۱. هر یک ماتریس های زیر را بصورت حاصل جمع یک ماتریس متقارن و شبه متقارن نمایش دهید.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\3&0&0\\0&5&7\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\5&0&3\end{bmatrix}$$

حل:

می دانیم هر ماتریس مربعی حقیقی را می توان بصورت زیر تجزیه نمود،

$$A=U+V\quad,\quad U=\frac{1}{2}(A+A^T)\quad,\quad V=\frac{1}{2}(A-A^T)$$

که در آن U یک ماتریس متقارن و V یک ماتریس شبه متقارن است.

$$A=U+V\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}0&1&2\\3&0&0\\0&5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&1\\2&0&2.5\\1&2.5&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&-2.5\\-1&2.5&0\end{bmatrix}$$

$$B=U+V\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\5&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&3&2\\4&2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&2\\1&-2&0\end{bmatrix}$$

۲. اگر بتوان ماتریس A را بصورت زیر تفکیک کرد، $|A|$ را بدون حل مستقیم بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}3&0&8&1&2\\2&1&8&1&2\\4&0&17&2&4\\6&0&24&4&6\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=I_5+\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&8&1&2\end{bmatrix}$$

حل:

برای محاسبه $|A|$ از رابطه زیر استفاده می نماییم،

$$|I_n+AB|=1+BA \qquad , \qquad A_{n\times1}, B_{1\times n}$$

لذا داریم،

$$|A|=|I_5+GH|=1+HG=1+\begin{bmatrix}2&0&8&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\\0\end{bmatrix}=22$$

۳. اگر ماتریس های A ، B و $A+B$ غیر منفرد باشند، نشان دهید،

$$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$$

حل:

برای این منظور با توجه به اینکه ماتریس های A ، B و $A+B$ غیر منفرد هستند، ابتدا از طرفین تساوی ها معکوس می گیریم،

$$\left[A(A+B)^{-1}B\right]^{-1}=\left[B(A+B)^{-1}A\right]^{-1}=\left[(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\right]^{-1}$$

$$B^{-1}(A+B)A^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$$

$$(B^{-1}A+B^{-1}B)A^{-1}=(A^{-1}A+A^{-1}B)B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$$

$$(B^{-1}A+I)A^{-1}=(I+A^{-1}B)B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$$

$$B^{-1}AA^{-1}+IA^{-1}=IB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$$

$$B^{-1}I+A^{-1}=B^{-1}+A^{-1}I=A^{-1}+B^{-1}$$

$$B^{-1}+A^{-1}=B^{-1}+A^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$$

بنابراین صحت تساوی برآورده می شود.