فصل سوم

فضاهای برداری

۳-۲ فضاهای برداری

در مطالعه مفاهیم جبرخطی و دستگاه معادلات جبری مفهوم **میدان**[۱] و **فضای برداری**[۲] از اهمیت ویژه ای برخوردار است و اساس کلیه تحلیل های جبرخطی را تشکیل می دهد.

۳-۲-۱- مفهوم میدان

یک میدان مجموعه ای از اسکالرها است به طوریکه همراه با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می سازد،

۱- برای هر اسکالر a و b متعلق به میدان F یک اسکالر متناظر $a+b$ در F وجود دارد، که مجموع a و b نامیده می شود. (بسته بودن مجموعه نسبت به عمل جمع)

۲- برای هر اسکالر a و b متعلق به میدان F یک اسکالر متناظر ab در F وجود دارد، که حاصلضرب a و b نامیده می شود. (بسته بودن مجموعه نسبت به عمل ضرب)

۳- برای هر اسکالر a، b و c متعلق به میدان F قوانین زیر برقرار می باشند،

قوانین جابجایی پذیری 1. $a+b=b+a\,,\quad ab=ba$

قوانین شرکت پذیری 2. $(a+b)+c=a+(b+c),\quad (ab)c=a(bc)$

قوانین توزیع پذیری 3. $a(b+c)=ab+ac$

عضو خنثی در عمل جمع 4. $\forall a\in F,\quad \exists 0\in F\to\quad a+0=a$

عضو خنثی در عمل ضرب 5. $\forall a\in F,\quad \exists 1\in F\to\quad 1a=a$

عضو معکوس در عمل جمع 6. $\forall a\in F,\quad \exists b\in F\to\quad a+b=0$

عضو معکوس در عمل ضرب 7. $\forall a\in F,\quad \exists b\in F\to\quad ab=1$

مثال ۳-۱

مجموعه های زیر با دو عمل جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان می دهند،

۱- مجموعه اعداد حقیقی $(\Re)$،

۲- مجموعه اعداد مختلط (C)

۳- مجموعه اعداد گویا (Q)

لیکن مجموعه اعداد صحیح (Z) با قواعد جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان نمی دهد زیرا شرط هفتم را برآورده نمی سازد.

$$\beta \in Z \to \frac{1}{\beta} \notin Z$$

□

۳-۲-۲- فضای برداری

یک فضای برداری مانند V بر روی میدان F، مجموعه ای از بردارها است که با دو عمل جمع و ضرب شرایط زیر را برآورده می سازد،

1. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V \to \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$
2. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall c \in F \to \quad c\mathbf{u} \in V$
3. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V \to \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$
4. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V \to \quad \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
5. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists \mathbf{0} \in V \to \quad \mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u}$
6. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists -\mathbf{u} \in V \to \quad \mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u})+\mathbf{u} = \mathbf{0}$
7. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V, \quad \forall a,b \in F \to \quad (a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u}+b\mathbf{u}, \quad a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$
8. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall a,b \in F \to \quad a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
9. $\forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists 1 \in F \to \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

فضایی را که مجهز به نُرم باشد، فضای **اندازه دار**[1] گویند.

مثال ۳-۲

مجموعه های زیر نمونه هایی از فضاهای برداری هستند،

- مجموعه $\Re^n$ (بردارهای n تایی حقیقی) به روی میدان اعداد حقیقی،
- مجموعه $M_{n\times n}(\Re)$ (ماتریس های $n\times n$ با عناصر حقیقی) بر روی میدان اعداد حقیقی ،
- مجموعه ماتریس های متقارن $n\times n$ مختلط بر روی میدان اعداد مختلط،
- مجموعه $P_n(\Re)$ چند جمله ای های مرتبه n به فرم $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ بر روی میدان اعداد حقیقی،

□

مثال ۳-۴

ثابت کنید مجموعه P_k که شامل تمام چند جمله ای هایی است که به فرم زیر می باشد، بر روی میدان $\Re$ تشکیل یک فضای برداری می دهد ($k \in N$ و $p_0, p_1, \ldots, p_k \in \Re$).

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_k x^k$$

مثال۳-۵

اگر $M_{2\times2}(\Re)$ مجموعه تمامی ماتریس های 2×2 با عناصر حقیقی باشد، نشان دهید، این مجموعه همراه با عملیات جمع ماتریس ها و ضرب اعداد حقیقی در ماتریس ها تشکیل یک فضای برداری بر روی میدان اعداد حقیقی می دهد.

۳-۲-۳- زیر فضای برداری

فرض کنیم V یک فضای برداری بر روی میدان F و S یک زیر مجموعه غیر تهی از V باشد. S را یک **زیر فضا**[1] از V می نامند هرگاه،

$$\begin{aligned}&1.\quad \forall \mathbf{s},\mathbf{t}\in S \rightarrow \quad \mathbf{s}+\mathbf{t}\in S\\ &2.\quad \forall \mathbf{s}\in S,\quad \forall a\in F \rightarrow \quad a\mathbf{s}\in S\end{aligned} \qquad (۱-۳)$$

بطور مثال فضای برداری $\Re^n$ یک زیرفضا از فضای برداری C^n به روی میدان C می باشد.

($\Re^n$ فضای n بعدی اقلیدسی و C^n فضای n بعدی اقلیدسی مختلط می باشند.)

۳-۲-۳-۱- زیرفضای ستون های یک ماتریس

یکی از زیرفضاهای مهم و پرکاربرد در مباحث جبر خطی **زیرفضای ستون های**[۱] یک ماتریس است. این زیرفضا مجموعه ای از ترکیبهای خطی ستون های ماتریس مذکور است که با نماد $C(A)$ نمایش داده می شود و همواره زیرفضایی از فضای برداریی است که بردارهای ستونی ماتریس مذکور به آن تعلق دارند.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad C(A) = \{\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n\} \quad (۲-۳)$$

یکی از مهمترین کاربردهای این زیرفضا در بدست آوردن مجموعه جواب دستگاه معادلات جبری خطی است.

نکته۱: اگر بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ متعلق به فضای برداری V باشد، آنگاه کلیه ترکیبهای خطی این بردارها یک زیرفضای برداری از V می باشد.

مثال ۳- ۱۰

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}$$

فرض کنید مجموعه $C(A)$ فضای ستون های ماتریس A که شامل تمامی ترکیب های خطی ستون های ماتریس A است بصورت زیر تعریف شود،

$$C(A)=\left\{\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$$

نشان دهید که $C(A)$ یک زیرفضا از فضای برداری $\Re^3$ است.

باید دو شرط زیر فضا بودن را بررسی نماییم،

شرط اول،

$$1.\quad \forall A,B\in S \quad\rightarrow\quad A+B\in S$$

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+3\beta\\4\alpha+\beta\end{bmatrix}\in C(A)\qquad,\qquad \gamma\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\varphi\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma+3\varphi\\2\gamma+3\varphi\\4\gamma+\varphi\end{bmatrix}\in C(A)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha+3\beta \\ 2\alpha+3\beta \\ 4\alpha+\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma+3\varphi \\ 2\gamma+3\varphi \\ 4\gamma+\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+\gamma)+3(\beta+\varphi) \\ 2(\alpha+\gamma)+3(\beta+\varphi) \\ 4(\alpha+\gamma)+(\beta+\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+3n \\ 2m+3n \\ 4m+n \end{bmatrix} \in C(A)$$

لذا شرط اول برقرار است. حال شرط دوم را بررسی می نماییم،

$$2. \quad \forall A \in \mathrm{S}, \quad \forall a \in \Re \quad \to \quad aA \in \mathrm{S}$$

$$c\begin{bmatrix} \alpha+3\beta \\ 2\alpha+3\beta \\ 4\alpha+\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c\alpha)+3(c\beta) \\ 2(c\alpha)+3(c\beta) \\ 4(c\alpha)+(c\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+3l \\ 2k+3l \\ 4k+l \end{bmatrix} \in C(A)$$

بنابراین $C(A)$ یک زیرفضا از فضای برداری $\Re^3$ است.

□

مثال ۳-۹

آیا مجموعه S یک زیر فضا از $\mathrm{M}_{2\times2}(\Re)$ می باشد؟

$$\mathrm{S}=\left\{\begin{bmatrix}2 & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}\quad \text{تمامی ماتریس ها به فرم}\right\}$$

برای زیر فضا بودن باشد شرایط زیر را داشته باشد،

$$1.\quad \forall A,B\in \mathrm{S}\quad \rightarrow \quad A+B\in \mathrm{S}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & b_{12}\\ 0 & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & a_{12}+b_{12}\\ 0 & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & c_{12}\\ 0 & c_{22}\end{bmatrix}\notin \mathrm{S}$$

$$2.\quad \forall A\in \mathrm{S},\quad \forall a\in \Re \quad \rightarrow \quad aA\in \mathrm{S}$$

از آنجاییکه شرط اول را برآورده نمی کند، لذا نیازی به بررسی شرط دوم نیست و این مجموعه یک زیر فضا برای $\mathrm{M}_{2\times2}(\Re)$ نیست.

□

۳-۲-۴- مفهوم اسپن

اگر $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعه ای از بردارها در فضای برداری V و W مجموعه کلیه ترکیبهای خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ باشد، در اینصورت W یک **اسپن**[۱] از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ است، که بصورت زیر نمایش داده می شود،

$$W=\mathrm{sp}(S) \quad , \quad W=\mathrm{sp}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\} \qquad (۳-۳)$$

$$W=\{c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n : c_1,c_2,\ldots c_n\in\Re\}$$

همچنین می توان گفت، که بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ زیر فضای W را اسپن می کنند.

نکته۱: $C(A)$ یا همان زیرفضای ستون های یک ماتریس فضایی است که توسط بردارهای ستونی آن ماتریس اسپن می شود.

مثال ۳-۱۴

نشان دهید سه بردار $\mathbf{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

یک ترکیب خطی از این بردارها به شکل زیر بدست می آید،

$$a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}=a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

بنابراین $sp\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ تمامی بردارهای متعلق به فضای برداری $\Re^3$ است که به شکل $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ باشند، که

کلیه فضای برداری $\Re^3$ را شامل می شود.

$\square$

مثال ۳-۱۵

بررسی کنید که آیا بردارهای زیر فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

الف) $$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$$

یک ترکیب خطی از این دو بردار به شکل زیر می باشد،

$$a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}=a\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b\\2a+b+2c\\a+b-c\end{bmatrix}$$

اگر این ترکیب خطی را بصورت یک بردار مانند $\mathbf{r}$ نمایش دهیم داریم،

$$\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b\\2a+b+2c\\a+b-c\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}a+b=r_1\\2a+b+2c=r_2\\a+b-c=r_3\end{cases}$$

فرم ماتریسی این دستگاه معادلات بصورت زیر می باشد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

حال باید بررسی کنیم که این دستگاه معادلات سازگار است یا ناسازگار، برای این منظور باید ماتریس A غیر منفرد باشد، یعنی $|A| \neq 0$ باشد. از آنجائیکه $|A| = 1$ است، بنابراین، برای هر بردار دلخواه $\mathbf{r}$ می توان یک جواب پیدا کرد. لذا، بردارهای $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

چک کنید

ب) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}-3\\8\\-5\end{bmatrix}$

یک ترکیب خطی از این دو بردار به شکل زیر می باشد،

$$a\mathbf{u}+b\mathbf{v}+c\mathbf{w}=a\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-3\\8\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+3b-3c\\2a-b+8c\\-a+b-5c\end{bmatrix}$$

اگر به مانند حالت قبل یک بردار $\mathbf{r}$ در نظر بگیریم، فرم ماتریسی دستگاه معادلات حاصل به شکل زیر خواهد بود،

$$A\mathbf{x}=\mathbf{y}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&-3\\2&-1&8\\-1&1&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

از آنجائیکه $|A|=0$ می باشد، لذا این دستگاه معادلات مذکور یک جواب منحصربفرد ندارد. لذا، بردارهایی در فضای برداری $\Re^3$ وجود دارند، که نمی توان آنها را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ نوشت، پس بردارهای مذکور فضای برداری $\Re^3$ را اسپن نمی کنند.

□

۳-۲-۵- استقلال خطی و وابستگی خطی بردارها

بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ را **مستقل خطی**[1] گویند، اگر معادله ای به شکل زیر،

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = 0 \tag{۳-۴}$$

که در آن $c_1,c_2,\ldots,c_n$ اسکالرهای ثابتی هستند، فقط به ازای شرط $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ برقرار باشد. در غیر اینصورت بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ را **وابسته خطی**[2] گویند.

نکته۱: اگر بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ مستقل خطی بوده ولی بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_{n+1}$ وابسته خطی باشند، در اینصورت می توان $\mathbf{u}_{n+1}$ را بصورت یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ بیان کرد.

نکته۲: شرط لازم و کافی برای مستقل خطی بودن بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ که هر یک دارای n تا عنصر هستند، آن است که دترمینان ماتریس ضرایب $n \times n$ حاصل از تعریف، مخالف صفر باشد.

مثال ۳-۱۶

استقلال خطی یا وابستگی خطی بردارهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

با توجه به تعریف داریم،

$$c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2c_1 - c_2 + 4c_3 \\ c_1 - 3c_2 - 2c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات مربوطه و فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن به شکل زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

با توجه به محل عناصر محوری متغیر c_3 آزاد است و بقیه متغیرها را می توان برحسب این متغیر آزاد نوشت،

$$c_1 = 2c_3, \qquad c_2 = 0$$

همچنین عناصر محوری نشان می دهند که بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ مستقل خطی و بردار $\mathbf{u}_3$ به آنها وابسته است. پس در مجموع بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ وابسته خطی می باشند.

ب) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

با توجه به تعریف داریم،

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 - c_2 + c_3 \\ -2c_1 + 3c_2 + c_3 \\ 3c_1 + 4c_2 - 2c_3 \\ -4c_1 + 2c_2 - 2c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فرم ماتریس افزوده و سطری پلکانی کاهش یافته آن را بدست می آوریم،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

برای حل این معادلات تنها جواب ممکن جواب بدیهی $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ می باشد و با توجه به محل عناصر محوری بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ مستقل خطی هستند.

مثال ۳-۱۷

به ازای چه مقداری از λ بردارهای زیر مستقل خطی هستند؟

الف) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1, \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \\ -1 \end{bmatrix},$

برای بردارهای داده شده شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad c_1\begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید، که برای مستقل خطی بودن دترمینان ماتریس ضرایب باید مخالف صفر باشد،

$$\begin{cases} -c_1 + \lambda c_2 - c_3 = 0 \\ \lambda c_1 - c_2 - c_3 = 0 \\ -c_1 - c_2 + \lambda c_3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

لذا برای مستقل خطی بودن باید $\lambda \neq -1$ و $\lambda \neq 2$ باشد.

ب) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2+\lambda \\ 1-\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 2+\lambda \end{bmatrix}$

شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad c_1\begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 2+\lambda \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2+\lambda \\ 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases} (1-\lambda)c_1 + (2+\lambda)c_2 = 0 \\ (2+\lambda)c_1 + (1-\lambda)c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = -3-6\lambda$$

در این حالت برای مستقل خطی بودن باید $\lambda \neq \frac{-1}{2}$ باشد.

□

۳-۲-۶- مفهوم پایه و بُعد در فضای برداری

در یک فضای برداری مانند V، مجموعه بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ تشکیل یک **پایه**[۱] می دهند، اگر دو شرط زیر را داشته باشند.

۱- آن فضای برداری را اسپن کنند، $V=\mathrm{sp}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ ← $\boxed{V=\{c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n\}}$

۲- بردارهای $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ مستقل خطی باشند.

تعداد بردارهای پایه در یک فضای برداری مانند V را **بُعد**[۲] آن فضا می نامند و با نماد $\dim(V)$ نشان می دهند. به عبارتی بُعد یک فضا برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در آن فضا است، بنابراین در یک فضای n بُعدی حداکثر بردارهای مستقل خطی n عدد می باشد.

نکته۱: در فضای برداری n بُعدی مانند V هر مجموعه بردارهای مستقل خطی در V را می توان به یک پایه تبدیل کرد.

---

۱ Basis

۲ Dimension

نکته۲: بردارهای واحد $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ برای فضای برداری $\Re^n$ تشکیل یک پایه می دهند و به آن **پایه استاندارد**[۱] برای $\Re^n$ گفته می شود.

$$\mathbf{e}_1 = [1,0,\ldots,0], \qquad \mathbf{e}_2 = [0,1,\ldots,0], \qquad \cdots \qquad ,\mathbf{e}_n = [0,0,\ldots,1]$$

لذا فضای برداری $\Re^n$ را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$\Re^n = sp\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

نکته۳: بردارهای $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ برای فضای برداری P_n (چند جمله ای های با درجه n یا کمتر) تشکیل پایه استاندارد می دهند.

$$\mathbf{p}_0 = 1, \qquad \mathbf{p}_1 = x, \qquad \mathbf{p}_2 = x^2, \qquad \ldots \qquad ,\mathbf{p}_n = x^n$$

لذا فضای برداری P_n را می توان بصورت زیر نمایش داد،

$$P_n = sp\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

نکته۴: اگر فضای برداری V شامل تعداد محدودی بردار پایه باشد، آن را فضا با **بُعد متناهی**[۲] می نامیم در غیر اینصورت به آن فضا با **بُعد نامتناهی**[۳] می گوییم.

مثال ۳-۱۸

بررسی نمایید که آیا بردارهای زیر برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل یک پایه می دهند.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

برای این منظور دو شرط ذکر شده در تعریف پایه را بررسی می کنیم،

۱- برای اسپن کردن فضای برداری $\Re^3$ باید یک ترکیب خطی از این بردارها بنویسیم و آن را معادل با یک بردار مانند $\mathbf{r} = [r_1, r_2, r_3]$ قرار می دهیم،

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

چون سیستم مربعی است، شرط وجود جواب آن است که دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد و $|A| = -10$ است، لذا دستگاه همواره جواب دارد و بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

۲- برای بررسی مستقل خطی بودن بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ از تعریف استقلال خطی استفاده می کنیم،

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادلات ماتریسی حاصل به صورت زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است ($|A| = -10$)، بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ مستقل خطی هستند، لذا برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل یک دسته بردار پایه می دهند. لذا می توان نوشت،

$$\Re^3 = sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

□

مثال ۳-۱۹

بررسی نمایید که آیا بردارهای زیر برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل یک پایه می دهند.

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}_4=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

برای این منظور دو شرط ذکر شده در تعریف پایه را بررسی می کنیم،

۱- برای اسپن کردن فضای برداری $\Re^3$ باید هر بردار دلخواه مانند $\mathbf{r}=[r_1,r_2,r_3]$ را بتوان بصورت ترکیب خطی از این چهار بردار نمایش داد،

$$\mathbf{r}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3+c_4\mathbf{u}_4\rightarrow\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی و ماتریس افزوده دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر می باشد،

$$\begin{bmatrix}0&-1&1&-1\\1&1&2&0\\1&2&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}-c_2+c_3-c_4=r_1\\c_1+c_2+2c_3=r_2\\c_1+2c_2-c_3-c_4=r_3\end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده و سطری پلکانی کاهش یافته آن به شکل زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 & r_1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & r_2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & r_3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & \frac{5}{2}r_1 - \frac{1}{2}r_2 + \frac{3}{2}r_3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{-3}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 - \frac{1}{2}r_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 - \frac{1}{2}r_3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

c_4 متغیر آزاد است و دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد. بنابراین این چهار بردار فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند.

۲- برای بررسی مستقل خطی بودن بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ از تعریف آن استفاده می کنیم،

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 = c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

فرم ماتریس افزوده و سطری پلکانی کاهش یافته حاصل به صورت زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه c_4 متغیر آزاد است و دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد، بردارهای $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ مستقل خطی نیستند و نمی توانند برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل پایه بدهند.

□

مثال ۳-۲۰

کدامیک از دسته بردارها و مجموعه های زیر برای فضای برداری مورد نظر تشکیل یک پایه می دهند؟

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$
(فضای برداری $\Re^3$)

ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 - c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \\ c_1 - 2c_2 - 4c_3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

لذا بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ مستقل خطی نیستند و نمی توانند برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل پایه دهند،

۳-۲-۸- رتبه ماتریس ها

بنابر تعریف **رتبه**[1] یک ماتریس $A_{m\times n}$ برابر با ماکزیمم تعداد ستون های (یا سطرهای) مستقل خطی در آن ماتریس است، که با نماد $\mathrm{rank}(A)$ نشان داده می شود. برای بدست آوردن ستون های مستقل خطی یک ماتریس می توان از فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن کمک گرفت.

از آنجائیکه رتبه یک ماتریس بصورت بزرگترین درجه کلیه کهادهای غیر صفر آن ماتریس تعریف می شود، می توان نتیجه گرفت که رتبه یک ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ حداکثر می تواند برابر n باشد و این زمانی است که تمامی ستون های (یا سطرهای) ماتریس مستقل خطی باشند و در اینصورت $|A| \neq 0$ یعنی، ماتریس $A_{n\times n}$ غیر منفرد است. در چنین حالتی ماتریس $A_{n\times n}$ را **رتبه کامل**[2] می نامند و اگر $|A| = 0$ باشد ماتریس منفرد بوده و تعدادی از ستون های آن وابستگی خطی دارند، چنین ماتریسی **نقص رتبه**[3] دارد.

برای ماتریس های $A_{m\times n}$ غیر مربعی، $\mathrm{rank}(A) \leq \min(m,n)$ است، که در صورت مساوی بودن می گوئیم ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه کامل است و اگر کوچکتر باشد ماتریس $A_{m\times n}$ نقص رتبه دارد.

نکته۱: ضرب یک ماتریس غیرمنفرد در ماتریس $A_{m\times n}$ رتبه آن را تغییر نمی دهد.

مثال ۳-۲۴

رتبه ماتریس های A و B را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}5 & 9 & 3\\ 3 & -5 & -6\\ 1 & 5 & 3\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -8\\ 4 & -3 & -7\\ 1 & 12 & -3\end{bmatrix}$$

- فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس A بصورت زیر می باشد،

$$A=\begin{bmatrix}5 & 9 & 3\\ 3 & -5 & -6\\ 1 & 5 & 3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -0.75\\ 0 & 1 & 0.75\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{rank}(A)=2$$

با توجه به محل عناصر محوری می توان فهمید که ستون های اول و دوم استقلال خطی دارند و ستون سوم وابسته خطی است. لذا ماتریس A فقط دو ستون مستقل خطی دارد و رتبه آن دو می باشد و لذا این ماتریس نقص رتبه دارد.

- فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس B نیز بصورت زیر می باشد،

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -8\\ 4 & -3 & -7\\ 1 & 12 & -3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{rank}(B)=3$$

با توجه به محل عناصر محوری هر سه ستون ماتریس B مستقل خطی هستند. لذا رتبه ماتریس B برابر سه است و رتبه کامل دارد.

۳-۲-۱۰- فضای پوچی ماتریس ها

بنابر تعریف **فضای پوچی**[1] یک نگاشت خطی $A_{m\times n}$ مجموعه ای است شامل کلیه بردارهای $\mathbf{x}_{n\times 1}$ که رابطه $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد. فضای پوچی با نماد $N(A)$ نشان داده می شود،

$$N(A)=\{\mathbf{x}\in V_1 \to A\mathbf{x}=\mathbf{0}\} \qquad (۸-۳)$$

بُعد فضای پوچی را **پوچی**[2] ماتریس A می نامند و با نماد $\text{nullity}(A)$ یا $\nu(A)$ نشان می دهند.

$$\dim[N(A)]=\nu(A)$$

نکته۱: فضای پوچی $N(A)$ مجموعه تمامی پاسخهای معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ است.

نکته۲: در صورتیکه تنها پاسخ معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ همان پاسخ بدیهی (بردار صفر) باشد، بنابراین رتبه ماتریس A کامل است، به عبارتی کلیه بردارهای ستونی (یا سطری) این ماتریس مستقل خطی هستند.

نکته۳: برای ماتریس $A_{m\times n}$ می توان نوشت،

$$\text{rank}(A)+\text{nullity}(A)=n$$

مثال ۳-۲۷

ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2\\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9\\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

می خواهیم فضای پوچی و پوچی این ماتریس را بدست آوریم،

لذا باید جواب معادله $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را بدست آوریم،

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2\\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9\\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

حال فرم سطری پلکانی کاهش یافته ماتریس را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

و دستگاه معادلات نهایی به فرم زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

باید توجه کرد که تعداد این معادلات برابر با رتبه ماتریس A می باشد. از تعداد معادلات کمتر از مجهولات است، لذا دستگاه بیشمار جواب دارد و هر بردار $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ که سه معادله بالا را برآورده سازد یک بردار متعلق به فضای پوچی ماتریس A خواهد بود. تعداد بردارهایی که بدین ترتیب می توان انتخاب کرد نامحدود است، لیکن تعداد بردارهای مستقل خطی برابر با بُعد فضای پوچی می باشد.

$$\text{nullity}(A) = n - rank(A) = 5 - 3 = 2$$

بطور مثال دو بردار زیر مستقل خطی هستند و سه معادله بالا را برآورده می کنند، بنابراین هر پاسخ معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ باید به اسپن این دو بردار تعلق داشته باشد، به عبارتی، این دو بردار یک پایه برای $N(A)$ تشکیل می دهند.

$$N(A) = sp\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

مثال ۳-۲۸

پوچی و فضای پوچی ماتریس های زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\operatorname{rank}(A)=2$ است، لذا پوچی ماتریس A برابر با دو می باشد،

$$\operatorname{nullity}(A)=\nu(A)=\mathrm{n}-\operatorname{rank}(A)=4-2=2$$

بنابراین فضای پوچی ماتریس A دو بردار مستقل خطی دارد. حال با حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ این دو بردار را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم،

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

تعداد معادلات برابر با رتبه ماتریس است با حل این دستگاه بردارهای پایه $N(A)$ بدست می آید،

$$N(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $\mathrm{rank}(B) = 2$ است، لذا پوچی ماتریس B برابر با یک می باشد،

$$\mathrm{nullity}(B) = \nu(B) = \mathrm{n} - \mathrm{rank}(B) = 3 - 2 = 1$$

بنابراین فضای پوچی ماتریس B فقط یک بردار مستقل خطی دارد که بصورت زیر بدست می آید،

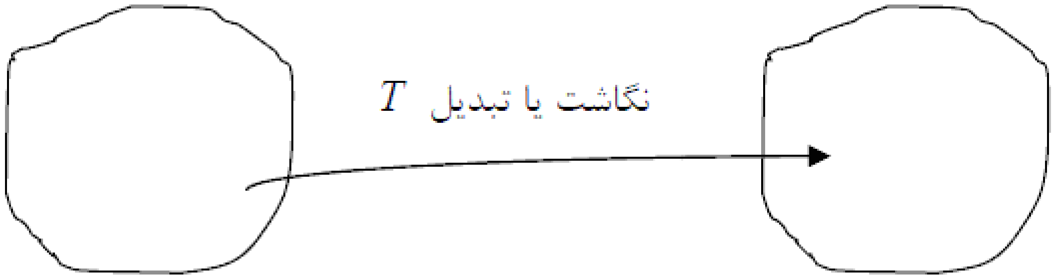
$$B\mathbf{x} = 0 \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با حل این دستگاه معادلات بردارهای پایه $N(B)$ بدست می آید،

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + \dfrac{1}{2} x_3 = 0 \end{cases} \quad \to \quad N(B) = sp\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

۳-۲ تبدیل های خطی

فرض کنیم V_1 و V_2 به ترتیب دو فضای برداری n و m بُعدی بر روی میدان F باشند.



یک تبدیل، نگاشتی است که یک بردار در فضای n بعدی V_1 را به یک بردار دیگر در فضای m بعدی V_2 تبدیل کند. در این نگاشت تمامی نقاط بردار اولیه با نقاط نظیر در بردار ثانویه جایگزین می شود. تبدیل ها را می توان به دو دسته **تبدیلات هندسی**[1] و **تبدیلات مختصاتی**[2] تقسیم بندی نمود. در تبدیلات هندسی محورهای مختصات ثابت هستند و این بردار است که تغییر می کند ولی در تبدیلات مختصاتی بردار ثابت است و محورهای مختصات جابجا می شوند. بردار می تواند بیانگر یک منحنی، تصویر یا جسم باشد.

تابع $T:V_1 \to V_2$ را یک **اپراتور خطی** یا **تبدیل خطی**[۳] از V_1 به V_2 می نامیم، اگر برای تمام بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعلق به V_1 و تمام اسکالرهای c متعلق به F دو شرط زیر برآورده گردد،

۱- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

۲- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

این دو رابطه را می توان بصورت زیر نیز خلاصه نمود،

$$T(c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{u}) + c_2T(\mathbf{v}) \qquad (۱۲-۳)$$

نکته۱: تبدیل خطی $T:V_1 \to V_2$ را **یک به یک**[۴] گویند اگر شرط زیر را داشته باشد،

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_1, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) \qquad (۱۳-۳)$$

نکته۲: کِرنل تبدیل خطی $T:V_1 \to V_2$ بصورت زیر تعریف می گردد،

$$\text{kernel}(T) = \{\mathbf{v} \in V_1 \quad \to \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \qquad (۱۴-۳)$$

---

[۱] Geometric
[۲] Coordinate
[۳] Linear Transformation
[۴] One to one

نکته۳: فضای گستره تبدیل خطی $T: V_1 \rightarrow V_2$ بصورت زیر تعریف می گردد،

$$\text{range}(T) = \{\mathbf{w} \in V_2 \mid \exists \mathbf{v} \in V_1 \quad \rightarrow \quad T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \tag{۱۵-۳}$$

رابطه بین کِرنل و فضای گستره یک تبدیل خطی بصورت زیر می باشد،

$$\dim[\ker(T)] + \dim[\text{range}(T)] = \dim(V_1) \tag{۱۶-۳}$$

مثال ۳-۳۲

آیا تابع $T:\Re^3 \to \Re^2$ با تعریف زیر یک تبدیل خطی می باشد؟

$$T(\mathbf{u}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4u_2 + u_3 \\ u_1 - 10u_2 \end{bmatrix}$$

برای این منظور باید دو شرط بالا را بررسی نماییم. شرط اول بصورت زیر است،

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) \\ (u_1 + v_1) - 10(u_2 + v_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u_2 + u_3 + 4v_2 + v_3 \\ u_1 - 10u_2 + v_1 - 10v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4u_2 + u_3 \\ u_1 - 10u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4v_2 + v_3 \\ v_1 - 10v_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

بنابراین شرط اول برقرار است. حال شرط دوم را بررسی می نماییم،

$$T(c\mathbf{u}) = T\left(\begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4cu_2 + cu_3 \\ cu_1 - 10cu_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 4u_2 + u_3 \\ u_1 - 10u_2 \end{bmatrix} = cT\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = cT(\mathbf{u})$$

با برقراری شرط دوم می توان گفت که تابع مذکور یک تبدیل خطی است.

□

مثال ۳-۳۳

آیا تابع $T:\Re^n \to \Re$ با تعریف زیر یک تبدیل خطی می باشد؟

$$T(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|$$

برای این منظور باید دو شرط بالا را بررسی نماییم. شرط اول بصورت زیر است،

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

از آنجاییکه $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \neq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ شرط اول برقرار نمی باشد، لذا تبدیل مذکور یک تبدیل خطی نیست.

□

مثال ۳-۳۴

آیا تبدیل خطی $L:\Re^2 \rightarrow \Re^2$ با تعریف زیر یک به یک است؟

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix}$$

بردارهای $\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2$ را در نظر بگیرید،

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$L(v_1)=L(v_2) \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1-y_1 \\ x_1+y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2-y_2 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1-y_1=x_2-y_2 \\ x_1+y_1=x_2+y_2 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad 2x_1=2x_2 \rightarrow \quad \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$$

لذا تبدیل خطی L یک به یک است.

□

۳-۳-۱- نمایش ماتریسی تبدیل های خطی

برای هر تبدیل خطی $T:V_1 \to V_2$ می توان یک ماتریس $A_{m\times n}$ بدست آورد بطوریکه،

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u},\ \ \mathbf{u} \in V_1 \qquad (۳-۱۷)$$

ماتریس $A_{m\times n}$ بصورت زیر تعیین می گردد،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \qquad (۳-۱۸)$$

$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ و $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m$ به ترتیب بردارهای پایه فضاهای n و m بُعدی V_1 و V_2 هستند.

برای بدست آوردن ماتریس A می توان از الگوریتم گوس- جردن کمک گرفت،

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m & T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} I & A \end{array}\right] \qquad (۳-۱۹)$$

نکته۱: برای یک تبدیل خطی با تعریف زیر،

$$T:R^n \to R^m,\ T(\mathbf{x}) = A_{m\times n}\mathbf{x}$$

کرنل و فضای گستره را می توان بصورت زیر تعریف کرد،

$$\ker(T) = N(A) \quad \text{و} \quad range(T) = C(A)$$

مثال ۳-۳۵

برای تبدیل خطی زیر یک ماتریس تبدیل بیابید.

$$T(\mathbf{u}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4u_2 + u_3 \\ u_1 - 10u_2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad T:\Re^3 \to \Re^2$$

ابتدا پایه های فضای برداری $\Re^3$ و $\Re^2$ را در نظر می گیریم،

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به تعریف داریم،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix}$$

حال باید ابتدا $T(\mathbf{e}_i)$ها را بدست آوریم، برای این کار از تعریف تبدیل خطی استفاده می کنیم،

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از این رو ماتریس تبدیل خطی مذکور با اعمال روش گوس- جردن بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \middle| T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_1)\right] \quad \Rightarrow \quad \left[I \middle| A\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -10 & 0 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا می توان نوشت،

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} \quad \rightarrow \quad T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

مشخص است که ماتریس تبدیل به انتخاب پایه ها بستگی دارد.

□