فصل دوم

دستگاه معادلات جبری خطی

۲-۲ معرفی دستگاه معادلات جبری خطی

صورت کلی یک دستگاه معادلات جبری خطی با m معادله و n مجهول به شکل زیر در نظر گرفته می شود،

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}} \tag{۲-۱}$$

این دستگاه معادلات معرف یک سیستم $m \times n$ است، که در آن a_{ij}ها و b_iها مقادیر ثابت معین و x_jها مجهولاتی هستند که باید تعیین گردند. این دستگاه معادلات را می توان با صرفنظر کردن مجهولات و فقط با در نظر گرفتن ضرایب بصورت زیر نمایش داد،

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{۲-۲}$$

این ماتریس را **ماتریس افزوده**[۱] سیستم می نامند، که هر سطر آن بیان کننده یکی از معادلات خطی می باشد. همچنین می توان معادلات را بشکل $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ نمایش داد، که در آن A یک ماتریس $m\times n$، $\mathbf{b}$ یک بردار $m\times 1$ و $\mathbf{x}$ یک بردار $n\times 1$ بصورت زیر است،

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

در رابطه با دستگاه معادلات خطی بالا پرسشی که مطرح می گردد آن است که آیا جوابی برای این مجموعه معادلات وجود دارد یا نه و در صورت وجود جواب منحصربفرد است یا خیر. در فرآیند حل این دستگاه معادلات امکان رخ داد حالت های زیر وجود دارد،

۱- حالتی که دستگاه **بدون جواب** یا **ناسازگار**[۲] است.

۲- حالتی که دستگاه **سازگار**[۳] است و جواب دارد که در اینصورت امکان دارد **فقط یک جواب منحصربفرد** داشته باشد یا اینکه **بیشمار جواب** داشته باشد.

---

۱ Augmented Matrix
۲ Inconsistent
۳ Consistent

۲-۳ حل دستگاه معادلات جبری خطی بر پایه الگوریتم ها

یکی از موضوعات مهمی که در حل دستگاه معادلات خطی مورد نظر است، تشخیص سازگار یا ناسازگار بودن سیستم و در صورت سازگار بودن یافتن جواب و یا مجموعه جوابهای ممکن می باشد. در این راستا دو روش عمده که بکار گرفته می شوند روش **خذفی گوسی**[۱] و روش **گوس – جردن**[۲] می باشند، که در ادامه به شرح این دو روش می پردازیم.

۲-۳-۱- روش خذفی گوسی

در روش حذفی گوسی سعی می شود تا با انجام یک سری عملیات ساده نظیر جابجایی سطرها، ضرب سطرها در یک عدد غیر صفر یا جمع سطرها با یکدیگر، سیستم موجود را به یک سیستم ساده ولی معادل با قبلی تبدیل کرد، به نحوی که دستیابی به جواب به راحتی امکان پذیر باشد. برای این منظور باید دو حالت را در نظر گرفت، اول هنگامیکه $m=n$ باشد و دوم در صورتیکه $m \neq n$ باشد.

در حالت $(m=n)$ سعی می شود تا ماتریس افزوده سیستم به شکل بالا مثلثی زیر در آید،

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right) \qquad (۲-۴)$$

در اینصورت دستگاه معادلات حاصل بشکل زیر خواهد بود، که با استفاده از یک **الگوریتم جایگزینی پسرو**[۳] می توان آن را حل کرد،

$$
\begin{aligned}
a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\
&\vdots \\
a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n &= b'_{n-1} \\
a'_{nn}x_n &= b'_n
\end{aligned}
$$

الگوریتم جایگزینی پسرو بصورت زیر می باشد،

گام اول) $x_n = \dfrac{b'_n}{a'_{nn}}$

گام دوم) $i = n-1, \ldots, 2, 1 \quad , \quad x_i = \dfrac{1}{a'_{ii}}\left(b'_i - \sum_{j=i+1}^{n} a'_{ij} x_j \right)$

گام سوم) $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$

فرایند تبدیل ماتریس ضرایب به فرم بالا مثلثی را می توان بصورت زیر خلاصه کرد،

گام اول- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا nام،

$$\frac{-a_{i1}}{a_{11}} r_1 + r_i \to r_i \qquad , \qquad i = 2, \ldots, n$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادلات سوم تا nام،

$$\frac{-a_{i2}}{a_{22}} r_2 + r_i \to r_i \qquad , \qquad i = 3, \ldots, n$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $n-1$ ادامه می دهیم.

مثال ۲-۳

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر است،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۱) ابتدا باید مجهول x_1 را از معادلات دوم و سوم حذف نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-4}{9}r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ \frac{-1}{9}r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & \frac{6}{9} & \frac{5}{9} & \frac{20}{9} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۲) حال باید مجهول x_2 را از معادله سوم حذف نماییم،

$$\frac{-6}{15}r_2 + r_3 \rightarrow r_3 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{15}{9} & \frac{20}{9} & \frac{44}{9} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{9} & \frac{4}{15} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۳) بنابراین ماتریس ضرایب به فرم بالامثلثی تبدیل می شود و دستگاه معادلات حاصل بصورت زیر خواهد بود،

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ \frac{15}{9}x_2 + \frac{20}{9}x_3 &= \frac{44}{9} \\ \frac{-3}{9}x_3 &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

که جواب ها به راحتی با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو قابل محاسبه هستند،

$$x_1 = \frac{-1}{5}, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = \frac{-4}{5}$$

□

در انجام روش حذفی گوسی، هر یک از مراحل گفته شده را می توان در قالب ضرب یک **ماتریس مقدماتی**[1] بیان کرد. ماتریس های مقدماتی مربعی بوده و با انجام یک عمل مقدماتی روی ماتریس واحد I_n بدست می آیند. در مجموع سه نوع ماتریس مقدماتی برای انجام عملیات سطری، همچنین برای عملیات ستونی ماتریس ها وجود دارد.

۱- ماتریس های مقدماتی که عمل جابجایی سطر را انجام می دهند، $r_i \leftrightarrow r_j$. به چنین ماتریس هایی **ماتریس جایگشت**[2] نیز گفته می شود. در این ماتریس ها $\det(E) = -1$ و $E^{-1} = E$ است.

مثال ۲-۴

برای نمونه ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

$$r_2 \leftrightarrow r_3 \Rightarrow \qquad E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 9 & 12 & 7 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$r_1 \leftrightarrow r_2 \Rightarrow \qquad E_2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

[1] Elementary Matrix
[2] Permutation Matrix

۲- ماتریس های مقدماتی که هر سطر از ماتریس را در عددی مثل k ضرب می نمایند، $kr_i \to r_i$.
در این ماتریس ها E یک ماتریس قطری، $\det(E) = k$ است و $\left[E_i(k)\right]^{-1} = E_i(1/k)$ است.

مثال ۲-۵

برای نمونه ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

$$-4r_2 \to r_2 \Rightarrow \qquad E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & -24 & -12 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$5r_1 \to r_1 \Rightarrow \qquad E_2 B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$$

□

۳- ماتریس های مقدماتی که هر سطر از ماتریس را با مضربی از سایر سطرها جمع می نمایند، $kr_j + r_i \to r_i$. در این ماتریس ها $\det(E) = 1$ است و $[E_i(k)]^{-1} = E_i(-k)$ است.

مثال ۲-۶

برای نمونه ماتریس های زیر را در نظر بگیرید،

$$-4r_2 + r_1 \to r_1 \Rightarrow \qquad E_1A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -29 & -8 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$5r_1 + r_2 \to r_2 \Rightarrow \qquad E_2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}$$

□

مثال ۲-۸

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 3x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

<u>گام اول</u>- حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ \frac{3}{2}r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 15 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 5 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از معادلات سوم،

$$\frac{-3}{5}r_2+r_3\to r_3 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 15 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad\to\quad E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

گام سوم - اجرای الگوریتم جایگزینی پسرو برای حل معادلات،

$$\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3=4 \\ \frac{5}{2}x_2+\frac{5}{2}x_3=15 \\ -2x_3=-4 \end{cases} \quad\to\quad \begin{cases} x_3=2 \\ x_2=\frac{2}{5}(15-\frac{5}{2}x_3)=4 \\ x_1=-\frac{1}{2}(4-x_2+x_3)=-1 \end{cases} \quad\to\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□

۲-۳-۱-۲- فرم سطری پلکانی

در مثال های قبل تعداد معادلات با تعداد مجهولات مساوی در نظر گرفته شده بود، به عبارتی $m = n$ و ماتریس A مربعی است. لیکن در صورتیکه ماتریس A مربعی نباشد، سعی می شود تا ماتریس A به **فرم سطری پلکانی**[۱] زیر تبدیل گردد.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۵-۲)$$

فرم سطری پلکانی خصوصیات زیر را داراست،

۱- سطرهایی که تمامی عناصر آنها صفر است در بخش پایین ماتریس قرار می گیرند.

۲- در سطرهایی که شامل عناصر غیر صفر هستند، اولین عنصر غیر صفر در سمت چپ سطر، عدد یک می باشد، که به آن، **عنصر محوری**[۱] گفته می شود.

---

[۱] Row Echelon Form

فرایند تبدیل ماتریس ضرایب $m \times n$ به فرم سطری پلکانی را می توان بصورت زیر خلاصه کرد،

گام اول- در صورتیکه ضریب x_1 در معادله اول یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{11}} r_1 \to r_1$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا mام،

$$-a_{i1} r_1 + r_i \to r_i \qquad , \qquad i = 2, \ldots, m$$

گام دوم- در صورتیکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{22}} r_2 \to r_2$$

حذف مجهول x_2 از معادلات سوم تا mام،

$$-a_{i2} r_2 + r_i \to r_i \qquad , \qquad i = 3, \ldots, m$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $m-1$ ادامه می دهیم.

مثال ۲-۱۴

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۱) از آنجاییکه ضریب x_1 در سطر اول یک و در سطر دوم صفر می باشد، لذا x_1 را از سطر سوم حذف نماییم،

$$-2r_1 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۲) با توجه به اینکه ضریب x_2 در سطر دوم یک است، لذا x_2 را از سطر سوم حذف می نماییم،

$$2r_2 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۳) از آنجاییکه در سطر سوم، اولین عدد غیر صفر از سمت چپ یک می باشد، لذا الگوریتم پایان یافته است و فرم سطری پلکانی بصورت زیر بدست می آید،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

بنابراین، دستگاه معادلات معادل بصورت زیر در خواهد آمد،

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4$$
$$x_4 + x_5 = 1$$

از آنجائیکه تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات می باشند، می توان برخی از مجهولات را برحسب دیگری بدست آورد،

$$x_1 = -6 + x_5 + 2x_3, \quad x_2 = 2 + x_5 - x_3, \quad x_4 = 1 - x_5$$

با توجه به این جوابها، متغیرهای x_1, x_2, x_4 مستقل نبوده و وابسته به مقدار x_3 و x_5 هستند، به x_3 و x_5 **متغیرهای آزاد**[1] نیز گفته می شود. با کمی دقت می توان دریافت که متغیرهای x_1, x_2, x_4 مربوط به ستون هایی هستند که عناصر محوری در آنها قرار دارند.

□

مثال ۲-۱۵

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 8 \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_4 + x_5 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - 8x_3 + 20x_5 = 1 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده این معادلات بصورت زیر می باشد،

$$[A|\mathbf{b}] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 7 & 2 & -2 & -4 & 3 & 8 \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right]$$

گام اول- ابتدا ضریب x_1 را در معادله اول به یک تبدیل می کنیم،

$$\frac{1}{7}r_1 \to r_1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} 3r_1 + r_2 \to r_2 \\ -4r_1 + r_3 \to r_3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{16}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-48}{7} & \frac{16}{7} & \frac{128}{7} & \frac{-25}{7} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

گام دوم- از آنجاییکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نیست داریم،

$$\frac{-7}{15}r_2 \to r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & \frac{-15}{7} & \frac{-48}{7} & \frac{16}{7} & \frac{128}{7} & \frac{-25}{7} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{15}{7}r_2+r_3\rightarrow r_3 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 16 & -6 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

گام سوم- ضریب x_3 را در معادله سوم به یک تبدیل می کنیم،

$$\frac{-1}{6}r_3\rightarrow r_3 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{-16}{15} & \frac{-17}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-8}{3} & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

گام چهارم- با توجه به اینکه x_4 و x_5 متغیرهای آزاد هستند، دستگاه معادلات حاصل را حل می کنیم،

$$\left.\begin{aligned} x_1+\frac{2}{7}x_2-\frac{2}{7}x_3-\frac{4}{7}x_4+\frac{3}{7}x_5&=\frac{8}{7} \\ x_2+\frac{6}{15}x_3-\frac{2}{15}x_4-\frac{16}{15}x_5&=\frac{-17}{15} \\ x_3-\frac{1}{3}x_4-\frac{8}{3}x_5&=1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1&=\frac{28}{15}+\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5 \\ x_2&=\frac{-23}{15} \\ x_3&=1+\frac{1}{3}x_4+\frac{8}{3}x_5 \end{aligned}\right.$$

این دستگاه بیشمار جواب دارد.

۲-۳-۲- روش گوس- جردن

در روش گوس - جردن سعی بر آن است تا عملیات انجام شده بر روی ماتریس افزوده چنان باشد که ماتریس A تبدیل به یک ماتریس قطری با عناصر قطر اصلی یک گردد. به عبارتی ماتریس افزوده در حالت $m = n$ به فرم زیر تبدیل می گردد،

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array}\right) \tag{۲-۶}$$

الگوریتم کلی را بصورت زیر می توان بیان کرد،

گام اول- حذف مجهول x_1 از تمامی معادلات به جز معادله اول،

$$\frac{-a_{i1}}{a_{11}} r_1 + r_i \rightarrow r_i \quad , \quad i = 2, \dots, n$$

گام دوم- حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$\frac{-a_{i2}}{a_{22}} r_2 + r_i \rightarrow r_i \quad , \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq 2$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $n-1$ ادامه می دهیم.

گام چهارم- تبدیل عناصر قطری به یک.

$$\frac{1}{a_{ii}} r_i \rightarrow r_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

همانند آنچه که در اعمال روش حذفی گوسی گفته شد، در روش گوس- جردن نیز اگر یکی از عناصر قطری به عدد صفر تبدیل گردد نیاز به عمل محورگیری خواهد بود. در این روش نسبت به روش حذفی گوسی حجم محاسبات الگوریتم بیشتر است، لیکن در پایان نیازی به اجرای الگریتم جایگزینی پسرو وجود ندارد.

مثال ۲-۱۷

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

فرم ماتریس افزوده سیستم به بصورت زیر خواهد بود،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

از آنجاییکه ضریب x_1 در معادله اول برابر صفر است، با جابجا کردن سطر اول و سوم داریم،

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۱) ضریب x_1 در معادله سوم صفر می باشد، لذا مجهول x_1 را از معادله دوم حذف می نماییم ،

$$\frac{-1}{2}r_1 + r_2 \to r_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۲) حذف مجهول x_2 از معادلات اول و سوم،

$$\left.\begin{array}{l} -2r_2+r_1\rightarrow r_1 \\ -4r_2+r_3\rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۳) حذف مجهول x_3 از معادلات اول و دوم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-2}{5}r_3+r_1\rightarrow r_1 \\ \frac{3}{10}r_3+r_2\rightarrow r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{22}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(۴) در این مرحله که ماتریس A بصورت قطری در آمده است، با تقسیم هر سطر بر عنصر قطر اصلی آن ماتریس A را به یک ماتریس واحد تبدیل می نماییم،

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}r_1\rightarrow r_1 \\ 2r_2\rightarrow r_2 \\ \frac{-1}{5}r_3\rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

به این ترتیب مقدار مجهولات به صورت زیر بدست می آید،

$$x_1=\frac{11}{5},\qquad x_2=\frac{7}{5},\qquad x_3=\frac{6}{5}$$

۲-۳-۲-۲- کاربرد در محاسبه ماتریس معکوس

یکی از کاربردهای روش گوس- جردن در محاسبه ماتریس معکوس می باشد،

$$AA^{-1} = I \quad \rightarrow \quad [A|I] \Rightarrow [I|A^{-1}] \tag{۲-۷}$$

مثال۲-۲۱

معکوس ماتریس A را با استفاده از روش گوس- جردن بدست آورید،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

با استفاده از رابطه(۲-۷) داریم،

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

حال روش گوس- جردن را بر روی این ماتریس افزوده پیاده می کنیم،

$$\left.\begin{array}{l} r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -2r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-2}{3}r_2+r_1\to r_1\\[2mm] \dfrac{5}{3}r_2+r_3\to r_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{7}{3}&\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}&0\\0&3&1&1&1&0\\0&0&\frac{-4}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{5}{3}&1\end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{7}{4}r_3+r_1\to r_1\\[2mm] \dfrac{3}{4}r_3+r_2\to r_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{-1}{4}&\frac{9}{4}&\frac{7}{4}\\0&3&0&\frac{3}{4}&\frac{9}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{-4}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{5}{3}&1\end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{3}r_2\to r_2\\[2mm] \dfrac{-3}{4}r_3\to r_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{-1}{4}&\frac{9}{4}&\frac{7}{4}\\0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{-5}{3}&\frac{-3}{4}\end{array}\right]=\left[I\middle|A^{-1}\right]$$

لذا به راحتی و بدون نیاز به محاسبه ماتریس الحاقی معکوس ماتریس A بدست می آید.

۲-۳-۲-۳- فرم سطری پلکانی کاهش یافته

در صورتیکه ماتریس A مربعی نباشد و $m \neq n$ باشد دیگر نمی توان معادلات را به شکل رابطه (۲-۵) در آورد، در این صورت سعی می شود تا ماتریس A را به **فرم سطری پلکانی کاهش یافته**[1] درآورد، یک نمونه از فرم سطری پلکانی کاهش یافته در رابطه زیر نشان داده شده است. در اینجا *ها می توانند عددی صفر یا غیر صفر باشند،

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۸-۲}$$

نمایش سطری پلکانی دارای خصوصیات زیر می باشد،

۱- سطرهایی که تمامی عناصر آنها صفر می باشد در بخش پایین ماتریس قرار دارند.

۲- در سطرهایی که شامل عناصر غیر صفر هستند، اولین عنصر غیر صفر در سمت چپ آن سطر، عدد یک می باشد، که به آن، عنصر محوری گفته می شود.

۳- در ستون هایی که دارای عنصر محوری است، کلیه عناصر بالای عنصر محوری صفر می باشد.

---

[1] Reduced Row Echelon Form

فرایند تبدیل ماتریس ضرایب $m \times n$ به فرم سطری پلکانی کاهش یافته بصورت زیر است،

گام اول- در صورتیکه ضریب x_1 در معادله اول یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{11}} r_1 \to r_1$$

حذف مجهول x_1 از معادلات دوم تا mام،

$$-a_{i1} r_1 + r_i \to r_i \quad , \quad i = 2, \ldots, m$$

گام دوم- در صورتیکه ضریب x_2 در معادله دوم یک نباشد،

$$\frac{1}{a_{22}} r_2 \to r_2$$

حذف مجهول x_2 از تمامی معادلات به جز معادله دوم،

$$-a_{i2} r_2 + r_i \to r_i \quad , \quad i = 1, \ldots, m, \quad i \neq 2$$

گام سوم- به همین ترتیب تا گام $m-1$ ادامه می دهیم.

مثال ۲-۲۲

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

ماتریس افزوده این معادلات به فرم زیر می باشد،

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

حال می خواهیم آن را به فرم سطری پلکانی کاهش یافته در آوریم.

(۱) ضریب x_1 در معادله اول یک و در معادله دوم صفر می باشد، لذا باید x_1 را از سطر سوم حذف نماییم،

$$-2r_1 + r_3 \to r_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

(۲) ضریب x_2 در معادله دوم یک می باشد، لذا x_2 را از سطر اول و دوم حذف می نماییم،

$$\left.\begin{array}{l}-3r_2+r_1\to r_1\\ 2r_2+r_3\to r_3\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&-2&-1&-2&-7\\0&1&1&2&1&4\\0&0&0&1&1&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

(۳) از آنجاییکه ضریب x_3 در سطر سوم صفر می باشد، سراغ x_4 می رویم. ضریب x_4 یک است، پس کافی است که x_4 را از معادلات اول و دوم حذف نماییم،

$$\left.\begin{array}{l}r_3+r_1\to r_1\\ -2r_3+r_2\to r_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&-2&0&-1&-6\\0&1&1&0&-1&2\\0&0&0&1&1&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

به این ترتیب فرم سطری پلکانی کاهش یافته معادلات بدست می آید، با توجه به معادلات بدست آمده نتایج زیر حاصل می شود،

$$x_1=-6+x_5+2x_3,\quad x_2=2+x_5-x_3,\quad x_4=1-x_5$$

با کمی دقت متوجه می شویم که متغیرهای x_1,x_2,x_4 مربوط به ستون هایی هستند که عناصر محوری در آن قرار دارند.

۲-۴- حل دستگاه معادلات جبری خطی بر پایه تجزیه ماتریس ها

یکی دیگر از روش های حل دستگاه معادلات تجزیه ماتریس ضرایب به حاصلضرب چند ماتریس ساده تر است که معمولاً به فرم قطری یا مثلثی هستند. در حل دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ماتریس ضرایب A بصورت حاصلضرب $A = A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k$ تجزیه می گردد و حل دستگاه معادلات به فرم زیر در می آید،

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

که در واقع شامل حل k معادله ساده به فرم زیر است، که معمولاً برای حل از روش های جایگزینی پیشرو و پسرو استفاده می گردد،

$$A_1\mathbf{z}_1 = \mathbf{b}, \quad A_2\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1, \quad \cdots, \quad A_{k-1}\mathbf{z}_{k-1} = \mathbf{z}_{k-2}, \quad A_k\mathbf{x} = \mathbf{z}_{k-1}$$

بنابراین در این روش محاسبات را می توان به دو بخش تقسیم کرد،

۱- محاسبات لازم برای بدست آوردن تجزیه ماتریس A

۲- محاسبات لازم برای حل k دستگاه معادلات ساده

در واقع عمده محاسبات مربوط به تجزیه ماتریس است. یکی از کاربردهای این روش زمانی است که بخواهیم جواب دستگاه معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ را برای چندین بردار $\mathbf{b}$ مختلف بدست آوریم. در اینصورت عمل تجزیه ماتریس که بیشترین حجم محاسبات را دارد فقط یکبار صورت می گیرد و بخش تکراری فقط مربوط به حل دستگاه معادلات ساده می باشد.

در این راستا دو روش **تجزیه** LU[۱] و **تجزیه چالسکی**[۲] ماتریس ها معرفی می گردد. این دو روش برای حل دستگاه معادلات مربعی کاربرد دارند.