آموزش محتوایی

ریاضیات گسسته

مولف

علیرضا حق شناس

فهرست

مقدمه مولف

با نام و یاد خدای مهربون

با توجه به اهمیت ریاضیات در کنکور سراسری و نیاز به درصد بالا در این مبحث برای کسب نتیجه مطلوب و اینکه اکثر کنکوری ها روی حسابان وقت بیشتری می گذارند و عده ای از درس گسسته و آمار و احتمال بخاطر جنس درس ، غافل می شوند ،بر این شدم تا آموزشی محتوایی از ریاضیات گسسته را به سبکی دلنشین برای کنکوری های عزیز به ارمغان بیاروم .

امیدوارم زحمات اینجانب مورد استفاده شما دوستان قرار گرفته باشد .

به امید کسب بهترین نتایج

علیرضا حق شناس

فصل 1

Number Theory

نظریه اعداد

بخش پذیری در اعداد صحیح

✓ با اعداد صحیح کار می کنیم

✓ $a|b \rightarrow aq = b \rightarrow$
- a عاد می کند b را
- a می شمارد b را

نکته طلایی: قوی | ضعیف

از این پس تمام نکات را با مقایسه قدرت (قوی و ضعیف) بیان می کنیم.

❋ ما در این مبحث هر قوی و ضعیفی را مورد بحث قرار نمی دهیم بلکه قوی و ضعیفی را مورد بحث قرار می دهیم که در یک رابطه بخش پذیری قرار گیرند.

✓ دو بیان برای رابطه بخش پذیری
- قوی مضرب ضعیف است
- قوی بر ضعیف بخش پذیر است

- ضعیف شمارنده قوی است
- ضعیف مقسوم علیه قوی است
- ضعیف عامل قوی است

✓ اگر قوی بر ضعیف بخش پذیر نباشد می نویسیم ← قوی ∤ ضعیف مثال: $3 \nmid 14$

✓ علامت در بخش پذیری مهم نیست. قوی یا ضعیف یا هر دو را می توان منفی یا مثبت قرار داد.

مثال: $a|b \rightarrow -a|b$ و $a|-b \rightarrow -a|-b$

✍**نکته:**

قوی | ضعیف

اگر $0 \neq$ قوی ← | قوی | $\leq$ | ضعیف |

اگر $0 =$ قوی ← | قوی | $<$ | ضعیف |

اگر قوی و ضعیف عدد طبیعی باشند ← در روابط بالا علامت قدرمطلق را درنظر نمی گیریم

اگر همزمان قوی | ضعیف و ضعیف | قوی ← |قوی| = |ضعیف|

مثال: اگر $a^4|b^4+c^4$ و $a^4>b^4+c^4$ کدام گزینه نادرست است؟

1) $|a|=1$ 2) $|c|=|b|$ 3) $b=0$ 4) $c=0$

پاسخ: $0 = b^4+c^4 =$ (قوی) ← $b^4=0$ و $c^4=0$ ← صفر $= b = c$

گزینه 1

✓ قوی | ضعیف ↔ {مقسوم علیه های قوی} $\subseteq$ {مقسوم علیه های ضعیف}

✍**چند نکته درباره قوی و ضعیف**

1) ترتیب اعداد در بحث قوی و ضعیفی: قوی‌ترین {0،...،6،5،4،3،2،1} ضعیف ترین

2) صفر قوی ترین عدد است ← مضرب تمام اعداد است. $\boxed{a|0}$

❈ if ضعیف = 0 → قوی = 0

❈ if قوی = 0 → ضعیف = هر عدد صحیح دلخواه

3) ±1 ضعیف ترین عدد است ← تمام اعداد را می شمارد (عاد می کند) $\boxed{\pm1|a}$

هر عدد صحیح دلخواه = قوی $\rightarrow$ ضعیف = ±1 if ⁕

ضعیف = ±1 $\rightarrow$ قوی = ±1 if ⁕

4) هر عددی خودش را می شمارد $\boxed{a|a}$

5) صفر، صفر را می شمارد $\boxed{0|0}$

مثال: اگر $2n^2+1|0$ آنگاه مجموعه مقادیر ممکن برای n کدام است؟

1) $\emptyset$ 2) $\{0\}$ 3) $\{\pm1\}$ 4) $\mathbb{Z}$

پاسخ: می دانیم اگر قوی=0 $\leftarrow$ ضعیف = هر عدد صحیح دلخواه بنابراین گزینه 4 درست است.

نکته: همواره در یک رابطه بخش پذیری می توان قوی را قوی تر و ضعیف را ضعیف تر کرد.

$$a|b \rightarrow \downarrow a|b\uparrow$$

- عوامل قوی شدن $\leftarrow$ {افزایش توان، ضرب شدن در یک عدد صحیح، ک م م}
- عوامل ضعیف شدن $\leftarrow$ {کاهش توان، تقسیم شدن بر یک عدد صحیح، ب م م}

+ اتحادها

توجه:

- ✓ جمع و تفریق از عوامل ضعیف و قوی شدن نیست.
- ✓ می دانیم قوی را می توان قوی تر و ضعیف را ضعیف تر کرد اما برعکس (ضعیف را قوی کرد و قوی را ضعیف کردن) الزاماً درست نیست.
- ✓ می توان طرفین یک رابطه بخش پذیری را با هم قوی یا با هم ضعیف کرد.

مثال:

$$a|b \quad \rightarrow \quad a^n|b^n \text{ یا } ma|mb$$

$$a^n|b^n \quad \rightarrow \quad a|b$$

$$ma|mb \quad \rightarrow \quad a|b$$

مثال: اگر $a|b$ کدام رابطه را لزوماً نمی توان نتیجه گرفت؟ $(C \in \mathbb{Z})$

1) $a|b^2$ 2) $a|bc$ 3) $a|a+b$ 4) $a|b+c$

پاسخ: گزینه 4 زیرا جمع از عوامل قوی شدن نمی باشد.

❖اتحاد ها

از اتحادها در قوی و ضعیفی استفاده می شود (مزدوج، چاق و لاغر، مربع دوجمله ای و ...)

✓ اگر $n|m \leftarrow x^n - y^n|x^m - y^m$

توان قوی|توان ضعیف ☐-△|☐-△

✓ اگر $\frac{m}{n} = \text{فرد} \leftarrow x^n + y^n|x^m + y^m$

$\text{فرد} = \frac{\text{توان قوی}}{\text{توان ضعیف}}$ ☐+△|☐+△

✓ اگر $\frac{m}{n} = \text{زوج} \leftarrow x^n + y^n|x^m - y^m$

$\text{زوج} = \frac{\text{توان قوی}}{\text{توان ضعیف}}$ ☐+△|☐-△

مثال : به ازای کدام مقدار n رابطه $9|5^n + 13^n$ برقرار است؟

1) 2 2) 3 3) 6 4) 8

پاسخ: می دانیم $13^n + 5^n|13 + 5$ ← فرد ← $\frac{n}{1} =$ ← فقط در گزینه 2 عدد فرد وجود دارد.

❖قوی و ضعیف کردن به طور نامساوی

تیپ 1) رابطه توان 1 دارد ← به توان می رسانیم.
رابطه توان دارد ← به توان 1 می رسانیم.
❈ یک طرف رابطه $a|b$ است.

✓ می توان طرفین را به طور نامساوی قوی کرد، اما طرف قوی باید قوی تر شود.

❈ **مثال**: $a|b \to a^2|b^3$ و $2|12 \to 2^9|12^{20}$

✓ می توان طرفین را به طور نامساوی ضعیف کرد، اما طرف ضعیف باید ضعیف تر شود.

❈ **مثال**: $a^7|b^4 \to a|b$ و $4^3|8^2 \to 4|8$

تیپ 2) رابطه توان دارد ← به توان دیگر می رسانیم. ❈ یک طرف رابطه $a|b$ نیست.

✓ برای تشخیص درستی رابطه، رابطه ها را به صورت زیر می نویسیم:

حالت اولیه ← حالت ثانویه $(\mathbf{1} \to \mathbf{2})$

بعد می گوییم:

حاصل ضرب توان های نزدیک $\geq$ حاصل ضرب توان های دور (نزدیک در نزدیک $\geq$ دور در دور)

❈ **مثال**: $a^n|b^m \to a^x|b^y \Leftarrow xm \geq yn$

❖تعدی

طرف قوی یک رابطه با طرف ضعیف یک رابطه دیگر برابره

$$a|b\ ,\ b|c \to a|c$$

⚠ **توجه:** اگر طرف قوی یک رابطه و طرف ضعیف یک رابطه دیگر دارای پارامتر یکسان باشد و بخواهیم آن پارامتر را بدست بیاوریم ← استفاده از تعدی ممنوع

راه حل: رابطه بخش پذیری برای رابطه ای که پارامتر در طرف قوی است را باز کرده و به صورت تساوی می نویسیم و این تساوی را در طرف ضعیف رابطه دیگر جاگذاری می کنیم.

مثال: اگر $12|m$ و $m|180$ برای m چند جواب وجود دارد؟

پاسخ: $12|m \leftarrow m = 12k \leftarrow 12k|180 \leftarrow k|15 \leftarrow k = \{\pm1,\pm3,\pm5,\pm15\}$

8 جواب صحیح برای k و به تبع 8 جواب برای m وجود دارد.

✍**نکته:** طرفین دو رابطه بخش پذیری را می توان در هم ضرب کرد.

❋ برای مواردی که طرفین رابطه ها دارای مشترکات باشد و با این کار به رابطه ساده تری دست یافت.

❋ $a|b\ ,\ c|d \leftarrow ac|bd$

مثال: $xy|a\ ,\ 2a|y^2 \leftarrow 2axy|y^2a \leftarrow 2x|y$

❖ترکیب خطی

✓ ترکیب خطی نشان می دهد که اگر دو عدد، عامل مشترک داشته باشند، با ترکیب خطی آنها از بین نمی رود.

$$\left.\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix}\right\} \rightarrow a|mb \pm nc$$

یافتن طرف ضعیف یا تعداد جواب های آن

* روش کلی حل: اگر هر 2 طرف رابطه پارامتری باشد و طرف ضعیف را بخواهیم پیدا کنیم با استفاده از ترکیب خطی، پارامتر طرف قوی را از بین می بریم و به یک عدد معلوم می رسیم. در این صورت جواب های ممکن برای طرف ضعیف، مقسوم علیه های بدست آمده در طرف قوی است.

⚠ **توجه:** همیشه باید با کوچکترین (کم ضریب ترین) ترکیب خطی پارامتر قوی را حذف کنیم.

مثال: $a|6m+1$ و $a|8m-1$ آنگاه تعداد جواب های a چند است؟

پاسخ: $[6,8]=24 \leftarrow$ کوچکترین ضریب

$a|4(6m+1)-3(8m-1) \Rightarrow a|7 \rightarrow a=\pm 1$ و ± 7 4 تا جواب

مثال: اگر $a|2n-3$ و $a|n^2+1$ آنگاه تعداد جواب های ممکن برای a کدام است؟

پاسخ: $a|2(n^2+1)-n(2n-3) \Rightarrow \begin{cases} a|3n+2 \\ a|2n-3 \end{cases} \rightarrow a|13 \quad a=\{\pm 1$ و $\pm 13\}$

4 تا جواب

✓ اگر طرف قوی یک رابطه درجه اش بیشتر باشد، طرف قوی کم درجه تر را در پارامتر (مثلاً n) ضرب می کنیم تا هم درجه شوند.

تکنیک

1) اگر یک طرف رابطه (قوی یا ضعیف) درجه 1 باشد و ضریب پارامتر برابر یک باشد با ریشه این عبارت کار می کنیم. $\boxed{x-\alpha}$

* $\left.\begin{matrix} n|x-\alpha \\ n|f(x) \end{matrix}\right\} \to n|f(\alpha)$ ریشه قوی رو می ذاریم تو قوی

** $x-\alpha|f(x) \to x-\alpha|f(\alpha)$ ریشه ضعیف رو می ذاریم تو قوی

*** $f(x)|x-\alpha \to f(x)|f(\alpha)$ ریشه قوی رو می ذاریم تو ضعیف، ضعیف رو جانشین قوی می کنیم.

2) اگر هر دو طرف دو رابطه یا یک رابطه عبارت درجه 1 با ضریب غیر یک داشته باشیم.

* $\left.\begin{matrix} w|ax+b \\ w|mx+n \end{matrix}\right\} - \to w|an-bm$ بدون توجه به x ضربدری و منها

** $ax+b|mx+n$

روش 1 $\to ax+b|mx+n \to ax+b|an-bm$

بدون توجه به x دور در دور منها نزدیک در نزدیک

روش 2 $\to \left.\begin{matrix} ax+b|ax+b \\ ax+b|mx+n \end{matrix}\right. - \to ax+b|an-bm$

بدون توجه به x ضربدری و منها

⚠ **توجه:** در نهایت طرف قوی را بر ب.م.م a و m { ضرایب قلدر} (a,m) تقسیم می کنیم.

3) یک رابطه درجه 2 و رابطه دیگر درجه 1 با ضریب است.

$$\left.\begin{array}{l} w|ax^2+bx+c \\ w|mx+n \end{array}\right\} \ast \qquad w|an^2-mnb+cm^2 \leftarrow$$ بدون توجه به x

$** \quad mx+n|ax^2+bx+c \rightarrow mx+n|an^2-mnb+cm^2$

$*** \quad ax^2+bx+c|mx+n \rightarrow ax^2+bx+c|an^2-mnb+cm^2$

⚠ **توجه:** در نهایت طرف قوی را بر ب.م.م a و m {ضرایب قلدر} (a,m) تقسیم می کنیم.

✍**نکته:** اگر $f(x)$ چند جمله ای برحسب x بدون مقدار ثابت باشد:

$$a|b \rightarrow a|f(a)+f(b)$$

مثال: $a|b \rightarrow a|3a^7+5a^4-6b^2$

مثال : اگر $a|n-2$ و $a|2n^2+1$ آنگاه تعداد جواب های صحیح a کدام است ؟

1) 0   2) 2   3) 4   4) 6

پاسخ : با توجه به تکنیک ، در این فرم صورت سوال ، ریشه قوی را در قوی قرار می دهیم .

یعنی $n-2=0$ پس $n=2$ را در $2n^2+1$ قرار می دهیم .

$$a|2(2)^2+1 \longrightarrow a|9 \longrightarrow a=\pm1,\pm3,\pm9$$

گزینه 4 – شش مقدار صحیح برای a وجود دارد.

مثال : اگر دو رابطه بخش پذیری $a|3n+1$ و $a|2n+5$ برقرار باشد ، چند مقدار صحیح

برای a وجود دارد ؟

1) 0   2) 2   3) 4   4) 6

پاسخ : با توجه به تکنیک ، در این فرم صورت سوال در طرف قوی ، بدون توجه به x ضربدری و منها

$$a|3\times5-2\times1 \longrightarrow a|13 \longrightarrow a=\pm1,\pm13$$

گزینه 3 – چهار مقدار صحیح برای a وجود دارد.

مثال : اگر $4n+3|-2n^2+3n+5$ آنگاه تعداد جواب صحیح n کدام است ؟

1) 0   2) 2   3) 4   4) 8

پاسخ : روش اول : استفاده از تکنیک .

$$4n+3|-2\times(3^2)+3\times(-1)\times(3\times4)+5\times(4^2)$$

$$4n+3|-18-36+80 \longrightarrow 4n+3|26$$

$$4n+3=\pm1,\pm2,\pm13,\pm26$$

به ازای $4n+3=-1,-13$ ، n برابر $-1,-4$ می شود. به ازای بقیه مقادیر، n عدد صحیح نمی شود .

پس دو مقدار – گزینه 2

روش دوم : استفاده از روش مفهومی .

$$\left.\begin{array}{r}4n+3|-2n^2+3n+5\\ 4n+3|4n+3\end{array}\right] \xrightarrow[\times n]{\times 2} \left\{\begin{array}{l}4n+3|-4n^2+6n+10\\ 4n+3|4n^2+3n\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{+} \begin{cases} 4n+3|9n+10 \\ 4n+3|4n+3 \end{cases} \xrightarrow[\times 9]{\times 4} \begin{cases} 4n+3|36n+40 \\ 4n+3|36n+27 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-} \quad 4n+3|26$$

حال همانند قسمت آخر روش اول به دو جواب می رسیم .

❖نقاط با مختصات صحیح تابع (طول و عرض صحیح)

باید تابع به صورت کسری باشد ← یا به صورت کسری دادند

یا با فاکتورگیری از y به صورت کسری بنویسیم

$$y = \frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}} \quad \rightarrow \quad \text{مخرج}|\text{صورت}$$

❖ ترکیب قوانین ←
- ترکیب خطی
- قدرت (قوی یا ضعیفی)
- تعدی

مثال: اگر $ab|c$ و $c|a-b$ آنگاه:

1) $|b| = |c|$ 2) $a|b$ 3) $|a| = |b|$ 4) $c|a$

پاسخ:

$$ab|c\ ,c|a-b \xrightarrow{\text{تعدی}} ab|a-b \begin{cases} a|a-b \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a|b \\ b|a-b \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} b|a \end{cases} \rightarrow |a|=|b|$$

قوی و ضعیف

گزینه 3

❖

❖ عدد اول

هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که به جز یک و خودش شمارنده ی مثبت دیگری نداشته باشد.

- ✓ P عدد اول است اگر و تنها اگر فقط بر خودش و یک بخش پذیر باشد.
- ✓ اقلیدس با برهان خلف اثبات کرد که مجموعه اعداد اول نامتناهی است.
- ✓ اعداد طبیعی
  - نه اول و نه مرکب ← فقط عدد یک
  - اول ←
    - فقط 4 و شمارنده صحیح دارد ± 1 و $\pm p$
    - فقط 2 شمارنده مثبت (طبیعی) دارد 1 و p
  - مرکب ←
    - حداقل 3 شمارنده مثبت
    - حداقل بر یکی از اعداد اول کوچکتر از خودش بخش پذیر است

نکات:

✓ 2 کوچکترین و تنها عدد اول زوج

- اگر حاصل جمع یا تفاضل دو عدد اول فرد شود ← عدد کوچکتر حتماً 2 است.
- اگر جمع 3 عدد اول زوج شود ← عدد کوچکتر حتماً 2 است.

✓ تنها اعداد اول متوالی 2 و 3

- اگر تفاضل دوعدد اول برابر یک شود ← عدد بزرگ=3
  عدد کوچک=2
- اگر p و q اعداد اول بزرگتر از 3 باشند ← اختلاف آنها حداقل 2 است.

✓ اگر حاصل ضرب دو عدد صحیح برابر با عددی اول مانند p شود ← عدد بزرگ = p
عدد کوچک = 1

مثال: معادله $9x^2 - y^2 = 17$ را در مجموعه ی اعداد طبیعی حل کنید.

پاسخ:

$$9x^2 - y^2 = 17 \rightarrow \underbrace{(3x - y)}_{\text{عدد کوچک}}\underbrace{(3x + y)}_{\text{عدد بزرگ}} = 17 \ \text{عدد اول} \rightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x + y = 17 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 8 \end{cases}$$

✓ اگر a عدد طبیعی و p عدد اول باشد:

- a نسبت به p اول است $p \nmid a$ $\quad (a,p)=1$
- یا
- a بر p بخش پذیر است $p|a$ $\quad (a,p)=p$

✓ اگر a عدد طبیعی و p عدد اول: $a|p$ ← $\left.\begin{matrix} a=1 \\ \text{یا} \\ a=p \end{matrix}\right\}$

✓ اگر a عدد طبیعی و p عدد اول: $a|p^n$ ← a می تواند $n+1$ مقدار بپذیرد.

عدد 1   n حالت از توان های p

❖ بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) (بزرگترین فاکتور مشترک)

$$\text{If} \quad \left.\begin{matrix} 1)\ d|a\ ,\ d|b \\ 2)\ \forall m>0\ ; m|a\ ,\ m|b\ \rightarrow m \le d \end{matrix}\right\} \rightarrow (a,b)=d$$

✓ حاصل ضرب عامل های مشترک با کوچکترین توان

✓ علامت در ب.م.م تأثیر ندارد و خروجی همواره مثبت است.

✓ ب.م.م هر عدد و 1 برابر 1 است.

✓ ب.م.م هر عدد و صفر برابر با قدرمطلق آن عدد است.

✓ ب.م.م $(0,0)$ تعریف نشده است.

✓ اگر $a|b$ ← $(a,b)=|a|$

✓ $\big(a,(a,b)\big)=(a,b)$

✓ ترکیب خطی 2 عدد مضربی از ب.م.م آن دو عدد است. $ma+nb=k(a,b)$

کوچکترین عضو ترکیب خطی $ma+nb$ برابر با (a,b) است.

✓ ب.م.م با اعداد هماهنگ است و با آنها قوی و ضعیف می شود.

$$(a,b) = d \leftrightarrow (ma,\mathrm{m}b) = md$$

$$(a,b) = d \leftrightarrow (a^n,b^n) = d^n$$

❖ دو عدد متباین

اگر ب.م.م دو عدد برابر 1 شود (هیچ عامل مشترکی نداشته باشند) دو عدد نسبت به هم اول (متباین) می باشند.

❄ متباین ها

1) 2 عدد متوالی از نظر قدرمطلق   مثال: $(10,-11) = 1$

2) 2 عدد فرد متوالی $(2k+1,2k-1) = 1$

3) تمام عددهای فرد نسبت به توان های 2 $(2^n,2k+1) = 1$

4) دو عدد اول $(p,q) = 1$

5) تمام اعداد نسبت به 1 یا -1 $(a,\pm 1) = 1$

❖ محاسبه ب.م.م دو عبارت پارامتری $\big(f(a),f(b)\big) = ?$

با استفاده از ترکیب خطی پارامتر طرف قوی را از بین می بریم $\left.\begin{matrix} d|f(a) \\ d|f(b) \end{matrix}\right\} \rightarrow$

✓ در محاسبه ی ب.م.م دو عبارت پارامتری ممکن است همه جواب های بدست آمده قابل قبول نباشند.

✓ در محاسبه ی ب.م.م a و b اگر حداقل یکی از آنها بر c بخش پذیر نباشند، ب.م.م نمی تواند c یا مضارب c باشد.

مثال: اگر یکی از عبارت ها $7n+2$ باشد، ب.م.م آن با عبارت دیگر، نمی تواند 7 یا مضارب 7 باشد.

✓ اگر بخواهیم مقادیری از a و b را پیدا کنیم که به ازای آن نسبت به هم غیر اول باشند، با روش حذف پارامتر در طرف قوی به یک عدد اول می رسیم. در این حالت یکی از دو عبارت (هر کدام که ضریب کوچکتری دارد) را در پیمانه ب.م.م (همون عدد اول) برابر صفر قرار می دهیم.

❄ استفاده از هم نهشتی خیلی خوب است.

❄ در نکته بالا اگر طرف قوی مرکب شد، حل مسأله طولانی می شود.

✓ اگر بخواهیم 2 عبارت نسبت به هم اول باشند ← اصل متمم:

حالاتی که نسبت به هم اول اند $=$ کل $-$ {حالاتی که نسبت به هم اول نیستند}

✓ در محاسبه ی ب.م.م می توان از عامل های مشترک فاکتور گرفت و در آخر در ب.م.م ضرب کرد.

$$(ka,kb)=k(a,b)$$

مثال: اگر $a^2b|3b^2+c$ آنگاه حاصل (b,c) کدام است ؟

1) $|a|$ 2) $|b|$ 3) $|c|$ 4) 1

پاسخ : طرف ضعیف را ضعیف تر می کنیم

$b|3b^2+c \longrightarrow$ می دانیم $b|3b^2 \longrightarrow b|c$

پس حاصل (b,c) برابر $|b|$ - گزینه 2

❖ کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج مشترک

If $\left.\begin{array}{l}1)\ a|c\ ,\ b|c\\ 2)\ \forall m>0\ ;\ a|m\ ,\ b|m\ \rightarrow c\le m\end{array}\right\}\rightarrow [a,b]=c$

✓ حاصل ضرب عامل های مشترک با بیشترین توان در غیر مشترک ها

✍**نکته:** $[a,b]=\frac{a\times b}{(a,b)}$

تعمیم نکته فوق: $[a,b](a,b)=a\times b$ حاصل ضرب = ب.م.م × ک.م.م

✓ اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م با حاصل ضرب برابر است.

✍**چند نکته:**

$(a,\pm 1)=1$	$(a,a^n)=\lvert a\rvert$	$(a,a)=\lvert a\rvert$
$[a,\pm 1]=\lvert a\rvert$	$[a,a^n]=\lvert a\rvert^n$	$[a,a]=\lvert a\rvert$

✓ $a|b \leftarrow$ $[a,b]=|b|$ و $(a,b)=|a|$

یادآوری: ب.م.م ← عامل ضعیف شدن ک.م.م ← عامل قوی شدن

⚠ **توجه:** ترتیب قدرت: قوی ⟵ ضعیف

حاصل ضرب ≥ ک.م.م ≥ ب.م.م

❈ $(a,u)\le a\le [a,u]\le a\times u$

❖ قضیه تقسیم

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \hline r & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ a = bq + r \\ 2)\ 0 \le r \le b \end{array}}$$

- ✓ تقسیم عدد منفی بر عدد مثبت ← عدد منفی را مثبت فرض می کنیم و مثل حالت عادی تقسیم می کنیم.
  - ❋ اگر باقی مانده صفر شد ← خارج قسمت را قرینه می کنیم
  - ❋ اگر باقی مانده صفر نشد ← یک واحد به خارج قسمت اضافه می کنیم و آن را قرینه می کنیم. باقی مانده اصلی را الان بدست می آوریم.
- ✓ اگر فقط باقی مانده مورد بحث بود با هم نهشتی حل می کنیم.
- ✓ اگر مقسوم و مقسوم علیه مضرب n باشند باقی مانده نیز مضرب n است.
- ✓ اگر مقسوم مضرب m و مقسوم علیه مضرب n باشد، باقی مانده مضرب $(m \times n)$ است.
- ✓ می دانیم $0 \le r \le b$ $\left\{\begin{array}{l} \text{صفر} = r_{min} \\ b - 1 = r_{max} \end{array}\right.$
- ✓ تغییرات مقسوم: هر بلایی سر مقسوم بیاوریم همون بلا را بر سر باقی مانده می آوریم. **بحث در مبحث هم نهشتی**
- ✓ تغییرات مقسوم علیه (ضعیف کردن مقسوم علیه): باقی مانده را بر مقسوم علیه جدید تقسیم می کنیم تا باقی مانده جدید بدست آید. **بحث در مبحث هم نهشتی**
- ✓ اگر a را بر b و b' تقسیم کنند و r و r' باقی مانده اش باشد و باقی مانده بر b'' را بخواهند با **هم نهشتی** حل می کنیم.

✓ اگر باقی مانده برحسب تابعی از خارج قسمت باشد
1) باید شرط $0 \leq r \leq b$ برقرار باشد.
2) باید شرط صحیح بودن تمام عوامل تقسیم را رعایت کنیم.

مثال: چند عدد صحیح و نامنفی وجود دارد که باقی مانده ی تقسیم هر کدام از آنها بر r_0 مساوی مجذور خارج قسمت باشد؟

پاسخ:

$$\begin{array}{c|c} a & ۷۰ \\ \hline q^۲ & q \end{array}$$

شرط اول $1)\ 0 \leq q^2 < 70 \ \rightarrow 0 \leq q \leq 8$

شرط دوم $2)$ به ازای تمام مقادیر q عوامل صحیح است $\rightarrow$

9 مقدار برای q و به تبع q مقدار برای a

$$a = q^2 + 70q \ \geq 0 \ \ \rightarrow \mathrm{q(q + 70)} \geq 0 \ \ \rightarrow \begin{cases} q \geq 0 \\ q \leq -70 \end{cases}$$

⚠ **توجه:** در بعضی از مسائل جنس مقسوم از نظر زوج یا فرد یا ... بودن را معلوم می کنند. در این تیپ با توجه به اعداد داده شده برای مقسوم علیه و باقی مانده نوع خارج قسمت را از نظر زوج یا فرد بودن را مشخص می کنیم و در رابطه جایگذاری می کنیم و سپس به سراغ خواسته مسأله می رویم.

* راه حل کوتاه تر: به q با توجه به محدودیت ها عدد می دهیم و برای a مقداری متناسب با شرایط داده شده در مسئله بدست می آید. سپس عملیات را روی آن انجام می دهیم.

مثال: اگر باقی مانده ی تقسیم عدد فرد a بر 11 برابر 6 باشد، باقی مانده ی تقسیم عدد $\frac{a+1}{2}$ بر 11 کدام است؟

1) 9 2) 8 3) 7 4) 6

پاسخ: گزینه 1

$$a = \underset{\text{فرد}}{11q} + 6 \rightarrow \underset{\text{فرد}}{11q} = \text{فرد} \rightarrow q = \text{فرد} = 2k+1$$

زوج فرد فرد

$$a = 11(2k+1) + 6 = 22k + 17 \rightarrow \frac{a+1}{2} = 11(2k) + 9$$

تکنیک برای مثال فوق: باقی مانده را در عبارت داده شده قرار می دهیم، اگر به عدد صحیح رسیدیم که اوکی این میشه باقی مانده. ولی اگه به عدد صحیح نرسیدیم که معمولاً هم نمی رسیم، باقی مانده را با ضریبی از مقسوم علیه جمع می کنیم بعد عدد بدست آمده را داخل عبارت قرار می دهیم.

حل مثال فوق با تکنیک ذکر شده :

$$\frac{6+1}{2} \notin \mathbb{Z} \rightarrow \frac{(6+(1\times 11))+1}{2} = 9 \in \mathbb{Z}$$

✓ **اضافه شدن عددی به مقسوم**: عدد را به طرفین اضافه می کنیم و با دسته بندی مناسب تأثیر آن را بر باقی مانده و خارج قسمت مشخص می کنیم.

✓ **اضافه شدن عددی به مقسوم بدون تغییر خارج قسمت:**

$$x \leq (b - r - 1)$$

$$x_{max} = (b - r - 1)$$

✓ اضافه شدن عددی به مقسوم علیه بدون تغییر مقسوم و خارج قسمت: $x \leq \left[\frac{r}{q}\right]$

✓ حداکثر مقداری که به مقسوم علیه اضافه کنیم بدون اینکه مقسوم و خارج قسمت تغییر کند.

$$\left[\frac{r}{q}\right] = \left[\frac{\text{باقی مانده}}{\text{خارج قسمت}}\right]$$

✓ اگر باقی مانده را بدهند و حداقل مقدار مقسوم را بخواهند: $a = 2r + 1$

$$a_{min} = 1 \times (r + 1) + r = 2r + 1$$

✍**نکته:** $\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline & q \\ r & \end{array}$ $\leftarrow$ $a > 2r$

❉❉ تعداد اعداد در بازه‌ی $[a,b]$ برابر با $b - a + 1$ می‌باشد.

⚠ **توجه:** مقسوم و خارج قسمت معلوم، سوالی درباره ی مقسوم علیه پرسیده می شود. (تعداد مقسوم علیه ها و ...)

$$a = bq + r \rightarrow r = a - bq \rightarrow 0 \leq r < b \rightarrow 0 \leq a - bq < b$$

$$\frac{a}{q+1} < b \leq \frac{a}{q}$$

مثال: در یک تقسیم مقسوم 1000 واحد بیشتر از مقسوم علیه است و باقی مانده برابر 95 است. خارج قسمت کدام گزینه می تواند باشد؟

1) 3   2) 4   3) 5   4) 6

پاسخ: گزینه 4

$$a = 1000 + b = bq + 95 \rightarrow bq - b = 950 \rightarrow b(q-1) = 905$$

$$r = 95 < b \qquad \left.\begin{matrix} 1 \times 905 \\ 5 \times 181 \end{matrix}\right\} 905 \ {*}{*}{*}$$

$\begin{cases} b = 181 \\ q - 1 = 5 \end{cases}$ ق ق یا $\begin{cases} b = 5 \\ q - 1 = 181 \end{cases}$ غ ق ق یا $\begin{cases} b = 905 \\ q - 1 = 1 \end{cases}$ ق ق یا $\begin{cases} b = 1 \\ q - 1 = 905 \end{cases}$ غ ق ق

مثال: در تقسیم عدد 165 به عدد طبیعی b، باقی مانده مجذور خارج قسمت است. چند عدد b می توان یافت؟

1) 2   2) 3   3) 4   4) 5

پاسخ: گزینه 2

$$165 = 3 \times 5 \times 11 \qquad 165 = q(b+q) \quad \leftarrow \quad 165 = bq + q^2 \,, q^2 < b$$

$\begin{cases} q = 5 \\ b + q = 33 \end{cases} \rightarrow b = 28$ ق ق یا $\begin{cases} q = 1 \\ b + q = 165 \end{cases} \rightarrow b = 164$ ق ق

$\begin{cases} q = 11 \\ b + q = 15 \end{cases} \rightarrow b = 4$ غ ق ق یا $\begin{cases} q = 3 \\ b + q = 55 \end{cases} \rightarrow b = 52$ ق ق یا

❖ افراز اعداد صحیح

1) هر عدد اول بزرگتر از 3 ← $\left.\begin{matrix} 6k+1 \\ \text{یا} \\ 6k+5=6k-1 \end{matrix}\right\}$

2) مربع هر عدد اول بزرگتر از 3 ← $24k+1$

3) مربع هر عدد فرد ← $8k+1$

4) توان چهارم هر عدد فرد ← $16k+1$

5) توان دوم هر عدد صحیح ← $\left.\begin{matrix} 4k \\ 4k+1 \end{matrix}\right\}$

6) توان چهارم هر عدد صحیح ← $\left.\begin{matrix} 5k \\ 5k+1 \end{matrix}\right\}$

مثال: باقی مانده ی تقسیم توام چهارم هر عدد صحیح بر 5 چند مقدار متمایز دارد؟

1) 1　　2) 2　　3) 3　　4) 4

پاسخ: گزینه 2

می دانیم توان چهارم هر عدد صحیح به صورت $\left.\begin{matrix} 5k \\ 5k+1 \end{matrix}\right\}$ است و در تقسیم بر 5 باقی مانده $\left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\}$ است.

مثال: کدام معادله در اعداد صحیح جواب ندارد؟

1) $a^2 = 4b + 1$ 2) $a^2 = 4b + 8$

3) $a^2 = 4b + 2$ 4) $a^2 = 4b + 5$

پاسخ: گزینه 3

اعداد صحیح به صورت مقابل می توان افراز کرد: $\left.\begin{matrix} 4k \\ 4k+1 \\ 4k+2 \\ 4k+3 \end{matrix}\right\}$

$\Leftarrow$ توان دوم اعداد صحیح= $\left.\begin{matrix} 4k \\ 4k+1 \\ 4k+4 = 4k \\ 4k+9 = 4k+1 \end{matrix}\right\}$

و فقط گزینه 3 مانند افرازهای توان دوم نیست.

هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

✓ $a \overset{m}{\equiv} b$ و $m \neq 1$ ← $\begin{cases} a \text{ و } b \text{ به پیمانه } m \text{ هم نهشت اند} \\ \text{باقی مانده } a \text{ در تقسیم بر } m \text{ با باقی مانده } b \text{ در تقسیم بر } m \text{ برابر است} \end{cases}$

✓ $a \overset{m}{\equiv} b \leftrightarrow m|a-b$

✓ برای اینکه بررسی کنیم a و b به پیمانه m هم نهشت اند، معادله هم نهشتی را به معادله بخش پذیری تبدیل می کنیم.

✓ $a \overset{?}{\equiv} b$ ← {مقسوم علیه های $a-b$}=؟

❋ اگر پیمانه مجهول و اعداد دو طرف هم نهشتی معلوم باشد، معادله هم نهشتی را به معادله بخش پذیری تبدیل می کنیم و می دانیم پیمانه عدد طبیعی و بزرگتر از 1 است.

مثال: کدام دو عدد در پیمانه داده شده هم نهشت اند؟

1) $106 \overset{17}{\equiv} 22$ 2) $-294 \overset{11}{\equiv} 29$ 3) $-254 \overset{21}{\equiv} -43$ 4) $37 \overset{13}{\equiv} -54$

پاسخ: گزینه 4

$13|37+54=91$

❖ افراز $\mathbb{Z}$ توسط پیمانه

مجموعه ی همه ی اعداد صحیح که باقی مانده ی تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر r باشد را کلاس یا دسته هم نهشتی r به پیمانه m می نامند. $\boxed{[r]_m}$

اعضای هر کدام از این کلاس ها در پیمانه m هم نهشت اند و دو عضو متعلق به دو کلاس متمایز هم نهشت نمی باشند.

✓ در هم نهشتی به پیمانه m ← مجموعه $\mathbb{Z}$ به m کلاس هم نهشتی افراز می شود.

✓ هر چه پیمانه بزرگتر باشد ← $\mathbb{Z}$ به کلاس های بیشتری افراز می شود و برعکس.

✓ افرازها به پیمانه m را به صورت زیر می نویسیم:

$$mk\ , mk \pm 1\ , mk \pm 2\ ,\ \dots, mk \pm \left[\frac{m}{2}\right]$$ علامت براکت

⚠ **توجه:** اعداد صحیح براساس باقی مانده ی خود بر m به یکی از مجموعه های $A_1 = \{mk\}$ و $A_2 = \{mk+1\}$ و $A_m = \{mk+m-1\}$ تعلق دارند. حال می توان با ادغام این مجموعه ها با هم به نوعی، دسته های هم نهشتی ائتلافی ایجاد کرد.

✍**نکته:** «$a \overset{m}{\equiv} b$»

«$m|a-b$»

«باقی مانده ی تقسیم a و b بر m برابر است».

«$[a]_m = [b]_m$»

«$a \in [b]_m$»

«$[a]_m \cap [b]_m \neq \emptyset$»

«a و b به یک کلاس هم نهشتی به پیمانه m تعلق دارند».

همگی گزاره های بالا یک معنی را می دهند و هم ارز اند.

✓ می توان مضارب صحیح از پیمانه را به طرفین اضافه یا کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a \pm mk \overset{m}{\equiv} b \pm mk'$$

❖ فاکتوریل

✓ اعداد فاکتوریل دار از یه جایی به بعد بر هر عدد دلخواهی بخش پذیراند.

✓ در محاسبه ی باقی مانده ی سری های فاکتوریلی از یه جایی به بعد، باقی مانده صفر می شود و باید چند جمله اول را مشخص کرد.

✓ برای یافتن باقی مانده اعداد فاکتوریلی در مواردی از استراتژی جورچینانه پیروی می کنیم.

مثال: $\boxed{7! \overset{11}{\equiv} ?}$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \overset{11}{\equiv} 3 \times 2 \times 4 \overset{11}{\equiv} 24 \overset{11}{\equiv} 2$$

14

24

15

✍**نکته:** قضیه ویلسون

$$\begin{cases} (p-1)! \overset{p}{\equiv} -1 \\ (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1 \\ (p-1)! + (p-2)! \overset{p}{\equiv} 0 \end{cases}$$

عدد اول p if

مثال : $12! \overset{13}{\equiv} -1$

مثال : $21! \overset{23}{\equiv} 1$

مثال : $16! + 15! \overset{17}{\equiv} 0$

❖ خواص هم نهشتی

هم نهشتی و تساوی در مواردی مثل هم اند.

1) $a \overset{m}{\equiv} a$ 2) $a \overset{m}{\equiv} b \leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a$ 3) $a \overset{m}{\equiv} b$ و $c \overset{m}{\equiv} b \leftarrow a \overset{m}{\equiv} c$

4) $a \overset{m}{\equiv} b \leftarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$ 5) $a \overset{m}{\equiv} b \leftarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

6) $a \overset{m}{\equiv} b$ و $c \overset{m}{\equiv} d$
$$\begin{cases} * & a + c \overset{m}{\equiv} b + d \\ ** & a - c \overset{m}{\equiv} b - d \\ *** & ac \overset{m}{\equiv} bd \end{cases}$$
طرفین را با هم جمع کرد

طرفین را از هم کم کرد

طرفین را در هم ضرب کرد

7) $a \overset{m}{\equiv} b \leftarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

- ✓ در هم نهشتی مثل تساوی می توان یک عدد را از یک طرف هم نهشتی به طرف دیگر برد و مانند تساوی علامتش عوض می شود.
- ✓ همواره در رابطه هم نهشتی می توان طرفین را با عددی جمع یا تفریق کرد. می توان طرفین را قوی کرد اما نمی توان ضعیف کرد مگر تحت شرایطی!!! $a^n \overset{m}{\equiv} b^n \neq a \overset{m}{\equiv} b$
- ✓ در رابطه هم نهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$ هر بلایی سر a بیاوریم همان بلا را عیناً بر سر b می آوریم.

$$f(a) \overset{m}{\equiv} f(b)$$

- ✓ پیمانه را همواره می توان ضعیف کرد. (مقسوم علیه های آن را قرار داد)
- ✓ اگر پیمانه را ضعیف کردیم و عملیات انجام دادیم دیگر نمی توانیم پیمانه را قوی کنیم. (مسیر برگشت پذیر نیست)

✍**نکته:** برای تقسیم کردن طرفین بر عددی (ساده کردن یک عدد از طرفین هم نهشتی) داریم:

* ب.م.م پیمانه و عدد مورد نظر برابر 1 است. (نسبت به هم اول اند):

مثل حالت عادی ساده می کنیم و پیمانه تغییر نمی کند.

** ب.م.م پیمانه و عدد مورد نظر برابر $d \neq 1$ است:

پیمانه را بر d تقسیم می کنیم و سپس طرفین را ساده می کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(m,c)=d} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

- ✓ اگر بخواهیم در یک هم نهشتی طرفین را بر عددی تقسیم کنیم یک طرف مضرب آن نیست، از مضارب پیمانه به آن طرف اضافه یا کم می کنیم تا مضرب آن شود و سپس تقسیم می کنیم.

مثال: اگر $a^2 - 1 \overset{m}{\equiv} a^3 - a^2 - a + 1$ و $(a^2 - 1, m) = 1$ آنگاه:

1) $m|a-2$ 2) $m|a-1$ 3) $m|a+1$ 4) $m|a+2$

پاسخ: گزینه 1 - طرفین هم نهشتی را بر $a^2 - 1$ تقسیم می کنیم و پیمانه هم تغییر نمی کند.

$$a - 1 \overset{m}{\equiv} 1 \to a \overset{m}{\equiv} 2 \to m|a-2$$

❖ ادامه بحث تقسیم

- ✓ اگر در سوال مطرح شود مقسوم مضرب فلان عدد است، $a = bq + r$ را در پیمانه داده شده برابر صفر قرار می دهیم. $\boxed{bq + r \overset{m}{\equiv} 0}$
- ✓ اگر صحبت از کوچکترین مقدار a یا b شد حتماً از شرط تقسیم $(0 \le r < b)$ باید استفاده کرد.
- ✓ اگر شرط 2 رقمی یا 3 رقمی یا ... بودن a هم مطرح شد، بعد از یافتن جنس b برحسب پیمانه، از شرط تقسیم و شرط داده شده استفاده می کنیم و با اشتراک گیری از آنها تعداد حالات ممکن برای b و به تبع a را بدست می آوریم.

مثال: $\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} & ۱۶ \\ \hline ۲۳ & \end{array}$ و a مضرب 17 ← کوچکترین مقدار b ؟

پاسخ: 40

$$16b + 23 \overset{17}{\equiv} 0 \to b \overset{17}{\equiv} 6 \to b = 17k + 6$$

شرط تقسیم : $23 < b \to 23 < 17k + 6 \to 1 < k \to 2 \le k \to b_{min} = 40$

مثال: $\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} & ۸ \\ \hline ۱۱ & \end{array}$ و a مضرب 7 و a کوچکتر از 200 ← تعداد جواب های a ؟

پاسخ: 1 جواب

$$8b + 11 \overset{7}{\equiv} 0 \to b \overset{7}{\equiv} -4 \to b = 7k - 4$$

شرط تقسیم $11 < b \to 11 < 7k - 4 \to 3 \le k \quad *$

$a < 200 \to 8b + 11 < 200 \to b \le 23 \to 7k - 4 < 23 \to k \le 3, \ldots \quad **$

اشتراک * و ** : $k = 3$

❖ ترکیب دو هم نهشتی با پیمانه های مختلف

✓ قانون ک.م.م پیمانه ها: $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \to a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

⚠ **توجه:** سعی می کنیم از مضارب پیمانه بزرگ به طرف دوم اضافه و کم کنیم و بررسی کنیم که آیا با اضافه و کم کردن پیمانه کوچک به طرف دوم می توانیم عددی یکسان با آن بسازیم یا نه؟

✍**نکته:** اگر در زمان مناسب به نتیجه نرسیدیم طرفین دو هم نهشتی را در کوچکترین اعداد ممکن ضرب می کنیم تا پیمانه ها یکسان شوند سپس دو طرف هم نهشتی ها را از هم کم می کنیم. (روش خوبی برای پیمانه های نزدیک به هم و یا متوالی)

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{c>0} ac \overset{mc}{\equiv} bc$$

عدد c در سه جا ضرب می شود.

مثال: اگر باقی مانده ی تقسیم a بر 5 و 6 به ترتیب 1 و 4 باشد، باقی مانده ی a بر 15 کدام است؟

پاسخ: 1

$$\begin{cases} a \overset{5}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 6} 6a \overset{30}{\equiv} 6 \\ a \overset{6}{\equiv} 4 \xrightarrow{\times 5} 5a \overset{30}{\equiv} 20 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a \overset{30}{\equiv} -14 \overset{30}{\equiv} 16 \rightarrow a \overset{15}{\equiv} 16 \overset{15}{\equiv} 1$$

❖ ترکیب سه هم نهشتی با پیمانه های مختلف

- ✓ معمولاً قرینه پیمانه ها را به طرف دوم اضافه می کنیم و به یک عدد منفی می رسیم (هر 3 تا عدد منفی برابراند) سپس با قانون ک.م.م پیمانه ها همه را به یک هم نهشتی تبدیل می کنیم.
- ✓ می توان دو هم نهشتی را ادغام کرد و هم نهشتی ادغام شده را با هم نهشتی سوم ادغام کنیم.

❖ بسط عدد چند رقمی

$$10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + \cdots + 10^2a_3 + 10a_2 + a_1 = a_na_{n-1}\ldots a_3a_2a_1$$

تعداد رقم: n ضریب هر رقم: $10^{\text{اندیس}-1}$

✓ اگر یکی از رقم های یک عدد چند رقمی مجهول بود، آن رقم را براساس موقعیت اش بیرون می آوریم.

مثال: اگر $7|\overline{7a2a}$ آنگاه a کدام است؟

پاسخ: 5

$$10^3 \times 7 + 10^2a + 20 + a \overset{7}{\equiv} 0 \rightarrow 3a \overset{7}{\equiv} 1 \overset{7}{\equiv} 15$$

$$\rightarrow a \overset{7}{\equiv} 5 \rightarrow a = 7k + 5\,, 0 \le a \le 9 \xrightarrow{\text{یک رقم است } a} a = 5$$

مثال: اگر $\overline{6a4} \in [9]_{15}$ باشد، چند جواب برای a وجود دارد؟

پاسخ: 3

$$604 + 10a \overset{15}{\equiv} 9 \rightarrow 10a \overset{15}{\equiv} 5 \overset{15}{\equiv} 20 \xrightarrow{(15,10)=5} a \overset{3}{\equiv} 2$$

$$\rightarrow a = 3k + 2 \rightarrow 0 \le a \le 9 \rightarrow a = \{2,5,8\}$$

اگر در یک رابطه هم نهشتی ضریب یک یا چند پارامتر بر پیمانه بخش پذیر باشد، آن پارامتر یا پارامترها از رابطه هم نهشتی داده شده قابل بدست آوردن نیست

مثال : $18a \overset{9}{\equiv} 12b \rightarrow 12b \overset{9}{\equiv} 0$

❖ قوانین بخش پذیری بر اعداد خاص

- ✓ باقی مانده ی تقسیم هر عدد بر 3 یا 9 برابر با باقی مانده ی تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر 3 یا 9 است.
- ✓ باقی مانده ی تقسیم هر عدد بر 10 و 5 و 2 با باقی مانده ی رقم سمت راست آن با هر کدام از این اعداد برابر است.
- ✓ باقی مانده ی تقسیم هر عدد بر 100 و 25 و 4 با باقی مانده ی تقسیم 2 رقم سمت راست آن عدد با هر کدام از این اعداد برابر است.
- ✓ باقی مانده تقسیم هر عدد بر 11: رقم ها را از سمت راست یک در میان مثبت و منفی بنویسیم و با هم جمع می کنیم و سپس باقی مانده تقسیم عدد به دست آمده بر 11 را محاسبه کنیم.
- ✓ باقی مانده ی تقسیم هر عدد بر 99: ارقام عدد موردنظر را از سمت راست دو رقم دو رقم جدا کرده و با هم جمع می کنیم سپس باقی مانده ی عدد بدست آمده بر 99 را محاسبه می کنیم.

❖ قوانین بخش پذیری بر اعداد غیر خاص

- ✓ پیمانه داده شده را به حاصل ضرب دو یا چند عدد نسبت به هم اول که هر کدام از آنها دارای قانون خاصی باشند می شکنیم. حال باقی مانده ی عدد داده را بر پیمانه های جدید بدست می آوریم و در صورت لزوم (گاهی هم لازم نمی باشد) پیمانه ها را یکی می کنیم. مثال برای اعداد غیر خاص: {12، 55، 48، 85، ...}
- ✓ اعداد چند رقمی متناوب را برحسب کوچکترین واحد تکرار می شکنیم.

مثال: $\overline{abab} \Leftarrow \quad \overline{ab}00 + \overline{ab} = 100\overline{ab} + \overline{ab} = 101\overline{ab}$

مثال: $\overline{ab0ab} \Leftarrow \quad \overline{ab}000 + \overline{ab} = 1000\overline{ab} + \overline{ab} = 1001\overline{ab}$

مثال: $\overline{abcabc} \Leftarrow \quad \overline{abcabc} = \overline{abc}000 + \overline{abc} = 1001\overline{abc}$

✓ برای اعدادی که همه رقم ها یکسان است، از وسط شکستن روش خوبی است.

مثال: $\overline{aaaa} \Leftarrow \overline{aa}00 + \overline{aa} = 100\overline{aa} + \overline{aa} = 101\overline{aa}$

❖ باقی مانده ی اعداد توان دار بر یک عدد $a^n \overset{m}{\equiv} ?$

✓ روش حل:

1) توانی از a را پیدا کنیم که باقی مانده آن بر m برابر 1 شود $\quad a^b \overset{m}{\equiv} 1$

$b \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{* با ضرب طرفین هم نهشتی در پایه } a \\ \text{** به توان رساندن طرفین} \end{array} \right.$

2) باقی مانده n بر b را بدست می آوریم $\leftarrow$ r $\quad a^b \overset{m}{\equiv} 1$

3) در انتها a^r را در پیمانه m کوچک می کنیم تا به عدد صحیح و کوچکتر از m برسیم. $\quad a^n \overset{m}{\equiv} a^r$

✍**نکته:** اگر طرفین یک هم نهشتی را به توان پیمانه برسانیم پیمانه به توان 2 می رسد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a^m \overset{m^2}{\equiv} b^m$$

مثال: 7^{41} به پیمانه 100 چه می شود؟

پاسخ:

$$7^2 \overset{10}{\equiv} 49 \overset{10}{\equiv} 9 \overset{10}{\equiv} -1 \rightarrow 7^{20} \overset{100}{\equiv} 1 \rightarrow 7^{40} \overset{100}{\equiv} 1 \rightarrow 7^{41} \overset{100}{\equiv} 7$$

❖ قضیه فرما

❊ اگر پیمانه اول باشد فرما توانی از پایه را در اختیار ما قرار می دهد که در پیمانه داده شده با 1 هم نهشت است.

$$if \begin{matrix} p \text{ عدد اول} \\ a \text{ عدد صحیح} \end{matrix} \text{ و } \begin{matrix} (p,a)=1 \\ \text{نسبت به هم اول} \end{matrix} \Big\{ a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$$

مثال: $7^{15} \overset{17}{\equiv} ?$

پاسخ: 5

فرما : $7^{16} \overset{17}{\equiv} 1 \overset{17}{\equiv} 35 \xrightarrow{\div 7} 7^{15} \overset{17}{\equiv} 5$

✍**نکته:** بسط دو جمله ای خیام در هم نهشتی:

✓ $(a-b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + (-1)^n b^n \rightarrow \begin{cases} \text{فرد } n \rightarrow a^n - b^n \\ \text{زوج } n \rightarrow a^n + b^n \end{cases}$

✓ $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

مثال: باقی مانده ی $3^{30} + 4^{30} + 11^{30}$ بر 12 چند است؟

پاسخ:

$$\left. \begin{matrix} 11 \overset{12}{\equiv} -1 \rightarrow 11^{30} \overset{12}{\equiv} 1 \\ 4^{30} + 3^{30} \overset{12}{\equiv} (4-3)^{30} \overset{12}{\equiv} 1 \end{matrix} \right\} 3^{30} + 4^{30} + 11^{30} \overset{12}{\equiv} 1 + 1 \overset{12}{\equiv} 2$$

✍**نکته:** در محاسبه ی باقی مانده ی a^n بر m ابتدا پایه را در آن پیمانه تا حد امکان ساده می کنیم تا از نظر قدرمطلقی کوچکتر از نصف پیمانه شود، سپس طبق روال گذشته حل می کنیم.

⚠ **توجه:** اگر پیمانه بزرگ و مرکب باشد، می توانیم (بهتر است) پیمانه را به دو عدد نسبت به هم اول بشکنیم و بعد از محاسبه از قانون ک.م.م پیمانه ها استفاده می کنیم.

مثال: دو عدد 511 و 43 در یک کلاس هم نهشتی به پیمانه m قرار دارند.

اگر $[36,m] = 36m$ آنگاه عبارت $(m^2+21)(2m+1)^{m^2-9}$ در کلاس هم نهشتی 14 چه باقی مانده ای دارد؟

پاسخ:

$m|511-43 \rightarrow m|468 \quad [36,m]=36m \rightarrow (36,m)=1$

$m \rightarrow$ عامل 36 ندارد $\rightarrow m \neq 1 \rightarrow m = 13$

$\rightarrow (190)(27)^{160} \overset{14}{\equiv} (-6)(-1)^{160} \overset{14}{\equiv} -6 \overset{14}{\equiv} 8$

❖ باقی مانده با توان پارامتری

❈ اگر یک عدد توان پارامتری داشته باشد: کوچکترین توان از پایه را پیدا می کنیم که باقی ماندهی آن در پیمانه داده شده 1+ یا 1- باشد. سپس با توان رساندن مناسب سعی می کنیم توان مجهول را بیابیم. ← فرما ممنوع

** اگر توان دو تا از پایه ها پارامتری باشد، ابتدا از توان کوچکتر فاکتور می گیریم و طرفین هم نهشتی را بر آن تقسیم می کنیم تا به یک عدد با توان پارامتری برسیم. سپس مثل قبل عمل می کنیم.

مثال: $2^n + 1$ بر 65 بخش پذیر است. جمله عمومی n را مشخص کنید.

پاسخ:

$$2^n \overset{65}{\equiv} -1 \Rightarrow 2^6 \overset{65}{\equiv} -1 \longrightarrow 2^{6(2k+1)} \overset{65}{\equiv} (-1)^{2k+1} \longrightarrow n = 12k + 6$$

مثال: $12^n - 3^n$ بر 17 بخش پذیر است. جمله عمومی n را مشخص کنید.

پاسخ:

$$12^n - 3^n \overset{17}{\equiv} 0 \rightarrow 3^n(4^n - 1) \overset{17}{\equiv} 0 \rightarrow 4^2 \overset{17}{\equiv} -1$$

$$\rightarrow 4^{2(2k)} \overset{17}{\equiv} (-1)^{2k} \overset{17}{\equiv} 1 \rightarrow n = 4k$$

تکنیک: در تشخیص باقی مانده ی اعداد توان دار بر m اگر m بزرگ و مرکب بود و در گزینه ها خود باقی مانده را داشته باشیم، به جای یکی کردن پیمانه ها، بهترین راه حل حذف گزینه است. به جای m یکی از مقسوم علیه های آن را قرار می دهیم (ضعیف می کنیم) و حاصل را حساب می کنیم، گزینه ای می تواند جواب باشد که در پیمانه جدید با باقی مانده ی بدست آمده هم نهشت باشد.

گزینه جواب $\overset{\text{پیمانه ضعیف شده}}{\equiv}$ باقی مانده جدید

اگر پیمانده ضعیف شده، عدد اول باشد از فرما هم کمک می گیریم.

⚠ **توجه:** این روش مبتنی بر حذف گزینه است و حق انتخاب مستقیم گزینه را نداریم.

❖ رقم یکان

✓ $a \overset{10}{\equiv} b \leftrightarrow$ رقم یکان b = رقم یکان a

✓ رقم یکان حاصل ضرب <u>بیش</u> از 4 عدد متوالی همواره <u>صفر</u> است ← 5 عدد به بالا

✓ در محاسبه ی رقم یکان سری های فاکتوریلی فقط به رقم یکان اعداد !0 ، !1 ، !2 ، !3 ، !4 توجه می کنیم.

✓ تعداد صفرهای جلوی عبارت !n:

$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{n}{5^3}\right]+$ تاجایی که حاصل براکت صفر شود

تکنیک: محاسبه ی رقم یکان a^n:

$$\left.\begin{matrix} n \overset{4}{\equiv} \text{توان} \\ \\ a \overset{10}{\equiv} \text{پایه} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{بعد از ساده شدن}} \overset{10}{\equiv} \text{کل}$$

⚠ **توجه:** اگر $n \overset{4}{\equiv} 0$، توان را 4 در نظر می گیریم.

⚠ **توجه:** اگر 4 یا مضارب 4 را به توان یک عدد اضافه کنیم یا کم کنیم رقم یکان تغییر نمی کند.

✍**نکته ی مهم:** اگر توان دو عدد با پایه های یکسان در پیمانه 4 هم نهشت باشند، رقم یکان آن دو عدد برابر است.

مثال: رقم یکان 1397^{1398} را بدست آورید.

پاسخ: 9

$$\left.\begin{array}{r} 1398 \overset{4}{\equiv} 2 \\ 1397 \overset{10}{\equiv} 7 \end{array}\right\} \rightarrow 7^2 \overset{10}{\equiv} 9$$

✍**نکته:**

❄ اگر رقم یکان {0، 1، 5، 6} باشد، توان باعث تغییر آن نمی شود.

❄❄ اگر رقم یکان {4، 9} باشد
- اگر به توان فرد برسد ← رقم یکان تغییر نمی کند.
- اگر به توان زوج برسد ← رقم یکان آن با رقم یکان مربعش برابر است.

❖ تقویم

فروردین	تیر	مهر	دی
اردیبهشت	مرداد	آبان	بهمن
خرداد	شهریور	آذر	اسفند

2

3

* سال معمولی: 365 روز = 52 هفته + 1 روز

* سال کبیسه: 366 روز = 52 هفته + 2 روز

سال معمولی ← 1

سال کبیسه ← 2

✍خوب است بدانیم:

* 31 به پیمانه 7 برابر 3 ** 30 به پیمانه 7 برابر 2 *** 29 به پیمانه 7 برابر 1 است

تکنیک ها:

1) بخواهیم از چندشنبه بودن یک روز چندشنبه بودن آینده را بدست آوریم.

* اختلاف روزها را بدست آورده و در پیمانه 7 کوچک می کنیم و با شروع از روز معلوم پیش می رویم تا به جواب برسیم.

2) بخواهیم از چندشنبه بودن یک روز، چند شنبه بودن گذشته را بدست آوریم.

* ابتدا تعداد روزها را از تاریخ گذشته به سمت آینده را حساب می کنیم ولی در انتها آن را در «1-» ضرب کرده و سپس مانند مورد 1 حل می کنیم.

3) بخواهیم از روی تاریخ داده شده، چندمین چندشنبه فلان ماه رو تاریخش رو بدست آوریم.

* ابتدا مشخص می کنیم یکم ماه پرسیده شده چندشنبه است. سپس مشخص می کنیم که اولین چندشنبه پرسیده شده چندم است. حال برای بدست آوردن چندمین چندشنبه 7 تا 7 تا به تاریخ اولین چندشنبه اضافه می کنیم.

مثال : اگر 15 اردیبهشت پنجشنبه باشد ، 27 آبان همان سال چند شنبه است ؟

پاسخ :

$$(31-15)+31+31+31+31+30+27 \overset{7}{\equiv} (31-15)+31\times 4+30+27 \Rightarrow$$

$$(3-15)+3\times 4+2+(-1) \overset{7}{\equiv} 1$$

یک روز بعد از روز داده شده جواب است یعنی **جمعه** .

مثال : اگر 19 مهر یکشنبه باشد ، سومین سه شنبه بهمن ماه همان سال چندم است ؟

پاسخ :

ابتدا مشخص می کنیم 1 ام بهمن چند شنبه است .

$$(30-19)+30+30+30+1 \overset{7}{\equiv} (30-19)+30\times 3+1 \Rightarrow$$

$$(2-15)+3\times 3+1 \overset{7}{\equiv} -3 \overset{7}{\equiv} 4$$

4 روز بعد از روز داده شده 1 ام بهمن است یعنی **پنجشنبه** .

حال حساب می کنیم اولین سه شنبه بهمن چندم است ← 6 ام است .

اولین سه شنبه 6 بهمن ام است . دومین سه شنبه بهمن 6+7 = 13 ام است . سومین سه شنبه بهمن 13+7 = 20 ام است .

❖ معادلات هم نهشتی

✓ معادلات هم نهشتی درجه اول $ax \overset{m}{\equiv} b$

1) در صورتی که بتوان طرفین را ساده کرد، ابتدا ساده می کنیم.

2) اگر ضریب مجهول بزرگ بود با اضافه و کم کردن مضارب پیمانه به ضریب مجهول، آن را کوچک می کنیم.

3) اگر بعد از این کار هنوز مجهول دارای ضریبی غیر از 1 یا 1- بود از مضارب پیمانه به طرف دوم اضافه یا کم می کنیم تا بتوانیم ضریب مجهول را طی یک یا چند مرحله حذف کنیم.

مثال : معادله هم نهشتی $7X + 9 \overset{4}{\equiv} 0$ در مجموعه اعداد 2 رقمی چند جواب دارد ؟

پاسخ :

$$7X + 9 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow (7-4)X + (9 - 3 \times 4) \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 3X - 3 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow \qquad X \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow X = 4K + 1$$

$$10 \le 4K + 1 \le 99 \Rightarrow 9 \le 4K \le 98 \Rightarrow 2.25 \le K \le 24.5 \Rightarrow$$

$$K \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \le K \le 24 \Rightarrow n(K) = 24 - 3 + 1 = 22$$

22 تا جواب .

✓ **معادلات هم نهشتی درجه دوم** $ax^2+bx+c\overset{m}{\equiv}0$

تیپ 1) پیمانه عدد اول

⁕ ابتدا طرف اول را به دو عبارت درجه 1 تجزیه می کنیم و سپس هر کدام از عبارت های درجه 1 را حل می کنیم و در نهایت بین جواب ها اجتماع می گیریم.

تیپ 2) پیمانه مرکب

⁕ پس از تجزیه متوجه می شویم که تنها یکی از دو عبارت درجه 1 ایجاد شد باید مضرب پیمانه باشد و فقط یک معادله هم نهشتی درجه اول را حل می کنیم.

مثال: $(x+1)\underbrace{(6x+5)}_{\text{اصلاً نمی توان مضرب 6 باشد}}\overset{6}{\equiv}0 \leftarrow x+1\overset{6}{\equiv}0$ پس فقط همین معادله را حل می کنیم.

مثال: $(x+2)(x+3)\overset{8}{\equiv}0 \leftarrow$ یک کدوم از این عبارت ها باید مضرب 8 باشد چون اعداد متوالی اند (یکی فرد و یکی زوج) $\left.\begin{array}{l} x+2\overset{8}{\equiv}0 \\ x+3\overset{8}{\equiv}0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ اجتماع

تیپ 3) پیمانه مرکب

⁕ پس از تجزیه متوجه می شویم که هر یک از عبارات درجه 1 دقیقاً بر یکی از عامل های موجود در پیمانه بخش پذیراند. ابتدا هر یک از معادلات هم نهشتی درجه اول را حل می کنیم و سپس دو پیمانه را یکی می کنیم. ⁕ قانون ک.م.م پیمانه ها

مثال:

$$(2x+1)(5x+2) \overset{10}{\equiv} 0 \leftarrow \begin{cases} 2x+1 & \text{مضرب 2 نیست} \leftarrow \text{پس مضرب 5 است} \\ 2x+1 & \text{مضرب 5 نیست} \leftarrow \text{پس مضرب 2 است} \end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} 2x+1 \overset{5}{\equiv} 0 \\ 5x+2 \overset{2}{\equiv} 0 \end{cases}$$

⚠ **توجه:** اگر ضریب متغیر درجه 2 «x^2» مضرب پیمانه بود، پارامتر درجه 2 را حذف کرده و خیلی آسان معادله هم نهشتی درجه اول را حل می کنیم.

❖ شروط وجود جواب معادله هم نهشتی

$$\boldsymbol{ax \overset{m}{\equiv} b \rightarrow (a,m)|b}$$

✓ اگر $(a,m) = 1$ باشد آنگاه معادله قطعاً دارای جواب است.

❖ کاربرد معادله هم نهشتی

❈ اگر طرف قوی یک عبارت بخش پذیری پارامتری و طرف ضعیف معلوم باشد بهتر است برای پیدا کردن مقادیر پارامتر، بخش پذیری را به هم نهشتی تبدیل کنیم و از حل معادله هم نهشتی برای پیدا کردن پارامتر استفاده کنیم.

$$a|f(n) \rightarrow f(n) \overset{a}{\equiv} 0$$

مثال: $7|5n-2$ ← تعداد جواب های 2 رقمی n ؟

پاسخ: 13 تا

$$5n-2\overset{7}{\equiv}0 \rightarrow 5n\overset{7}{\equiv}2\overset{7}{\equiv}30 \rightarrow n\overset{7}{\equiv}6 \rightarrow n=7k+6$$

$$10 \leq n \leq 99 \rightarrow 10 \leq 7k+6 \leq 99 \rightarrow 4 \leq 7k \leq 93 \rightarrow 1 \leq k \leq 13$$

$$\rightarrow 13-1+1=13\text{تا}$$

- ✓ در محاسبه ی ب.م.م دو عبارت پارامتری اگر دو عبارت ضریب داشته باشند بعد از یافتن ب.م.م ، برای یافتن مقادیر n از معادله هم نهشتی استفاده می کنیم.

❖ معادله سیاله خطی

- ✓ $ax+by=c$ ← حل= بدست آوردن همه اعداد صحیح x_0 و y_0 که در معادله صدق کنند.
- ✓ (x_0,y_0) جواب خصوصی ← به مجموعه همه جواب های خصوصی، جواب های عمومی می گویند.
- ✓ اگر c بر b یا a بخش پذیر باشد برای بدست آوردن جواب خصوصی پارامتر دیگر را صفر در نظر می گیریم.

مثال:

$$y=0 \leftarrow a|c \quad , \quad ax+by=c$$

مثال:

$$13x+9y=65 \leftarrow 13|65 \leftarrow \left.\begin{matrix} y=0 \\ x=5 \end{matrix}\right\} \leftarrow (0,5)\ \text{یک جواب خصوصی}$$

✓ بدست آوردن یک جواب خصوصی ← حدسی و با آزمایش

تبدیل معادله سیاله به معادله هم نهشتی و بدست آوردن x_0 یا y_0 سپس x_0 یا y_0 را در معادله سیاله قرار می دهیم تا متغیر دیگر نیز بدست آید.

❖ روش تبدیل معادله سیاله به معادله هم نهشتی

$$ax + by = c \begin{cases} \overbrace{ax}^{0} + by \overset{a}{\equiv} c \\ by \overset{a}{\equiv} c \rightarrow y \overset{a}{\equiv} y_0 \\ ax + \overbrace{by}^{0} \overset{b}{\equiv} c \\ ax \overset{b}{\equiv} c \rightarrow x \overset{b}{\equiv} x_0 \end{cases}$$

❖ پیدا کردن جواب عمومی معادله سیاله

1) معادله را تا حد امکان ساده می کنیم تا ضریب x و y نسبت به هم اول شوند.

2) یک جواب خصوصی مانند (x_0, y_0) پیدا کرده و می نویسیم و جلوی یکی علامت مثبت و جلو یکی علامت منفی قرار می دهیم.

3) ضریب x و y را که ساده شده اند در k ضرب کرده و به طور برعکس (ضربدری) جلوی جواب های خصوصی می نویسیم. ❊ ضریب x برای y ❊ ضریب y برای x

✍**نکته:** در جواب های عمومی بدست آمده برای یک معادله سیاله که برحسب k نوشته شده است، می توان k را به شکل های زیر تغییر متغیر داد.

$$\boxed{k \rightarrow k + a \qquad k \rightarrow k - a \qquad k \rightarrow -k}$$

مثال: اگر $11x + 2y = 18$ جواب های کلی y به کدام صورت است؟

1) $11k + 2$ 2) $-11k + 2$ 3) $11k - 2$ 4) $11k - 9$

پاسخ: گزینه 3

$(0,9)$ جواب خصوصی

$$\begin{cases} x = 0 - 2k = -2k \\ y = 9 + 11k = 11k + 9 \rightsquigarrow k \to k - 1 \quad 11(k-1) + 9 = 11k - 2 = y \end{cases}$$

⚠ **توجه:** برای پیدا کردن جواب های طبیعی، x و y را بزرگتر از صفر قرار می دهیم و تعداد kهای صحیح را که در اشتراک دو نامعادله صدق می کنند را پیدا می کنیم.

❖ کاربرد معادله سیاله

- ✓ تعداد وزنه ها، تعداد کیسه ها، تعداد اسکناس ها، تعداد تمبرها، ← (مسائل کاربردی)
- ✓ x و y را نامنفی (بزرگتر مساوی صفر) قرار می دهیم.
- ✓ اگر بخواهیم از هر 2 چیز داشته باشیم باید x و y را طبیعی درنظر بگیریم.

❖ شرط وجود جواب معادله ی سیاله

- ✓ معادله سیاله یا جواب ندارد یا اگر داشته باشد بیشمار جواب دارد.
- ✓ $ax + by = c \rightsquigarrow (a,b)|c$
- ✓ اگر $(a,b) = 1$ {a و b نسبت به هم اول باشند} ← معادله سیاله حتما جواب دارد.

فصل 2

Graph Modeling

گراف و مدل سازی

معرفی گراف

❖ انواع گراف و مدل سازی

هر گراف مانند G تعدادی نقطه است که توسط پاره خط ها یا مکان هایی به هم وصل شده اند.

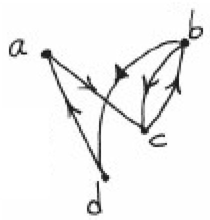
نقاط ← راس مجموعه راس ها ← $V(G)$

پاره خط ها یا کمان ها ← یال مجموعه یال ها ← $E(G)$

❋ اگر یال جهت دار باشد ← گراف جهت دار

یال ها را به صورت زوج مرتب نمایش می دهیم. (از مولفه اول به مولفه دوم ← جهت یال را مشخص می کنیم)

مثال:

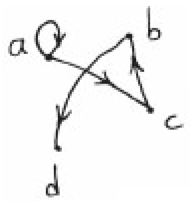


$V(G) = \{a,b,c,d\}$

$E(G) = \{(a,c),(d,a),(b,c),(b,d),(c,d)\}$

❋ اگر یک یال یک راس را به خودش وصل کند ← طوقه ← گراف طوقه دار

مثال:

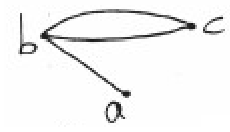


$V(G) = \{a,b,c,d\}$

$E(G) = \{(a,a),(a,c),(c,b),(b,d)\}$

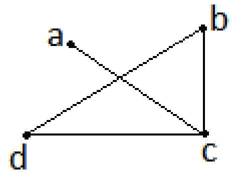
* اگر بین دو راس بیشتر از یک یال باشد ← یال موازی ← گراف چندگانه

مثال:



* گرافی که یال جهت‌دار، یال موازی و طوقه نداشته باشد را گراف ساده می گویند.

مثال:

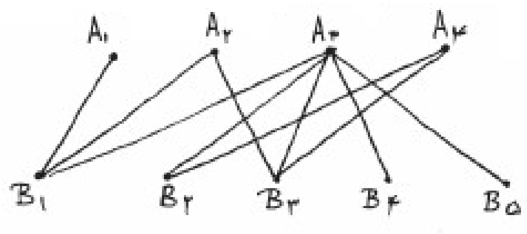


$V(G) = \{a,b,c,d\}$

$E(G) = \{ac,bd,bc,cd\}$

⚠ **توجه:** در این فصل هر جا گفته شد گراف منظور گراف ساده است.

مثال: در شرکتی پنج نفر (B_5,B_4,B_3,B_2,B_1) متقاضی برای چهار موقعیت شغلی مختلف (A_4,A_3,A_2,A_1) وجود دارد متناظر با این وضعیت گراف زیر تشکیل شده است که در آن راس متناظر با هر فرد به شغل‌هایی متصل شده که متقاضی آنهاست. به چند روش می توان شغل ها را به افراد اختصاص داد طوری که هیچ شغلی خالی نماند؟ (هیچ فردی دو شغل نمی‌تواند داشته باشد)



پاسخ: از شغل هایی شروع می‌کنیم که متقاضی کمتری دارند.

مرحله 1: برای A_1 فقط یک متقاضی وجود دارد. $A_1 \to B_1$

مرحله 2: چون B_1 شغل پیدا کرده یال های مربوط به آن را حذف می‌کنیم. پس برای A_2 نیز یک متقاضی وجود دارد. $A_2 \to B_3$

مرحله 3: با حذف یال‌های متصل به B_3 برای A_4 نیز فقط یک متقاضی باقی می‌ماند. $A_4 \to B_2$

مرحله 4: با حذف یال‌های متصل به B_2 برای A_3 دو متقاضی $\left(B_4\text{یا}B_5\right)$ باقی می‌ماند.

❈ پس دو حالت برای اختصاص شغل ها وجود دارد.

❖ همسایگی باز و بسته

- ✓ دو راس u و v از گراف G را دو راس همسایه یا مجاور می گویند هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند.

❈ $uv \in E(G)$

- ✓ به مجموعه راس هایی از گراف G که به راس v متصل اند، همسایگی باز راس v می نامند.

$N_G(v)$

❈ $N_G(v) = \{u \in v(G); uv \in E(G)\}$

- ✓ با اضافه کردن خود راس v به همسایگی باز آن، همسایگی بسته راس v بدست می آید. $N_G[v]$

❈ $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$

- ✓ تعداد عضوهای همسایگی باز هر راس ← درجه آن راس
- ✓ تعداد اعضای همسایگی بسته هر راس ← یکی بیشتر از درجه آن راس
- ✓ دو یال مجاورند هرگاه یک راس متصل باشند (هر دو یال به یک راس متصل باشند)

❖ مرتبه و اندازه ی گراف

✓ **مرتبه گراف**: تعداد راس های گراف $\leftarrow |V(G)| \leftarrow p(G) \leftarrow p$

✓ **اندازه گراف**: تعداد یال های گراف $\leftarrow |E(G)| \leftarrow q(G) \leftarrow q$

✓ $0 \leq q \leq \binom{p}{2}$

✍**نکته فوق حرفه‌ای:** حفظ شود !!!

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
q_{max}	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	…

✓ پایین بعدی = پایین + بالا

✓ $= \rightarrow \downarrow_{+}$

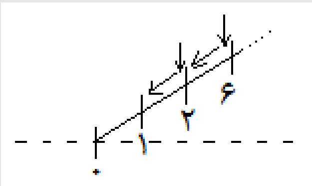
❖ مجموع مرتبه و اندازه

تکنیک: جدول

p	
q	

را رسم می کنیم. سپس مرز را مشخص می‌کنیم و به سمت افزایش مرتبه و کاهش اندازه پیش می‌رویم. افزایش مرتبه تا جایی که مرتبه با مجموع برابر شود و اندازه صفر شود.

❊ مشخص کردن مرز: اندازه‌های q_{max} را برای هر راس می نویسیم و مجموع داده شده را بین آنها قرار می‌دهیم و به سمت q کمتر می رویم. اولین q مرز است.



❖ حاصل ضرب مرتبه و اندازه

تکنیک: جدول

p	
q	

را رسم می کنیم. تمام شمارنده های حاصل ضرب را می نویسیم.

p و q را برعکس در جدول پر می کنیم و حالا چک می کنیم.

مثال: در یک گراف مجموع مرتبه و اندازه 7 است. چند جواب قابل قبول برای p وجود دارد؟

پاسخ: مشخص کردن مرز $\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & \downarrow & 10 \\ & & & & 7 & \end{Bmatrix}$ به $q = 6$ مربوط به $p = 4$ می رسیم. حالا

جدول را پر می‌کنیم.

p	4	5	6	7
q	3	2	1	0

← 4 دست جواب برای p وجود دارد.

مثال: در یک گراف حاصل ضرب مرتبه و اندازه ۳۰ است. حداکثر اندازه ی گراف کدام است؟

پاسخ:

p	1	2	3	5	6	10	15	30
q	30	15	10	6	5	3	2	1
	غقق	غقق	غقق	قق				

حداکثر اندازه ی گراف ۶ است.

❖ درجه راس

✓ به تعداد یال هایی که به راس v متصل اند درجه راس v می‌گویند. $deg(v)$ یا $d(v)$

✓ اگر درجه یک راس فرد باشد ← راس فرد

- ✓ اگر درجه یک راس زوج باشد ← راس زوج
- ✓ اگر درجه یک راس صفر باشد (هیچ یالی به آن متصل نباشد) ← راس تنها یا ایزوله (جزء راس های زوج است)
- ✓ اگر درجه یک راس $p-1$ باشد (به تمام رئوس دیگر متصل باشد) ← راس فول
- ✓ اگر درجه یک راس $p-2$ باشد ← راس نیمه فول
- ✓ بزرگترین عدد در بین درجات یک گراف ← ماکزیمم درجه ی گراف ← $\Delta(G)$
- ✓ کوچکترین عدد در بین درجات یک گراف ← مینیمم درجه ی گراف ← $\delta(G)$
- ✓ $0 \leq \delta \leq \deg(v) \leq \Delta \leq p-1$
- ✓ حاصل جمع درجات همه ی راس های گراف همواره دو برابر اندازه ی آن است.

$$\sum_{i=1}^{p} degv_i = 2q$$

- ✓ میانگین درجه راس ها $= \frac{\sum_{i=1}^{p} degv_i}{p} = \frac{2q}{p}$
- ✓ اگر درجه یا تعداد بیش از یک راس مجهول باشد:

الف) مرتبه مشخص است ← 2 معادله 2 مجهول

ب) مرتبه مشخص نباشد ← حل معادله ی سیاله با جواب های طبیعی

- ✓ تعداد راس های فرد همواره عددی زوج است.
- ✓ تعداد راس های زوج می‌تواند هم زوج و هم فرد باشد:

اگر زوج باشد ← تعداد رئوس زوج عددی زوج است.

اگر فرد باشد ← تعداد رئوس زوج عددی فرد است.

❖ دنباله درجه ی راس ها

✓ اگر درجه رئوس گراف G را به صورت نزولی مرتب کنیم، دنباله ی به دست آمده را دنباله درجه های G می‌گوییم.

⚠ **توجه:** اگر یک دنبال نزولی بتواند دنباله درجه های یک گراف باشد به آن دنباله گرافی می‌گوییم.

⚠ **توجه:** اگر در تستی کلمه دنباله برای درجه ها به کار نرفته بود، به این معنی است که ممکن است درجه راس ها به ترتیب نزولی قرار نگرفته باشند.

❖ مشخص کردن دنباله گرافی از سایر دنباله ها

تکنیک 2 مرحله‌ای

* حذف گزینه با نکات و کمتر و ساده تر شدن روی سوال

** انتخاب با الگوریتم هاول-حکیمی

✍**نکات مبتنی بر حذف گزینه**

1- بزرگترین درجه، حداکثر $p-1$ می‌تواند باشد

2- تعداد راس های فرد باید زوج باشد

3- باید حداقل دو راس درجه یکسان داشته باشند ← اثبات از طریق اصل لانه کبوتری

4- یک گراف نمی تواند همزمان راس ایزوله و فول داشته باشد

5- اگر k راس فول باشد، باید $\delta \geq k$ باشد

6- اگر گرافی یک راس فول و یک راس نیمه فول داشته باشد، حداکثر یک راس درجه 1 می تواند داشته باشد

7- اگر k راس درجه صفر داشته باشیم، آنگاه $\Delta \leq (p-k)-1$

٭ اگر گرافی راس درجه صفر داشته باشد، آن را کنار می گذاریم و روی گراف باقی مانده بحث می‌کنیم.

الگوریتم هاول–حکیمی

دنباله را به صورت نزولی می‌نویسیم. $(d_1,d_2,d_3,\dots,d_p)$

1- بزرگترین جمله دنباله (d_1) را حذف کرده و از هر یک از d_1 جمله بعدی یک واحد کسر می‌کنیم.

2- اگر دنباله باقیمانده از حالت نزولی خارج شد، آن را مجدداً به صورت نزولی مرتب می کنیم.

3- گام اول و دوم را آنقدر تکرار می کنیم تا به دنباله ی عددی برسیم که همه ی جمله های آن صفر باشد. در این صورت دنباله ی اول می‌تواند دنباله درجه های رئوس یک گراف ساده باشد، ولی اگر به دنبال صفر نرسیدیم و الگوریتم هم دیگر قابل اجرا نبود، دنباله اولیه گرافی نمی باشد.

⚠ **توجه:** در مراحل اجرای الگوریتم هر کجا که تشخیص دهیم دنباله بدست آمده نمی تواند یا می‌تواند دنباله ی درجه های یک گراف باشد، اجرای الگوریتم را متوقف می‌کنیم.

مثال: در یک گراف ساده از مرتبه ۶، دنباله ی درجه رئوس آن به کدام صورت می تواند باشد؟

1) 0، 2، 2، 3، 4، 5   2) 1، 2، 2، 3، 4، 5

3) 1، 1، 2، 3، 4، 5   4) 1، 2، 3، 3، 4، 5

پاسخ: گزینه ۴

حذف گزینه 1 ← راس فول و ایزوله همزمان نباید باشد

حذف گزینه 2 ← تعداد رئوس فرد باید زوج باشد

حذف گزینه ۳ ← راس فول و نیمه فول داریم پس حداکثر باید یکی 1 داشته باشیم

پاسخ گزینه ۴ ← می توانیم برای مطمئن شدن از الگوریتم هاول-حکیمی استفاده کنیم.

❖ حاصل ضرب درجه راس ها

✓ حاصل ضرب درجه راس‌ها را به حاصل ضرب اعداد اول تجزیه می‌کنیم.

در این شرایط 3 حالت زیر رخ می‌دهد:

1- تعداد اعداد اول موجود در حاصل ضرب برابر با مرتبه گراف

❋ به احتمال قوی همان اعداد درجه‌های رئوس گراف اند. اگر نبودند به جای دو تا از 2 ها، اعداد 4 و 1 قرار می‌دهیم (دو عدد را در هم ضرب می کنیم)

2- تعداد اعداد اول موجود در حاصل ضرب کمتر از مرتبه گراف

❋ به جای بقیه درجه ها 1 قرار می‌دهیم.

3- تعداد اعداد اول موجود در حاصل ضرب بیشتر از مرتبه گراف

❋ دو تا از درجه های کوچکتر (معمولاً دو تا از 2ها) را در هم ضرب کرده و یکی در نظر می‌گیریم و در صورت لزوم این کار را تکرار می‌کنیم.

❖ رسم گراف

اگر درجه تمام یا بعضی از رئوس یک گراف داده شده باشد و سوالی در مورد گراف پرسیده شود بهتر است گراف را رسم کنیم.

برای رسم بهتر ابتدا رئوس درجه بزرگتر را رسم کنیم.

✍**نکته:** اگر درجه یک یا چند راس را بدهند، بقیه راس ها را در یک بسته در نظر می‌گیریم و راس های بیرون را به داخل رئوس بسته وصل می کنیم و با توجه به سوال، داخل بسته نیز عملیاتی انجام می دهیم.

(مثلاً اگر تعداد یال ها ماکزیمم را بخواهیم در داخل بسته گراف کامل ایجاد می‌کنیم و اگر تعداد یال مینیمم را بخواهیم به داخل بسته دست نمی‌زنیم)

مثال: در یک گراف از مرتبه 7، درجه یک راس ۴ است. این گراف حداقل و حداکثر چند یال دارد؟

پاسخ:

حداقل 4 یال  حداکثر 15+4=19 

مثال: در گرافی از مرتبه ۵ دو راس از درجه ۳ وجود دارد. این گراف حداقل و حداکثر چند یال دارد؟

1) 5 و 8　　2) 5 و 9　　3) 6 و 9　　4) 6 و 8

پاسخ: گزینه 2

حداقل 5 تا  حداکثر 3+3+3=9 

✍**نکته:** اگر با تعدادی راس و یال در مورد تعداد راس های ایزوله سوال شود:

* حداکثر تعداد رأس ایزوله را زمانی داریم که با یال های موجود، راس کمتری را در بر بگیریم پس باید با اون تعداد یال گراف کامل یا نزدیک به کامل (یک بخش) بسازیم.

** حداقل تعداد رأس ایزوله را زمانی داریم که با یال های موجود راس بیشتری را در بر بگیریم پس گراف 1-منتظم درست می کنیم که 2 برابر تعداد یال ها، راس مصرف می‌شود.

مثال: در گرافی با ۱۵ راس و ۷ یال حداکثر و حداقل چند راس ایزوله داریم؟

پاسخ:

حداکثر: ۷ یال از ۶ یال k_4 بیشتره پس ۵ راس را در بر می‌گیریم $\Leftarrow$ ۱۰ راس ایزوله وجود دارد.

حداقل: ۷ یال در گراف 1-منتظم ۱۴ راس را در بر می‌گیرد $\Leftarrow$ 1 راس ایزوله وجود دارد.

- ✓ اگر مجموعه راس ها و مجموعه یال های یک گراف داده شود، باید رسم کرد.
- ✓ اگر نمودار یک گراف به صورت توصیفی داده شود (مثلاً تعداد یال ها و تعداد راس‌ها) باید آن را رسم کنیم تا بتوانید به خصوصیات گراف پی ببریم.

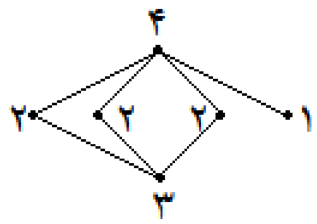
مثال: در گرافی با 4 راس و 5 یال بین دو راس از درجه کوچکتر چند مسیر وجود دارد؟

- ✓ اگر درجه رئوس یک گراف داده شود، باید رسم کنیم تا بتوانیم به خصوصیات آن پی ببریم. راس ها با درجه ی بزرگتر را رسم می کنیم و در گام بعدی به ایجاد راس ها با درجه کوچکتر می پردازیم.

✓ اگر بخواهیم دو راس با درجه بزرگتر مجاور نباشند، ابتدا آن دو راس را در بالا و پایین قرار می‌دهیم و بقیه راس ها را در یک ردیف بین آن دو می چینیم و سپس دو راس بالا و پایین را به میزان درجه شان به راس های میانی وصل می کنیم.

مثال: گرافی با درجه رئوس 1، 2، 2، 2، 3، 4 رسم کنید که دو راس بزرگتر مجاور نباشند.

پاسخ:



❖ تعداد گراف

✓ راس ها مشخص می باشند. برچسب گذاری نشده باشند.

✓ این مبحث با مبحث گراف های یک ریخت فرق دارد که در ادامه به آن نیز می پردازیم.

✍**نکات:**

✓ تعداد گراف های ساده با مجموعه راس های $v = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ برابر است با: $2^{q_{max}} = 2^{\binom{p}{2}}$

❈ به ازای هر یال یک انتخاب بودن و یک انتخاب نبودن داریم.

✓ اگر تکلیف هر یال مشخص شود (در گراف حضور داشته باشد یا نه) ⟵ از توان یکی کم می‌کنیم.

✓ تعداد گراف های ساده با مجموعه راس های $v = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ و اندازه ی q برابر است با:

$\binom{\binom{q}{2}}{q} = \binom{q_{max}}{q} \leftarrow$ از بین q_{max} تا یال ممکن q تا یال انتخاب می‌کنیم.

** یعنی ببینیم با این تعداد راس چند تا یال می‌تونیم داشته باشیم و از این تعداد q تا انتخاب کنیم.

✓ اگر یالی در گراف بود ← از بالا و پایین یکی کم می‌کنیم ← $\binom{q_{max}-1}{q-1}$

اگر یالی درگراف نبود ← از بالا یکی کم می‌کنیم و به پایین دست نمی‌زنیم ← $\binom{q_{max}-1}{q}$

✓ تعداد گراف هایی که n راس ایزوله داشته باشند n راس را کنار می‌گذاریم $\binom{p}{n}$ و مشخص می‌کنیم با این مقدار راس باقی مانده چند گراف می توان ساخت که راس ایزوله نداشته باشند.

* w راس باقیمانده حداقل $w-1$ یال نیاز دارند تا ایزوله تولید نکنند.

✓ اگر درجه راسی مثل a مشخص باشد ← ابتدا از بین یال هایی که می توانند به راس a متصل شوند به تعداد درجه، یال انتخاب می‌کنیم $\binom{p-1}{dega}$ و از یال های باقی مانده که به a نمی‌تواند متصل شوند، گراف های ممکن را تشکیل می‌دهیم.

✓ در مواردی برای سریع تر شدن در حل تست از اصل متمم استفاده می کنیم.

✓ تعداد گراف های k_n در یک گراف k_p $(1 \le n \le p) \leftarrow \binom{p}{n}$

✓ تعداد گرافهای کامل در k_p $(1 \le n \le p) \leftarrow 2^p - 1 = \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{p}$

مثال جامع: مجموعه راس های $\gamma = \{a,b,c,d,e,f\}$ را در نظر بگیرید. آنگاه مطلوب است محاسبه:

1- تعداد گراف هایی که می توان رسم کرد.

پاسخ: $\binom{6}{2} = 15 \rightarrow 2^{15}$

2- تعداد گراف هایی که 3 یال داشته باشند.

پاسخ: $\binom{15}{3} = \frac{15\times14\times13}{3\times2\times1} = 455$

3- تعداد گراف هایی که حداکثر ۱۳ یال داشته باشند.

پاسخ: $2^{15} - 16 = 2^{15} - \left(\binom{15}{14} + \binom{15}{15}\right)$ → حداقل 14 یال − کل :اصل متمم

4- تعداد گراف هایی که شامل یال bc و فاقد یال ed و ac باشند.

پاسخ: تکلیف 3 یال مشخص است . $2^{15-3} = 2^{12}$

5- تعداد گراف هایی با اندازه ی ۴ که از راس f یال عبور نکند.

پاسخ: راس f را کنار می گذاریم ← ۵ راس باقی می‌ماند ← $\binom{5}{2} = q_{max} = 10$

$\leftarrow \binom{10}{4} = 210$

6- تعداد گراف هایی که از راس b یال عبور بکند و ۵ یال داشته باشد.

پاسخ: گراف هایی با 5 یال که از b عبور نمی کند − گراف هایی با 5 یال :اصل متمم

$$= \binom{15}{5} - \binom{10}{5} = 3003 - 252 = 2751$$

7- تعداد گراف ها با اندازه ی ۳ که شامل یال af و ae نباشد اما شامل یال bd باشد.

پاسخ: $\binom{15-2-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$

8- تعداد گراف هایی که دقیقاً 3 رأس ایزوله داشته باشند.

پاسخ: ۳ تا راس کنار میگذاریم. از 3 تا راس باقی مانده که $q_{max} = 3$ باید 2 یا 3 یال داشته باشیم تا از این رئوس باقیمانده ایزوله نداشته باشیم.

$$\binom{6}{3}\left[\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right] = 20 \times 4 = 80$$

9- تعداد گراف هایی که $\deg c = 4$

پاسخ: $\binom{6-1}{4} \times 2^{15-5} = 5 \times 2^{10}$

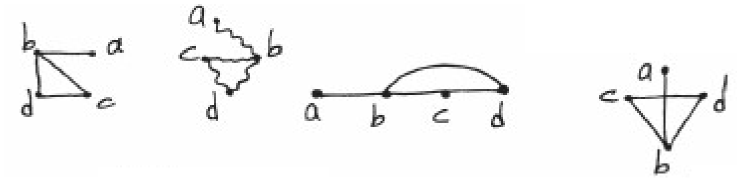
❖ گراف های یک ریخت

- ✓ معمولاً برچسب گذاری نشده - اسم رئوس مشخص نمی‌باشد.
- ✓ مفاهیم هندسی مانند طول و زاویه در مورد گراف معنی ندارد.
- ✓ آنچه که اهمیت دارد این است که بین چه راس‌هایی از گراف، یال وجود دارد.

✍**نکته:** گراف G_1 و G_2 برابرند هرگاه مجموعه راس های آنها برابر و مجموعه یال های آنها نیز برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{شرط } 1 & \gamma(G_1) = \gamma(G_2) \\ \text{شرط } 2 & E(G_1) = E(G_2) \end{array}\right\} \rightarrow G_1 = G_2$$

مثال: گراف های شکل زیر هم ریخت اند.



✓ برای اینکه نشان دهیم یک ریخت نیستند، از درجه راس ها می توانیم استفاده کنیم.

مثال: درجه راسی در گرافی 3 است اما در گراف دیگر اصلاً راس درجه ۳ وجود ندارد. پس یک ریخت نمی باشند.

✓ تفاوت گراف ها می تواند در تفاوت درجه رئوس، تفاوت نحوه ی اتصال آنها با یکدیگر و ... باشد.

معمولاً در حل این گونه مسائل بهتر است روی مقادیر مختلف $\triangle$ بحث کنیم.

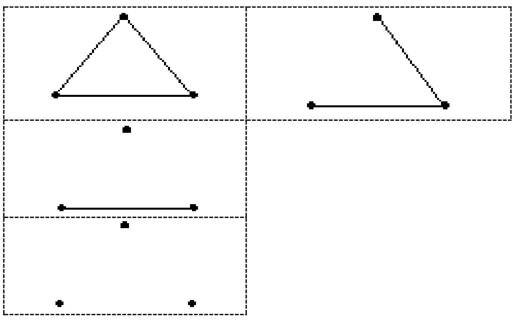
مثال: چند گراف ساده از مرتبه 3 وجود دارد؟

پاسخ: باید گراف های مرتبه 3 را پیدا کنیم که هیچ دوتایی از آنها یک ریخت نباشند ولی هر گراف مرتبه 3 با یکی از آنها یک ریخت باشد.

$\Delta = 2$

$\Delta = 1$

$\Delta = 0$

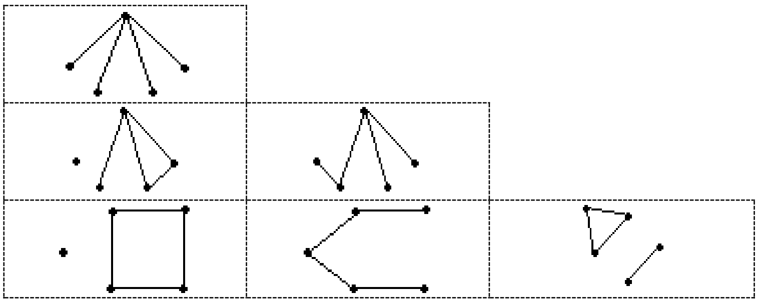


مثال :چند گراف ساده از مرتبه ۵ و اندازه ی ۴ وجود دارد؟

$\Delta = 4$

$\Delta = 3$

$\Delta = 2$



پاسخ: ۶ تا

❖ گراف منتظم

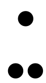
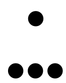
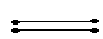
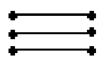
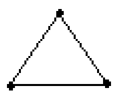
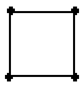
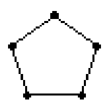
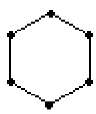
✓ گراف ساده‌ای که درجه همه ی رئوس آن با هم مساوی و برابر k باشد را گراف k-منتظم می نامیم.

✓ $\deg(\gamma) = \Delta = \delta = k$

✓ $0 \le k \le p - 1$

✓ $kp = 2q \leftarrow$ حاصل ضرب k و p همواره عددی زوج است. در نتیجه:

❊ گراف فرد-منتظم مرتبه فرد وجود ندارد.

0-	❊ گراف تهی R راسی ❊ $\bar{k}_n$				
1-	❊ تعداد راس ها زوج ❊ تعداد راس ها دوبرابر تعداد یال ها				
2-منتظم	❊ چندضلعی ❊ همسایگی باز هر راس دو عضو دارد ❊ همسایگی بسته هر راس سه عضو دارد.	 C_3	 C_4	 C_5	 C_6

✍**نکته:** در حالت کلی برای پیدا کردن تعداد گراف های دو منتظم مرتبه p می بایست تحقیق کنیم که عدد p را به چند طریق می توان به صورت مجموع اعداد طبیعی نوشت که هیچکدام کوچکتر از 3 نباشد.

مثال: چند گراف 2-منتظم مرتبه 10 وجود دارد؟

پاسخ: ۵ تا $\underbrace{10}_{1} = \underbrace{5+5}_{2} = \underbrace{6+4}_{3} = \underbrace{3+3+4}_{4} = \underbrace{7+3}_{5}$

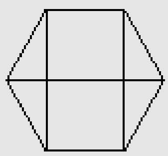
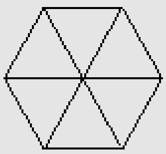
- ✓ نکته فوق در مبحث گراف مکمل هم به کار برده می شود. گاهی به طور مستقیم به 2-منتظم بودن گراف اشاره نمی‌کنند اما مکمل آن گراف 2-منتظم است و باز هم این نکته به کار می‌آید.
- ✓ نکته فوق در مبحث دور نیز به کار برده می شود. هر بخشی که می نویسیم دوری به طول آن است.

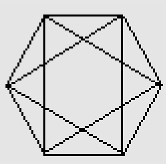
مثال: $8 = 4 + 4$ دو دور به طول 4

- ✓ نکته فوق در مبحث همبندی نیز به کار برده می‌شود و می‌توان تعداد مولفه‌های همبندی را مشخص کرد.

مثال: $12 = 3 + 3 + 6$ دارای 3 مولفه ی همبندی

نکته: چند نمونه گراف منتظم پرکاربرد

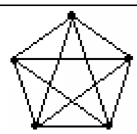
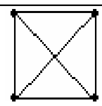
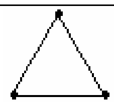
* 3-منتظم مرتبه 6  یا 

* 4-منتظم مرتبه 6 

نکته: در مواردی که گفته می‌شود یک گراف با افزودن a یال به گراف دیگری تبدیل می شود، تعداد یال های گراف اول را پیدا کرده و q_1 می گذاریم. تعداد یال های گراف دوم را نیز پیدا کرده و q_2 می گذاریم. سپس معادله ی $q_1 + a = q_2$ را حل می‌کنیم. (اگر گفته شود با کاهش a یال به جای a+ از a- استفاده می‌کنیم)

❖ گراف کامل k_p

✓ گرافی که هر راس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد را گراف کامل می‌نامیم.

k_5	k_4	k_3	k_2	k_1
				

گرافی که تنها از یک راس تشکیل شده باشد کامل و همبند است.

نکات:

1- گراف k_p یک گراف $(p-1)$-منتظم از مرتبه p است و برعکس.

2- اگر در یک گراف با p راس، $\Delta = \delta = p-1$ باشد، گراف k_p است و برعکس.

* در گراف k_p درجه ی تمام رئوس برابر $p-1$ است.

3- k_p گرافی است که همسایگی بسته تمام راس های آن برابر مجموعه $\gamma(\mathrm{G})$ باشد و برعکس.

4- اندازه ی گراف کامل مرتبه p حداکثر مقدار ممکن برای اندازه ی یک گراف ساده است.

$$q(k_p) = \binom{p}{2}$$

5- همسایگی باز تمام رئوس در گراف k_p، $(p-1)$ عضو دارد.

6- هر دو راس متمایز در گراف k_p مجاورند.

7- در بعضی از مسائل که مجموع، تفاضل یا حاصل ضرب مرتبه و اندازه ی یک گراف کامل را می‌دهند و سوالی درباره ی آن گراف کامل می‌پرسند، از نکته فوق حرفه ای ابتدا فصل استفاده می‌کنیم.

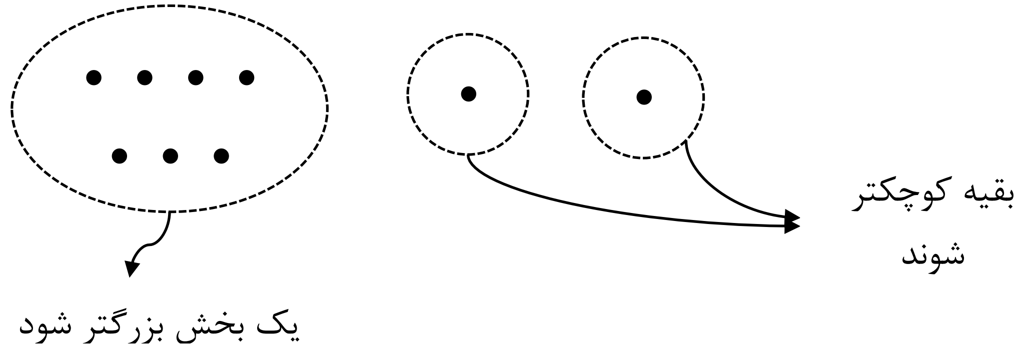
یادآوری نکته فوق حرفه‌ای:

گراف	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	...
اندازه	0	1	3	6	10	...

✍**نکته:** اگر گراف کامل در چند بخش داشته باشیم، هر چقدر مرتبه یک بخش را بزرگتر و بخش دیگر را کوچک‌تر کنیم، تعداد یال ها (اندازه) گراف بیشتر می‌شود و هر چقدر مرتبه بخش‌ها را به هم نزدیک تر و برابرتر کنیم، تعداد یال ها (اندازه) کمتر می‌شود.

مثال: اگر در شکل گرافی از مرتبه 9، سه بخش جدا از هم وجود داشته باشد، بیشترین مقدار اندازه گراف چند است؟

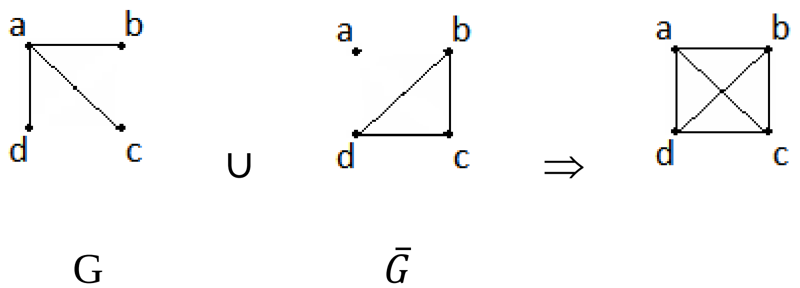
پاسخ: 21 یال $\rightarrow k_7,k_1,k_1$



❖ مکمل گراف (گراف مکمل) $G^c,\bar{G}$

- ✓ راس های گراف $\bar{G}$ همان راس های G است ولی یال‌هایش، یال هایی هستند که G آنها را ندارد.
- ✓ 2 راس در G مجاورند اگر و تنها اگر در $\bar{G}$ مجاور نباشند.
- ✓ از روی هم قرار دادن گراف G و مکمل آن $\bar{G}$ یک گراف کامل به دست می آید.

مثال:



- ✓ گراف $\bar{G}$ مکمل گراف G است و گراف G نیز مکمل گراف $\bar{G}$ است.
- ✓ مجموع درجه راس γ در گراف G و $\bar{G}$ برابر با $p-1$ است. $d_G(\gamma)+d_{\bar{G}}(\gamma)=p-1$
- ✓ اگر راسی فول باشد در گراف مکمل آن راس ایزوله است و اگر راسی ایزوله باشد در گراف مکمل فول است.

- ✓ مکمل گراف کامل یک گراف تهی است و مکمل یک گراف تهی یک گراف کامل است.

❈ مکمل گراف k_1 خودش است.

- ✓ اگر درجه یک راس در گراف G ماکزیمم باشد درجه آن راس در گراف $\bar{G}$ مینیمم است و برعکس.

$$\Delta(\mathrm{G}) + \delta(\bar{G}) = p - 1 \qquad \Delta(\bar{G}) + \delta(G) = p - 1$$

- ✓ اگر G یک گراف از مرتبه p و با اندازه ی q و $\bar{G}$ نیز مکمل G باشد، آنگاه:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \binom{p}{2}$$

- ✓ مکمل هر گراف k-منتظم از مرتبه p یک گراف r-منتظم از مرتبه p است. به طوری که:

$$k + r = p - 1$$

❈ مکمل هر گراف منتظم الزاماً منتظم است.

- ✓ وقتی در تست مطرح می شود که گراف G چند راس غیر مجاور دارد باید ببینیم $\bar{G}$ چند یال دارد.

❖ تکنیک گراف مکمل در گراف های نزدیک به کامل

- ✓ می‌دانیم به ازای هر $\bar{G}$ یک گراف منحصر به فرد G وجود دارد. یعنی بین حالت های مختلف G و $\bar{G}$ تناظر یک به یک وجود دارد. پس در گراف های نزدیک به کامل به جای اینکه مستقیم گراف G را در نظر بگیریم، گراف $\bar{G}$ را در نظر می‌گیریم و با تحلیل آن به خواص G می‌رسیم.
- ✓ اگر گرافی نزدیک به یک گراف کامل باشد برای بررسی بهتر است آن را با گراف کامل هم مرتبه خودش مقایسه کنیم و به جای اینکه کل یال ها را رسم کنیم، از روش نمادین (رسم گراف مکمل) برای رسم گراف استفاده می‌کنیم.
- ✓ اگر در مورد $\Delta - \delta$ سوال پرسیده شود:

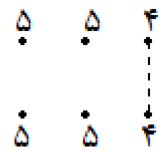
* اگر بخواهیم حاصل max شود باید Δ بزرگتر و δ کوچکتر شود ← از یک راس یال کم کنیم.

** اگر بخواهیم حاصل min شود باید Δ و δ نزدیک هم شوند ← از اکثر راس ها (ترجیحاً 1-منتظم) یال کم می‌کنیم.

✓ اگر تعداد یال های حذف شده نصف تعداد راس ها باشد می توان مانند گراف 1-منتظم طوری یال حذف کرد که دوباره درجه تمام رئوس ماکزیمم شود.

مثال: اگر اندازه ی یک گراف از مرتبه ۶ برابر ۱۴ باشد، این گراف چند راس فول دارد؟

پاسخ: گراف فوق از گراف k_6 یک یال کمتر دارد. پس از تکنیک گراف مکمل در گراف های نزدیک به کامل استفاده می‌کنیم.



← این گراف ۴ راس فول دارد.

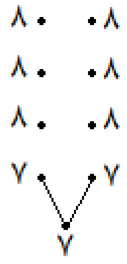
مثال: در گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ی ۲۴ حداکثر چند راس درجه ماکزیمم وجود دارد؟

پاسخ: گراف فوق ۴ یال از k_8 کم دارد. تعداد یال های حذف شده نصف مرتبه است.

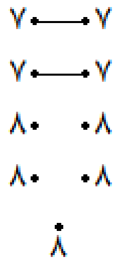
این گراف ۸ راس درجه ماکزیمم دارد →

مثال: در گرافی از مرتبه ۹ و اندازه ی ۳۴ حداکثر و حداقل چند راس درجه ماکزیمم وجود دارد؟

پاسخ: حداکثر 6 تا



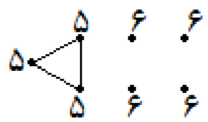
حداقل 5 تا



مثال: در گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ی ۱۸ حداکثر چند راس درجه ماکزیمم وجود دارد؟

1 (1   2 (2   3 (3   4 (4

پاسخ: گزینه ۴



نتیجه: حداکثر راس درجه ماکزیمم ← حداقل راس درجه مینیمم ← با یال ها راس کمتری را دربر می گیریم و گراف کامل یا نزدیک به کامل درست می کنیم.

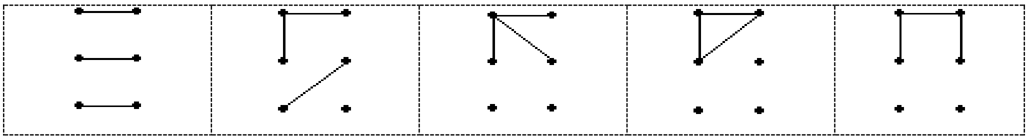
حداقل راس درجه ماکزیمم ← حداکثر راس درجه مینیمم ← با یال ها راس بیشتری را دربر می گیریم.

مثال: چند نوع گراف از مرتبه ۶ و اندازه ۱۲ وجود دارد؟

3 (1   4 (2   5 (3   6 (4

پاسخ: گزینه ۳ - رسم گراف فوق سخت و زمان‌بر است. پس از تناظر یک به یک در گراف مکمل حل می‌کنیم. روی سوال را اینگونه تغییر می‌دهیم که چند نوع گراف از مرتبه ۶ و اندازه ۳ وجود دارد؟

5 نوع گراف →



مثال: چند گراف ۶ منتظم مرتبه 9 وجود دارد؟

1) 4   2) 3   3) 2   4) 1

پاسخ: مشخص کردن این گراف سخت و زمانبر است پس از تناظر یک به یک با گراف مکمل حل می‌کنیم. روی سوال را اینگونه تغییر می‌دهیم که چند گراف 2-منتظم مرتبه 9 وجود دارد؟ حال از نکته فوق حرفه‌ای در مبحث گراف 2-منتظم استفاده می‌کنیم.

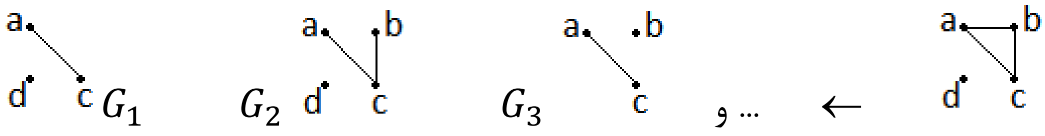
گزینه ۱ $\underbrace{9}_{1} = \underbrace{4+5}_{2} = \underbrace{6+3}_{3} = \underbrace{3+3+3}_{4} \rightarrow$ ۴ تا وجود دارد

❖ زیرگراف

✓ یک زیرگراف از گراف G، گرافی است که مجموعه رئوس آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن نیز زیر مجموعه‌ای از مجموعه یال‌های G باشد.

✓ برای اینکه تشخیص بدهیم گراف x زیرگراف گراف G است: باید تمام راس های x در G باشد و تمام یال‌های x در G باشد.

مثال: G ← ... و G_3 G_2 G_1



❖ مسیر

- ✓ اگر u و r دو راس از گراف G باشند، یک مسیر از u به r در گراف G دنباله‌ای از رئوس دو به دو متمایز در G است که از u شروع شده و به r ختم می شود به طوری که هر دو راس متوالی این دنباله در G مجاورند.
- ✓ یک مسیر در واقع بیانگر حرکت از یک راس به راس دیگر است طوری که در طی حرکت از روی یال های گراف عبور کنیم و از هیچ راسی دوبار نگذریم.
- ✓ جهت در مسیر اهمیت ندارد.
- ✓ در مسیر نباید راس تکراری وجود داشته باشد.
- ✓ در مسیر پرواز ممنوع است.
- ✓ طول یک مسیر = تعداد یال های موجود در آن مسیر = تعداد رئوس مسیر منهای یک

✍نکات

1- در هر گراف دنباله متشکل از تنها یک راس v، یک مسیر است با طول صفر از راس v به خودش

❋ p مسیر به طول صفر وجود دارد.

2- در هر گراف هر دنباله متشکل از رئوس دو سر یک یال یک مسیر با طول 1 است.

❋ به تعداد یال ها مسیر به طول یک وجود دارد.

3- طول یک مسیر بین دو راس متمایز در گراف G از مرتبه p عددی صحیح در بازه ی $[1,p-1]$ است.

4- در k_p طول بلندترین مسیر $p-1$ است.

5- اگر در یک گراف مسیری با طول k وجود داشته باشد، تمام مسیرها با طول $k,\ldots,2,1,0$ را نیز دارد.

6- اگر $\delta(G) = k$ در گراف G حداقل یک مسیر به طول k وجود دارد. (طبق نکته ۵ در این گراف مسیرهایی با طول $k,\ldots,3,2,1$ بین راس‌های مختلف حتما موجود است.)

7- اگر $\delta(G) = k$ ممکن است در این گراف مسیری با طول بزرگتر از k وجود داشته باشد یا نداشته باشد. (عدم قطعیت)

8- C_n گرافی است که بین هر دو دلخواه فقط دو مسیر وجود دارد.

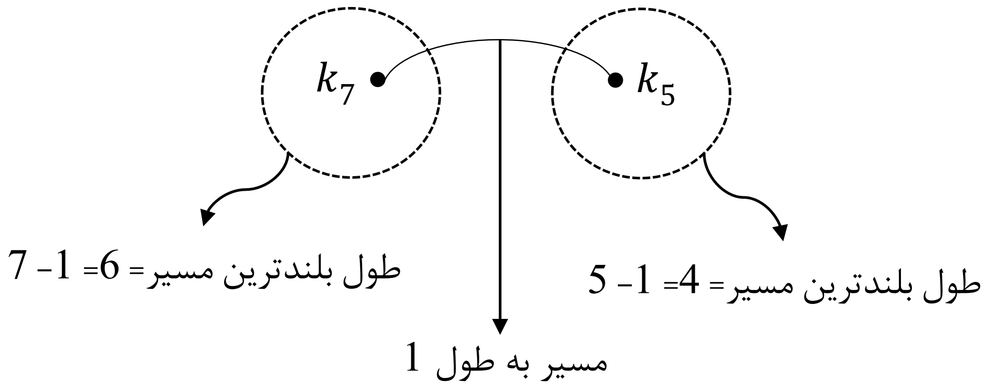
9- درخت گرافی است که بین هر دو راس دلخواه فقط یک مسیر وجود دارد.

❋ در گراف های شلوغ می توان برای شمردن تعداد مسیرها از روش نمودار درختی استفاده کرد اما چون سرعت عمل پایین است حدالامکان از این روش حل نمی کنیم.

مثال: یک گراف k_5 و یک گراف k_7 توسط یک یال به هم متصل شده‌اند. طول بلندترین مسیر بین دو راس متمایز در گراف حاصل کدام است؟

1) 10 2) 11 3) 12 4) 14

پاسخ: گزینه 2



$11 = 1 + 6 + 4 =$ جواب

❖ گراف p_n

- ✓ گرافی که فقط از یک مسیر n راسی تشکیل شده باشد را با p_n نمایش می‌دهیم.

p_1	p_2	p_3	p_4	...
				...

- ✓ تعداد مسیرها به طول k در گراف p_n برابر با $n-k$ است.

❉ n = طول مسیر + تعداد مسیرها به طول k

- ✓ طول بزرگترین مسیر $n-1$ است که یک دونه وجود دارد.
- ✓ تعداد کل مسیرها بین دو راس متمایز (مسیر به طول صفر را حساب نکردیم) در گراف p_n برابر با $\binom{n}{2}$
- ✓ n مسیر به طول صفر وجود دارد.
- ✓ گرافی که با دقیقاً دو راس درجه 1 و بین هر دو راس دلخواه دقیقا یک مسیر وجود دارد ← p_n
- ✓ تعداد یال ها = تعداد راس‌ها منهای یک ← $q=p-1$ ← $p=q+1$

❖ مسیر در گراف کامل

- ✓ از آنجایی که تمام راس ها باهم مجاورند برای محاسبه ی مسیرها از آنالیز ترکیبی استفاده می کنیم.
- ✓ تعداد کل مسیرها موجود بین دو راس u و v در گراف k_p برابر است با: $[(p-2)!\,e]$

❉ e = 2/72 عدد نپر

❉❉ در گراف هایی شامل چند گراف کامل (مسیرهای چندبخشی) 2 حالت داریم:

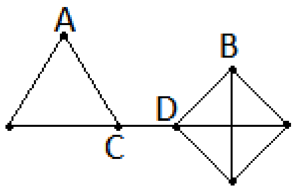
1- در مسیر از A به B مجبوریم از یک مرز عبور کنیم.

از A به مرز و از مرز به B $(A \to \text{مرز}) \times (\text{مرز} \to B)$

2- در مسیر از A به B می توان مستقیم یا غیرمستقیم رفت.

$$\underbrace{(A \to B)}_{\text{مستقیم}} + \underbrace{(A \to B)}_{\text{غیرمستقیم}}$$

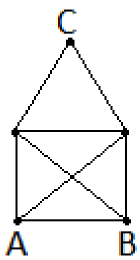
مثال 1: $A \to B$ چند مسیر؟



$(A \to C)$ و $(C \to D)$ و $(D \to B)$

$$[(3-2)!\, e] \times 1 \times [2!\, e] = 2 \times 1 \times 5 = 10$$

مثال 2: $A \to B$ چند مسیر؟



$$\underbrace{(A \to B)}_{\text{مستقیم}} + \underbrace{(A \to B)}_{\text{غیرمستقیم}}$$

$$(A \to B) + (A \to C \to B)$$

$$[2!\, e] + 2 = 7$$

✓ تعداد کل مسیرها با طول <u>بزرگتر از صفر</u> در گراف k_p: $\binom{p}{2}[(p-2)!\,e]$

✓ اگر تعداد کل مسیرها (از طول صفر به بالا) را بخواهیم نتیجه بالا را با مرتبه جمع می کنیم.

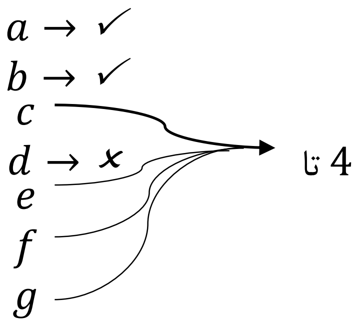
✓ وقتی گفته میشه که در یک گراف بین دو راس حداکثر چند مسیر وجود دارد آن گراف را گراف کامل در نظر می‌گیریم.

✓ مسیر در گراف کامل به 2 تیپ کلی تقسیم می شود:

1– **ابتدا و انتهای مسیر مشخص است**.

❈ برای مسیر به طول n، $n+1$ جایگاه برای رئوس مشخص می کنیم که ابتدا و انتهای آنها مشخص است حال برای جایگاه های خالی از تکنیک آنالیز استفاده می‌کنیم.

مثال + تکنیک : در گراف k_r با مجموعه رئوس $r=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ چند مسیر به طول ۴ از a به b وجود دارد به طوری که راس d را شامل نشود؟



پاسخ: d را در نظر نمی گیریم. $\underline{a}\,\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2}\,\underline{b} \rightarrow 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

مثال + تکنیک : در گراف k_6 با مجموعه رئوس $r = \{a,b,c,d,e,f\}$ چند مسیر به طول ۴ از a به b وجود دارد که راس c را شامل شود.

پاسخ:

$a \rightarrow \checkmark$
$b \rightarrow \checkmark$
$c \rightarrow \checkmark$
$\left.\begin{matrix} d \\ e \\ f \end{matrix}\right\} \rightarrow$ 3 تا

$$\underline{a}\,\underline{\binom{3}{1}}\,\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{b} \quad \rightarrow \quad 1 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$$

از بین 3 تا جایگاه 1 جایگاه برای c وجود دارد.

2– **ابتدا و انتهای مسیر مشخص نمی باشد.**

❋ مثل حالت عادی حل می‌کنیم و در پایان بر 2 تقسیم می کنیم. (چون رفت و برگشت (جهت) ایجاد مسیر متمایز نمی‌کند پس تعداد واقعی مسیرها نصف عدد به دست آمده است)

تکنیک

✓ اگر مسیر شامل راس یا رئوس معینی باشد:

❋ ابتدا جایگاه‌های راس های مسیر را مشخص می کنیم. راس یا رئوس مشخص را در آن قرار می دهیم از بین رئوس باقی مانده به تعداد جایگاه های خالی انتخاب می کنیم و سپس در جایگشت کل ضرب می کنیم و بر ۲ تقسیم می کنیم.

✓ اگر مسیر فاقد راس یا رئوس معین باشد:

❋ آن راس را کلاً از مسیر محاسبات حذف می‌کنیم. انگار که اصلاً وجود نداشته

✓ اگر مسیر شامل یال یا یال‌های معینی باشد:

❄ در بین جایگاه‌ها دو سر یال (دو راس یال) را در یک بسته کنار هم قرار می‌دهیم و جایگاه های خالی را با انتخاب رئوس باقیمانده پر می‌کنیم و در جایگشت کل و جایگشت دو سر هر یال (2!) ضرب کرده و در نهایت بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

✓ اگر مسیر فاقد یال یا یال های معینی باشد:

❄ **اصل متمم**

مثال جامع: در گراف k_9 چند مسیر به طول ۴ وجود دارد که:

1) شامل راس a باشد؟

2) شامل راس c نباشد؟

3) شامل دو راس a و b باشد ولی شامل راس c نباشد؟

4) شامل یال ab باشد؟

5) فاقد یال cd باشد؟

پاسخ:

1- $420 = \frac{\binom{8}{4}\times 5!}{2}$ $\quad \underline{a}\ \overbrace{\_\ \_\ \_\ \_}^{\text{4 جایگاه خالی}}$ وقتی a مشخص باشد 8 راس دیگر باقی می ماند.

2- $3360 = \frac{8\times7\times6\times5\times4}{2}$ $\quad \_\ \_\ \_\ \_\ \_$ c رو کلا حذف می کنیم.

3- $1200 = \frac{\binom{6}{3}\times 5!}{2}$ $\quad \underline{a}\ \underline{b}\ \overbrace{\_\ \_\ \_}^{\text{3 جایگاه}}$ تکلیف 3 راس مشخص شده، 6 تا دیگه می مونه

4- $840 = \frac{\binom{7}{3}\times 4!\times 2!}{2}$ $\quad \underbrace{\underline{a}\ \underline{b}}_{\text{4 بخش}}\ \overbrace{\_\ \_\ \_}^{\text{3 جایگاه}}$

$$6720 = \frac{9\times8\times7\times6\times5}{2} - \frac{\binom{7}{3}\times4!\times2!}{2} \quad -5$$

$$\underbrace{\boxed{\underline{c}\ \underline{d}}\ \overbrace{\_\ \_\ \_}^{\text{3 تا خالی}}}_{\text{4 بخش}}$$

جواب = مسیرها به طول 4 – مسیرها به طول 4 شامل cd

_ _ _ _ _ _

مثال: در گراف k_6 چند مسیر وجود دارد؟

پاسخ: $\binom{6}{2}[4!\times 2/72]+6 = 15\times 65+6 = 981$

❖ دور

- ✓ دنباله $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \dots \gamma_n\gamma_1$ $(n \geq 3)$ از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر راس با راس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.
- ✓ دور نوعی مسیر است که ابتدا و انتهای آن یکسان است.
- ✓ حرکت از یک راس و بازگشت مجدد به آن راس به طوری که در طی حرکت از راس تکراری عبور نکنیم و همواره از روی یال ها حرکت کنیم.
- ✓ طول دور = تعداد یال های موجود در مسیر $3 \leq$ طول دور $\leq p$
- ✓ جهت چرخش یا محل شروع حرکت اهمیتی ندارد و آنچه که مهم است و دورها را متمایز می‌سازد، ترتیب قرار گرفتن رئوس (حداقل یک یال متفاوت) می باشد.
- ✓ هر n ضلعی فقط یک دور به طول n دارد.
- ✓ دورهایی که دنباله یال های یکسانی دارند را یکسان در نظر می‌گیریم.
- ✓ هر دور به طول m، 2m نمایش به صورت دنباله دارد.

✓ گراف 2-منتظم مرتبه p
- حداقل دور ← 1
- حداکثر دور ← $\left[\frac{n}{3}\right]$ ← به مثلث های بیشتری تقسیم شود.

❖ دور در گراف کامل

✓ در گراف k_p دورهایی به طول n که $3 \le n \le p$ وجود دارد.

✓ تعداد دورها با طول m در گراف k_p از رابطه زیر به دست می آید:

$$\binom{p}{m}\frac{(m-1)!}{2}$$

❈ m راس را از p راس انتخاب می کنیم و با آن گردنبند می سازیم.

تکنیک:

✓ اگر دور شامل راس معین باشد ← به ازای هر راس در انتخاب $\binom{p}{m}$ یکی از بالا و پایین کم می‌کنیم.

✓ اگر دور فاقد راس معین باشد ← به ازای هر راس در انتخاب $\binom{p}{m}$ فقط یکی از بالا کم می‌کنیم.

به $\frac{(m-1)!}{2}$ دست نمی زنیم.

✓ اگر دور شامل یال معینی باشد ← جایگاه‌ها را مشخص می‌کنیم. دو سر یال (2 راس) را در یک بسته قرار می‌دهیم و از راس های باقی‌مانده به تعداد جایگاه های خالی، انتخاب می کنیم و سپس با این بسته‌ها گردنبند درست می کنیم و در جایگشت دو سر یال یعنی !2 ضرب می کنیم.

$\frac{(m-1)!}{2}$ تغییر می کند.

❈ می توانیم با روش جایگاه‌های خالی نیز حل کنیم.

تکنیک در تکنیک: تعداد دورها به طول n که از یک یال خاص می گذرند برابر است با تعداد مسیرهایی به طول rip^{+} $n-1$ که از دو سر همان یال می‌گذرند.

✓ اگر دور فاقد یال معینی باشد ← اصل متمم

مثال جامع: در گراف k_r چند دور به طول 5 وجود دارد که:

1- شامل راس های a و b باشد؟

2- شامل راس های f و d نباشد اما شامل a باشد؟

3- شامل یال ab باشد؟

4- شامل یال ac باشد و فاقد bd باشد؟

پاسخ:

1- $\binom{7}{5} \to$ تکلیف 2 راس مشخص $\to \binom{7-2}{5-2}\frac{4!}{2} = \binom{5}{3} \times 12 = 120$

2- $\binom{7}{5} \to$ تکلیف 3 راس مشخص $\to \binom{7-2-1}{5-1}\frac{4!}{2} = \binom{4}{4} \times 12 = 12$

3- **روش اول:** $\binom{5}{3}\frac{3!2!}{2} = 10 \times 6 = 60$ $\underbrace{\boxed{a\ b}\ \overbrace{\_\ \_\ \_}^{\text{3 جایگاه خالی}}}_{\text{4 جایگاه}}$

روش دوم: $\overset{a}{\_}\ \_\ \_\ \_\ \overset{b}{\_} \to 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$ مسیر به طول 4

4- جواب = دورهایی به طول 5 که شامل ac و bd می باشد – دورهایی به طول 5 که شامل ac باشند = اصل متمم

$$\binom{5}{3}\frac{3!2!}{2}-\binom{3}{1}\frac{2!2!2!}{2}=60-12=48$$

$$\underbrace{a\,\boxed{c\ b}\,\boxed{d\ \overbrace{\_}^{\text{یکی}}}}_{\text{3 تا}} \qquad \underbrace{a\,\boxed{c\ \_}\,\overbrace{\_\ \_}^{\text{3 تا}}}_{\text{4 تا}}$$

مثال: در گرافی با دنباله درجه 4، 4، 5، 5، 5، 5 چند دور به طول 3 وجود دارد؟

1) 14   2) 15   3) 16   4) 17

پاسخ: گزینه 3 - گراف فوق k_6 است که یک یال ندارد. روی سوال را اینگونه تغییر می دهیم: در گراف k_6 چند دور به طول 3 وجود دارد که از یک یال خاص مثلاً ab نگذرد.

دورهای به طول 3 شامل یک یال خاص – کل = اصل متمم

$$\rightarrow \binom{6}{3}\frac{2!}{2}-\binom{4}{1}\frac{1!\,2!}{2}=20-4=16$$

✍**نکته:**

- ✓ اگر در گراف G، $\delta \geq 2$ آنگاه گراف G حتماً دور دارد.
- ✓ اگر در گراف G، $q \geq p$ آنگاه گراف حتما دور دارد.

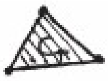
عکس این نکات الزاماً درست نیست.

❖ دور در گراف های متقارن

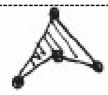
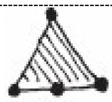
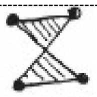
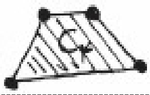
- ✓ در گراف هایی که کامل نیستند رابطه خاصی وجود ندارد اما نظم و تقارن هندسی دیده می‌شود.
- ✓ هر نمونه دور را با توجه به تقارن مسئله در تعداد تکرار آن ضرب می کنیم.

✓ گرافی که تنها از یک دور n راسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم.

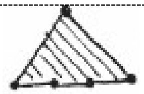
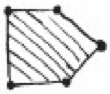
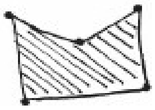
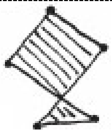
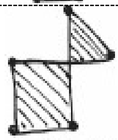
✓ چند دور خاص:

1- C_3 یا دور به طول 3 همواره به شکل مثلث ← 

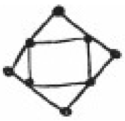
2- C_4 یا دور به طول ۴ به شکل های زیر:

و ...					

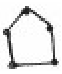
3- C_5 یا دور به طور ۵ به شکل های زیر:

				
	و ...			

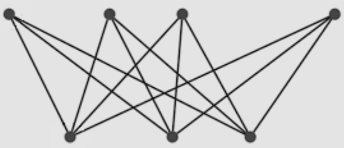
مثال: گراف مقابل چند دور با طول 5 دارد؟



1) 2 2) 4 3) 6 4) 8

پاسخ: گزینه ۲ چهار دور به شکل  وجود دارد.

✍**نکته:** در گراف های دو بخشی کامل، دور با طول فرد وجود ندارد و تعداد دورها به طول 4 برابر $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$ است که m و n تعداد راس های هر قسمت است. $k_{m,n}$



❖ همبندی

✓ گراف G را همبند می گوییم هرگاه بین هر دو راس دلخواه حداقل یک مسیر وجود داشته باشد

در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

✓ گرافی همبند است که از یک بخش تشکیل شده باشد و بخش جدا از هم ندارد.

✓ گراف های تهی همگی ناهمبنداند به جز گراف تهی یک راسی K_1

✓ گراف های 1-منتظم همگی ناهمبنداند به جز P_2

نکته:

❋ اگر $\delta + \Delta \geq p - 1$ آنگاه G همبند است ← ناهمبند $\Delta + \delta < p - 1$

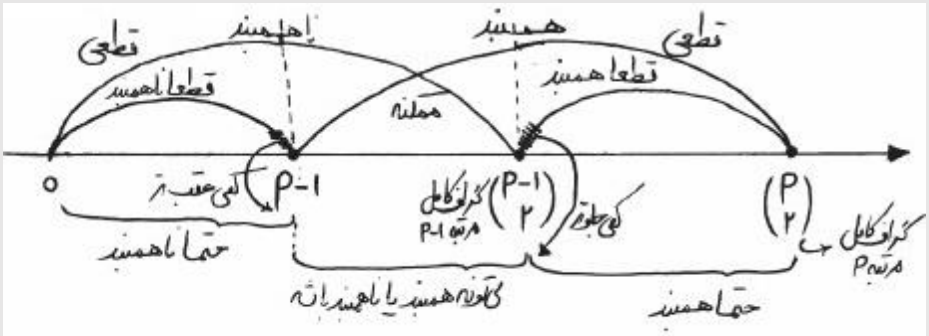
یا

❋ اگر $\delta \geq \frac{p-1}{2}$ آنگاه G همبند است ← ناهمبند $\delta < \frac{p-1}{2}$

اگر یکی از اینها برقرار باشد، G همبند است.

تکنیک طلایی

- تعیین وضعیت همبندی یا ناهمبندی از روی q (اندازه گراف)



- الگوریتم تشخیص همبند یا ناهمبند بودن از روی دنباله درجه رئوس گراف

1- نزولی کنید.

2- راس درجه Δ سمت چپ ترین عدد دنباله را به Δ راس بعدی وصل کنید.

3- اگر k راس باقی بماند که درجه همه ی آن k راس از k-1 بیشتر باشد، گراف قطعاً همبند است.

4- اگر درجه k راس از k-1 بیشتر نباشد نمی توان اظهارنظر کرد و به سراغ نکات زیر می رویم.

* اگر $\delta = 0$ ← ناهمبند

* از روی دنباله درجه، q را به دست می‌آوریم و از نکته بالا استفاده می‌کنیم.

اگر دنباله درجه گراف داده شود می توانیم به جای الگوریتم فوق مستقیماً q را به دست آوریم و از نکته بالا استفاده کنیم. البته گاهی از روی دنباله درجه نمی توان q را به دست آورد و باید از الگوریتم استفاده کنیم.

مثال: وضعیت همبندی گراف G با دنباله درجات 4، 4، 4، 4، 4، 4، y، x، 5 را مشخص کنید.

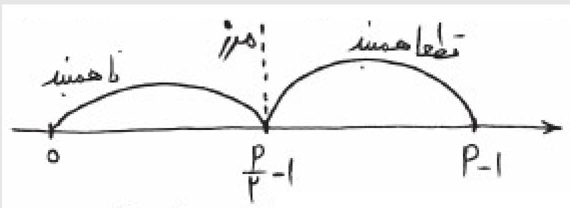
پاسخ: $\Delta = 5$ ← 5 را به 5 راس بعدی وصل می کنیم.

4، 4، 4، 4، 4، 4، y، x، 5

3 راس باقی می ماند ← $k = 3$

$2 = 1 - 3 < 4$ ← همبند است

- یافتن نقطه شکست (جایی که امکان ناهمبندی وجود دارد) در گراف r منتظم مرتبه p



تکنیک نقطه شکست در r - منتظم ها:

* اگر p زوج باشد، p راس گراف را به دو قسمت با مرتبه مساوی می شکنیم.

مثال: r-منتظم مرتبه 6 $\underbrace{3,4,5}_{\text{حتماً همبند}}$ $\underbrace{\text{ر}}_{\text{مرز}}$ $r: \underbrace{0,1,2}_{\text{ناهمبند}}$

* اگر p فرد باشد، p راس گراف را به دو قسمت با مرتبه متوالی میشکنیم.

مثال: r-منتظم مرتبه 5 $\underbrace{2,3,4}_{\text{حتماً همبند}}$ $\underbrace{\text{ر}}_{\text{مرز}}$ $r: \underbrace{0,1}_{\text{ناهمبند}}$

مثال: چند گراف 2-منتظم ناهمبند مرتبه ۱۲ وجود دارد؟

پاسخ: ۸ تا - استفاده از تکنیک گراف های 2-منتظم

$$\underbrace{12}_{\text{اینو نمی شماریم}} = \underbrace{6+6}_{1} = \underbrace{3+3+3+3}_{2} = \underbrace{6+3+3}_{3} = \underbrace{9+3}_{4} = \underbrace{7+5}_{5}$$

$$= \underbrace{3+4+5}_{6} = \underbrace{8+4}_{7} = \underbrace{4+4+4}_{8}$$

مثال: در گرافی از مرتبه 10، حداقل چند یال باید رسم شود تا مطمئن شویم همبند است؟

1) 10 2) 36 3) 37 4) 38

پاسخ: گزینه ۳

باید بیشتر از $\binom{p-1}{2}$ باشد ← بیشتر از k_9 ← $36 + 1 = 37$

مثال: چند نوع گراف ناهمبند با مرتبه ۹ و مینیمم درجه ۵ وجود دارد؟

1) صفر 2) 2 3) 3 4) 4

پاسخ: گزینه 1

می‌دانیم اگر $\delta \geq \frac{p-1}{2}$ ← قطعاً همبند $5 \geq \frac{9-1}{2} = 4$ ←

مثال: گراف G ساده و ناهمبند است. اگر $\Delta = 8$ و $\delta = 3$ باشد، G حداقل چند راس دارد؟

1) 10   2) 11   3) 12   4) 13

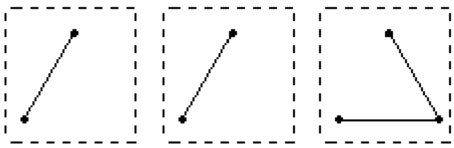
پاسخ: گزینه ۴

$$\delta + \Delta < p - 1 \rightarrow 3 + 8 < p - 1 \rightarrow 12 < p \rightarrow 13 \le p$$ ناهمبند

مثال: گراف G از مرتبه ۷ دارای 3 مولفه همبندی است. حداقل اندازه ی گراف G چند است؟

1) 4   2) 5   3) 6   4) 8

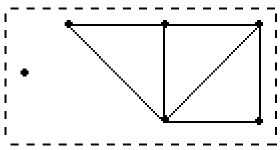
پاسخ: گزینه 1

4 تا یال $\rightarrow$  باید اعداد را به هم نزدیک شود.

مثال: گراف ناهمبند G دارای 3 دور به طول 3 است. حداقل اندازه گراف G چند است؟

1) 7   2) 8   3) 9   4) 10

پاسخ: گزینه 1

 $\leftarrow$ 7 تا یال

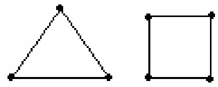
مثال: گراف منتظم و ناهمبند G دارای ۷ راس است. حداکثر مقدار $\Delta + \delta$ کدام است؟

1) 2   2) 4   3) 7   4) 8

پاسخ: گزینه 2   چون گراف منتظم است ← $\Delta = \delta = deg7$ ← $\Delta + \delta = 2deg7$

0-منتظم ← صفر

1-منتظم ← وجود ندارد

2-منتظم ←  ← $\Delta + \delta = 4$

3-منتظم ← نمی توان رسم کرد

4-منتظم ← حداقل به 10 راس نیاز دارد.

⋮

دیگر نمی توان رسم کرد.

❖ گراف اویلری

- ✓ اگر در یک گراف بتوان با آغاز از یک راس دلخواه، از روی تمام یال ها دقیقا یک بار گذشت و به راس اولیه بازگشت، آن را گراف اویلری می نامند.
- ✓ در هنگام عبور از تمام یال ها ممکن است از یک راس چند بار عبور کنیم که اشکالی ندارد.
- ✓ شرط لازم و کافی برای اویلری بودن یک گراف همبند این است که درجه تمام رئوس آن زوج باشد.

مثال: G گرافی ساده و r-منتظم از مرتبه ۱۳ است. در چه صورت G حتماً اویلری است؟

1) r=2   2) r=4   3) r=5   4) r=6

پاسخ: اولاً گراف باید همبند باشد و دوماً درجه های رئوس باید زوج باشد.

پس گزینه 4 درست است → $13 = 6 + 7 \rightarrow \underbrace{0,1,2,3,4,5}_{\text{ناهمبند}}, \underbrace{6,7,8,9,10,11,12}_{\text{حتماً همبند}}$

❖ گراف نیمه اویلری

- ✓ اگر در یک گراف بتوان با آغاز حرکت از یک راس از روی تمام یال ها دقیقا یک بار گذشت و به راس دیگری به جز راس اولیه رسید، آن را گراف نیمه اویلری می‌نامند.
- ✓ شرط لازم و کافی برای نیمه اویلری بودن یک گراف همبند این است که دقیقاً دو راس فرد داشته باشد.
- ✓ برای اینکه از تمام یال ها عبور کنیم و از یک راس به راس دیگر برسیم، راس ابتدا و انتها باید راس های فرد باشند. در این صورت با آغاز از یکی به دیگری می رسیم.
- ✓ یک گراف همزمان نمی تواند هم اویلری و هم نیمه اویلری باشد.
- ✓ هیچ گراف ناهمبندی نمی‌تواند اویلری یا نیمه اویلری باشد.

مدل سازی با گراف

❖ مجموعه احاطه گر

✓ زیرمجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه گر می‌نامیم هرگاه هر راس از این گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

تکنیک: اگر یک مجموعه دادند و خواستند مشخص کنند که احاطه گر هست یا نه به این ترتیب عمل می کنیم:

1- تمام راس های مجموعه را روی گراف علامت گذاری می کنیم و دور آن دایره می کشیم.

2- راس های مجاور با راس های علامت گذاری شده را خط می‌زنیم.

3- اگر تمام رئوس گراف یا علامت گذاری شده بودند یا خط زده، مجموعه فوق مجموعه احاطه گر محسوب می‌شود و اگر حتی یک راس خط زده نشده بود آن مجموعه احاطه گر نمی‌باشد.

❖ عدد احاطه گری

✓ در بین تمام مجموعه‌های احاطه گر گراف G، مجموعه‌های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه گر مینیمم می‌نامیم.

✓ تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه گری گراف G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

✓ گاهی اوقات برای راحتی، یک مجموعه احاطه گر مینیمم از گراف G را یک $\gamma-$ مجموعه می‌گویند.

- ✓ اگر G یک گراف p راسی با ماکزیمم درجه Δ باشد داریم: $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil$

❋ نکته فوق مقدار قطعی برای $\gamma(G)$ را مشخص نمی‌کند اما مشخص می‌کند که $\gamma(G)$ از یک عدد مشخصی کمتر نیست.

- ✓ اگر گراف G ناهمبند باشد و از اجتماع گراف های همبند $G_1, G_2, \ldots, G_k$ تشکیل شده باشد، آنگاه: $\gamma(G) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2) + \cdots \gamma(G_k)$
- ✓ اگر گراف ناهمبند G از اجتماع $G_1, G_2, \ldots, G_k$ تشکیل شده باشد تعداد $\gamma-$ مجموعه برابر است با: $n(\gamma) = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$
- ✓ کمترین مقدار برای عدد احاطه گری یک گراف ناهمبند برابر 2 است. چون دو بخش است و هر بخش حداقل عدد احاطه گری 1 است.

❖ مجموعه احاطه گر مینیمال

- ✓ یک مجموعه احاطه گر که با حذف هر یک از راس هایش (هر راس دلخواه) دیگر احاطه گر نباشد را مجموعه احاطه گر مینیمال می نامیم.
- ✓ یک مجموعه احاطه گر مینیمال الزاماً یک مجموعه احاطه گر مینیمم نیست اما هر مجموعه احاطه گر مینیمم قطعاً یک مجموعه احاطه گر مینیمال نیز محسوب می‌شود.
- ✓ $\gamma(G) \leq$ تعداد اعضای مجموعه احاطه گر مینیمال $\leq \sigma(G)$

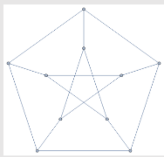
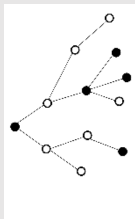
نکته:

گراف		توضیحات		$\gamma(G)$	تعداد $\gamma-$ مجموعه	$\sigma(G)$
راس فول		اگر چند راس فول داشته باشیم هر کدام از آنها یک $\gamma-$ مجموعه است $\Delta = p-1$		1 همان راس به تنهایی	به تعداد راس های فول	
راس نیمه فول		$\Delta = p-2$		2 یکی از اعضا، همین راس است		
0-منتظم		$\bar{k}_n$	در این 4 گراف $\gamma(G) = \delta(G)$	n	مجموعه احاطه گر یکتا شامل تمام رئوس	n
1-منتظم		$\delta = \Delta = 1$		در $\frac{n}{2}$ $\gamma-$ مجموعه از هر 2 راس مجاور یکی وجود دارد	$2^{\frac{n}{2}}$ $\rightarrow 2^{\text{تعداد بخش ها}}$	$\frac{n}{2}$
کامل k_p		$\delta = \Delta$ $= p-1$		1	p ← هر راس دلخواه	1
$(p-2)$- منتظم		$\Delta = \delta$ $= p-2$		2		2
2-منتظم	C_n	کمترین مقدار برای عدد احاطه گری یک گراف 2-منتظم زمانی است که به صورت C_n باشد		یک راس انتخاب و دو تا درمیان پیش برو $\bar{C}_n \rightarrow 2$	$if\ n = 3k$ تعداد $\gamma-$ مجموعه=3 از یک راس شروع شده و دو راس در میان پیش می رود در غیر این صورت باید بشمری	یک راس انتخاب یک در میان پیش برو
	C_4	بیشترین مقدار برای عدد احاطه گری یک گراف 2-منتظم زمانی بدست می آید که گراف به 4 ضلعی بیشتری افراز شود		هرچهارضلعی 2← باید شمرده شود اگر مرتبه $4k$ (مضرب4) باشد عدد احاطه گر 2k است	هر چهارضلعی ← $\binom{4}{2}$ ← 6 حالت	هرچهارضلعی← 2 باید شمرده شود

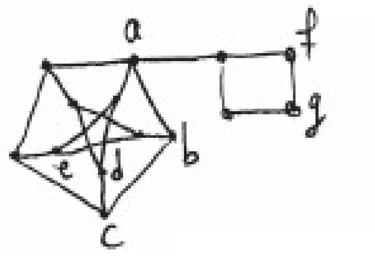
* در k_p هر مجموعه احاطه گر مینیمال یک مجموعه احاطه گر مینیمم نیز هست

* گراف های C_3 و C_4 و C_5 هر مجموعه احاطه گر مینیمال، یک مجموعه احاطه گر مینیمم نیز است

* در گراف C_4 برای مجموعه احاطه گر مینیمم باید 2 راس از 4 راس انتخاب شود

p_n		راس دوم انتخاب و دو تا درمیان پیش برو $\bar{p}_n \to 2$	$if\ n = 3k \to n(\gamma) = 1$ مجموعه احاطه گر مینیمم یکتا از راس دوم شروع شده و دو راس در میان پیش می رود در غیر این صورت باید شمرده شود	راس ابتدا انتخاب و یک در میان پیش می رویم
T_n	اگر گرافی از چند T_n $(n \neq 2)$ تشکیل شده باشد، مجموعه احاطه گر مینیمم یکتا دارد و عدد احاطه گری برابر تعداد بخش هاست	$\gamma(T_n) = 1$ راس مرکزی	به استثناء T_2 مجموعه احاطه گر مینیمم یکتا دارند T_2 دو مجموعه احاطه گر مینیمم دارد	$n - 1$ تمام رئوس درجه 1
$k_{m,n}$	تمام راس های بالا به تمام راس های پایین و تمام راس های پایین به تمام راس های بالا متصل اند	2 یک راس از بالا و یک راس از پایین	$m \times n$ اگر هر کدام از m یا n برابر 2 باشد یک واحد به تعداد $\gamma -$ مجموعه اضافه می شود	$\max\{m,n\}$ عدد بزرگتر بین m و n
پترسن 	دو نوع $\gamma -$ مجموعه دارد. 1- دو راس بیرون و یک راس درونی میانی ← 5 تا 2- یک راس برون و دو راس درونی متقابل ← 5 تا	3	10	5 تمام رئوس بیرون یا درون
درخت 	گراف همبند و فاقد دور بین هر دو راس دلخواه فقط یک مسیر وجود دارد	از رئوس درجه 1 پایین یک لایه میاییم بالا و اونا رو انتخاب می کنیم و اگر کم و کسری داشت راس دیگری نیز انتخاب می کنیم		تعداد رئوس درجه 1 $\sigma(\mathrm{G}) \geq$ همه راس های درجه 1 را انتخاب می کنیم بعد ببینیم اگه کم و کسری داشت راس بالا را نیز انتخاب می کنیم

مثال : کدام مجموعه برای گراف رو به رو یک مجموعه احاطه گر مینیمال است؟

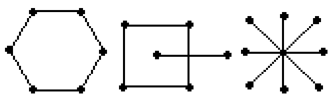


1) $\{a,c,e,g\}$ 2) $\{a,d,e,g\}$

3) $\{a,b,d,e\}$ 4) $\{a,d,e,f\}$

پاسخ: گزینه 2

مثال : گراف زیر چند $\gamma-$ مجموعه متمایز دارد؟

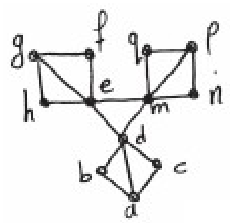


1) 6   2) 12   3) 24   4) 36

پاسخ:

$$3 \times \binom{4}{2} \times 2 \times 1 = 36$$

مثال : در گراف زیر تعداد مجموعه های احاطه گر مینیمال کدام است؟



1) 8   2) 6   3) 4   4) 3

پاسخ: گزینه 1

a یا d   e یا g   p یا m

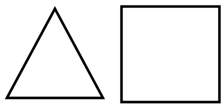
$$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 8$$

مثال : گراف منتظم G از مرتبه 7 دارای 18 مجموعه احاطه گر مینیمم متمایز است. این گراف چند دور دارد؟

1) 4   2) 3   3) 2   4) 1

پاسخ :

$$18 = 3 \times 6 = 3 \times \binom{4}{2} \Rightarrow$$



گراف دو منتظم به فرم بالا ، شامل 2 دور است .

گزینه 3

....

فصل 3

Combinations

ترکیبات

❖ گروه بندی

قرار است اشیاء متمایزی را در جایگاه هایی قرار دهیم (گروه بندی کنیم) به طوری که تعداد اشیاء قرار گرفته در هر جایگاه (گروه) مشخص باشد.

1- گروه ها متمایزاند:

- ✓ جایگاه ها برچسب گذاری شده اند و با هم فرق می کنند پس جایگاه ها دارای ارزش یکسانی نیستند.
- ✓ برای مثال: «اتاق های یک هتل یا هر ساختمان دیگر، اسم کشورهای مختلف، اسم تیم های ورزشی و هر تیم اسم دار»
- ✓ ابتدا تعداد اشیاء یکی از جایگاه ها را از میان کل اشیاء موجود انتخاب می کنیم. سپس تعداد اشیاء جایگاه بعدی را از میان اشیاء باقی مانده انتخاب می کنیم و ... تا جایی که برای تمام جایگاه ها شیء انتخاب کنیم.
- ✓ ترتیب انتخاب جایگاه ها هیچ اهمیتی ندارد و می توان هر گروه دلخواه را ابتدا انتخاب کرد.

مثال: به چند طریق می توان از 10 نفر، 3 نفر را به دانشگاه شریف، 3 نفر به دانشگاه تهران و 2 نفر به دانشگاه امیرکبیر و 2 نفر به دانشگاه علم و صنعت فرستاد؟

پاسخ: $\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 25200$

2- گروه ها مشابه اند:

- ✓ جایگاه ها برچسب گذاری نشده اند و با هم فرق نمی کنند پس جایگاه ها دارای ارزش یکسانی هستند و صرفاً مسئله تقسیم بندی اشیاء یا افراد مطرح است بدون اینکه این اشیاء یا افراد را بخواهیم در جایگاه های مشخصی قرار دهیم.
- ✓ مثل تیپ قبلی برای جایگاه ها ، شیء انتخاب می کنیم اما در نهایت پس از انتخاب اگر تعداد اعضای دو یا چند گروه شبیه هم باشد، جواب را بر جایگشت تعداد گروه ها با اعضای یکسان تقسیم می کنیم.

مثال: به چند طریق می توان 7 نفر را به 3 تیم دو نفره و 1 تیم 1 نفره تقسیم بندی کرد؟

پاسخ:
$$\frac{\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{3!} = 105$$

- ✓ برای پیدا کردن تعداد افرازهای یک مجموعه مثل گروه بندی بدون نام گذاری عمل می کنیم. ابتدا با توجه به سوال تعداد اعضای مجموعه را به صورت جمع چند بخشی که تعداد افرازها را مشخص می کند می نویسیم و به همان صورت گروه بندی می کنیم.

مثال: تعداد افرازهای سه بخشی یک مجموعه 6 عضوی کدام است؟

پاسخ:

$$6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2$$
$$\rightarrow \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{4}}{2!} + \binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{3} + \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 90$$

مثال: تعداد افرازهای مجموعه ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ که هر کدام شامل فقط یک مجموعه ی دو عضوی باشد، کدام است؟

1) 10 2) 15 3) 20 4) 24

پاسخ: گزینه 3

$$5=2+3=2+1+1+1\rightarrow \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{3!}+\binom{5}{2}\binom{3}{3}=10+10$$
$$=20$$

نگاه کلی به مسائل مربوط به توزیع اشیاء بین افراد یا توزیع مهره ها در ظرف های متمایز	
اشیاء متمایز	**اشیاء مشابه**
1- اگر هیچ شرطی داده نشود باید تعداد توابع را حساب کنیم.	1- اگر هیچ شرطی داده نشود باید تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ را حساب کنیم.
2- اگر قرار باشد به هر نفر حداقل یکی برسد باید تعداد توابع پوشا را حساب کنیم.	2- اگر قرار باشد به هر نفر حداقل یکی برسد باید تعداد جواب های طبیعی معادله ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ را حساب کنیم.
3- اگر قرار باشد به هر نفر حداکثر یکی برسد تعداد توابع یک به یک را باید حساب کنیم.	3- اگر قرار باشد حداقل یک طرف خالی بماند باید تعداد جواب های طبیعی معادله را از تعداد جواب های صحیح و نامنفی آن کم کنیم.

- ✓ میوه ها (پرتقال، سیب، گلابی و ...) و حیوانات (کبوتر، گاو، سگ و ...) و مواردی نظیر آنها را مشابه در نظر می گیریم اما انسان ها را همواره متمایز در نظر می گیریم.

❖ توزیع اشیاء مشابه در ظرف های متمایز

- ✓ تعداد راه های توزیع n شیء مشابه در k ظرف متمایز
- ✓ تعداد راه های ساختن یک دسته گل شامل n شاخه از k نوع گل متفاوت
- ✓ $$\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}_{\text{تعداد ظرف ها نوع گل ها}} = \underbrace{n}_{\text{تعداد اشیا تعداد شاخه ها}}$$

$$\begin{cases} \text{* تعداد جواب های صحیح و نامنفی} \leftarrow \binom{n+k-1}{k-1} \\ \text{** تعداد جواب های طبیعی (صحیح و مثبت)} \leftarrow \binom{n-1}{k-1} \end{cases}$$

- ✓ در مسائل مخصوصاً مسائل کاربردی اگر شرطی داده نشود ← تعداد جواب های صحیح و نامنفی
- ✓ اگر قرار باشد به هر نفر حداقل یکی برسد ← تعداد جواب های طبیعی

اگر مقدار یک یا چند متغیر دقیقاً مشخص باشد به جای آن متغیرها، مقادیر آنها را قرار می دهیم و آن متغیر را از معادله حذف می کنیم تا آن متغیر از معادله حذف شود. سپس تعداد جواب های معادله ی کوچک شده را پیدا می کنیم.

تکنیک:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = w & (1) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_l = w + k & (2) \end{cases}$$

- ✓ تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله (1) برابر با تعداد جواب های طبیعی معادله (2) است. پس به جای اینکه بخواهیم تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی (1) را حل کنیم، تعداد جواب های طبیعی معادله (2) را بدست می آوریم. در نتیجه اگر جواب های صحیح و نامنفی در معادله ای را خواستند به تعداد متغیرها به سمت راست عدد اضافه می کنیم و جواب های طبیعی آن را بدست می آوریم.

✍**نکته:** در معادله ممکن است برای متغیر یا متغیرها شرط داده شود:

❋ اگر شرطی به صورت $x_i \leq u$ داده شود به جای x_i مقدارهای کوچکتر مساوی u قرار می دهیم و معادله را در چند حالت حل می کنیم و در نهایت تعداد جواب ها را با هم جمع می کنیم.

- البته می توان تعداد جواب های معادله را به شرط $u+1 \leq x_i$

مثال : تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ به شرطی که $x_2<4$ را حساب کنید .

پاسخ :

$$x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=7 \Rightarrow +3 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=10 \Rightarrow \binom{9}{2}=36$$

$$x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=6 \Rightarrow +3 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=9 \Rightarrow \binom{8}{2}=28$$

$$x_2=2 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=5 \Rightarrow +3 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=8 \Rightarrow \binom{7}{2}=21$$

$$x_2=3 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=4 \Rightarrow +3 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=7 \Rightarrow \binom{6}{2}=15$$

$$36+28+21+15=100$$

✍**نکته:**

**اگر شرطی به صورت $u \leq x_i$ داده شود :

تغییراتی را اعمال می کنیم و $u \leq x_i$ را به $1 \leq x_i$ تبدیل می کنیم . به u عددی اضافه می کنیم تا به 1 برسد .این کار را برای همه متغیر های شرط دار اعمال می کنیم.

(شرط صحیح و نامنفی $0 \leq x_i$ است که باید به علاوه 1 شود تا $1 \leq x_i$ شود .)

سپس همه این اعداد را با هم جمع می کرده و به سمت راست معادله اضافه می کنیم و جواب های طبیعی معادله را بدست می آوریم.

⚠ اگر در مسائل کاربردی (توزیع توپ در سبد ، میوه بین افراد و ...) شرطی بیان نشود ، شرط متغیرها صحیح و نامنفی است .

مثال : تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=6$ با شرایط که $x_3>4$ و $x_1 \geq -2$ را حساب کنید .

پاسخ : 20

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq -2 \Rightarrow +3 \Rightarrow x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \Rightarrow +1 \Rightarrow x_2 \geq 1 \\ x_3 > 4 \Rightarrow x_3 \geq 5 \Rightarrow -4 \Rightarrow x_3 \geq 1 \\ x_4 \geq 0 \Rightarrow +1 \Rightarrow x_4 \geq 1 \end{array}\right]$$

$$3+1-4+1=1$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=6+1=7 \Rightarrow \binom{6}{3}=20$$

مثال : معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ چند جواب طبیعی در بازه $[1,6]$ دارد ؟

پاسخ :وقتی جمع 5 متغیر که همگی بزرگتر مساوی 1 هستند برابر 10 است ، به طور ناخودآگاه هیچ کدام نمی تواند از 6 بیشتر باشند . بنابراین کافیست تعداد جواب های طبیعی معادله فوق را بدست آوریم .

$$\binom{9}{4}=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=126$$

✍**نکته:** اگر قرار باشد در معادله $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k=n$:

***دقیقا** r متغیر صفر شود ، از بین k ظرف ، r ظرف انتخاب می کنیم و برابر صفر قرار می دهیم و سپس تعداد جواب های طبیعی معادله بدست آمده را حساب می کنیم و در هم ضرب می کنیم .

****حداقل** r متغیر صفر شود ، از بین k ظرف ، r ظرف انتخاب می کنیم و برابر صفر قرار می دهیم و سپس تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله بدست آمده را حساب می کنیم و در هم ضرب می کنیم.

مثال : معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد که دقیقا دوتا از متغیر ها صفر باشند ؟

پاسخ : اگر 2 تا متغیر صفر شوند 3 تا ظرف باقی می ماند .

معادله جدید : $w+z+t=8$

انتخاب 2 تا متغیر برای صفر شدن از بین 5 متغیر : $\binom{5}{2}$

تعداد جواب های طبیعی معادله جدید $\binom{7}{2} = \binom{8-1}{3-1}$

پاسخ نهایی :

$$\binom{5}{2}\binom{7}{2} = 10 \times 21 = 210$$

❖ متغیر های خاص

- ✓ اگر در معادله ، متغیری به جای ضریب 1 ، چهره خاصی داشت باید به جای آن متغیر یا متغیرها عدد قرار دهیم و معادله را در چند حالت حل کنیم و سپس تعداد جواب ها را با هم جمع کنیم.
- ✓ عددی که قرار می دهیم :

  الف) خروجی باید صحیح باشد .

  ب) طرف دوم منفی نشود . (اگر صفر شود مشکلی ندارد .)
- ✓ چهره های غیر عادی : دارای توان ، ضریب غیر 1 ، زیر رادیکال ، زیر مخرج ، لگاریتمی و ...
- ✓ چهره های عادی : قدرمطلق ، براکت ، سقف ، ضریب 1 .

❋❋اگر قدرمطلق ، براکت ، سقف دیدیم نشانه آنها را حذف می کنیم انگار اصلا وجود نداشته اند.

مثال : معادله $x_1 + \lceil x_2 \rceil + |x_3 + 1| = 7$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد ؟

پاسخ :

$$x_1+x_2 + x_3 + 1 = 7 \implies x_1+x_2 + x_3 = 6 *$$

$$x_1+x_2 + x_3 = 6 + 3 = 9 **$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ❋ برابر تعداد جواب های طبیعی معادله ❋❋ است که برابر

$$\binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

✍**نکته:** در معادله ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ تعداد جواب هایی که $x_u > x_p$ برابر تعداد جواب هایی که $x_u < x_p$ است. برای رسیدن به تعداد جواب ها به شرط $x_u > x_p$ ابتدا تعداد جواب های صحیح و نامنفی (جواب های کل) معادله را بدست می آوریم و از تعداد جواب های معادله به شرط $x_u = x_p$ کم می کنیم و در نهایت بر 2 تقسیم می کنیم.

مثال: به چند طریق می توان 10 گلابی بین حسن، داوود و علی توزیع کرد به طوری که تعداد گلابی های حسن بیشتر از تعداد گلابی های داوود باشد؟

پاسخ: در واقع منظور سوال حل معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ به شرط $x_1 > x_2$ است.

کل جواب ها: $\binom{12}{2} = 66$

جواب ها به شرط $x_1 = x_2$ $\rightarrow 2x_1 + x_3 = 10 \rightarrow x_1 = 0,1,2,3,4,5 \rightarrow$ 6 تا

جواب نهایی $= \dfrac{66-6}{2} = 30$

❖ بسط چندجمله ای

- ✓ $(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n$
- ✓ هر جمله از بسط فوق به صورت ضریبی از $a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}\ldots a_k^{x_k}$ است که $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ و $n\geq 0$ است.
- ✓ برای پیدا کردن تعداد جملات بسط فوق باید تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ را پیدا کنیم.
- ✓ اگر قرار باشد متغیری ظاهر شود $\leftarrow x_i\geq 1$
- ✓ اگر شرط های دیگری هم داشتیم در نظر می گیریم.
- ✓ برای بدست آوردن ضریب یک جمله مشخص در بسط توان ها را برای متغیرها مثل گروه بندی با برچسب گذاری انتخاب می کنیم.
- ✓ اگر در هنگام محاسبه ی ضریب یک جمله در بسط، بعضی از متغیرها ضریب عددی داشته باشند باید ضریب هر متغیر را به توان آن متغیر در جمله مورد نظر برسانیم و سپس این عدد را در انتخاب های گروه بندی با برچسب گذاری ضرب می کنیم.

مثال: در بسط $(2a-3b)^7$ ضریب جمله ی a^4b^3 کدام است؟

پاسخ: $(2)^4(-3)^3\binom{7}{4}\binom{3}{3}=16\times(-27)\times 35=-15120$

ممکنه در مبحث ضریب کل اون جمله رو نده و تو باید مشخص کنی که کدوم پارامتر کمه و در اون ضرب کنی.

مثال: در بسط $(3x-2y+2)^6$ ضریب x^3y چند است؟

پاسخ: در نگاه اول متوجه می شویم که مجموع توان های جمله مذکور برابر توان جمله بسط نیست $(3+1\neq 6)$ پس باید توان پارامتر 2 برابر 2 باشد. پس ضریب 2^2x^3y را حساب کنیم.

$$(2)^2(3)^3(-2)^1\binom{6}{3}\binom{3}{1}\binom{2}{2}=27\times(-8)\times 20\times 3=-12960$$

❖ نامعادله

✓ $x_1+x_2+\cdots+x_k\leq n$

✓ یک متغیر t به طرف اول اضافه می کنیم و نامعادله را به معادله تبدیل می کنیم و تعداد جواب های معادله که برابر با تعداد جواب نامعادله است را بدست می آوریم.

⚠ اگر شرطی برای متغیرهای نامعادله داده شود، این شرط به متغیر t سرایت نمی کند و متغیر t همواره صحیح و نامنفی است (خودمان به $t\geq 1$ می رسانیم)

⚠ باید علامت کوچکتر مساوی باشد $(\leq)$ و اگر علامت کوچکتر $(<)$ بود برای حل باید آن را به کوچکتر مساوی برسانیم.

یادآوری: $u<n \leftarrow u\leq n-1$

✓ برای حل نامعادلاتی به شکل $m\leq x_1+x_2+\cdots+x_k\leq n$ باید نامعادله را به دو نامعادله بشکنیم.

$$m\leq x_1+x_2+\cdots+x_k\leq n$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_k\leq n\\ x_1+x_2+\cdots+x_k\leq m-1\end{cases}$$

تعداد جواب های نامعادله بالا را منهای پایین می کنیم.

❖ دستگاه

- ✓ تعداد جواب های دستگاه معادلات با متغیرهای غیرمشترک (متمایز)
- ✓ ابتدا جواب های هر یک از معادلات را مطابق شرایط داده شده پیدا می کنیم و سپس تعداد جواب ها را در هم ضرب می کنیم.
- ✓ اگر در یک دستگاه معادلات تمام متغیرهای یک معادله در معادله دیگر تکرار شده باشد ابتدا معادله کوچکتر را در معادله بزرگتر جایگذاری می کنیم و دستگاه را خلاصه می کنیم و سپس جواب های دو معادله جدید را مطابق با شرایط داده شده پیدا می کنیم و سپس جواب ها را در هم ضرب می کنیم.

مثال: دستگاه $\begin{cases} x+y+z+w+t+r+s=30 \\ x+y+z=14 \end{cases}$ چند جواب طبیعی دارد؟

پاسخ:

معادلات جدید $\begin{cases} w+t+r+s=16 \\ x+y+z=14 \end{cases} \rightarrow \binom{15}{3}\binom{13}{2}$

❖ توزیع اشیاء متمایز در ظروف متمایز

❖ تابع

- ✓ دو مجموعه ی $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ و $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ در نظر می گیریم. هر تابع از مجموعه A به مجموعه B، مجموعه ای از زوج مرتب ها است که دامنه ی آن (مجموعه مولفه‌های اول) همان مجموعه A و برد آن (مجموعه مولفه‌های دوم) زیرمجموعه ای از B است.

تکنیک: $f: A \to B$

تعداد اعضا $m \to n^m$

$\to$ تعداد توابع n^m ❄ اعضای A میره تو توان B

✓ اگر تکلیف هر مولفه اول مشخص شود در روش $m \to n$ از سمت چپ یکی کم می کنیم و حاصل را بدست می آوریم و حاصل را در انتخاب های اول مولفه اول ضرب می کنیم.

✓ اگر قرار باشد مولفه اول عدد خاصی باشد تنها یک انتخاب دارد.

✓ اگر قرار باشد مولفه اول عدد یا عددهای خاصی نباشد به جای n (طرف راست) $n-u$ انتخاب دارد که u تعداد عددهایی است که مولفه اول نمی تواند برابر آنها باشد.

مثال: چند تابع از $A = \{a,b,c,d\}$ به $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ وجود دارد که در آن $f(a) = 2$ و $f(b) \neq 2,3$ باشد؟

پاسخ:

$4 \to 6 \Rightarrow$ تکلیف a و b مشخص $\rightsquigarrow 2 \to 6 \rightsquigarrow 6^2 \times \underset{\text{برای } a}{\overset{1}{\downarrow}} \times \underset{\text{برای } b}{\overset{4}{\downarrow}} = 144$

(انتخاب $6 - 2 = 4$)

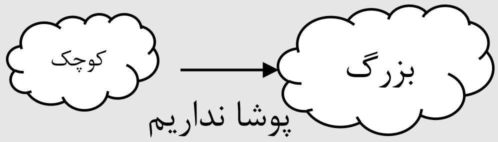
❖ تابع پوشا

✓ تابع $f: A \to B$ اگر $R_f = B$ باشد یعنی به هر عضو از B حداقل یک پیکان وارد شود، آنگاه تابع f پوشا می باشد.

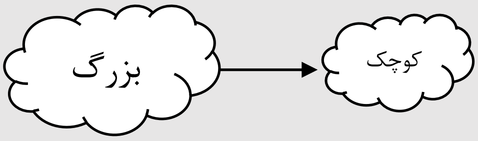
✍**نکات:**

1- تعداد توابع پوشا روی یک مجموعه n عضوی برابر $n!$ است.

2- از یک مجموعه با تعداد عضو کمتر به یک مجموعه با تعداد عضو بیشتر تابع پوشا وجود ندارد.



3- فرم کلی تابع پوشا:



4- برای پیدا کردن تعداد توابع پوشا $m \to n$ ابتدا تعداد کل افزارهای n بخشی مجموعه m عضو را پیدا کرده و سپس جواب را در $n!$ ضرب می کنیم.

5- حالت خاص:

❋ $n \to 3$
- تعداد پوشا ← $3^n - 3 \times 2^n + 3$
- تعداد غیرپوشا ← $3 \times 2^n - 3$

❋❋ $n \to 2$
- تعداد پوشا ← $2^n - 2$
- تعداد غیرپوشا ← 2

6-
- پوشا : به هر ظرف حداقل یکی برسد
- غیرپوشا : حداقل به یک ظرف هیچی نرسد

7- تعداد توابع غیرپوشا + تعداد توابع پوشا = کل توابع

8- تعداد توابع پوشا $m \to n$ معادل جمله زیر است:

«تعداد راه های توزیع m شیء متمایز در n ظرف متمایز به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند (به هر ظرف حداقل یکی برسد)»

مثال: به چند طریق می توان 5 جزوه ی فیزیک، شیمی، هندسه، گسسته، حسابان را بین 3 نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداقل یک جزوه برسد؟

پاسخ :

روش 1) $3^5 - 3 \times 2^5 + 3 = 150$

روش2) $5 = 1 + 1 + 3 = 2 + 2 + 1 \rightarrow \left(\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{3}}{2!} + \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{2!}\right) \times 3! = 150$

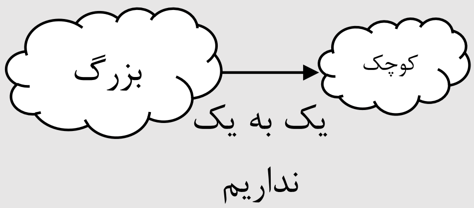
❖ تابع یک به یک

✓ تابع $f: A \rightarrow B$ اگر هر عضو از B حداکثر به یک عضو از A نظیر شده باشد یعنی به هر عضو از B حداکثر یک پیکان وارد شود آنگاه تابع f یک به یک است.

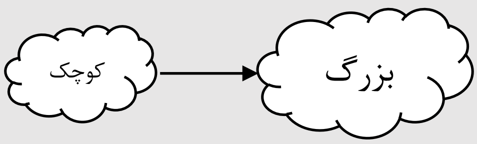
نکات:

1- تعداد توابع یک به یک روی یک مجموعه n عضوی برابر $n!$ است.

2- از یک مجموعه با تعداد عضو بیشتر به یک مجموعه با تعداد عضو کمتر تابع یک به یک وجود ندارد.



3- فرم کلی تابع یک به یک:



4- برای پیدا کردن تعداد توابع یک به یک $m \to n$، ابتدا m جایگاه در نظر می گیریم. اگر تکلیف مقداری برای تابع مشخص بود ابتدا اون جایگاه ها را تعیین می کنیم سپس از بین مقادیر باقی مانده جایگاه های خالی را به صورت نزولی پر می کنیم و در هم ضرب می کنیم. ***آنالیز ترکیبی**

✓ اگر مقدار تابع به ازای عضوی از دامنه برابر مقدار خاصی بود، تعداد انتخاب های آن 1 است و از تعداد اعضای انتخابی یکی کم می کنیم.

✓ اگر مقدار تابع به ازای عضوی از دامنه برابر مقدار خاصی نبود، تعداد انتخاب های آن به جای n (طرف راست) $n - u$ است که u تعداد مقادیری است که تابع با آن برابر نیست.

5- یک به یک : به هر ظرف حداکثر یکی برسد
غیر یک به یک : حداقل به یک ظرف بیش از یکی برسد

6- تعداد توابع غیریک به یک + تعداد توابع یک به یک = تعداد کل توابع

7- تعداد توابع یک به یک $m \to n$ معادل جمله زیر است:

«تعداد راه های توزیع m شیء متمایز در n ظرف متمایز به طوری که به هر ظرف حداکثر یکی برسد»

مثال: تعداد توابع یک به یک از $A = \{a,b,c,d\}$ به $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ به طوری که $f(a) = 2$ و $f(b) \neq 2,3$ کدام است؟

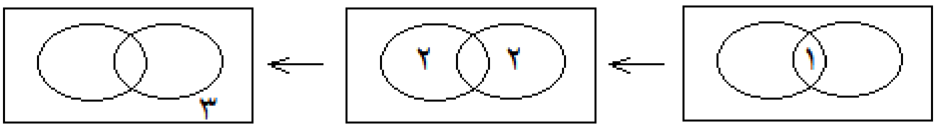
پاسخ: اولاً وقتی $f(a) = 2$ و تابع یک به یک است پس قطعاً $f(b) \neq 2$. روی سوال می شد فقط $f(b) \neq 3$ رو بده.

$$4 \to 6 \quad \underset{\underbrace{a\ b}}{\underset{\downarrow}{\underline{1}}\ \underset{\downarrow}{\underline{4}}}\ \underline{4}\ \underline{3} = 4 \times 4 \times 3 = 48$$

در کل 2 تا انتخاب شدند و 4 تا دیگه می مونه

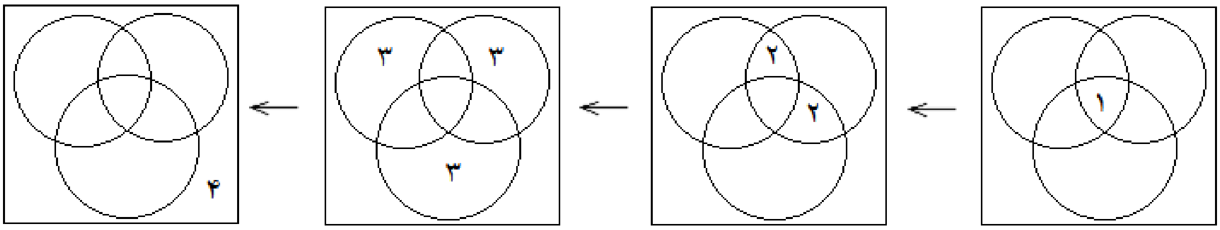
❖ اصل شمول و عدم شمول

- ✓ یک مجموعه داده می شود که بعضی از اعضای آن دارای ویژگی A_1 و بعضی دیگر دارای ویژگی A_2 و ... هستند و سوالات مختلفی را در مورد مجموعه مطرح می کنند.
- ✓ بهترین روش رسم نمودار ون است.
- ✓ پر کردن نمودار ون بهتر است از ناحیه پر اشتراک تر به ناحیه کم اشتراک تر باشد (بسته به روی سوال)
- ✓ برای دو مجموعه داریم:



- $A \cap B$ هر دو ویژگی A و B را داشته باشد.
- $A \cup B = A + B - (A \cap B)$ حداقل یکی از دو ویژگی را داشته باشد.
- $A - B = A - (A \cap B)$ فقط ویژگی A را داشته باشد.
- $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ فقط یکی از دو ویژگی را داشته باشد.
- $(A \cup B)'$ هیچکدام از ویژگی ها را ندارد $\leftarrow$ $(\overline{A \cup B})$
- $(A \cap B)'$ حداکثر یکی از دو ویژگی را دارند $\leftarrow$ $(\overline{A \cap B})$

✓ برای سه مجموعه داریم:



- $(A \cup B \cup C) =$

$$A + B + C - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C) + (A \cap B \cap C)$$

❋ $(A \cup B \cup C)' = (\overline{A \cup B \cup C})$

✓ ناحیه ها را با تحلیل نوع پرسش مشخص می کنیم.

✓ اگر "و" دیدی ← باید هر دو ویژگی $\cap$

✓ اکر "یا" دیدی ← حداقل یکی از آنها $\cup$

مثال جامع: در یک کنفرانس با 80 نفر جمعیت، 30 نفر علاقه مند به شیمی، 50 نفر علاقه مند به فیزیک و 38 نفر علاقه مند به ریاضیات می باشند. اگر 22 نفر علاقه مند به فیزیک و شیمی، 18 نفر علاقه مند به ریاضیات و فیزیک و 16 نفر علاقه مند به ریاضیات و شیمی باشند و 8 نفر هم به هیچ کدام از این سه رشته علاقه مند نباشند، آنگاه:

1- چند نفر دقیقاً به دو رشته علاقه منداند؟

2- چند نفر حداقل به دو رشته علاقه منداند؟

3- چند نفر حداکثر به یک رشته علاقه منداند؟

4- چند نفر حداکثر به دو رشته علاقه منداند؟

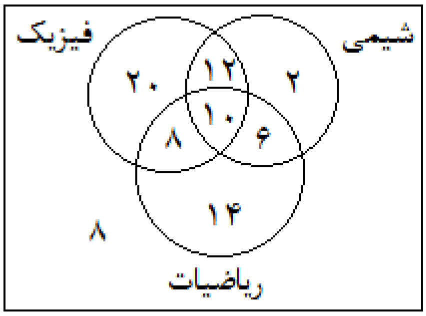
5- چند نفر حداقل به یک رشته علاقه منداند؟

6- چند نفر علاقه مند به فیزیک اند اما علاقه مند به شیمی و ریاضیات نمی باشند؟

7- چند نفر علاقه مند به شیمی یا ریاضیات اند اما از فیزیک خوششان نمی آید؟

8- چند نفر علاقه مند به فیزیک و ریاضی اند و از شیمی بیزارند؟

پاسخ: رسم نمودار ون



1- 26   2- 36   3- 44   4- 70   5- 72   6- 20   7- 22   8- 8

❖ تعداد مضارب عددی در مجموعه

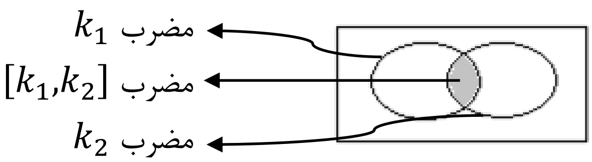
✓ یک مجموعه مانند $S = \{1,2, \dots ,m\}$ می دهند و سوالاتی مانند: چند عضو از مجموعه مضرب فلان عدد است یا نیست، پرسیده می شود.

✓ بهترین راه رسم نمودار ون است و به ترتیب اولویت نکات قبلی نمودار را پر می کنیم.

✓ اگر $S = \{1,2,3, \dots ,m\}$ «مجموعه اعداد طبیعی از 1 تا m» «حتماً از 1 شروع شود»

❄ تعداد اعضایی از S که مضرب k هستند $\leftarrow \left[\frac{m}{k}\right]$

❄❄ تعداد اعضایی از S که مضرب k_1 و k_2 هستند برابر با تعداد اعضایی از S است که مضرب ک.م.م k_1 و k_2 است $\leftarrow \left[\frac{m}{[k_1,k_2]}\right]$

✓ 

✓ اگر $S=\{n,\dots,m\}$ و تعداد اعضای مضرب k :

$$\left.\begin{array}{r} S_1=\{1,2,\dots,n\} \\ S_2=\{1,2,\dots,n-1\} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \leftarrow \text{تعداد اعضا مضرب } k \leftarrow \left[\frac{m}{k}\right] \\ \leftarrow \text{تعداد اعضا مضرب } k \leftarrow \left[\frac{n-1}{k}\right] \end{array}$$

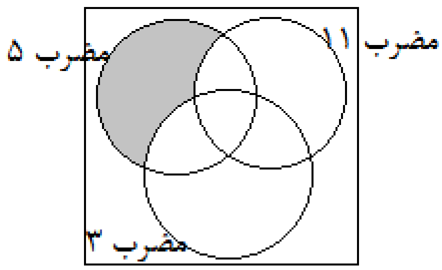
از هم کم می کنیم

	S_1	S_2	S
مضرب k_1			
مضرب k_2			

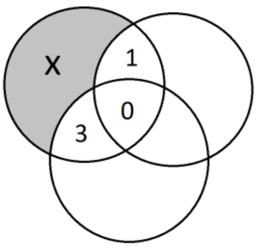
✓ وقتی عددی نسبت به u اول است نباید بر عامل های اول عدد u بخش پذیر باشد.

مثال: چند عضو از مجموعه $\{21,22,\dots,70\}$ مضرب 5 هستند اما مضرب 3 و 11 نمی باشند؟

پاسخ: $A_2=\{1,2,\dots,20\}$ و $A_1=\{1,2,\dots,70\}$



←



	A_1	A_2	A
مضرب 5	$\left[\frac{70}{5}\right]=14$	$\left[\frac{20}{5}\right]=4$	14-4=10
مضرب 5 و 11	$\left[\frac{70}{55}\right]=1$	$\left[\frac{20}{55}\right]=0$	1-0=1
مضرب 5 و 3	$\left[\frac{70}{15}\right]=4$	$\left[\frac{20}{15}\right]=1$	4-1=3
مضرب 5 و 3 و 11	$\left[\frac{70}{165}\right]=0$	$\left[\frac{20}{165}\right]=0$	0-0=0

جواب $x+1+3=10 \rightarrow x=6$

❖ تعداد اعداد شامل چند رقم

- ✓ پیدا کردن تعداد اعدادی که شامل ارقام به خصوصی باشند.
- ✓ نمودار ون تحت این عنوان که فاقد این ارقام باشد را رسم می کنیم.
- ✓ در نهایت متمم آن را حساب می کنیم که همان جواب است.

روش حل:

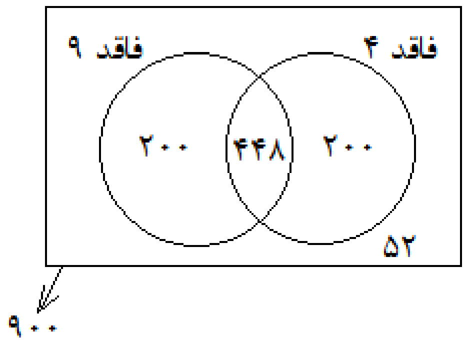
1- ابتدا کل اعداد را بدست می آوریم.

2- تمام اعداد فاقد ارقام مدنظر را نیز بدست می آوریم و نمودار ون را تکمیل می کنیم.

3- متمم آن را بدست می آوریم که همان جواب است.

مثال: تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک رقم 4 و حداقل یک رقم 9 را شامل شود، کدام است؟

پاسخ:



1- ابتدا کل اعداد سه رقمی را بدست می آوریم. $9 \times 10 \times 10 = 900$

2- اعداد سه رقمی فاقد 4 و 9 را بدست می آوریم. $7 \times 8 \times 8 = 448$

3- حال اعداد سه رقمی فاقد 4 را بدست می آوریم. $8 \times 9 \times 9 = 648$

❄ به همین طریق اعداد سه رقمی فاقد 9 را بدست می آوریم.

4- در انتها اعدادی که فاقد 4 یا فاقد 9 هستند را از کل اعداد سه رقمی کنار می گذاریم.

$$900-(648+648-448)=52$$

❖ اصل لانه کبوتری

اگر $n+1$ کبوتر یا بیشتر درون n لانه قرار بگیرند، به یقین لانه‌ای هست که حداقل دو کبوتر دارد.

✍**نکات:**

1- وقتی گفته می‌شود لانه ای هست یعنی حداقل یک لانه هست ولی معلوم نیست کدام لانه، یعنی لانه به‌خصوصی را نمی توان نام برد.

2- وقتی گفته می‌شود لانه ای هست که حداقل دو کبوتر دارد، یعنی حداقل در یکی از لانه‌ها به طور قطع 2 کبوتر یا تعداد بیشتر کبوتر وجود دارد.

3- یکی از نشانه‌های شناسایی مسائل مربوط به اصل لانه کبوتری مشاهده قیدهای تاکیدی است. مانند: «به طور قطع، به طور حتم، حتماً، قطعاً، با اطمینان، مطمئن باشیم و ...»

4- در اصل لانه کبوتری دو بار از لفظ حداقل استفاده شده که یک بار درباره ی تعداد دانه های مورد نظر و یک بار هم درباره ی تعداد کبوترها است. از الفاظ دقیقاً یا حداکثر صحبتی به میان نیامده است. (گاهی اوقات به جای واژه ی حداقل از واژه ی دست کم یا لااقل نیز استفاده می‌شود.

5- اصل لانه کبوتری صرفاً یک ادعای درست درباره ی یکی از لانه‌ها مطرح می‌کند و در آن هیچ صحبتی از تعداد راه‌های قرارگیری در لانه ها به میان نیامده است و مسائلی که در آنها از واژه ی «به چند طریق» استفاده می‌شود، مربوط به اصل لانه کبوتری نیستند.

6- اگر m کبوتر در n لانه قرار بگیرند به یقین لانه ای هست که حداقل $\left[\frac{m}{n}\right]$ کبوتر دارد. $\leftarrow$

$\left[\frac{\text{تعداد کبوترها}}{\text{تعداد لانه ها}}\right]$

7- در اصل لانه کبوتری که گاهی به جای اینکه بگویند «حداقل کبوتر» یا اینکه بگویند «m کبوتر یا بیشتر» می گویند «بیش از $m-1$ کبوتر» که منظور همان حداقل m کبوتر است.

بیش از $m-1$ کبوتر $\equiv$ m کبوتر یا بیشتر $\equiv$ حداقل m کبوتر

8- در مسائل مربوط به روز، ماه، سال، هفته، فصل و ... بهترین راه حل استفاده از رابطه $\left[\frac{\text{تعداد کبوترها}}{\text{تعداد لانه ها}}\right]$ است.

9- اگر صحبت از چند ویژگی متفاوت (مثلاً ماه‌های سال و روزهای هفته) درباره ی لانه ها شده باشد، باید ابتدا از اصل ضرب تعداد دانه ها را پیدا کنیم و سپس به سراغ رابطه فوق برویم.

10- $$\left[\frac{x}{n}\right]=k \quad \left.\begin{array}{r} x_{min}=(k-1)n+1 \; * \\ n_{max}=\left[\frac{x-1}{k-1}\right] \; * \end{array}\right\}$$

مثال: در یک کلاس 13 دانش‌آموز وجود دارد. کدام گزینه در مورد آنها صحیح است؟

1) دقیقاً دو نفر در یک ماه از سال متولد شده‌اند.

2) حداقل دو نفر متولد مهر ماه هستند.

3) دست کم دو نفر در یکی از ماه های سال به دنیا آمده اند.

4) حداکثر 3 نفر در یک ماه از سال متولد شده اند.

پاسخ : گزینه 3

❖ مسائل مربوط به اصل لانه کبوتری

در بعضی از مسائل مربوط به لانه کبوتری بهترین راه حل این است که بدترین اتفاق ممکن را در نظر بگیریم و تا مرز موفقیت پیش برویم ولی اتفاق موردنظر رخ ندهد. سپس یک انتخاب دیگر داشته باشیم تا جواب به دست آید.

1- در مسائل مربوط به کیسه و مهره های رنگی برای رسیدن به مرز موفقیت از مهره ها انتخاب می کنیم تا جایی که اتفاق موردنظر هنوز رخ ندهد.

2- اگر m عدد طبیعی انتخاب کنیم حداقل $\left[\frac{m}{n}\right]$ آنها در پیمانه n همنهشت اند. (تفاضل آنها بر n بخش پذیر است. هم باقی مانده‌اند)

3- اگر بخواهیم از یک مجموعه تعدادی عدد برداریم تا مطمئن شویم حداقل دو عدد از آنها:

الف) نسبت به هم اول باشند $\leftarrow$ مرز موفقیت انتخاب همه ی اعداد زوج مجموعه است سپس یک عضو به آن اضافه می‌کنیم تا به جواب برسیم. $\{2,4,6,8,\ldots\}$

ب) نسبت به هم اول نباشند (مقسوم علیه مشترک غیر 1 داشته باشند) $\leftarrow$ مرز موفقیت انتخاب همه ی اعداد اول و همچنین 1 است (غیرمرکب ها) سپس یک عضو به آن اضافه می‌کنیم تا به جواب برسیم. $\{1,2,3,5,7,11,13,\ldots\}$

4- در مسائلی از لانه کبوتری صحبت از جفت است، مرز موفقیت انتخاب یک لنگه از هر جفت است. اگر علاوه بر جفت، مجرد هم داشتیم، باید تمام این مجردها را به لنگه های انتخاب شده از جفت ها اضافه کنیم تا به مرز موفقیت برسیم.

❋ از این روش در مسائل مجموعه‌ای که قرار است دو عدد با ویژگی خاصی (مجموع ثابت یا تفاضل ثابت یا ...) نیز استفاده می‌شود.

5- در مسائل مجموعه‌ای از لانه کبوتری که مربوط به مجموعه یا تفاضل اعضا است و مجموعه یا تفاضل بیان شده تقریباً برابر با مجموع یا تفاضل بزرگترین و کوچکترین عضو مجموعه است، مرز موفقیت زیرمجموعه‌ای از مجموعه داده شده است که از کوچکترین عضو شروع شده و تا حوالی عضو متوسط پیش می‌رود.

* مقدار دقیق آخرین عضو زیرمجموعه با کنترل به دست می‌آید.

6- در بعضی از مسائل مربوط به لانه کبوتری n نفر در یک مسابقه شرکت کرده اند که دو به دو با هم مسابقه می دهند. در این مسائل تعداد کل مسابقات یعنی مرز موفقیت برابر با $\binom{n}{2}$ است که همان تعداد یال های گراف k_n است.

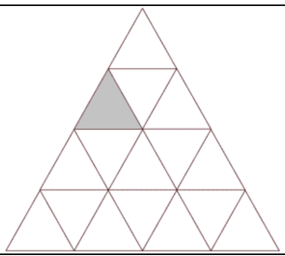
7- در مسائل مربوط به انتخابات، برای پیدا کردن حداقل تعداد رای نفر برنده، تعداد آرای او را x و تعداد آرای هر یک از رقبای انتخاباتی را $x-1$ فرض می‌کنیم و مجموع آرا برابر با تعداد کل افراد شرکت کننده در انتخابات قرار می‌دهیم تا مقدار x به دست آید. اگر مقدار x صحیح نشد، سقف آن را حساب می کنیم.

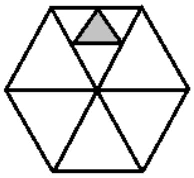
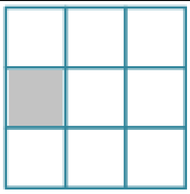
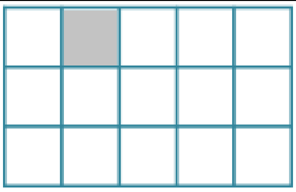
$$nx-(n-1)=u$$

$n \rightarrow$ تعداد کل نامزدهای انتخاباتی

$u \rightarrow$ تعداد کل آراء

8- در مسائل هندسی مربوط به لانه کبوتری با توجه به نوع شکل مطرح شده باید آن شکل را به تعداد قسمت های مناسب تقسیم‌بندی کرد.

اشکال مشهور در لانه کبوتری	
1- مثلث متساوی الاضلاع به مثلث های کوچکتر تقسیم می شود. * حداکثر فاصله ی دو نقطه درون یکی از قسمت‌ها ضلع مثلث های کوچک است.	

2- شش ضلعی منتظم به شکل مقابل تقسیم‌بندی می‌شود. * حداکثر فاصله ی دو نقطه درون یکی از قسمت‌ها ضلع مثلث های کوچک است.	
3- مربع به مربع های کوچک تقسیم بندی می شود. * حداکثر فاصله دو نقطه درون یکی از قسمت‌ها قطر مربع های کوچک است که $\sqrt{2}$ برابر ضلع آن است.	
4- مستطیل به مربع های کوچک تقسیم بندی می شود. * حداکثر فاصله ی دو نقطه درون یکی از قسمت‌ها قطر مربع های کوچک است که $\sqrt{2}$ برابر ضلع آن است.	

مثال: در جعبه ای ۱۰۰ کارت با شماره های ۱ تا ۱۰۰ وجود دارد. حداقل چند کارت باید از جعبه خارج کرد تا با اطمینان بتوان گفت حاصل ضرب عددهای خارج شده مضرب ۴ است؟

1) 51   2) 52   3) 53   4) 54

پاسخ: گزینه 2

مرز موفقیت ← انتخاب تمام اعداد فرد

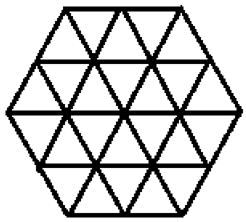
50 تا

سپس 2 تا عدد زوج انتخاب کرده که حاصل ضربشان حتما مضرب ۴ است.

جواب: $50 + 2 = 52$

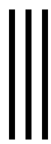
مثال: حداقل چند نقطه درون یک شش ضلعی به ضلع 2 قرار دهیم تا مطمئن شویم حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از یک واحد است؟

1) ۲۴   2) ۲۵   3) ۱۳   4) ۱۹

پاسخ:  ← $24 + 1 = 25$ گزینه 2

❖ مربع لاتین

- ✓ یک جدول مربعی $n \times n$ در سطرها و ستون‌های آن با اعداد $1,2,\ldots,n$ پر شده باشد و هیچ سطح آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، مربع لاتین نامیده می‌شود. به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه گفته می‌شود.
- ✓ مربع های لاتین 3×3 یا درایه های قطر اصلی اعداد یکسان هستند یا درایه های قطر فرعی. و در هر کدام از حالات نوارهای موازی با قطر اصلی یا قطر فرعی نیز برابرند. در واقع هر مربع لاتین 3×3 در حالت کلی به یکی از دو صورت زیر است:

ستون 

سطر 

قطر اصلی

a	b	c
c	a	b
b	c	a

قطر فرعی

c	b	a
b	a	c
a	c	b

- ✓ تعداد مربع های لاتین 2×2 برابر 2 است.

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

✓ تعداد مربع های لاتین 3×3 برابر ۱۲ است.

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۳	۱	۳
۳	۳	۱
۱	۳	۳

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

✓ اگر جایگاه یکی از اعداد در مربع لاتین مشخص شده باشد، (مثلاً بدانیم در کدام خانه ها 1 قرار دارد) دو مربع لاتین 3×3 قابل تصور است.

✓ اگر یک درایه از یک مربع لاتین 3×3 معلوم باشد 4 مربع لاتین قابل تصور است که 2 تای آنها اعداد روی قطر اصلی یکسان است و دوتای دیگر اعداد روی قطر فرعی یکسان است.

✓ اگر یک سطر یا یک ستون از مربع لاتین 3×3 معلوم باشد دو مربع لاتین قابل تصور است که یکی از آنها اعداد قطر اصلی یکسان و دیگری اعداد روی قطر فرعی یکسان است.

❖ اعمالی که لاتین را حفظ می‌کنند

اگر A یک مربع لاتین $n\times n$ باشد با اعمال هر یک از اعمال زیر یک مربع لاتین مانند B بدست می آید.

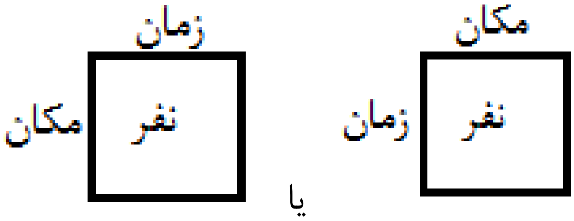
* تعویض جای دو سطر دلخواه
* تعویض جای دو ستون دلخواه
* اعمال یک جایگشت بر روی $1,2,\dots,n$

ترتیب در این سه عمل مهم نیست و در نهایت به نتیجه یکسانی می رسیم.

✓ اگر A یک مربع لاتین مرتبه n باشد می توان با جایگشت روی اعضای مربع A به $n!-1$ مربع لاتین جدید رسید.

❖ کاربرد مربع لاتین

کاربرد مربع لاتین در برنامه‌ریزی است. مثلاً برنامه‌ریزی برای n نفر در n مکان مختلف و n زمان مختلف که هر کدام از افراد در هر مکان و در هر زمان دقیقاً یک بار حضور داشته باشند.



- ✓ در ردیف مربوط به زمان عدد تکراری وجود ندارد یعنی هیچ کس در یک زمان در دو مکان نبوده است.
- ✓ در ردیف های مربوط به زمان هر یک از اعداد آمده است یعنی هر یک از افراد در تمام زمان ها، در مکان ها حضور داشته اند.
- ✓ در ردیف مربوط به مکان عددی تکراری وجود ندارد یعنی هیچ کس در یک مکان دو بار حضور نداشته است.
- ✓ در ردیف های مربوط به زمان هر یک از اعداد آمده است یعنی هر یک از افراد در تمام مکان ها بوده اند.
- ✓ در برنامه‌ریزی باید مربع لاتین باشد و اگر لاتین نباشد برنامه ریزی اشتباه خواهد بود.

❖ دو مربع لاتین متعامد

اگر A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر در این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه ی آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام ارقام سمت راست مربوط به مربع B

است (و یا برعکس) در این صورت اگر هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند می‌گوییم دو مربع لاتین A و B متعامداند.

مثال:

$A=$

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

و

$B=$

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

$\leftarrow$

۲۲	۳۳	۴۴	۱۱
۳۴	۲۱	۱۲	۴۳
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۱۳	۴۲	۳۱	۲۴

✓ اگر دو مربع لاتین $n \times n$ متعامد باشند، تمام خانه هایی که در یک مربع با رقم «1» پر شده‌اند، در مربع دیگر باید ارقام متمایز $1,2,\ldots,n$ پر شده باشند و ...

✓ برای بررسی متعامد بودن دو مربع لاتین، ابتدا تمام خانه هایی را که در یک مربع با رقم‌های 1 پر شده اند مشخص می کنیم. سپس در مربع دیگر همین خانه‌ها را بررسی می‌کنیم. باید این خانه‌ها با ارقام متمایز $1,2,\ldots,n$ پر شده باشند. در مرحله بعد این کار را برای خانه هایی که در یک مربع با رقم 2 پر شده‌اند، تکرار می کنیم و الی آخر.

✍**نکته:** ویژگی های مربع های لاتین هم دسته و غیرهم دسته 3×3

دسته اول مربع های لاتین با درایه های قطر اصلی یکسان

دسته دوم مربع های لاتین با درایه های قطر فرعی یکسان

1- مربع های غیر هم دسته متعامداند.

2- مربع های هم دسته با هم متعامد نیستند.

3- مربع های هم دسته با جایگشت به هم تبدیل می‌شوند.

4- مربع های غیر هم دسته با جایگشت به هم تبدیل نمی‌شوند.

5- هر بار جای دو سطر یا جای دو ستون را عوض کنیم دسته مربع لاتین عوض می‌شود (اگر فرد بار عوض کنیم دسته عوض می‌شود)

6- هر مربع 3×3 لاتین با ۶ مربع لاتین دیگر متعامد است.

7- ۳۶ جفت مربع لاتین متعامد 3×3 مختلف وجود دارد.

✍نکاتی درباره تعامد

1- اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند، هر مربعی که با جایگشت روی اعضای B به دست می‌آید با مربع A متعامد است.

2- اگر A یک مربع لاتین $n \times n$ باشد با اعمال هر جایگشت دلخواه روی اعضای A قطعاً مربع لاتینی غیر متعامد با A به دست می‌آید.

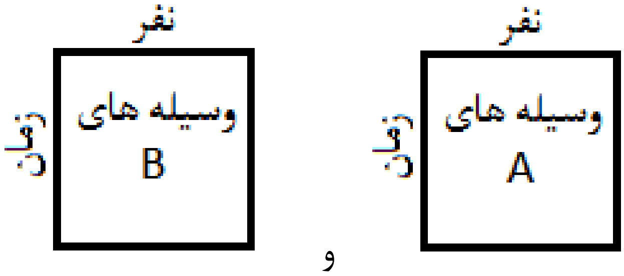
3- اگر A یک مربع لاتین 3×3 باشد با تعویض جای دو سطر یا دو ستون (تعداد تعویض ها باید فرد باشد) از A قطعاً مربعی متعامد با A به دست می‌آید.

4- اگر A یک مربع لاتین 4×4 یا بیشتر باشد با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از A قطعاً مربعی غیرمتعامد با A به دست می‌آید.

❖ کاربرد مربع های لاتین متعامد

کاربرد مربع لاتین متعامد برنامه ریزی برای دو سوژه ی مختلف A و B است به طوری که n نفر در n زمان مختلف n وسیله $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و همچنین n وسیله $B_1, B_2, \ldots, B_n$ را دقیقا یک بار استفاده کنند و هر کدام از وسیله‌های گروه A و B دقیقاً یک بار با هم استفاده شوند.

دو مربع لاتین باید متعامد باشند:



❖ وجود مربع لاتین $n \times n$

✓ مربع های لاتین متعامد از مرتبه 6 و 2 و 1 وجود ندارند. اما به ازای هر n غیر از 6 و 2 و 1 قطعاً دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n می توان ساخت.

❖ مربع لاتین چرخشی

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n-1 & n \\
n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\
n-1 & n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
3 & 4 & 5 & \dots & \dots & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 & \dots & \dots & n & 1
\end{array}$$

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

✍**نکات**

1- در مربع های لاتین چرخشی درایه های روی قطر اصلی همواره برابر 1 است.

2- در مربع های لاتین چرخشی ردیف موازی بالای قطر اصلی همه ی درایه ها برابر 2 و ردیف‌های بالاتر بعدی به ترتیب ۳ و ۴ و ... هستند.

3- اعداد سطر اول از چپ به راست به صورت $1,2,3,\ldots,n$ می باشند.

4- اعداد ستون آخر از پایین به بالا به صورت $1,2,3,\ldots,n$ می باشند.

5- برای هر عدد طبیعی n یک مربع لاتین چرخشی $n \times n$ وجود دارد.

6- در مربع لاتین چرخشی درایه های واقع بر قطر اصلی برابرند. همچنین درایه های واقع بر نوارهای موازی با قطر اصلی نیز با هم برابرند.

7- می‌توان روش چرخشی را برای ساختن مربع لاتین روی قطر فرعی نیز پیاده کرد که به آن مربع لاتین شبه چرخشی می‌گوییم.

8- اگر A و B دو مربع لاتین هم مرتبه از مرتبه فرد باشند که یکی چرخشی و دیگری شبه چرخشی باشد آنگاه A و B متعامداند.