquad \lambda_1 = -6, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$$

لذا ماتریس A سه مقدار ویژه متمایز دارد. حال می توان سه بردار ویژه مستقل خطی متناظر با هر یک از مقادیر ویژه بدست آورد.

$$\lambda_1 = -6 \rightarrow A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = -6 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{-9}{25} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \rightarrow A\mathbf{v}_3 = \lambda_3 \mathbf{v}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-3}{11} \\ 1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید، از آنجائیکه $A(\alpha \mathbf{v}_i) = \lambda_i (\alpha \mathbf{v}_i)$ می باشد، یعنی مضارب اسکالر یک بردار ویژه نیز خود یک بردار ویژه است، لذا می توان مقدار α را چنان انتخاب کرد که ماتریس مدّال T حدالامکان ساده باشد. لذا ماتریس مدّال T بصورت زیر بدست می آید،

$$T = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال می توان ماتریس قطری سازی شده را بدست آورد.

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55} \\ \frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

همانطور که دیده می شود عناصر قطری ماتریس همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

$$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55} \\ \frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{7}{30} \\ 1 & 0 & \frac{-4}{5} \end{bmatrix}$$

$$A^{20} = T\Lambda^{20}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{-9}{25} & \frac{-3}{11} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-6)^{20} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-4}{55} & 1 & \frac{19}{55} \\ \frac{-5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

مثال ۵-۱۴

فرم قطری سازی شده و ماتریس مدال ماتریس A را بدست آورید،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را بدست می آوریم،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -10 & 2 \\ -10 & \lambda - 5 & -8 \\ 2 & -8 & \lambda - 11 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 18)(\lambda - 9)(\lambda + 9) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 18, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = -9$$

از آنجاییکه سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد می توان فرم قطری کامل را بدست آورد. فرم قطری کامل به صورت زیر است،

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس تبدیل همانندی را می یابیم که رابطه $\Lambda = T^{-1}AT$ را برآورده سازد. برای این منظور باید بردارهای ویژه نظیر هر یک از مقادیر ویژه را بدست آوریم،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = \mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -10 & 2 \\ -10 & \lambda - 5 & -8 \\ 2 & -8 & \lambda - 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 - 16\lambda - 9 & 10\lambda - 126 & 90 - 2\lambda \\ 10\lambda - 126 & \lambda^2 - 13\lambda + 18 & 8\lambda - 36 \\ 90 - 2\lambda & 8\lambda - 36 & \lambda^2 - 7\lambda - 90 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 18 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(18I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 27 & 54 & 54 \\ 54 & 108 & 108 \\ 54 & 108 & 108 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 27 \\ 54 \\ 54 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(9I\text{-}A) = \begin{bmatrix} -72 & -36 & 72 \\ -36 & -18 & 36 \\ 72 & 36 & -72 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -72 \\ -36 \\ 72 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -9 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(-9I\text{-}A) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 216 \\ -216 \\ 108 \end{matrix}} & \begin{matrix} -216 \\ 216 \\ -108 \end{matrix} & \begin{matrix} 108 \\ -108 \\ 54 \end{matrix} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 216 \\ -216 \\ 108 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دقت کنید برای ایجاد ماتریس مّدال در انتخاب بردار ویژه باید ستون های همسان را در ماتریس الحاقی انتخاب نمود . لذا ماتریس مّدال T به شکل زیر خواهد بود،

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته۲: ماتریس $A_{n\times n}$ بصورت زیر را **فرم همبسته**[۳] می نامند،

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (۵-۱۲)$$

برای یک ماتریس به فرم همبسته معادله مشخصه بصورت زیر قابل بیان است،

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (۵-۱۳)$$

که ریشه های آن همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند. همچنین بردار ویژه $\mathbf{v}_i$ متناظر با هر مقدار ویژه متمایز λ_i بشکل زیر بدست می آید،

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \cdots & \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}^T \quad (۵-۱۴)$$

در این صورت ماتریس مُدال T به شکل زیر خواهد بود، که به آن **ماتریس وندرموند**[1] گویند،

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

فرم دیگری از ماتریس همبسته به شکل زیر می باشد،

$$A_C=\begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۶\text{-}۵)$$

در اینصورت بردار ویژه $\mathbf{v}_i$ متناظر با هر مقدار ویژه متمایز λ_i بشکل زیر بدست می آید،

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i^{n-1} & \lambda_i^{n-2} & \cdots & \lambda_i & 1 \end{bmatrix}^T \qquad (۱۷\text{-}۵)$$

و ماتریس وندرموند به صورت زیر محاسبه می شود،

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & & \lambda_n^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۱۸\text{-}۵)$$

می توان نشان داد که در ماتریس وندرموند، دترمینان ماتریس T بصورت زیر قابل محاسبه است،

$$|T| = \prod_{1<i<j<n} (\lambda_i - \lambda_j) \qquad (۱۹\text{-}۵)$$

مثال ۵-۱۵

فرم قطری سازی شده ماتریس همبسته A_C را بدست آورید،

$$A_C = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A_C بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 9 & 26 & 24 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3 + 24\lambda^2 + 26\lambda + 9 = 0$$

مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می آیند،

$$\lambda^3 + 24\lambda^2 + 26\lambda + 9 = (\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda+2) = 0 \rightarrow \quad \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -2$$

از آنجائیکه ماتریس A_C همبسته بوده و سه مقدار ویژه متمایز دارد، لذا می توان برای قطری سازی آن ماتریس وندرموند را بدست آورد،

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 & 4 \\ -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فرم قطری ماتریس A_C به شکل زیر می باشد،

$$\Lambda = T^{-1} A_C T$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.5 & 3 \\ -1 & -6 & -8 \\ 0.5 & 3.5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 9 & 4 \\ -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

قضیه کیلی- هامیلتون: هر ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق می کند.

اثبات: برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ داریم،

$$|\lambda I - A| = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n \qquad (۶-۳)$$

در اینصورت ماتریس $\mathrm{Adj}(\lambda I - A)$ که یک ماتریس با عناصری از چندجمله ای های با درجه کوچکتر یا مساوی $n-1$ است، بصورت زیر تعریف می شود،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1} \qquad (۶-۴)$$

که در آن $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ ماتریس های $n\times n$ می باشند.

از طرفی می توان نشان داد که برای هر ماتریس مربعی مانند $B_{n\times n}$ رابطه زیر برقرار است،

$$(\mathrm{Adj}(B))B = B(\mathrm{Adj}(B)) = |B|I_n$$

با توجه به این مسئله می توان نوشت،

$$(\lambda I\text{-}A)\mathrm{Adj}(\lambda I - A) = |\lambda I - A|I_n \qquad (۶-۵)$$

با قرار دادن رابطه(۶-۳) و (۶-۴) در رابطه (۶-۵) عبارت زیر بدست می آید،

$$(\lambda I - A)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)I_n$$

از رابطه اخیر می توان تساوی های زیر را نتیجه گرفت،

$$
\begin{aligned}
&-AB_0 = \alpha_0 I_n \\
&B_0 - AB_1 = \alpha_1 I_n \\
&B_1 - AB_2 = \alpha_2 I_n \\
&\qquad \vdots \\
&B_{n-2} - AB_{n-1} = \alpha_{n-1} I_n \\
&B_{n-1} = I_n
\end{aligned}
$$

با پیش ضرب کردن معادلات بالا به ترتیب در $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}, A^n$ و جمع کردن طرفین آنها عبارت زیر بدست می آید،

$$\mathbf{0} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + A^n$$

بنابراین ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ در معادله مشخصه خود صدق می کند.

□

مثال ۶-۳

صحت قضیه کیلی- هامیلتون را برای ماتریس A بررسی کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه برای ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & -16 \\ 1 & \lambda+4 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

حال ماتریس A را در این معادله قرار داده و حاصل را محاسبه می کنیم،

$$A^2 - 2A - 8I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 32 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب صحت قضیه کیلی- هامیلتون تصدیق می شود.

□

۶-۲-۱- محاسبه ماتریس معکوس

یکی از کاربردهای قضیه کیلی- هامیلتون محاسبه ماتریس معکوس است،

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = \mathbf{0}$$

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A = -\alpha_0 I$$

$$A(A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I) = -\alpha_0 I$$

$$\frac{-1}{\alpha_0}A(A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I) = I = AA^{-1}$$

لذا ماتریس معکوس به کمک قضیه کیلی- هامیلتون با استفاده از چندجمله ای مشخصه ماتریس بدست می آید،

$$A^{-1} = \frac{-1}{\alpha_0}(A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 I) \qquad (۶-۶)$$

مثال ۶-۴

با استفاده از قضیه کیلی- هامیلتون مقدار A^{-1} را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه برای ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I_2-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -16\\ 1 & \lambda+4\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad \lambda^2-2\lambda-8=0$$

برای محاسبه A^{-1} می توان بصورت زیر عمل کرد،

$$A^2-2A-8I_2=0\rightarrow \quad \frac{1}{8}(A^2-2A)=I=AA^{-1}\rightarrow \quad \frac{1}{8}A(A-2I)=AA^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}(A-2I)\rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}6 & 16\\ -1 & -4\end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 2\\ \frac{-1}{8} & \frac{-3}{4}\end{bmatrix}$$

تجزیه مقادیر منفرد

۲-۷ مقادیر منفرد

برای ماتریس مختلط $A_{m\times n}$ ماتریس A^*A و AA^* یک ماتریس هرمیتی و مثبت معین است. اگر $m < n$ باشد، جذر مقادیر ویژه AA^* و اگر $m > n$ باشد جذر مقادیر ویژه A^*A را مقادیر منفرد[1] ماتریس A می نامند. برای ماتریس حقیقی $A_{m\times n}$ جذر مقادیر ویژه ماتریس های متقارن A^TA و AA^T در نظر گرفته می شود.

مثال ۷-۱

مقادیر منفرد ماتریس A را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

از آنجائیکه ماتریس A حقیقی است، لذا مقادیر منفرد بصورت جذر مقادیر ویژه ماتریس AA^T تعریف می شود.

$$AA^T=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 1\\ 1 & 11\end{bmatrix}$$

حال مقادیر ویژه ماتریس AA^T را بدست می آوریم،

$$\left|\lambda I-AA^T\right|=\begin{vmatrix}\lambda-11 & -1\\ -1 & \lambda-11\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda-12)$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس AA^T عبارتند از،

$$\lambda_1=12,\qquad \lambda_2=10$$

از این رو مقادیر منفرد برای ماتریس A بصورت زیر بدست می آیند،

$$\sigma_1=\sqrt{12},\qquad \sigma_2=\sqrt{10}$$

۷-۲-۱- تعیین رتبه ماتریس

از جمله کاربردهای مقادیر منفرد تعیین رتبه ماتریس است. رتبه یک ماتریس برابر با تعداد مقادیر منفرد غیر صفر آن ماتریس است.

مثال۷-۲

با توجه به مقادیر منفرد هر ماتریس رتبه آن را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

- برای ماتریس A داریم،

$$\left|\lambda I-A^{T}A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-6 & -1\\ -1 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-5)\rightarrow \lambda_1=7, \quad \lambda_2=5$$

مقادیر منفرد برای ماتریس A عبارتند از، $\sigma_1=\sqrt{7},\sigma_2=\sqrt{5}$ لذا رتبه ماتریس A دو است.

- برای ماتریس B داریم،

$$\left|\lambda I-B^{T}B\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -3\\ 0 & -4 & \lambda-1\end{vmatrix} \quad\rightarrow\quad \lambda_1=18, \quad \lambda_2=8, \quad \lambda_3=1$$

مقادیر منفرد ماتریس B عبارتند از، $\sigma_1=\sqrt{18},\sigma_2=\sqrt{8},\sigma_3=1$ لذا رتبه ماتریس B سه است.

□