

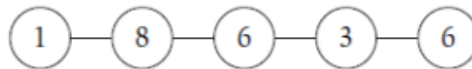
تمرین کتبی سوم

طراحی الگوریتم

**** مسائل زیر را با استفاده از الگوریتم حریصانه حل کنید. ****

۱. گراف $G=(V,E)$ را گرافی بدون جهت با n راس در نظر بگیرید. زیرمجموعه ای از رئوس V یک مجموعه مستقل نامیده می شود. چنانچه هیچ دو راسی متعلق به آن توسط یالی به یکدیگر متصل نشده باشد. یافتن مجموعه های مستقل با اندازه بالا در عمل بسیار دشوار است اما در این مسئله با ساده گرفتن گراف ورودی سعی در حل کارآمد آن داریم.

گراف $G=(V,E)$ یک مسیر نامیده می شود چنانچه بتوان رئوس آن را به فرم v_1, v_2, \dots, v_n نوشت به طوری که بین دو راس v_i و v_j یالی وجود دارد اگر و تنها اگر i و j دقیقاً یک واحد با هم اختلاف داشته باشند (شکل زیر). با توجه به شکل، به هر راس v_i گراف یک عدد صحیح مثبت w_i ب عنوان وزن آن راس (عدد داخل آن راس) تخصیص داده می شود. هدف این مسئله یافتن یک مجموعه مستقل در یک مسیر G با وزن مجموع بیشینه است.



الف) مثال نقضی ارائه دهید که الگوریتم حریصانه زیر همواره جواب بهینه شامل یک مجموعه مستقل با وزن مجموع بیشینه تولید نمی کند.

```
The "heaviest-first" greedy algorithm
Start with  $S$  equal to the empty set
While some node remains in  $G$ 
    Pick a node  $v_i$  of maximum weight
    Add  $v_i$  to  $S$ 
    Delete  $v_i$  and its neighbors from  $G$ 
Endwhile
Return  $S$ 
```

ب) مثال نقضی ارائه دهید که الگوریتم حریصانه زیر نیز همواره جواب بهینه شامل یک مجموعه مستقل با وزن مجموع بیشینه را تولید نمی کند.

```
Let  $S_1$  be the set of all  $v_i$  where  $i$  is an odd number
Let  $S_2$  be the set of all  $v_i$  where  $i$  is an even number
(Note that  $S_1$  and  $S_2$  are both independent sets)
Determine which of  $S_1$  or  $S_2$  has greater total weight,
and return this one
```

۲. فرض کنید شما به عنوان مشاور در یک شرکت بزرگ حمل و نقل بین تهران و بندرعباس استخدام شده اید. حجم مبادلات به قدری بالاست که باید روزانه چندین کامیون برای انتقال بارها بین دو مکان جابجا شوند. هر کامیون شامل یک ظرفیت وزنی محدود W برای حمل بار است. بارها در ایستگاه تهران یکی یکی تحویل داده می شود و هر بسته i یک وزن w_i دارد. ایستگاه بارگیری به حدی کوچک است که حداکثر تنها یک کامیون می تواند در هر زمان در آنجا حاضر باشد. سیاست شرکت بدین صورت است که محموله ها به ترتیب ورودشان به ایستگاه در کامیون ها بارگیری شوند؛ در غیر اینصورت این امکان وجود دارد که مشتری به دلیل مشاهده رسیدن زودتر باری در مقصد که بعد از بار خود وارد ایستگاه مبدا شده است ناراضی شود. در حال حاضر، شرکت از یک الگوریتم حریصانه ساده برای بارگیری استفاده می کند. بارها بر اساس ترتیب ورودشان بسته بندی شده و تا زمانی که ظرفیت کامیون اجازه می دهد در آن بارگیری می شوند؛ در غیر اینصورت کامیون به مقصد مورد نظر حرکت کرده و یک کامیون خالی دیگر برای بارگیری به جایگاه تعبیه شده در ایستگاه مبدا منتقل می شود.

مدیران شرکت اما نسبت به کارایی این الگوریتم شک دارند و بر این باورند که این الگوریتم تعداد زیادی کامیون طلب می کند. از این رو نیاز به نظر شما دارند که آیا می توان وضعیت فعلی را بهبود داد؟ ایده آنها کاهش تعداد کامیونها با ارسال زود هنگام یک کامیون پر نشده در گاهی اوقات است تا بتوان امکان بارگیری بهتری برای کامیون های معدود بعدی فراهم نمود.

اکنون برای رد ایده این مدیران، باید ثابت کنید که در حقیقت الگوریتم حریصانه فعلی برای یک مجموعه ای از جعبه هایی با وزن مشخص، تعداد کامیونهای مورد نیاز را کمینه می کند. اثبات شما باید همان نوع تحلیلی را دنبال کند که برای مسئله زمانبندی بازه ای استفاده شده بود. به بیان دیگر باید بتوان بهینه بودن الگوریتم حریصانه بسته بندی پیشنهادی را با تعریف یک معیاری که تحت آن الگوریتم پیشگام از راه حل های دیگر حرکت می کند، اثبات نمود.

۳. فرض کنید n تبلیغ برای قرارگیری روی یک سایت معروف اینترنتی دارید. مبلغی برای هر بار کلیک بر روی هر تبلیغ در نظر گرفته شده است. سایت به n بخش تقسیم شده است و تعداد کلیک موردانتظار روی هر بخش در هر روز تخمین زده شده است. الگوریتمی بنویسید که تبلیغ ها را بین این بخش ها به گونه ای توزیع کند که درآمد را بیشینه کند.

راهنمایی: دو دنباله زیر را در نظر بگیرید:

a_1, a_2, \dots, a_n سود هر کلیک روی هر تبلیغ : a_i

b_1, b_2, \dots, b_n میانگین کلیک در هر روز برای هر بخش : b_i

باید تبلیغ ها و بخش ها را به صورت (a_i, b_i) تقسیم کنیم به گونه ای که مجموع آن ها ماکزیمم باشد.

۴. الگوریتمی بنویسید که با دادن عدد بعنوان ورودی، اعداد طبیعی تا آن عدد را به دو مجموعه تقسیم کند به طوری که اختلاف مجموع اعداد دو مجموعه از هم کمترین مقدار باشد.

مثال:

ورودی : ۵

مجموعه ها: $\{۵, ۲\}$ و $\{۴, ۳, ۱\}$

(مجموعه های دیگری نیز با همین شرایط می توان نوشت)