دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده برق- گروه مکاترونیک

تمرین درس رباتیک دوره کارشناسی ارشد

رشته مهندسی مکاترونیک

عنوان

تحقیق رباتیک

نگارش

علیرضا امیری

آذر ۱۴۰۳

تحقیق اول، ماتریس پاد متقارن

مقدمه

یک ماتریس پادمتقارن A یک ماتریس مربعی است که شرط زیر را برقرار می‌کند:

$$A^T = -A. \tag{1}$$

این ماتریس‌ها کاربردهای متعددی در فیزیک، مهندسی و گرافیک کامپیوتری دارند.

خواص ماتریس‌های پادمتقارن

دترمینان

دترمینان یک ماتریس پادمتقارن با مرتبه فرد همیشه صفر است:

$$\det(A) = 0, \qquad \text{اگر } A \text{ دارای مرتبه } (2n+1) \times (2n+1) \text{ باشد.} \tag{2}$$

این نتیجه از خاصیت $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ حاصل می‌شود.

مقادیر ویژه

مقادیر ویژه یک ماتریس پادمتقارن یا صفر هستند یا به‌صورت اعداد موهومی محض:

$$\lambda = i\mu, \qquad \mu \in \mathbb{R}. \tag{۳}$$

این خاصیت از معادله مشخصه ماتریس و تبدیلات مشابهت آن نتیجه می‌شود.

اثر

از آنجا که عناصر قطری یک ماتریس پادمتقارن همواره صفر هستند، اثر آن نیز صفر خواهد بود:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_i A_{ii} = ۰. \tag{۴}$$

رتبه

رتبه یک ماتریس پادمتقارن همواره یک عدد زوج است. این ویژگی از تجزیه ماتریس به فرم‌های متعارف آن ناشی می‌شود.

عملیات روی ماتریس‌های پادمتقارن

جمع و ضرب عددی

اگر A و B ماتریس‌های پادمتقارن باشند، مجموع آن‌ها نیز پادمتقارن خواهد بود:

$$(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B). \tag{۵}$$

به همین ترتیب، برای هر عدد حقیقی k داریم:

$$(kA)^T = kA^T = k(-A) = -kA. \tag{۶}$$

ضرب ماتریسی

اگر A و B ماتریس‌های پادمتقارن باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها در صورتی که جابه‌جایی‌پذیر باشند، پادمتقارن خواهد بود:

$$AB = -BA \Rightarrow AB \text{ پادمتقارن است}. \tag{۷}$$

کاربردهای ماتریس‌های پادمتقارن

مکانیک

ماتریس‌های پادمتقارن برای نمایش تکانه زاویه‌ای و تسهیل محاسبات در دینامیک چرخشی به کار می‌روند.

الکترومغناطیس

تنسور میدان الکترومغناطیسی یک ماتریس پادمتقارن است که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را ترکیب می‌کند.

گرافیک کامپیوتری

در تبدیل‌های دورانی و محاسبات ضرب خارجی در رندر سه‌بعدی استفاده می‌شوند.

کنترل

ماتریس‌های پادمتقارن برای توصیف تقارن‌ها در سامانه‌های هامیلتونی و قوانین پایستگی به کار می‌روند.

مکانیک کوانتومی

در مطالعه عملگرهای اسپین و تبدیلات بنیادی ظاهر می‌شوند.

ارتباط با ماتریس‌های متقارن

هر ماتریس مربعی B را می‌توان به دو مؤلفه متقارن و پادمتقارن تجزیه کرد:

$$B = \frac{۱}{۲}(B + B^T) + \frac{۱}{۲}(B - B^T). \tag{۸}$$

این تجزیه تحلیل و دسته‌بندی ماتریس‌ها را ساده‌تر می‌کند.

نتیجه‌گیری

ماتریس‌های پادمتقارن نقش مهمی در کاربردهای ریاضی و مهندسی دارند. ویژگی‌های آن‌ها از جمله قیود روی دترمینان، مقادیر ویژه، و تجزیه ساختاری، آن‌ها را به ابزارهای اساسی در علوم نظری و کاربردی تبدیل کرده است.