کنترل مبتنی بر پیش‌بینی مدل

دکتر امیرحسین نیکوفرد

تمرین سری دوم

سید محمد امین غضنفری

شماره دانشجویی: ۴۰۲۰۹۱۰۴

پاییز ۱۴۰۳

فهرست مطالب

۱ سوال اول

دینامیک سیستم داده شده به صورت زیر است.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

همچنین تابع هزینه به صورت زیر تعریف شده است:

$$J = \|x(N)\|^2 + 2\sum_{i=0}^{N-1} \|u(i)\|^2.$$

قیود سیستم:

$$|x(k)| \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad |u(k)| \leq 0.5.$$

سطح کوانتیزه‌سازی برای حالت و ورودی هر دو 0.5 در نظر گرفته شده است.

مسیر حل

برای حل این مسئله از Dynamic Programming به صورت گسسته استفاده می‌کنیم. در این روش، از مرحله نهایی به مرحله اولیه به صورت معکوس حرکت می‌کنیم و در هر مرحله اقدامات کنترلی بهینه را مشخص می‌کنیم. این روش شامل محاسبه تابع هزینه در هر مرحله و یافتن ورودی کنترلی است که تابع هزینه را کمینه کند.
ما از مرحله $k = N - 1$ تا $k = 0$ به صورت معکوس حرکت می‌کنیم. تابع هزینه‌در هر مرحله k به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_k(x(k)) = \min_{u(k)} \left(J_{k+1}(x(k+1)) + 2\|u(k)\|^2 \right),$$

که در آن $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$.
این فرمول هزینه آینده ($J_{k+1}(x(k+1))$) و هزینه کنترلی درلحظه ($2\|u(k)\|^2$) را ترکیب می‌کند. هدف یافتن ورودی کنترلی $u(k)$ است که این هزینه را در هر مرحله کمینه کند.

مرحله $k = 1$: محاسبه معکوس

تابع هزینه در $k = 1$ به صورت زیر است:

$$J_1(x(1)) = \min_{u(1)} \left(\|x(2)\|^2 + 2\|u(1)\|^2 \right),$$

که در آن:

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1).$$

مقادیر کوانتیزه ممکن:

- $x(1) \in \{-0.5, 0, 0.5\}$
- $u(1) \in \{-0.5, 0, 0.5\}$

سطح کوانتیزه‌سازی مسئله را ساده‌تر می‌کند و تعداد مقادیر ممکن برای حالت و ورودی را محدود می‌کند. همچنین با کوچک کردن ناحیه سرچ، به ما اجازه بررسی همه سناریوهای مختلف را می‌دهد.

محاسبات مربوط به مرحله $k = 1$

- برای $x(1) = 0.5$ و $u(1) = -0.5$:

$$x(2) = A \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + B(-0.5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \|x(2)\|^2 = 0.25, \quad 2\|u(1)\|^2 = 2(0.5)^2 = 0.5.$$

هزینه نهایی: $J_1(0.5) = 0.75$.

- برای $x(1) = 0.5$ و $u(1) = 0$:

$$x(2) = A \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + B(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \|x(2)\|^2 = (0.5)^2 + (0.5)^2 = 0.5.$$

هزینه نهایی: $J_1(0.5) = 0.5$.

- برای $x(1) = 0$ و $u(1) = -0.5$:

$$x(2) = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + B(-0.5) = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad \|x(2)\|^2 = (0.5)^2 + (0.5)^2 = 0.5,$$

$$2\|u(1)\|^2 = 0.5.$$

هزینه نهایی: $J_1(0) = 1$.

- برای $x(1) = -0.5$ و $u(1) = 0.5$:

$$x(2) = A \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} + B(0.5) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad \|x(2)\|^2 = 0.25, \quad 2\|u(1)\|^2 = 0.5.$$

هزینه نهایی: $J_1(-0.5) = 0.75$.

جدول محاسبات پویا برای $k=1$

$x(1)$	$u(1)$	$x(2)$	J $J_{k+1}(x(k+1)) + 2\|u(k)\|^2$	J^*	$u^*(1)$
$\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$	0.75	0.75	-0.5
	0	$\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}$	Infeasible		
	0.5	$\begin{bmatrix}1\\1.5\end{bmatrix}$	Infeasible		
$\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	0.5	0.5	$\{-0.5, 0\}$
	0	$\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$	0.5		
	-0.5	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	Infeasible		
$\begin{bmatrix}0.5\\-0.5\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}0\\-0.5\end{bmatrix}$	0.75	0.25	0
	0	$\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix}$	0.25		
	0.5	$\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}$	Infeasible		
$\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}-0.5\\0\end{bmatrix}$	0.75	0.25	0
	0	$\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$	0.25		
	0.5	$\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}$	Infeasible		
$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}-0.5\\-0.5\end{bmatrix}$	1	0	0
	0	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	0		
	0.5	$\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$	1		
$\begin{bmatrix}0\\-0.5\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}-0.5\\-1\end{bmatrix}$	Infeasible	0.25	0
	0	$\begin{bmatrix}0\\-0.5\end{bmatrix}$	0.25		
	0.5	$\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix}$	0.75		

$\begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$	Infeasible	0.25	0
	0	$\begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.25		
	0.5	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	0.75		
$\begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$	Infeasible	0.25	0
	0	$\begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$	0.25		
	0.5	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	0.75		
$\begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$	Infeasible	0.75	0.5
	0	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	Infeasible		
	0.5	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$	0.75		

در ادامه با توجه به مقادیر بهینه به دست آمده در این مرحله که مقادیر آن در جدول بالا قرار دارد، برای $k = 0$ محاسبات را ادامه می‌دهیم. جدول مربوطه در ادامه قرار داده شده است.

جدول محاسبات پویا برای $k = 0$

$x(1)$	$u(1)$	$x(2)$	J $J_{k+1}(x(k+1)) + 2\|u(k)\|^2$	J^*	$u^*(1)$
$\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$	1.25	1.25	-0.5
	0	$\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}$	Infeasible		
	0.5	$\begin{bmatrix}1\\1.5\end{bmatrix}$	Infeasible		
$\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	1	0.5	0
	0	$\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$	0.5		
	-0.5	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	Infeasible		
$\begin{bmatrix}0.5\\-0.5\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}0\\-0.5\end{bmatrix}$	1.25	0.25	0
	0	$\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix}$	0.25		
	0.5	$\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}$	Infeasible		
$\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}-0.5\\0\end{bmatrix}$	1.25	0.25	0
	0	$\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$	0.25		
	0.5	$\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix}$	Infeasible		
$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}-0.5\\-0.5\end{bmatrix}$	1.5	0	0
	0	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	0		
	0.5	$\begin{bmatrix}0.5\\0.5\end{bmatrix}$	1.5		
$\begin{bmatrix}0\\-0.5\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}-0.5\\-1\end{bmatrix}$	Infeasible	0.25	0
	0	$\begin{bmatrix}0\\-0.5\end{bmatrix}$	0.25		
	0.5	$\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix}$	1.25		

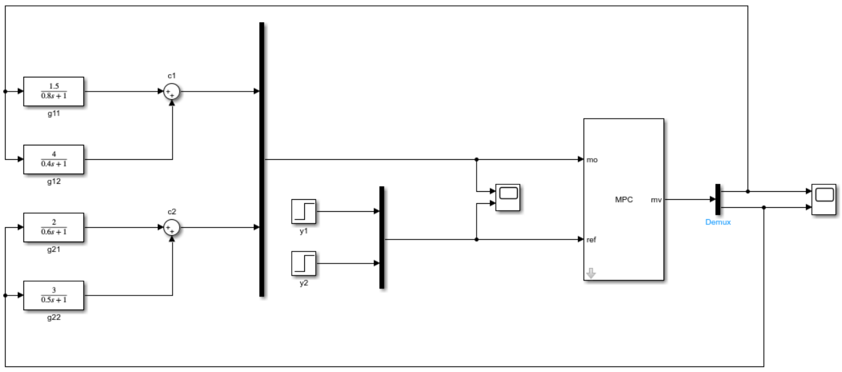
$\begin{bmatrix}-0.5\\0.5\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}-1\\-0.5\end{bmatrix}$	Infeasible	0.25	0
	0	$\begin{bmatrix}-0.5\\0\end{bmatrix}$	0.25		
	0.5	$\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$	1.25		
$\begin{bmatrix}-0.5\\0\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$	Infeasible	0.25	0
	0	$\begin{bmatrix}-0.5\\0\end{bmatrix}$	0.25		
	0.5	$\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$	1.25		
$\begin{bmatrix}-0.5\\-0.5\end{bmatrix}$	-0.5	$\begin{bmatrix}-1\\-1.5\end{bmatrix}$	Infeasible	1.25	0.5
	0	$\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$	Infeasible		
	0.5	$\begin{bmatrix}0\\-0.5\end{bmatrix}$	1.25		

در جدول بالا، تابع هزینه بهینه به ازای هر حالت به دست آمده و سیگنال کنترلی مربوط به آن نیز مشخص شده است.

۲ سوال دوم

۱.۲ بخش اول

برای این سوال ابتدا مدل را در سیمولینک شبیه‌سازی کردیم.



شکل ۱: محیط شبیه‌سازی شده در سیمولینک

در ادامه بلوک کنترلر را با توجه به داده‌های مسئله تنظیم می‌کنیم. پس از تعیین دو ورودی و دو خروجی برای کنترلر، سیگنال‌های مربوطه را انتخاب کرده و به سراغ تنظیم پارامترهای کنترلر می‌رویم. در این مرحله ابتدا قیود مسئله را تعریف می‌کنیم.

Input and Output Constraints

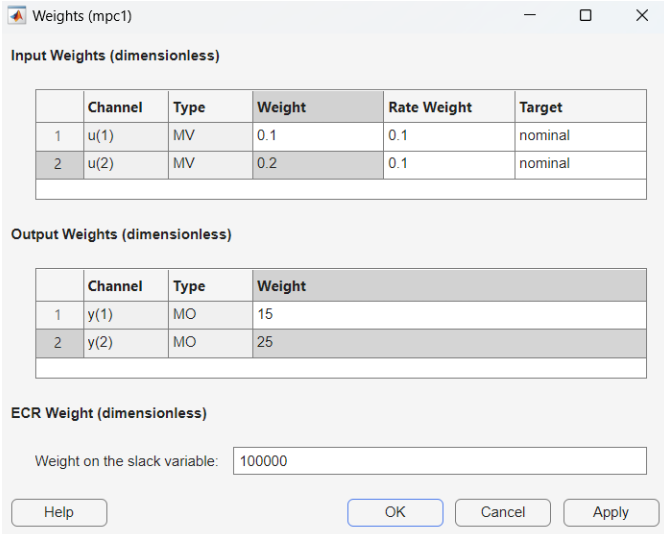
Channel	Type	Min	Max	RateMin	RateMax
▼ Inputs					
u(1)	*MV*	-50	50	-5	5
u(2)	*MV*	-20	20	-3	3
▼ Outputs					
y(1)	*MO*	-15	25		
y(2)	*MO*	-30	40		

Equal Constraint Relaxation (ECR)

Channel	Type	MinECR	MaxECR	RateMinECR	RateMaxECR
▼ Inputs					
u(1)	*MV*	0	0	0	0
u(2)	*MV*	0	0	0	0
▼ Outputs					
y(1)	*MO*	1	1		
y(2)	*MO*	1	1		

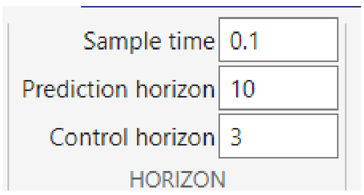
شکل ۲: صفحه مربوط به قیود در کنترلر

سپس وزن‌های داده شده در سوال را در قسمت مربوطه وارد می‌کنیم.



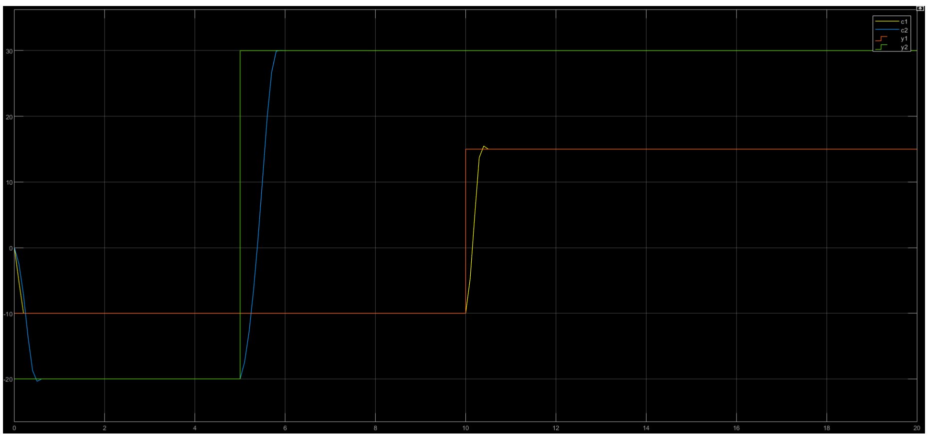
شکل ۳: صفحه مربوط به وزن‌ها در کنترلر

پس از آن، مقادیر مربوط به قیود را انتخاب کرده و عملکرد مدل را بررسی کردیم.



شکل ۴: قسمت مربوط به پارامترهای باقیمانده

در ادامه، نتیجه پارامترهای انتخاب شده را با بررسی اسکوپ قرار داده شده مشاهده می‌کنیم.

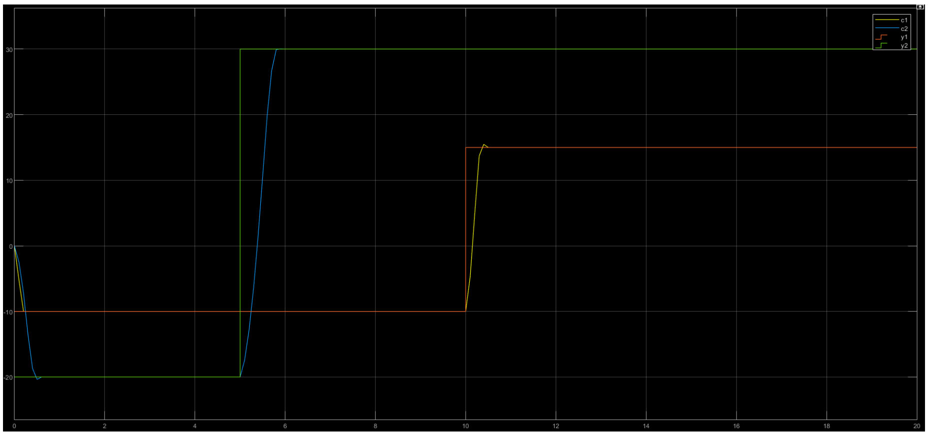


شکل ۵: خروجی سیستم کنترل شده

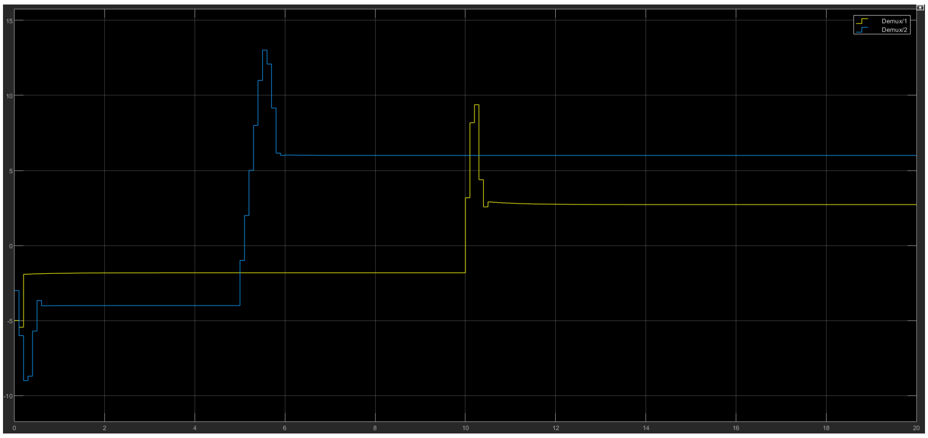
همانطور که از خروجی هم مشخص است، سیستم توانسته با کنترلر طراحی شده به خوبی مقادیر مدنظر را دنبال کرده و با سرعت بالا و فراجهش کم به مقدار نهایی خود برسد.

۲.۲ بخش دوم

در این بخش با دادن مقادیر متفاوت به پنج پارامتر کنترلر و ثابت نگه داشتن سایر مقادیر نسبت به بخش قبل، تاثیر هر یک را بررسی می‌کنیم. پیش از آن یکبار دیگر خروجی سیستم و سیگنال کنترلی را با مقادیر بخش قبل در اینجا قرار می‌دهیم.



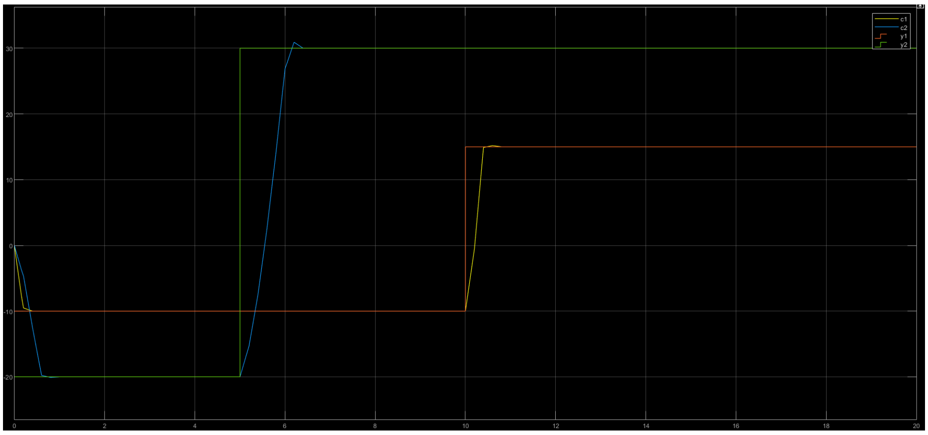
شکل ۶: خروجی سیستم کنترل شده



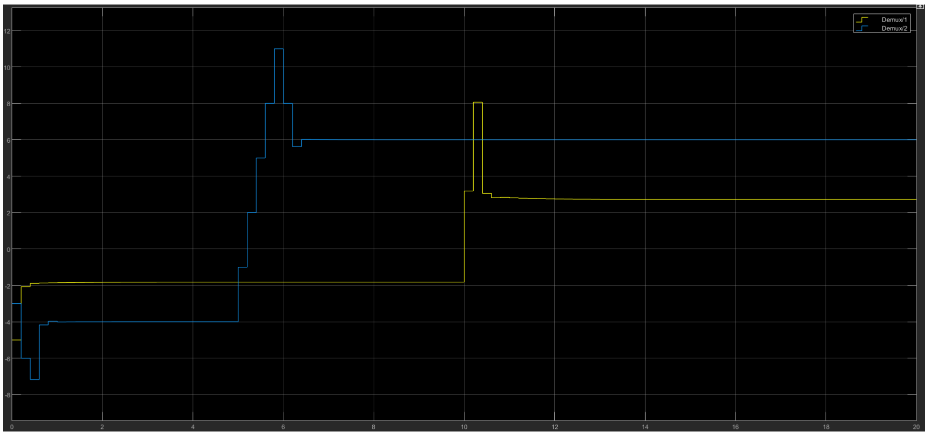
شکل ۷: خروجی کنترلر

۱.۲.۲ sample time

ابتدا برای $\text{sample time} = 0.2$ خروجی‌ها را بررسی می‌کنیم.



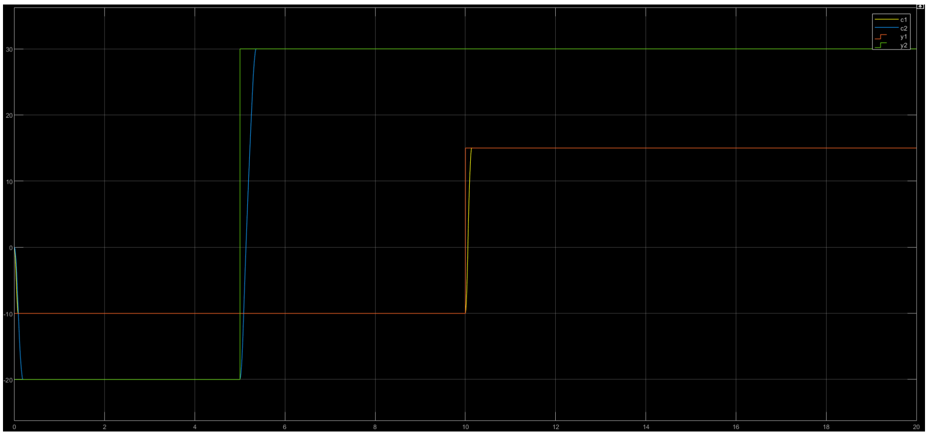
شکل ۸: خروجی سیستم کنترل شده با $\text{sample time} = 0.2$



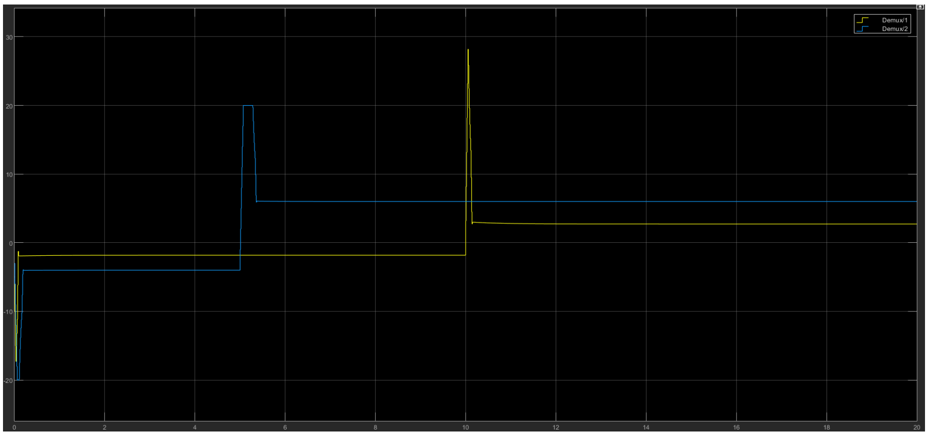
شکل ۹: خروجی کنترلر با $\text{sample time} = 0.2$

با افزایش sample time خروجی سیستم کندتر و دچار فراجهش بیشتر شده و حداکثر مقدار سیگنال کنترلی (خروجی کنترلر) کاهش یافته است.

حال برای $\text{sample time} = 0.01$ خروجی‌ها را بررسی می‌کنیم.



شکل ۱۰: خروجی سیستم کنترل شده با $\text{sample time} = 0.01$

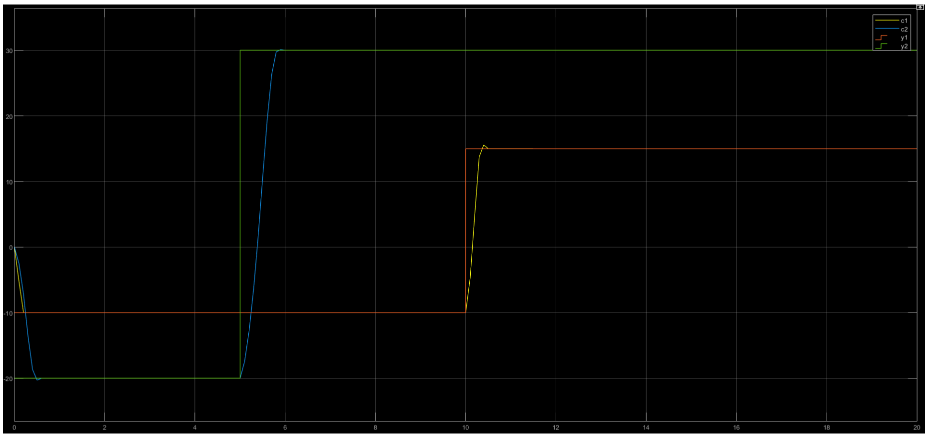


شکل ۱۱: خروجی کنترلر با $\text{sample time} = 0.01$

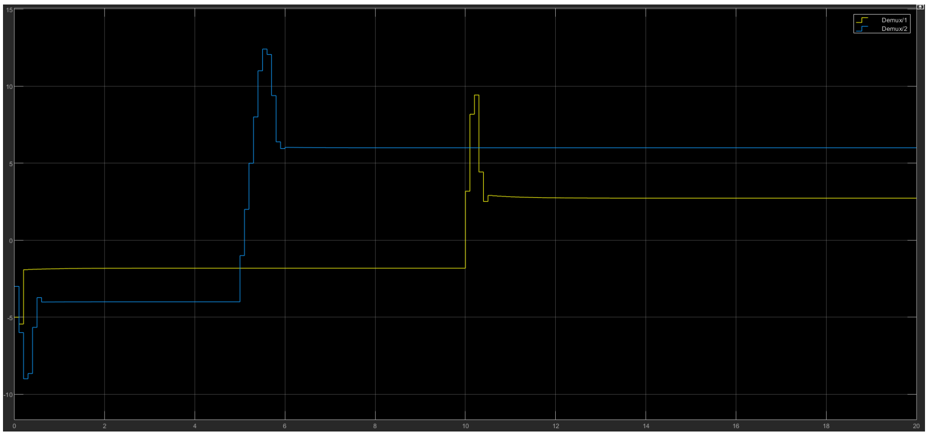
با کاهش sample time خروجی سیستم سریعتر شده و فراجهش آن از بین رفته ولی سیگنال کنترلی (خروجی کنترلر) وارد حالت اشباع شده است که ممکن است مطلوب نباشد.

۲.۲.۲ Prediction horizon

ابتدا برای $\text{Prediction horizon} = 20$ خروجی‌ها را بررسی می‌کنیم.



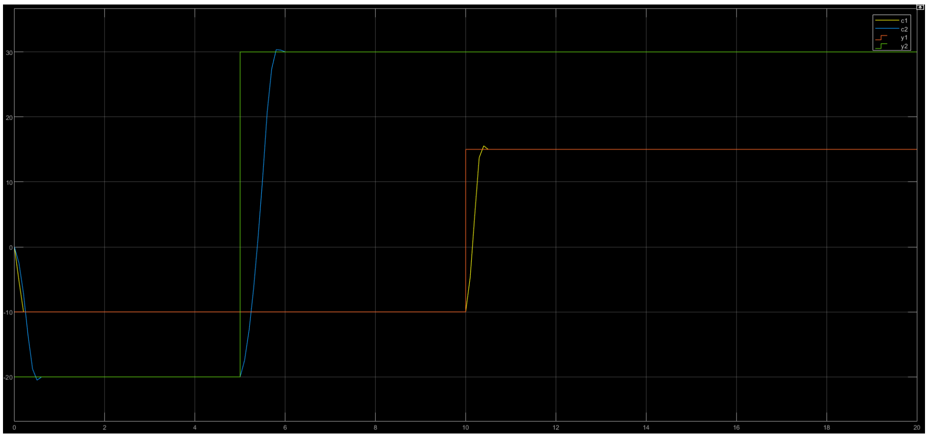
شکل ۱۲: خروجی سیستم کنترل شده با $\text{Prediction horizon} = 20$



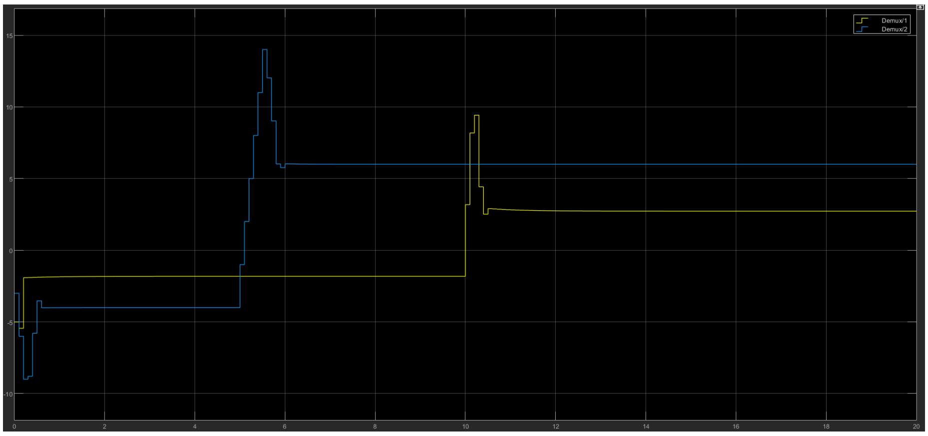
شکل ۱۳: خروجی کنترلر با $\text{Prediction horizon} = 20$

با افزایش Prediction horizon تغییر واضحی در سیستم اتفاق نیفتاده است.

حال برای $\text{Prediction horizon} = 5$ خروجی‌ها را بررسی می‌کنیم.



شکل ۱۴: خروجی سیستم کنترل شده با $\text{Prediction horizon} = 5$

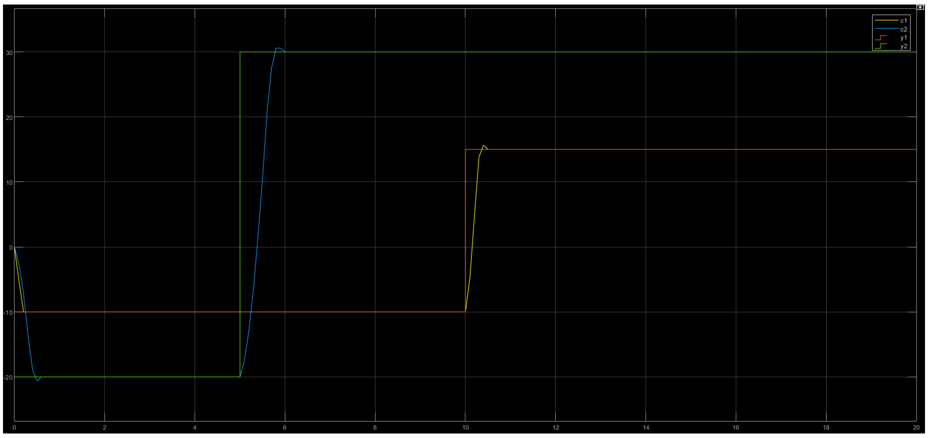


شکل ۱۵: خروجی کنترلر با $\text{Prediction horizon} = 5$

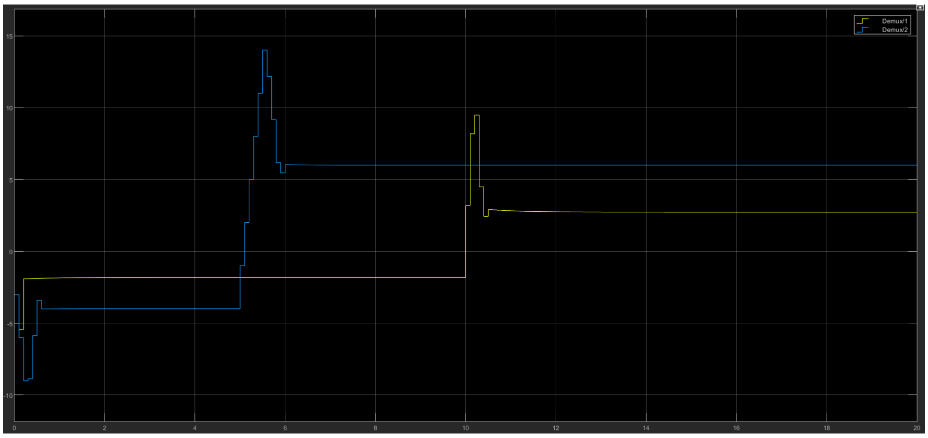
با کاهش Prediction horizon خروجی سیستم، فراجهش آن و سیگنال کنترلی (خروجی کنترلر) همگی اندکی سریعتر شده‌اند.

۳.۲.۲ Control horizon

ابتدا برای $\text{Control horizon} = 5$ خروجی‌ها را بررسی می‌کنیم.



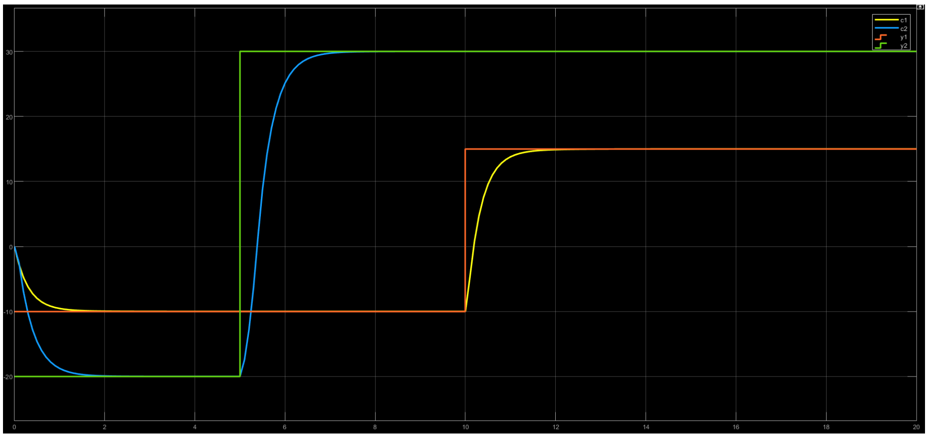
شکل ۱۶: خروجی سیستم کنترل شده با $\text{Control horizon} = 5$



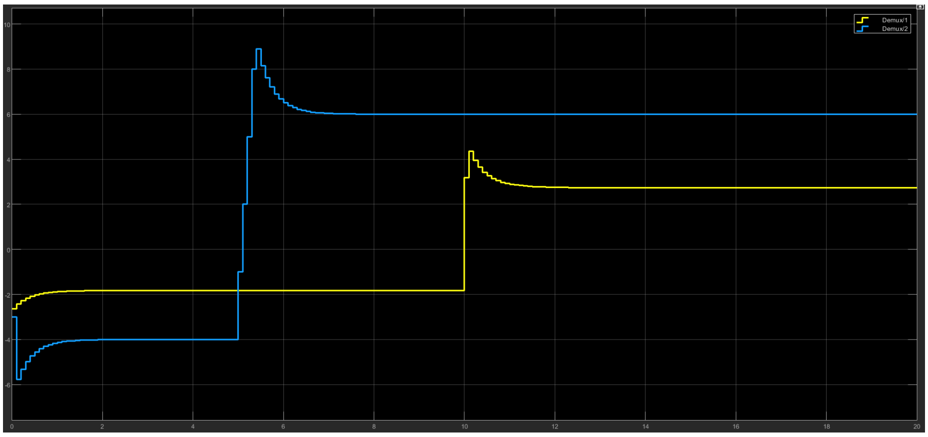
شکل ۱۷: خروجی کنترلر با $\text{Control horizon} = 5$

با افزایش Control horizon خروجی سیستم، فراجهش آن و سیگنال کنترلی (خروجی کنترلر) همگی اندکی سریعتر شده‌اند.

حال برای $\text{Control horizon} = 1$ خروجی‌ها را بررسی می‌کنیم.



شکل ۱۸: خروجی سیستم کنترل شده با $\text{Control horizon} = 1$



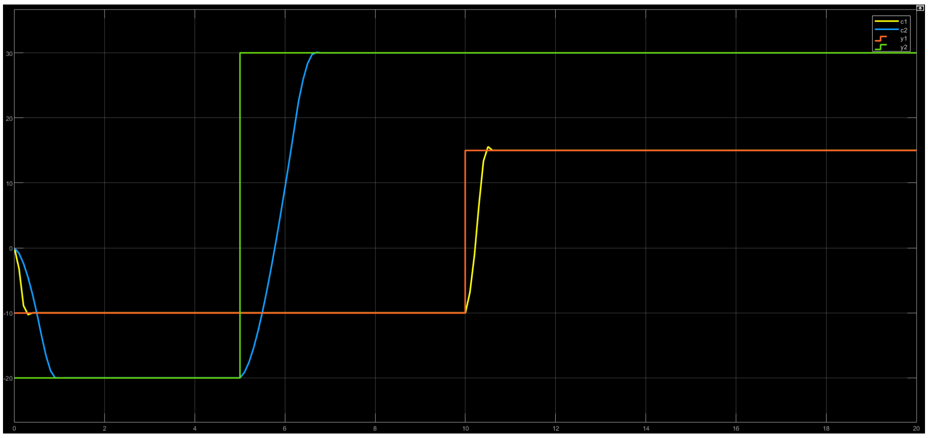
شکل ۱۹: خروجی کنترلر با $\text{Control horizon} = 1$

با کاهش Control horizon خروجی سیستم، فراجهش آن و سیگنال کنترلی (خروجی کنترلر) همگی کاهش محسوس داشته و کند شده‌اند.

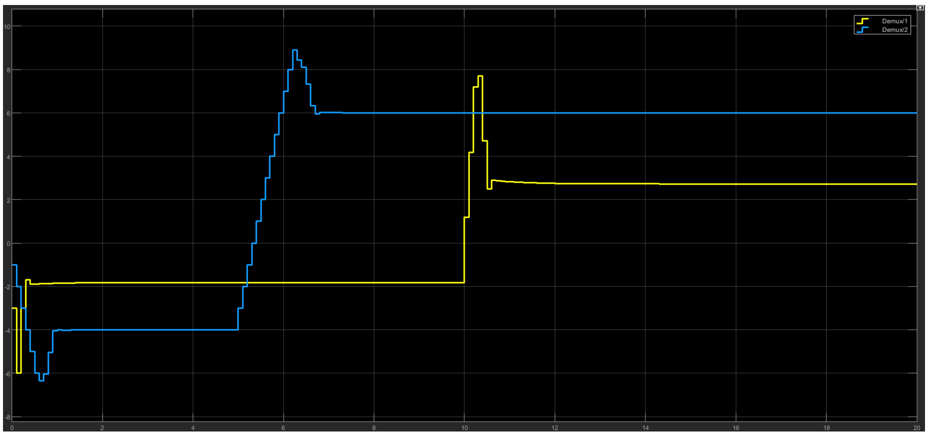
۴.۲.۲ Constraints

تغییر در مقادیر حداکثر و حداقل ورودی و سیگنال کنترلی تاثیر خود را فقط در وضعیت اشباع سیستم نمایش می‌دهند. از این جهت صرفا تغییرات نرخ تغییر را بررسی خواهیم کرد.
ابتدا برای نرخ تغییر با بازه کوچکتر خروجی‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$-3W/min \leq \dot{u}_1 \leq 3W/min$$
$$-1W/min \leq \dot{u}_2 \leq 1W/min$$



شکل ۲۰: خروجی سیستم کنترل شده با نرخ تغییر با بازه کوچکتر

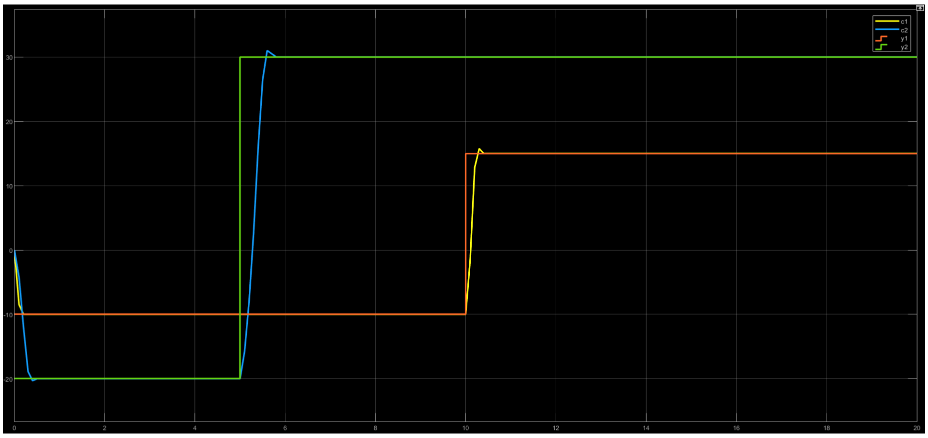


شکل ۲۱: خروجی کنترلر با نرخ تغییر با بازه کوچکتر

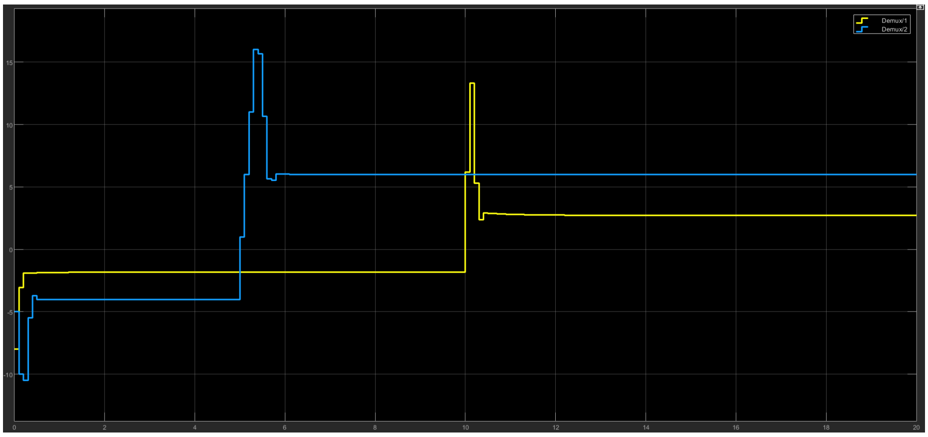
با کاهش بازه نرخ تغییرات، سیستم کند شده که این امر دور از انتظار هم نیست چراکه کنترلر مجبور است با فاصله زمانی بیشتر و درنتیجه در بازه طولانی‌تری سیگنال مورد نیاز سیستم را تولید کند.

حال برای نرخ تغییر با بازه بزرگتر خروجی‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$-8W/min \leq \dot{u}_1 \leq 8W/min$$
$$-5W/min \leq \dot{u}_2 \leq 5W/min$$



شکل ۲۲: خروجی سیستم کنترل شده با نرخ تغییر با بازه بزرگتر



شکل ۲۳: خروجی کنترلر با نرخ تغییر با بازه بزرگتر

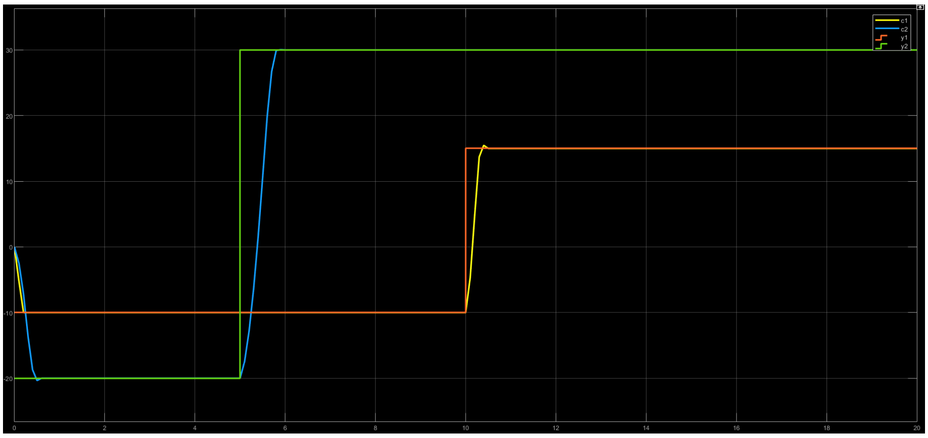
با افزایش بازه نرخ تغییرات، سیستم سریعتر شده که این امر نیز دور از انتظار نیست چراکه کنترلر مجبور است با فاصله زمانی کمتری و درنتیجه در بازه کوتاه‌تری سیگنال مورد نیاز سیستم را تولید کند.

۵.۲.۲ Weights

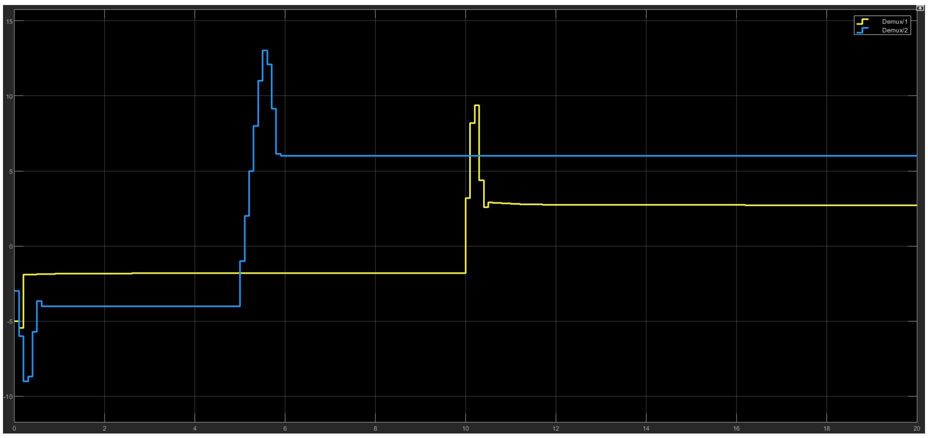
برای بررسی اثر وزن‌ها، یکبار مقدار یکسان و یکبار برعکس قسمت قبل درنظر می‌گیریم و مقایسه می‌کنیم.
ابتدا حالت یکسان بودن وزن‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$



شکل ۲۴: خروجی سیستم کنترل شده با وزن‌های یکسان



شکل ۲۵: خروجی کنترلر با وزن‌های یکسان

با توجه به سایر پارامترهای مسئله، تغییر محسوسی در جواب‌ها مشخص نیست ولی با توجه به کارکرد ماتریس وزن‌ها، با کوچک کردن R کنترلر تلاش می‌کند تا با تغییزات بیشتر در ورودی، خطای خروجی را با سرعت بیشتری کاهش دهد.
و برای ماتریس Q با قراردادن مقادیر متفاوت برای خروجی‌ها، کنترلر سعی می‌کند تا خروجی با وزن بالاتر را سریعتر کنترل کند.

حال برای وزن‌ها اعداد متفاوت درنظر می‌گیریم و اولویت‌ها را برعکس سوال قرار می‌دهیم.

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

با اعمال این تغییرات، بازهم تغییر قابل مشاهده‌ای رخ نداد اما همان توضیحاتی که در قسمت قبل بیان شد، گویای نتایج هست.

۳ سوال سوم