۱- به ازای چه مقداری از λ بردارهای زیر مستقل خطی هستند؟

الف) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \\ -1 \end{bmatrix}$

ب) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2+\lambda \\ 1-\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1-\lambda \\ 2+\lambda \end{bmatrix}$

حل تمرین شماره ۱

الف) $\boxed{\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \\ -1 \end{bmatrix}}$

شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad c_1\begin{bmatrix} -1 \\ \lambda \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید، که برای مستقل خطی بودن دترمینان ماتریس ضرایب باید مخالف صفر باشد،

$$\begin{cases} -c_1 + \lambda c_2 - c_3 = 0 \\ \lambda c_1 - c_2 - c_3 = 0 \\ -c_1 - c_2 + \lambda c_3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

لذا برای مستقل خطی بودن باید $\lambda \neq -1$ و $\lambda \neq 2$ باشد.

ب) $\boxed{\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1-\lambda\\2+\lambda\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}2+\lambda\\1-\lambda\end{bmatrix}}$

شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}=\mathbf{0} \quad \to \quad c_1\begin{bmatrix}1-\lambda\\2+\lambda\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2+\lambda\\1-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{cases}(1-\lambda)c_1+(2+\lambda)c_2=0\\(2+\lambda)c_1+(1-\lambda)c_2=0\end{cases} \quad \to \quad \begin{vmatrix}1-\lambda & 2+\lambda\\2+\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}=-3-6\lambda$$

برای مستقل خطی بودن باید $\lambda\neq\frac{-1}{2}$ باشد.

۲- کدامیک از دسته بردارهای زیر فضای برداری $\Re^3$ را اسپن می کنند؟

الف) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

ب) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

ج) $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

د) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

حل تمرین شماره ۲

الف) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

شرط اسپن کردن را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = \mathbf{r} \quad \rightarrow \quad c_1\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید، برای اینکه این دستگاه همواره جواب داشته باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب آن مخالف صفر گردد،

$$\begin{cases} 4c_1 + 2c_2 + c_3 = r_1 \\ 4c_1 + 2c_3 = r_2 \\ -c_2 + c_3 = r_3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

لذا هر بردار کلی بصورت $[r_1, r_2, r_3] \in \Re^3$ انتخاب کنیم می توان بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ نوشت، لذا این سه بردار فضای $\Re^3$ را اسپن می کنند.

ب) $$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}-3\\8\\-5\end{bmatrix}$$

شرط اسپن کردن را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}=\mathbf{r} \quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-3\\8\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر بدست می آید، همانند بخش (الف) دترمینان ماتریس ضرایب را بررسی می کنیم،

$$\begin{cases}c_1+3c_2-3c_3=r_1\\2c_1-c_2+8c_3=r_2\\-c_1+c_2-5c_3=r_3\end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{vmatrix}1&3&-3\\2&-1&8\\-1&1&-5\end{vmatrix}=0$$

نمی توان تمامی بردارهای $[r_1,r_2,r_3]\in\Re^3$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ نوشت، لذا این سه بردار فضای $\Re^3$ را اسپن نمی کنند.

ج) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$

شرط اسپن کردن را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}+c_4\mathbf{z}=\mathbf{r}\quad\rightarrow\quad c_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}2\\2\\4\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل و فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&r_1\\0&1&2&-1&r_2\\1&1&4&0&r_3\end{array}\right]\quad\rightarrow\quad\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&0&-r_1-2r_2+2r_3\\0&1&2&0&r_1+2r_2-r_3\\0&0&0&1&r_1+r_2-r_3\end{array}\right]$$

با توجه به محل عناصر محوری c_3 متغیر آزاد و c_1,c_2,c_4 متغیرهای وابسته هستند. لذا دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد و هر بردار کلی بصورت $[r_1,r_2,r_3]\in\Re^3$ انتخاب کنیم می توان بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}$ نوشت، لذا این چهار بردار فضای $\Re^3$ را اسپن می کنند.

د) $\boxed{\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}$

شرط اسپن کردن را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}=\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad c_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات حاصل و فرم سطری پلکانی کاهش یافته آن بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & r_1\\2 & 1 & r_2\\-1 & 1 & r_3\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -r_1+r_2\\0 & 1 & 2r_1-r_2\\0 & 0 & -3r_1+2r_2+r_3\end{array}\right]$$

با توجه به سطر آخر ماتریس سطری پلکانی کاهش یافته دستگاه معادلات حاصل زمانی سازگار است که $-3r_1+2r_2+r_3\neq 0$ باشد لذا نمی توان تمامی بردارهای $[r_1,r_2,r_3]\in\Re^3$ را بصورت ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{u},\mathbf{v}$ نوشت. این دو بردار فضای $\Re^3$ را اسپن نمی کنند.

۳- کدامیک از دسته بردارها و مجموعه های زیر برای فضای برداری مورد نظر تشکیل پایه می دهند؟

الف) $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ (برای فضای برداری $\Re^3$)

ب) $\mathbf{p}_1 = x - 3, \quad \mathbf{p}_2 = x^2 + 2x, \quad \mathbf{p}_3 = x^2 + 1$ (فضای برداری $P_2(\Re)$)

ج) $\mathbf{p}_1 = x^4, \quad \mathbf{p}_2 = 2x^3, \quad \mathbf{p}_3 = 1 - x^2, \quad \mathbf{p}_4 = 3x - 1, \quad \mathbf{p}_5 = 2x$ (برای فضای برداری $P_4(\Re)$)

د) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ (برای فضای برداری $\mathrm{M}_{2\times 2}(\Re)$)

حل تمرین شماره ۳

الف) $\boxed{\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}}$ (برای فضای برداری $\Re^3$)

- ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 - c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \\ c_1 - 2c_2 - 4c_3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

لذا بردارهای $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ مستقل خطی نیستند و نمی توانند برای فضای برداری $\Re^3$ تشکیل پایه دهند.

ب) $\boxed{\mathbf{p}_1 = x-3, \quad \mathbf{p}_2 = x^2+2x, \quad \mathbf{p}_3 = x^2+1}$ (فضای برداری P_2)

- ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{p}_1 + c_2\mathbf{p}_2 + c_3\mathbf{p}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1(x-3)+c_2(x^2+2x)+c_3(x^2+1)=0$$

$$(c_2+c_3)x^2+(c_1+2c_2)x+(-3c_1+c_3)=0x^2+0x+0$$

$$\begin{cases} c_2+c_3=0 \\ c_1+2c_2=0 \\ -3c_1+c_3=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

بنابراین چندجمله ای های $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ مستقل خطی هستند.

- حال شرط اسپن کردن فضای برداری P_2 را بررسی می کنیم،

$$c_1\mathbf{p}_1 + c_2\mathbf{p}_2 + c_3\mathbf{p}_3 = r_1x^2+r_2x+r_3 \quad \rightarrow \quad c_1(x-3)+c_2(x^2+2x)+c_3(x^2+1)=r_1x^2+r_2x+r_3$$

$$(c_2+c_3)x^2+(c_1+2c_2)x+(-3c_1+c_3)=r_1x^2+r_2x+r_3$$

$$\begin{cases} c_2+c_3=r_1 \\ c_1+2c_2=r_2 \\ -3c_1+c_3=r_3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

لذا هر چندجمله ای مرتبه دوم بصورت $r_1x^2+r_2x+r_3$ را می توان بصورت ترکیب خطی از چندجمله ای های $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ نوشت، پس چندجمله ای های $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ برای فضای برداری P_2 تشکیل پایه می دهند.

ج) $\boxed{\mathbf{p}_1 = x^4\,, \quad \mathbf{p}_2 = 2x^3\,, \quad \mathbf{p}_3 = 1 - x^2\,, \quad \mathbf{p}_4 = 3x - 1\,, \quad \mathbf{p}_5 = 2x}$ (برای فضای برداری $P_4(\Re)$)

- ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\mathbf{p}_1 + c_2\mathbf{p}_2 + c_3\mathbf{p}_3 + c_4\mathbf{p}_4 + c_5\mathbf{p}_5 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1(x^4) + c_2(2x^3) + c_3(1 - x^2) + c_4(3x - 1) + c_5(2x) = 0$$

$$c_1x^4 + 2c_2x^3 - c_3x^2 + (3c_4 + 2c_5)x + c_3 - c_4 = 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_2 = 0 \\ -c_3 = 0 \\ 3c_4 + 2c_5 = 0 \\ c_3 - c_4 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

بنابراین چندجمله ای های $\mathbf{p}_1 ، \mathbf{p}_2 ، \mathbf{p}_3 ، \mathbf{p}_4 ، \mathbf{p}_5$ مستقل خطی هستند.

- حال شرط اسپن کردن فضای برداری P_4 را بررسی می کنیم،

$$c_1\mathbf{p}_1 + c_2\mathbf{p}_2 + c_3\mathbf{p}_3 + c_4\mathbf{p}_4 + c_5\mathbf{p}_5 = r_1x^4 + r_2x^3 + r_3x^2 + r_4x + r_5$$

$$c_1(x^4) + c_2(2x^3) + c_3(1-x^2) + c_4(3x-1) + c_5(2x) = r_1x^4 + r_2x^3 + r_3x^2 + r_4x + r_5$$

$$c_1x^4 + 2c_2x^3 - c_3x^2 + (3c_4 + 2c_5)x + c_3 - c_4 = r_1x^4 + r_2x^3 + r_3x^2 + r_4x + r_5$$

$$\begin{cases} c_1 = r_1 \\ 2c_2 = r_2 \\ -c_3 = r_3 \\ 3c_4 + 2c_5 = r_4 \\ c_3 - c_4 = r_5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

لذا هر چندجمله ای مرتبه چهارم بصورت $r_1x^4 + r_2x^3 + r_3x^2 + r_4x + r$ را می توان بصورت ترکیب خطی از چندجمله ای های $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$ نوشت، پس چندجمله ای های $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$ برای فضای برداری P_4 تشکیل پایه می دهند.

د) $\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}}$ (برای فضای برداری $M_{2\times 2}$)

- ابتدا شرط استقلال خطی را بررسی می نماییم،

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1+c_2+c_3+c_4 & c_2+c_3+c_4 \\ c_3+c_4 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3+c_4=0 \\ c_2+c_3+c_4=0 \\ c_3+c_4=0 \\ c_4=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

لذا عناصر این مجموعه مستقل خطی هستند.

- حال شرط اسپن کردن فضای برداری $M_{2\times2}$ را بررسی می کنیم،

$$c_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}c_1+c_2+c_3+c_4 & c_2+c_3+c_4\\ c_3+c_4 & c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}c_1+c_2+c_3+c_4=r_{11}\\ c_2+c_3+c_4=r_{12}\\ c_3+c_4=r_{21}\\ c_4=r_{22}\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

لذا هر ماتریس 2×2 را می توان بصورت ترکیب خطی از این چهار ماتریس نمایش داد، بنابراین این مجموعه ماتریس ها برای فضای برداری $M_{2\times2}$ تشکیل پایه می دهند.

۴- ماتریس A را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 7 & -4 & 0\\ -2 & 3 & -2 & 2 & -3\\ 4 & -6 & -8 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

الف) بررسی کنید آیا ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند یا نه؟

الف) برای بررسی استقلال خطی ستون های ماتریس A بصورت زیر عمل می کنیم،

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3+c_4\mathbf{v}_4+c_5\mathbf{v}_5=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad c_1\begin{bmatrix}-2\\-2\\4\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\3\\-6\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}7\\-2\\-8\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}+c_5\begin{bmatrix}0\\-3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2c_1+3c_2+7c_3-4c_4=0 \\ -2c_1+3c_2-2c_3+2c_4-3c_5=0 \\ 4c_1-6c_2-8c_3+4c_4+2c_5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & -6 & -8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فرم سطری پلکانی کاهش یافته را بدست می آوریم،

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0 & -0.3333 & 1.1667 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6667 & 0.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس بدست آمده سیستم سازگار است و متغیرهای c_2، c_4 و c_5 متغیرهای آزاد هستند لذا سیستم بیشمار جواب دارد و ستون های ماتریس A استقلال خطی ندارند.

۵- فضای ستون های ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\\ 2 & 4\\ 6 & 16\end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

و) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

ز) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

ح) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

حل تمرین شماره ۵

فضای ستون های یک ماتریس یک زیرفضای برداری است که توسط ستون های آن ماتریس اسپن می شود.

الف) $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A) = \left\{ \mathbf{b} \in \Re^3 \mid \mathbf{b} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

از آنجاییکه ستون های ماتریس A وابسته خطی هستند، لذا می توان نمایش فضای ستون های ماتریس A را بصورت زیر خلاصه کرد،

$$C(A) = \text{sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{یا} \quad C(A) = \left\{ \mathbf{b} \in \Re^3 \mid \mathbf{b} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ خطی است در $\Re^3$ که شامل بردار $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ است، که همان محور x ها خواهد بود.

ب) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است. از آنجاییکه ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند، $C(A)$ را می توان به شکل زیر نمایش داد.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^3 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{یا} \qquad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ صفحه ای در $\Re^3$ است که شامل دو بردار $\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ و تمامی ترکیب خطی آن دو است، که همان صفحه xy خواهد بود.

ج) $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A) = \left\{ \mathbf{b} \in \Re^3 \mid \mathbf{b} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

از آنجاییکه ستون های ماتریس A وابسته خطی هستند، لذا می توان نمایش فضای ستون های ماتریس A را بصورت زیر خلاصه کرد،

$$C(A) = \mathrm{sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{یا} \qquad C(A) = \left\{ \mathbf{b} \in \Re^3 \mid \mathbf{b} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ خطی در $\Re^3$ است که شامل بردار $\begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ است.

ه) $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^3$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است. از آنجاییکه ستون های ماتریس A مستقل خطی هستند، $C(A)$ را می توان به شکل زیر نمایش داد.

$$C(A) = \left\{ \mathbf{b} \in \Re^3 \mid \mathbf{b} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

یا

$$C(A) = \mathrm{sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ صفحه ای در $\Re^3$ است که شامل دو بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ و تمامی ترکیب خطی های آن دو است.

و) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^2$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right\}$$

از آنجاییکه ستون های ماتریس A وابسته خطی هستند، لذا می توان نمایش فضای ستون های ماتریس A را بصورت زیر خلاصه کرد،

$$C(A)=\text{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{یا} \qquad C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ خطی در $\Re^2$ است که شامل بردار $\begin{bmatrix}\alpha\\2\alpha\end{bmatrix}$ است.

ز) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&4\end{bmatrix}}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^2$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$$

از آنجاییکه ستون اول و دوم ماتریس A وابسته خطی هستند، می توان نمایش فضای ستون های ماتریس A را بصورت زیر خلاصه کرد،

$$C(A)=\text{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$$ یا $$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ صفحه ای در $\Re^2$ است که توسط دو بردار $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ اسپن می شود که در واقع تمامی فضای $\Re^2$ خواهد بود.

ج) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$

فضای ستون های ماتریس A زیر فضایی از $\Re^2$ بوده و شامل تمامی ترکیب خطی های ممکن ستون های ماتریس A است.

$$C(A)=\left\{\mathbf{b}\in\Re^2 \mid \mathbf{b}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{یا} \qquad C(A)=\mathrm{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

به لحاظ هندسی $C(A)$ صفحه ای در $\Re^2$ است که توسط دو بردار $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ اسپن می شود که در واقع تمامی فضای $\Re^2$ خواهد بود.

۶- فضای پوچی ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\\ 2 & 4\\ 6 & 16\end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9 & 5\\ -1 & -3 & 3 & 0\end{bmatrix}$

و) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{bmatrix}$

ز) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$

ح) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 8 & 10\\ 3 & 3 & 10 & 13\end{bmatrix}$

حل تمرین شماره ۶

فضای پوچی یک ماتریس یک زیرفضای برداری است و شامل تمامی بردارهای $\mathbf{x}$ است که برای آنها $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ گردد.

$$N(A_{m\times n})=\{\mathbf{x}\in\Re^n \mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$$

الف) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad x_1+2x_2+3x_3=0$$

لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^3$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A)=\{\mathbf{x}\in\Re^3 \mid x_1+2x_2+3x_3=0\}$$

در این معادله x_2 و x_3 متغیرهای آزاد هستند. یکی از جواب های مستقل خطی ممکن برای این مجموعه، بردارهای $\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ هستند.

لذا می توان فضای پوچی ماتریس A را بصورت زیر نیز نمایش داد.

$$N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

ب) $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ 9x_3 = 0 \end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -5x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته x_2 متغیر آزاد است. یکی از جواب های ممکن برای این دستگاه معادلات بردار $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ است.

لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^3$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \Re^3 \mid \begin{cases} x_1 = -5x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\} \qquad \text{یا} \qquad N(A) = sp\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ج) $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 16x_4 = 0 \end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته x_3 و x_4 متغیرهای آزاد هستند. برای این دستگاه معادلات دو بردار مستقل خطی برای جواب وجود دارد بطور مثال بردارهای $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^4$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \Re^4 \mid \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \right\} \qquad \text{یا} \qquad N(A) = sp\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

د) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\\ 2 & 4\\ 6 & 16\end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\\ 2 & 4\\ 6 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}x_1+2x_2=0\\ 3x_1+8x_2=0\\ 2x_1+4x_2=0\\ 6x_1+16x_2=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\\ 2 & 4\\ 6 & 16\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تنها جواب این دستگاه معادلات بردار $\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ است. لذا $N(A)$ تهی است.

ه) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9 & 5\\ -1 & -3 & 3 & 0\end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9 & 5\\ -1 & -3 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}x_1+3x_2+3x_3+2x_4=0\\ 2x_1+6x_2+9x_3+5x_4=0\\ -x_1-3x_2+3x_3=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9 & 5\\ -1 & -3 & 3 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}x_1+3x_2+x_4=0\\ x_3+\frac{1}{3}x_4=0\end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته x_2 و x_4 متغیرهای آزاد هستند. برای این دستگاه معادلات دو بردار مستقل خطی برای جواب وجود دارد بطور مثال بردارهای $\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\ -1\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$. لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^4$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A)=\left\{\mathbf{x}\in\Re^3 \mid \begin{cases} x_1+3x_2+x_4=0 \\ x_3+\frac{1}{3}x_4=0 \end{cases}\right\}$$

یا

$$N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

و) $\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته تنها جواب این دستگاه معادلات بردار $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ است. لذا $N(A)$ تهی است.

ز) $\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}x_1+2x_2=0\\ 3x_1+6x_2=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad x_1+2x_2=0$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته x_2 متغیر آزاد است. یکی از جواب های ممکن برای این دستگاه معادلات بردار $\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$ است.

لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^2$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A)=\left\{\mathbf{x}\in\Re^2 \mid x_1+2x_2=0\right\} \qquad \text{یا} \qquad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

ج) $A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\2&2&8&10\\3&3&10&13\end{bmatrix}$

حال باید مجموعه بردارهایی را بیابیم که شرط $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ را برآورده سازد.

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0}\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}1&1&2&3\\2&2&8&10\\3&3&10&13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=0\\2x_1+2x_2+8x_3+10x_4=0\\3x_1+3x_2+10x_3+13x_4=0\end{cases}$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب این معادلات بصورت زیر عمل می کنیم،

$$\begin{bmatrix}1&1&2&3\\2&2&8&10\\3&3&10&13\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}$$

با توجه به فرم سطری پلکانی کاهش یافته x_2 و x_4 متغیرهای آزاد هستند. برای این دستگاه معادلات دو بردار مستقل خطی برای جواب وجود دارد بطور مثال بردارهای $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$. لذا فضای پوچی ماتریس A یک زیرفضا از $\Re^4$ است که شرط زیر را داشته باشد،

$$N(A)=\left\{\mathbf{x}\in\Re^3 \mid \begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}\right\}\qquad \text{یا}\qquad N(A)=sp\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

۳-۲-۴- مفهوم اسپن

اگر $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ مجموعه ای از بردارها در فضای برداری V و W مجموعه کلیه ترکیبهای خطی از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$ باشد، در اینصورت W یک **اسپن**[۱] از بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$ است، که بصورت زیر نمایش داده می شود،

$$W=\mathrm{sp}(S) \quad , \quad W=\mathrm{sp}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\} \qquad (۳\text{-}۳)$$

$$W=\{c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\dots+c_n\mathbf{v}_n : c_1,c_2,\dots c_n\in\Re\}$$

همچنین می توان گفت، که بردارهای $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$ زیر فضای W را اسپن می کنند.

نکته۱: $C(A)$ یا همان زیرفضای ستون های یک ماتریس فضایی است که توسط بردارهای ستونی آن ماتریس اسپن می شود.