حل تمرین ریاضیات گسسته

منطق، شمارش، مجموعه ها و روابط

1) برقراری یا عدم برقراری همارزی زیر را ثابت کنید.

$$(p \to q) \longrightarrow (q \to p) \equiv^{?} (\sim p) \to (p \land q)$$

2) با قوانین استلزام، برقراری استلزام زیر را ثابت کنید؟

$$\begin{array}{c} p \land q \\ p \to (q \to r) \\ (u \lor \sim s) \to r \\ s \lor (p \oplus q) \\ (r \land s) \to t \\ \hline \therefore t \lor u \end{array}$$

3) الف) ارزش گزارهی مسور زیر را تعیین کنید.
ب) نقیض این گزارهی مسور را بنویسید. N مجموعهی اعداد طبیعی و Z مجموعهی اعداد صحیح است.

$$\forall(x\epsilon Z)\exists(y\epsilon N)\,[(x+y<x.y)\land([x+y<0]\leftrightarrow[x<0])]$$

4) از بین 60 دختر و 40 پسر دانشجو، 5 نفر به عنوان رتبههای اول تا پنجم انتخاب میشوند. به چند طریق ممکن است سه نفر از پنج نفر دختر باشد؟

5) 8 فرد با پیراهنهایی به رنگ متمایز را کنار هم مینشانیم. این کار به چند روش ممکن است، اگر حتماً فرد پیراهن صورتی، فرد پیراهن آبی و فرد پیراهن سبز کنار هم بنشینند.

6) قرار است تیمی ده مسابقهی فوتبال انجام دهد. چند حالت برای نتایج ممکن است، به نحوی که تعداد بردهای این تیم، از مجموع تعداد تساویها و باختهای آن بیشتر باشد؟

7) مطلوب است تعداد اعداد صحیح چهاررقمی که ترتیب اعداد اکیداً افزایشی (مثل 1348) یا اکیداً کاهشی (مثل 5310) باشد.

8) به چند طریق میتوان با 4 سنگ به رنگ های آبی، قرمز، سبز و نارنجی، گردنبندی با این 4 سنگ درست کرد؟

9) به چند طریق میتوان سه دختر متمایز و سه جفت پسر دوقلو را (که هر جفت کاملا همسان و جفتها از یکدیگر متمایز هستند)، دور یک میز نشاند، به نحوی که تمام دخترها کناره م بنشینند و هیچ دو قل همسانی کنار یکدیگر ننشینند؟

10) مطلوب است ضریب جملهی x^2y^3z در $(x^2+3y-2z+3)^8$.

11) چند عدد 8 رقمی وجود دارد که حاصل ضرب ارقامش 9800 باشد؟

12) هر چینشی از گزاره های اتمی و عملگرهای منطقی را یک تابع منطقی (گزاره مرکب نامعادل) میگویند. چیزی که تابع منطقی را منحصر به فرد میکند، جدول درستی آن است. یعنی اگر جدول درستی دو تابع منطقی یکسان باشند، آن دو تابع متمایز نیستند .چند تابع منطقی چهارمتغیره مثل F(p, q, r, z)میتوانید پیدا کنید که p ∨ F همیشه T باشد؟

13) گزارهی مرکب p در 7 سطر و گزارهی مرکب q در 5 سطر از جدول ارزش خود دارای ارزش T هستند.
همچنین داریم r = ~q. اگر p ∧ r در 4 سطر دارای ارزش T باشد، تعداد سطرهای T در جدول ارزش p <-> q را به دست آورید. توجه کنید که هر یک از گزارههای p و q از 4 گزارهی اتمی ساخته شدهاند

14) به چند طریق میتوان 10 گلابی و 20 سیب را بین 4 نفر آدم متفاوت تقسیم کرد به نحوی که به هر نفر دست کم یک گلابی برسد، و همگی تعداد فردی سیب داشته باشند؟

15) با دلیل مشخص نشان دهید کدام یک از بازتابی، تقارنی، پادتقارنی، تعدی، همارزی و ترتیب جزئی در آن صادق است و کدام صادق نیست.

a) $\forall\, a, b \in Z: aRb \leftrightarrow a + b = 2k+1,\ k \in Z$

b) $(x, y)R(z, w) \leftrightarrow x2 + y = z2 - w$

c) $(x, y, z)R(u, v, w): x + y + z = u + v + w \land x.y.z \neq u.v.w$

d) $(x, y)R(w, z) \leftrightarrow |w - z|\,|\,|x - y|$

ملکی، یوسف زاده

Subject :
Date

✗ سؤال ۱ :

$(p\to q)\to(q\to p) \equiv (\sim p)\to(p\wedge q)$

$(\sim p\vee q)\to(\sim q\vee p) \equiv p\vee(p\wedge q)$

$(p\wedge \sim q)\vee \sim q\vee p \equiv p$

✗ دو گزاره با هم هم‌ارز نیستند! $\sim q\vee p \not\equiv p$

✗ سؤال ۲ :

1. $p\wedge q$
2. $p\to(q\to r)$
3. $(u\vee \sim s)\to r$
4. $s\vee(p\oplus q)$
5. $(r\wedge s)\to t$

$\therefore\ t\vee u$

✗ مرحله‌ی ۱ : مقدمه‌ی ۱ و قاعده‌ی ساده‌سازی عطفی $\qquad p$

✗ مرحله‌ی ۲ : مقدمه‌ی ۱ و قاعده‌ی ساده‌سازی عطفی $\qquad q$

✗ مرحله‌ی ۳ : مقدمه‌ی ۲ و مرحله‌ی ۱ و قاعده‌ی انتزاع $\qquad q\to r$

✗ مرحله‌ی ۴ : مرحله‌ی ۳ و مرحله‌ی ۲ و قاعده انتزاع $\qquad r$

✗ مرحله‌ی ۵ : مقدمه‌ی ۴ و مرحله‌ی ۱ و ۲ و اینکه $p\oplus q\equiv F$ (زیرا هر دو عبارت p و q الزاماً درست هستند در نتیجه $\oplus$ آن‌ها نادرست خواهد بود.)

$\dfrac{s\vee F}{\therefore\ s} \Rightarrow \qquad s$

✗ مرحله‌ی ۶ : مرحله‌ی ۴ و ۵ و قاعده ترکیب عطفی $\qquad r\wedge s$

✗ مرحله‌ی ۷ : مقدمه‌ی ۵ و مرحله‌ی ۶ و قاعده انتزاع $\qquad t$

✗ مرحله‌ی ۸ : مرحله‌ی ۷ و قاعده تفضیل فصلی $\qquad \therefore\ t\vee u$

Subject:
Date

× سؤال ۳: الف) در قسمت سمت راست عملگر And داریم $x+y<0 \leftrightarrow x<0$ این رابطه اشتباه است زیرا

اگر $x=-1$ باشد $x<0$ درست ولی $\exists y\in \mathbb{N}: x+y<0$ نادرست خواهد بود. [نهایتاً عبارت ۰ می‌شود] در نتیجه چون در یک عبارت

سور باید به ازای همه‌ی مقادیر سور عمومی درست باشد و در اینجا در مقدار $x=-1$ هیچ y نمی‌توان یافت که عبارت درست باشد پس

گزاره سور سؤال نادرست است.

ب) $\sim\Big[\forall (x\in \mathbb{Z})\ \exists (y\in \mathbb{N}): [(x+y<x.y)\wedge([x+y<0]\leftrightarrow[x<0])]\Big]$

$\exists (x\in \mathbb{Z})\ \forall (y\in \mathbb{N}): \sim[(x+y<x.y)\wedge([x+y<0]\leftrightarrow[x<0])]$

$\exists (x\in \mathbb{Z})\ \forall (y\in \mathbb{N}): [\sim(x+y<x.y)\vee \sim([x+y<0]\leftrightarrow[x<0])]$

$\exists (x\in \mathbb{Z})\ \forall (y\in \mathbb{N}): [(x+y\geq x.y)\vee([x+y<0]\oplus[x<0])]$

× سؤال ۴: اول ۵ نفر از کل صد نفر را انتخاب کرده سپس جایگشت این ۵ نفر تعداد حالت رتبه‌بندی آن‌ها خواهد بود.

چون می‌خواهیم ۳ نفر از ۵ نفر دختر باشند داریم:

$$\underbrace{\binom{60}{3}}_{\text{انتخاب دخترها}} \times \underbrace{\binom{40}{2}}_{\text{انتخاب پسرها}} \times \underbrace{5!}_{\text{رتبه‌بندی برگزیدگان}}$$

× سؤال ۵: ۳ فرد با پیراهن‌های صورتی، آبی و سبز را یک دسته گرفته و با ۵ نفر دیگر جایگشت می‌دهیم.

$$(5+1)!\times 3! = \underbrace{6!}_{\text{جایگشت ۵ فرد و یک دسته}} \times \underbrace{3!}_{\text{جایگشت ۳ فرد}}$$

PAPCO

× سؤال ۶: این تیم باید حداقل ۶ برد داشته باشد اگر برد را x_1 و باخت را x_2 و مساوی را x_3 فرض کنیم داریم:

$$\overset{\geq 6}{x_1} + \overset{\geq 0}{x_2} + \overset{\geq 0}{x_3} = 10 \longrightarrow \overset{\geq 0}{x_1'} + \overset{\geq 0}{x_2} + \overset{\geq 0}{x_3} = 4 \Rightarrow \binom{6}{2} = \underline{15} \text{ حالت}$$

× سؤال ۷: در صورت انتخاب ۴ عدد متمایز در بازه‌ی (۰ تا ۹) می‌توان دو عدد اکیداً افزایشی و اکیداً کاهشی ساخت برای مثال

فرض کنید ما ۴ عدد ۹، ۵، ۸، ۱ را انتخاب کنیم در این صورت عدد ۱۵۸۹ اکیداً افزایشی و عدد ۹۸۵۱

اکیداً کاهشی خواهد بود، در نتیجه جواب سؤال است: $2 \times \underbrace{\binom{10}{4}}_{\text{انتخاب ۴ عدد از ۰ تا ۹}}$

حال باید به این نکته دقت کرد که اگر یک عدد انتخاب شده ۰ باشد با آن نمی‌توان اکیداً افزایشی ساخت چون عدد سه رقمی می‌شود.

در نتیجه باید تعداد حالات آن را کم کرد: $\binom{9}{3}$ تعداد انتخاب ۳ عدد از ۱ تا ۹ که اکیداً افزایشی شود.

$\Rightarrow$ در کل: $2 \times \binom{10}{4} - \binom{9}{3}$

× سؤال ۸: طبق جایگشت دایره‌ای: $\frac{(4-1)!}{2} = \frac{3!}{2} = \underline{3}$ حالت

× دقت شود چون گردنبند است جایگشت حلقه‌ای نصف می‌شود یعنی $o \overset{b}{\underset{g}{\bigcirc}} r \equiv r \overset{b}{\underset{g}{\bigcirc}} o$ مثل تسبیح وگرنه

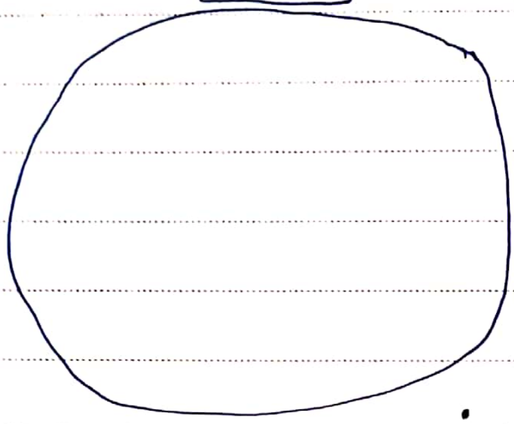
تقسیم بر ۲ نداشت.

× سؤال ۹: دخترها قرار است روی یک میز کنار هم باشند در نتیجه یک دسته فرض می‌شوند و خود جایگشت $3!$ دارند.

PAPCO

Subject:
Date:

$\boxed{g_1\, g_2\, g_3}$



۶حالت
فرض a

۴حالت
فرض b

a a′
b b′
c c′

$\boxed{g_1 g_2 g_3} \to ۳!$

۲حالت : انتخاب c یا c′ → ۲حالت : انتخاب a′ یا b′ → ۲حالت : انتخاب c′ یا b′ → انتخاب c′

انتخاب a′ → انتخاب c یا c′ : ۲حالت → حتماً b′ → حتماً c′

دور کل : $۳! \times ۶ \times ۴ \times [۲ \times ۲ \times ۲ + ۲] = ۳! \times ۶ \times ۴ \times ۱۰$

سؤال ۱۵: جمله‌ی $x^2 y^3 z$ در مجموع توان ۵ دارد [یک توان x^2، سه توان y و یک توان z] درنتیجه

توان جمله‌ی عدد ثابت برابر ۳ است.

ضریب x^2 — ضریب y — ضریب z — ضریب عدد ثابت

$$\binom{۵}{۱,\ ۳,\ ۱} \times (۱)^۱ \times (+۳)^۳ \times (-۲)^۱ \times (+۳)^۳$$

$$= \frac{۵!}{۱! \times ۳! \times ۱!} \times ۳^۶ \times (-۲) = -۵! \times ۳^۶$$

11) تجزیه عدد 9800: $2^3 * 5^2 * 7^2$

برای اینکه ضرب ارقام عدد مورد نظر ما برابر با 9800 باشد، یکی از حالت های زیر ممکن است:

1. سه 2، دو 5، دو 7، یک 1 داشته باشیم. مثال: 15252727
2. یک 4، یک 2، دو 5، دو 7، دو 1 داشته باشیم. مثال: 71715524
3. یک 8، دو 5، دو 7، سه 1 داشته باشیم. مثال: 11175758

جایگشت های هر حالت را حساب میکنیم:

1. 8!/3!2!2!
2. 8!/2!2!2!
3. 8!/2!2!3!

جواب نهایی برابر است با جمع 1 و 2 و 3: 8400

12) هر تابع منطقی چهار متغیره شامل 2 به توان 4 سطر یعنی 16 سطر در جدول درستی خود است.

پرسش! چند تابع منطقی چهار متغیره وجود دارد؟ میدانیم چیزی که تابع منطقی را منحصر به فرد میکند، جدول درستی آن است، و در 16 سطری که در تابع منطقی چهار متغیره وجود دارد، هر سطر میتواند 0 یا 1 باشد.

فرض کنید عدد 16 رقمی رو به رو نشانگر 16 سطر جدول درستی باشد: xxxxxxxxxxxxxxxx هرکدام از این xها میتوانند 0 یا 1 باشند. برخی از حالت ها:

1111111111111111, 0101010101010101, 0000000000000001

پس میتوان گفت جدول درستی یک تابع منطقی چهار متغیره شامل 2 به توان 16 حالت است.

واضح است که هر متغیر اتمی در نصف سطرهای جدول درستی 1 و در نصف دیگر 0 است. (کافی است چند جدول درستی با توابع ساده برای خود رسم کنید.) مثلا در جدول درستی چهار متغیره ما، متغیر p در 8 سطر 1 و در 8 سطر دیگر 0 است.

در 16 سطر جدول درستی، 8 سطر p 0 است، در این 8 سطر مقدار تابع F باید 1 باشد تا true p or F باشد. در 8 سطر دیگر اما تابع F میتواند 0 یا 1 باشد. اگر هشت رقم سمت چپ xxxxxxxxxxxxxxxx نشانگر حالت p باشد، برخی از این حالت ها:

1111111100000000, 1111111111111111, 1111111101010101

پاسخ نهایی مسئله برابر است با 2 به توان 8.

13) گزاره های p و q خود یک تابع منطقی چهار متغیره هستند، پس در کل 16 سطر در جدول درستی ما وجود دارد. همچنین p <-> q یعنی اینکه هر دو متغیر درست، یا هردو نادرست باشند.

گزاره p در 7 سطر T است. در 4 سطر از این 7 سطر، r نیز برابر T است که p and r دارای ارزش T شده. در 4سطری که r، T شده قطعا q دارای ارزش F است. در 3 سطر دیگر q ارزش T دارد. پس در این <u>7 سطری که p درست است، 3 سطر است که q نیز درست است.</u>
در 9 سطر دیگر که p نادرست است، چند سطر q نیز نادرست است؟ به گفته سوال q در 5 سطر کل جدول درست است، و متوجه شدیم که در 7 سطر قبلی 3 سطر q درست بوده، پس در این 9 سطر باقی مانده که p نادرست است، در 2 سطر q درست است، و در 7 سطر دیگر نادرست است. یعنی <u>در 9 سطری که p نادرست است، در 7 سطر q نیز نادرست است.</u>

در نتیجه: 10 = 7 + 3

برای فهم بهتر این سوال، پیشنهاد میشود که جدول درستی آن را رسم کنید. همچنین پاسخ مسئله را برای n سطر تعمیم دهید.

14) پاسخ مسئله: حالت های پخش گلابی * پخش سیب

گلابی: به هر نفر 1 گلابی میدهیم، 6 گلابی میماند که بین 4 نفر توزیع میکنیم. توزیع 6 در 4.

سیب: به هر نفر 1 سیب میدهیم، و 16 سیب باقی مانده را جفتی توزیع میکنیم. پس در مجموع 8 جفت سیب باقی مانده. توزیع 8 در 4.

پاسخ: توزیع 6 در 4 * توزیع 8 در 4

c(11, 3) * c(9, 3)

a. $\forall a,b \in \mathbb{Z} : \quad aRb \longleftrightarrow a+b = 2k+1 \ , \ k \in \mathbb{Z}$

بازتابی: $aRa : \quad a+a = 2k+1 \Rightarrow 2a = 2k+1$ ✗

مثال نقض: $2 \neq 2k+1$: $1R1$ ← رابطه بازتابی نیست.

تقارنی: $aRb : \quad a+b = 2k+1$

$bRa : \quad b+a = 2k+1$ ✓

رابطه تقارنی است.

پادتقارنی: مشخصاً چون زوج های تقارنی دارد پس پادتقارنی نیست. ←

$1R2 : \quad 3 = 2k+1$ ✓

$2R1 : \quad 3 = 2k+1$ ✓

مثال نقض:

$a+b=2k_1+1$

تعدی: aRb

$\Rightarrow aRc \sim a+c=2k_3+1$

bRc

$b+c=2k_2+1$

$\Rightarrow \underbrace{a+c}_{2k_3+1}+2b=2k_1+2k_2+2 \Rightarrow 2b=\underbrace{2k_1+2k_2-2k_3}_{2k_4}+1 \Rightarrow 2b=2k_4+1$ ✗

$1R2: \quad 3=2k+1$

$2R3: \quad 5=2k+1$

ولی $1 \cancel{R} 3: \quad 4\neq 2k+1$ این رابطه اصلاً هیچ تعدی ندارد.

∝ چون رابطه خواص بازتابی و تعدی را ندارد درنتیجه هم‌ارزی نیست.

∝ چون رابطه خواص بازتابی و تعدی را ندارد درنتیجه ترتیب جزئی هم نیست.

6. $(x,y)\,R\,(z,w) \longleftrightarrow x^2+y=z^2-w$

رابطه بازتابی نیست؛

بازتابی: $(x,y)\,R\,(x,y)$: $x^2+y=x^2-y \Rightarrow y=-y$ ✗

مثال نقض: $(1,2)\not R\,(1,2)$: $3\neq -1$

تقارنی: $(x,y)\,R\,(z,w)$: $x^2+y=z^2-w$

$(z,w)\,R\,(x,y)$: $z^2+w=x^2-y$ ✗

رابطه تقارنی نیست؛ مثال نقض: $(1,2)\,R\,(2,1)$: $3=3$ ✓ ولی $(2,1)\not R\,(1,2)$: $5\neq -1$ ✗

پادتقارنی : $(x,y) R (z,w) \Rightarrow (z,w) \not R (x,y)$

$$x^2+y = z^2 - w \Rightarrow z^2+w \neq x^2-y$$

مثال نقض : $(1,0) R (-1,0)$ ولی $(-1,0) R (1,0)$

$1=1 \qquad 1=1$

رابطه پادتقارنی هم نیست.

تعدی : $(2,4) R (3,1)$: $8=8$

$(3,1) R (3,-1)$: $10=10$ $\Rightarrow (2,4) \not R (3,-1)$: $8 \neq 10$

مثال نقض :

* چون رابطه بازتابی و تقارنی و تعدی هم نیست پس هم‌ارزی هم نیست.

* چون رابطه بازتابی و پادتقارنی و تعدی نیست پس ترتیب جزئی هم نیست.

c. $(x,y,z) R (u,v,w)$: $x+y+z = u+v+w \ \wedge \ x.y.z \neq u.v.w$

بازتابی : $(x,y,z) R (x,y,z)$: $\underset{\checkmark}{x+y+z = x+y+z} \ \wedge \ \underset{\times}{x.y.z \neq x.y.z}$

$(1,1,1) \not R (1,1,1)$: $\underset{\checkmark}{3=3} \ \wedge \ \underset{\times}{1 \neq 1}$

رابطه بازتابی نیست. مثال نقض :

تقارنی : $(x,y,z) R (u,v,w) \Rightarrow (u,v,w) R (x,y,z)$ ✓

هر دو عملگر ضرب و جمع خاصیت جابجایی دارند و درنتیجه رابطه تقارنی است.

پادتقارنی : مشخصا چون زوج تقارنی غیرخود آینالی دارد پس پادتقارنی نیست.

تعدی : $(x,y,z) R (u,v,w)$, $(u,v,w) R (a,b,c) \Rightarrow (x,y,z) R (a,b,c)$

• تو بخش جمع مشکلی نداره ولی برای بخش ضرب داریم :

$xyz \neq u.v.w$, $u.v.w \neq abc \rightsquigarrow abc \neq xyz$ نه الزاماً

مثال نقض : $(1,2,3) R (2,2,2)$, $(2,2,2) R (3,2,1)$ ولی $(1,2,3) \not R (3,2,1)$

* چون رابطه بازتابی و تعدی نیست درنتیجه هم‌ارزی نیست.

* چون رابطه بازتابی و تعدی و پادتقارنی نیست درنتیجه ترتیب جزئی هم نیست.

d. $(x,y) R (w,z) \longleftrightarrow |w-z| \mid |x-y|$

متناظرشون اون یکی رو عاد کنه.

بازتابی : $(x,y) R (x,y)$: $|x-y| \mid |x-y|$ ✓

رابطه بازتابی است چون هر چیزی خودش را عاد می‌کند.

* دقت شود $0 \mid 0$ می‌کنم وگرنه بازتابی هم نمی‌شود.

تقارنی : $(x,y)\,R\,(w,z) \Rightarrow (w,z)\,R\,(x,y)$

$$|w-z| \mid |x-y| \Rightarrow |x-y| \mid |w-z|$$

مثال نقض: $(2,6)\,R\,(2,4)$ ولی $(2,4)\,\not R\,(2,6)$

$2 \mid 4$ ولی $4 \nmid 2$

رابطه تقارنی نیست.

پادتقارنی : $(2,6)\,R\,(2,-2)$ و $(2,-2) \mid (2,6)$

$4 \mid 4$ $4 \mid 4$

مثال نقض: رابطه پادتقارنی نیست.

تعدی : $(x,y)\,R\,(w,z)$

$(w,z)\,R\,(u,v) \Rightarrow (x,y)\,R\,(u,v)$

$$|w-z| \mid |x-y|$$
$$|u-v| \mid |w-z|$$

$$k_1(w-z) = (x-y)$$
$$k_2(u-v) = (w-z) \Rightarrow k_3(u-v) = (x-y)$$

$$|u-v| \mid |x-y| \Rightarrow (x,y)\,R\,(u,v) \checkmark$$

رابطه تعدی است.

* چون رابطه تقارنی نیست در نتیجه هم‌ارزی هم نیست.

* چون رابطه پادتقارنی نیست در نتیجه ترتیب جزئی هم نیست.