سیستمهای کنترل خطی

تالیف: رامین نادری

مراجع :

۱. دکتر علی خاکی صدیق، " سیستمهای کنترل خطی"
۲. بنجامین کو، "سیستمهای کنترل اتوماتیک"
۳. ریچارد سی. دورف، "سیستمهای کنترل مدرن" **مرجع اصلی**
۴. N. S. Nise, “Control Systems Engineering”
۵. K. Ogata, “Modern Control Engineering”
۶. G. F. Franklin, J. D. Powell and A. Emami-Naeini, “Feedback Control of Dynamic”

فهرست مطالب

Ideas are the beginning point of all fortunes.

ایده ها نقطه شروع همه ثروتها هستند. ناپلئون میل

۱. مقدمه

این درس به منظور آشنایی با اصول تئوری کنترل کلاسیک طراحی گردیده است. مفاهیمی از قبیل تابع تبدیل، فضای حالت، فیدبک، پایداری و تحلیل عملکرد سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان بررسی می‌شوند. طراحی سیستم کنترل در حوزه زمان و فرکانس با استفاده از روش‌های کلاسیک نیز مطالعه می‌شود.

تاریخچه کنترل:

۲۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح سیستم کنترل شناور توسط یونانیها استفاده شده است. فیزیک‌دانی به نام Maxwell مفاهیم ریاضی را در مبحث سیستم‌های کنترل وارد کرد. ریاضی‌دانانی مثل راث[1] و لیاپانوف[2] روی مباحث پایداری سیستم‌های کنترل تحقیقات فراوانی انجام دادند. در نیمه اول قرن ۲۰ روشهای ریاضی نایکوئیست[3] و بود[4] با استفاده از آنالیز مختلط در بررسی پایداری و عملکرد سیستم‌های کنترل مطرح گردید. در طول جنگ جهانی دوم روشهایی برای فیلتر کردن نویز و تخمین مدل ابداع گردید. در سالهای اخیر هم الگوریتم‌های کنترلی مقاوم، تطبیقی، هوشمند، بهینه، پیش‌بینی و فازی و ... پیشرفت زیادی داشته‌اند.

آشنایی با سیستم‌های کنترل:

سیستم کنترل، سیستمی است که عملکرد سیستمی دیگر را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

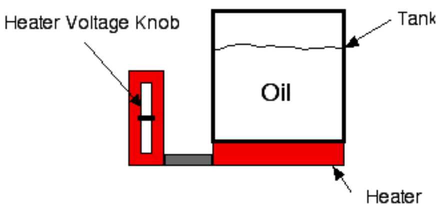
- در رباتیک، الگوریتم‌های کنترل حرکت بازوها را امکان‌پذیر می‌سازند.
- در مهندسی پرواز الگوریتم‌های کنترل وظیفه‌ی پایداری، ردیابی هدف و حذف اغتشاش را بر عهده دارند.
- در سیستم تعلیق فنر خودرو کنترل کننده وظیفه‌ی جلوگیری از انتقال نوسانات چرخ به صندلیها را بر عهده دارند.

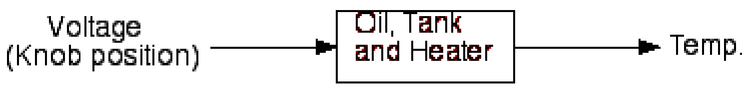
مباحثی که در مهندسی کنترل مطرح می‌شوند به چند دسته‌ی اساسی قابل تقسیم است:

۱. علوم پایهٔ مهندسی مانند دینامیک، مدارهای الکتریکی، ترمودینامیک و مکانیک سیالات
۲. دانش ریاضی مهندسی مانند ماتریس‌ها، معادلات دیفرانسیل، انتگرال مختلط و فضای حالت، جبر خطی و ...
۳. دانش شبیه‌سازی با نرم‌افزار مانند؛ MATLAB، LABView
۴. دانش تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل
۵. دانش سخت‌افزارهای کنترل مانند: سنسورها، عملگرها
۶. دانش پیاده‌سازی سیستم‌های کنترل و روشهای ثبت داده (Data acquisition) مانند سخت‌افزارهای کنترلی، PLC، DCS

۱-۱ آشنایی با مفاهیم اولیه کنترل

با یک مثال ساده برخی از مفاهیم اساسی کنترل را توضیح می‌دهیم. سیستم مورد مطالعه متشکل از یک تانک محتوی آب است که روی یک گرمکن قرار گرفته است. مقدار انرژی گرمایی که گرمکن به تانک انتقال می‌دهد وابسته به ولتاژ ورودی آن است که توسط یک ولوم تنظیم می‌شود. در این کاربرد علاقه‌مند به تنظیم دمای آب هستیم. این فرآیند را می‌توان با بلوک دیاگرام زیر نمایش داد.





ورودی فرآیند، ولتاژ گرمکن و خروجی آن، دمای آب است.

[1] Routh
[2] Lyapunov
[3] Nyquist
[4] Bode

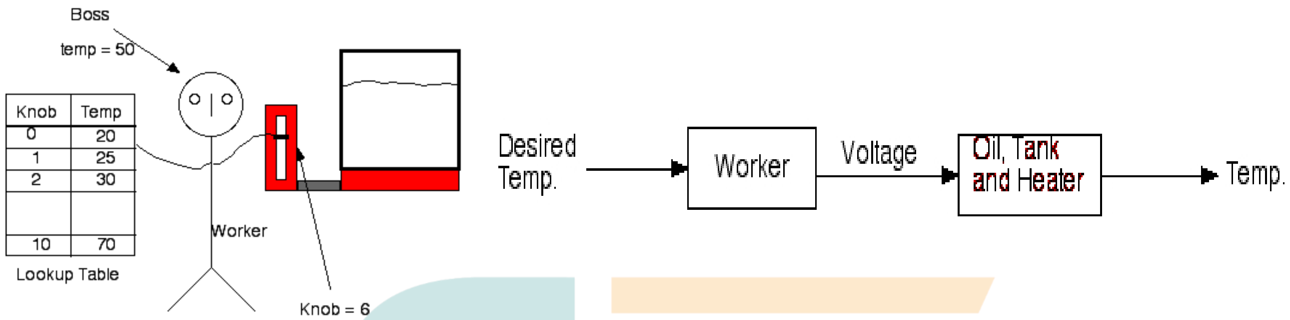
فرض کنید این فرآیند در یک کارخانه به وسیله کارگری تنظیم می‌شود. او این کار را با تغییر وضعیت ولوو و طبق هدفی که مدیر او تعیین کرده است انجام می‌دهد. کارگر از یک Lookup table برای تنظیم موقعیت ولوو استفاده می‌کند.

این جدول موقعیت ولوو و دمای متناظر با هر موقعیت را نشان می‌دهد. دمای متناظر با هر وضعیت در واقع دمای حالت ماندگار[1] است.

حالت دائمی: وضعیت فرآیند پس از طی حالت گذرا را حالت دائمی می‌گویند.

حالت گذرا: زمانی است که طول می‌کشد تا خروجی فرآیند به مقدار نهایی برسد و پس از طی این زمان خروجی روی مقدار نهایی باقی می‌ماند و تغییر نمی‌کند.

بلوک دیاگرام سیستم کنترلی دمای آب به‌صورت زیر است:

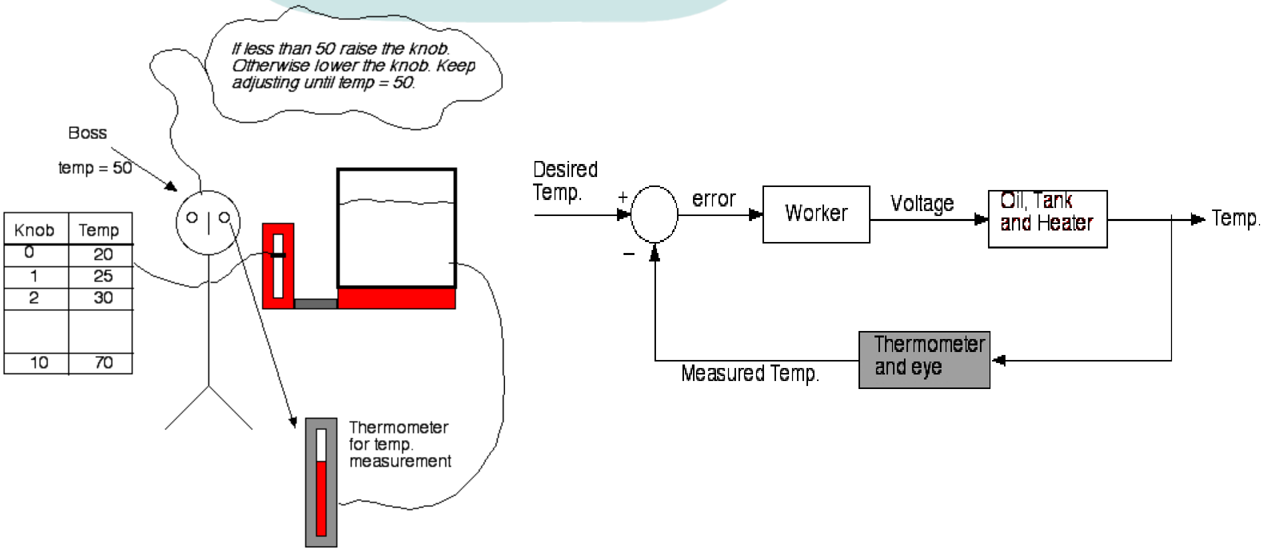


اگر همه چیز خوب باشد دما به مقدار مطلوب می‌رسد اما معمولاً به علت شرایط و تغییرات محیطی دمای خروجی مقداری با دمای مطلوب اختلاف دارد. کارگر مقدار نهایی دما را نمی‌داند زیرا سنسوری وجود ندارد. کارگر تنها موقعیت ولوو را تنظیم می‌کند و امیدوار است که دما به مقدار مطلوب برسد. چنین سیستمی حلقه باز نامیده می‌شود.

اگر مدیر کارخانه بخواهد دمای آب را بصورت دقیق‌تر در کنترل خود داشته باشد، یک ترمومتر (دماسنج) خریداری می‌نماید تا کارگر بتواند دمای آب را خوانده و ولوو را طوری تنظیم کند که دمای خروجی با دمای مطلوب برابر گردد.کارگر اختلاف بین دمای مطلوب و دمای اندازه‌گیری شده را محاسبه می‌کند و اعمال زیر را انجام می‌دهد:

- اگر خطا مثبت باشد کاگر ولوو را بالا می‌برد تا دما افزایش یابد
- این فرآیند را تا زمانی که خطا صفر گردد ادامه می‌دهد.
- Look up table در کنترل حلقه بسته فقط برای حدس مقدار اولیه موقعیت ولوو استفاده می‌شود.

چنین سیستمی حلقه بسته نامیده می‌شود. بلوک دیاگرام سیستم کنترل حلقه بسته دمای تانک آب بصورت زیر است:

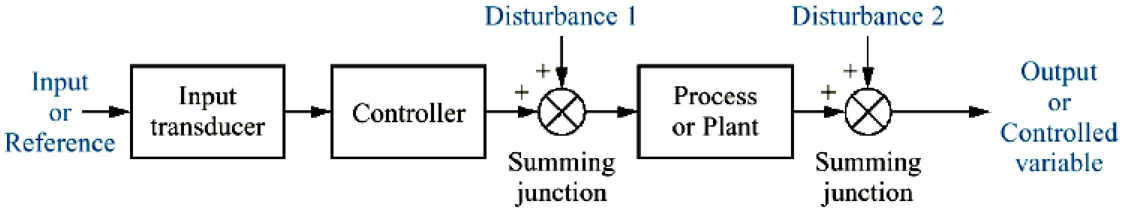


سیستمی که در آن دماسنج وجود ندارد را یک سیستم حلقه باز یا Open Loop گویند و سیستمی که در آن از دماسنج فیدبک گرفته می‌شود و برای تنظیم ولوو استفاده می‌گردد یک سیستم حلقه بسته یا Close Loop گویند. وسیله ای که برای اندازه‌گیری استفاده می‌گردد، سنسور (حسگر) و فرآیند تحت کنترل، سیستم، پروسه یا پلانت نامیده می‌شود.

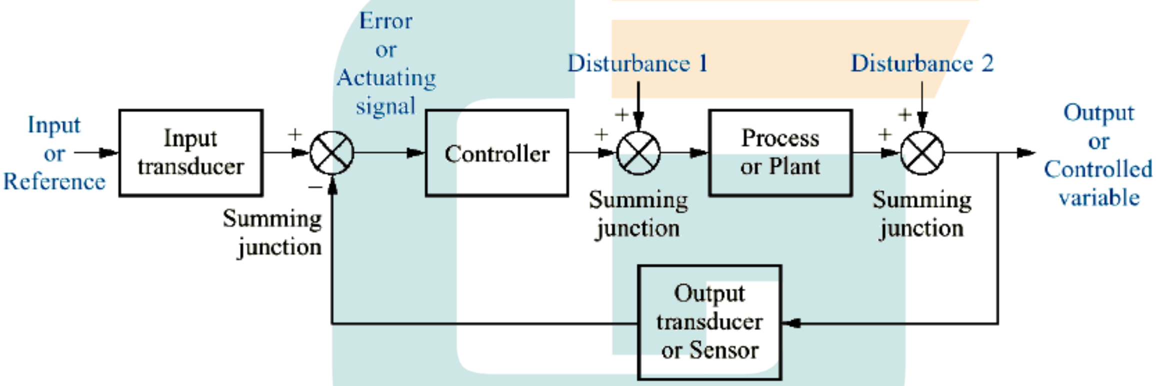
[1] Steady State

۱-۲ انواع سیستمهای کنترل

سیستم کنترل حلقه باز: از یک محرک برای کنترل مستقیم فرآیند و بدون استفاده از فیدبک استفاده می‌کند.



سیستم کنترل حلقه بسته: سیستم کنترل حلقه بسته سیگنال خروجی را اندازه گرفته و مقایسه‌ای را با ورودی مطلوب برای تولید سیگنال خطا انجام می‌دهد و سپس آن را به سیستم اعمال می‌کند.



تمرین: دو شخص A و B به منظور تأمین مالی در زمان بازنشستگی اقدام به سرمایه‌گذاری نمودند: شخص A ماهیانه مبلغ ۵۰$ در صندوق بازنشستگی پس انداز می‌کند، شخص B ماهیانه ۵۰$ با توجه به تغییرات قیمت سهام در بورس اقدام به خرید و فروش سهام می‌کند عملکرد سرمایه‌گذاری این دو شخص را بصورت بلوک دیاگرامی رسم کنید و آن را تفسیر کنید.

Coming together is a beginning; keeping together is progress; working together is success.

گرد هم آمدن شروع است. با هم ماندن پیشرفت است. با هم کار کردن موفقیت است.

۲. تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن

۲-۱. تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس: عملگری ریاضی است که یک تابع حقیقی را به تابع مختلط تبدیل می‌کند. یکی از کاربردهای مهم تبدیل لاپلاس تبدیل معادلات دیفرانسیل خطی به معادلات جبری خطی است. تبدیل لاپلاس در حوزه‌ی سیستم‌های غیرخطی کاربردی ندارد.

$$L(x(t)) = X(s)$$
$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t)dt$$

مثال۱: تابع پله $x(t) = 1$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t)dt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$
$$= -\frac{1}{s} e^{-st} |_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \ (s > 0).$$

مثال۲: تابع نمایی $x(t) = e^{at}$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t)dt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt$$
$$= \frac{1}{(a-s)} e^{(a-s)t} |_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}, \ (s > a).$$

خاصیت خطی پذیری تبدیل لاپلاس: اگر $X_1(s) = L(x_1(t))$ و $X_2(s) = L(x_2(t))$ آنگاه برای هر ثابت c_1 و c_2 داریم.

$$L(c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)) = c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s).$$

تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع: اگر $X(s) = L(x(t))$

مشتق مرتبه اول:

$$L\left(\dot{x}\right) = sX(s) - x(0).$$

مشتق مرتبه دوم:

$$L\left(\ddot{x}\right) = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0).$$

مشتق مرتبه n ام:

$$L\left(x^{(n)}\right) = s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} \dot{x}(0) \cdots - x^{(n-1)}(0),$$

$$\text{where, } x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$$

تبدیل لاپلاس یک سیگنال ضرب شده در تابع نمایی: اگر $X(s) = L(x(t))$ آنگاه:

$$L(e^{at} x(t)) = X(s-a).$$

این خاصیت بیانگر آن است که ضرب با یک تابع نمایی در حوزه زمان، معادل با انتقال (Shift) در حوزه فرکانس است.

جدول خواص تبدیل لاپلاس:

TABLE PROPERTIES OF THE LAPLACE TRANSFORM

Property	Signal	Laplace Transform	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linearity	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	At least $R_1 \cap R_2$
Time shifting	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
Shifting in the s-Domain	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	Shifted version of R (i.e., s is in the ROC if $s-s_0$ is in R)
Time scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Scaled ROC (i.e., s is in the ROC if s/a is in R)
Conjugation	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	At least $R_1 \cap R_2$
Differentiation in the Time Domain	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	At least R
Differentiation in the s-Domain	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integration in the Time Domain	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d(\tau)$	$\frac{1}{s}X(s)$	At least $R \cap \{\mathcal{R}e\{s\}>0\}$

Initial- and Final-Value Theorems

If $x(t)=0$ for $t<0$ and $x(t)$ contains no impulses or higher-order singularities at $t=0$, then

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX(s)$$

If $x(t)=0$ for $t<0$ and $x(t)$ has a finite limit as $t\longrightarrow\infty$, then

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to\infty} sX(s)$$

مثال۳: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$$a)\qquad x(t)=e^{3t}t \rightarrow X(s)=\frac{1}{(s-3)^2}$$

$$b)\qquad x(t)=e^{-t}\sin 2t \rightarrow X(s)=\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

TABLE LAPLACE TRANSFORMS OF ELEMENTARY FUNCTIONS

Transform pair	Signal	Transform	ROC ناحیه همگرایی
1	$\delta(t)$	1	All s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re e\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re e\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} > 0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} < 0$
6	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
7	$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re e\{s\} < -\alpha$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re e\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	All s
11	$[\cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$
12	$[\sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$
13	$[e^{-\alpha t}\cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
14	$[e^{-\alpha t}\sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
15	$u_n(t) = \frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	All s
16	$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{n \text{ times}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} > 0$

۲-۲. معکوس تبدیل لاپلاس

مثال۱: معادله دیفرانسیل سیستمی بصورت زیر است.

$\ddot{x}+5\dot{x}+6x=u(t)$,

که در آن u ورودی و x خروجی سیستم است. سیگنال $x(t)$ را در صورتی که $u(t)=e^{-t}$ و $x(0)=\dot{x}(0)=0$ باشد بدست آورید.

$$L\left(\ddot{x}+5\dot{x}+6x\right)=L(e^{-t})$$

$$(s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0))+5(sX(s)-x(0))+6X(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+5s+6)X(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2+5s+6)}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{a}{s+1}+\frac{b}{s+2}+\frac{c}{s+3}$$

$$a=(s+1)X(s)|_{s=-1}=\frac{1}{2}$$

$$b=(s+2)X(s)|_{s=-2}=-1$$

$$c=(s+3)X(s)|_{s=-3}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+3} \quad \Rightarrow \quad x(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

مثال۲: لاپلاس معکوس تابع تبدیل زیر را بیابید.

$$X(s)=\frac{1}{(s+2)(s+1)^2}$$

$$X(s)=\frac{a}{s+2}+\frac{b}{s+1}+\frac{c}{(s+1)^2}$$

$$a=(s+2)X(s)|_{s=-2}=\left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=-2}=1$$

$$c=(s+1)^2X(s)\Big|_{s=-1}=\left.\frac{1}{(s+2)}\right|_{s=-1}=-1$$

$$b=\frac{d}{ds}(s+1)^2X(s)\Big|_{s=-1}=-1$$

بنابراین:

$$X(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2} \qquad x(t)=e^{-2t}-e^{-t}-te^{-t},\ \text{for } t\geq 0.$$

مثال۳: لاپلاس معکوس تابع تبدیل زیر را بدست آورید.

$$X(s)=\frac{(s+1)(s^2+1)}{s(s+3)(s+6)^3}$$

با استفاده از تجزیه به کسرهای جزئی داریم:

$$X(s)=\frac{a}{s}+\frac{b}{s+3}+\frac{c}{s+6}+\frac{d}{(s+6)^2}+\frac{e}{(s+6)^3}$$
$$a=sX(s)\big|_{s=0}=\frac{1}{648}$$
$$b=(s+3)X(s)\big|_{s=-3}=\frac{20}{81}$$
$$e=(s+6)^3X(s)\big|_{s=-6}=-\frac{185}{18}$$
$$d=\frac{d}{ds}(s+6)^3X(s)\Big|_{s=-6}=\frac{1}{4}$$
$$c=\frac{d^2}{ds^2}(s+6)^3X(s)\Big|_{s=-6}=-\frac{161}{648}$$

$$x(t)=a+be^{-3t}+ce^{-6t}+dte^{-6t}+\frac{e}{2}t^2e^{-6t}.$$

مثال۴: لاپلاس معکوس تابع تبدیل زیر را بدست آورید. توجه کنید که مخرج دارای ریشه‌های مختلط و حقیقی است.

$$X(s)=\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}$$

ریشه های مخرج عبارتند از $s=-6$ ، $s=-3+4j$ و $s=-3-4j$ ابتدا تجزیه به کسرهای جزئی $X(s)$ را بدون تجزیه چند جمله‌ای مرتبه دوم با ریشه‌های مختلط انجام می‌دهیم.

$$X(s)=\frac{a}{s+6}+\frac{bs+c}{s^2+6s+25}$$
$$a=(s+6)X(s)\big|_{s=-6}=-12$$
$$X(s)=\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}=\frac{-12}{s+6}+\frac{bs+c}{s^2+6s+25}$$
$$100(s+3)=-12(s^2+6s+25)+(bs+c)(s+6)$$
$$100s+300=(-12+b)s^2+(-72+6b+c)s+(-300+6c)$$

با توجه به تناظر ضرایب داریم $b=12$ و $c=100$

$$\begin{aligned}X(s)&=\frac{-12}{s+6}+\frac{12s+100}{s^2+6s+25}\\&=\frac{-12}{s+6}+\frac{12(s+3)-36+100}{(s+3)^2+16}\\&=\frac{-12}{s+6}+\frac{12(s+3)}{(s+3)^2+16}+\frac{64}{(s+3)^2+16}\\&=\frac{-12}{s+6}+\frac{12(s+3)}{(s+3)^2+16}+\frac{(16)(4)}{(s+3)^2+16}.\end{aligned}$$
$$x(t)=-12e^{-6t}+12e^{-3t}\cos(4t)+16e^{-3t}\sin(4t),\ \text{for } t\ge 0.$$

تابع تبدیل:

تابع تبدیل تابعی تحلیلی است که صورت آن یک چند جمله‌ای و مخرج آن چند جمله‌ای دیگری از s است. ریشه‌های صورت را صفرهای تابع تبدیل و ریشه‌های مخرج را قطب‌های تابع تبدیل گویند. چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل با نام معادله‌ی مشخصه سیستم نیز شناخته می‌شود زیرا ریشه‌های این چند جمله‌ای رفتار سیستم را مشخص می‌کند.

Live out of your imagination, not your history
با خلاقیت زندگی کن نه با گذشته‌ات «استیون کاوی»

۳. مدلسازی سیستمهای کنترل

برای استفاده از تئوری کنترل در عمل، باید پلی بین دنیای واقعی و تئوری ریاضی زد که این پل همان مدلسازی است.

مدلسازی تحلیلی: استفاده از قوانین فیزیکی برای بیان ارتباط بین اجزای سیستم

مدلسازی تجربی: رابطه‌ی ریاضی که بر داده‌های مشاهده شده ورودی- خروجی می‌توان برازش (interpolation) نمود.

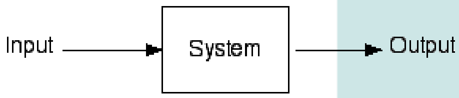
بطور کلی مدل یک سیستم؛ رابطه‌ای ریاضی است که ارتباط بین ورودی و خروجی سیستم را بیان می‌کند. مدل‌ها در مهندسی کنترل به یکی از صورت‌های زیر می‌باشند:

- معادلات دیفرانسیل
- تابع تبدیل ← یک نگاه خارجی به سیستم
- معادلات حالت ← نگاه داخلی به سیستم

۳-۱- تعیین مدل ریاضی یک سیستم فیزیکی

یک سیستم ممکن است مکانیکی، ترمودینامیکی، سیالاتی، الکتریکی یا الکترومکانیکی و ... باشد.

در این بخش با ارائه مثال‌هایی نشان می‌دهیم چگونه می‌توان مدل ریاضی سیستم‌های ساده را بدست آورد. مسأله مدلسازی از دو مرحله اصلی تشکیل می‌شود. ۱- ترسیم دیاگرام اجزای سیستم و ورودی و خروجی‌های آن ۲- بدست آوردن معادلات دیفرانسیل حاکم بر دینامیکهای سیستم.

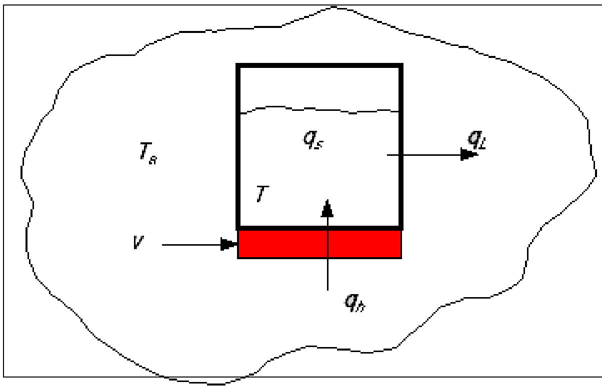


مثال۱: سیستم حرارتی (شامل آب، تانک و گرمکن)

انرژی هدر رفته از بدنه مخزن + انرژی ذخیره شده در آب = انرژی که گرمکن تولید می‌کند

$$kv = c\frac{\Delta T}{dt} + \frac{T - Ta}{R}$$

ورودی: ولتاژ گرمکن (v) خروجی: دمای آب (T)



ثابت گرمکن	k
ولتاژ گرمکن	v
ظرفیت گرمایی آب	c
دمای آب	T
دمای محیط	Ta
مقاومت حرارتی مخزن	R
زمان	t

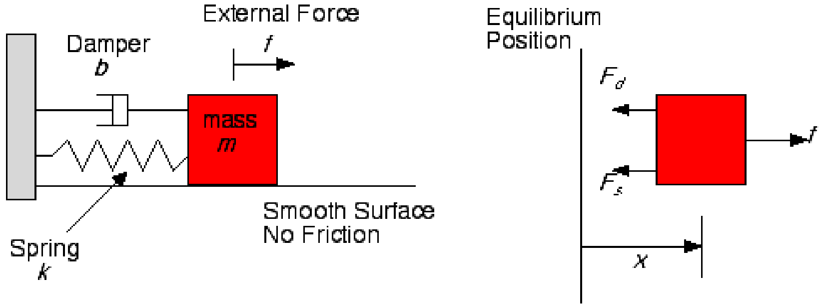
$$q_h = q_s + q_L$$

$$kv = c\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_a}{R}, \ .$$

تمرین: اگر v مقدار ثابتی باشد پس از گذشت مدت زمان طولانی دمای مخزن چقدر خواهد شد؟

مثال۲: سیستم مکانیکی (جرم- فنر – ضربه‌گیر)

ورودی: نیروی خارجی (f)		خروجی: موقعیت جرم (x)



ضریب میرایی	b
ثابت فنر	k
جرم وزنه	m
نیرو	f
جابجایی	x

با بهره‌گیری از قانون دوم نیوتن داریم:

$$\sum F = ma$$

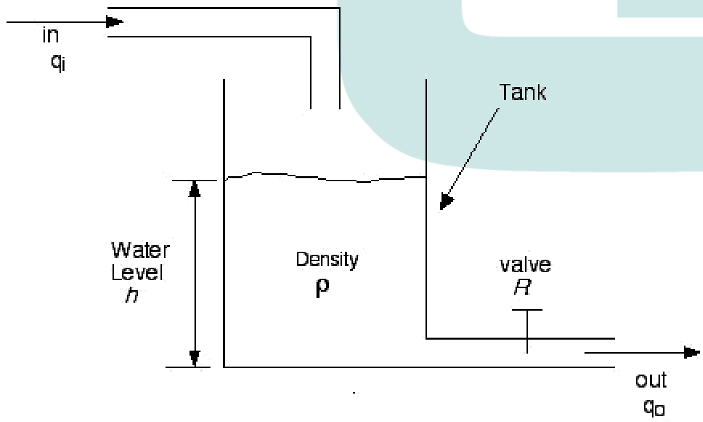
$$f - F_s - F_d = ma$$

$$f - kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f,$$

مثال۳: سیستم کنترل سطح آب

ورودی: دبی آب ورودی (q_i)		خروجی: ارتفاع آب در مخزن (h)



دبی ورودی	q_i
دبی خروجی	q_o
ارتفاع آب	h
چگالی آب	p
سطح مقطع مخزن	A
شتاب گرانش	g
مقاومت شیر	R

نرخ تغییرات جرم خروجی – نرخ تغییرات جرم ورودی = نرخ تغییرات جرم سیال در داخل مخزن

$$\frac{d}{dt}(\rho A h) = \rho q_i - \rho q_o$$

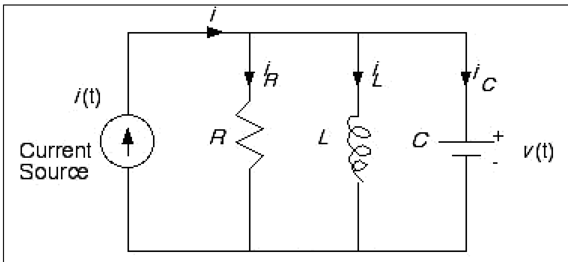
$$\rho A\frac{dh}{dt} = \rho q_i - \frac{\rho g h}{R}$$

$$A\frac{dh}{dt} + \frac{g}{R}h = q_i, \quad \dots (1)$$

مثال۴: سیستم الکتریکی (RLC موازی)

ورودی: جریان (i)

خروجی: ولتاژ خازن (V)



با استفاده از قانون جریان کیرشهف (KCL) داریم

$$i_R + i_L + i_C = i$$

$$\frac{V}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t V(\tau)d\tau + C\frac{dV}{dt} = i$$

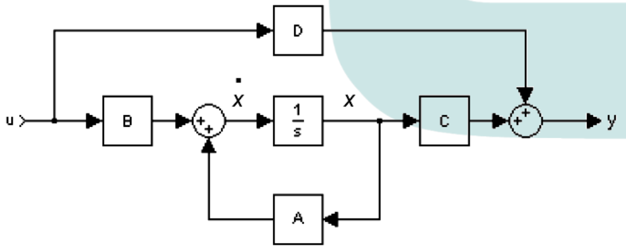
$$C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t V(\tau)d\tau = i$$

۳-۲- معادلات فضای حالت

توصیف فضای حالت یک سیستم یک توصیف داخلی است زیرا اطلاعات متغیرهای درونی سیستم را نیز شامل می‌شود. این اطلاعات در بردار حالت x نهفته هستند. در توصیف خارجی (تابع تبدیل) اطلاعات درونی سیستم از دست می روند و تنها تأثیر ورودی روی خروجی بررسی می‌شود. معادلات حالت یک سیستم خطی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du$$

که در آن u ورودی، y خروجی، x_0 شرایط اولیه و x متغیرهای حالت است.



متغیرهای حالت $x(t)$ را می‌توان طبق رابطه زیر پیدا نمود.

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

و لذا خروجی $y(t)$ عبارتست از:

$$y(t) = Cx + Du$$
$$= Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

ترم $Ce^{At}x_0$ پاسخ ورودی صفر و ترم بعدی پاسخ حالت صفر سیستم به ورودی $u(t)$ است.

<u>تبدیل توصیف داخلی به توصیف خارجی:</u>

توصیف داخلی یک سیستم دینامیکی بصورت زیر است:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du,$$

هدف این است که یک رابطه بین ورودی و خروجی در حوزه لاپلاس پیدا کنیم. با تبدیل لاپلاس از معادلات حالت داریم.

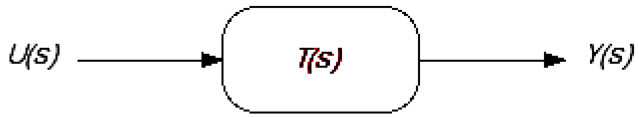
$$sX(s) = AX(s) + BU(s).$$

$$(sI-A)X(s)=BU(s)$$
$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s).$$

اکنون با تبدیل لاپلاس از معادله خروجی و جایگذاری $x(s)$ از رابطه فوق داریم:

$$Y(s)=CX(s)+DU(s)=\left[C(sI-A)^{-1}B+D\right]U(s).$$

تابع تبدیل را می‌توان مطابق بلوک دیاگرام زیر بیان نمود:



مثال۱. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx+Du$$
$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix},\quad D=0.$$

الف) تابع تبدیل از ورودی U به Y را پیدا کنید.

$$T(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$
$$=\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ 0 & s-2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1}\\ \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$
$$=\frac{2}{s-1}+\frac{3}{s-2}$$
$$=\frac{5s-7}{(s-1)(s-2)}.$$

ب) $y(t)$ را در زمانی که $u(t)=1$ و شرایط اولیه صفر باشند پیدا کنید.

با استفاده از تابع تبدیل بند (الف) و رابطه $Y(s)=T(s)U(s)$ می‌توان $y(t)$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$Y(s)=T(s)U(s)$$
$$=\frac{5s-7}{(s-1)(s-2)}\frac{1}{s}$$
$$=\frac{a}{s}+\frac{b}{s-1}+\frac{c}{s-2}\quad \text{(partial fraction)}$$

$$a=sY(s)|_{s=0}=-\frac{7}{2}$$
$$b=(s-1)Y(s)|_{s=1}=2$$
$$c=(s-2)Y(s)|_{s=2}=\frac{3}{2}$$

$$Y(s)=-\frac{7}{2s}+\frac{2}{s-1}+\frac{3}{2(s-2)}$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}(Y(s))=-\frac{7}{2}+2e^{t}+\frac{3}{2}e^{2t}.$$

نکته: مرتبه تابع تبدیل کمتر یا مساوی تعداد متغیرهای حالت است.

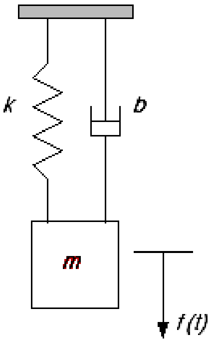
مثال۲. سیستم جرم- فنر- ضربه‌گیر زیر را در نظر بگیرید که در آن $m>0$، $b>0$ و $k>0$ است. فرض کنید که موقعیت وزنه و سرعت آن متغیرهای حالت باشند. خروجی سیستم موقعیت و ورودی آن f باشد.

الف) آیا سیستم پایدار است؟

ب) تابع تبدیل سیستم را بیابید.

ج) با فرض $m=1kg$ ، $b=1N.s/m$ و $k=1N/m$ شرایط اولیه صفر و $f(t)=u(t)$ متغیرهای حالت بر حسب زمان محاسبه نمایید.

د) شبیه‌سازی متغیرهای حالت و خروجی سیستم در پاسخ به ورودی پله را با استفاده از نرم‌افزار MATLAB انجام دهید.



اگر z موقعیت وزنه باشد داریم:

$$m\ddot{z}+b\dot{z}+kz=f(t).$$

دو متغیر حالت سیستم عبارتند از:

$$x_1=z \text{ and } x_2=\dot{z}.$$

ورودی $u=f$ و خروجی $y=z$ است. بنابراین داریم؛

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

الف) برای تست پایداری باید مقادیر ویژه ماتریس A را بیابیم.

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\ \frac{k}{m} & s+\frac{b}{m}\end{bmatrix}$$

$$\Delta(s)=\det(sI-A)=s\left(s+\frac{b}{m}\right)+\frac{k}{m}$$

$$=s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}=0$$

$$\Rightarrow \text{Eigenvealues}: s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4km}}{2m}.$$

بخش حقیقی مقادیر ویژه همواره منفی است، بنابراین سیستم پایدار است. برای هر شرایط اولیه‌ای وزنه به نقطه تعادل باز می‌گردد.

ب) تابع تبدیل

$$T(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ \frac{k}{m} & s+\frac{b}{m}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+0$$

$$=\frac{1}{\det(sI-A)}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}Adj(sI-A)\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$=\frac{1}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+\frac{b}{m} & 1\\ -\frac{k}{m} & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}.$$

ج)

$$sI-A=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+s+1}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+s+1} & \frac{1}{s^2+s+1} \\ \frac{-1}{s^2+s+1} & \frac{s}{s^2+s+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+0.75}+\frac{0.5}{\sqrt{0.75}}\frac{\sqrt{0.75}}{(s+0.5)^2+0.75} & \frac{1}{\sqrt{0.75}}\frac{\sqrt{0.75}}{(s+0.5)^2+0.75} \\ \frac{-1}{\sqrt{0.75}}\frac{\sqrt{0.75}}{(s+0.5)^2+0.75} & \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+0.75}-\frac{0.5}{\sqrt{0.75}}\frac{\sqrt{0.75}}{(s+0.5)^2+0.75} \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-0.5t}\left[\cos\sqrt{0.75}t+\frac{0.5}{\sqrt{0.75}}\sin\sqrt{0.75}t\right] & \frac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t \\ \frac{-1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t & e^{-0.5t}\left[\cos\sqrt{0.75}t-\frac{0.5}{\sqrt{0.75}}\sin\sqrt{0.75}t\right] \end{bmatrix}$$

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

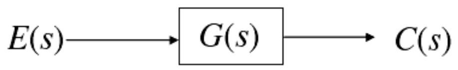
$$=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5(t-\tau)}\sin\sqrt{0.75}(t-\tau) \\ e^{-0.5(t-\tau)}\left[\cos\sqrt{0.75}(t-\tau)-\frac{0.5}{\sqrt{0.75}}\sin\sqrt{0.75}(t-\tau)\right] \end{bmatrix}d\tau$$

Winning is not everything, but the effort to win is.

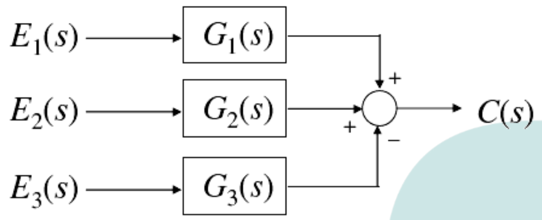
موفقیت همه چیز نیست، اما تلاش برای موفق شدن همه چیز است. «زیگ زیگلار»

۴. ساده سازی بلوک دیاگرام

۴-۱- ساده سازی بلوک دیاگرام های ساده

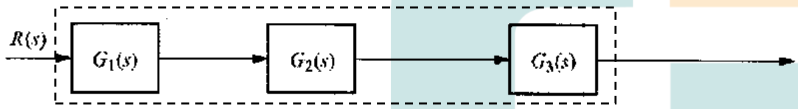


$$C(s) = G(s)\,E(s)$$

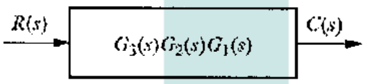


$$C(s) = G_1(s)\,E_1(s) + G_2(s)\,E_2(s) - G_3(s)\,E_3(s)$$

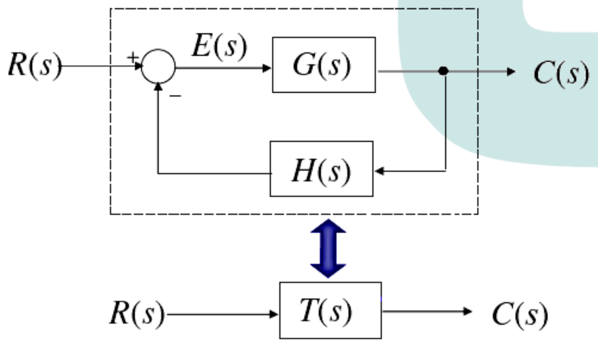
توابع تبدیل سری:



$$C(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)R(s)$$



سیستم کنترل حلقه بسته با فیدبک منفی:



$$\begin{cases} Es) = R(s) - H(s)\,C(s) \\ C(s) = G(s)\,E(s) \end{cases}$$

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

۴-۲- ساده سازی بلوک دیاگرام با روش میسون

فرمول بهره میسون: تابع تبدیل از یک ورودی دلخواه به یک خروجی دلخواه از فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$T = \frac{\sum_k T_k \Delta_k}{\Delta}$$

T: تابع تبدیل از گره ورودی به گره خروجی است.

k : تعداد مسیرهای مستقیم از ورودی به خروجی

T_k: بهره‌ی مسیر k ام است (بهره برابر حاصلضرب تابع تبدیل‌های آن مسیر است)

Δ دترمینان بلوک دیاگرام (معادله مشخصه) برابر است با:

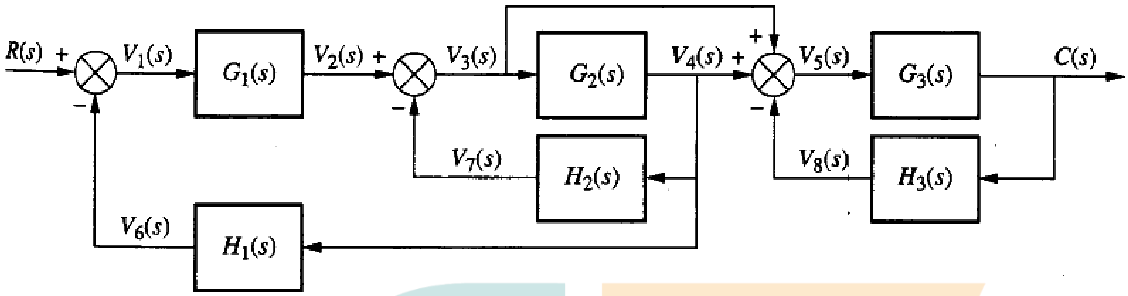
$$\Delta = 1 - \left[\sum L\right] + \left[\sum L_i L_j\right] - \left[\sum L_p L_q L_r\right] + \ldots$$

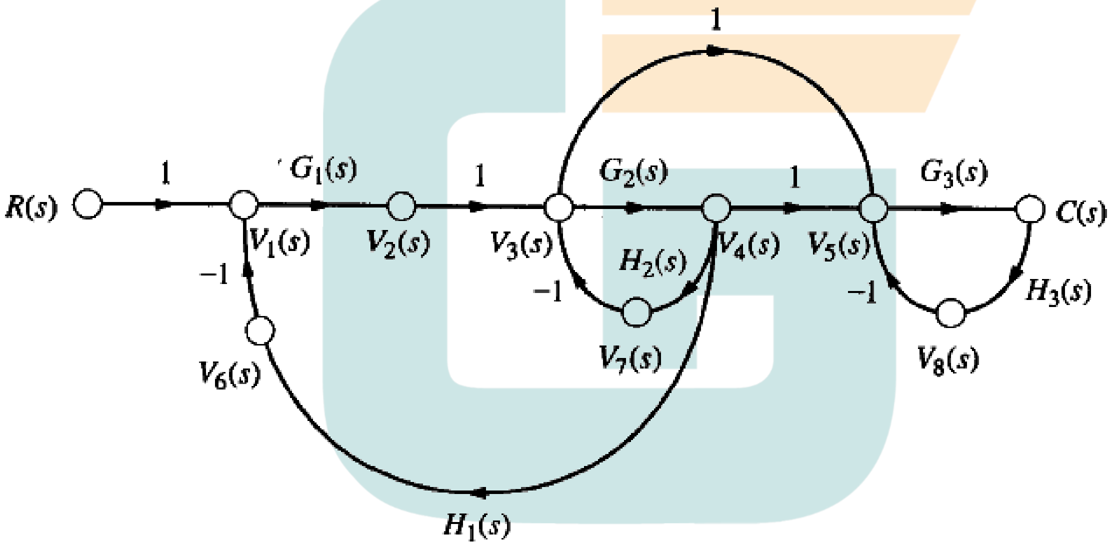
$L_i L_j$ حاصلضرب بهره دو حلقه مجزا از هم است و $L_p L_q L_r$ حاصلضرب بهره سه حلقه مجزا از هم است.

حلقه‌های مجزا حلقه‌هایی هستند که گره مشترکی نداشته باشند.

Δ_k دترمینان بلوک دیاگرام پس از حذف مسیر kام است.

مثال ۱: نمودار گذر سیگنال بلوک دیاگرام زیر را بدست آورده و با استفاده از فرمول بهره میسون تابع تبدیل از ورودی $R(s)$ به خروجی $C(s)$ را محاسبه کنید.





Forward-path gains are $G_1G_2G_3$ and G_1G_3.

Loop gains are $-G_1G_2H_1$, $-G_2H_2$, and $-G_3H_3$.

Nontouching loops are $[-G_1G_2H_1][-G_3H_3]=G_1G_2G_3H_1H_3$

and $[-G_2H_2][-G_3H_3]=G_2G_3H_2H_3$.

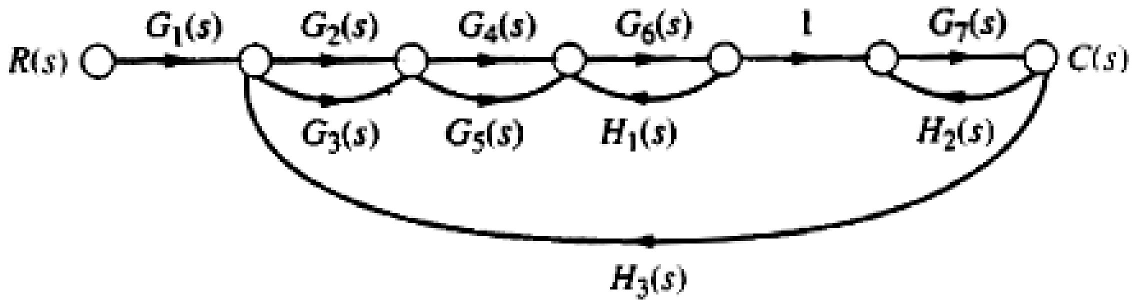
Also, $\Delta=1+G_1G_2H_1+G_2H_2+G_3H_3+G_1G_2G_3H_1H_3+G_2G_3H_2H_3$.

Finally, $\Delta_1=1$ and $\Delta_2=1$.

Substituting these values into $T(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{\sum_k T_k\Delta_k}{\Delta}$ yields

$$T(s)=\frac{G_1(s)G_3(s)[1+G_2(s)]}{[1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)][1+G_3(s)H_3(s)]}$$

مثال ۲: با استفاده از فرمول بهره میسون تابع تبدیل از ورودی $R(s)$ به خروجی $C(s)$ را در نمودار گذر سیگنال زیر محاسبه کنید.



Closed-loop gains: $G_2G_4G_6G_7H_3$; $G_2G_5G_6G_7H_3$; $G_3G_4G_6G_7H_3$; $G_3G_5G_6G_7H_3$; G_6H_1; G_7H_2

Forward-path gains: $T_1 = G_1G_2G_4G_6G_7$; $T_2 = G_1G_2G_5G_6G_7$; $T_3 = G_1G_3G_4G_6G_7$; $T_4 = G_1G_3G_5G_6G_7$

Nontouching loops 2 at a time: $G_6H_1G_7H_2$

$$\Delta = 1 - [H_3G_6G_7(G_2G_4 + G_2G_5 + G_3G_4 + G_3G_5) + G_6H_1 + G_7H_2] + [G_6H_1G_7H_2]$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 1$$

$$T(s) = \frac{T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2 + T_3\Delta_3 + T_4\Delta_4}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_2G_4G_6G_7 + G_1G_2G_5G_6G_7 + G_1G_3G_4G_6G_7 + G_1G_3G_5G_6G_7}{1 - H_3G_6G_7(G_2G_4 + G_2G_5 + G_3G_4 + G_3G_5) - G_6H_1 - G_7H_2 + G_6H_1G_7H_2}$$

Admission of ignorance is often the first step in our education

اغلب اولین قدم برای یادگیری این است که بپذیریم بی‌اطلاعیم.	« استیون کاوی»

۵. تحلیل پاسخ زمانی سیستمهای خطی

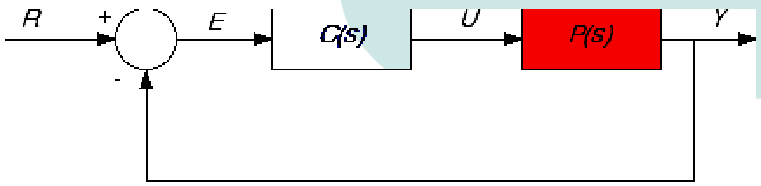
خواص عمومی سیستمهای کنترل حلقه باز و حلقه بسته در جدول زیر بیان شده‌اند:

کنترل حلقه بسته	کنترل حلقه باز
تضعیف اغتشاش و نویز	عدم تضعیف اغتشاش و نویز
حساسیت پایین نسبت به تغییر پارامترها	حساسیت زیاد نسبت به تغییر پارامترها
پاسخگذاری قابل تنظیم	پاسخگذاری غیرقابل تنظیم
امکان حذف یا کاهش خطای حالت ماندگار	عدم امکان حذف یا کاهش خطای حالت دائمی

مشخصه‌های عمومی یک سیستم کنترل خوب عبارتند از:

- پایداری **Stability**
- دقت حالت دائمی **Steady- State accuracy**
- ارضای پاسخ گذرا **Transient Response**
- ارضای پاسخ فرکانسی **Frequency Response**
- کاهش حساسیت به تغییرات پارامترهای مدل و ورودی اغتشاش

۵-۱- بررسی مفاهیم اساسی حوزه زمان



Unity Feedback

تابع تبدیل از ورودی R به خروجی Y عبارتست از:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{PC}{1+PC}.$$

تابع تبدیل از ورودی R به سیگنال خطا E برابر است با:

$$J(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+PC}.$$

اگر سیگنال ورودی $R(s)$ مشخص باشد می‌توان با استفاده از رابطه زیر پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته را بدست آورد.

$$y(t)=L^{-1}(Y(s))=L^{-1}(T(s)R(s)).$$

نمونه‌هایی از سیگنالهای ورودی در مهندسی کنترل عبارتند از:

۱. Unit step　$r(t)=1$　$R(s)=\dfrac{1}{s}$

۲. Step　$r(t)=A$　$R(s)=\dfrac{A}{s}$

۳. Ramp　$r(t)=At$　$R(s)=\dfrac{A}{s^2}$

۴. Sine signal　$r(t)=A\sin(\omega t)$　$R(s)=A\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

مسأله ردیابی:

ردیابی به این معناست که با گذشت زمان خروجی، ورودی را تعقیب نماید. اگر پس از گذشت زمان طولانی خطا *e(t)* به اندازه کافی کوچک شود، مسأله ردیابی تأمین شده است. قضیه مقدار نهایی امکان بررسی ردیابی را بدون یافتن تبدیل معکوس لاپلاس فراهم می‌کند. یعنی:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty} r(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(r(t)-y(t)\right)=0$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(e(t)\right)=0$$

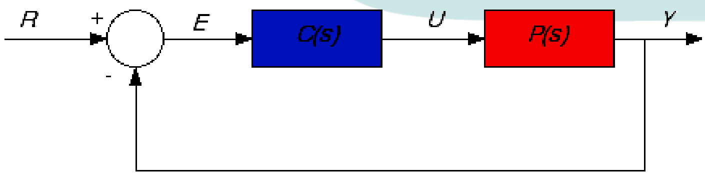
$$\lim_{s\to 0} \left(sE(s)\right)=0 \quad \text{(Final value theorem)}$$

$$\lim_{s\to 0} \left(sJ(s)R(s)\right)=0$$

$$\lim_{s\to 0} \left(s\frac{1}{1+PC}R(s)\right)=0.$$

با بررسی ورودیهای تست رایج پله، شیب و سهمی پارامترهای کاربردی ثابت خطای مکان[1]، سرعت[2] و شتاب[3] به دست می‌آیند.

مثال: سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید:



Unity Feedback

$$P(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$C(s)=\frac{K_p s+K_I}{s} \quad \text{(PI controller).}$$

الف) پاسخ زمانی حلقه بسته، $y(t)$ را به ازای $k_p=1$، $k_I=5$ و $r(t)=1$ بدست آورید. ب) مقدار فراجهش چقدر است؟ ج) آیا ردیابی تأمین شده است؟ د) پاسخ به ورودی پله واحد سیستم را زمانی که $k_p=1$ و $k_I=0$ باشد، بدست آورید.

الف)

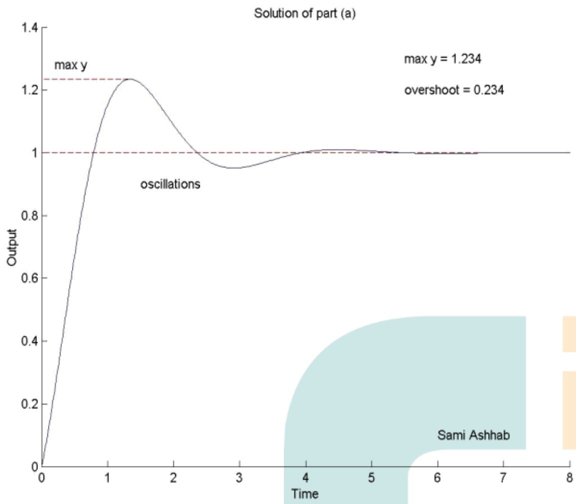
$$T(s)=\frac{PC}{1+PC}=\frac{\frac{K_p s+K_I}{s}\frac{1}{s+1}}{1+\frac{K_p s+K_I}{s}\frac{1}{s+1}}=\frac{K_p s+K_I}{s^2+(1+K_p)s+K_I}=\frac{s+5}{s^2+2s+5}.$$

ریشه‌های مخرج تابع تبدیل (قطبهای سیستم) عبارتند از $-1+2j$ و $-1-2j$. بنابراین سیستم پایدار است (زیرا جزء حقیقی ریشه‌ها منفی است و در پاسخ سیستم نوساناتی وجود خواهد داشت زیرا ریشه‌ها دارای جزء موهومی نیز هستند).

[1] Position
[2] Velocity
[3] acceleration

$$Y(s)=T(s)R(s)$$
$$=\frac{K_p s+K_I}{s^2+(1+K_p)s+K_I}\frac{1}{s}$$
$$=\frac{s+5}{s(s^2+2s+5)}=\frac{s+5}{s\left[(s+1)^2+4\right]}.$$

$$\Rightarrow\quad Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{(s+1)^2+4}.$$
$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+4}.$$
$$y(t)=L^{-1}(Y(s))=1-e^{-t}\cos 2t.$$



$$\text{overshoot}=\max y-\lim_{t\to\infty}y(t)=0.234.$$

$$\text{percent overshoot}=\frac{\max y-\lim_{t\to\infty}y(t)}{\lim_{t\to\infty}y(t)}*100\%=23.4\%.$$

ب) با توجه به شکل فوق فراجهش برابر ۰,۲۳۴ است.

ج) دو روش برای تست ردیابی وجود دارد:

۱)محاسبه مقدار خروجی $y(t)$ وقتی $t\to\infty$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}\left(1-e^{-t}\cos 2t\right)=1=r(t).$$

چون در نهایت خروجی برابر ورودی شده است پس ردیابی محقق شده است.

۲) محاسبه خطا با استفاده از قضیه مقدار نهایی:

$$\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}sJ(s)R(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+PC}\frac{1}{s}$$
$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+PC}=\lim_{s\to 0}\frac{s(s+1)}{s^2+2s+5}=0$$
$$\lim_{s\to 0}e(t)=0$$

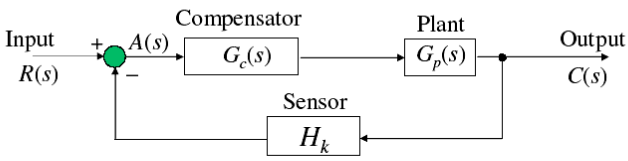
چون خطا صفر می‌شود پس ردیابی محقق شده است.

۵-۲- حساسیت

فرض کنید تابع تبدیل سیستمی به صورت W باشد حساسیت سیستم نسبت به تغییر پارامتر b بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{S_b^W=\frac{\partial W}{\partial b}\frac{b}{W}}$$

اکنون یک سیستم حلقه بسته با بلوک دیاگرام شکل زیر را در نظر بگیرید:



$$T(s)=\frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}$$

آنگاه حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته نسبت به تغییرات G_P و H بصورت زیر به دست می‌آیند:

$$\boxed{S_{G_p}^{T}=\frac{1}{1+G_cG_pH}}$$

$$\boxed{S_{H}^{T}=\frac{-G_cG_pH}{1+G_cG_pH}}$$

تمرین: اگر $G_CG_PH>>1$ باشد، حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته چقدر است.

تمرین: حساسیت تابع تبدیل حلقه باز نسبت به تغییر G_P چقدر است.

۵-۳- پاسخ حالت گذرا

فرا جهش زیاد در پاسخ به ورودی نباید وجود داشته باشد، سرعت پاسخ در زمان نشست سیستم نیز باید به اندازه‌ی لازم کوچک باشد. این مسائل در واقع بحث در مورد پایداری نسبی (Relative stability) سیستم است و وابسته به مکان قطبهای حلقه بسته در صفحه s و میزان مجاورت آنها به محور موهومی (مرز پایداری) است. بهترین ابزار برای بررسی پاسخ گذرا مکان هندسی ریشه‌ها است زیرا این تنها روش کلاسیکی است که مکان ریشه‌ها را بصورت دقیق تعیین می‌کند. روشهای بود و نایکوئیست نیز اطلاعاتی در مورد پاسخ گذرا بصورت غیرمستقیم می‌دهند.

چون سیستم‌های کنترل ذاتاً دینامیکی می‌باشند رفتار آنها معمولاً بر حسب حالت ماندگار و پاسخ گذرا بیان می‌شود.

پاسخ گذرا پاسخی است که به مرور زمان ناپدید می‌شود.

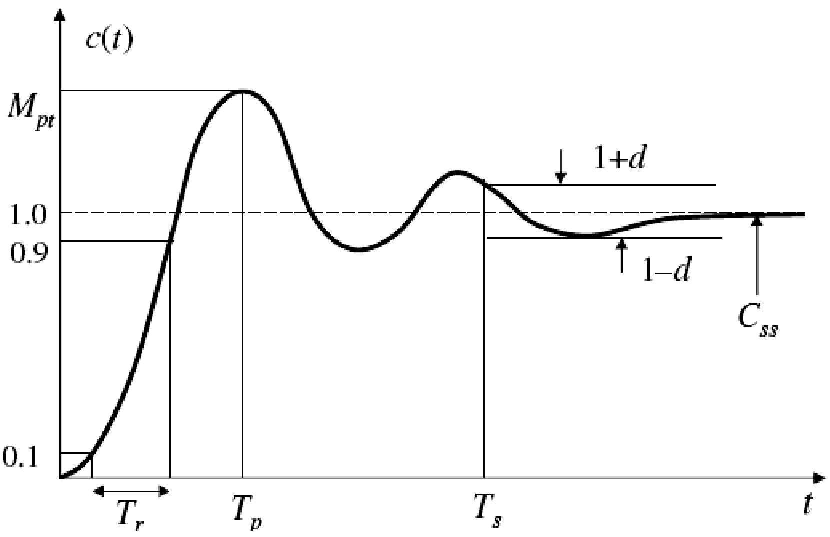
پاسخ حالت ماندگار پاسخی است که زمان طولانی باقی مانده و سیگنال ورودی را دنبال می‌کند.

معیارهای طراحی معمولاً شامل چندین شاخص پاسخ گذرا و شاخص دقت در حالت ماندگار است. در حین طراحی باید مصالحه‌ای بین معیارهای مختلف طراحی ایجاد کرد. برای بررسی مشخصه های حالت گذرا، پاسخ یک سیستم مرتبه دو را در نظر بگیرید:

پاسخ پله واحد یک سیستم کنترل مرتبه دوم:

$$\boxed{G(s)=\frac{\omega_n^{\,2}}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^{\,2}}}$$

$$C(s)=\frac{\omega_n^{\,۲}}{s(s^{۲}+۲\xi\omega_n s+\omega_n^{\,۲})}$$



$$c(t)=۱-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{۱-\xi^{۲}}}\sin\left(\omega_n\sqrt{۱-\xi^{۲}}\,t+\cos^{-۱}\xi\right)\qquad t\geq ۰$$

$$k=\alpha^{۲}+\beta^{۲}\ ,\ \alpha=-\xi\omega_n\ ,\ \beta=\omega_n\sqrt{۱-\xi^{۲}}\ ,\ \phi=\cos^{-۱}\xi$$

۱- فراجهش حداکثر[۱]. اگر حداکثر مقدار خروجی سیستم $c(t)$ پس از اعمال ورودی پله را با $c_{\max}$ نشان دهیم و c_{ss} نیز مقدار حالت ماندگار آن بوده و $c_{\max} \geq c_{ss}$ باش، آنگاه فراجهش حداکثر را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

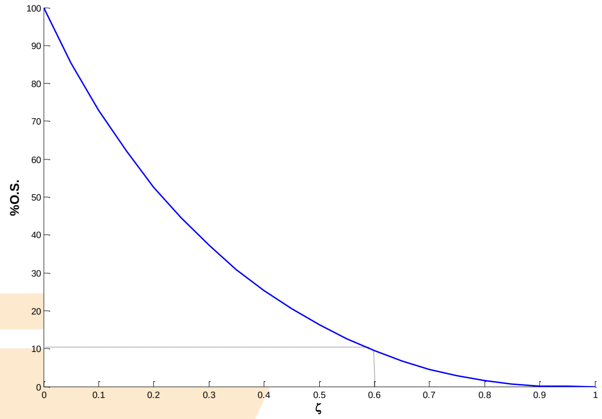
$$\text{فراجهش حداکثر} = c_{\max} - c_{ss}$$

در بسیاری از موارد فراجهش حداکثر را بصورت درصدی از مقدار حالت ماندگار پاسخ پله سیستم نمایش می‌دهند. یعنی اینکه

$$\text{درصد فراجهش حداکثر} = \frac{\text{فراجهش حداکثر}}{c_{ss}} \times ٪۱۰۰$$

$$\boxed{\%O.S. = 100e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad , \qquad T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

نمودار تغییرات فراجهش (O.S.) بر حسب ضریب میرایی (ζ)



یکی از مشخصه‌های عملکرد یک سیستم در حوزه زمان، فراجهش حداکثر آن است. در واقع فراجهش حداکثر بسیار زیاد در عمل مطلوب نیست زیرا باعث کاهش میزان پایداری نسبی سیستم می‌گردد.

۲- زمان تأخیر[۲]. زمان تأخیر به زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ پله به ٪۵۰ مقدار نهایی خودش برسد.

۳- زمان صعود[۳]. زمان صعود به زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ از ۱۰ به ۹۰ درصد یا از ۵ به ۹۵ درصد یا از ۰ به ۱۰۰ درصد مقدار نهایی خودش برسد. برای سیستم‌های میرای ضعیف معمولاً از ۰ تا ۱۰۰ درصد و برای سیستم‌های میرای شدید اکثراً از ۱۰ تا ۹۰ درصد استفاده می‌شود.

$$\boxed{T_r = \frac{2.16\zeta + 0.6}{\omega_n}}$$

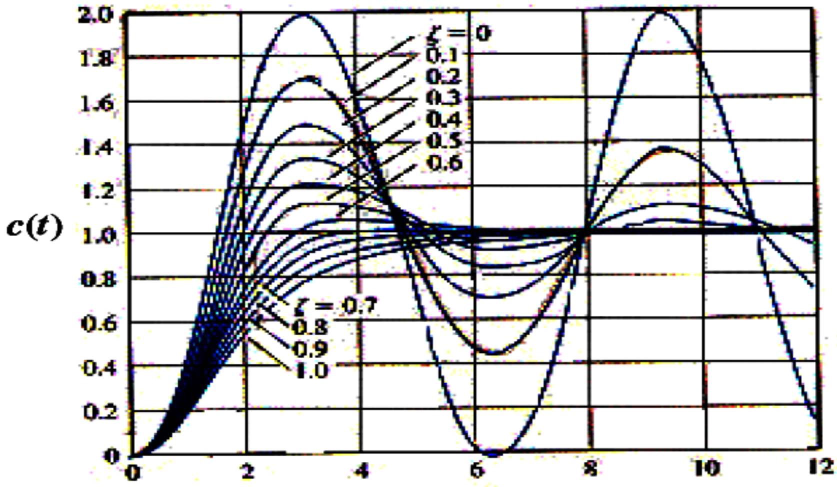
۴-زمان نشست[۴]. زمان نشست به مدت زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ به یک محدوده مشخص شده حول مقدار نهایی پاسخ رسیده و پس از آن نیز در آن محدوده باقی بماند. این محدوده عموماً بر حسب درصدی از مقدار نهایی مانند٪۲ و یا ٪۵ آن بیان می‌شود.

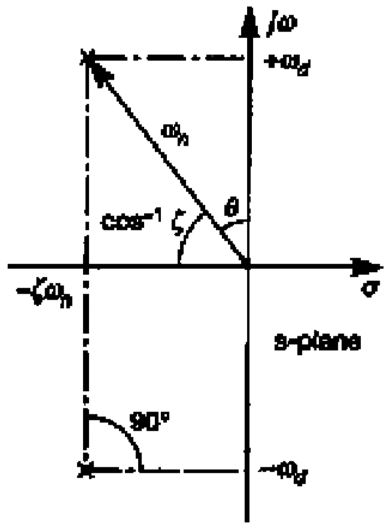
$$\boxed{T_s = \frac{4}{\xi\omega_n}}$$

چهار کمیت تعریف شده در بالا معیارهای مستقیمی برای سنجش عملکرد و مشخصه‌های یک سیستم کنترل هستند. اندازه‌گیری آنها در عمل سرراست است و به سادگی نیز تعریف می‌شوند.

بسته به مقادیر پارامترهای ضریب میرایی ζ و فرکانس طبیعی ω_n قطبهای سیستم مرتبه دوم مکان خاصی در صفحه s خواهند داشت:

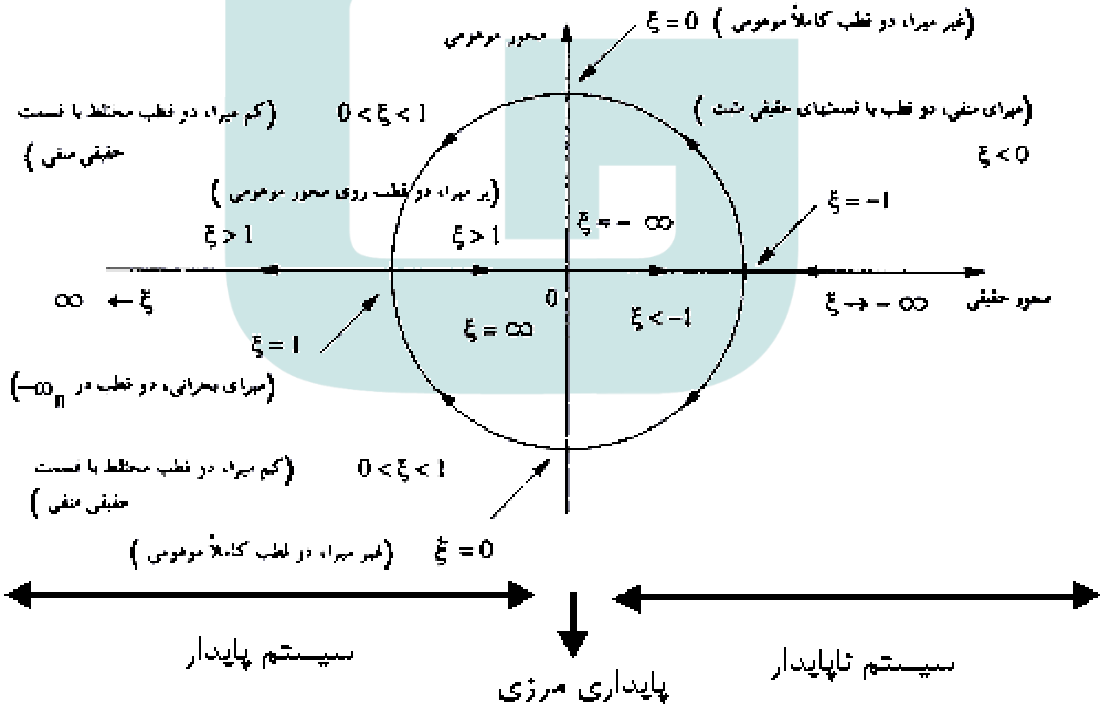
[۱] Maximum Overshoot
[۲] Delay Time
[۳] Rise Time
[۴] Settling Time





با کاهش ضریب میرایی ξ، فراجهش ماکزیمم زیاد می‌شود. همچنین با کاهش ξ ریشه‌های حلقه بسته به سمت محور موهومی میـل کرده پاسخ نوسانی‌تر می‌گردد، فراجهش ماکزیمم بیشتر می‌شود و زمان نشست کاهش می‌یابد.

مکان ریشه قطبهای سیستم مرتبه دوم (هنگامیکه ω_n ثابت فرض شده و ضریب میرایی ζ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می کند)



دو ریشه مثبت روی محور حقیقی	$s=\omega_n(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1})$	$\xi<-1$
ریشه مضاعف مثبت روی محور حقیقی	$s=\omega_n$	$\xi=-1$
ریشه مختلط سمت راست محور موهومی	$s=\omega_n(-\xi\pm j\sqrt{1-\xi^2})$	$-1<\xi<0$
ریشه موهومی خالص روی محور موهومی	$s=\pm j\omega_n$	$\xi=0$
ریشه مختلط سمت چپ محور موهومی	$s=\omega_n(-\xi\pm j\sqrt{1-\xi^2})$	$0<\xi<1$
ریشه مضاعف منفی روی محور حقیقی	$s=-\omega_n$	$\xi=1$
دو ریشه منفی روی محور حقیقی	$s=-\omega_n(\xi\pm\sqrt{\xi^2-1})$	$\xi>1$

مقایسه بین پاسخ های سیستم به ازای موقعیتهای مختلف قطبهای سیستم مرتبه دوم:

Case 1: $\zeta < 1$ (underdamped)

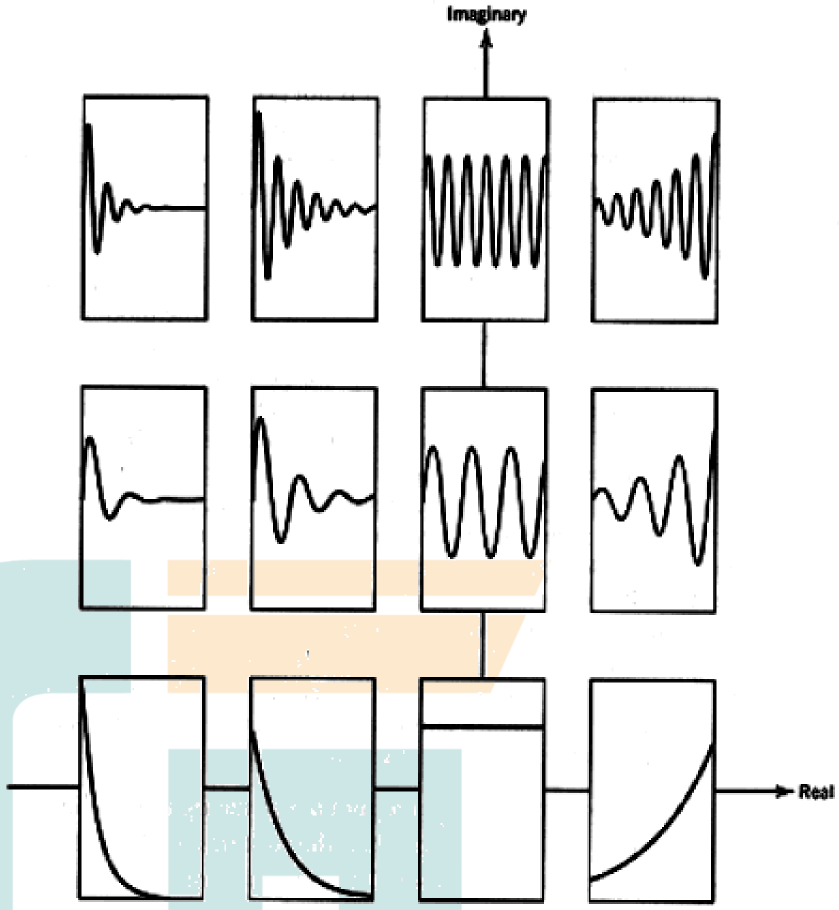
$$c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\beta\omega_n t + \theta),$$

Case 2: $\zeta > 1$ (overdamped)

$$c(t) = 1 + k_1 e^{-t/\tau_1} + k_2 e^{-t/\tau_2},$$

Case 3: $\zeta = 1$ (critically damped)

$$c(t) = 1 + k_1 e^{-t/\tau} + k_2 t e^{-t/\tau},$$



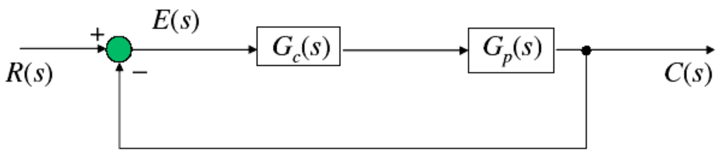
۵-۴- پاسخ حالت دائمی

خطا e: اختلاف بین ورودی مرجع و خروجی $\quad e(t) = r(t) - c(t)$

خطای حالت دائمی e_{ss}: اختلاف بین ورودی مرجع و خروجی در حالت ماندگار $\quad e_{ss} = r_{ss} - c_{ss}$

پاسخ حالت دائمی c_{ss}: مقدار خروجی سیستم در حالت ماندگار

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} R(s)$$



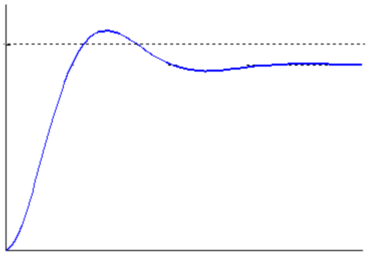
$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

نوع سیستم System Type:

اگر تابع تبدیل قطبی در مبدأ مختصات از مرتبه‌ی **N** داشته باشد آنگاه گفته می‌شود که آن سیستم نوع **N** است.

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{F(s)}{s^N Q_1(s)}$$

ثابت خطای مکان:

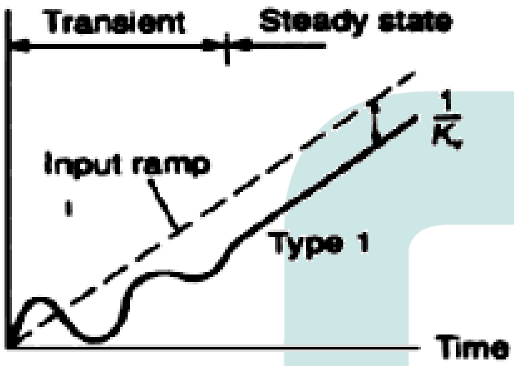


$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)}=\frac{1}{1+K_p}$$

$$\boxed{K_p=\lim_{s\to 0}G_c(s)G_p(s)}$$

اگر نوع سیستم‌ها بزرگتر یا مساوی با ۱ باشد خطای حالت دائمی آن به ورودی پله برابر با صفر خواهد شد.

ثابت خطای سرعت:



$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{1/s}{1+G_c(s)G_p(s)}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sG_c(s)G_p(s)}=\frac{1}{K_v}$$

$$\boxed{K_v=\lim_{s\to 0}sG_c(s)G_p(s)}$$

اگر نوع سیستم بزرگتر یا مساوی ۲ باشد آنگاه خطای حالت دائمی به ورودی شیب صفر خواهد شد.

ثابت خطای شتاب:

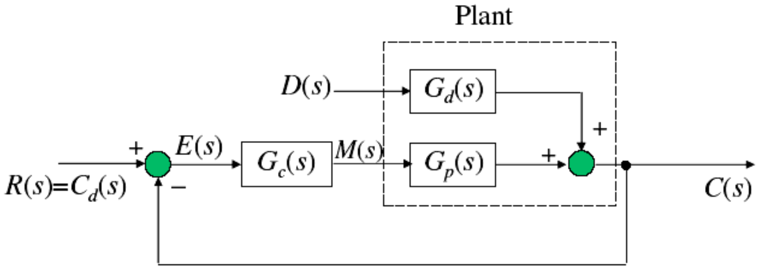
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{1/s^2}{1+G_c(s)G_p(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2G_c(s)G_p(s)}=\frac{1}{K_a}$$

$$\boxed{K_a=\lim_{s\to 0}s^2G_c(s)G_p(s)}$$

اگر نوع سیستم بزرگتر یا مساوی ۳ باشد آنگاه خطای حالت دائمی به ورودی شتاب برابر صفر می‌شود.

	$R(s)$			
N	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^3$	Error constants
0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞	$K_p=\lim_{s\to 0}G_cG_p$
1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞	$K_v=\lim_{s\to 0}sG_cG_p$
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$	$K_a=\lim_{s\to 0}s^2G_cG_p$

۵-۵- حذف اثر اغتشاش



$$C(s)=T(s)R(s)+T_d(s)D(s)$$
$$=\frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s)+\frac{G_d(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}D(s)$$

$$E(s)=\frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)}R(s)+\frac{G_d(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}D(s)$$

مثال: در بلوک دیاگرام شکل فوق اگر $G_p(s)=\frac{1}{s^2}$، $G_d(s)=1$ و $G_c(s)=K_p+K_d s$ باشند؛ اثر ورودیهای $R(s)=D(s)=\frac{1}{s}$ را روی پاسخ حالت دائمی سیستم بررسی کنید.

$$C(s)=\frac{K_p+K_d s}{s^2+K_p+K_d s}R(s)+\frac{s^2}{s^2+K_p+K_d s}D(s)$$

اگر $R(s)=\frac{1}{s}, D(s)=0$ باشد، داریم:

$$C_{ss}=\lim_{s\to 0} sC(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{K_p+K_d s}{s^2+K_p+K_d s}R(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K_p+K_d s}{s^2+K_p+K_d s}=1$$

اگر $R(s)=0, D(s)=\frac{1}{s}$ باشد، داریم:

$$C_{ss}=\lim_{s\to 0} sC(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{s^2}{s^2+K_p+K_d s}D(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s^2}{s^2+K_p+K_d s}=0$$

لذا در حالت دائمی اثر ورودی اغتشاش پله از بین رفته و اثر ورودی مرجع پله واحد باقی مانده است. همچنین خطای ردیابی نیز صفر است.

تمرین: در مثال فوق کنترل کننده $G_c(s)=K_p+K_d s$ را طوری طراحی کنید که فراجهش کمتر از ۱۰٪ و زمان نشست کمتر از ۴ ثانیه باشد.

ساده‌سازی سیستم‌های خطی:

یکی از روشهای نسبتاً ساده برای تقریب سیستم‌های خطی آن است که قطبهایی که مقدار حقیقی منفی آنها خیلی بزرگتر از قطبهای دیگر است حذف شود. برای مثال در تابع تبدیل زیر اگر به جای **s** در فاکتور (**s+۳۰**) مقدار ۰ جایگزین کنیم یک تابع تبدیل مرتبه ۲ با پاسخی تقریباً مشاه با سیستم اصلی حاصل خواهد شد.

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+30)}$$

Great works are performed not by strength but by perseverance

کارهای بزرگ نه با قدرت بلکه با پشتکار به انجام می‌رسند. ساموئل جانسون

۶. تحلیل پایداری به روش راث-هورویتز

در تئوری کنترل قبل از هر چیز باید از پایداری سیستم کنترل اطمینان حاصل نمود.

پایداری ورودی محدود- خروجی محدود (BIBO): این پایداری بدان معناست که اگر ورودی محدود باشد خروجی نیز محدود می‌شود.

در سیستم‌های خطی پایدار BIBO بصورت زیر تعریف می‌شود.

اگر قطبها (یا مقادیر ویژه) سیستمی بصورت $\lambda_i = \beta_i \pm j\omega_i$ باشد آنگاه داریم:

سیستم پیوسته زمان $\dot{x} = Ax$	
اگر $\beta_i > 0$ برای هر ریشه ساده یا $\beta_i \geq 0$ برای هر ریشه مضاعف	ناپایدار (unstable)
اگر $\beta_i \leq 0$ برای همه ریشه‌های ساده و $\beta_i < 0$ برای همه ریشه‌های مضاعف	پایدار مرزی(سیستم نوسانی)
اگر $\beta_i < 0$ برای همه ریشه‌ها	پایدار مجانبی (asymptotically stable)

پایداری یک سیستم کنترل به محل ریشه‌های معادله مشخصه بستگی دارد. روش راث- هورویتز ابزار مفیدی برای ارزیابی پایداری سیستم است. این روش اجازه می‌دهد تا تعداد ریشه‌های سمت راست صفحه‌ی s را بدون محاسبه مکان واقعی ریشه‌ها بدست آوریم.

اکنون سیستمی را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{T(s)} \longrightarrow C(s) \qquad \boxed{T(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad Q(s) = a_n \prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$$\boxed{C(s) = T(s)R(s) = \frac{P(s)}{a_n \prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} R(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} + C_r(s)}$$

که معادله مشخصه آن بصورت زیر است. برای این سیستم آرایه راث را مطابق جدول زیر تشکیل می‌دهند:

$$\boxed{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
. & . & . & . & \cdots
\end{array}$$

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \ \cdots$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \ \cdots$$

روش راث-هورویتز:

این روش بیان می‌کند که تعداد قطب‌های سمت راست صفحه s برابر تعداد تغییرات علامت در ستون اول آرایه راث است.

شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم آن است که علامت اولین ستون ارایه راث تغییری نکند.

مثال ۱:

معادله مشخصه سیستمی بصورت زیر را در نظر بگیرید

$$s^4+6s^3+11s^2+6s+15=0$$

آرایه راث برای این چند جمله‌ای عبارتست از:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & 15 \\ s^3 & 6 & 6 & \\ s^2 & 10 & 15 & \\ s^1 & -3 & & \\ s^0 & 15 & & \end{array}$$

در ستون اول آرایه بالا یک تغییر علامت از ۱۰ به ۳- و تغییر علامت دیگری از ۳- به ۱۵ داریم. بنابراین این چند جمله‌ای دو ریشه در سمت راست محور موهومی دارد. لذا سیستمی که معادله مشخصه آن، چند جمله‌ای داده شده باشد بدلیل داشتن دو قطب ناپایدار، ناپایدار است.

مثال ۲: وجود عنصر صفر در ستون اول

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4+s^3+3s^2+3s+6=0$$

آرایه راث را تشکیل می‌دهیم. داریم

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 6 \\ s^3 & 1 & 3 & \\ s^2 & 0 & 6 & \end{array}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، اولین عنصر از سومین سطر صفر بودن و عنصر بعد از آن غیر صفر است. دقت کنید که ادامه تشکیل چهارمین سطر آرایه امکان‌پذیر نیست. با جایگزینی $s=\dfrac{1}{x}$ در معادله داده شده بدست می‌آوریم

$$6x^4+3x^3+3x^2+x+1=0$$

آرایه راث برای این معادله عبارتست از

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 6 & 3 & 1 \\ x^3 & 3 & 1 & \\ x^2 & -1 & 1 & \\ x^1 & -4 & & \\ x^0 & 1 & & \end{array}$$

بدیهی است که در این حالت در تشکیل آرایه راث با مشکلی مواجه نشده و در واقع از آرایه بالا مشاهده می‌شود که معادله داده شده دو ریشه ناپایدار دارد.

مثال ۳: وجود سطر صفر در آرایه راث

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$s^5+2s^4+15s^3+30s^2-20s-40=0$$

با استفاده از روش راث، تعداد ریشه‌های ناپایدار تعیین می‌شوند. آرایه روث عبارتست از

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 15 & -20 \\ s^4 & 2 & 30 & -40 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

برای تکمیل آرایه از معادله کمکی ردیف دوم استفاده می‌کنیم. داریم

$2s^4+30s^2-40=0$ یا $s^4+15s^2-20=0$

با مشتق‌گیری از معادله کمکی بدست می‌آوریم

$4s^3+30s-0=0$ **یا** $2s^3+15s-0=0$

بنابراین در ادامه آرایه راث داریم

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 2 & 15 \\ s^2 & 15/2 & -20 \\ s^1 & 305/2 & \\ s^0 & -20 & \end{array}$$

بنابراین چند جمله‌ای داده شده تنها یک ریشه ناپایدار دارد.

نکته: ریشه‌های معادله کمکی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه هستند. این حالت هنگامی رخ می‌دهد که معادله‌ی مشخصه حول مبدأ تقارن داشته باشد.

تمرین: پایداری سیستمهایی با معادلات مشخصه زیر را بررسی کنید:

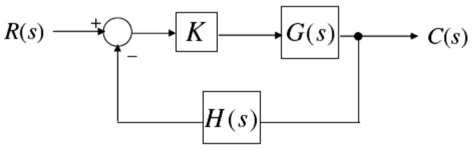
$$\Delta(s)=s^4+8s^3+17s^2+20s$$
$$\Delta(s)=s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10$$
$$\Delta(s)=s^3+2s^2+4s+8$$

Friends are angles who lift us to our feet when our wings have trouble remembering how to fly.

دوستان ما فرشته هایی هستند که وقتی بالهایمان پرواز را از یاد می‌برند، ما را از زمین بلند می‌کنند.

۷. مکان هندسی ریشه‌ها

مکان ریشه‌ها (**Root Locus**): ابزاری گرافیکی است برای بررسی مکان قطبهای حلقه بسته در اثـر تغییـر یکـی از پارامترهـای سیسـتم. اساس کار این روش بررسی معادله **1+K G(s)H(s)=0** است. بلوک دیاگرام یک سیستم حلقه بسته را به صورت زیر در نظر بگیرید:



تابع انتقال حلقه بسته به صورت زیر است.

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)}$$

بنابراین قطبهای حلقه بسته سیستم مقادیری از s هستند که در آن 1+KG(s)H(s)=0 است. چون **K G(s)H(s)** یک مقداری مختلط است بنابراین دارای اندازه و زاویه‌ای است، با فرض **K>0** داریم:

شرط اندازه:

$$\boxed{|KG(s)H(s)|=1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K=\frac{1}{|G(s)H(s)|}}$$

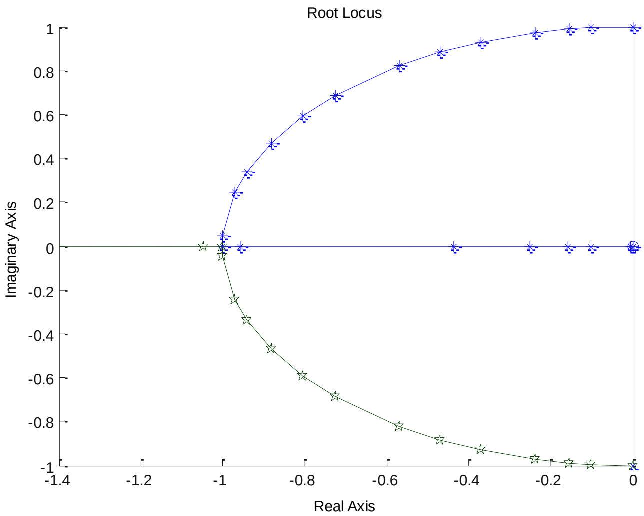
شرط زاویه:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum(\text{all angles from the finite zeros})-\sum(\text{all angles from the finite poles})\\ \qquad =r(180^\circ) \qquad r=\pm1,\pm3,\ldots\\ \text{where the poles and zeros are those of the open-loop function}\end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\angle KG(s)H(s)=r(180^\circ),\\ \quad \text{where } r=\pm1,\pm3,\ldots\end{array}}$$

در واقع مکان ریشه محل تمام قطبهای حلقه بسته موجود است بنابراین از روی آن می‌توان بهره را طوری انتخاب کرد که عملکرد سیستم حلقه بسته در جهت مورد نظر ما باشد. اگر هریک از قطبهای انتخاب شده در نیمه راست نمودار باشند سیستم حلقه بسته ناپایدار خواهد بود. قطبهای نزدیک به محور موهومی تأثیر بیشتری بر پاسخ حلقه بسته دارند.

مثال ۱:

$$G(s)=\frac{2\omega_n s}{s^2+\omega_n^2},\quad H(s)=1,\quad K=\zeta \quad \Rightarrow \quad \Delta(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$$



با توجه به مکان ریشه مثال فوق می‌توان به نتایج زیر دست یافت:

۱. مکان ریشه‌ها نسبت به محور حقیقی متقارن است.
۲. در گراف مکان ریشه‌ها به تعداد قطب‌های سیستم مسیرهای مجزا وجود دارد.
۳. مسیرها از یک قطب شروع شده و به یک صفر ختم می‌شوند.
اگر تعداد صفرهای سیستم کمتر از تعداد قطب‌های آن باشد برخی از مسیرها به سمت صفر بی‌نهایت میل می‌کند.
تعداد مسیرهایی که به سمت صفر بی نهایت می‌روند برابر با اختلاف بین تعداد قطب‌ها و تعداد صفرهاست.
۴. مقدار پارامتر متغیر در محل قطب‌ها برابر صفر و در محل صفرها بی‌نهایت است.

قواعد رسم مکان هندسی ریشه‌ها:

۱- برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها ابتدا معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم را به فرم $1+KG(s)H(s)=0$ تبدیل کنید که در آن K پارامتر متغیر است.

۲- سپس محل صفر و قطب‌های G(s)H(s) را با انتخاب نماد مناسب در صفحه s مشخص کنید. اگر داشته باشیم KG(s)H(s)=b(s)/a(s) ، معادله مشخصه به صورت زیر درمی‌آید.

$$a(s)+Kb(s)=0$$

$$\frac{a(s)}{K}+b(s)=0$$

$$\boxed{1+KG(s)H(s)=1+\frac{Kb_m(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}=0}$$

$$\boxed{(s-p_1)\cdots(s-p_n)+Kb_m(s-z_1)\cdots(s-z_m)=0}$$

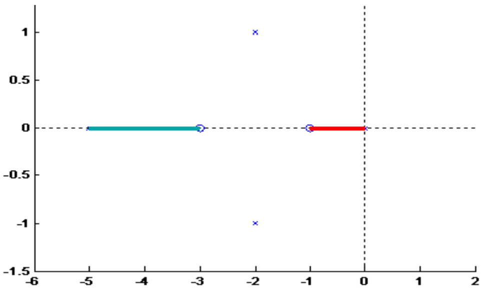
مرتبه a(s) را با n و مرتبه b(s) را با m نشان می‌دهیم. به ازای $K=0$ قطبهای سیستم حلقه بسته در a(s)=۰ (یا قطبهای G(s)H(s)) و به ازای $K\to\infty$ قطبهای سیستم حلقه بسته در b(s)=۰ (یا صفرهای G(s)H(s)) قرار می گیرند.

۳- اگر n تعداد قطبهای G(s)H(s) باشد سیستم حلقه بسته نیز دارای n قطب خواهد بود. مکان ریشه باید n شاخه داشته باشد، هر شاخه از یکی از قطبهای G(s)H(s) آغاز شده و به یکی از صفرهای G(s)H(s) ختم می‌شود.

۴- اگر تعداد قطبها از صفرها بیشتر بود که معمولاً هم همینطور است، G(s)H(s) به تعداد قطبها (n) منهای تعداد صفرها (m)، صفر در بینهایت دارد. بنابراین تعداد شاخه‌های مکان ریشه که به بینهایت می‌روند، برابر n-m است.

۵- مسیر ریشه‌ها باید نسبت به محور حقیقی متقارن باشد. زیرا ریشه‌های مختلط بصورت مزدوج ظاهر می‌شوند که نسبت به محور حقیقی متقارن هستند.

۶- بخشی از محور حقیقی که سمت راست آن تعداد فردی صفر و قطب (در مجموع) وجود داشته باشد، جزو مکان ریشه است.



۷- مجانبهای مکان ریشه: به تعداد $N=n-m$ مجانب وجود دارد. (مسیرهایی به سمت بی‌نهایت وجود دارد)
محل تقاطع مجانب‌ها از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\sigma_a=\frac{\text{(sum of finite poles) - (sum of finite zeros)}}{\text{(number of finite poles) - (number of finite zeros)}}}$$

زاویه مجانب‌ها نسبت به محور حقیقی نیز از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{\phi_a=\frac{(2r+1)}{n-m}\pi \quad , \quad \pi=0,1,\ldots,(n-m-1)}$$

۸- نقاطی را مشخص نمایید که مکان هندسی محور موهومی را قطع می‌کند برای این کار می‌توانید از معیار راث هورویتز استفاده کنید. روش دیگر آن است که در معادله مشخصه به جای s مقدار $j\omega$ قرار دهید و در معادله حاصل مقدار K و ω را محاسبه نمایید.

۹- محاسبه نقاط شکست:

محل تقاطع مسیر ریشه‌ها را نقطه‌ی شکست (انشقاق) می‌نامند. برای یافتن نقاط شکست معادله $\frac{dK}{ds}=0$ را حل کنید. ریشه‌هایی از این معادله که در معادله مشخصه نیز صدق کنند نقطه شکست می‌نامند.

نکته: هرگاه روی محور حقیقی دو قطب پشت سر هم وجود داشته باشند (صفری بین آنها حائل نشده باشد) در اینصورت نقطه‌ی شکستی بین آن دو قطب وجود دارد.

۱۰-زاویه خروج مسیر را از قطب‌های مختلط و زاویه ورود به صفرهای مختلط را با استفاده از شرط زاویه پیدا کنید.

$$\boxed{\begin{aligned}\theta_d &= \sum_i \theta_{zi} - \sum_{i,i\neq j}\theta_{pi} + r(180^\circ)\\ \theta_a &= \sum_i \theta_{pi} - \sum_{i,i\neq j}\theta_{zi} + r(180^\circ)\end{aligned}}$$

مثال ۲: تابع تبدیل حلقه- باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s^2+4s+8)} \qquad (k>0)$$

مکان ریشه سیستم حلقه - بسته را به ازاء تغییرات k رسم کنید.

معادله مشخصه سیستم حلقه- بسته عبارتست از

$$s(s+1)(s^2+4s+8)+k=0$$

از آنجاییکه سیستم چهار قطب دارد، لذا تعداد شاخه‌های مکان ریشه نیز ۴ است و از قطبهای سیستم در ۰ و ۱- و ۲±۲j- شروع می‌شوند. با توجه به اینکه چهار صفر در بی‌نهایت داریم، هر چهار شاخه مکان ریشه به سمت چهار مجانب در بی‌نهایت میل خواهند کرد. توجه کنید که در گستره بین ۰ و ۱- برروی محور حقیقی، یک قطب در سمت راست وجود دارد و لذا مکان ریشه بر روی محور حقیقی تنها در این گستره قرار گرفته است. زوایای مجانبها با محور حقیقی عبارتند از

$$\phi=\frac{(1+2k)180^\circ}{4} \qquad k=0,1,2,3$$

و به عبارت دیگر

$$\phi=\frac{180^\circ}{4},\frac{3\times180^\circ}{4},\frac{5\times180^\circ}{4},\frac{7\times180^\circ}{4}$$

هم چنین نقطه تلاقی مجانبها با محور حقیقی عبارتست از

$$\sigma=\frac{0-5}{4}$$

زاویه خروج از قطبهای مختلط بدین صورت تعیین می‌گردند

زاویه خروج از قطب مختلط ۲+۲j- $=-\theta_{P1}-\theta_{P2}-\theta_{P3}-(2k+1)180^\circ$

$$=-135^\circ-116/57^\circ-90^\circ-(2k+1)180^\circ$$

$$=-341/57^\circ-180^\circ=-161/57^\circ$$

بطور مشابهی، زاویه خروج از قطب مختلط در ۲j-۲- بدست می‌آید. از تقارن مکان ریشه داریم که این زاویه ۱۶۱/۵۷° است.

با توجه به تشکیلات قطب- صفر سیستم، یک نقطه شکست بین دو قطب در ۰ و ۱- وجود خواهد داشت. این نقطه شکست را بصورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\frac{dk}{ds}=-(4s^3+15s^2+24s+8)=0$$

ریشه قابل قبول این معادله (ریشه‌ای که بر روی مکان ریشه قرار داشته باشد) عبارتست از s=-۰/٤٤۰۲ .

در اینجا با بکارگیری روش راث، نقطه تلاقی مکان ریشه با محور موهومی را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|ll} s^4 & 1 & 12 \quad k \\ s^3 & 5 & 8 \\ s^2 & 10/4 & k \\ s^1 & 8-5k/10/4 & \\ s^0 & k & \end{array}$$

با صفر قرار دادن ردیف مقابل s^1 ، بهره‌ای که در آن مکان ریشه، محور موهومی را قطع خواهد کرد بدست می‌آوریم. داریم $8-5k/10/4=0$ و لذا در $k=16/64$ ریشه‌ها بر روی محور موهومی قرار خواهند گرفت. دقت کنید که در واقع شرایط پایداری این سیستم عبارتند از $k>0$ و $16/64>k$. برای تعیین نقاط تلاقی از معادله کمکی استفاده می‌کنیم. داریم

$$10/4s^2+16/64=0$$

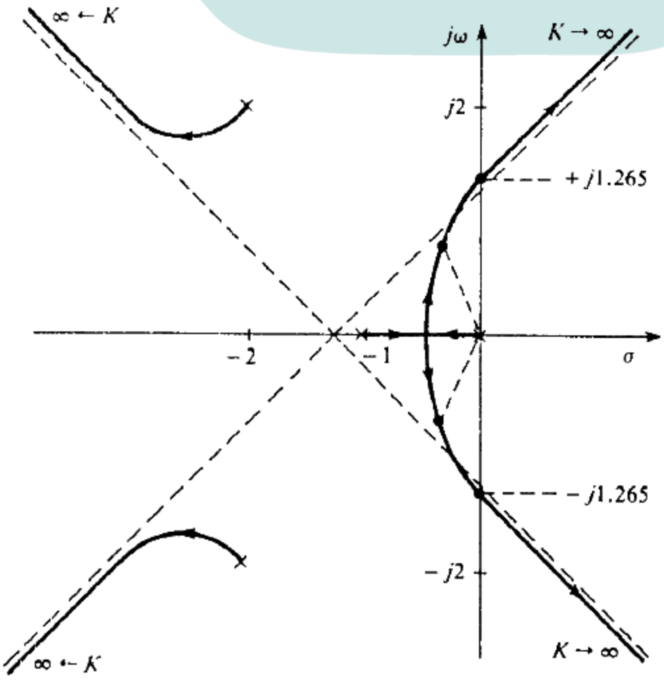
و لذا نقاط قطع در ±j۱/۲٦٥ قرار دارند.

از شرط اندازه می‌توان بهره k را در هر نقطه بر روی مکان ریشه تعیین کرد. در واقع در این حالت برای هر نقطه انتخابی s_1 مقدار بهره عبارتست از:

$$K=|S_1+0||S_1+1||S_1+2-2j||S_1+2+2j|$$

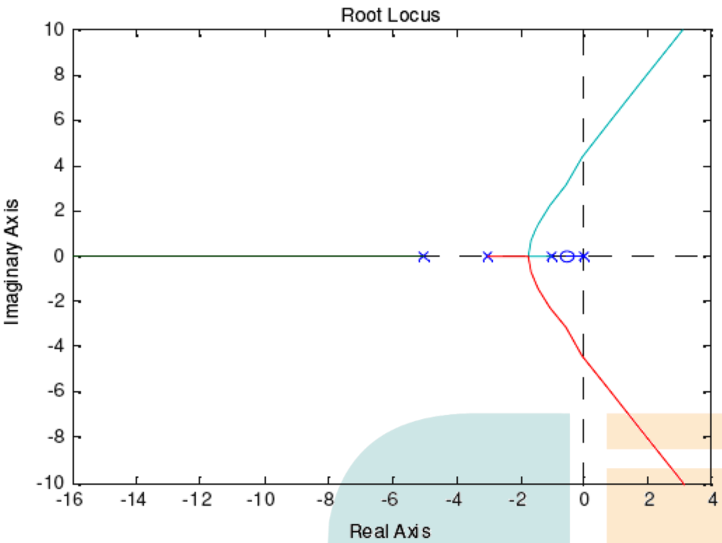
از شکل زیر مشاهده می‌شود که قطبهای غالب سیستم بر روی شاخه‌های مکان ریشه در سمت راست شکل قرار دارند. دو قطب مختلط غالب را می‌توان بصورت $s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2$ نوشت. اگر بخواهیم که نسبت میرایی قطبها ۰,۵ و فرکانس طبیعی غیر میرای آنها نیز ۰,۶۹۵ باشد، ریشه‌های سیستم حلقه بسته باید در -۰/۳۴۷۵±□۰/۶۰۱۲ قرار گیرند.

(توجه کنید که ریشه‌های با نسبت میرایی ۰,۵ بر روی خطهایی با زوایای ±٦۰° (یعنی $\pm\cos^{-1}0.5$ قرار دارند.) مقدار بهره k را در این دو قطب را می‌توان با شرط اندازه بدست آورد، در واقع k=٤/۱۱٤ است.



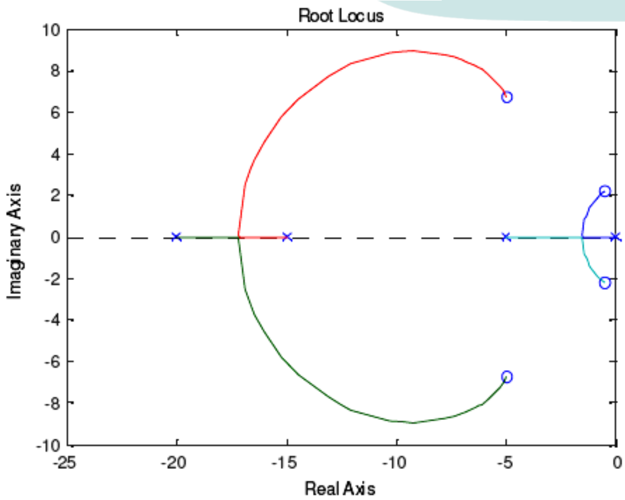
مثال۳:

$$KGH = \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+3)(s+5)} \quad , \quad a = 0.5$$

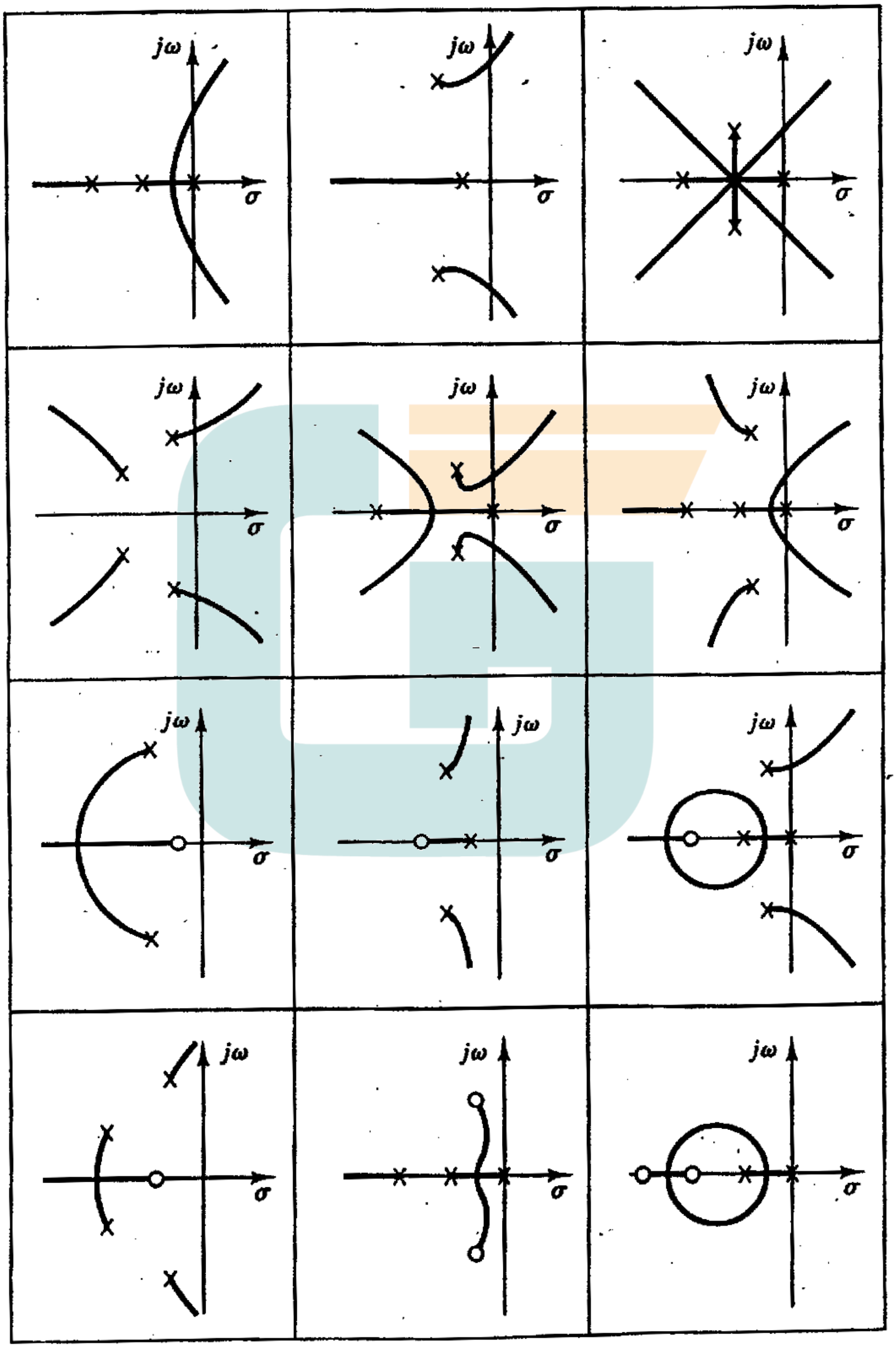


مثال۴:

$$G(s) = \frac{(s^2+s+5)(s^2+10s+70)}{s(s+5)(s+15)(s+20)}, H(s) = 1$$



ساختار قطب و صفر حلقه باز و مکان ریشه متناظر آن



If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.

اگر توانسته‌ام دور دستها را ببینم به این دلیل است که بر شانه‌های بزرگان ایستاده‌ام. اسحاق نیوتن

۸. تحلیل پاسخ فرکانسی سیستمهای خطی

پاسخ یک سیستم خطی با ضرایب ثابت به ورودی سینوسی یک سیگنال خروجی سینوسی با همان فرکانس ورودی است. با این تفاوت که اندازه و فاز سیگنال خروجی با ورودی فرق دارد و تفاوت آن تابعی از فرکانس ورودی می‌باشد.

$\theta=\angle G(j\omega) \quad B=A|G(j\omega)|$

از مزایای روش پاسخ فرکانسی این است که:

- تابع تبدیل نامعلوم یک سیستم از پاسخ فرکانسی قابل حصول است.
- طراحی یک سیستم در حوزه‌ی فرکانس برای طراح امکان کنترل عرض باند سیستم را فراهم می‌سازد و لذا معیارهایی از پاسخ سیستم به نویزهای ناخواسته و ورودی‌های اغتشاش را ارائه می‌دهد.

پاسخ فرکانسی یک سیستم را می‌توان به دو صورت نمودار بود یا نایکوئیست مشاهده کرد. هر دو روش اطلاعات یکسانی را نمایش می‌دهند با این تفاوت که طریقه نمایش اطلاعات متفاوت است.

برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی یک بردار از فرکانسها ایجاد کرده و مقدار تابع انتقال را در آن مقادیر محاسبه می‌کنیم. اگر G(s) تابع انتقال حلقه باز سیستم و ω بردار فرکانس باشد ما نمودار $G(j\omega)$ برحسب ω را رسم می‌کنیم. ازآنجا که $G(j\omega)$ یک عدد مختلط است می‌توانیم هم نمودار بود و هم نمودار نایکوئیست آنرا رسم کنیم.

۸-۱- نمودار بود (Bode)

ابزاری گرافیکی است که اطلاعاتی راجع به پایداری سیستم‌های مینیمم فاز (**minimum phase**) فراهم می‌کند [سیستم‌هایی که قطب یا صفری در ناحیه ناپایدار ندارند]. در نمودار بود دامنه و زاویه فاز جداگانه بر حسب فرکانس رسم می‌شوند. در این روش تنها مقادیری از **s** که در مرز پایداری (محور $j\omega$) قرار دارند بررسی می‌شوند که متناظر با اعمال ورودی سینوسی با فرکانس ω به سیستم است.

رسم نمودار بود با بهره‌گیری از واحد دسی‌بل **dB** برای اندازه و مقیاس لگاریتمی برای فرکانس ساده‌تر می‌شود، زیرا در این حالت می‌توان از خطوط مجانب تقریبی برای رسم منحنی استفاده نمود.

نمودار بود شامل نمودارهای اندازه و زاویه است:

- نمودار اندازه: تغییرات بهره (اندازه) بر حسب فرکانس (محور فرکانس لگاریتمی است و محور بهره بر حسب **dB** است)

$$M(\omega)=20\log|G(j\omega)|$$

- نمودار فاز: تغییرات فاز (زاویه) بر حسب فرکانس (محور فرکانس بصورت لگاریتمی مدرج می‌شود)

$$\phi(\omega)=\angle G(j\omega)$$

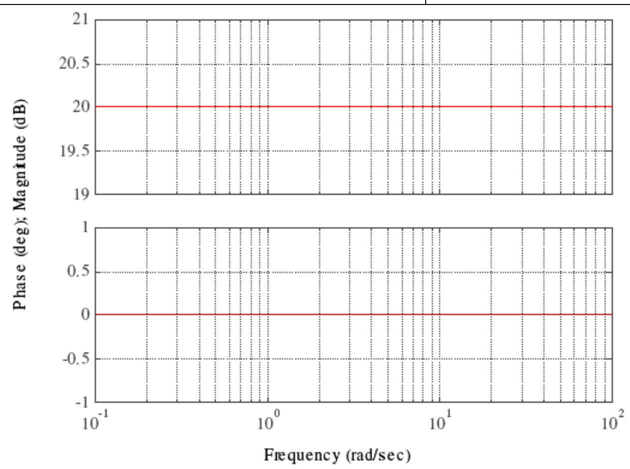
در یک تابع تبدیل ۴ فاکتور متفاوت ممکن است دیده شود؛

۱. بهره ثابت **k**
۲. قطب‌ها و یا صفرها در مبدأ (***s***)
۳. قطب‌ها یا صفرها روی محور حقیقی (***s+a***)
۴. قطب‌ها یا صفرهای مزدوج مختلط ($s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$)

برای رسم منحنی بود این ۴ فاکتور را روی نمودار اندازه و زاویه‌ی لگاریتمی بصورت جداگانه رسم نموده و سپس بصورت گرافیکی با هم جمع می‌کنند تا منحنی تابع تبدیل کامل بدست آید.

- بهره ثابت K

زاویه	اندازه
زاویه $\phi(\omega)=0$	اندازه $M(j\omega)=20\log\lvert K\rvert=$

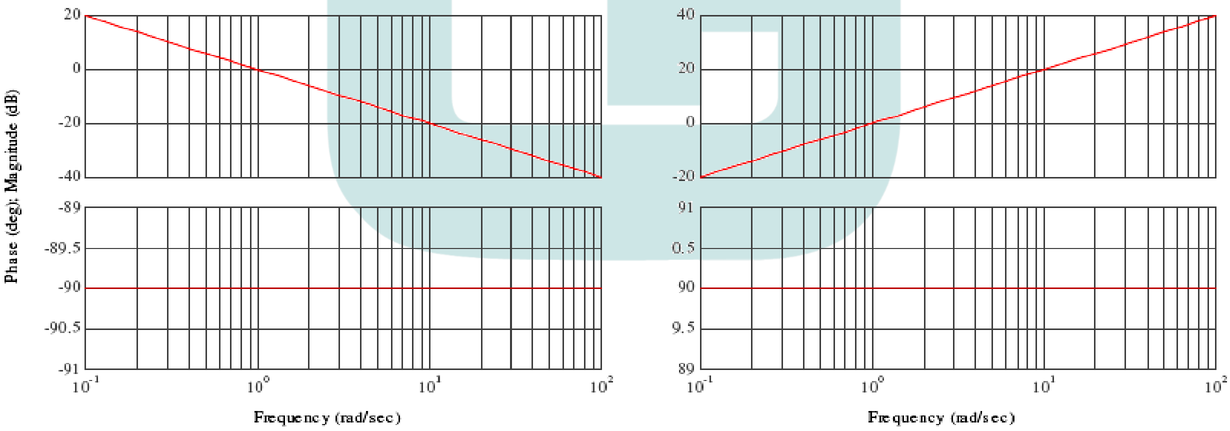


- صفر و قطب در مبداء $\frac{1}{s}$ (در اینجا قطب در مبدا بررسی می‌شود)

زاویه	اندازه
زاویه $\phi(\omega)=-\tan^{-1}\frac{\omega}{0}=-90$	اندازه $M(\omega)=-20\log\omega$

$\boxed{G(s)=1/s}$ Integrator

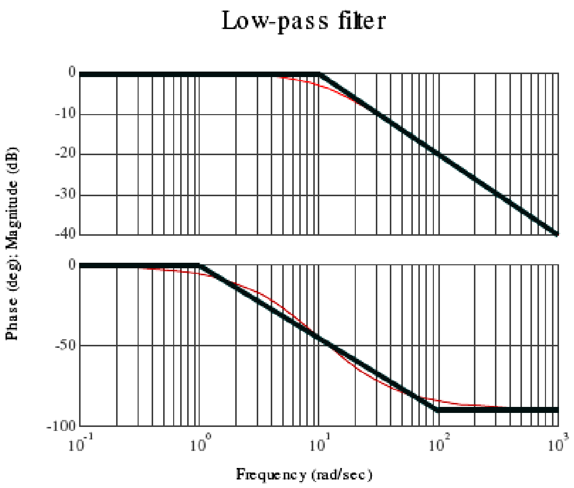
$\boxed{G(s)=s}$ Differentiator

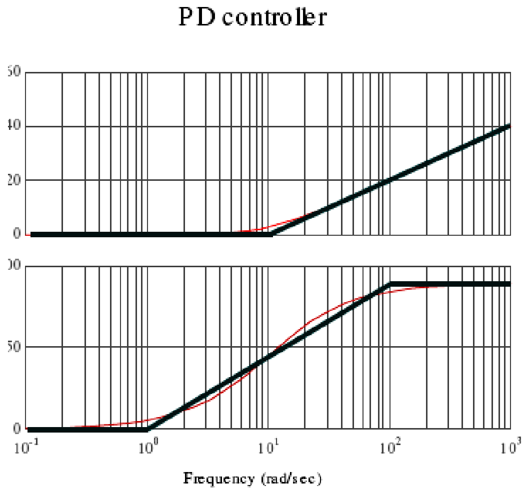


اگر چند قطب در مبدأ وجود داشته باشد($\frac{1}{s^N}$)، آنگاه شیب منحنی اندازه $-20N\ ^{dB}\!/_{decade}$ و زاویه برابر $-90N$ خواهد بود.

- صفر و قطب حقیقی $\frac{1}{\tau s+1}$ (در اینجا قطب حقیقی بررسی می‌شود)

	زاویه $\phi(\omega)=-\tan^{-1}\tau\omega$	اندازه $M(\omega)=-20\log\left(\tau^2\omega^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$
$\omega<<\frac{1}{\tau}$	$\phi(\omega)=0$	$M(\omega)=0$
$\omega=\frac{1}{\tau}$	$\phi(\omega)=-45$	$M(\omega)=-3dB$
$\omega>>\frac{1}{\tau}$	$\phi(\omega)=-90$	$M(\omega)=-20\log\omega\tau$





- صفر و قطب مزدوج مختلط (در اینجا صفر مزدوج مختلط بررسی می‌شود)

$$\boxed{G(s)=1+2\varsigma\frac{s}{\omega_n}+\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$$

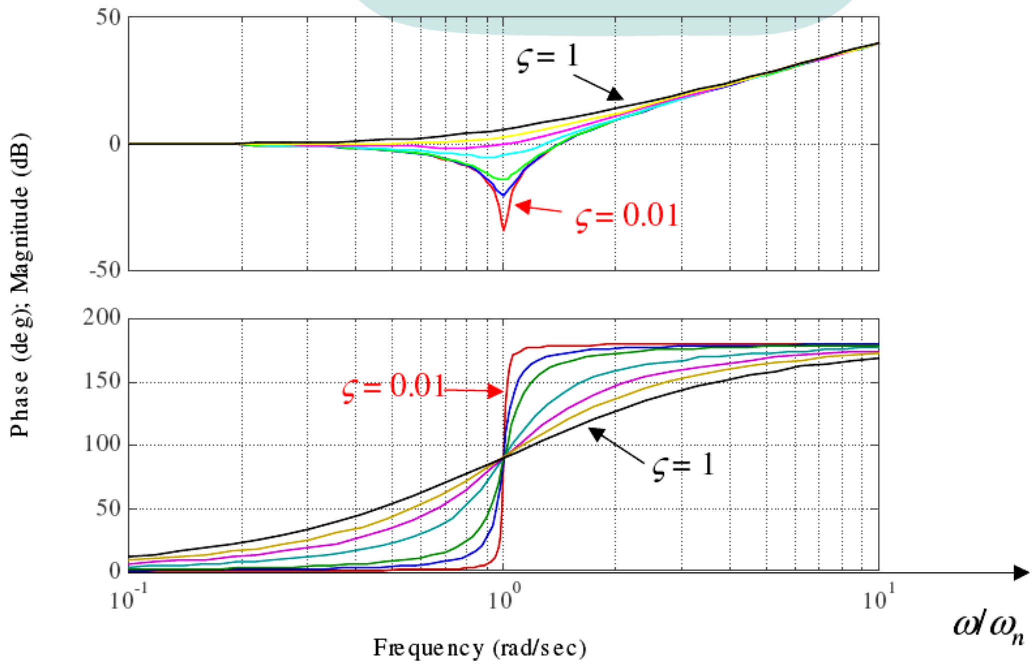
فرکانس تشدید:

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

اوج تشدید:

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

	زاویه $\phi(\omega)=\tan^{-1}\dfrac{\omega^2-\omega_n{}^2}{2\zeta\omega_n\omega}$	اندازه $M(\omega)=20\log\left((\omega^2-\omega_n{}^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}$
$\omega<<\omega_r$	$\phi(\omega)=0$	$M(\omega)=0$
$\omega=\omega_r$	$\phi(\omega)=90$	$M(\omega)=M_r$
$\omega>>\omega_r$	$\phi(\omega)=180$	$M(\omega)=40\log\omega$

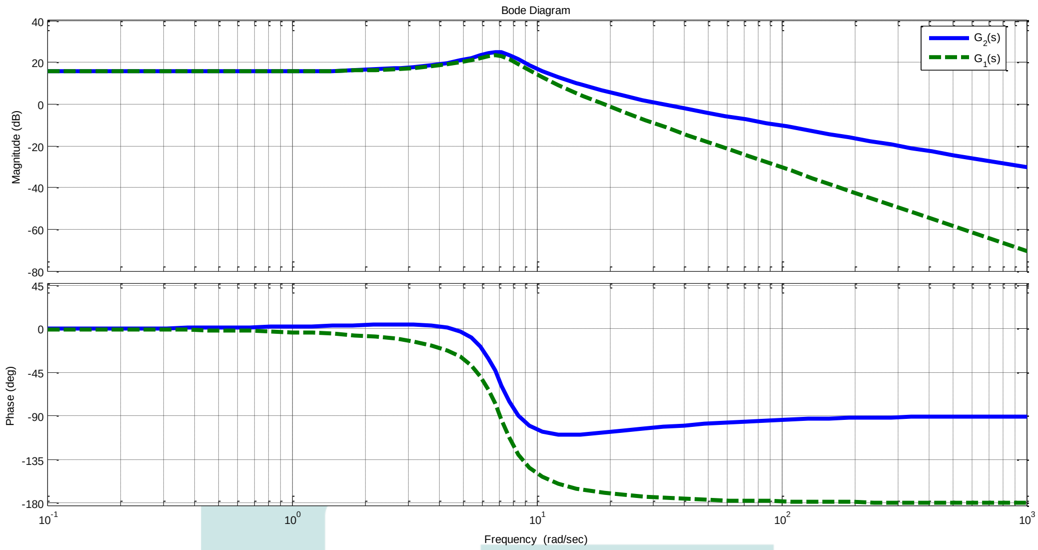


تمرین: نمودار بود یک تاخیر زمانی با تابع تبدیل زیر را رسم نمایید.

$$G(s)=e^{-t_0 s}$$

مثال ۱:

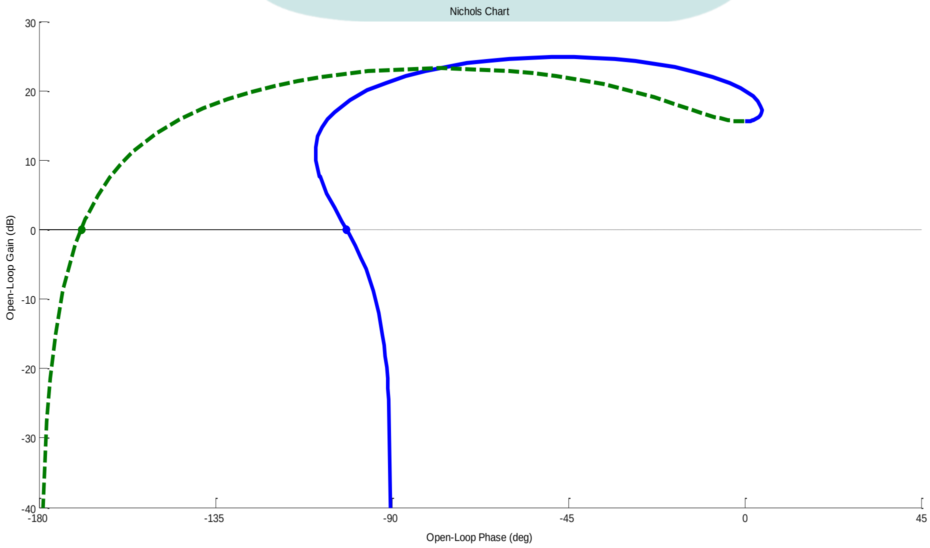
$$G_1(s)=\frac{300}{s^2+3s+50} \text{ و } G_2(s)=\frac{30(s+10)}{s^2+3s+50}$$



۸-۲ نمودار نیکولز (Nichols)

این نمودار نیز همان اطلاعات منحنی‌های بود را داراست با این تفاوت که اندازه و فاز در یک گراف ترکیب شده‌اند و ω پارامتر متغیر است.

$$G_1(s)=\frac{300}{s^2+3s+50} \text{ و } G_2(s)=\frac{30(s+10)}{s^2+3s+50}$$



مثال ۲:

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{s-2}{(s+3)(s^2+2s+17)} \\ &= \frac{2}{51}\left(\frac{s}{2}-1\right)^1\left(\frac{s}{3}+1\right)^{-1}\left[\left(\frac{s}{\sqrt{17}}\right)^2+\frac{2}{17}s+1\right]^{-1} \end{aligned}$$

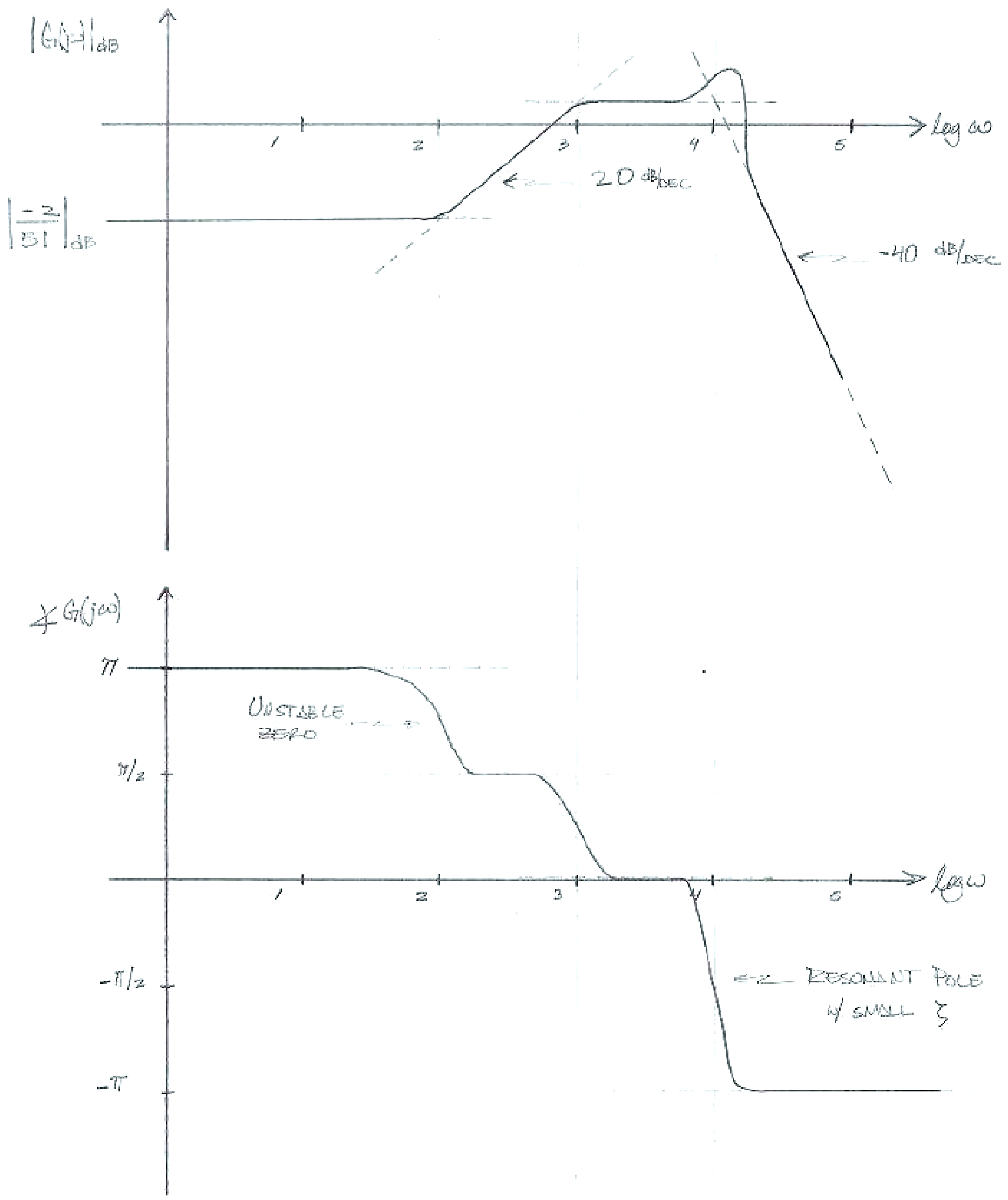
DC Gain: $P(j0) = -\frac{2}{51}$

$$0\frac{rad}{s} < \omega < 2\frac{rad}{s} \;:\; |P(j0)|_{dB} \approx -28dB, \quad \angle P(j0) = \pi$$

$$2\frac{rad}{s} < \omega < 3\frac{rad}{s} \;:\; m = 20\frac{dB}{dec}, \quad \triangle\phi = -\pi/2 \text{ (RHP zero)}$$

$$3\frac{rad}{s} < \omega < \sqrt{17}\frac{rad}{s} \;:\; m = 0\frac{dB}{dec}, \quad \triangle\phi = -\pi/2$$

$$\sqrt{17}\frac{rad}{s} < \omega < \infty\frac{rad}{s} \;:\; m = -40\frac{dB}{dec}, \quad \triangle\phi = -\pi$$



۸-۳- مشخصه های پاسخ فرکانسی

$$G(s)=\frac{\omega_n^{\;2}}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^{\;2}}$$

هدف از این بحث بررسی ارتباط بین پاسخ زمانی یک سیستم (شامل پاسخ گذرا و حالت ماندگار آن) با پاسخ فرکانسی می‌باشد.

۱- اوج تشدید M_r: مقدار ماکزیمم پاسخ فرکانسی را اوج تشدید می‌نامند.

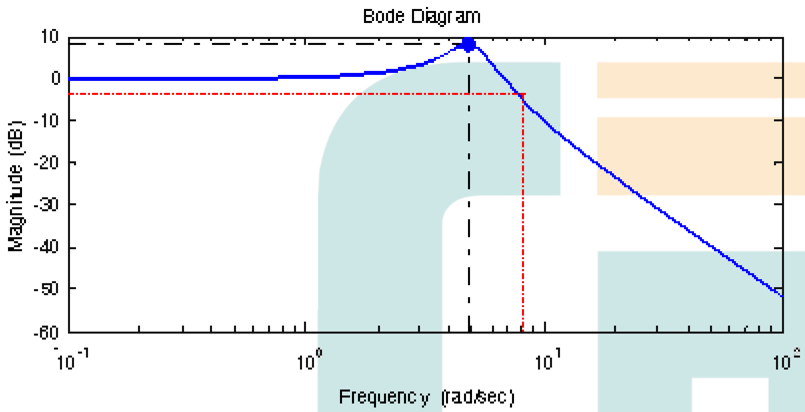
$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

ماکزیمم تشدید در فرکانس تشدید ω_r اتفاق می‌افتد.

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

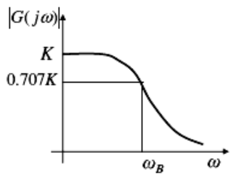
اگر $\xi>0.707$ باشد آنگاه $M_r=0$ یعنی پیکی وجود ندارد.

با افزایش اوج تشدید فراجهش به ورودی پله افزایش می‌یابد بطور کلی اندازه‌ی اوج تشدید M_r بیانگر پایداری نسبی سیستم است.

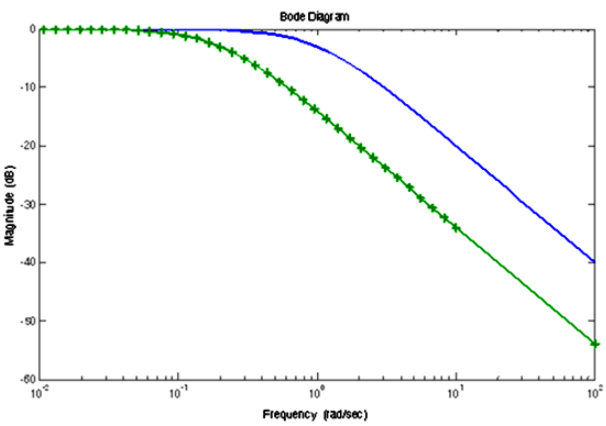


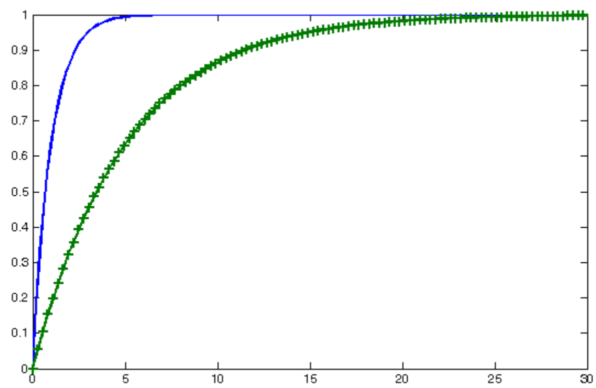
۲- پهنای باند BW: فرکانسی است که در آن پاسخ فرکانسی از مقدار فرکانس پایین ($0dB$) به اندازه‌ی $3dB$ افت پیدا کرده باشد.

با افزایش پهنای باند (BW) یا فرکانس تشدید (W_r) زمان خیز پاسخ پله کاهش می‌یابد. (اگر پهنای باند زیاد شود زمان خیز کم می‌شود)



مثال: دو سیستم با تابع تبدیل‌های حلقه بسته $T_1(s)=\dfrac{1}{s+1}$ و $T_2(s)=\dfrac{1}{5s+1}$ را در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی این دو سیستم را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید.





تمرین: مثال فوق را برای دو تابع تبدیل مرتبه‌دوم $T_1(s)=\dfrac{100}{s^2+10s+100}$ و $T_2(s)=\dfrac{900}{s^2+30s+900}$ انجام دهید.

۳- خطای حالت ماندگار: مشخصه خطای حالت ماندگار نیز قابل ارتباط به پاسخ فرکانسی سیستم حلقه بسته است.

وضعیت نهایی سیستم مرتبط با اندازه در فرکانس‌های پایین می‌باشد. $G(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} sG(s)$

همانطور که قبلاً در مبحث خطای حالت دائمی ذکر شد خطای حالت ماندگار برای یک سیگنال ورودی خاص، به بهره و تعداد انتگرال‌ها (انتگرال‌گیرها) در تابع تبدیل حلقه باز وابسته است.

ثابت بهره بصورت بهره فرکانس پایین روی نمودار بود ظاهر می‌گردد برای سیستم نوع صفر بهره بخش فرکانس پایین نمودار بود برابر ثابت پله (K_p) است. برای سیستم نوع ۱ بهره بخش فرکانس پایین متناظر با ثابت شیب (K_v) می‌باشد و برای سیستم نوع ۲ بهره بخش فرکانس پایین متناظر با ثابت شتاب (K_a) می‌باشد.

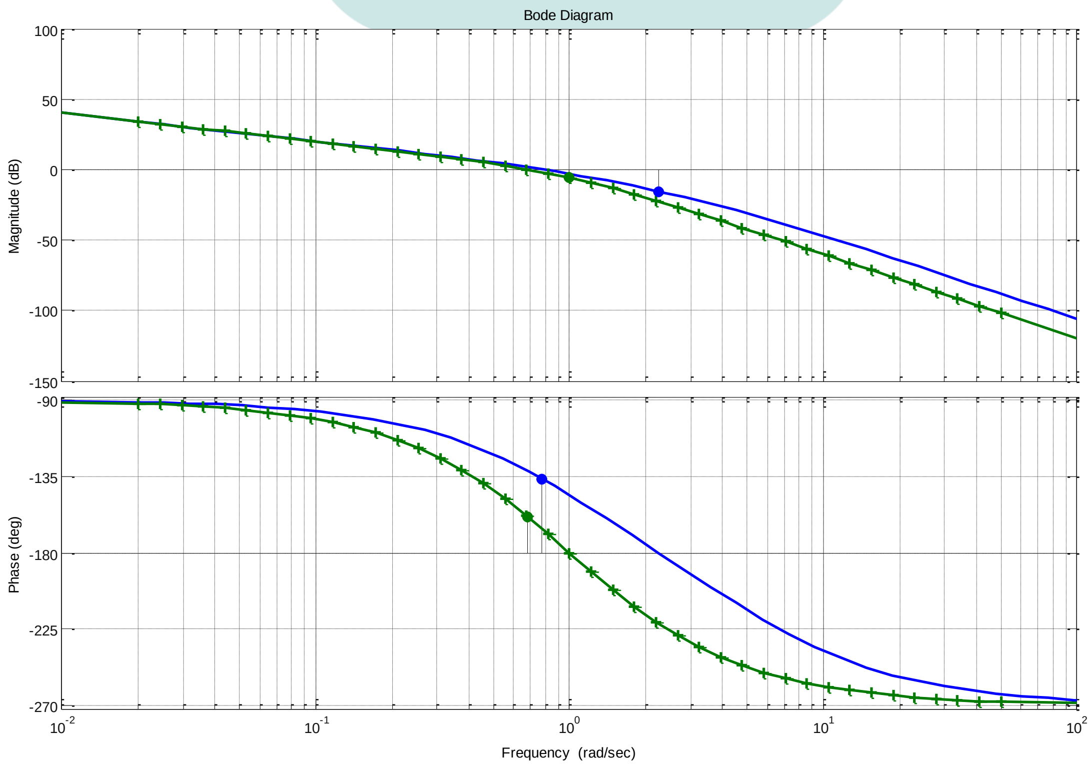
۴- نقطه‌ی برهم افتادگی فاز: نقطه‌ای است که در آن فاز سیستم برابر -180^{o} درجه می‌شود. فرکانس متناظر با این نقطه را فرکانس بر هم افتادگی فاز می‌گویند.

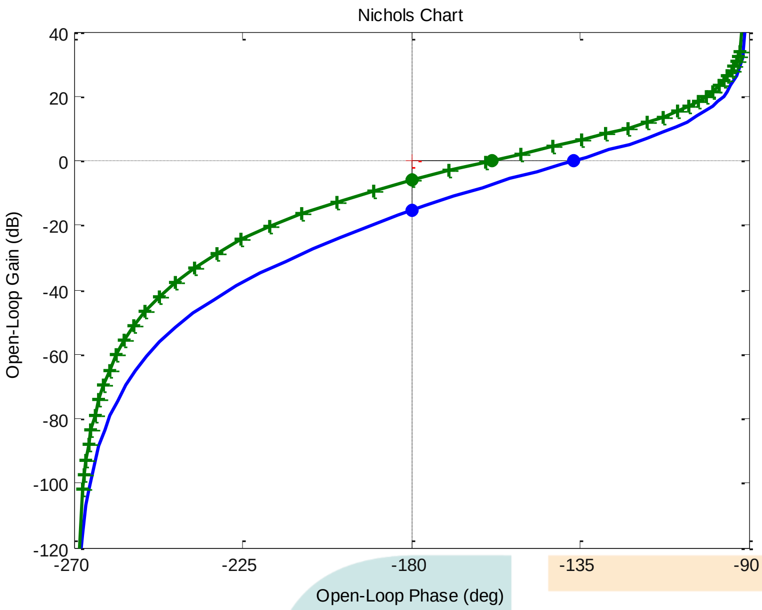
۵- نقطه‌ی برهم افتادگی بهره: نقطه‌ای است که در آن اندازه‌ی بهره برابر با ۱ می‌شود. (در نمودار بود اندازه $0dB$ می‌شود). فرکانس متناظر با این نقطه را فرکانس بر هم افتادگی بهره می‌گویند.

۶- حاشیه بهره **Gain Margin** : مقدار افزایش مجاز در بهره سیستم است وقتی که فاز برابر -180^{o} باشد (نقطه بر هم افتادگی فاز) که در این صورت یک سیستم با پایداری مرزی خواهیم داشت.

۶- حاشیه فاز **Phase Margin**: مقدار افزایش مجاز در فاز سیستم است وقتی که اندازه واحد باشد. (نقطه‌ی بر هم افتادگی بهره) که در این صورت یک سیستم با پایداری مرزی خواهیم داشت.

مثال: نمودار بود تابع تبدیل $G_1(s)=\dfrac{5}{s(s+1)(s+5)}$ و $G_2(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^2}$ را رسم کنید و حاشیه بهره و حاشیه فاز آن‌ها را بدست آورید.





GM۱=۱۵,٦ dB
GM۲=٦,۰۲ dB

PM۱=٤۳,۲
PM۲=۲۱,٤

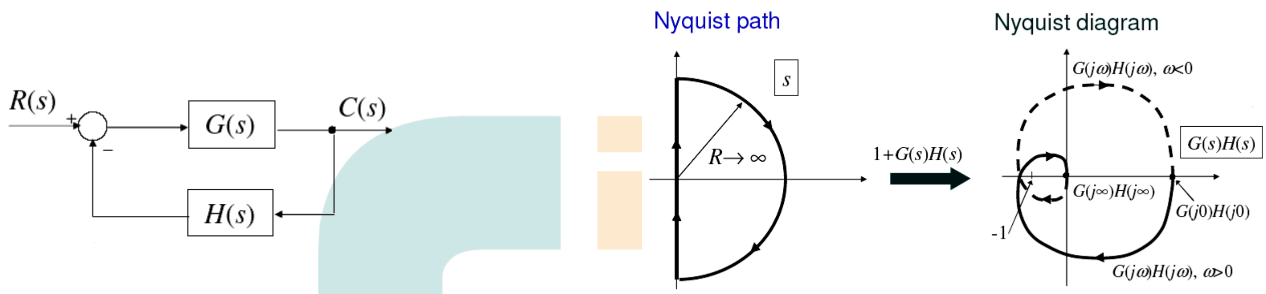
نکته: نقطه اساسی (**Critical**) برای پایداری یعنی ۱- ، در نمودار بود و نیکولز به نقطه □□۰ و فاز ^{o}۱۸۰- تصویر می‌شود.

The best way to predict the future is to create it.

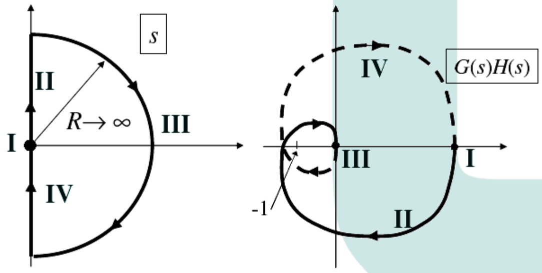
بهترین راه برای پیش‌بینی آینده، ساختن آن است.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　پیتر اف دراکر

۹. تحلیل پایداری با روش نایکوئیست

منحنی نایکوئیست اطلاعاتی مشابه نمودار بود را در اختیار قرار می‌دهد با این تفاوت که فرم $KG(j\omega)H(j\omega)$ بعنوان مکان فازوری بـر حسب پارامتر ω رسم می‌گردد. نقطه‌ی اساسی همان ۱- است. معیار پایداری نایکوئیست که به سیستم‌های نـامینیمم فـاز قابـل اعمـال است، بیان می‌کند که تعداد قطبهای ناپایدار حلقه بسته برابر است با **Pc = N + Po** که در آن **N** تعداد دور زدنهای مکان فـازوری حـول نقطه ۱- است (جهت ساعتگرد مثبت فرض می‌شود). **Po** تعداد قطبهای حلقه باز موجود در سمت راست صفحه **s** است.



چهار جزء نمودار نایکوئیست:



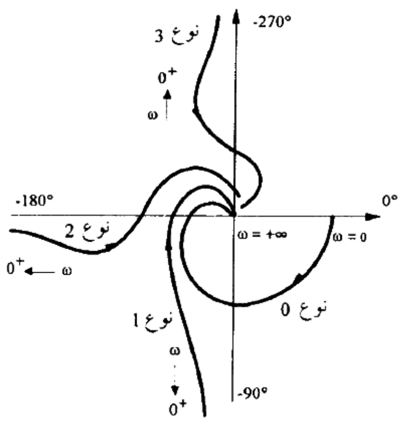
۹-۱- رسم نمودار نایکوئیست

برای رسم نمودار نایکوئیست یک تابع تبدیل، از قواعد زیر می‌توان استفاده کرد.

قاعده ۱- تابع تبدیل کلی بصورت زیر است

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_{Z1})(1+j\omega T_{Z2})\ldots(1+j\omega T_{Zw})}{(j\omega)^m((1+j\omega T_1)((1+j\omega T_2)\ldots(1+j\omega T_u)}$$

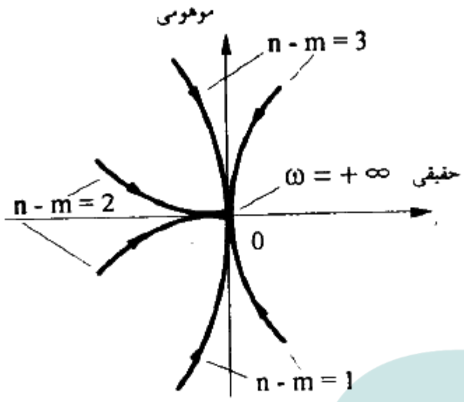
تابع تبدیل داده شده از نوع m است و نوع تابع تبدیل، قسمت فرکانس پایین $G(j\omega)$ را تعیین می‌کند. مشخصه‌های فرکانس پایین نمودارهای نایکوئیست برای سیستم‌های نوع یک، دو و سه در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



قاعده ۲- قسمت فرکانس بالای نمودار نایکوئیست $\omega \to \infty$ ، را می‌توان بدین صورت تعیین کرد

$$|G(j\omega)| \to 0 \quad , \quad \angle G(j\omega) = (m+u-w)\times 90^\circ$$

توجه کنید که درجه مخرج تابع تبدیل داده شده با معادله فوق همواره بزرگتر از درجه صورت آن است، و لذا نقطه فرکانس بالا ($\omega = \infty$) در جهت عقربه ساعت به سمت صفر میل خواهد کرد. نمودار ممکن است که از هر طرف محور وارد مبداء گردد.



قاعده ۳- مجانب قسمت فرکانس پایین نمودار نایکوئیست یک سیستم درجه اول، با گرفتن حد $\omega \to 0$ از قسمت حقیقی تابع تبدیل بدست می‌آید.

قاعده ۴- فرکانس‌هایی که در آنها نمودار نایکوئیست با محور حقیقی منفی و محور موهومی تلاقی دارند، به ترتیب از روابط زیر تعیین می‌گردند

۰ = قسمت موهومی [G(jω)]

۰ = قسمت حقیقی [G(jω)]

قاعده ۵- اگر کلیه $T_{Z1}, T_{Z2}, \dots, T_{Z\omega}$ صفر باشند و یا به عبارت دیگر تابع تبدیل صفر محدود نداشته باشد، زاویه $G(j\omega)$ بطور پیوسته به ازاء ω از ۰ تا ∞ ، کاهش پیدا می‌کند. اگر تابع تبدیل صفر محدود داشته باشد، شمای نمودار نایکوئیست به محل صفرها و قطبها بستگی خواهد داشت و زاویه ممکن است بطور پیوسته در یک جهت تغییر پیدا نکرده و لذا نوعی «تورفتگی» ایجاد کنند.

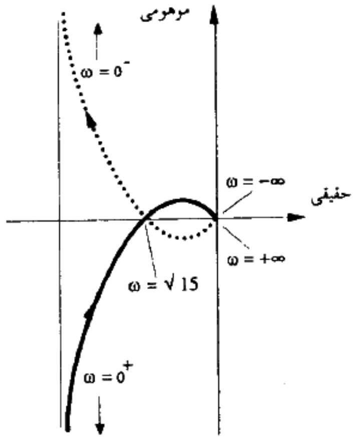
قاعده ۶- نمودار نایکوئیست تابع تبدیل $G(j\omega)$ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان برای $-\infty < \omega < 0$ ، حول محور حقیقی با محور نایکوئیست تابع تبدیل $G(j\omega)$ برای $0 < \omega < \infty$ ، متقارن است. بسادگی می‌توان نشان داد که $G(-j\omega) = G^*(j\omega)$ که در آن * علامت مزدوج مختلط است. بنابراین اگر برای یک فرکانس مشخص مانند ω_1 ، $G(j\omega) = a - j\beta$، آنگاه $G(-j\omega_1) = a + j\beta$. لذا نمودار پاسخ فرکانسی حول محور حقیقی متقارن خواهد بود.

مثال: نمودار نایکوئیست تابع تبدیل $G(s) = \dfrac{20(s+5)}{s(s+3)(s+1)}$ را رسم کنید.

$$G(j\omega) = \frac{۲۰(j\omega+۵)}{j\omega(j\omega+۳)(j\omega+۱)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{۲۰(\omega^۲+۲۵)^{۱/۲}}{\omega(\omega^۲+۹)^{۱/۲}(\omega^۲+۱)^{۱/۲}}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۵}\right] - ۹۰^\circ - \tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۳}\right] - \tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۱}\right]$$



$$G(j\omega)=\frac{-20j(j\omega+5)(3-j\omega)(1-j\omega)}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)}$$

$$=\frac{-20\left[\omega(\omega^2+17)+j(-\omega^2+15)\right]}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)}$$

$$\text{قسمت حقیقی}\;[G(j\omega)]=\frac{-20(\omega^2+17)}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}$$

$$\text{قسمت موهومی}\;[G(j\omega)]=\frac{20(\omega^2-15)}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)}$$

اکنون می‌توان نمودار نایکوئیست را با استفاده از چهار نقطه مهم زیر رسم نمود:

۱ـ در $\omega = 0$ داریم

$$|G(j\omega)| = \infty \quad ; \quad \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

$$\text{قسمت موهومی}\;[G(j\omega)] = -\infty \;;\; \text{قسمت حقیقی}\;[G(j\omega)] = \frac{-340}{9}$$

بنابراین نمودار نایکوئیست با اندازه بی‌نهایت از زاویه فاز ۹۰- آغاز می‌شود.

مجانب نمودار نایکوئیست بر روی محور حقیقی منفی در $\frac{-340}{9}$ قرار دارد.

۲ـ در $\omega = \infty$ داریم

$$|G(j\omega)| = 0 \quad ; \quad \angle G(j\omega) = -180^\circ$$

$$\text{قسمت موهومی}\;[G(j\omega)] = 0 \quad ; \quad \text{قسمت حقیقی}\;[G(j\omega)] = 0$$

بنابراین نمودار نایکوئیست به مبداء مختصات قطبی با زاویه -180° وارد می‌شود.

۳ـ برای تعیین نقطه احتمالی قطع محور حقیقی، زاویه فاز را برابر 0° یا $\pm 180^\circ$ و قسمت موهومی را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم

$$\frac{20(\omega^2-15)}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)} = 0$$

و لذا برای فرکانس $\omega = \sqrt{15}$، بدست می‌آوریم

$$\text{قسمت حقیقی}\;[G(j\omega)] = \frac{-20(15+17)}{(15+9)(15+1)} = -\frac{5}{3}$$

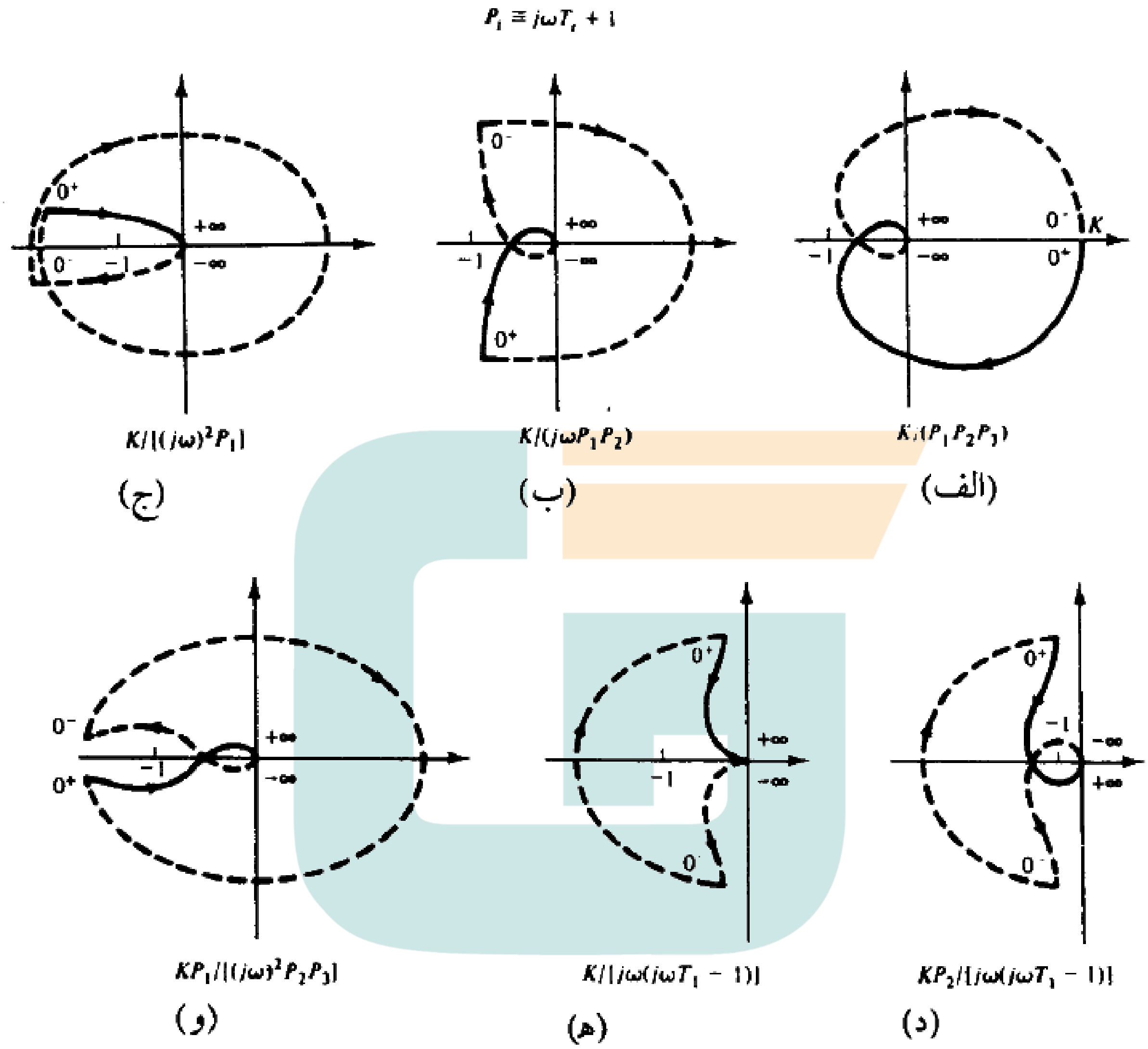
۴ـ برای تعیین نقطه احتمالی قطع محور موهومی زاویه فاز را برابر $\pm 90^\circ$ و قسمت حقیقی را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم

$$\frac{-20(\omega^2+17)}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)} = 0$$

که به ازای هیچ فرکانس حقیقی برآورده نمی‌شود و لذا تقاطعی با محور موهومی ندارد.

قاعده ۷- نمودار نایکوئیست (قطبی) با وصل کردن قسمتهای وصل نشده منحنی نایکوئیست در بی‌نهایت بدست می‌آید. دو قسمت نمودار نایکوئیست در بی‌نهایت را توسط یک مسیر به هم وصل می‌کنیم، مسیر ارتباط دهنده در بی‌نهایت همواره باید در جهت عقربه

ساعت حرکت کند و همچنین باید بگونه‌ای باشد که مسیر در جهت افزایش فرکانس باشد. نمودارهای کامل نایکوئیست چندین سیستم در شکل‌های زیر نشان شده‌اند.



۹-۲- معیار پایداری نایکوئیست

فرض کنید $\Delta(s)=1+L(s)$ معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم حلقه بسته باشد.

تعداد قطب‌های حلقه باز داخل مسیر نایکوئیست (Γ_s) = P_O

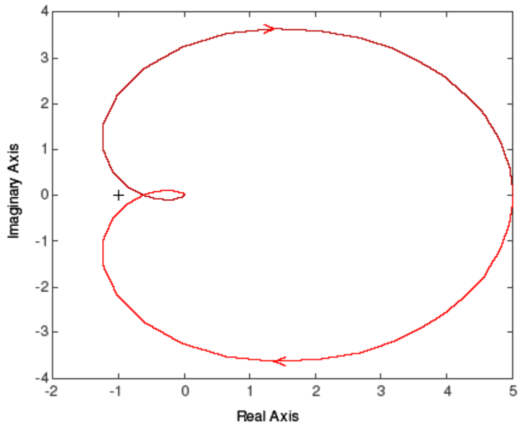
تعداد قطب‌های حلقه بسته داخل دیاگرام نایکوئیست (Γ_L) = P_C

تعداد چرخش‌های دیاگرام نایکوئیست (Γ_L) در جهت عقربه‌های ساعت حول نقطه‌ی (۰ و ۱-)= N

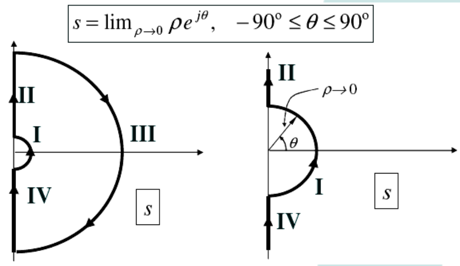
$$\boxed{P_C = N + P_O}$$

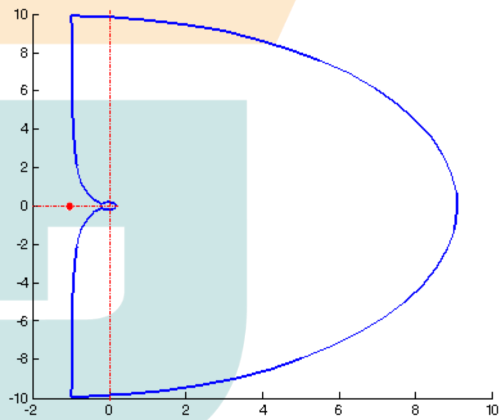
یک سیستم کنترل حلقه بسته پایدار است اگر و فقط اگر تعداد چرخش‌های دیاگرام نایکوئیست Γ_L در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول نقطه (۰و۱-) برابر تعداد قطب‌های حلقه باز با بخش حقیقی مثبت (سمت راست محور S) باشد.

مثال۲: $G(s)=\dfrac{5}{(s+1)^3}$



مثال ۳: $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$



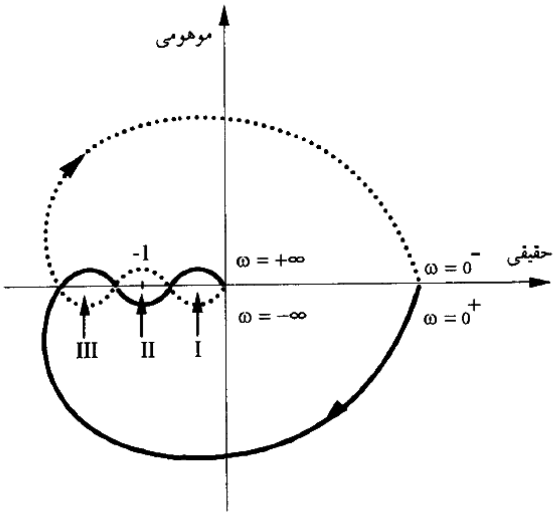


مثال ۴:

تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{K_0(1+T_1 s)^2}{(1+T_2 s)(1+T_3 s)(1+T_4 s)(1+T_5 s)^2}$$

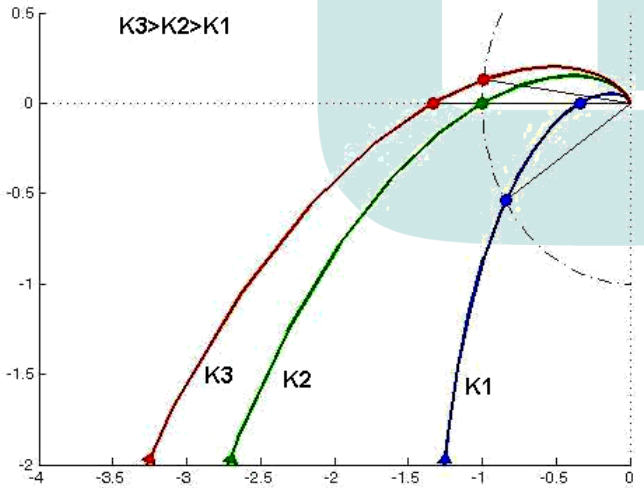
که در آن $T_5<T_1<T_2,T_3,T_4$ نمودار کامل نایکوئیست این تابع تبدیل در شکل زیر برای یک بهره خاص نشان داده شده است. تعداد دورانهای حول نقطه ۱- صفر خواهد بود. در این مثال اگر بهره را به اندازه کافی افزایش و یا کاهش دهیم در هر دو صورت، سیستم حلقه- بسته ناپایدار خواهد شد. در واقع اگر بهره را به اندازه کافی افزایش دهیم نقطه ۱- در محدوده I قرار خواهد گرفت و تعداد دورانها حول نقطه ۱- برابر با دو دور جهت عقربه ساعت خواهد بود. بنابراین $P_C=2$ و سیستم ناپایدار است. از طرف دیگر، اگر بهره را به اندازه کافی کاهش دهیم نقطه ۱- در محدوده III قرار خواهد گرفت و تعداد دورانها حول نقطه ۱- برابر با دو چرخش در جهت عقربه ساعت می‌باشد و سیستم ناپایدار است. اگر بهره را باز هم کاهش دهیم، نقطه ۱- در سمت چپ نمودار نایکوئیست قرار می‌گیرد و تعداد دورانها حول نقطه ۱- صفر می‌شوند و سیستم باز هم پایدار است. این چنین سیستمی را پایدار شرطی گویند. سیستم پایدار شرطی، سیستمی است که برای یک گستره از بهره‌ها پایدار است و افزایش یا کاهش به مقدار مناسب، موجب ناپایدار شدن آن می‌گردد. در کار با سیستم‌های عملی با پایداری شرطی باید دقت کافی را در رابطه با پایداری آنها مبذول داشت.



۹-۳- پایداری نسبی

معیار پایداری نایکوئیست بر حسب نقطه‌ی ۱۸۰°- و $0dB$ روی نمودار بود یا نقطه‌ی (۰ و ۱-) روی منحنی نایکوئیست تعریف می‌شود.

نزدیکی مکان $GH(j\omega)$ به این نقطه معیاری از پایداری نسبی سیستم است. برای مثال منحنی قطبی $\omega[0,\infty)$ برای تابع تبدیل $GH(j\omega)=\dfrac{k}{j\omega(j\omega\tau_1+1)(j\omega\tau_2+1)}$ به ازای چند K بصورت زیر است.



هر چه محل تقاطع نقطه‌ی قطبی با محور، $d=\dfrac{k\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$ ،کوچکتر باشد حاشیه‌ی پایداری بیشتر است.

یعنی می‌توانیم K را زیادتر کنیم اما سیستم پایدار باقی بماند.

حاشیه‌ی بهره: حاشیه بهره، معکوس اندازه $|GH(j\omega)|$ در فرکانس بر هم افتادگی فاز ω_c است. $GM=\dfrac{1}{|GH(j\omega_c)|}$

برای مثال اگر $\tau_1=\tau_2=1$ باشند آنگاه حاشیه بهره تابع تبدیل فوق برابر است با: $GM=\dfrac{1}{\dfrac{k\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}}=\dfrac{2}{k}$

طبق معیار پایداری نایکوئیست، اگر $GM>1$ باشد آنگاه سیستم پایدار است. لذا در مثال فوق اگر $k<2$ سیستم پایدار است.

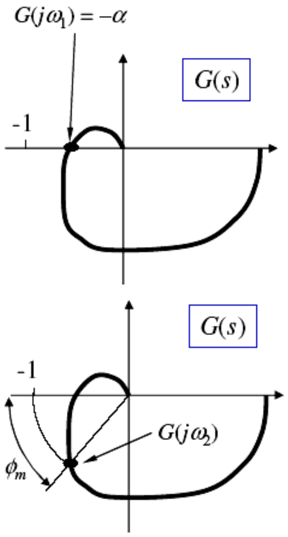
حاشیه‌ی فاز: حاشیه فاز، زاویه فازی است که باید $GH(j\omega)$ به اندازه آن بچرخد تا نقطه با اندازه واحد از زاویه ۱۸۰°- عبور کند.

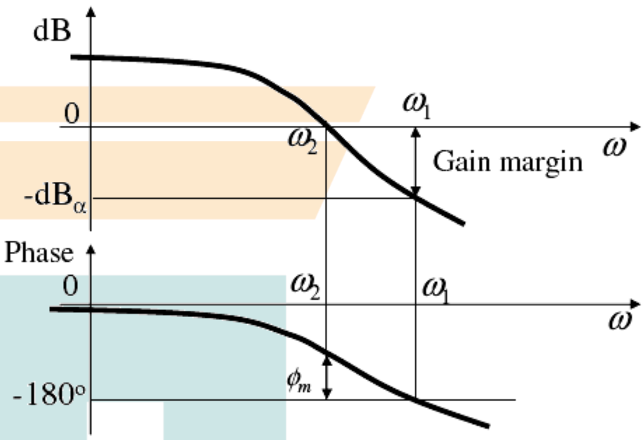
ω_g: فرکانس برهم افتادگی بهره $P.M=-180+\angle GH(j\omega)$

- در بهره‌ی k_1 قبل از ناپایداری سیستم زاویه فاز اضافی φ_1 می‌توان به آن اضافه نمود.
- به ازای بهره‌ی k_2 حاشیه‌ی فاز صفر درجه است و بنابراین نمی‌توان به سیستم فازی اضافه نمود.
- به ازای بهره‌ی k_3 باید از سیستم به اندازه‌ی φ_3 فاز کم نمود تا در حاشیه‌ی پایداری قرار گیرد.

برای پایداری یک سیستم نامینیمم فاز، حاشیه بهره و حاشیه فاز باید مثبت باشند. این بدان معناست که:

- در نمودار بود و نیکولز: محل تقاطع منحنی اندازه در فرکانس ω_c با محور افقی زیر $0dB$ باشد (یعنی $GM>0dB$) و محل تقاطع منحنی فاز در فرکانس ω_g بالاتر از محور -180^o باشد (یعنی $PM>0^\circ$).
- در منحنی قطبی: محل تقاطع منحنی در فرکانس ω_c کمتر از شعاع واحد باشد $GM>1$ و محل تقاطع منحنی در فرکانس ω_g زیر محور -180^o باشد.

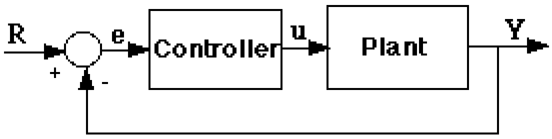




Genius is one percent inspiration and ninety-nine percent perspiration.

نبوغ ترکیبی از یک درصد الهام و نود و نه درصد تلاش است. توماس ادیسون

۱۰. طراحی کنترل کننده PID



تابع انتقال کنترل کننده PID به صورت زیر است.

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

KP: بهره تناسبی KI: بهره انتگرالگیر KD: بهره مشتق گیر

ابتدا نگاهی به کارکرد کنترل کننده PID در سیستم حلقه بسته داریم. در شکل فوق متغیر e نشان دهنده خطا یا به عبارتی تفاوت بین مقدار ورودی R و خروجی واقعی Y است. این سیگنال خطا به کنترل کننده فرستاده شده و کنترل کننده از آن مشتق و انتگرال می‌گیرد.

پارامتر e خطای بین ورودی مطلوب و خروجی واقعی است این سیگنال خطا به کنترلر ارسال می‌گردد کنترلر مشتق و انتگرال سیگنال خطا را محاسبه می‌کند.

K_P برابر خطا + K_I انتگرال خطا + K_D برابر مشتق خطا ← سیگنال کنترل u را تولید می‌کنند.

$$U = K_P e + K_I \int e dt + K_D \frac{de}{dt}$$

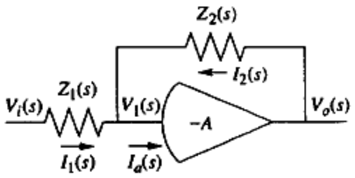
سپس سیگنال u به فرآیند اعمال می‌گردد و خروجی y جدید حاصل می‌شود این خروجی جدید مجدداً به سنسور برگشت داده می‌شود تا سیگنال خطای جدید صادر شود و بعد کنترلر سیگنال خطای جدید را دریافت کرده و این روند ادامه می‌یابد.

۱۰-۱- تأثیر کنترلرهای P، I و D

جدول زیریک دستورالعمل کلی جهت طراحی کنترلر PID را نشان می دهد.

پارامتر	زمان خیز t_r	فراجهش ماکزیمم $O.S\%$	زمان نشست t_s	خطای حالت دائمی e_{ss}
K_P	کاهش	افزایش	تغییر جزیی	کاهش
K_I	کاهش	افزایش	افزایش	حذف
K_D	تغییر جزیی	کاهش	کاهش	تغییر جزیی

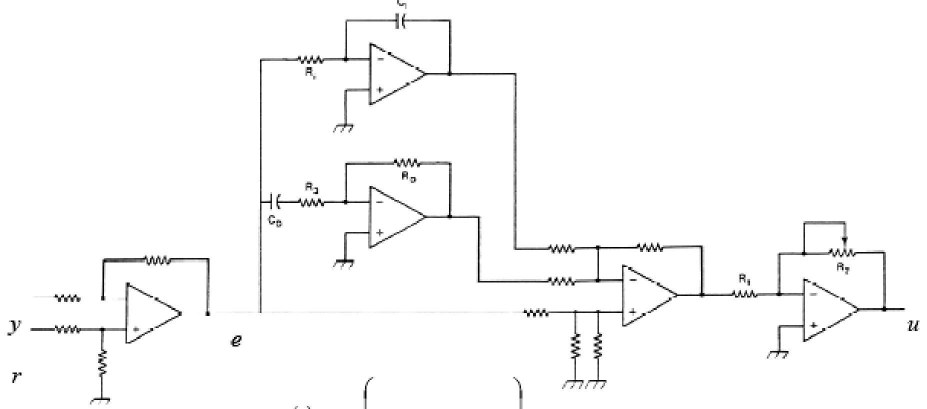
پیاده‌سازی کنترل کننده ها به روش الکترونیکی:



$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Function	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$	$G_c(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$
Gain	R_1	R_2	$-\frac{R_2}{R_1}$
Integration	R	C	$-\frac{\frac{1}{RC}}{s}$
Differentiation	C	R	$-RCs$
PI controller	R_1	R_2 C	$-\frac{R_2}{R_1}\frac{\left(s+\frac{1}{R_2C}\right)}{s}$
PD controller	C R_1	R_2	$-R_2C\left(s+\frac{1}{R_1C}\right)$
PID controller	C_1 R_1	R_2 C_2	$-\left[\left(\frac{R_2}{R_1}+\frac{C_1}{C_2}\right)+R_2C_1s+\frac{\frac{1}{R_1C_2}}{s}\right]$
Lag compensation	C_1 R_1	C_2 R_2	$-\frac{C_1}{C_2}\frac{\left(s+\frac{1}{R_1C_1}\right)}{\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)}$ where $R_2C_2 > R_1C_1$
Lead compensation	C_1 R_1	C_2 R_2	$-\frac{C_1}{C_2}\frac{\left(s+\frac{1}{R_1C_1}\right)}{\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)}$ where $R_1C_1 > R_2C_2$

شکل مدار کنترل کننده تناسبی- انتگرالی- مشتقگیر (ساختار جمعی)



مدار بالا برای تحقق کنترل کننده PID به صورت جمعی مناسب است:
$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{\beta}s+1}\right)$$

که در آن: $K_p=\frac{R_2}{R_1},\quad T_i=R_iC_i,\quad T_D=R_DC_D,\quad \beta=\frac{R_D}{R_3}$

برای مراحل مختلف آزمایش مقادیر عناصر مدار به شرح زیر خواهد بود:

کنترل کننده PI: $C_i=1\mu F+1\mu F$ ، $R_i=1M\Omega+1M\Omega,$ ، $R_1=100k\Omega,$ ، $R_2=100k\Omega+100k\Omega,$

کنترل کننده PD: $R_3=100k\Omega$ ، $C_D=1\mu F,$ ، $R_D=1M\Omega,$ ، $R_1=100k\Omega/2,$ ، $R_2=100k\Omega+100k\Omega,$

کنترل کننده PID: $R_3=100k\Omega$ ، $C_D=1\mu F,$ ، $R_D=1M\Omega,$ ، $C_i=1\mu F+1\mu F,$ ، $R_i=1M\Omega+1M\Omega,$ ، $R_1=100k\Omega,$ ، $R_2=1M\Omega/2,$

نکته: مقدار تمامی مقاومتهایی که اندازه آنها ذکر نشده $100k\Omega$ است

۱۰-۲- روش زیگلر-نیکولز (Ziegler-Nichols) برای تنظیم پارامترهای کنترلر PID

یک کنترل کننده تناسبی برای سیستم در نظر بگیرید. بهره تناسبی را به آرامی زیاد کنید تا خروجی سیستم به نوسان بیفتد. بهره تناسبی در این وضعیت را بهره بحرانی K_c و پریود نوسانات را P_c گویند.

اکنون با استفاده از جدول زیر پارامترهای کنترل کننده را انتخاب نمایید.

$$G_e(s)=k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right) \quad \text{و} \quad k_i=\frac{k_p}{T_i},k_D=k_pT_d$$

	K_p	T_r	T_d
P	$0.50K_c$		
PI	$0.45K_c$	$\frac{P_c}{1.2}$	
PID	$0.60K_c$	$0.5P_c$	$\frac{P_c}{8}$

مثال: تابع تبدیل حلقه باز سیستمی بصورت زیر است. با استفاده از معیار پایداری راث بهره بحرانی K_c و پریود نوسانات P_c را بیابید. سپس با استفاده از روش زیگلر- نیکولز یک کنترل کننده PID مناسب برای سیستم طراحی کنید.

$$G_o(s)=\frac{1}{(s+1)^3}$$

$K_c=8$ and $\omega_c=\sqrt{3}$

$K_p=0.6*K_c=4.8;\qquad T_r=0.5*P_c\approx 1.81;\qquad T_d=0.125*P_c\approx 0.45$

تمرین: با بهره‌گیری از نرم‌افزار MATLAB پاسخ حلقه بسته را در حالت نوسانی و همچنین با اعمال کنترل کننده PID را رسم نمایید.

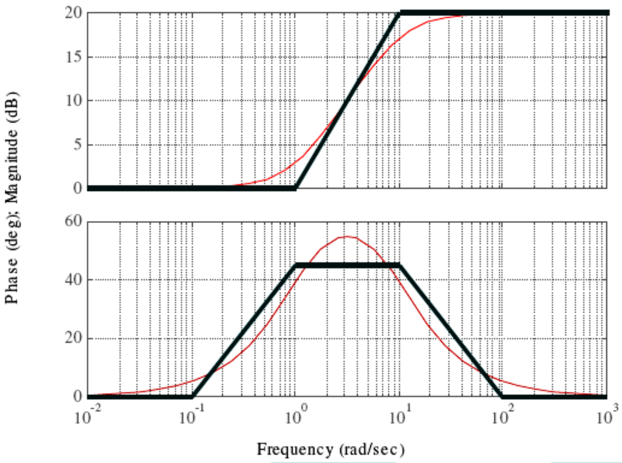
Only those who dare to fail greatly can ever achieve greatly.

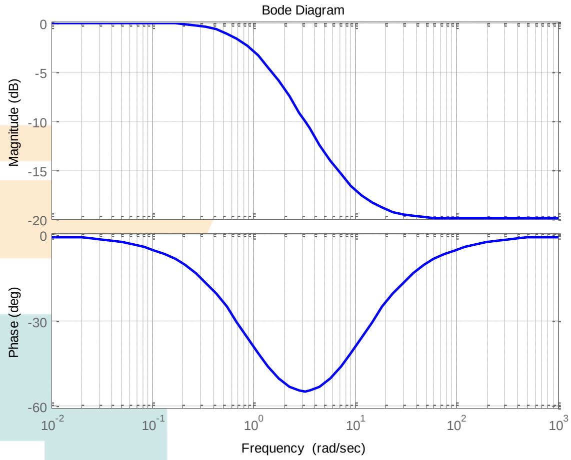
تنها آنهایی که جرات شکستهای بزرگ را دارند، به موفقیتهای بزرگ می‌رسند. رابرت اف کندی

۱۱. طراحی کنترل کننده Lead و Lag

جبرانساز بخشی از سیستم کنترل است که موجب جبران رفتار نامطلوب سیستم می‌گردد.

نمودار بود جبرانساز پس فاز $G(s)=\dfrac{0.1(s+10)}{(s+1)}$ | نمودار بود جبرانساز پیش فاز $G(s)=\dfrac{10(s+1)}{(s+10)}$





جبرانساز پیش فاز (Lead):

جبرانساز پیش فاز را می‌توان به فرم زیر بیان نمود:

$$G_c(s)=K_C\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}=K\frac{s+z}{s+p}$$

$$\alpha<1 \quad , \quad |z|<|p|$$

مقدار ماکزیمم تقدم فاز در فرکانس w_m رخ می‌دهد که $w_m=\sqrt{zp}=\dfrac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$ و می‌توان ثابت کرد که ماکزیمم فاز جبرانساز پیش‌فاز از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\sin\phi_m=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

رابطه فوق برای بدست آوردن نسبت قطب به صفر (α) برای ایجاد تقدم فاز ماکزیمم مفید است.

جبرانساز پیش فاز یک فیلتر بالاگذر است که در گستره‌ی فرکانس مناسبی فاز مثبت به سیستم می‌دهد. جبرانساز پیش‌فاز مشابه یک مشتق‌گیر یا کنترل‌کننده PD است.

جبرانساز پیش‌فاز برای تأمین زاویه تقدم فاز به کار می‌رود و یک حاشیه فاز مطلوب برای سیستم را منجر می‌شود.

نکته: ماکزیمم زاویه فاز حاصل از جبرانساز پیش فاز حدود 70^{o} است و لذا اگر حداکثر زاویه فاز بزرگتر از 70^{o} لازم باشد باید از دو جبرانساز پیش فاز سری استفاده نمود.

جبرانساز پس فاز (Lag):

جبرانساز پس فاز را می‌توان به فرم زیر نیز بیان نمود.

$$G_c(s)=K_C\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}=K\frac{s+z}{s+p}$$
$$\alpha>1 \quad , \quad |z|>|p|$$

شبکه پس فاز بر خلاف شبکه پیش‌فاز به جای تقویت و زاویه تقدم فاز، تضعیف و زاویه تأخر فاز ایجاد می‌کند. تأخر فاز ماکزیمم در فرکانس $w_m=\sqrt{zp}$ روی می‌دهد.

جبرانساز پس‌فاز مشابه یک انتگرال‌گیر یا کنترل‌کننده PI است. جبرانساز پس‌فاز یک فیلتر پایین‌گذر است که در گستره‌ی فرکانس مناسبی فاز منفی به سیستم می‌دهد.

جبرانساز پس‌فاز برای تأمین تأخر فاز (که معمولاً باعث ناپایداری سیستم می‌شود) بکار نمی‌رود بلکه برای تضعیف مورد استفاده است تا خطای حالت ماندگار را کاهش دهد.

	جبرانساز پیش فاز (Lead): این جبرانساز باعث افزودن زاویه‌ی تقدم فاز نزدیک فرکانس برهم افتادگی بهره روی نمودار بود می‌گردد و برای دستیابی به ریشه‌های غالب مطلوب مناسب است	جبرانساز پس فاز (Lag): این جبرانساز منجر به کاهش خطای حالت دائمی می‌شود و ریشه‌های غالب در صفحه‌ها یا حاشیه‌ی فاز در نمودار بود را تغییر نمی‌دهد.
مشخصات	۱. افزایش پهنای باند ← افزایش سرعت و ضریب میرایی ۲. کاهش فرا جهش ماکزیمم ۳. افزایش حاشیه‌ی فاز ۴. افزایش فرکانس طبیعی سیستم ۵. منجر به پاسخ مطلوب و اصلاح پاسخ زمانی می‌شود ۶. روی خطای حالت ماندگار سیستم تأثیری ندارد	۱. کاهش عرض بند سیستم ← کندتر شدن پاسخ حالت گذرا ۲. حذف نویزهای فرکانس بالا ۳. افزایش بهره در فرکانس‌های پایین ← کاهش خطای حالت ماندگار ۴. افزایش مرتبه سیستم به اندازه‌ی یک واحد
معایب	۱. نیاز به بهره‌ی تقویت اضافی ۲. با افزایش پهنای باند امکان تأثیر نویز روی سیستم بیشتر می‌شود.	۱. کاهش حاشیه‌ی فاز ۲. افزایش فراجهش ماکزیمم ۳. نوسانی شدن پاسخ حلقه بسته ۴. کند شدن پاسخ گذرا

۱۱-۱- طراحی کنترل کننده پیش فاز و پس فاز با روش مکان هندسی ریشه ها

- جبرانساز Lead

۱. معیارهای طراحی را با مکان ریشه‌های مطلوب قطب‌های غالب تبدیل کنید.
۲. مکان هندسی ریشه جبران نشده را رسم کنید و تعیین کنید که آیا مکان‌های ریشهی مطلوب با سیستم جبران نشده قابل تحقق است یا نه.
۳. اگر جبرانساز لازم است، صفر جبرانساز پیش‌فاز را زیر مکان ریشه مطلوب (یا سمت چپ آن) قرار دهید.
۴. مکان قطب جبرانساز را طوری تعیین کنید که شرط زاویه در محل قطب مطلوب تأمین گردد.
۵. بهره کل سیستم را در محل قطب‌های مطلوب ارزیابی نمایید و سپس ثابت خطا را محاسبه کنید.
۶. اگر ثابت خطا رضایت‌بخش نیست مراحل فوق را تکرار کنید.

مثال: جبرانساز پیش‌فاز $G_c(s)=\frac{K(s+z)}{(s+P)}$ را برای سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه $G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$ زیر طوری طراحی کنید که $\zeta\geq0.45$ و $\omega_n=9$ باشد و ثابت خطای سرعت بیش از ۱۵ باشد.

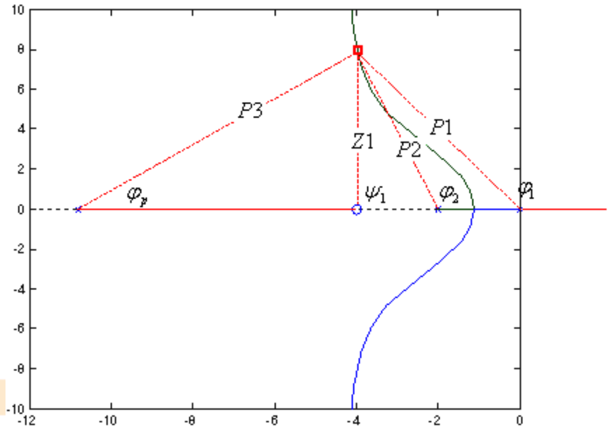
بنابراین مکان قطبهای غالب مطلوب عبارتند از: $-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -4.05 \pm 8$ لذا، امکان دستیابی به قطب‌های مطلوب بدون جبرانساز وجود ندارد.

صفر جبرانساز را $z=4$ انتخاب کنید. آنگاه برای تامین شرط زاویه در محل قطبهای غالب باید، قطب جبرانساز را بصورت زیر انتخاب نمود:

$$\psi_1 - [\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_p] = (2r+1)\pi$$

$$90 - [116.5 + 104 + \varphi_p] = (2r+1)\pi \qquad \Rightarrow \varphi_p = 49.5^\circ$$

$$\tan\varphi_p = \frac{8}{p-4} \quad \Rightarrow \quad p = 10.83$$



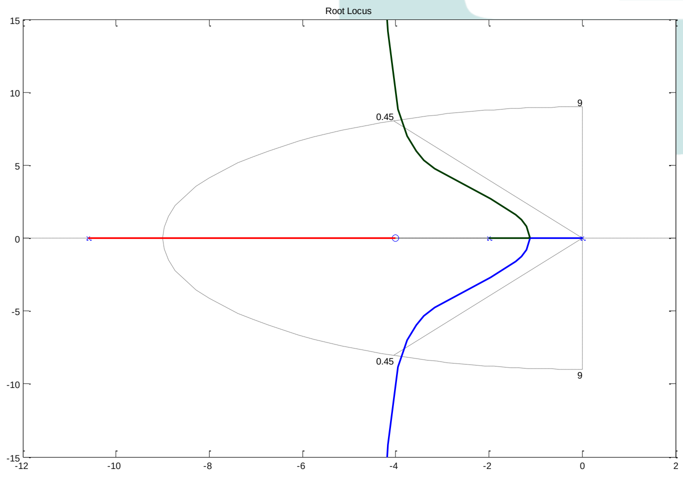
محاسبه بهره در محل قطبهای غالب با استفاده از شرط اندازه:

$$K = \frac{1}{|G_cG(s)|}\bigg|_{s=-4+j8} = \frac{P1\times P2\times P3}{Z1} = \frac{8.9\times 8.2\times 10.5}{8} = 95.7$$

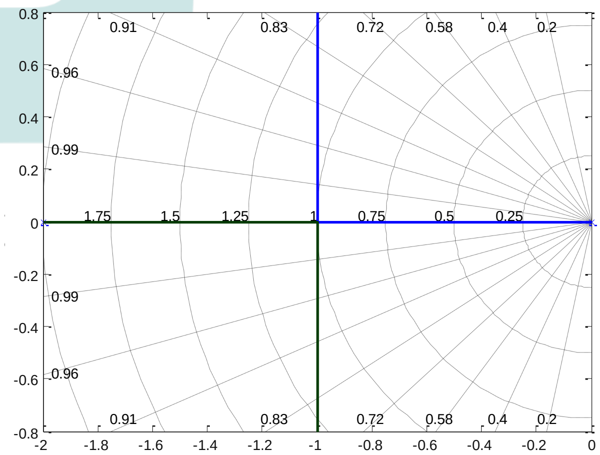
چون سیستم نوع ۱ است لذا خطای حالت ماندگار به ورودی پله برابر صفر است و ثابت خطای سرعت برابر است با :

$$K_V = \lim_{s\to 0} sG_cG(s) = \lim_{s\to 0}\frac{95.7(s+4)}{(s+2)(s+10.83)} = 17.6$$

مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده



مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده



- جبرانساز Lag

۱. مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران نشده را رسم کنید

۲. معیارهای طراحی را به مکان ریشه‌های غالب تبدیل کنید و روی مکان هندسی مشخص کنید

۳. بهره حلقه را در مکان ریشه‌ی مطلوب محاسبه کنید و به این ترتیب ثابت خطای سیستم را بدست آورید

۴. ثابت خطای جبران نشده را با ثابت خطای مطلوب مقایسه نمایید و نسبت صفر به قطب $\frac{z}{p}$ را بدست آورید

۵. با معلوم بودن نسبت صفر به قطب مکان مناسبی برای قطب و صفر جبرانساز مشخص کنید بطوریکه مکان هندسی ریشه جبران شده باز هم از محل ریشه مطلوب بگذرد (قطب و صفر را در مقایسه با فرکانس طبیعی قطبهای غالب (ω_n) در نزدیکی مبدأ صفحه s قرار دهید)

مثال: سیستم جبران نشده $G(s)=\dfrac{1}{s(s+2)}$ را در نظر بگیرید، لازم است که ضریب میرایی ریشه‌های غالب ۰٫۴۵ و ثابت سرعت سیستم برابر ۲۰ باشد. جبرانساز مناسب را طراحی کنید.

۱- رسم مکان هندسی جبران نشده

۲- انتخاب قطبهای غالب $-1\pm 2j$

۳- محاسبه بهره در مکان مطلوب $K=|s||s+2|=(2.24)\times(2.24)=5$

و در نتیجه ثابت سرعت سیستم جبران نشده برابر است با

$$K_V=\lim_{s\to 0} sG(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{2}=2.5$$

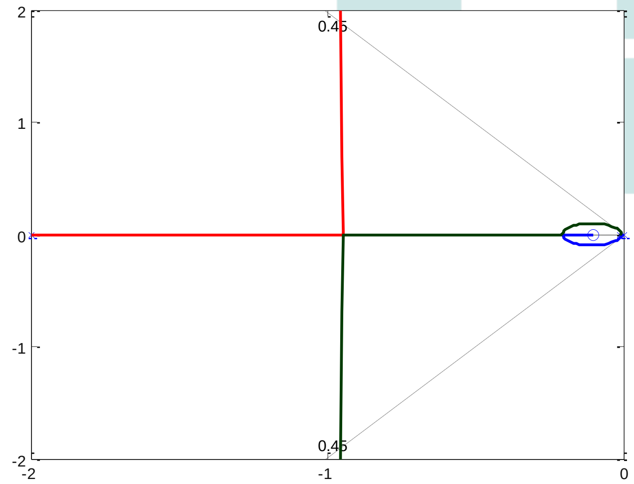
۴- . مقایسه ثابت خطای جبران نشده و ثابت خطای لازم:

$$\frac{z}{p}=\frac{K_{Vuncomp}}{K_{Vcomp}}=\frac{20}{2.5}=8\Rightarrow z=8p$$

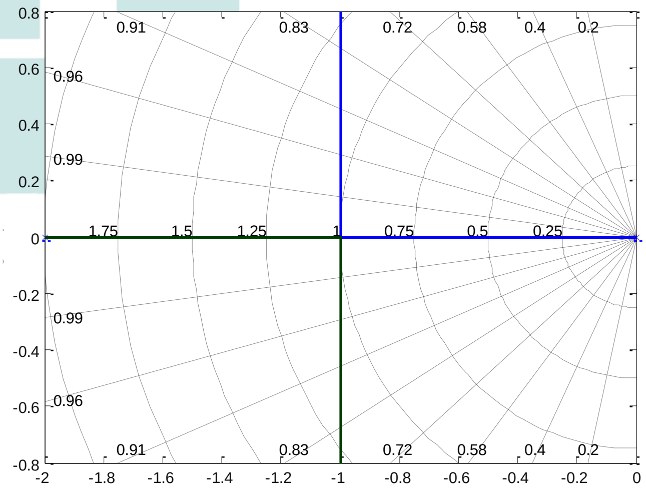
۵- با انتخاب $z=-0.1$ در نتیجه $P=-0.0125$ پس $G_c(s)=\dfrac{5(s+0.1)}{(s+0.0125)}$

نکته: اختلاف زوایا از p و z دو محل ریشه غالب تقریباً ۱ درجه است و لذا $-1\pm 2j$ مکان ریشه‌ی غالب است.

مکان هندسی جبران شده



مکان هندسی جبران نشده



۱۱-۲- طراحی کنترل کننده پیش فاز و پس فاز با روش نمودار بود

- جبرانساز Lag

فرض کنید تابع تبدیل حلقه فرآیندی بصورت $G_p(s)H(s)$ باشد

$$G_c(s)=K_C\frac{1+\tau s}{1+\tau\alpha s}=\frac{K_C}{\alpha}.\frac{s+1/\tau}{s+1/\alpha\tau}=\frac{K_C}{\alpha}.\frac{s+z}{s+P}\qquad,\quad \alpha>1$$

۱- بهره K_C جبرانساز را طوری تنظیم کنید که ثابت خطای مورد نظر تأمین شود.

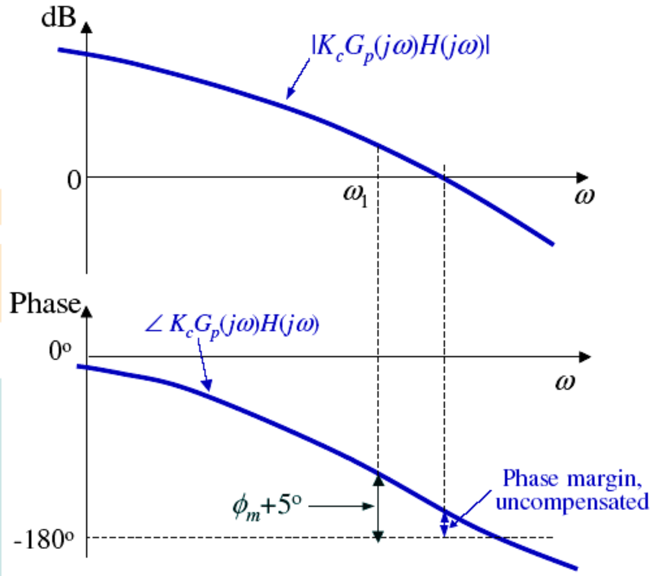
۲- فرکانس ω_g که در آن زاویه تابع تبدیل $K_C G_P(s)H(s)$ برابر $-180^\circ+\phi_m+5^\circ$ باشد را بیابید (ϕ_m حاشیه فاز مطلوب است)

۳- صفر جبرانساز را در یک دهه زیر فرکانس تقاطع ω_g قرار دهید (یعنی $\tau=\frac{10}{\omega_g}$)

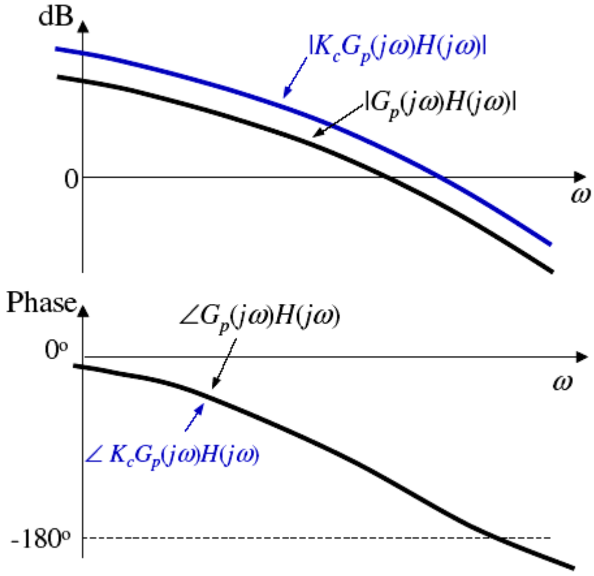
۴- تضعیف لازم در فرکانس ω_g را بمنظور تقاطع منحنی اندازه با خط $0-dB$ محاسبه نمایید.

۵- با توجه به اینکه تضعیف لازم برابر $-20\log\alpha$ است، α را محاسبه کنید.

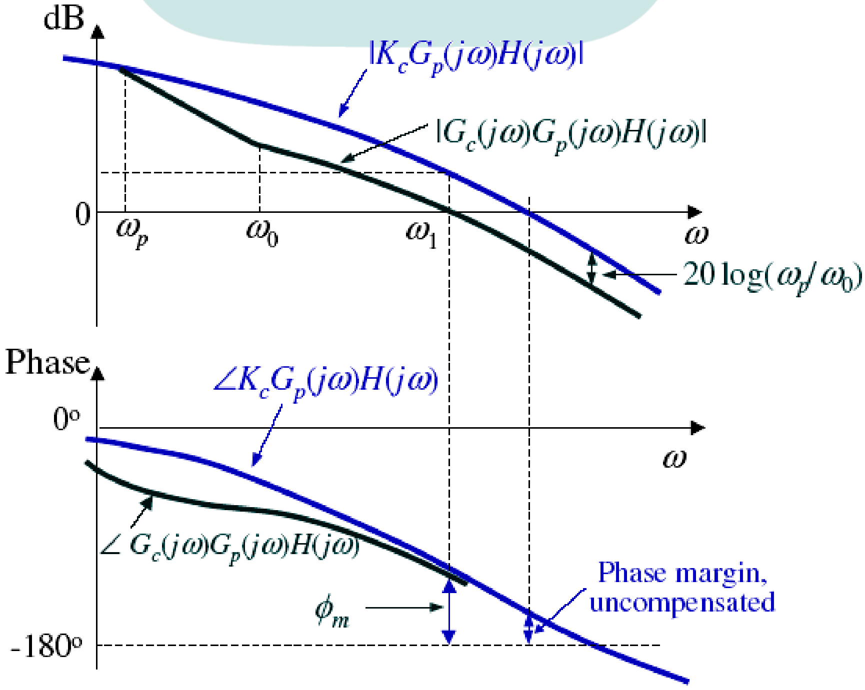
یافتن فرکانس متناظر با حاشیه فاز مطلوب



اثر افزودن بهره K_C روی نمودار اندازه و زاویه بود



اثر افزودن صفر و قطب جبرانساز Lag روی نمودار بود



- جبرانساز Lead

$$G_c(s)=K_C\frac{1+\tau s}{1+\tau\alpha s}=\frac{K_C}{\alpha}.\frac{s+\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\alpha\tau}}=\frac{K_C}{\alpha}.\frac{s+z}{s+P} \qquad , \quad \alpha<1$$

۱- بهره K_C جبرانساز را طوری تنظیم کنید که ثابت‌های خطا برآورده شوند.

۲- حد فاز سیستم جبرانسازی نشده را هنگامی که ثابت‌های خطا برآورده می‌شوند محاسبه کنید.

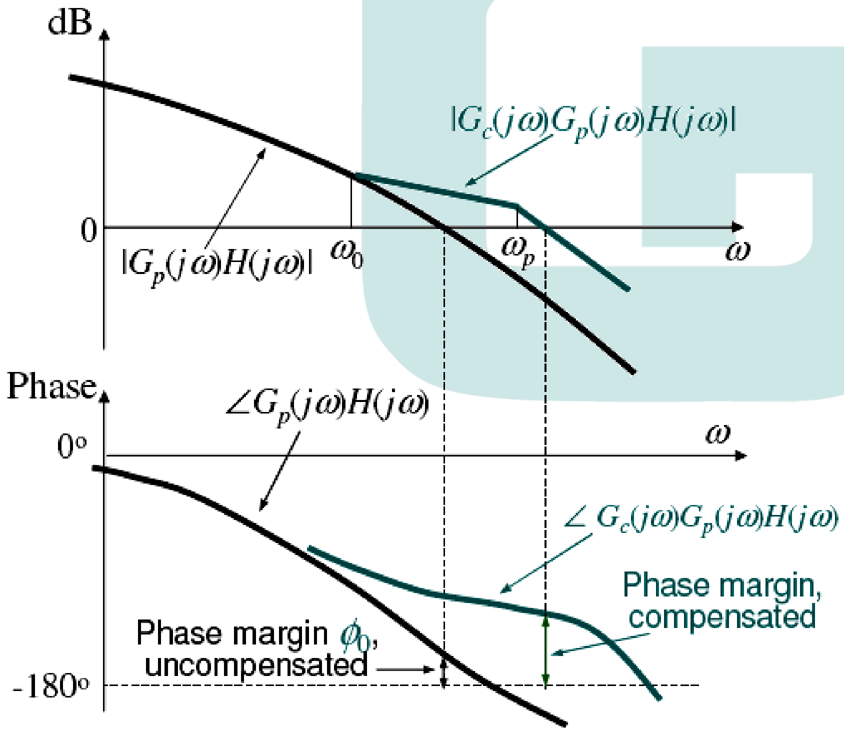
۳- بمنظور داشتن حاشیه امنیت کوچک، تقدم فاز اضافی لازم ϕ_m را معین نمایید.

۴- α را از معادله $\sin\phi_m=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ بدست آورید.

۵- $10.\log\alpha$ را محاسبه کنید و فرکانسی را که منحنی اندازه جبرانسازی نشده برابر $10.\log\alpha$ است به دست آورید. چون شبکه جبرانسازی بهره $10.\log\alpha$ را در ω_m فراهم می‌سازد، این فرکانس، بطور همزمان فرکانس تقاطع $0dB$ جدید ω_m و است.

۶- مقدار $\tau=\frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}$ را محاسبه نمایید.

۷- پاسخ فرکانس جبرانسازی را رسم کنید. حد فاز حاصل را چک نمایید و در صورت لزوم مراحل را تکرار کنید. برای یک طراحی قابل قبول، بهره تقویت کننده را افزایش دهید تا تضعیف $\frac{1}{\alpha}$ حاصل شود.



مثال: یک سیستم کنترل دارای تابع تبدیل حلقه $GH(s)=\frac{K}{s(s+2)}$ است . یک جبرانساز پیش‌فاز طراحی نمایید بطوریکه خطای حالت دائمی به ورودی شیب برابر 5% اندازه ورودی و حاشیه فاز حداقل 45° درجه باشد.

$$K_v=\lim sK_C\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}GH(s) \qquad \text{و} \qquad K_v=\frac{A}{e_{ss}}=\frac{A}{0.05A}=20$$

$$=\frac{K_C}{2}\Rightarrow K_C=40$$

با توجه به منحنی زاویه حد فاز جبرانسازی نشده برابر است با : $\phi_0=18^\circ$

لذا جبرانساز باید طوری طراحی شود که حد فاز در نقطه تقاطع جدید ($0-dB$) به 45 درجه افزایش یابد یعنی حداکثر تقدم فاز $45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$ لازم است. که با رعایت حاشیه امنیتی ۱۰٪ می‌توان $\phi_m = 30^\circ$ را انتخاب نمود.

$$\sin 30^\circ = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 1/3$$

حداکثر تقدم فاز در فرکانس ω_m رخ می‌دهد و این فرکانس طوری انتخاب می‌شود که فرکانس تقاطع جدید و ω_m بر هم منطبق شوند.

$$10.\log \alpha = 10 \log 1/3 = -4.8dB$$

فرکانس $\omega_m = 8.4$ بدست می‌آید. لذا داریم:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_m} = 0.2$$

خلاصه فرمول های سیستمهای کنترل خطی

Some Laplace transforms

$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t\,1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{m!}t^m 1(t)$	$\frac{1}{s^{m+1}}$
$\exp(-at)1(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\sin(\omega t)1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$f(t-T) \leftrightarrow e^{-sT}F(s)$

$e^{-\alpha t}f(t) \leftrightarrow F(s+\alpha)$

Laplace transform theorems

If $f(t) \leftrightarrow F(s)$, then

$$f(t)*g(t) \leftrightarrow F(s)G(s)$$

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s)-f(0-)$$

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2F(s)-sf(0-)-\dot{f}(0-)$$

$$\int_{0-}^{t} f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

IVT $\quad f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

FVT $\quad \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$ provided all poles of $sF(s)$ have negative real part.

Simplified form of Mason's gain rule

$$G(s) = \frac{\sum \text{path TFs}}{1-\sum \text{loop TFs}}$$

For complex poles at $s=-\sigma \pm j\omega_d$,

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2+\omega_d^2}, \quad \varsigma = \sigma/\omega_n$$

$$\sigma = \varsigma\omega_n, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}$$

where ω_n is the undamped natural frequency and ς is the damping ratio. The associated quadratic factor is

$$s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2$$

For the second order system with transfer function

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2},$$

$t_r \approx \frac{\pi-\beta}{\omega_d}$ sec, where $\beta = \tan^{-1}(\omega_d/\sigma)$

$t_p = \pi/\omega_d$

$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\varsigma/\sqrt{1-\varsigma^2})\pi}$

$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\varsigma\omega_n}$ (2%)

A *necessary* condition for all roots of the polynomial

$a(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2}+\ldots+a_n, \; a_0>0$

to have negative real part is $a_i>0$, all i.

A *necessary and sufficient* condition is given by the Routh array:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	.....
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	.....
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	.....	
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	.....	
.....	.....	.....	.....		
s	*				
1	*				

where

$$b_1 = \frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}, \; b_2 = \frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}, \text{ etc}$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1}, \; c_2 = \frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1}, \text{ etc}$$

The number of sign changes in the first column is equal to the number of roots with real part positive. Special cases (1) When the first entry in a row is zero (and the entire row is not zero), replace the zero with $\varepsilon = 0+$ and (2) When an entire row is zero, replace it with the derivative of the row above.

A unity feedback system with feedforward transfer function $G(s)$ is 'type k' if $G(s)$ has k poles at the origin.

The static position, velocity and acceleration error constants are

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s), \; K_v = \lim_{s\to 0} sG(s), \; K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s).$$

For a unit step, unit ramp and unit parabolic input, the steady state error ε_{ss} is equal to

$$\frac{1}{1+K_p}, \; \frac{1}{K_v} \text{ and } \frac{1}{K_a}.$$

Type 0, type 1 and type 2 systems have a finite ε_{ss} in response to step, ramp and parabolic inputs respectively.

For the characteristic equation

$$1+G(s)H(s) = 1+K\frac{A(s)}{B(s)} = 0,$$

where $G(s)H(s)$ has n poles and m zeroes ($n \geq m$), the root locus is the locus of roots for positive K. A point $s = s_0$ is on the locus if and only if $\angle G(s_0)H(s_0) = 180° \pm l360°$.

The steps in drawing a root locus are:

1. Mark poles and zeroes of $G(s)H(s)$.
2. Draw the locus on the real axis to the left of an odd number of real axis poles plus zeroes.
3. Draw the asymptotes. The centroid is given by
$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$
and the angles of the asymptotes by
$$\phi_a = \frac{180^o + 360^o l}{n-m}, l = 0, \ 1,2,\ldots$$
4. Find breakaway and break-in points by solving
$$B(s)A'(s) = A(s)B'(s)$$
5. Calculate departure angles from poles and arrival angles at zeroes by considering a point on the root locus infinitesimally close to the pole or zero.
6. Calculate imaginary axis crossings using the characteristic equation and substituting $s = j\omega$ or using the Routh criterion.

The value of K at a point $s = s_0$ on the locus can be found from $|G(s_0)H(s_0)| = 1$.

Lead and lag compensators have transfer functions of the form

$$K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$$

with $0 < \alpha < 1$ for a lead compensator and $\alpha > 1$ for a lag compensator.

For a system with open loop transfer function, $G(s)H(s)$ the Nyquist stability criterion is

$$Z = N + P$$

where Z = number of zeroes of $1 + G(s)H(s)$ in the RHP, N = number of clockwise encirclements of the (-1,0) point, and P = number of poles of $G(s)H(s)$ in the RHP.

Suppose $G(s)$ is the open loop transfer function of a unity feedback system. The gain margin is the inverse of $|G(j\omega)|$ at the phase crossover frequency (when $\angle G(j\omega) = -180°$). The phase margin is the angle by which $\angle G(j\omega)$ exceeds $-180°$ at the gain crossover frequency (when $|KG(j\omega)| = 1$ or 0 dB).

For the lead (lag) compensator

$$D(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}, \quad \alpha < 1$$

The max (min) phase ϕ_{max} occurs at frequency ω_{max}, where

$$\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

$$\sin\phi_{max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \quad \alpha = \frac{1-\sin\phi_{max}}{1+\sin\phi_{max}}$$

The state space equations for a LTI system are

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{Cx} + Du$$

and the transfer function is

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

The eigenvalues of A are the characteristic roots (poles) of the system and are found by solving

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$$

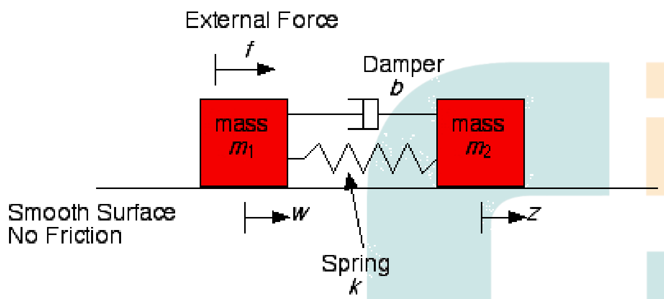
۱- اگر سیگنال تحریک $r(t)=(1+\cos(3))u(t)$ باشد، آیا سیستمی با رابطه زیر در پاسخ به این تحریک به یک حالت پایدار می‌رسد؟ اگر پاسخ مثبت است، مقدار $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ چقدر است.

$$Y(s)=\frac{s^2+9}{s^2+4s+3}R(s)$$

۲- پاسخ ضربه سیستم زیر را به دست آورید.

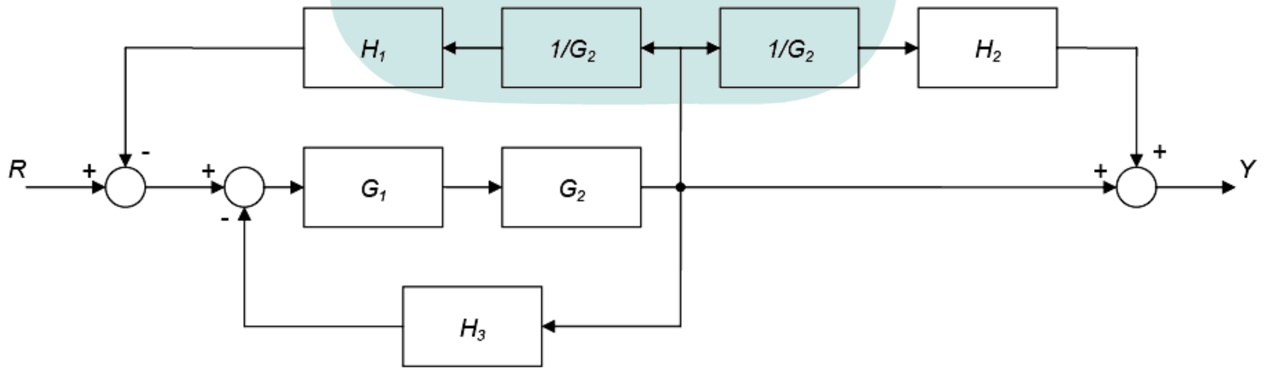
$$H(s)=e^{-5s}\frac{1}{s^2+4s+7}$$

۳- در سیستم مکانیکی زیر تابع تبدیل بین ورودی f و خروجی z را به دست آورید.

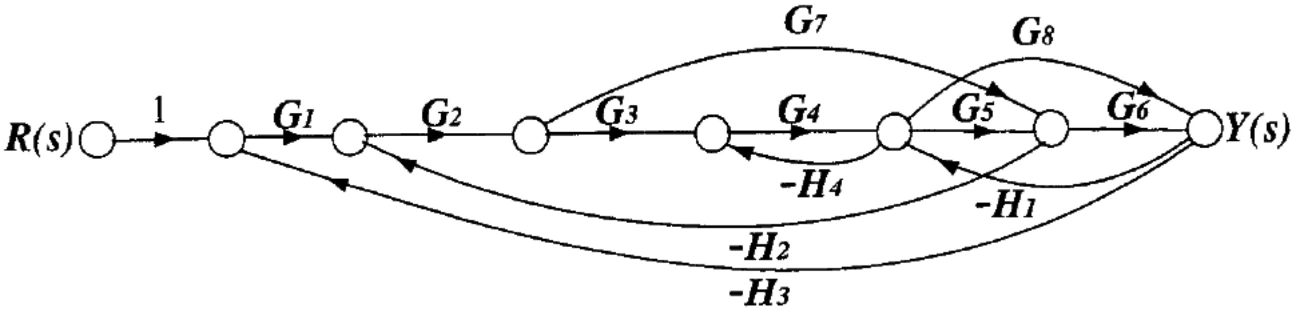


۴- در بلوک دیاگرام شکل زیر نشان دهید تابع تبدیل از ورودی R به خروجی Y از رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{Y}{R}=\frac{G_1G_2+G_1H_2}{1+G_1G_2H_3+G_1H_1}$$

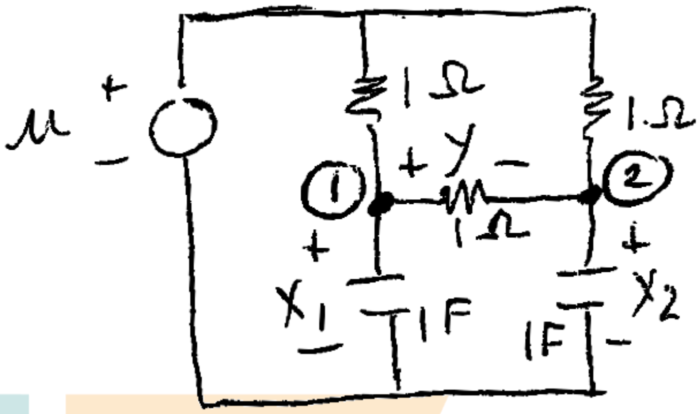


۵- تابع تبدیل سیستمی را که با گراف signal-flow زیر بیان شده است، به دست آورید.



۶- در مدار شکل زیر با استفاده از متغیرهای حالت و خروجی نشان داده شده، مدل فضای حالت سیستم را بیابید. (u ورودی، x_1 و x_2 متغیرهای حالت و y خروجی سیستم است)

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx + Du$$ و $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



u

با فرض اینکه $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ ، $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x + u$ تابع تبدیل $\dfrac{Y(s)}{U(s)}$ را به دست آورید.

۱- پاسخ پله مربوط به تابع انتقال زیر را بیابید.

$$H(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

۲- معادلات حرکت برای موتور DC بصورت زیر می‌باشد:

$$J_m\ddot{\theta}_m + (b + \frac{k_t k_e}{R_a})\dot{\theta}_m = \frac{k_t}{R_a} v_a$$

که در آن $R_a = 10\Omega$ ،$k_t = 0.02 N.m/A$ ،$k_e = 0.02 V.\sec$ ،$b = 0.001 N.m.\sec$ و $J_m = 0.01 Kg.m^2$

الف) تابع انتقال بین ولتاژ v_a و سرعت موتور $\dot{\theta}_m$ را بدست آورید.

ب) حالت پایدار سرعت موتور پس از $v_a = 10V$ چقدر خواهد بود؟

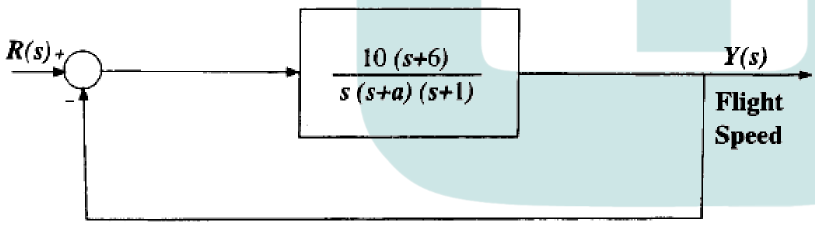
ج) تابع انتقال بین ولتاژ v_a و زاویه شتاب θ_m را بدست آورید.

د) فرض کنید در قسمت قبل یک فیدبک به سیستم اضافه شود و سیستم را بنحوی تغییر دهد که رابطه ولتاژ آن بصورت $v_a = k(\theta_r - \theta_m)$ درآید. در صورتی که k بهره فیدبک باشد تابع انتقال بین θ_r و θ_m را بدست آورید.

هـ) مقدار ماکزیمم k را در شرایطی بدست آورید که $MP < 20\%$ باشد.

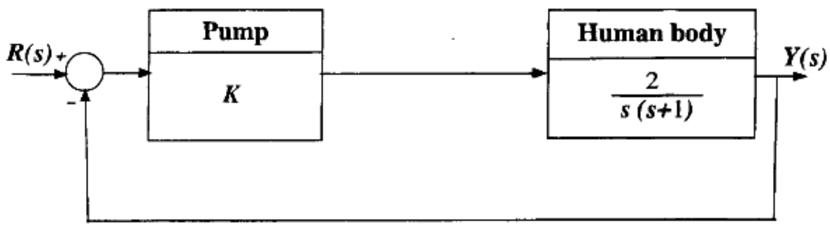
و) زمان صعود کمتر از ٤ ثانیه به ازای چه مقدار k حاصل می‌شود؟ (محدودیت MP را در نظر نگیرید)

۳- مدل کنترل سرعت هواپیما بصورت زیر نشان داده شده است:



حساسیت تابع انتقال حلقه بسته $T(s)$ به تغییرات پارامتر a را بدست آورید.

٤- سیستم اتوماتیک تزریق انسولین برای کنترل میزان قندخون در افراد دچار بیماری دیابت بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:



الف) مقدار k را بنحوی تعیین کنید که مقدار Overshoot برابر ٪۷ شود.

ب) برای k بدست آمده در قسمت الف t_s را بدست آورید.

٥- تابع انتقال حلقه باز یک سیستم کنترلی با فیدبک واحد بصورت زیر می‌باشد:

$$G(s) = \frac{A}{s(s+a)}$$

الف) حساسیت تابع انتقال حلقه بسته به تغییرات پارامتر A را محاسبه کنید.

ب) حساسیت تابع انتقال حلقه بسته به تغییرات پارامتر a را محاسبه کنید.

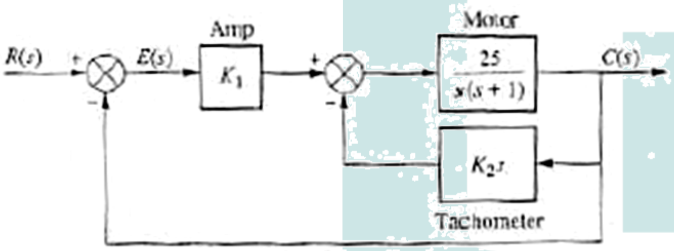
ج) اگر بهره فیدبک واحد به $\beta \neq 1$ تغییر کند، حساسیت تابع انتقال حلقه بسته را نسبت به β محاسبه کنید.

٦- فرض کنید $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(5s+1)}$

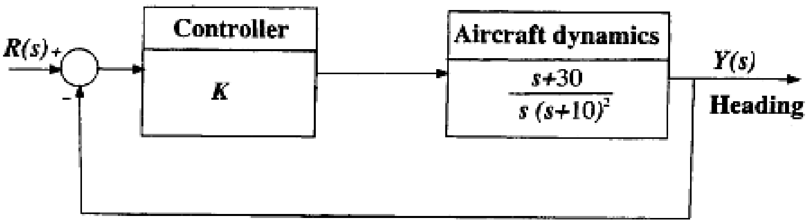
الف) اگر در سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد از کنترل کننده PD استفاده شود، نوع سیستم، ثابت خطای مکان و خطای حالت دائمی به ورودی پله واحد را بدست آورید. $k_D = 4$ $k_P = 19$

الف) اگر در سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد از کنترل کننده PID استفاده شود، نوع سیستم، ثابت خطای مکان و شیب و خطای حالت دائمی به ورودی پله واحد و ورودی شیب را بدست آورید.. $k_D = 4$ $k_I = 9.5$ $k_P = 19$

٧- در شکل زیر، مقادیر k_1 و k_2 را بگونه‌ای بدست آورید که مقدار Overshoot برابر ٢٥٪ و زمان نشست برابر ٠,٢ ثانیه باشد.



۱- مدل یک هواپیمای جت به همراه کنترلر و فیدبک واحد در بلوک دیاگرام شکل زیر نشان داده شده است. ماکزیمم بهره K برای پایداری را معین کنید.



۲- الف) وضعیت پایداری مربوط به چند جمله‌ای زیر را مشخص کنید. $s^4+s^3+3s^2+2s+1$

ب) چند جمله‌ای زیر چه تعداد ریشه در نیمه راست صفحه S دارد؟ $s^4+s^3+2s^2+s+5$

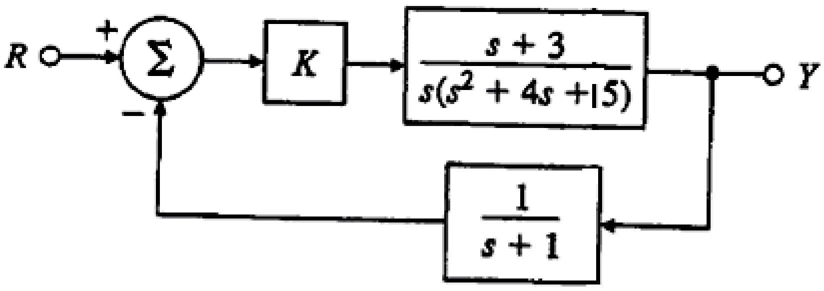
۳- معیار راث را طوری تغییر دهید که همه قطبها سمت چپ محور $s=-\alpha$ ($\alpha>0$) قرار گیرند. تست راث تغییر داده شده را برای چند جمله‌ای $s^3+(6+k)s^2+(5+6k)s+5k$ بکار برید و مقادیر k را که به ازای آنها قسمت حقیقی همه قطبها کمتر از $-\frac{1}{2}$ باشد را بیابید.

۴- سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $kG(s)H(s)=\dfrac{k(s+1)}{s^2(s+9)}$ را در نظر بگیرید. مکان ریشه‌های سیستم حلقه بسته را رسم نمایید.

۵- . مکان ریشه‌های سیستم کنترل با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)=\dfrac{k(s^2+0.1)}{s(s^2+1)}$ را رسم نمایید.

۶- مکان ریشه‌های حلقه بسته سیستمی با تابع تبدیل $\dfrac{k(s-1)(s^2+2s+2)}{s(s+3)(s^2+4s+5)}$ و فیدبک منفی واحد را برای $k>0$ رسم نمایید. آیا چنین سیستمی قابل پایدارسازی است.

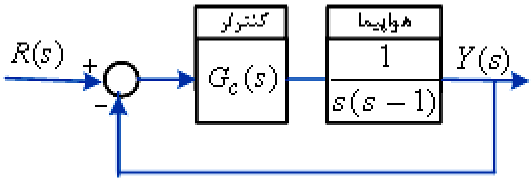
۷- سیستمی با بلوک دیاگرام شکل زیر را در نظر بگیرید.



الف) معادله مشخصه سیستم حلقه بسته را به دست آورید.

ب) با استفاده از معیار پایداری راث-هورویتز، محدوده K را برای پایداری سیستم حلقه بسته به دست آورید.

۸- سیستم کنترل هواپیمای جت مطابق بلوک دیاگرام شکل زیر داده شده است. فرض کنید $G_c(s)=\frac{k(s+2)}{s+9}$ باشد. نمودار مکان هندسی ریشه‌ها را رسم کنید.



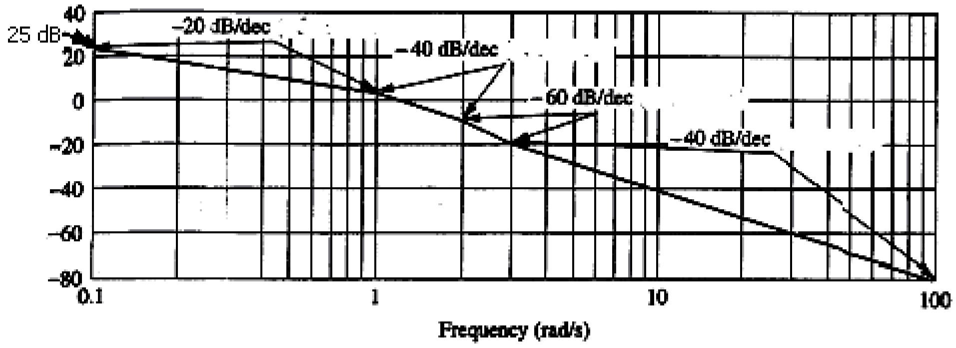
۹- سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\frac{K}{s\left[(s+1)^2+4\right]}$ را در نظر بگیرید

الف) مکان ریشه های سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد را رسم نمایید.

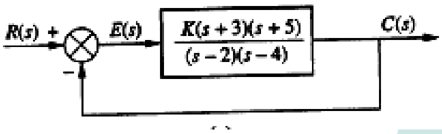
ب) محل تقاطع مکان ریشه ها با محور $j\omega$ و مقدار K در این نقطه را بیابید.

ج) به ازای چه مقداری از K سیستم حلقه بسته پایدار مرزی خواهد بود (توضیح دهید).

۱- شکل زیر نمودار اندازه بود سیستمی را نشان می دهد. تابع تبدیل آن را بیابید.



۲- در سیستمی با بلوک دیاگرام شکل زیر



۲-۱- نمودار نایکوئیست آن را به ازای $K=1$ رسم نمایید.

۲-۲- پایداری سیستم را به ازای $K=1$ بررسی نمایید.

۲-۳- محدوده K را برای پایداری حلقه بسته تعیین کنید.

۳- در کنترل فرآیندی با تابع تبدیل $G(s)=\dfrac{1}{s^2+0.6s+9}$ از یک کنترل کننده Lead-Lead به فرم $C(s)=100\dfrac{(s+2)^2}{(s+4)(s+10)}$ استفاده می‌شود. نمودار بود تابع تبدیل حلقه $G(s)C(s)$ را رسم کنید.

۴- تابع تبدیل مفروض است:

$$P(s) = \frac{s-2}{(s+3)(s^2+2s+17)}$$

۴-۱- نمودار بود تقریبی (اندازه و فاز) فرآیند زیر را رسم نمایید.

۴-۲- نمودار نیکولز آن را نیز رسم نمایید.

۴-۳- حاشیه فاز و حاشیه بهره تقریبی را روی نمودار بود و نیکولز مشخص کنید.

۴-۴- بندهای ۴-۱ تا ۴-۳ را با نرم‌افزار MATLAB نیز انجام دهید.

۵- تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $G(s)=\dfrac{k}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$ است.

۵-۱- مکان ریشه های سیسستم حلقه بسته با فیدبک واحد را به صورت تقریبی رسم نمایید.

۵-۲- نمودار بود را به ازای $k=1$ رسم نمایید.

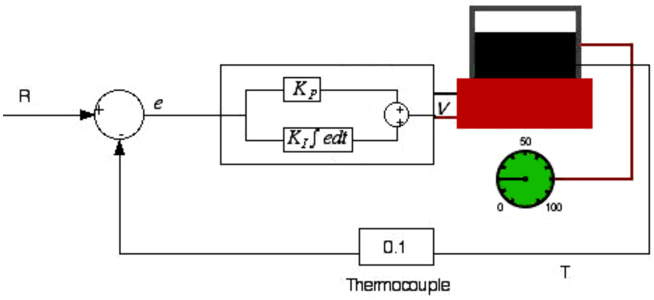
۵-۳- چارت نیکولز را به ازای $k=1$ رسم نمایید.

۵-۴- حد بهره و حد فاز را محاسبه و روی نمودار بود مشخص نمایید.

۵-۵- نمودار نایکوئیست را به ازای $k=5$ رسم نمایید.

۵-۶- با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست پایداری حلقه بسته را بررسی نمایید.

۱- در یک فرآیند حرارتی بلوک دیاگرام حلقه بسته به صورت زیر است. با فرض اینکه توان گرمایی گرمکن $20\times V(Watt)$، ظرفیت گرمایی مایع $C=60\left(\frac{Watt}{^\circ C}\right)$ و مقاومت حرارتی بدنه تانک $R=0.2\left(\frac{^\circ C}{Watt}\right)$ باشد.



۱-۱- ثابت کنید: $\dot{T}=-\frac{1}{12}T+\frac{1}{3}V$ که در آن T اختلاف دمای تانک با محیط است.

۱-۲- تابع تبدیل $\frac{T}{V}$ را بیابید.

۱-۳- پارامترهای کنترل کننده PI را طوری بیابید که بیشینه فراجهش کمتر از ٪۵ و زمان نشست برابر ۲ ثانیه شود.

۱-۴- پاسخ زمانی سیستم را به ازای بهره تناسبی $K_p=5$، بهره انتگرالی $K_I=0$ و سیگنال مرجع $R=5$ volts محاسبه و رسم نمایید.

۱-۵- خطای حالت دائمی سیستم حلقه بسته به ورودی پله را محاسبه کنید.

۲- تابع تبدیل سیستمی با فیدبک واحد به صورت $G(s)=\frac{1}{s(s+7)}$ است. می خواهیم کنترل کننده $G_c(s)=\frac{K(s+a)}{s+b}$ را برای انتقال قطبهای غالب حلقه بسته به محل $-7\pm j13.66$ طراحی نماییم.

۲-۱- مقدار $a=3$ را انتخاب کنید و محل قطب جبرانساز را بیابید.

۲-۲- بهره K را محاسبه کنید.

۲-۳- خطای حالت دائمی به ورودی پله واحد را به دست آورید.

۳- تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارتست از:

$$G(s)=\frac{0.2}{s(s+1)}$$

برای دستیابی به مشخصه‌های عملکردی مطلوب ثابت خطای سرعت $K_v=15$ و حاشیه فاز $P.M.=45^\circ$ جبرانساز مناسب طراحی کنید.

۴- تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارتست از:

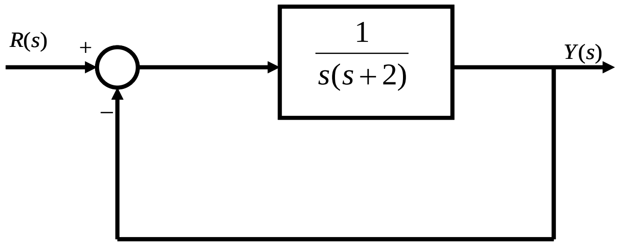
$$G(s)=\frac{450}{s(s+5)(s+40)}$$

برای دستیابی به مشخصه‌های عملکردی مطلوب ثابت خطای سرعت $K_v=22.5$، حاشیه فاز $P.M.=45^\circ$ و حاشیه بهره $G.M=15dB$ جبرانساز مناسب طراحی کنید.

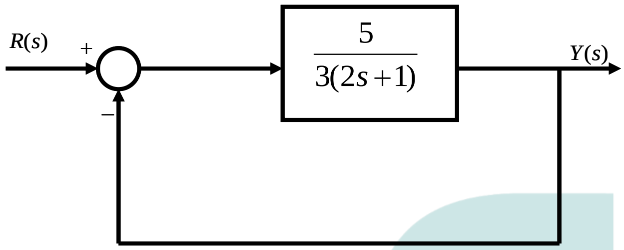
آزمون پایان ترم سیستمهای کنترل خطی

سال ۱۳۸۶

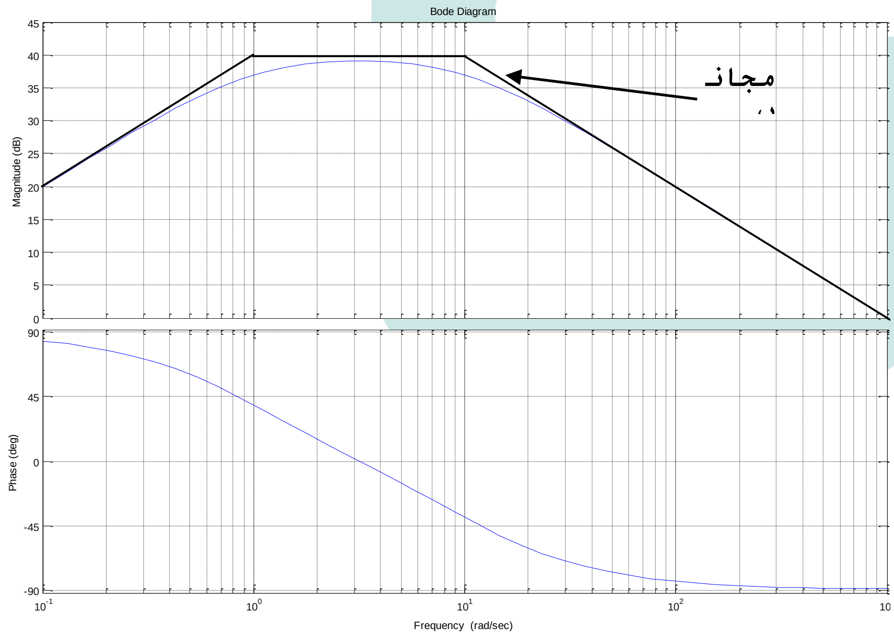
۱- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته زیر را به ورودی پله واحد محاسبه و رسم نمایید.



۲- در سیستم حلقه بسته شکل زیر دامنه خروجی در پاسخ به ورودی $\sin(t)$ را محاسبه نمایید.



۳- دیاگرام بود یک سیستم کنترل در شکل زیر نشان داده شده است،



الف) تابع تبدیل سیستم ($G(s)$) را به دست آورید.

ب) نمودار نیکولز این سیستم (تغییرات اندازه dB بر حسب فاز deg) را رسم نمایید.

۴- در سیستم کنترل با تابع تبدیل $G(s)=\dfrac{1}{s(s+2)}$، در صورتیکه جبرانساز lag با تابع تبدیل $G_c(s)=\dfrac{5(s+0.1)}{s+0.0125}$ انتخاب گردد،

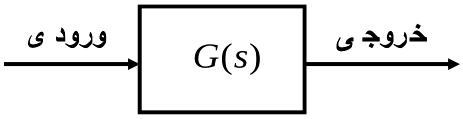
الف) مکان ریشه های سیسستم جبران نشده را به صورت تقریبی رسم نمایید.

ب) مکانهای $\xi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\omega_n=2\sqrt{2}$ را روی نمودار مکان ریشه ها رسم کنید.

ج) خطای حالت دائمی سیستم حلقه بسته به ورودی شیب را به دست آورید.

د) ضریب میرایی سیستم حلقه بسته چقدر خواهد بود.

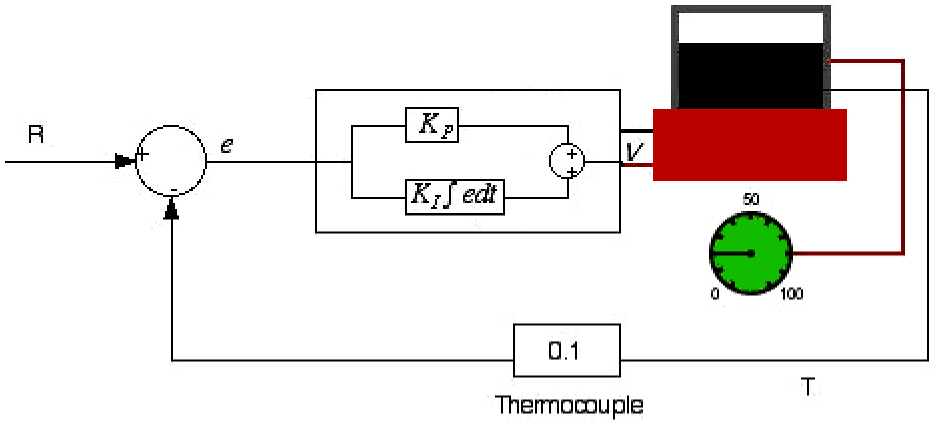
۵- در عمل تابع تبدیل برخی سیستمها ناشناخته است و با اعمال ورودی مناسب و ثبت پاسخ به آن ورودی می توان تابع تبدیل سیستم را به دست آورد. توضیح دهید در دو حالت زیر چگونه می توان تابع تبدیل را به دست آورد؟



الف) با فرض آنکه سیستم دارای ۲ قطب و فاقد صفر باشد.

ب) با فرض آنکه تعداد صفر و قطبهای سیستم نامعلوم باشد.

۶- در یک فرآیند حرارتی بلوک دیاگرام حلقه بسته به صورت زیر است. با فرض اینکه توان گرمایی گرمکن $20V(Watt)$، ظرفیت گرمایی مایع $C = 60\left(\frac{Watt}{^\circ C}\right)$ و مقاومت حرارتی بدنه تانک $R = 0.2\left(\frac{^\circ C}{Watt}\right)$ باشد.



الف) ثابت کنید: $\dot{T} = -\frac{1}{12}T + \frac{1}{3}V$ که در آن T اختلاف دمای تانک با محیط است.

ب) تابع تبدیل $\frac{T}{V}$ را بیابید.

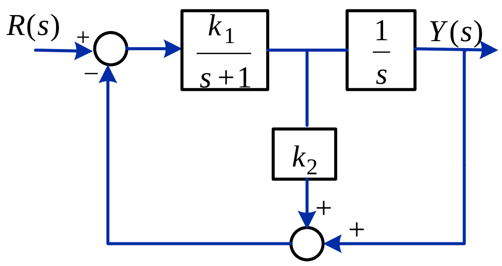
ج) پارامترهای کنترل کننده را طوری بیابید که بیشینه فراجهش کمتر از ٪۵ و زمان نشست برابر ۲ ثانیه شود.

د) خطای حالت دائمی سیستم حلقه بسته به ورودی پله را محاسبه کنید.

آزمون پایان ترم سیستمهای کنترل خطی

سال ۱۳۸۷

۱- یک سیستم کنترل حلقه بسته دارای ساختاری مطابق شکل ۱ است.



(شکل ۱)

$$T(s)=\frac{k_1}{s^2+(1+k_1k_2)s+k_1}$$

(رابطه ۱)

۱-۱) با استفاده از فرمول بهره میسون نشان دهید تابع تبدیل حلقه بسته به صورت رابطه ۱ است. (۱ نمره)

۱-۲) بهره k_1 و k_2 را طوری انتخاب کنید که پاسخ حلقه بسته به ورودی پله دارای فراجهش 10% و زمان نشست $\frac{2}{3}$ ثانیه باشد. (۱ نمره)

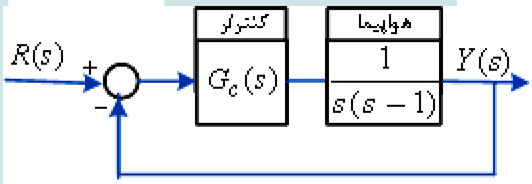
۱-۳) خطای حالت دائمی به ورودی پله را محاسبه نمایید. (۰,۵ نمره)

۱-۴) پاسخ به ورودی پله در مرحله (۱-۲) را رسم نمایید. (۱ نمره)

۱-۵) حساسیت تابع حلقه‌بسته نسبت به تغییر پارامتر k_2 را در فرکانس پایین و بالا به دست آورید. (۱ نمره)

۱-۶) در مساله بند ۱-۵ به ازای $k_1=100$ و $k_2=1$ نمودار تابع حساسیت $S_{k_2}^{T}$ بر حسب فرکانس را رسم کنید. (۱ نمره)

۲- سیستم کنترل هواپیمای جت مطابق بلوک دیاگرام شکل ۴ داده شده است.



(شکل ۴)

۲-۱) فرض کنید $G_c(s)=\frac{k(s+2)}{s+10}$ باشد. در اینصورت ناحیه پایداری سیستم حلقه بسته را با استفاده از معیار راث-هورویتز به دست آورید. (۱ نمره)

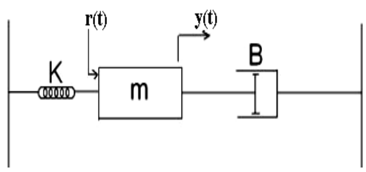
۲-۲) جبرانساز $G_c(s)=\frac{k(s+z)}{s+p}$ را طوری طراحی کنید که قطبهای مطلوب حلقه بسته در محل $-3\pm j4$ قرار گیرند و ثابت خطای شیب بیشتر از 10 باشد. (۲ نمره)

۲-۳) نشان دهید رفتار جبرانساز طراحی شده در بند (۲-۲) مشابه رفتار یک کنترل کننده PD است. ضرایب K_p و K_d کنترل کننده PD را برای تامین اهداف بند (۲-۲) محاسبه نمایید. (۱ نمره)

۳- یک سیستم جرم-فنر-ضربه‌گیر مطابق شکل ۲-الف را در نظر بگیرید.

۳-۱) نشان دهید تابع تبدیل سیستم $G(s)=Y(s)/R(s)$ به صورت رابطه ۲ خواهد بود. (۱ نمره)

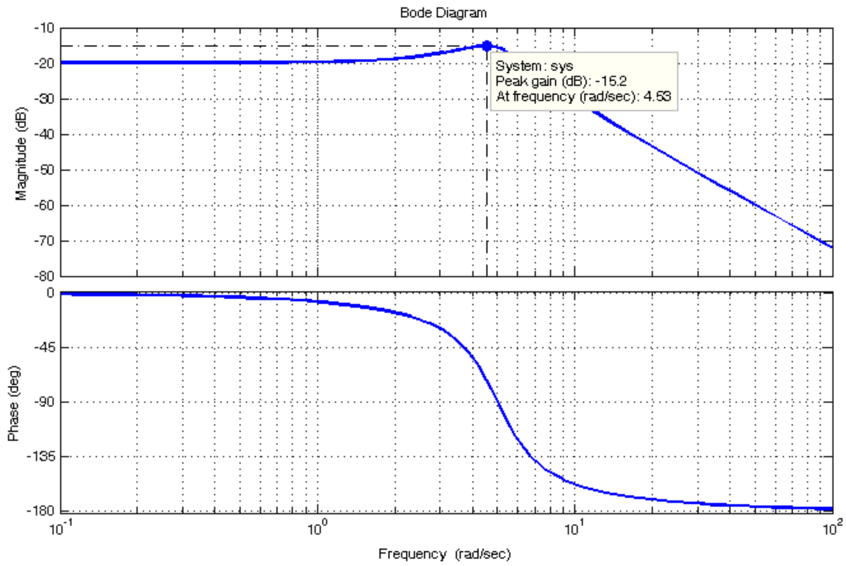
۳-۲) نمودار بود این سیستم به روش تجربی و با اعمال ورودی سینوسی مطابق شکل ۲-ب به دست آمده است. مقادیر عددی m، B و K را به دست آورید. (۱ نمره)



(شکل ۲ –الف)

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + Bs + K}$$

(رابطه ۲)



(شکل ۲ –ب)

۴- تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $G(s) = \dfrac{K}{s(0.5s+1)^2}$ است.

۴-۱) مکان ریشه های سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد را به صورت تقریبی رسم نمایید. (۱ نمره)

۴-۲) نمودار بود را به ازای $k = 10$ رسم نمایید. (۱,۵ نمره)

۴-۳) چارت نیکولز را به ازای $k = 10$ رسم نمایید و حد بهره و حد فاز را روی آن مشخص نمایید.. (۱ نمره)

۴-۴) نمودار نایکوئیست را به ازای $k = 5$ رسم نمایید. (۱,۵ نمره)

۴-۵) با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست پایداری حلقه بسته را به ازای $k = 5$ بررسی نمایید. (۰,۵ نمره)

آزمون پایان ترم سیستمهای کنترل خطی

سال ۱۳۸۸

۱- تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی به صورت $T(s)=\dfrac{k_1}{s^2+(1+k_1k_2)s+k_1}$ است.

۱-۱) بهره k_1 و k_2 را طوری انتخاب کنید که پاسخ حلقه بسته به ورودی پله دارای فراجهش 10% و زمان نشست $\dfrac{2}{3}$ ثانیه باشد. (۱ نمره)

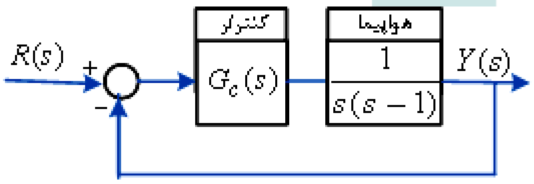
۱-۲) خطای حالت دائمی به ورودی پله را محاسبه نمایید. (۱ نمره)

۱-۳) با استفاده از نتایج مراحل قبل پاسخ سیستم به ورودی پله را رسم نمایید. (۱ نمره)

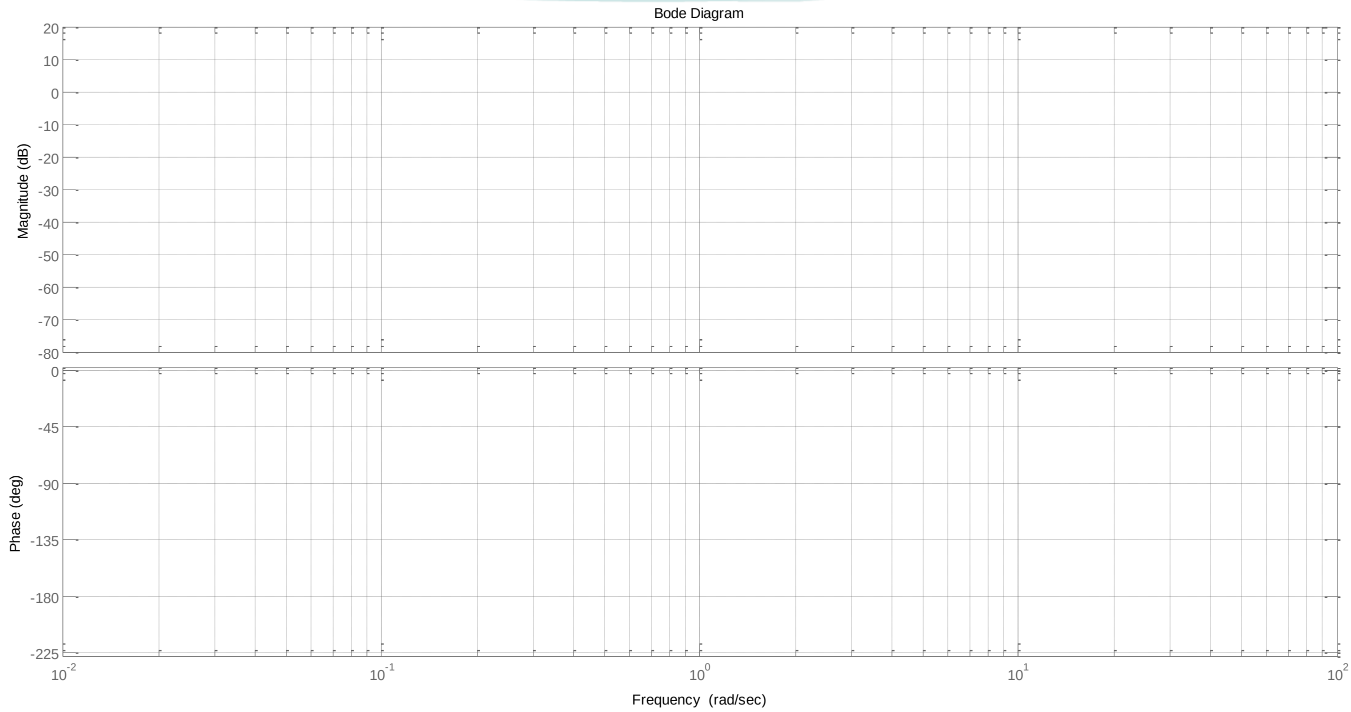
۱-۴) حساسیت تابع تبدیل حلقه‌بسته نسبت به تغییر پارامتر k_1 را در فرکانسهای پایین به دست آورید. (۱ نمره)

۲- سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $kG(s)H(s)=\dfrac{k(s+1)}{(s-1)^2(s+9)}$ را در نظر بگیرید. مکان ریشه‌های سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد را رسم نمایید. (۲ نمره)

۳- سیستم کنترل هواپیمای جت مطابق بلوک دیاگرام شکل زیر داده شده است. جبرانساز $G_c(s)=\dfrac{k(s+z)}{s+p}$ را طوری طراحی کنید که قطبهای مطلوب حلقه بسته در محل $-3\pm j4$ قرار گیرند و ثابت خطای شیب بیشتر از 10 باشد. (۳ نمره)

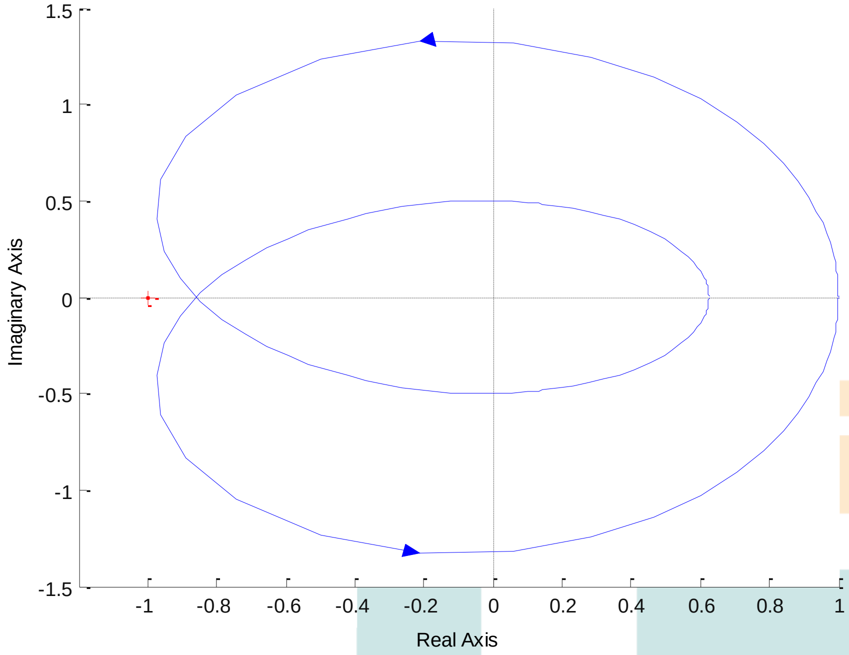


۴- تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $G(s)=\dfrac{(s+2)}{(s+0.2)(s^2+s+1)}$ است. نمودار بود آن را رسم نمایید. (۳ نمره)



۵- نمودار نایکوئیست و چارت نیکولز سیستمی با تابع تبدیل $G(s)=\dfrac{K(s+5)(s^2+s+1)}{(s+2)(s^2-3s+4)}$ به ازای $K=1$ مطابق شکل زیر است.

۵-۱) با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست محدوده K را برای پایداری سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد به دست آورید. (۲ نمره)



۵-۲) حد بهره و حد فاز را روی چارت نیکولز مشخص نمایید و مقادیر آنها را به دست آورید. (۱ نمره)