

دانشگاه  
خواجه نصیرالدین طوسی  
K. N. Toosi University  
of Technology

# کنترل مبتنی بر پیش‌بینی مدل

دکتر امیرحسین نیکوفرد

تمرین سری سوم

سید محمد امین غضنفری

شماره دانشجویی: ۴۰۲۰۹۱۰۴

پاییز ۱۴۰۳

## فهرست مطالب

۲	۱	سوال اول
۲	۱.۱	بخش اول
۳	۲.۱	بخش دوم
۷	۳.۱	بخش سوم
۹	۴.۱	بخش چهارم
۱۲	۵.۱	بخش پنجم
۱۴	۲	سوال دوم
۱۴	۱.۲	بخش اول
۱۷	۲.۲	بخش دوم
۱۷	۱.۲.۲	قید نرم
۱۸	۲.۲.۲	قید سخت
۲۰	۳.۲	بخش سوم
۲۶	۴.۲	بخش چهارم

# ۱ سوال اول

## ۱.۱ بخش اول

تابع تبدیل به صورت زیر در اختیار قرار دارد:

$$G(s) = \frac{F(s)}{U(s)} = \frac{k_{sp}K_s k_e (A_i + A_0)}{(\tau s + 1) [(K_p + Cs)(m_a s^2 + ds + k_e) + (A_i^2 s + A_0^2 s)]}$$

با توجه به روش تحقق مینیمال داریم:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] x(t)$$

مقادیر مربوطه به شرح زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{(\tau(K_p m_a + Cd) + C m_a)}{\tau C m_a} \\ \alpha_2 = \frac{(\tau(K_p d + C k_e + A_i^2 + A_0^2) + (K_p m_a + Cd))}{\tau C m_a} \\ \alpha_3 = \frac{(\tau K_p k_e + (K_p d + C k_e + A_i^2 + A_0^2))}{\tau C m_a} \\ \alpha_4 = \frac{K_p k_e}{\tau C m_a} \\ \beta = \frac{k_{sp} K_s k_e (A_i + A_0)}{\tau C m_a} \end{cases}$$

حال با استفاده از آن‌ها، معادلات فضای حالت را محاسبه و ماتریس‌های آن را به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0], D = 0$$

## ۲.۱ بخش دوم

برای این بخش ابتدا باید نایقینی‌ها را به نحوی به سیستم اعمال کنیم. برای این منظور، از خاصیت تابع سینوس که مقداری بین ۰ و ۱ دارد استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال برای  $k_e$  محاسبات مربوطه را انجام می‌دهیم. برای بقیه پارامترها نیز محاسبات به همین صورت خواهد بود.

$$k_e = (100 + 50)/2 + [(100 - 50)/2] \times \sin(t) = 75 + 25\sin(t)$$

برای سایر مقادیر داریم:

$$K_s = 0.375 + 0.125 * \sin(t)$$

$$K_p = 2.5 \times 10^{-12} + 2.5 \times 10^{-12} * \sin(t)$$

$$C = 2 \times 10^{-11} + 10^{-11} * \sin(t)$$

$$d = 700 + 100 * \sin(t)$$

$$m_a = 20.0 + 0.1 * \sin(t)$$

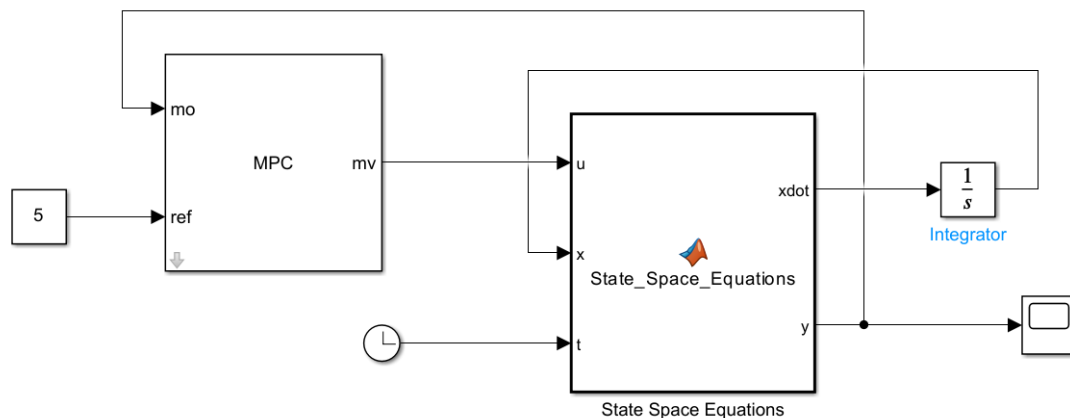
$$A_i = 0.00203 + 0.0001 * \sin(t)$$

$$A_o = 0.00152 + 0.00008 * \sin(t)$$

$$k_{sp} = 0.0012 + 0.0001 * \sin(t)$$

$$\tau = 35 + 5 * \sin(t);$$

حال در سیمولینک سیستم را طراحی می‌کنیم.



شکل ۱: سیستم با کنترلر linear MPC

معادلات قرار گرفته در Matlab Function در ادامه آورده شده است.

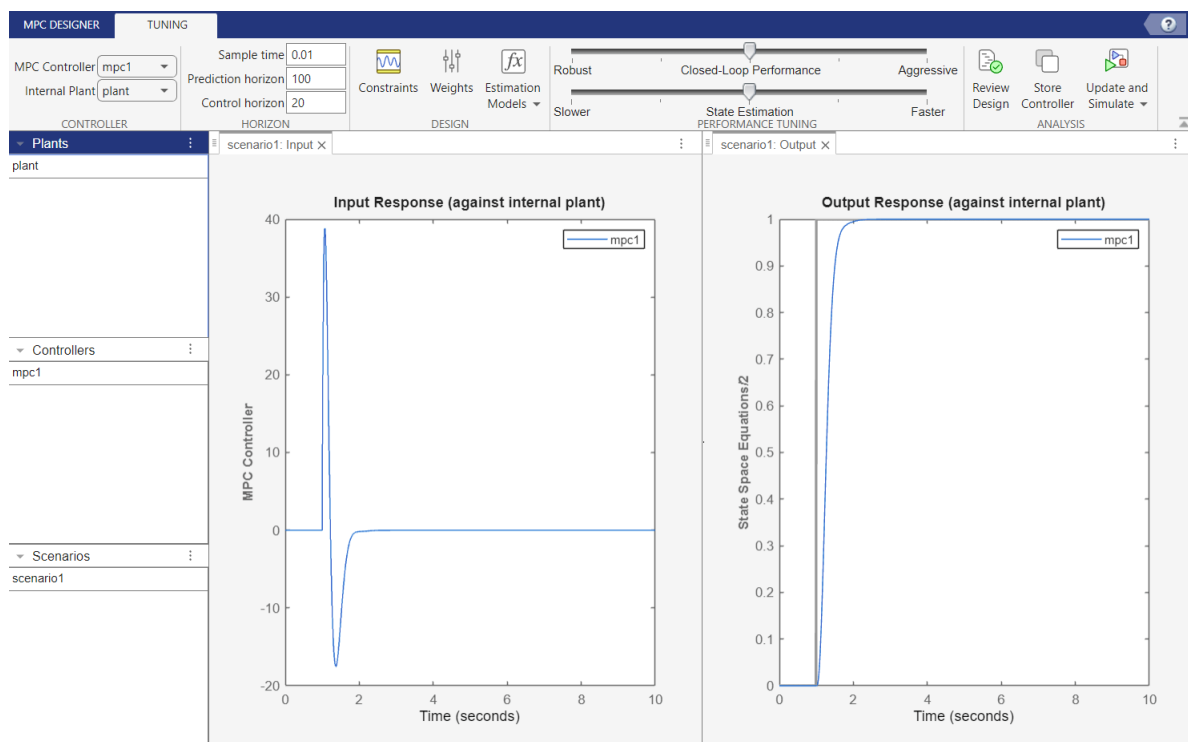
```
1 function [xdot, y] = State_Space_Equations(u, x, t)
2
3 % Parameter ranges pertaining to the linear transfer
  function (Table 1)
4
5 ke = 75 + 25 * sin(t);
6 Ks = 0.375 + 0.125 * sin(t);
7 Kp = 2.5*10^(-12) + 2.5*10^(-12) * sin(t);
8 C1 = 2*10^(-11) + 1*10^(-11) * sin(t);
9 d = 700 + 100 * sin(t);
10 ma = 20.0 + 0.1 * sin(t);
11 Ai = 0.00203 + 0.0001 * sin(t);
12 Ao = 0.00152 + 0.00008 * sin(t);
13 ksp = 0.0012 + 0.0001 * sin(t);
14 tau = 35 + 5 * sin(t);
15
16 % Definig the parameters calculated for the state-
  space equations
17
18 a1 = (tau * (Kp * ma + C1 * d) + (C1 * ma)) / (tau *
  C1 * ma);
19 a2 = (tau * (Kp * d + C1 * ke + Ai^2 + Ao^2) + (Kp *
  ma + C1 * d)) / (tau * C1 * ma);
20 a3 = (tau * Kp * ke + Kp * d + C1 * ke + Ai^2 + Ao
  ^2) / (tau * C1 * ma);
21 a4 = (Kp * ke) / (tau * C1 * ma);
22 beta = (ksp * Ks * ke * (Ai + Ao)) / (tau * C1 * ma)
  ;
23
24 % State-Space Matrices
25
26 A = [
27 0,1,0,0;
28 0,0,1,0;
29 0,0,0,1;
30 -a4,-a3,-a2,-a1
31 ];
32
33 B = [
```

```

34 0;
35 0;
36 0;
37 beta
38 ];
39
40 C = [1,0,0,0];
41
42 % State-Space equations
43
44 xdot = A * x + B * u;
45 y = C * x;

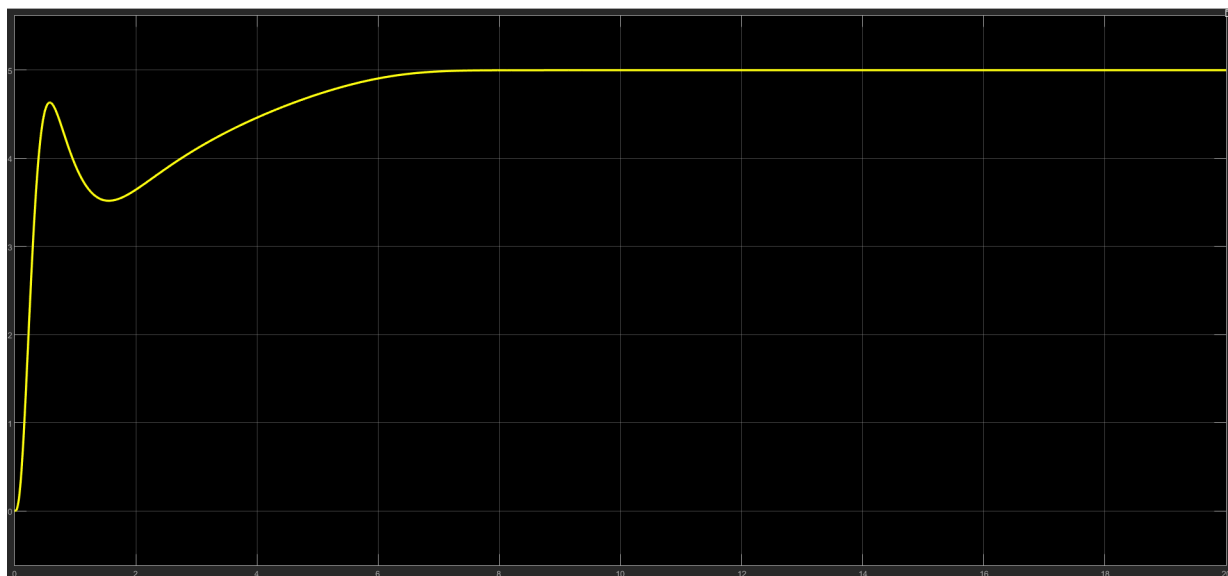
```

همچنین مقادیر مربوط به کنترلر در تصویر زیر قابل مشاهده است.



شکل ۲: صفحه مربوط به linear MPC

در نهایت هم خروجی سیستم به صورت زیر به دست آمده است.

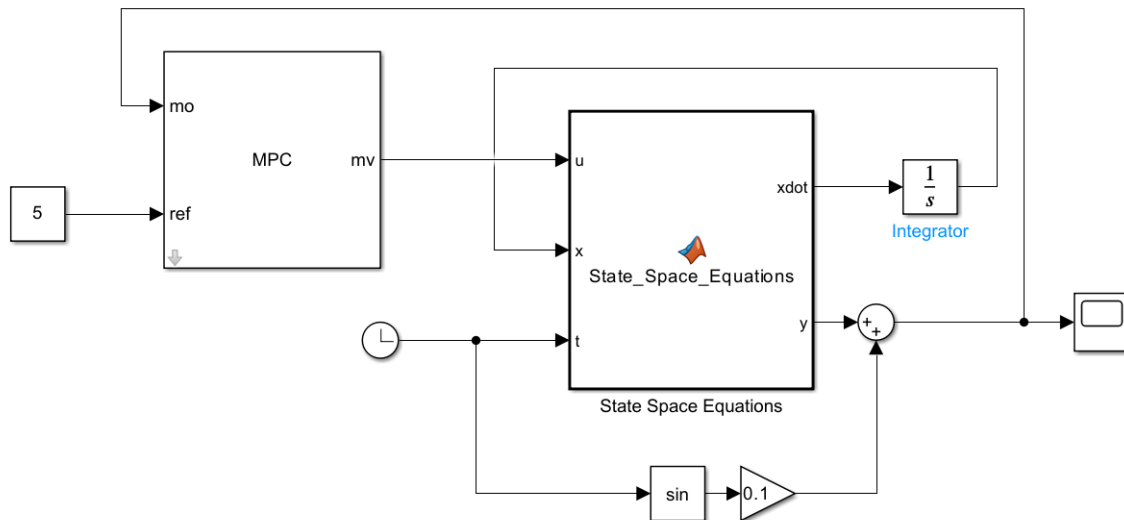


شکل ۳: خروجی سیستم با کنترلر linear MPC

همانطور که از تصویر پیداست سیستم توانسته پس از ۷ ثانیه به تعادل رسیده و مقدار مطلوب ما را دنبال کند. در ابتدا اما یک فراجهش قبل از رسیدن به مقدار نهایی داشته که این رفتار سیستم می‌تواند به دلیل نایقینی موجود در سیستم باشد.

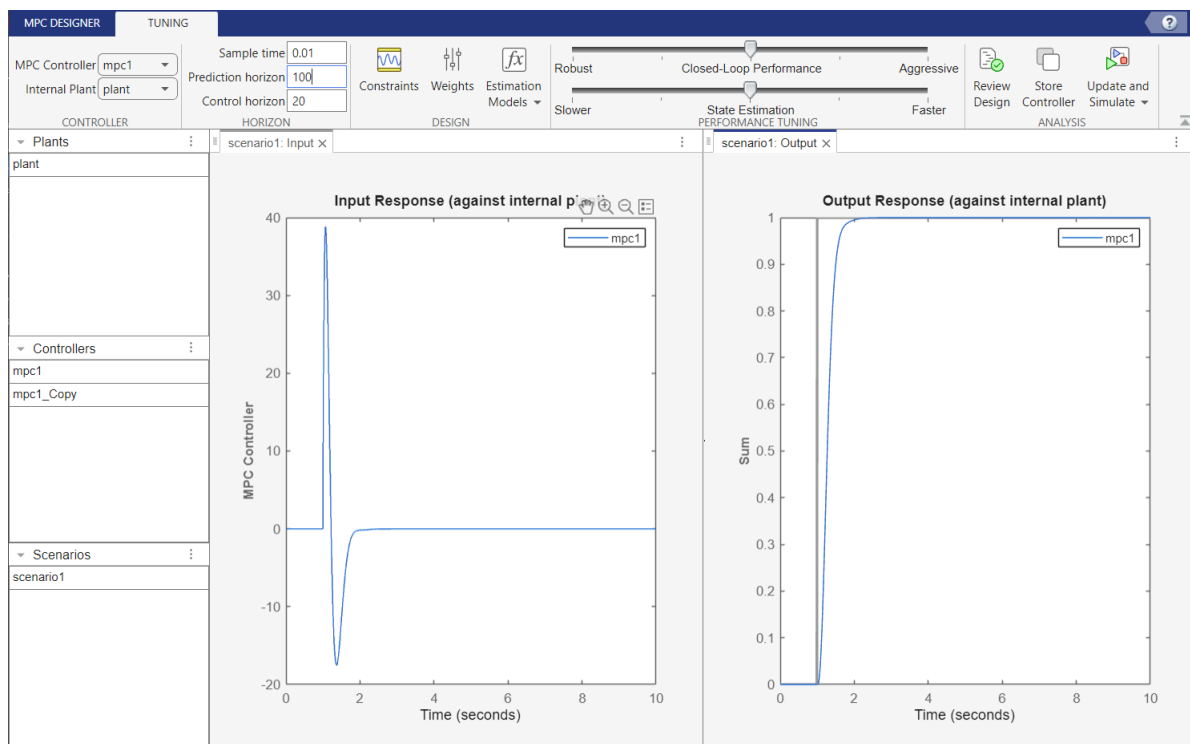
### ۳.۱ بخش سوم

در این بخش، اغتشاش خواسته شده را به سیستم اعمال می‌کنیم و اثر آن بر سیستم را بررسی می‌کنیم.



شکل ۴: سیستم دارای اغتشاش با کنترلر linear MPC

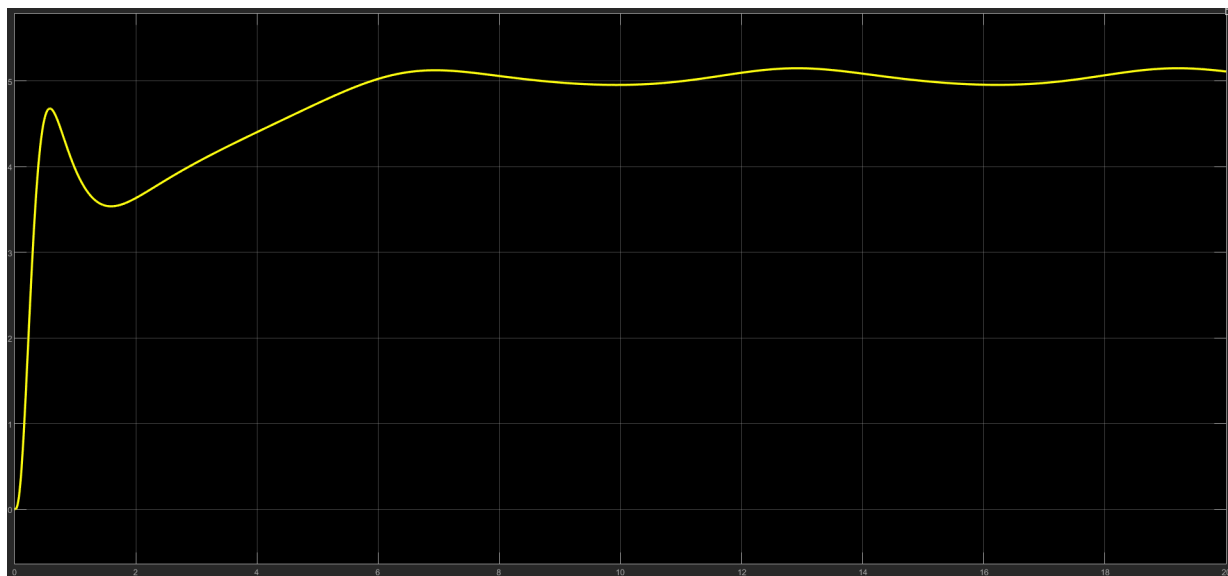
با استفاده از همان مقادیر سیستم جدید را کنترل می‌کنیم.



شکل ۵: صفحه مربوط به linear MPC



سیگنال خروجی به صورت زیر به دست می‌آید.

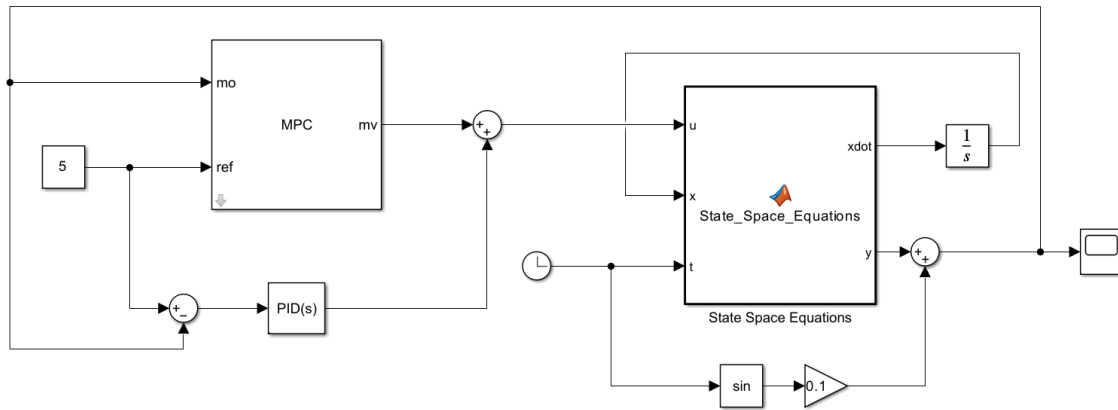


شکل ۶: خروجی سیستم دارای اغتشاش با کنترلر linear MPC

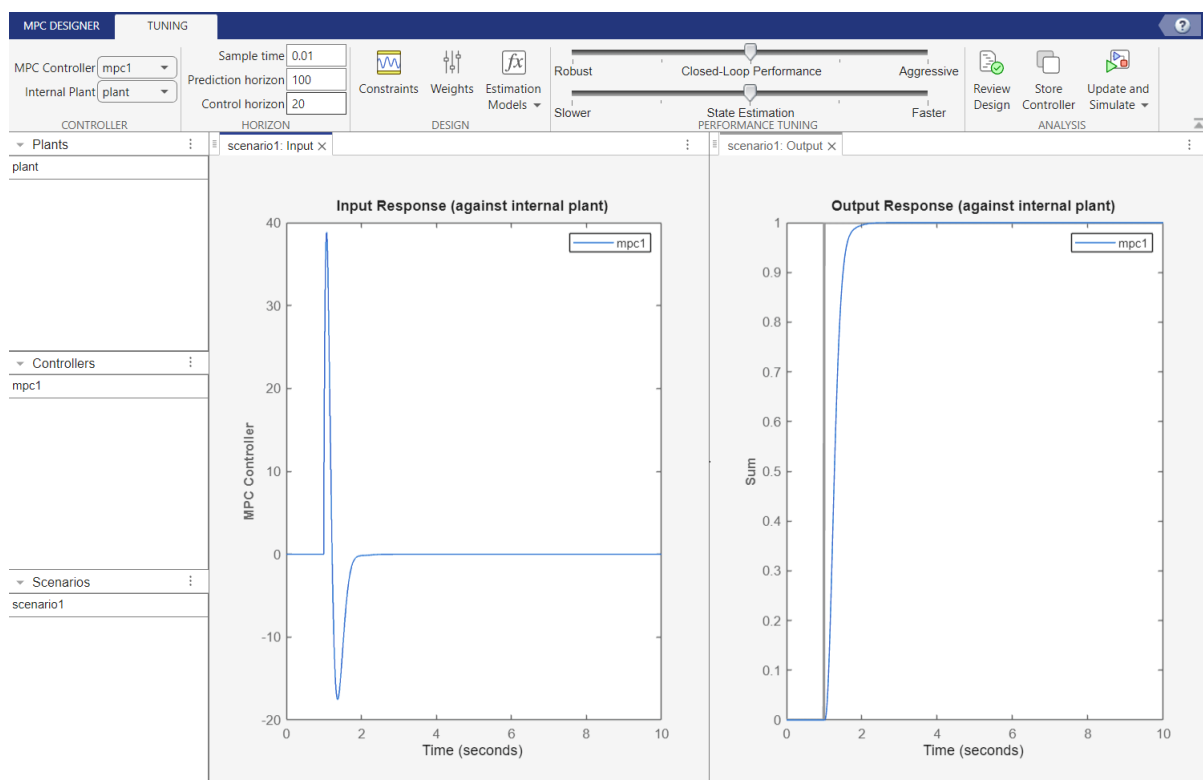
سیستم در حال نوسان بین 4.95 و 5.15 است و نمی‌تواند پایدار شود. در واقع کنترلر نمی‌تواند اثر اغتشاش را خنثی کند. همچنین با توجه به بازه نوسان، می‌توان متوجه شد که سیستم دچار خطای ماندگار 0.05 نیز شده است.

## ۴.۱ بخش چهارم

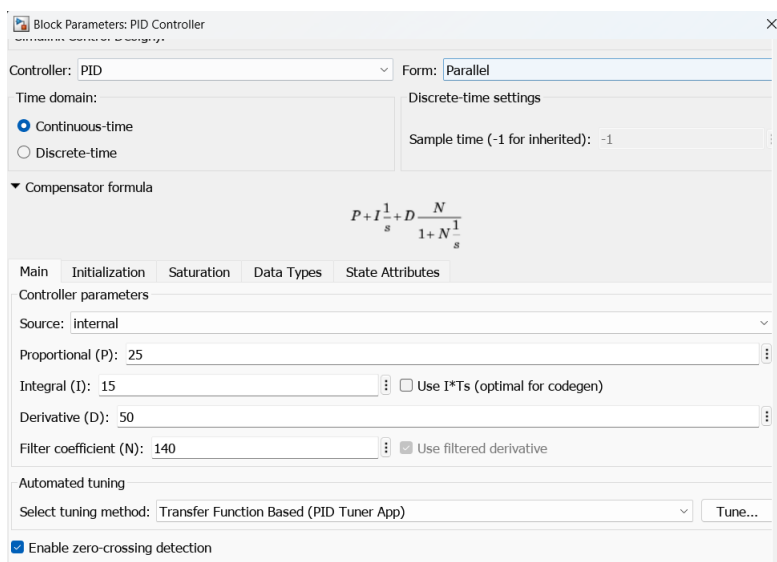
در بخش سعی می‌کنیم اثرات نایقینی و اغتشاش را با استفاده از کنترلر tube MPC خنثی کنیم. برای این کار، یک کنترلر PID به سیستم اضافه کرده و با تعیین پارامتر مناسب برای آن، به کنترل سیستم می‌پردازیم. ضرایب PID و MPC در ادامه قابل مشاهده است.



شکل ۷: سیستم دارای اغتشاش با کنترلر tube MPC



شکل ۸: صفحه مربوط به linear MPC



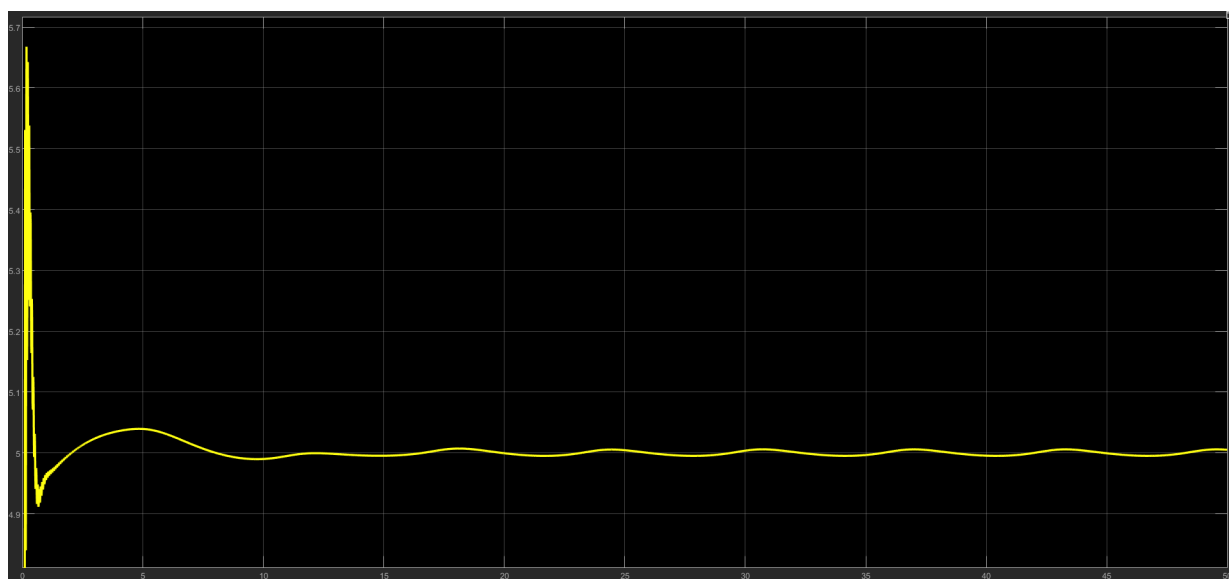
شکل ۹: صفحه مربوط به PID

ضرایب PID بعد از استفاده از Auto tune مجدد به صورت دستی تنظیم شدند تا نتیجه مطلوب به دست آید. نتیجه این کنترلر در ادامه قابل ملاحظه است.

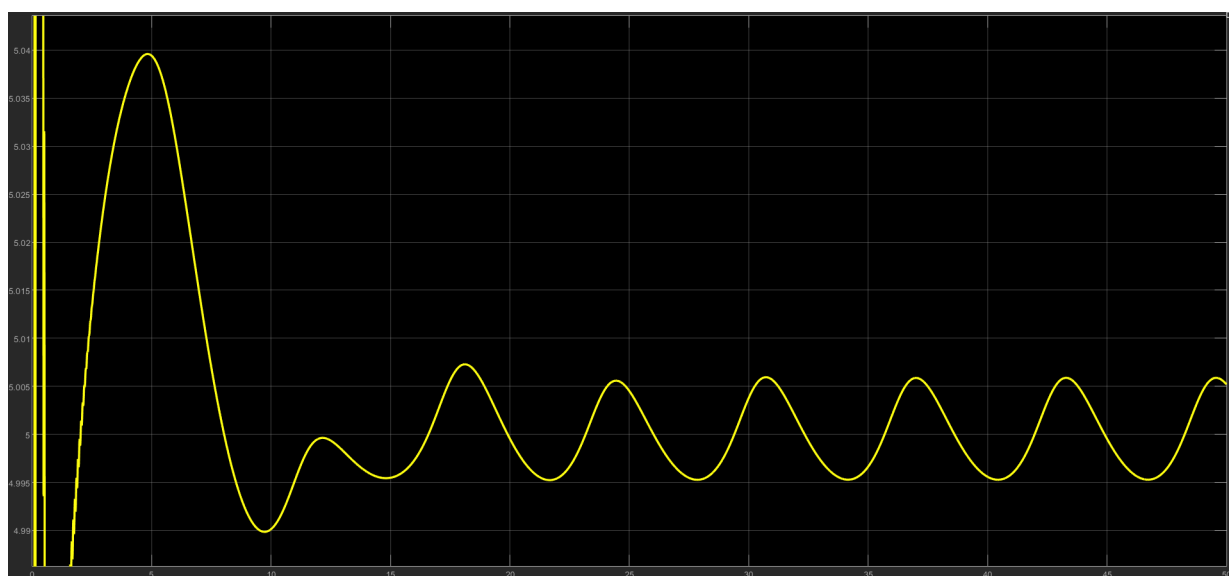


شکل ۱۰: خروجی سیستم دارای اغتشاش با کنترلر tube MPC

تصاویر زیر برای نمایش بهتر خروجی ارائه شده است.



شکل ۱۱: خروجی سیستم دارای اغتشاش با کنترلر tube MPC

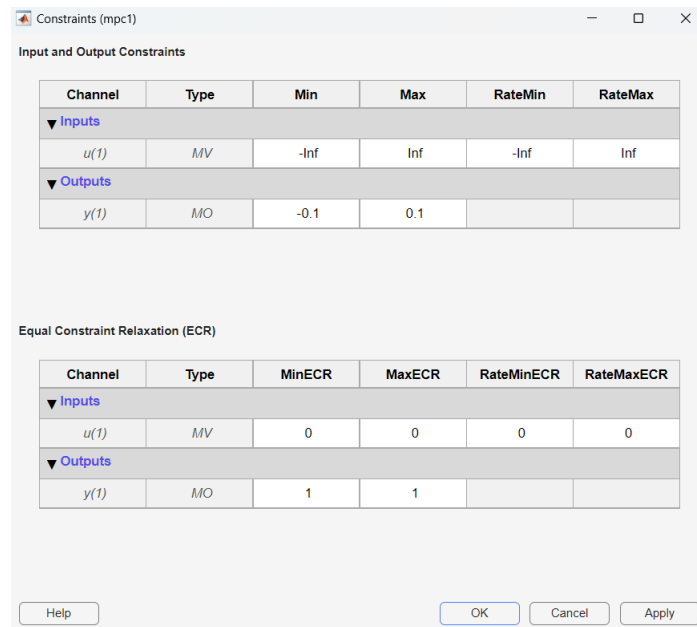


شکل ۱۲: خروجی سیستم دارای اغتشاش با کنترلر tube MPC

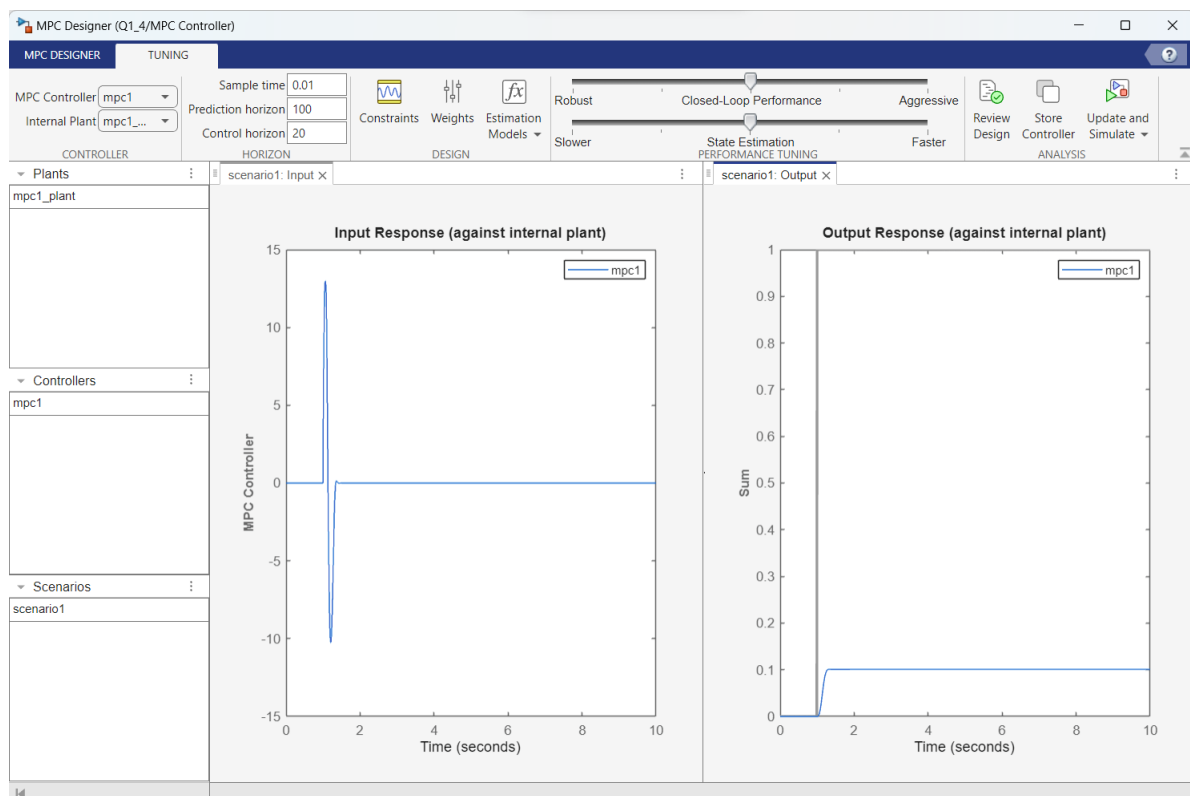
همانطور که مشاهده می‌شود، نوسان سیستم بین 4.995 و 5.005 قرار گرفته و خطای ماندگار آن هم که در قسمت قبل مشاهده کردیم حذف شده است. اما سیستم دچار فرافجهشی به بزرگی حدود 0.65 شده است. این فرافجهش به علت کنترلر PID در خروجی سیستم پدید آمده است.

## ۵.۱ بخش پنجم

در این قسمت سعی می‌کنیم با اعمال قید به کنترلر mpc فراجش سیستم را کاهش دهیم. قیدی که به سیستم اعمال کردیم، مقدار 0.1 بود که کمتر از این مقدار تاثیری روی فراجش سیستم داشت.

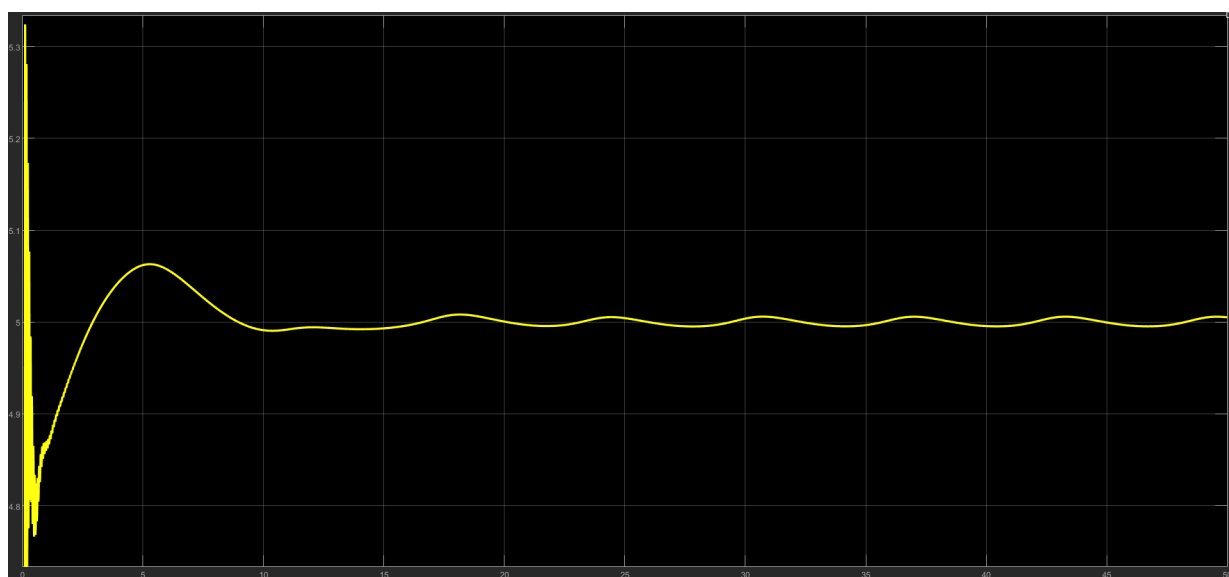


شکل ۱۳: صفحه مربوط به قیود linear MPC



شکل ۱۴: صفحه مربوط به linear MPC

نتیجه اعمال این قیود به صورت زیر است.



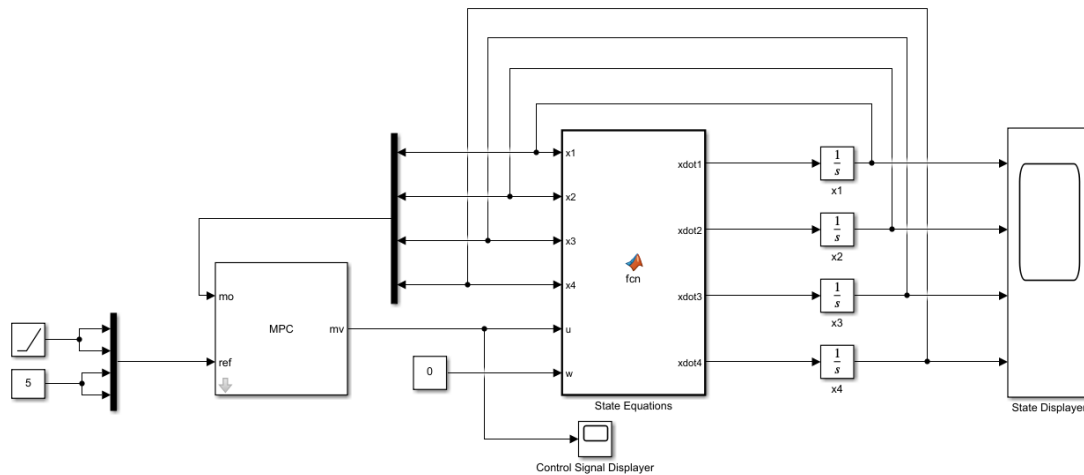
شکل ۱۵: خروجی سیستم مقید شده دارای اغتشاش با کنترلر tube MPC

همانطور که پیداست مقدار فراجاهش به حدود 0.32 کاهش پیدا کرده و از این مقدار تغییر محسوسی نمی‌کند. قید اعمال شده به کنترلر بسیار محدود کننده است و باقیمانده فراجاهش مربوط به کنترلر PID است که با اعمال قید به linear MPC نمی‌توان آن را از بین برد.

## ۲ سوال دوم

### ۱.۲ بخش اول

ابتدا سیستم را در سیمولینک شبیه‌سازی می‌کنیم.

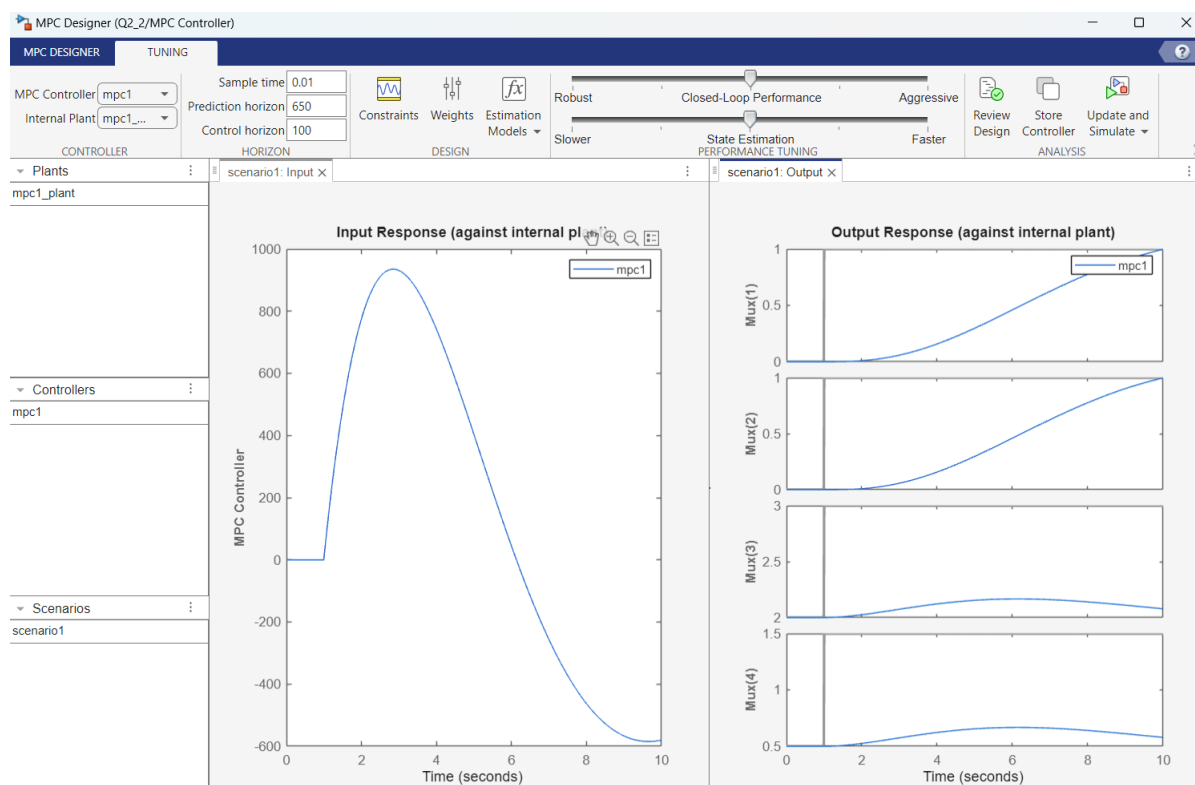


شکل ۱۶: سیستم با کنترلر linear MPC

با توجه به اینکه در این قسمت اشاره‌ای به اغتشاش نشده بود، مقدار آن را صفر در نظر گرفتیم. رفرنس سرعت‌ها ثابت ۵ و رفرنس مکان‌ها با شیب ۵ تعریف شده است. معادلات قرار گرفته در Matlab Function در ادامه آورده شده است.

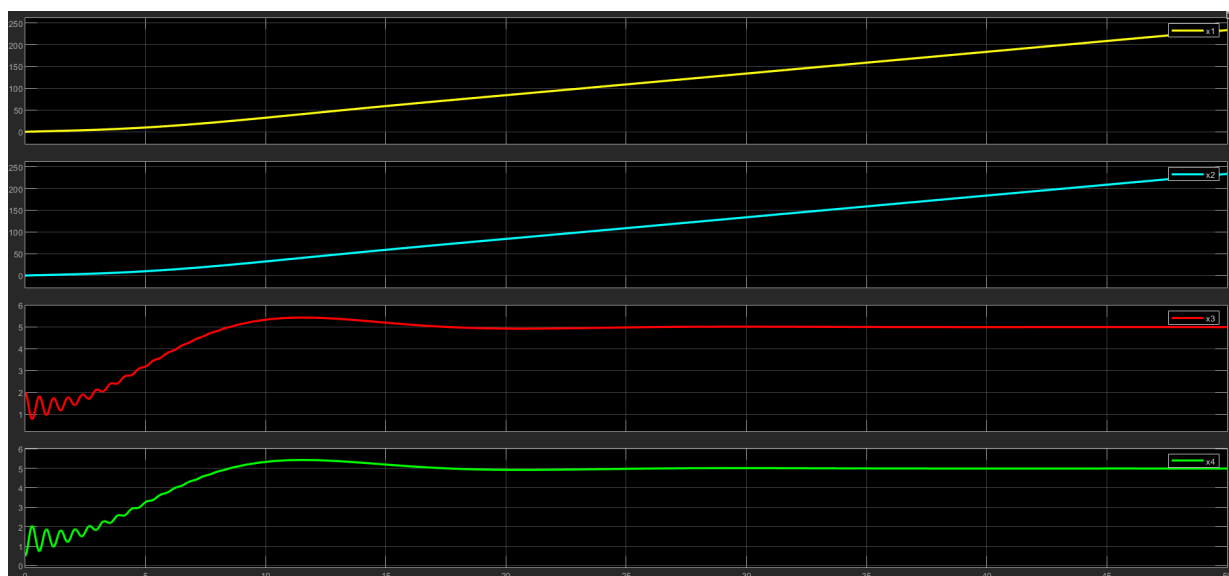
```
1 function [xdot1, xdot2, xdot3, xdot4] = fcn(x1, x2,
2     x3, x4, u, w)
3 % Parameter Values
4
5 m1 = 10000;
6 m2 = 8000;
7 k = 500000;
8 c = 5000;
9
10 % State-Equations
11
12 xdot1 = x3;
13 xdot2 = x4;
14 xdot3 = (1 / m1) * (k * (-x1 + x2) + c * (-x3 + x4)
15     + u + w);
15 xdot4 = (1 / m2) * (k * (x1 - x2) + c * (x3 - x4));
```

صفحه مربوط به مقادیر کنترلر در زیر آورده شده است.



شکل ۱۷: صفحه مربوط به linear MPC

وضعیت state های سیستم پس از کنترل در ادامه نمایش داده و بررسی می شود.

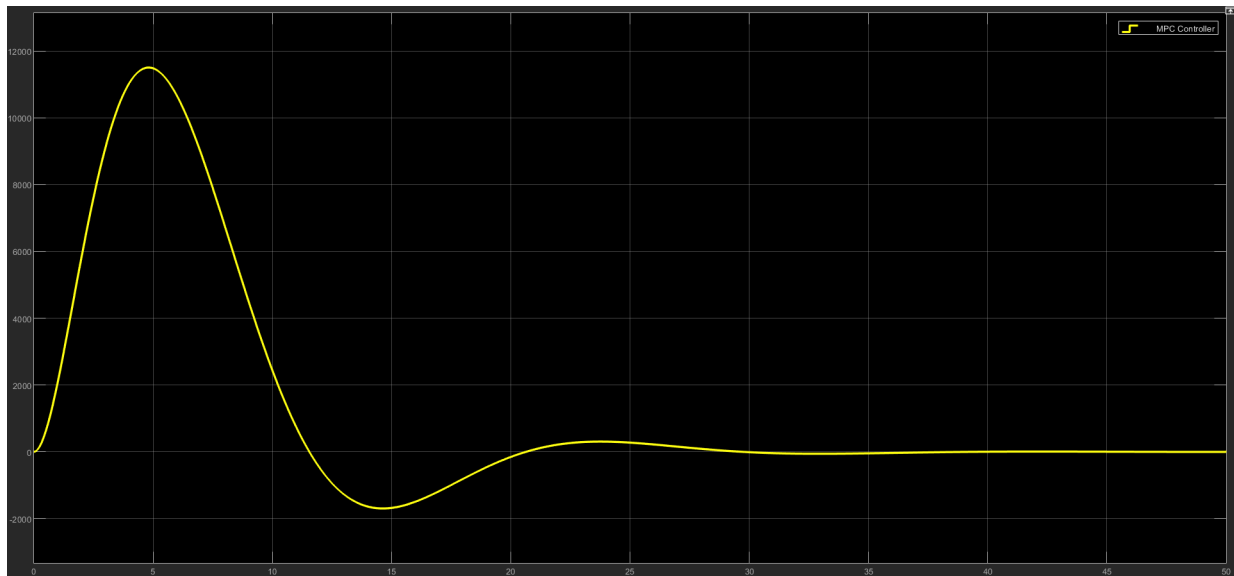


شکل ۱۸: خروجی سیستم و وضعیت state های سیستم

همانطور که پیداست، سیستم در حدود ۲۵ تا ۳۰ ثانیه پایدار شده و مقادیر مطلوب را دنبال کرده است.



سیگنال کنترلی سیستم در ادامه بررسی شده است.



شکل ۱۹: سیگنال کنترلی سیستم

سیگنال در ۵ ثانیه ابتدایی تا مقدار ۱۱۵۰۰ رفته است که با توجه به بزرگی پارامترهای مسئله، دور از منطق نمی‌باشد. همچنین پس از پایداری سیستم، سیگنال به صفر متمایل شده که طبیعی می‌باشد.

## ۲.۲ بخش دوم

در این قسمت به بررسی تاثیر اعمال قید روی کنترلر می‌پردازیم.

### ۱.۲.۲ قید نرم

ابتدا قید  $x_4 \leq 1.5$  را به صورت نرم به کنترلر اضافه می‌کنیم. پارامترهای کنترلر تغییری نمی‌کنند.

**Input and Output Constraints**

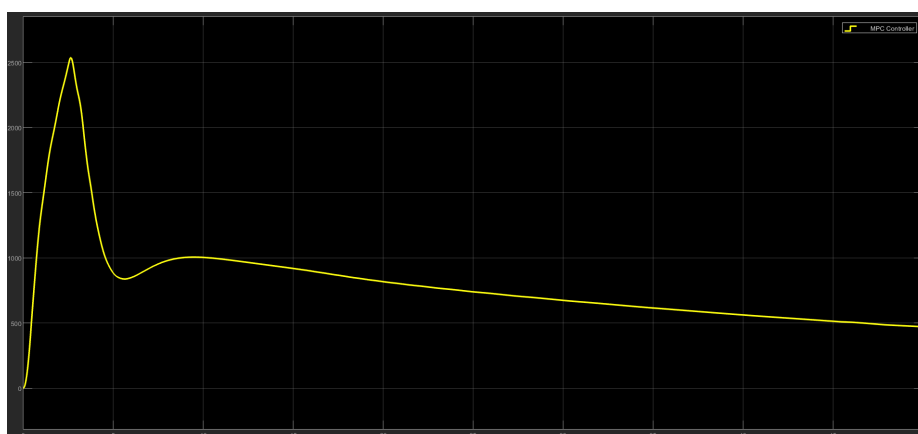
Channel	type	min	max	RateMin	RateMax
<b>Inputs</b>					
u(1)	MV	-Inf	Inf	-Inf	Inf
<b>Outputs</b>					
y(1)	MO	-Inf	Inf		
y(2)	MO	-Inf	Inf		
y(3)	MO	-Inf	Inf		
y(4)	MO	-Inf	1.5		

**Equal Constraint Relaxation (ECR)**

Channel	type	minECR	maxECR	RateMinECR	RateMaxECR
<b>Inputs</b>					
u(1)	MV	0	0	0	0
<b>Outputs</b>					
y(1)	MO	1	1		
y(2)	MO	1	1		
y(3)	MO	1	1		
y(4)	MO	1	1		

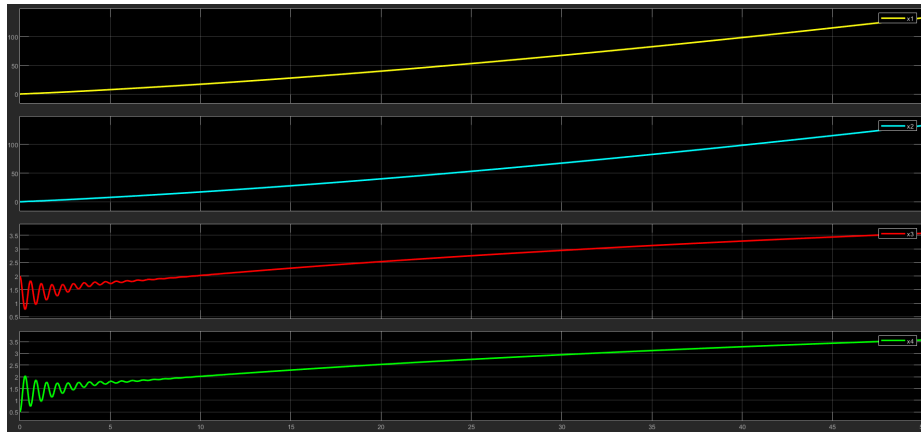
شکل ۲۰: صفحه مربوط به قید نرم linear MPC

در ادامه سیگنال کنترلی و خروجی‌های سیستم را بررسی می‌کنیم.



شکل ۲۱: سیگنال کنترلی پس از اعمال قید نرم روی کنترلر

سیگنال کنترلی پس از رسیدن به حدود ۲۵۰۰ که بسیار کمتر حالت قبل است، به پایین برگشته و با مقدار کم و شیب کم به سمت صفر شدن حرکت می‌کند.



شکل ۲۲: وضعیت state ها پس از اعمال قید نرم روی کنترلر

state های سیستم با سرعت بسیار کمتری نسبت به حالت بدون قید در حال رسیدن به مقدار رفرنس ها هستند. همانطور که مشاهده شد، با اعمال قید به صورت نرم، سیستم به شدت کند شده و حتی با گذر ۵۰ ثانیه هم نتوانسته به مقدار رفرنس برسد. چون قید به صورت نرم بود، سیستم از قید عبور کرده و عملاً قید فقط باعث کندی سیستم شده است.

## ۲.۲.۲ قید سخت

حال با تغییر مقدار ECR مربوط به قید چهارم، آن را به صورت سخت به سیستم اعمال می کنیم.

Input and Output Constraints					
Channel	type	min	max	RateMin	RateMax
▼ Inputs					
$u(1)$	MV	-Inf	Inf	-Inf	Inf
▼ Outputs					
$y(1)$	MO	-Inf	Inf		
$y(2)$	MO	-Inf	Inf		
$y(3)$	MO	-Inf	Inf		
$y(4)$	MO	-Inf	1.5		

Equal Constraint Relaxation (ECR)					
Channel	type	minECR	maxECR	RateMinECR	RateMaxECR
▼ Inputs					
$u(1)$	MV	0	0	0	0
▼ Outputs					
$y(1)$	MO	1	1		
$y(2)$	MO	1	1		
$y(3)$	MO	1	1		
$y(4)$	MO	1	0		

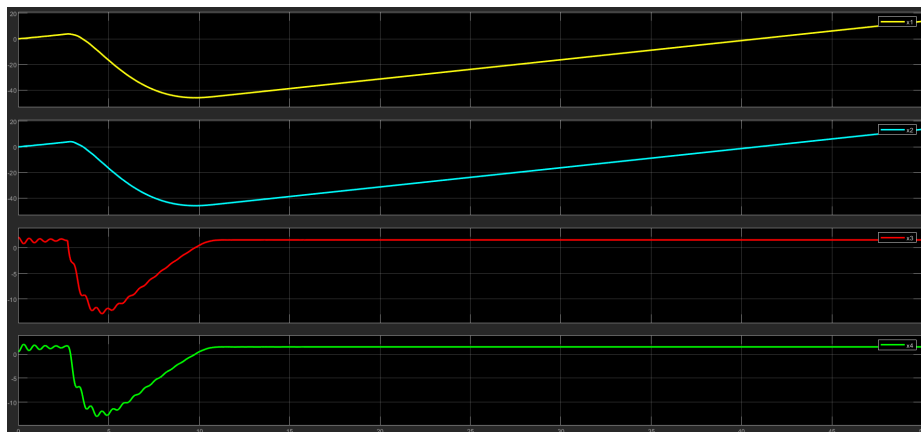
شکل ۲۳: صفحه مربوط به قید سخت linear MPC

در ادامه سیگنال کنترلی و خروجی های سیستم را بررسی می کنیم.



شکل ۲۴: سیگنال کنترلی پس از اعمال قید سخت روی کنترلر

با توجه به عبور  $x_4$  از قید سخت در ابتدای حرکت، کنترلر با اعمال سیگنال منفی با بزرگی بسیار زیاد (حدود ۳۳۰۰۰۰)، سعی می‌کند تا قید خواسته شده را رعایت کند.

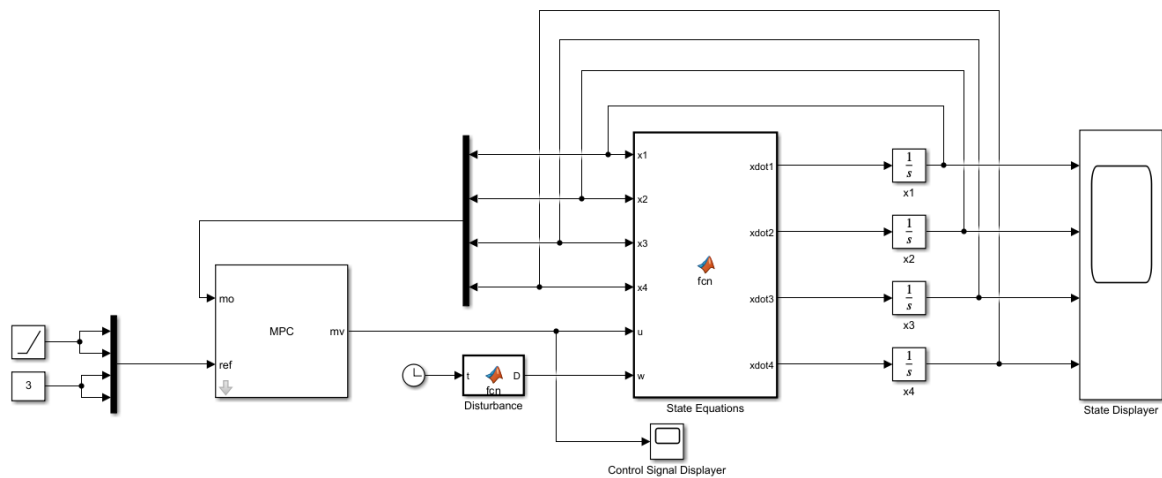


شکل ۲۵: وضعیت state ها پس از اعمال قید سخت روی کنترلر

پس از عبور از سرعت 1.5 در ابتدای حرکت و دریافت سیگنال منفی از کنترلر، سرعت‌ها تا حدود 13- کاهش یافته‌اند تا پس از آن بتوانند قید خواسته شده را رعایت کنند. همانطور که مشخص است، سیستم در حدود ۱۱ ثانیه به قید رسیده و پایدار شده است. به عنوان نتیجه می‌توان گفت قید نرم صرفاً باعث کندی سیستم شده ولی قید سخت، سیستم را در مقدار مشخص شده مقید می‌کند.

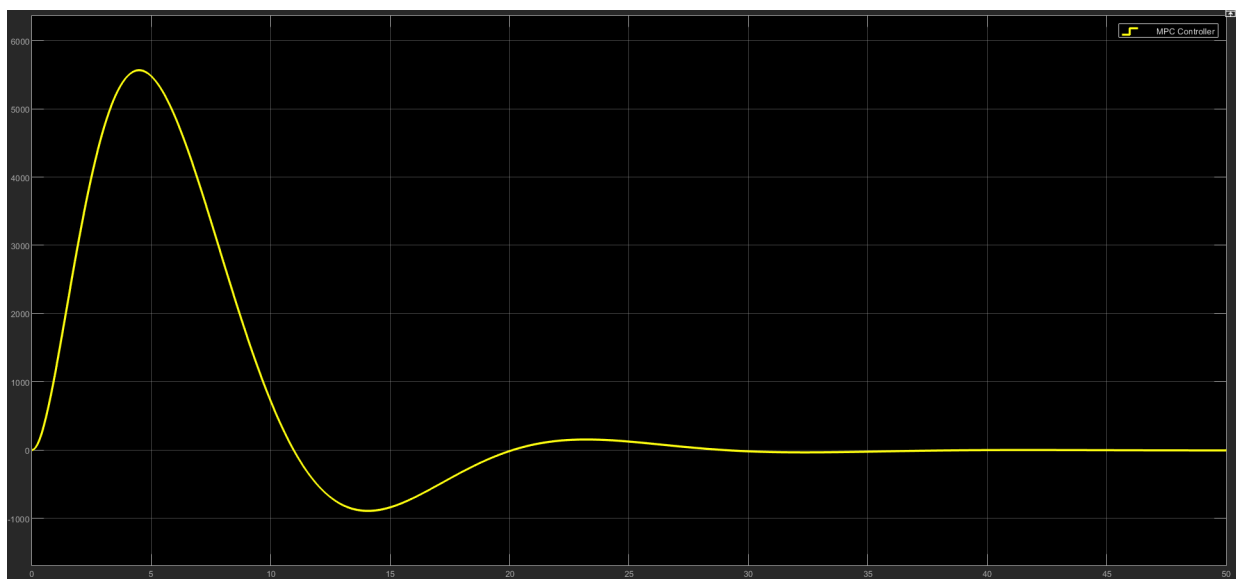
## ۳.۲ بخش سوم

اغتشاش را به سیستم اعمال می‌کنیم.



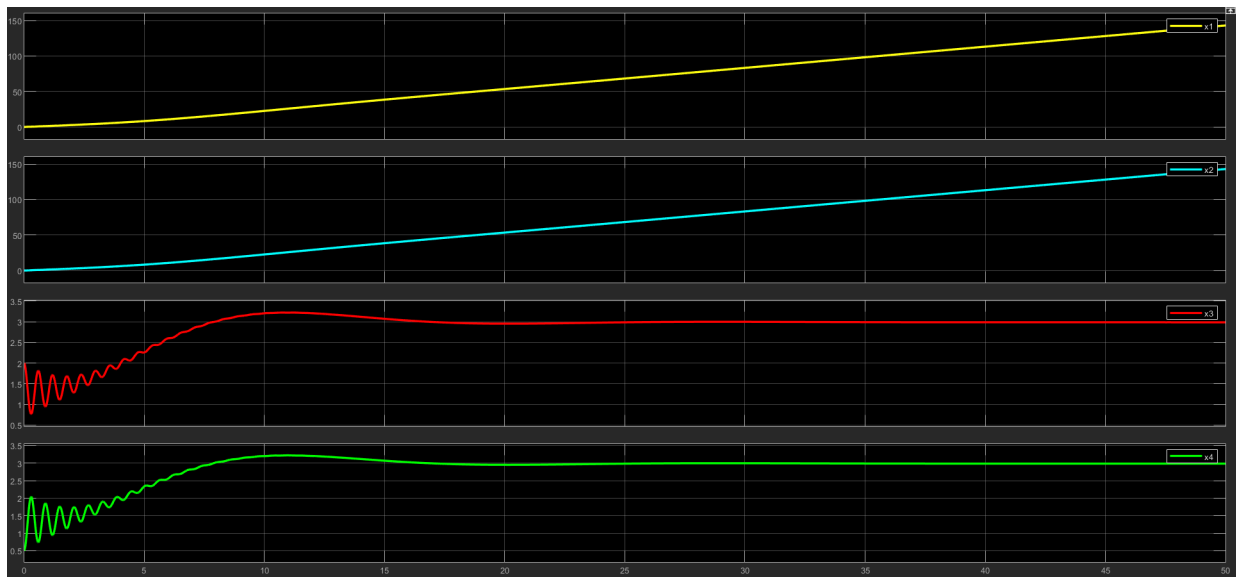
شکل ۲۶: سیستم دارای اغتشاش با کنترلر linear MPC

وضعیت state ها و سیگنال کنترلی در ادامه بررسی می‌شوند.

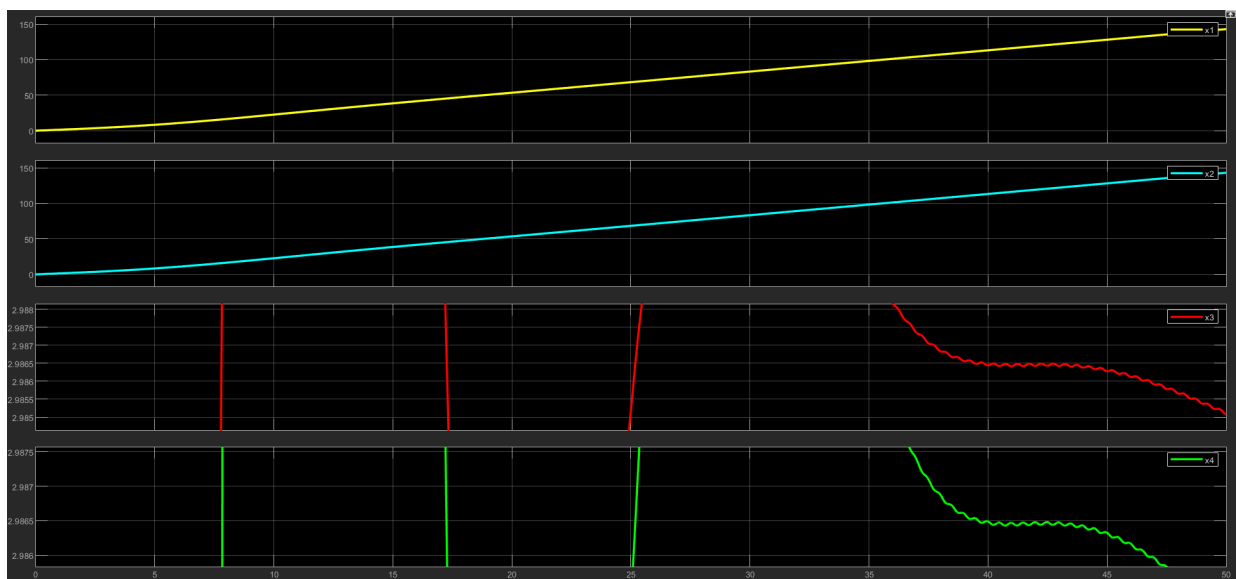


شکل ۲۷: سیگنال کنترلی پس از اعمال اغتشاش با کنترلر linear MPC

تنها تفاوت محسوس آن به علت تغییر مقدار رفرنس از ۵ به ۳ می‌باشد.

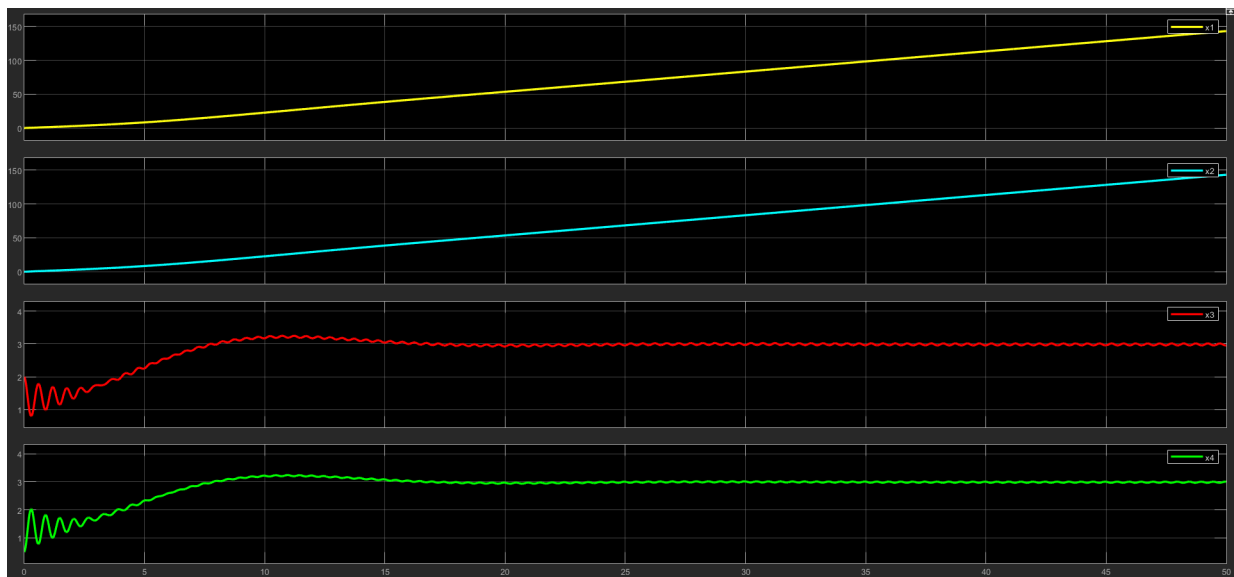


شکل ۲۸: وضعیت state ها پس از اعمال اغتشاش به سیستم با کنترلر linear MPC  
با توجه به کوچک بودن بیش از حد مقدار اغتشاش، تصویر زوم شده را هم نمایش می‌دهیم.

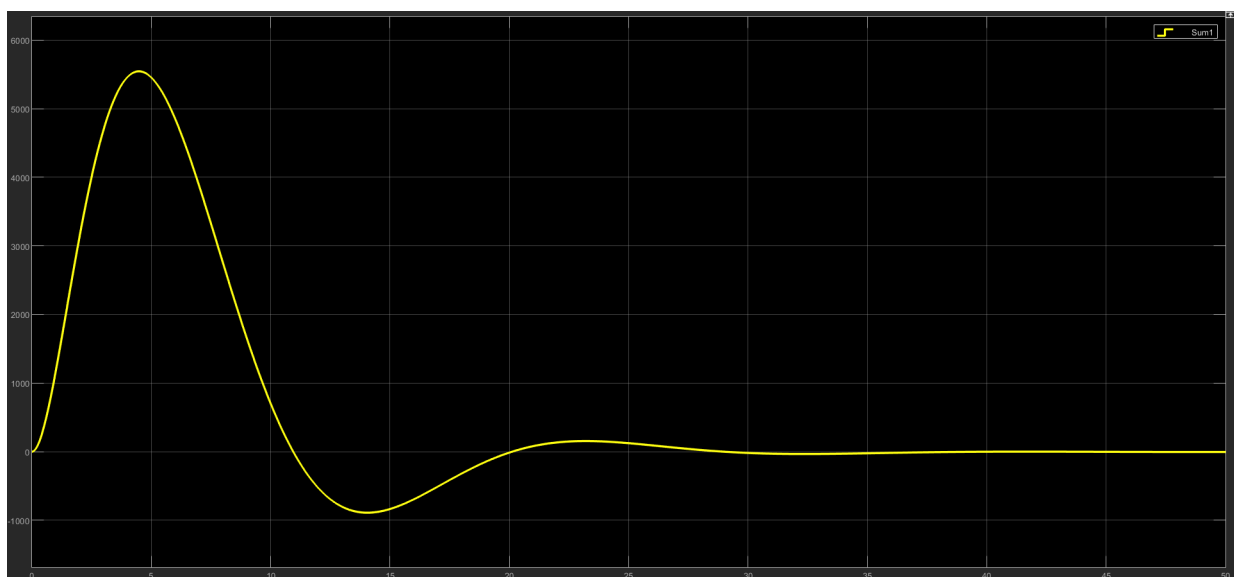


شکل ۲۹: وضعیت state ها پس از اعمال اغتشاش به سیستم با کنترلر linear MPC  
همانطور که مشاهده می‌شود، یک نوسان بسیار کوچک به سرعت‌ها وارد شده است.

با توجه به کوچکی اغتشاش، نمایش تغییرات پس از اعمال کنترلر جدید بسیار مشکل است بنابراین بجای اغتشاش داده شده در سوال، از  $D = 2000\sin(4\pi t)$  استفاده می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

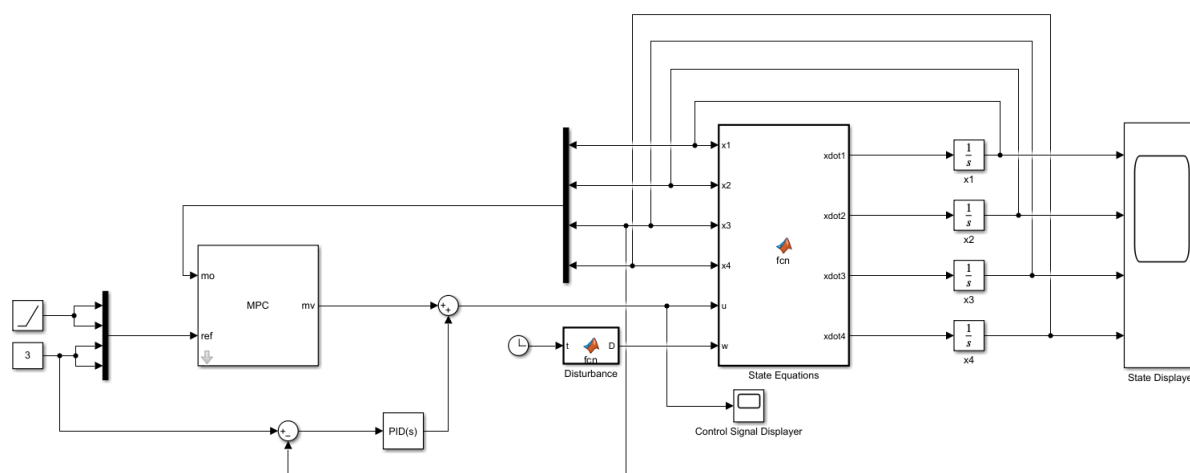


شکل ۳۰: وضعیت state ها پس از اعمال اغتشاش بزرگتر به سیستم با کنترلر linear MPC



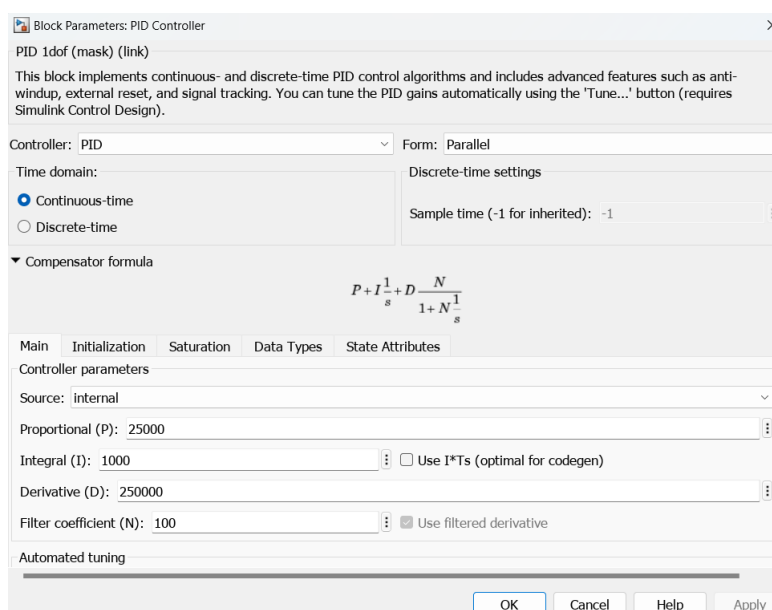
شکل ۳۱: سیگنال کنترلی پس از اعمال اغتشاش بزرگتر با کنترلر linear MPC

حال سعی می‌کنیم با اضافه کردن کنترلر PID و استفاده از کنترلر MPC اثر اغتشاش را کاهش دهیم.



شکل ۳۲: سیستم دارای اغتشاش با کنترلر MPC tub

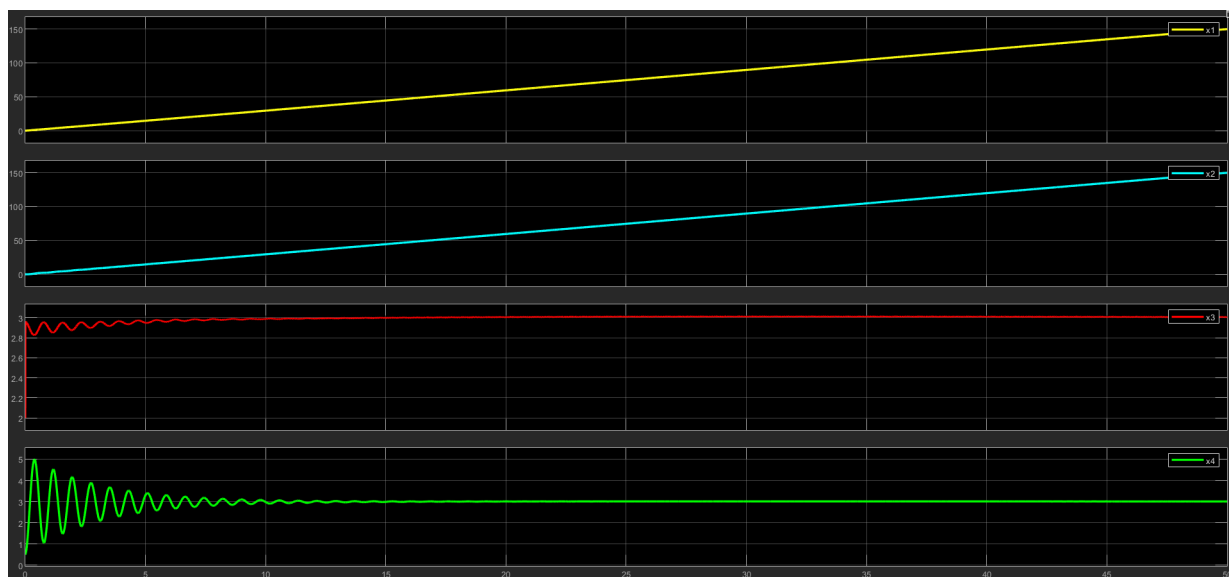
ضرایب PID به دست آمده در تصویر زیر قابل مشاهده است.



شکل ۳۳: ضرایب PID به کار رفته در MPC tub



در ادامه سیگنال کنترلی و خروجی‌های سیستم با اغتشاش و کنترلر tube MPC را بررسی می‌کنیم.

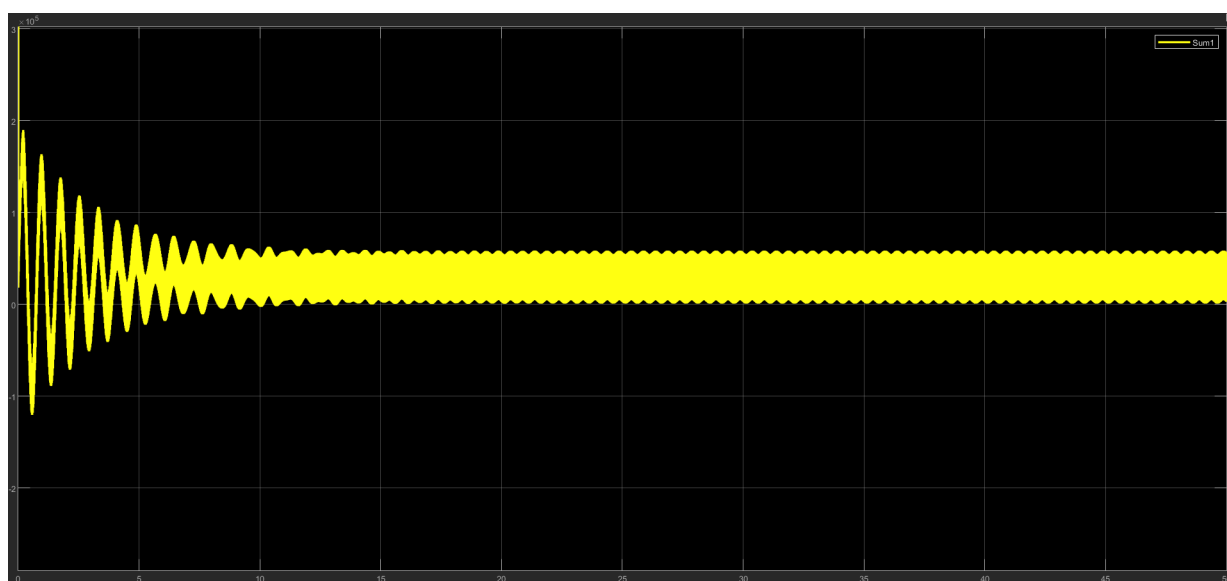


شکل ۳۴: وضعیت state ها پس از اعمال اغتشاش بزرگتر به سیستم با کنترلر tube MPC



شکل ۳۵: سیگنال کنترلی پس از اعمال اغتشاش بزرگتر با کنترلر tube MPC

همچنین سیگنال کنترلی با زوم بیشتر جهت نمایش بهتر قرار می گیرد.



شکل ۳۶: سیگنال کنترلی با بزرگنمایی پس از اعمال اغتشاش بزرگتر با کنترلر tube MPC

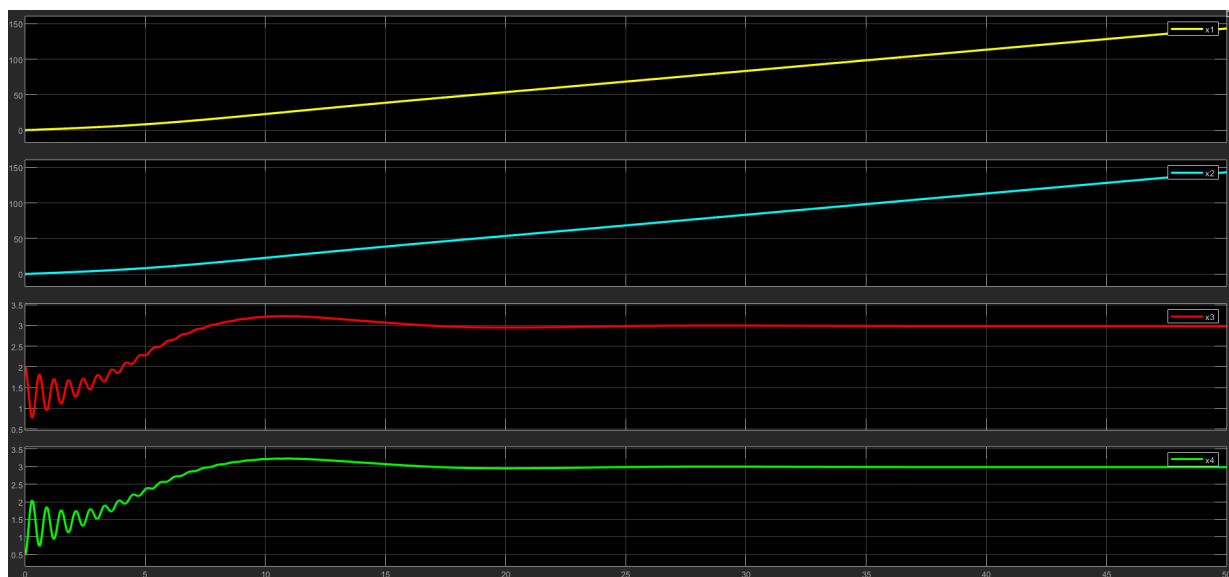
همانطور که از تصاویر قابل مشاهده است، اثر اغتشاش بسیار کاهش یافته است و سرعت سیستم نیز بالا رفته ولی سیگنال کنترلی نیز به شدت بزرگ شده است و برای خنثی سازی اغتشاش، حالت نوسانی پیدا کرده است. همچنین  $x_4$  دچار فراجاهش شده است که به خاطر بالا بودن ضرایب PID است.

## ۴.۲ بخش چهارم

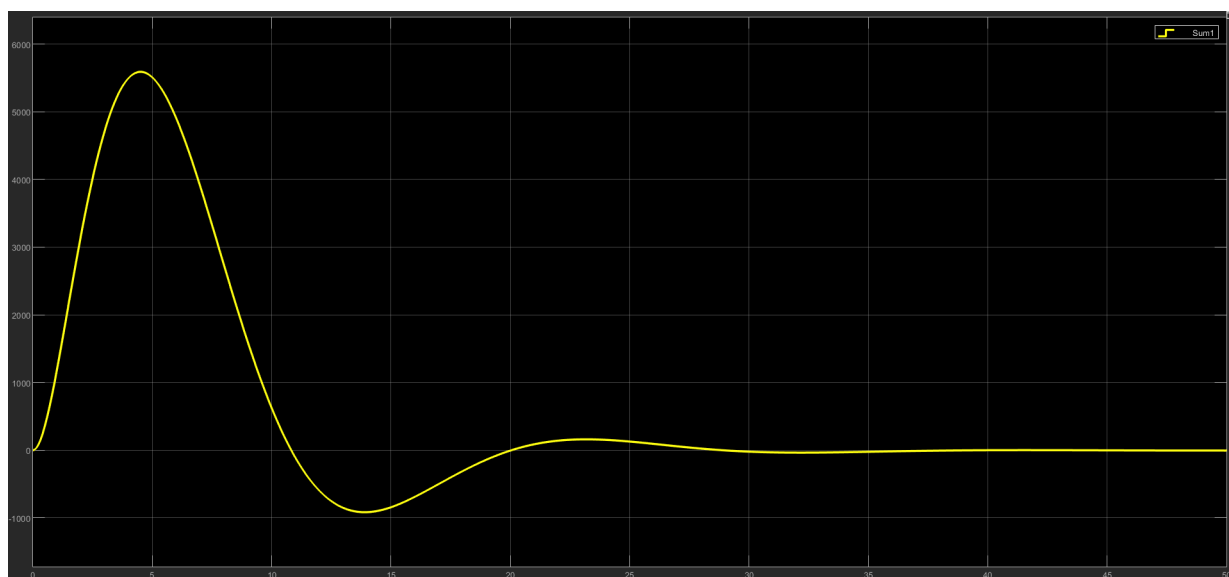
در این قسمت به بررسی اثر نایقینی می‌پردازیم. برای این منظور، متغیرها به صورت زیر تغییر می‌کنند.

```
1 function [xdot1, xdot2, xdot3, xdot4] = fcn(x1, x2,
2     x3, x4, u, w, t)
3 % Parameter Values with uncertainty
4
5 m1 = 10000;
6 m1 = m1 + (m1/10) * sin(t);
7 m2 = 8000;
8 m2 = m2 + (m2/10) * sin(t);
9 k = 500000;
10 k = k + (k/20) * sin(t);
11 c = 5000;
12 c = c + (c/20) * sin(t);
13
14 % State-Equations
15
16 xdot1 = x3;
17 xdot2 = x4;
18 xdot3 = (1 / m1) * (k * (-x1 + x2) + c * (-x3 + x4)
19     + u + w);
20 xdot4 = (1 / m2) * (k * (x1 - x2) + c * (x3 - x4));
```

سیگنال کنترلی و وضعیت سیستم با حالت بدون نایقینی تفاوت محسوسی ندارد. ضرایب MPC همانند قبل است.



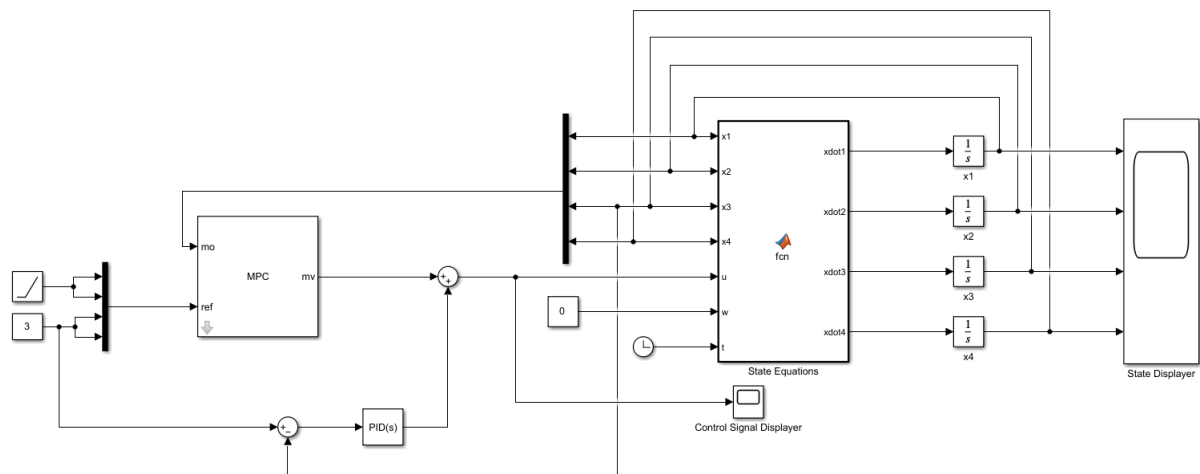
شکل ۳۷: وضعیت state ها پس از اعمال نایقینی به سیستم با کنترلر linear MPC



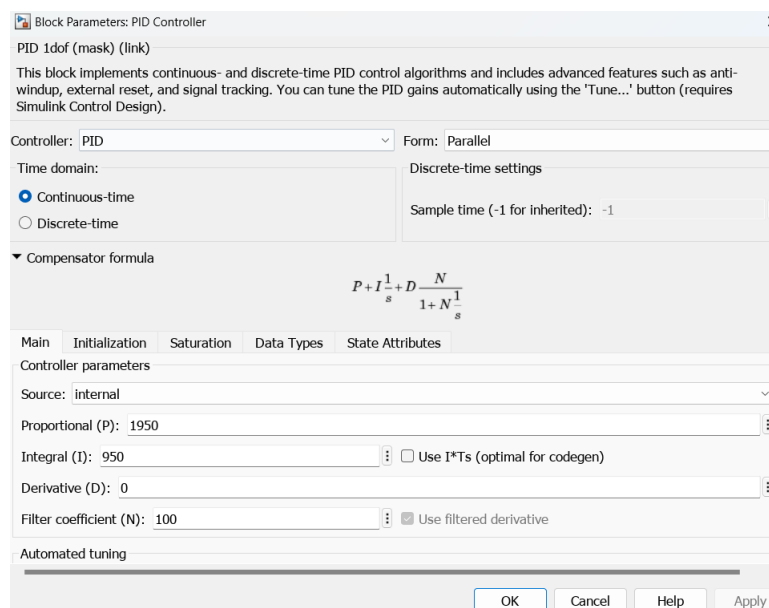
شکل ۳۸: سیگنال کنترلی پس از اعمال نایقینی با کنترلر linear MPC

اگر از فاصله خیلی نزدیک وضعیت state ها را بررسی کنیم، مشاهده می‌کنیم که خطای ماندگاری در حال بزرگ شدن در سیستم است. مقدار این خطا در ۵۰ ثانیه بسیار کوچک است.

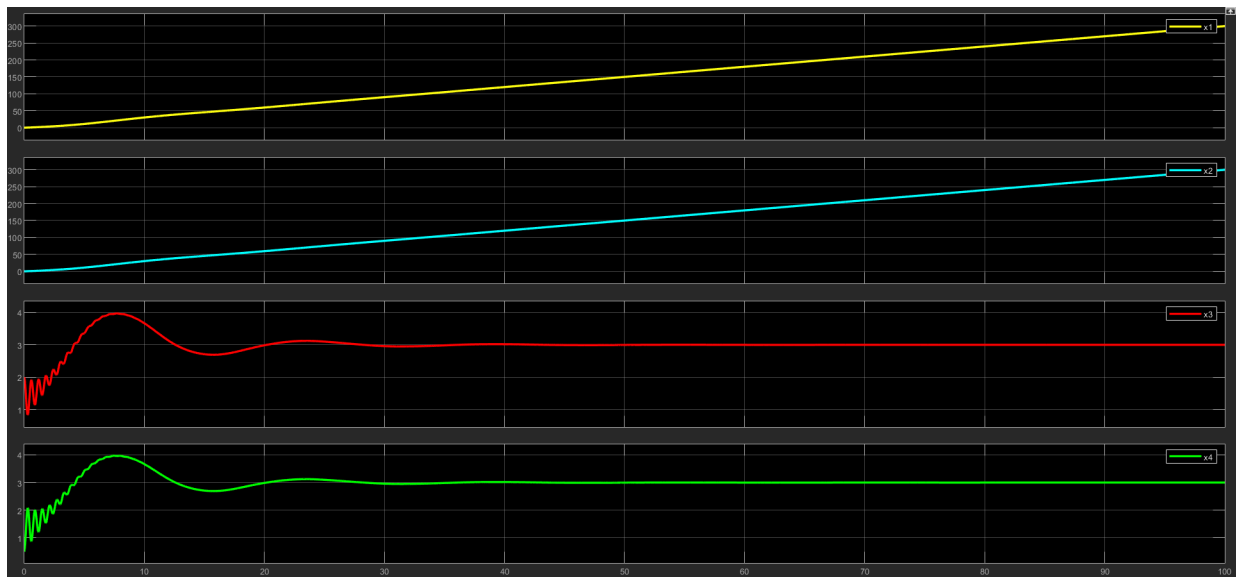
حال با کنترلر tube MPC خروجی های سیستم را بررسی می کنیم.



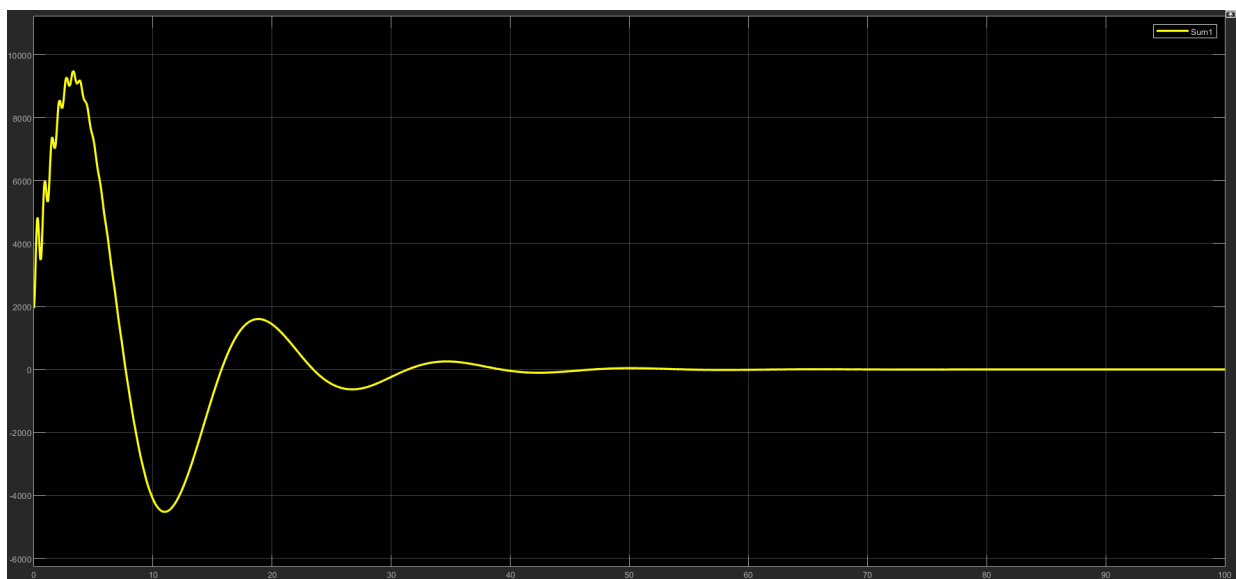
شکل ۳۹: سیستم دارای نایقینی با کنترلر tube MPC



شکل ۴۰: ضرایب PID به کار رفته در tub MPC



شکل ۴۱: وضعیت state ها پس از اعمال نایقینی به سیستم با کنترلر tube MPC  
با این کنترلر، خطای ماندگاری که در حال زیاد شدن بود از بین رفته و سیستم به سمت پایداری حرکت می‌کند.



شکل ۴۲: سیگنال کنترلی پس از اعمال نایقینی با کنترلر tube MPC  
تفاوت سیگنال کنترلی با حالت قبل قابل مشاهده است.