۱- معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس های زیر را بدست آورید

الف) $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 11 \end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -0.5 & -3 & 1 & 0.5 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

و) $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

حل تمرین شماره ۱

الف) $\boxed{A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}}$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+4 & -4\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad (\lambda+1)(\lambda+2)^2=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=-2$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+4 & -4\\ 0 & 1 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2+4\lambda+4 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda & 4\lambda+4\\ 0 & -\lambda-1 & \lambda^2+5\lambda+4\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(\text{-}1I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(\text{-}2I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه $n - \mathrm{rank}(A - \lambda_2 I) = 3 - 2 = 1$ است، لذا برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{2,3} = -2$ فقط یک بردار ویژه مستقل خطی داریم.

ب) $$A=\begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -10 & 2 \\ -10 & \lambda-5 & -8 \\ 2 & -8 & \lambda-11 \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad (\lambda-18)(\lambda-9)(\lambda+9)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=18, \lambda_2=9, \lambda_3=-9$$

ماتریس A سه مقدار ویژه حقیقی متمایز دارد. برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\mathrm{Adj}(\lambda I-A)=\mathrm{Adj}\begin{bmatrix} \lambda-2 & -10 & 2 \\ -10 & \lambda-5 & -8 \\ 2 & -8 & \lambda-11 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda^2-16\lambda-9 & 10\lambda-126 & 90-2\lambda \\ 10\lambda-126 & \lambda^2-13\lambda+18 & 8\lambda-36 \\ 90-2\lambda & 8\lambda-36 & \lambda^2-7\lambda-90 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 18 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(18I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 27 & 54 & 54 \\ 54 & 108 & 108 \\ 54 & 108 & 108 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 27 \\ 54 \\ 54 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(9I\text{-}A) = \begin{bmatrix} -72 & -36 & 72 \\ -36 & -18 & 36 \\ 72 & 36 & -72 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -36 \\ -18 \\ 36 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -9 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Adj}(\text{-}9I\text{-}A) = \begin{bmatrix} 216 & -216 & 108 \\ -216 & 216 & -108 \\ 108 & -108 & 54 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 108 \\ -108 \\ 54 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ج) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه غیر تکراری و حقیقی $\lambda_1 = -1$ داریم،

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_2 = 1$ داریم، $n - \text{rank}(A - \lambda_2 I) = 3 - 1 = 2$. لذا دو بردار ویژه مستقل خطی داریم.

$$\lambda_{2,3} = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \{x_1 - x_2 - \tfrac{1}{2} x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

لذا توانستیم دو بردار ویژه مستقل خطی برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_2 = 1$ بدست آوریم.

د) $$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\2&4&\lambda+3\end{vmatrix}=0 \quad\to\quad \lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+2=0 \quad\to\quad \lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=-1\pm j$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\to\begin{bmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\2&4&\lambda+3\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-1\to\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\2&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\to\begin{cases}-x_1-x_2=0\\-x_2-x_3=0\end{cases}\quad\to\quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 + j \rightarrow \begin{bmatrix} -1+j & -1 & 0 \\ 0 & -1+j & -1 \\ 2 & 4 & 2+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} (-1+j)x_1 - x_2 = 0 \\ (-1+j)x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2+j)x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+j \\ -2j \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -1 - j \rightarrow \begin{bmatrix} -1-j & -1 & 0 \\ 0 & -1-j & -1 \\ 2 & 4 & 2-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} (-1-j)x_1 - x_2 = 0 \\ (-1-j)x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + (2-j)x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-j \\ 2j \end{bmatrix}$$

ه) $$\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ -0.5 & -3 & 1 & 0.5\\ -3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}$$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & \lambda-1 & 3 & 0\\ 0.5 & 3 & \lambda-1 & -0.5\\ 3 & 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=0\rightarrow\lambda^4-4\lambda^3-12\lambda^2+32\lambda+64=0\quad\rightarrow\quad\lambda_{1,2}=-2,\lambda_{3,4}=4$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2}=-2$ داریم، $n-\mathrm{rank}(A-\lambda_1 I)=4-2=2$، لذا دو بردار ویژه مستقل خطی داریم.

$$\lambda_{1,2}=-2\rightarrow\begin{bmatrix}-3&0&0&3\\0&-3&3&0\\0.5&3&-3&-0.5\\3&0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-3x_2+3x_3=0\\0.5x_1+3x_2-3x_3-0.5x_4=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{3,4}=4$ داریم، $n-\mathrm{rank}(A-\lambda_3 I)=4-3=1$، لذا یک بردار ویژه مستقل خطی داریم.

$$\lambda_{3,4}=4\rightarrow\begin{bmatrix}3&0&0&3\\0&3&3&0\\0.5&3&3&-0.5\\3&0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_5\\x_6\\x_7\\x_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}3x_5+3x_8=0\\3x_6+3x_7=0\\0.5x_5+3x_6+3x_7-0.5x_8=0\end{cases}\rightarrow\quad\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

و) $\boxed{A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 6 & 1\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}}$

معادله مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -1\\ 0 & \lambda-6 & -1\\ 0 & 4 & \lambda-2\end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow\quad (\lambda-4)^3=0 \quad\rightarrow\quad \lambda_{1,2,3}=4$$

برای بدست آوردن بردارهای ویژه بصورت زیر عمل می کنیم،

$$A\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda-4 & -2 & -1\\ 0 & \lambda-6 & -1\\ 0 & 4 & \lambda-2\end{bmatrix}\mathbf{v}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2,3} = 4$ داریم، $n - \mathrm{rank}(A - \lambda_2 I) = 3 - 1 = 2$ ، لذا دو بردار ویژه مستقل خطی داریم.

$$\lambda_1 = 4 \to \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \{-2x_2 - x_3 = 0 \quad \to \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

لذا توانستیم دو بردار ویژه مستقل خطی برای مقدار ویژه تکراری $\lambda_{1,2,3} = 4$ بدست آوریم.