

مجموعه سوالات پیشرفته ریاضی

علیرضا کچویی

Gmail: alirezakachouei1@gmail.com

Telegram: @AlirezaKachouei

سوال ۱: دستگاه معادلات مثلثاتی

دستگاه معادلات زیر را برای متغیرهای x و y حل کنید:

$$\begin{cases} \cos(x) - \cos(y) = \frac{1}{4} \\ \sin(x) - \sin(y) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

سوال ۲: معادله بر پایه‌ی نامساوی و کران‌داری

تمام جواب‌های حقیقی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$\sin^4(x) + \cos^4(x) = 1$$

سوال ۳: معادله با اتحاد پنهان

معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$\cos^3(x) \cos(3x) + \sin^3(x) \sin(3x) = \frac{1}{8}$$

سوال ۴: معادله مثلثاتی خودآگاه

معادله $(n+1)\cos(x) - n\sin(x) = n+2$ را در نظر بگیرید. در این معادله، n برابر با تعداد ریشه‌های متمایز خود همین معادله در بازه $[0, 2\pi)$ است. مقدار n را بیابید.

سوال ۵: ریشه‌های گمشده‌ی یک چندجمله‌ای

می‌دانیم که $\tan(\frac{\pi}{13})$ و $\tan(\frac{5\pi}{13})$ دو ریشه از سه ریشه‌ی معادله‌ی درجه سوم $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ هستند. مقدار $\tan^2(\frac{\pi}{13}) + \tan^2(\frac{5\pi}{13})$ کدام است؟

سوال ۶: هویت پنهان در توابع معکوس

فرض کنید A و B دو زاویه در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ هستند به طوری که $A+B = \frac{\pi}{4}$. اگر $\sin(A) = x$ و $\sin(B) = y$ باشد، مقدار عبارت $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ چقدر است؟

سوال ۷: ریشه‌های پنهان در چندجمله‌ای چبیشف

فرض کنید $\sin(a) = x$. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $\sin(7a) = 0$ در بازه‌ی $(-1, 1)$ که از مقادیر x به دست می‌آیند، کدام است؟

سوال ۸: دوره تناوب تابع جزء صحیح مثلثاتی

دوره تناوب اصلی (کوچکترین دوره تناوب مثبت) تابع $f(x) = [2\sin(x)] + [2\cos(x)]$ چقدر است؟ (نماد $[y]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد y است.)

سوال ۹: دنباله بازگشتی مثلثاتی

دنباله (x_n) با رابطه بازگشتی $x_{n+1} = 1 - 2x_n^2$ و جمله اول x_0 تعریف شده است. چند مقدار اولیه متمایز برای x_0 در بازه $[-1, 1]$ وجود دارد به طوری که $x_{2025} = x_0$ باشد؟

سوال ۱۰: معادله‌ی مثلثاتی با طعم براکت

تعداد جواب‌های معادله‌ی $2 \tan(x) - [\tan(x)] = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi)$ کدام است؟

سوال ۱۱: معادله براکتی

تعداد جواب‌های معادله‌ی $[\tan(x)] = [\cot(x)]$ در بازه‌ی $[0, 2\pi)$ کدام است؟

سوال ۱۲: هویت پنهان در مجموع کسینوس‌ها

کوچکترین جواب مثبت معادله‌ی زیر کدام است؟

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cos(5x) + \cos(6x) + \cos(7x) = -1$$

سوال ۱۳: معادله مثلثاتی با اتحادهای ترکیبی

معادله‌ی $\sqrt{2} \tan(x) - \cos(x) = \sin(x) - \sqrt{2} \cot(x)$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

سوال ۱۴: معادله با هویت‌های نصف کمان

تعداد جواب‌های معادله $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

سوال ۱۵: معادله رادیکالی با دامنه پنهان

مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}} - \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{\cos(x)}} = 0$ در بازه $(0, 4\pi)$ کدام است؟

سوال ۱۶: معادله قدر مطلق با اتحادهای متقابل

تعداد جواب‌های معادله $|\tan(x) - 1| + |\cot(x) - 1| = 2$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

سوال ۱۷: معادله تانژانت با آرگومان‌های ترکیبی

معادله $\tan(2x) + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

سوال ۱۸: سیستم معادلات مثلثاتی پنهان

دستگاه معادلات زیر در بازه $[0, 2\pi]$ چند زوج جواب (x, y) دارد؟

$$\begin{cases} \tan(x) \cot(y) = 3 \\ \cos(x) \sin(y) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

سوال ۱۹: معادله تانژانت با هویت جمع

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan(2x) + \tan(x) = 1 - \tan(2x)\tan(x)$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

سوال ۲۰: معادله با تغییر متغیر هوشمندانه

معادله $\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)+2} = 2\sin(2x) - 3$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

سوال ۲۱: تابع بازگشتی

تابع $f(x) = \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}$ را در نظر بگیرید. همچنین دنباله‌ی توابع $g_n(x)$ را به صورت $g_1(x) = f(x)$ و $g_{n+1}(x) = f(g_n(x))$ تعریف می‌کنیم. مقدار x که در معادله‌ی $g_{2024}(x) = 1$ صدق می‌کند، کدام است؟

سوال ۲۲: معادله مثلثاتی با عبارت رادیکالی

تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^2(x) + \sin(x) - \cos(x) = \tan(x)\cot(x)$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

سوال ۲۳: معادله رادیکالی با تحلیل علامت

تعداد جواب‌های معادله‌ی $(\sin(x) - \cos(x))\sqrt{\tan(x) + \cot(x)} - 2 = \sin(2x) - 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi)$ کدام است؟

سوال ۲۴: معادله مثلثاتی با هویت ترکیبی

فرض کنید $\sin(x) + \cos(x) = a$. مقدار دقیق a را بیابید به طوری که عبارت زیر برقرار باشد:

$$\sin^{\frac{1}{2}}(x) + \cos^{\frac{1}{2}}(x) + \sin^{\frac{1}{4}}(x) + \cos^{\frac{1}{4}}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

سوال ۲۵: دستگاه معادلات لگاریتمی

دستگاه معادلات زیر را برای مقادیر x و y حل کنید:

$$\begin{cases} \log_2(x) + \log_4(y) = 4 \\ \log_x(y) + \log_y(x) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

سوال ۲۶: معادله‌ای در مرز منطق و جبر

دستگاه معادلات زیر را برای تمام مقادیر حقیقی x حل کنید:

$$\begin{cases} [\log_2 x] \cdot \{\log_2 x\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \log_2 x + \log_x 4 = 3 \end{cases}$$

راهنمایی:

- نماد $[y]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد y است (بزرگترین عدد صحیحی که از y بزرگتر نیست).
 - نماد $\{y\}$ نشان‌دهنده‌ی جزء کسری عدد y است، که برابر است با $y - [y]$.
-

سوال ۲۷: معادله‌ای با چهره‌ی مبدل

معادله‌ی زیر را برای تمام مقادیر حقیقی x حل کنید:

$$x^{3-\log_5 x} = 25$$

سوال ۲۸: تحلیل پارامتری معادله گنگ

به ازای چند مقدار حقیقی برای پارامتر a ، معادله‌ی زیر دقیقاً یک جواب برای x دارد؟

$$\frac{4}{x} - \frac{a}{x^2} = a + 2$$

سوال ۲۹: تحلیل پارامتری در معادله مثلثاتی

مجموع تمام مقادیر صحیح پارامتر a را بیابید که به ازای آن‌ها، معادله‌ی زیر دقیقاً سه جواب متمایز برای x در بازه‌ی $[0, 2\pi)$ داشته باشد.

$$\cos(2x) + (2a - 1) \sin(x) + a - 1 = 0.$$

سوال ۳۰: معادله با ساختار متقارن پنهان

معادله‌ی گویا زیر را برای تمام مقادیر حقیقی x حل کنید:

$$\frac{(x-1)^2(x^2+1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{5}{9}$$

سوال ۳۱: معادله با تقارن پنهان دولایه

تمام ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$\frac{x^8 + 1}{(x^8 + 1)^2} = \frac{1}{2}$$

سوال ۳۲: معادله گویا با ساختار متقارن

معادله‌ی زیر را برای تمام مقادیر حقیقی x حل کنید:

$$\frac{x^8 + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{41}{15}$$

سوال ۳۳: معادله رادیکالی با تقارن نامتقارن

تمام ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x} = \sqrt{x^2 + 1}$$

سوال ۳۴: دنباله حسابی از جنس جزء صحیح

تمام بازه‌های ممکن برای عدد حقیقی x را بیابید به طوری که اعداد $[x]$ ، $[2x]$ ، $[3x]$ و $[4x]$ چهار جمله‌ی متوالی یک دنباله حسابی باشند. (نماد $[y]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد y است.)

سوال ۳۵: دنباله‌های هم خط

یک دنباله‌ی حسابی (a_n) با قدر نسبت d و یک دنباله‌ی هندسی (b_n) با قدر نسبت r را در نظر بگیرید. برای هر عدد طبیعی n ، سه نقطه در صفحه به صورت $P_n = (a_n, b_n)$ ، $P_{n+1} = (a_{n+1}, b_{n+1})$ و $P_{n+2} = (a_{n+2}, b_{n+2})$ تعریف می‌کنیم.

تمام شرایط ممکن که بر روی این دو دنباله باید برقرار باشد را بیابید به طوری که به ازای هر $n \geq 1$ ، این سه نقطه همواره روی یک خط راست قرار بگیرند.

سوال ۳۶: نردبان میانگین‌ها

پنج عدد حقیقی و متمایز a, b, c, d, e داده شده‌اند به طوری که سه شرط زیر به طور همزمان برقرار است:

- (i) اعداد a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله حسابی هستند.
 - (ii) اعداد c, d, e سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی هستند.
 - (iii) اعداد a, c, e (جملات اول، وسط و آخر) خودشان سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی هستند.
- اگر بدانیم که $a = 2$ و $e = 18$ است، تمام مقادیر ممکن برای سه عدد b, c, d را بیابید.
-

سوال ۳۷: دنباله‌های در هم تنیده

دو دنباله، یکی حسابی (a_n) با جمله‌ی اول $a_1 = 2$ و قدر نسبت d ، و دیگری هندسی (b_n) با جمله‌ی اول $b_1 = 4$ و قدر نسبت r داده شده‌اند.

این دو دنباله به گونه‌ای "در هم تنیده" هستند که دو شرط زیر به طور همزمان برقرار است:

- (i) سه جمله‌ی a_1, b_1, a_2 خودشان تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند.
 - (ii) سه جمله‌ی b_1, a_2, b_2 خودشان تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.
- مقدار جمله‌ی پنجم از دنباله‌ی جدید (c_n) که به صورت $c_n = a_n + b_n$ تعریف می‌شود را بیابید.
-

سوال ۳۸: دنباله ریشه‌های مثلثاتی

معادله درجه دو $x^2 + px + q = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز α و β است. این ریشه‌ها دو خاصیت منحصر به فرد زیر را دارند:

(i) ریشه‌های α و β برابر با سینوس و کسینوس یک زاویه‌ی یکسان θ هستند. یعنی $\{\alpha, \beta\} = \{\sin \theta, \cos \theta\}$.

(ii) اعداد α, β و $\frac{1}{\beta}$ (به همین ترتیب) سه جمله‌ی متوالی یک دنباله حسابی را تشکیل می‌دهند.

تمام مقادیر ممکن برای ضریب p را بیابید.

سوال ۳۹: تبدیل دنباله‌ها

سه عدد مثبت، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهند. اگر از جمله‌ی دوم ۴ واحد کم کنیم، سه عدد جدید تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. حال اگر از جمله‌ی سوم دنباله حسابی جدید، ۹ واحد دیگر کم کنیم، اعداد حاصل مجدداً تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند.

آن سه عدد اولیه را بیابید.

سوال ۴۰: همزیستی دنباله‌ها

مجموع سه جمله‌ی اول یک دنباله حسابی غیرثابت از اعداد حقیقی برابر با ۱۸ است و مجموع مربعات این سه جمله برابر با ۱۲۶ است.

سه عدد p, q, r را که خودشان تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند، به ترتیب به سه جمله‌ی دنباله‌ی حسابی اولیه اضافه می‌کنیم تا سه عدد جدید حاصل شود. این سه عدد جدید، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهند.

اگر بدانیم که مجموع اعداد p, q, r برابر با صفر است ($p + q + r = 0$)، قدر نسبتِ دنباله هندسیِ نهایی را بیابید.

سوال ۴۱: دنباله حسابی-هندسی

چهار عدد حقیقی یک دنباله را تشکیل می‌دهند. سه جمله‌ی اول آن تشکیل یک دنباله حسابی و سه جمله‌ی آخر آن تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. اگر مجموع دو جمله‌ی اول و آخر برابر با ۱۴ و مجموع دو جمله‌ی وسط برابر با ۱۲ باشد، آن چهار عدد را بیابید.

سوال ۴۲: پل دنباله‌ها

چهار عدد حقیقی متمایز a, b, c, d دو شرط زیر را برآورده می‌کنند:

(i) سه جمله‌ی a, b, c تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

(ii) سه جمله‌ی b, c, d تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند.

علاوه بر این، یک پل ساختاری بین این دو دنباله برقرار است: قدر نسبت دنباله حسابی برابر با قدر نسبت دنباله هندسی است.

اگر مجموع این چهار عدد برابر با ۱۴ باشد ($a + b + c + d = 14$)، آن‌ها را بیابید.

سوال ۴۳: دنباله با جملات مشترک

دو دنباله‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی داده شده‌اند:

(i) دنباله‌ی حسابی (A_m) که با $A(m) = 4m - 1$ برای $m \geq 1$ تعریف می‌شود.

(ii) دنباله‌ی درجه دوم (T_n) که با $T(n) = n^2 - 2n + 4$ برای $n \geq 1$ تعریف می‌شود.

جملاتی که در هر دو دنباله مشترک هستند را در نظر بگیرید و آن‌ها را به ترتیب صعودی در یک دنباله‌ی جدید به نام (C_k) قرار دهید ($k \geq 1$).

مطلوب است:

الف) ثابت کنید که دنباله‌ی جدید (C_k) خود یک دنباله‌ی درجه دوم است.

ب) سه جمله‌ی اول دنباله‌ی (C_k) را بیابید.

ج) جمله‌ی عمومی $C(k)$ را بر حسب k پیدا کنید.

سوال ۴۴: ماریچ ناشناخته

یک ربات بر اساس یک دنباله‌ی درجه دوم ناشناخته به فرم $T(n) = an^2 + bn + c$ حرکت می‌کند. ربات در مبدأ مختصات $(0, 0)$ شروع کرده و در n مرحله حرکت می‌کند.

- در مرحله ۱، به اندازه‌ی $T(1)$ واحد به سمت شرق حرکت می‌کند.
- در مرحله ۲، به اندازه‌ی $T(2)$ واحد به سمت شمال حرکت می‌کند.
- در مرحله ۳، به اندازه‌ی $T(3)$ واحد به سمت غرب حرکت می‌کند.
- در مرحله ۴، به اندازه‌ی $T(4)$ واحد به سمت جنوب حرکت می‌کند.
- و این الگوی چهار مرحله‌ای (شرق، شمال، غرب، جنوب) را ادامه می‌دهد.

شما سه قطعه اطلاعات کلیدی در مورد این دنباله دارید:

- (i) طول اولین حرکت ربات برابر با ۳ واحد است ($T(1) = 3$).
- (ii) طول دومین حرکت ربات برابر با ۱۲ واحد است ($T(2) = 12$).
- (iii) پس از پایان مرحله سوم، مختصات ربات برابر با $(-17, 12)$ است.

مطلوب است: مختصات نهایی ربات پس از پایان مرحله ششم چقدر است؟

سوال ۴۵: دنباله‌ی تفاضل‌های فروپاشیده

یک دنباله‌ی درجه دوم $T(n) = an^2 + bn + c$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی تفاضل‌های آن را $D(n)$ می‌نامیم، به طوری که $D(n) = T(n+1) - T(n)$.

شما سه قطعه اطلاعات حیاتی در مورد این دنباله‌ها دارید:

- (i) سه جمله‌ی اول دنباله‌ی تفاضل‌ها، یعنی $D(1), D(2), D(3)$ ، خودشان تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند.
- (ii) اولین جمله‌ی دنباله‌ی تفاضل‌ها برابر با ۶ است ($D(1) = 6$).
- (iii) مجموع جملات اول و پنجم دنباله‌ی اصلی برابر با ۴۲ است ($T(1) + T(5) = 42$).

مطلوب است: S_{10} ، یعنی مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی $T(n)$ را بیابید.

سوال ۴۶: نقاب نمایی

یک دنباله‌ی درجه دوم ناشناخته $T(n) = an^2 + bn + c$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی جدیدی به نام $G(n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(n) = 2^{T(n+1)-T(n)}$$

همچنین دو اطلاعات زیر را در اختیار دارید:

- (i) اولین جمله‌ی دنباله‌ی G برابر با ۱۶ است ($G(1) = 16$).
- (ii) دومین جمله‌ی دنباله‌ی G برابر با ۲۵۶ است ($G(2) = 256$).

اگر بدانیم که اولین جمله‌ی دنباله‌ی اصلی برابر با ۵ است ($T(1) = 5$)، مقدار جمله‌ی دهم آن، یعنی $T(10)$ ، را بیابید.

سوال ۴۷: دنباله‌ی گسسته

یک دنباله‌ی درجه دوم $T(n) = \frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی جدیدی به نام $B(n)$ را با استفاده از تابع جزء صحیح به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(n) = [T(n)]$$

(نماد $[y]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد y است.)

ثابت کنید دنباله‌ی $B(n)$ تقریباً یک دنباله حسابی است و سپس مشخص کنید در کدام جملات، این دنباله از الگوی حسابی خود تخطی می‌کند. به عبارت دیگر، تمام مقادیر n را بیابید که به ازای آن‌ها، رابطه‌ی $B(n+1) - B(n)$ با $B(n) - B(n-1)$ برابر نیست.

سوال ۴۸: ماریچ کسینوسی

یک دنباله‌ی حسابی $\theta(n)$ از زاویه‌ها (بر حسب رادیان) با جمله‌ی اول $\theta(1) = \frac{\pi}{4}$ و قدر نسبت d داده شده است. دنباله‌ی جدیدی به نام $C(n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C(n) = \cos(\theta(n))$$

شما می‌دانید که سه جمله‌ی اول دنباله‌ی $C(n)$ ، یعنی $C(1)$ ، $C(2)$ ، $C(3)$ ، خودشان تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند.

تمام مقادیر ممکن برای قدر نسبت d را در بازه‌ی $(0, 2\pi]$ بیابید.

سوال ۴۹: پیشروی بازتابی

سه عدد $|x|$ ، $|x - 3|$ و $|x - 6|$ (به همین ترتیب) سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهند. تمام مقادیر حقیقی ممکن برای x را بیابید.

سوال ۵۰: آکورد پیشروی

سه زاویه‌ی متمایز A ، B ، C در یک دنباله حسابی قرار دارند. این زاویه‌ها به طور همزمان دو شرط زیر را برآورده می‌کنند:

(i) دنباله‌ی $(\sin A, \sin B, \sin C)$ یک دنباله هندسی است.

(ii) دنباله‌ی $(\cos A, \cos B, \cos C)$ یک دنباله حسابی است.

مقدار $\cos(A - C)$ را بیابید.

سوال ۵۱: راه‌پله‌ی خود-مرجع

یک دنباله‌ی حسابی از زوایا $\theta(n) = a + (n - 1)d$ و یک دنباله‌ی جدید $B(n) = [10 \cdot \sin(\theta(n))]$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که:

(i) دنباله‌ی $B(n)$ خود یک دنباله حسابی با قدر نسبت غیرصفر D است.

(ii) یک رابطه‌ی خود-مرجع بین این دو دنباله برقرار است: $d = D \cdot \frac{\pi}{6}$.

(iii) اولین جمله‌ی دنباله‌ی براکتی برابر با ۵ است، یعنی $B(1) = 5$.

با فرض اینکه قدر نسبت D یک عدد صحیح است، مقدار $B(3)$ را بیابید.

سوال ۵۲: مجموع‌های گمشده در دایره

یک دنباله‌ی حسابی از زوایا $\theta(n) = a + (n-1)d$ با جمله‌ی اول $a = \frac{\pi}{13}$ و قدر نسبت $d = \frac{\pi}{6}$ داده شده است. دو دنباله‌ی جدید $C(n) = \cos(\theta(n))$ و $S(n) = \sin(\theta(n))$ را تعریف می‌کنیم. همچنین، $\text{Sum}(k)$ را برابر با مجموع k جمله‌ی اول دنباله‌ی $C(n)$ در نظر می‌گیریم.

$$\text{Sum}(k) = \sum_{i=1}^k C(i)$$

اگر بدانیم که به ازای یک عدد طبیعی خاص k ، مقدار $\text{Sum}(k)$ برابر با $\sin(\frac{k\pi}{13})$ است، تمام مقادیر ممکن برای k را بیابید.

سوال ۵۳: تقاطع دنباله‌ها

دو دنباله‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی را در نظر بگیرید:

(i) دنباله‌ی درجه دوم $T(n)$: که با فرمول $T(n) = n^2 + n + 1$ تعریف می‌شود.

(ii) دنباله‌ی حسابی $A(m)$: که با فرمول $A(m) = 4m + 3$ تعریف می‌شود.

دنباله‌ی جدید $C(k)$ را به عنوان دنباله‌ی جملات مشترک بین $T(n)$ و $A(m)$ تعریف می‌کنیم که به ترتیب صعودی مرتب شده‌اند.

مطلوب است: پنجاهمین جمله‌ی دنباله‌ی $C(k)$ ، یعنی C_{50} ، را بیابید.

سوال ۵۴: پل بین دنباله و توان

در دنباله حسابی $7, 12, 17, \dots$ ، چهارمین جمله‌ای که یک واحد از مربع کامل بیشتر است، کدام است؟

سوال ۵۵: معمای ضرایب هندسی

یک دنباله‌ی درجه سه به فرم $T(n) = an^3 + bn^2 + cn + k$ تعریف شده است. ضرایب این دنباله، یعنی a, b, c, k ، به همین ترتیب، چهار جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی هستند.

همچنین، دو قطعه اطلاعات کلیدی در مورد تفاضل‌های این دنباله در اختیار داریم:

(i) تفاضل ثابت مرتبه‌ی سوم این دنباله برابر با ۴۸ است.

(ii) اولین جمله‌ی دنباله‌ی تفاضل‌های مرتبه‌ی دوم، آن هم برابر با ۴۸ است.

اگر بدانیم که جمله‌ی اول این دنباله برابر با ۱۹ است ($T(1) = 19$)، مقدار جمله‌ی دوم آن، یعنی $T(2)$ ، را بیابید.

سوال ۵۶: دنباله فراکتالی

یک دنباله‌ی درجه چهار به فرم $T(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ را در نظر بگیرید. پنج ضریب این دنباله، یعنی a, b, c, d, e ، به همین ترتیب، پنج جمله‌ی متوالی یک دنباله حسابی با قدر نسبت δ هستند.

یک رابطه‌ی "فراکتالی" بین این دو ساختار برقرار است:

(i) تفاضل ثابت مرتبه‌ی چهارم دنباله‌ی $T(n)$ برابر با ۷۲ است.

(ii) قدر نسبت دنباله‌ی حسابی ضرایب (δ) ، خود برابر با اولین جمله‌ی دنباله‌ی تفاضل‌های مرتبه دوم $T(n)$ است. یعنی: $\delta = \Delta^2 T(1)$.

مطلوب است: مقدار اولین جمله‌ی دنباله‌ی تفاضل‌های مرتبه سوم، یعنی $\Delta^3 T(1)$ ، را بیابید.

راهنمایی (فرمول‌های مورد نیاز): برای یک دنباله‌ی درجه چهار، روابط زیر برقرار است:

$$\Delta^4 T(n) = 24a \bullet$$

$$\Delta^3 T(1) = 14a + 6b + 2c \bullet$$

$$\Delta^2 T(1) = 6a + 18b + 6c \bullet$$

سوال ۵۷: ریشه‌های صحیح مشترک

دو معادله درجه دو زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + bx + a = 0$$

که در آن a و b اعداد صحیح و متمایز هستند.

اگر این دو معادله دقیقاً یک ریشه مشترک داشته باشند، مجموع تمام مقادیر ممکن برای $a + b$ را بیابید.

سوال ۵۸: مینیمم قدرمطلق

فرض کنید α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ باشند. کمترین مقدار ممکن برای عبارت $|\alpha^3 - \beta^3|$ را بیابید.

سوال ۵۹: خط مماس مشترک

دو سهمی با معادلات $y_1 = x^2 + ax + b$ و $y_2 = cx^2 + dx + e$ را در نظر بگیرید.

این دو سهمی دارای یک خط مماس مشترک در نقطه‌ی $(1, 1)$ هستند. علاوه بر این، می‌دانیم که رأس سهمی اول در نقطه‌ای با طول $x = 2$ قرار دارد و سهمی دوم از مبدأ مختصات $(0, 0)$ عبور می‌کند.

مقدار عبارت $a + b + c + d + e$ را بیابید.

سوال ۶۰: معادله‌ی خودآگاه

معادله‌ی درجه دو $x^2 - px + q = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز است. ضرایب این معادله (q و p) و همچنین دلتای آن ($\Delta = p^2 - 4q$)، سه ریشه‌ی معادله‌ی زیر هستند:

$$t^3 - 18t^2 + 101t - 180 = 0$$

تمام مقادیر ممکن برای ضریب p را بیابید.

سوال ۶۱: ریشه‌ی دلتای خودش

معادله‌ی درجه دو $x^2 + px + q = 0$ دارای دو خاصیت بسیار ویژه است:

(i) جذر نامنفی دلتای آن ($\sqrt{\Delta}$)، خود یکی از ریشه‌های همین معادله است.

(ii) مجموع مربعات ریشه‌های آن برابر با ۳۶ است.

تمام مقادیر ممکن برای ضرایب p و q را بیابید.

سوال ۶۲: معادله با ضرایب بازگشتی

معادله‌ی درجه دو $\Delta x^2 - (p + q)x + (p - q) = 0$ را در نظر بگیرید. این معادله دارای سه خاصیت خارق‌العاده است:

(i) پارامترهای p و q در این معادله، خودشان برابر با ریشه‌های حقیقی و متمایز همین معادله هستند.

(ii) Δ همان دلتای استاندارد معادله است.

(iii) مقدار p از q بزرگتر است ($p > q$).

مطلوب است: مقادیر عددی p و q را بیابید.

سوال ۶۳: ریشه‌های رادیکالی

ریشه‌های حقیقی و متمایز α و β از معادله‌ی درجه دو $x^2 + px + q = 0$ ، در یک رابطه‌ی شگفت‌انگیز و متقارن با یکدیگر قرار دارند. آن‌ها در معادلات رادیکالی بی‌نهایت زیر صدق می‌کنند:

$$\alpha = \sqrt{k + \beta}$$
$$\beta = \sqrt{k + \alpha}$$

که در آن k یک ثابت حقیقی است.

اگر بدانیم که حاصلضرب ریشه‌های این معادله برابر با -6 است ($\alpha\beta = -6$)، مقادیر عددی p و q را بیابید.

سوال ۶۴: دنباله‌ی مجموع توان‌ها

فرض کنید α و β ریشه‌های معادله درجه دو $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند. دنباله‌ی $S(n)$ را به صورت $S(n) = \alpha^n + \beta^n$ برای $n \geq 1$ تعریف می‌کنیم.

مطلوب است: باقی‌مانده‌ی تقسیم $S(10)$ بر عدد ۱۳ را بیابید.

سوال ۶۵: تقارن پنهان

معادله‌ی زیر را برای تمام مقادیر حقیقی x حل کنید:

$$(x-1)^4 + (x-3)^4 = 82$$

سوال ۶۶: اتحاد گمشده‌ی توان هفتم

اعداد حقیقی x و y در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

مقدار عددی عبارت $x^7 + y^7$ را بیابید.

سوال ۶۷: معادله‌ی تفاضل توان‌های هفتم

معادله‌ی زیر را برای تمام مقادیر حقیقی x حل کنید:

$$(x^2 - x + 1)^7 - (x^2 - x - 1)^7 = 128$$

سوال ۶۸: معادله متقارن جابجا شده

معادله‌ی زیر را برای تمام مقادیر حقیقی x حل کنید:

$$(x^2 - 3x + 1)^2 - 5(x^2 - 3x + 1)(x + 1) + 4(x + 1)^2 = 0$$

سوال ۶۹: دنباله هندسی با جملات جبری

سه عبارت $a^2 + b$, $(a+b)^{\frac{2}{3}}$ و $a + b^2$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی هستند. به طوری که a و b اعداد صحیح غیرصفر می‌باشند ($a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$). چند مقدار ممکن برای حاصل ضرب ab وجود دارد؟

سوال ۷۰: معمای هندسی دنباله‌ها

فرض کنید مجموعه S شامل تمام زوج مرتب‌های اعداد صحیح و مثبت (a, b) باشد که در آن، سه عبارت $\log(a^2 + b)$, $\log((a+b)^{3/2})$ و $\log(a + b^2)$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله حسابی باشند. (آ) هر زوج مرتب $(a, b) \in S$ را به عنوان یک نقطه در صفحه دکارتی در نظر بگیرید. ثابت کنید تمام این نقاط روی یک دایره قرار دارند (هم‌دایره هستند). (ب) معادله‌ی آن دایره را بیابید.

راهنمایی: به یاد بیاورید که اگر $\log A, \log B, \log C$ یک دنباله حسابی تشکیل دهند، آنگاه اعداد A, B, C خودشان یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهند.

سوال ۷۱: معادله‌ی رادیکالی-براکتی

معادله‌ی زیر را برای تمام مقادیر حقیقی x حل کنید:

$$[x] + \sqrt{x - \sqrt{x}} = \left[x + \frac{1}{x} \right]$$

سوال ۷۲: معادله با تغییر متغیر پنهان

تمام ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$2 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 5 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - 3 = 0.$$

سوال ۷۳: معادله‌ی خود-بازتابی

تمام ریشه‌های حقیقی مثبت معادله‌ی زیر را بیابید:

$$x[x] + \frac{1}{x} = x + \left[\frac{1}{x} \right]$$

سوال ۷۴: تحلیل پارامتری معادله‌ی براکتی

مجموعه‌ی تمام مقادیر حقیقی پارامتر a را بیابید که به ازای آن‌ها، معادله‌ی زیر دقیقاً دو ریشه‌ی حقیقی متمایز برای x داشته باشد:

$$[x]^2 - 3x + a = 0$$

سوال ۷۵: دنیای زیبا (پیش نیاز سوال دانش اعداد مختلط میباشد)

تمام زوج‌مرتب‌های اعداد طبیعی (α, β) را بیابید به طوری که چندجمله‌ای $P(x) = (x+2)^\alpha - (x^2+2)^\beta$ بر چندجمله‌ای $Q(x) = x^2 - x + 3$ بخش‌پذیر باشد.

سوال ۷۶: دنیای زیبای بدون مختلط

تمام زوج‌مرتب‌های اعداد طبیعی (α, β) را بیابید به طوری که چندجمله‌ای $P(x) = (10-3x)^\alpha - (36-14x)^\beta$ بر چندجمله‌ای $Q(x) = x^2 - 4$ بخش‌پذیر باشد.

سوال ۷۷: معمای ریشه‌های مشترک

دو چندجمله‌ای $P(x) = x^n - x + 2$ و $Q(x) = x^2 - a$ را در نظر بگیرید که در آن $n \geq 2$ یک عدد طبیعی و a یک پارامتر حقیقی است. اگر این دو چندجمله‌ای یک ریشه‌ی حقیقی مشترک داشته باشند، تمام مقادیر ممکن برای n را بیابید.

سوال ۷۸: معمای ریشه‌های صحیح

به ازای چند مقدار صحیح برای پارامتر m ، مجموعه‌ی تمام ریشه‌های معادله‌ی زیر، زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اعداد صحیح (\mathbb{Z}) است؟ (تهی نیز زیرمجموعه اعداد صحیح است)

$$x^4 - 9x^3 - 15x^2 + 4(m + 36)x + 4m^2 = 0$$

سوال ۷۹: معمای پارامتر و ریشه‌های صحیح

تمام مقادیر صحیح پارامتر m را بیابید که به ازای آن‌ها، معادله‌ی زیر حداقل یک ریشه‌ی صحیح برای x داشته باشد.

$$m^2 - 2x^2m + 10x^3 - 35x^2 + 50x - 24 = 0$$

سوال ۸۰: معمای تقارن لگاریتمی

دستگاه معادلات زیر را برای تمام زوج مرتب‌های حقیقی و مثبت (x, y) حل کنید:

$$\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{1}{3} \\ xy = 16 \end{cases}$$

سوال ۸۱: معادله با هویت پنهان

مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی $x > 0$ که در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند را بیابید.

$$\{\log_2 x\} + \{\log_2(1/x)\} = 1$$

(نماد $\{y\}$ نشان‌دهنده‌ی جزء کسری عدد y است که به صورت $y - [y]$ تعریف می‌شود).

سوال ۸۲: معادله‌ی پوچ

مجموعه‌ی جواب معادله‌ی زیر را در اعداد حقیقی بیابید.

$$\left[\log_{\sin x}(\sqrt{2}) \right] + \left[\log_{\cos x}(\sqrt{2}) \right] = 0$$

(نماد $[y]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد y است).

سوال ۸۳: نبرد توابع

تمام ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ بیابید.

$$x^{([\log_2(\sin x)] + [\log_2(\cos x)])} = \sin(2x)$$

سوال ۸۴: معمای پارامتر

مقدار ثابت و حقیقی a را طوری بیابید که حد زیر وجود داشته باشد و مقداری غیرصفر باشد. سپس مقدار آن حد را محاسبه کنید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin(x) - \sin(ax)}{x^3}$$

سوال ۸۵: کسینوس‌های زنجیره‌ای

حاصل حد زیر را بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cos(2x) \cos(3x)}{x^2}$$

سوال ۸۶: ماشین دقیق

حاصل حد زیر را بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) + 2 \sin(x) - 3x}{x^5}$$

سوال ۸۷: تفاوت بی‌نهایت کوچک‌ها

حاصل حد زیر را محاسبه کنید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos(x)) - \frac{x^7}{\lambda}}{x^6}$$

سوال ۸۸: ساختار پنهان

فرض کنید در عبارت زیر، ضرایب a, b, c اعداد حقیقی غیرصفر باشند.

$$L = \lim_{x \rightarrow b/a} \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}$$

اگر بدانیم که این حد از نوع مبهم $\frac{0}{0}$ است، حاصل حد، L ، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

سوال ۸۹: ساختار پنهان ۲

فرض کنید a, b, c سه عدد حقیقی متمایز و ناصفر هستند.

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a)}{x^2 - (a+1)x + a}$$

اگر این حد موجود باشد، تمام مقادیر ممکن برای حاصل حد، L ، را بیابید.

سوال ۹۰: معمای دو نقطه‌ی مبهم

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ به گونه‌ای است که هر دو حد زیر موجود و متناهی هستند:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x-1}$$

اگر بدانیم که $L_1 = 2L_2$ ، مقدار b را بیابید.

سوال ۹۱: مزدوج پنهان

حاصل حد زیر را بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} - 3}{x^2 - 1}$$

سوال ۹۲: نبرد ریشه‌ها

حاصل حد زیر را محاسبه کنید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5} - 3}{x^3 - 1}$$

سوال ۹۳: تله پی

حاصل حد زیر را بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos^2(x))}{x^2}$$

سوال ۹۴: تله پی زنجیره‌ای

حاصل حد زیر را محاسبه کنید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos(x) \cos(2x))}{x^2}$$

سوال ۹۵: آخرالزمان ریشه‌ها

حاصل حد زیر را بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - \sqrt[3]{\cos(x)}}{\sin^2(x)}$$

سوال ۹۶: نقاب (خارج از دبیرستان)

حاصل حد زیر را محاسبه کنید که در آن a یک ثابت حقیقی در بازه‌ی $(0, \pi/2)$ است.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^x(a) + \cos^x(a) - 2}{x}$$

سوال ۹۷: فشار بی نهایت

حاصل حد زیر را بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]^2 + [2x]^2 + \cdots + [nx]^2}{x^3}$$

که در آن n یک عدد طبیعی ثابت است و $[y]$ نشان دهنده ی جزء صحیح عدد y است.

سوال ۹۸: اری جزء صحیح

حاصل حد زیر را محاسبه کنید.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{[kx]}{n^2}$$

که در آن x یک عدد حقیقی ثابت است و $[y]$ نشان دهنده ی جزء صحیح عدد y است.

سوال ۹۹: حد دو چهره

حاصل حد زیر را (در صورت وجود) بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - [x])}{x - [x^2]}$$

(نماد $[y]$ نشان دهنده ی جزء صحیح عدد y است.)

سوال ۱۰۰: پژواک جزء کسری

حاصل حد زیر را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - [x])}{\tan(x^2 - [x^2])}$$

سوال ۱۰۱: کشف پارامتر

دو پارامتر حقیقی a و b به گونه‌ای هستند که حد زیر برقرار است. مقدار ab را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{1}{ax^2 - 4x + a + 3} = -\infty$$

سوال ۱۰۲: مسیر دوگانه

سه پارامتر حقیقی a, b, c به گونه‌ای هستند که حد زیر برقرار است.

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{x - c}{ax^2 - 4x + a + 3} = +\infty$$

اگر بدانیم که $b < 0$ و c یک عدد صحیح است، کمترین مقدار ممکن برای c چقدر است؟

سوال ۱۰۳: ریشه‌های تکراری

به ازای چند مقدار حقیقی برای پارامتر a ، یک عدد حقیقی b وجود دارد به طوری که حد زیر برقرار باشد؟

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^2 + 1}{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a} = -\infty$$

سوال ۱۰۴: معمای توان

برای هر یک از توان‌های $n \in \{3, 4, 6, 8\}$ ، بررسی کنید که آیا مقدار حقیقی و منحصر به فردی برای پارامتر a وجود دارد که به ازای آن، حد زیر برای یک b حقیقی برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{-1}{a - (x^2 - 4)^n} = +\infty$$

در نهایت، مجموع تمام مقادیر a که برای این توان‌ها پیدا می‌کنید را محاسبه کنید.

سوال ۱۰۵: نبرد سینوس و کسینوس

حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3}$$

سوال ۱۰۶: هویت پنهان کمان دو برابر

حاصل حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x^3}$$

سوال ۱۰۷: اتحاد گمشده

حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x) - \tan(3x) - \tan(2x)}{x^3}$$

سوال ۱۰۸: اتحاد تودرتو

حاصل حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x) - \tan(3x) - \tan(2x) - 3x^3}{x^5}$$

سوال ۱۰۹: مشتق پنهان

فرض کنید $g(x)$ تابع وارون تابع $f(x) = x^5 + 2x^3 + x - 4$ باشد. حاصل حد زیر را بیابید.

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

سوال ۱۱۰: نبرد وارون و جزء صحیح

فرض کنید $g(x)$ تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + x - 10$ باشد. حاصل حد زیر را (در صورت وجود) محاسبه کنید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lfloor g(x) \rfloor \cdot (g(x) - g(0))}{x}$$

(نماد $\lfloor y \rfloor$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد y است.)

سوال ۱۱۱: شرط پیوستگی سراسری

محدوده‌ی تمام مقادیر حقیقی پارامتر a را بیابید که به ازای آن‌ها، تابع زیر بر روی تمام اعداد حقیقی (\mathbb{R}) پیوسته باشد.

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + a \cos(x)}$$

سوال ۱۱۲: معمای پیوستگی و مشتق‌پذیری

دو پارامتر حقیقی a و b را طوری بیابید که تابع دوتکه‌ای زیر، در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق‌پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \tan(x) & x < \frac{\pi}{4} \\ a \sin(x) + b \cos(x) & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

سوال ۱۱۳: معمای ریشه‌های پنهان

تابع $f(x) = (x^2 + ax + b)[x^3]$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که این تابع در بازه‌ی $(0, \sqrt[3]{4})$ دقیقاً یک نقطه ناپیوستگی دارد. بیشترین مقدار ممکن برای پارامتر b کدام است؟

- نماد $[y]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد y است.

سوال ۱۱۴: شمارش ناپیوستگی‌های خنثی‌شده

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع زیر را در بازه‌ی باز $(0, 5)$ بیابید.

$$f(x) = (x^2 - 7x + 12) \left[\frac{x^2}{2} - x \right]$$

سوال ۱۱۵: حد بنیادی

حاصل حد زیر که در آن a یک ثابت حقیقی است، همواره کدام است؟

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a}$$

سوال ۱۱۶: حد زنجیره‌ای

حاصل حد زیر را بر حسب ثابت حقیقی a بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(\sin(x)) - \cos(\sin(a))}{x - a}$$

سوال ۱۱۷: معمای حد در مرزهای گسسته

تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است. اگر این تابع در تمام نقاط دامنه‌اش دارای حد باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 3 & 1 < [x] \leq 3 \\ 4ax + 3b & [x] \leq 1 \\ 4bx + a & [x] > 3 \end{cases}$$

سوال ۱۱۸: اتصال نرم

چهار پارامتر حقیقی a, b, c, d را به گونه‌ای بیابید که تابع سه ضابطه‌ای زیر در تمام دامنه‌اش مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x & x < 0 \\ ax^2 + bx + c & 0 \leq x < 1 \\ dx - 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

در نهایت، مقدار $a + b + c + d$ را محاسبه کنید.

سوال ۱۱۹: معمای رادیکال‌های تو در تو

حاصل حد زیر را بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sqrt{\cos(x)} \sqrt[3]{\cos(2x)} - 1}{\sin(x) \sin(2x)}$$

سوال ۱۲۰: نبرد اتحادها

حاصل حد زیر را محاسبه کنید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cos(2x) - \tan^2(x)}{x \sin(2x)}$$

سوال ۱۲۱: معمای حد در نقاط صحیح

به ازای عدد صحیح k ، تابع $f(x) = 2x[x] - k^2[-x]$ در $x = k$ حد دارد. مجموع مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟

سوال ۱۲۲: هارمونی اعداد

دو ثابت حقیقی a و b به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که تابع زیر، در تمام نقاط صحیح، پیوسته باشد. زوج مرتب (a, b) را بیابید.

$$f(x) = [x]^2 + a[x]^2 + b[x]$$

سوال ۱۲۳: حدی که وجود نداشت

مجموعه‌ی تمام مقادیر صحیح پارامتر k را بیابید که به ازای آن‌ها، تابع زیر در نقطه‌ی $x = 2$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \frac{[x]^2 - k[x]}{[x] - 2}$$

سوال ۱۲۴: توهم وجود

تمام مقادیر صحیح پارامتر k را بیابید که به ازای آنها، حد تابع زیر در نقطه‌ی $x = k$ موجود و متناهی باشد.

$$f(x) = \frac{[x]^3 - (k+2)[x]^2 + 2k[x]}{[x] - k}$$

سوال ۱۲۵: دروازه‌های دوگانه

پارامترهای حقیقی a و b را طوری بیابید که تابع زیر، هم در نقطه‌ی $x = 2$ و هم در نقطه‌ی $x = -2$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \frac{[x]^3 + a[x]^2 + b[x]}{[x]^2 - 4}$$

سوال ۱۲۶: نبرد ریشه‌ها و توان‌ها

اگر حد زیر موجود و برابر با $\frac{3}{4}$ باشد، مقدار عدد طبیعی n کدام است؟

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x^n} - 1}{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x - 1}}$$

سوال ۱۲۷: معمای تانژانت

مقدار ثابت و مثبت n به گونه‌ای است که حاصل حد زیر برابر با $\frac{3}{2}$ است. مقدار n را بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(nx) - \sin(nx)}{x^3}$$

سوال ۱۲۸: دستگاه حدود

دو پارامتر طبیعی و متمایز m و n در دو حد زیر صدق می‌کنند. این دو پارامتر را بیابید.

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^n} - 1}{x^m - 1} = 2$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{\sqrt[n]{x^m} - 1} = 12$$

سوال ۱۲۸: شمارش معکوس ناپیوستگی‌ها

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع زیر را در بازه‌ی $(\frac{1}{9}, 9)$ بیابید.

$$f(x) = (\log_2 x) \cdot [\log_2 x]$$

سوال ۱۲۹: معمای ضرایب گمشده

تابع $f(x) = (x^2 - ax + b)[\log_2 x]$ را در نظر بگیرید. این تابع در بازه‌ی $(1, 10)$ دقیقاً یک نقطه ناپیوستگی دارد. مجموع تمام مقادیر ممکن برای پارامتر a را بیابید.

سوال ۱۳۰: موازنه‌ی توان‌ها

اگر حد زیر موجود و حاصل آن برابر با $2\sqrt{2}$ باشد، مقدار $m - n$ را بیابید. (m و n اعداد حقیقی هستند)

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \tan x)^n}{(\cos x - \sin x)^m}$$

سوال ۱۳۱: مجموع زنجیره‌ای

اگر حاصل حد زیر برابر با $\frac{55}{4}$ باشد، مقدار عدد طبیعی n کدام است؟

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cos(2x) \cos(3x) \cdots \cos(nx)}{x^2}$$

سوال ۱۳۲: پیوستگی در مرز بی‌نهایت

اگر تابع دوضابطه‌ای زیر در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2a-4x}}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos(3x)}} & ; x < \frac{\pi}{4} \\ b - \sin x & ; x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

سوال ۱۳۳: حد رادیکال‌های متقاطع

حاصل حد زیر کدام است؟

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \sqrt{\frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 - \sin(2x)}}}$$

سوال ۱۳۴: معمای پیوستگی حاصل ضرب

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 1 \\ ax + b & ; x \geq 1 \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} ax + 2 & ; x < 2 \\ x + 4 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

اگر تابع حاصل ضرب $(f \cdot g)(x)$ روی تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد، بیشترین مقدار ممکن برای $a + b$ کدام است؟

سوال ۱۳۵: پیوستگی در مرز بی نهایت ۲

دو پارامتر حقیقی و ناصفر a و b به گونه ای هستند که تابع زیر در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است. مقدار ab را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{a - \sqrt{\sin x}}}{\cos x} & ; x \neq \frac{\pi}{4} \\ b & ; x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

سوال ۱۳۶: حد رادیکال های شیطانی

حاصل حد زیر را بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos(2x)}}{x^2}$$

سوال ۱۳۷: پیوستگی در قلب ماشین

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر تعریف شده اند:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & ; x \geq 2 \\ 2x - 3 & ; x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} ax + b & ; x \geq 1 \\ x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$

اگر تابع مرکب $(f \circ g)(x)$ روی تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد، تمام زوج مرتب های ممکن برای (a, b) را بیابید.

سوال ۱۳۸: پیوستگی وارون

تابع دوتکه‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & ; x \geq 2 \\ -x + 4 & ; x < 2 \end{cases}$$

مجموعه‌ی تمام مقادیر حقیقی a را بیابید که به ازای آن‌ها، تابع $g(x) = [f(x)] + [f^{-1}(x)] - a$ در نقطه‌ی $x = 3$ پیوسته باشد.

سوال ۱۳۹: حاصل ضرب همزیست

تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & ; x \geq a \\ -x+1 & ; x < a \end{cases}$$

اگر تابع $f(x)$ در دامنه‌اش یک به یک باشد و تابع جدید $h(x) = f(x) \cdot f^{-1}(x)$ در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته باشد، مقدار a را بیابید.

سوال ۱۴۰: عدد گمشده

تابع $h(x)$ برای تمام اعداد حقیقی نامنفی ($x \geq 0$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(x) = [x^3] + [\sqrt[3]{x}]$$

کوچکترین عدد صحیح مثبت k را بیابید که در برد تابع $h(x)$ قرار نداشته باشد. (به عبارت دیگر، کوچکترین $k \in \mathbb{Z}^+$ که به ازای هیچ $x \geq 0$ ، تساوی $h(x) = k$ برقرار نباشد.)

سوال ۱۴۱: جهان‌های موازی

تابع خطی $f(x) = ax + b$ یک تابع وارون‌پذیر است. نمودارهای $y = f(x)$ و $y = f^{-1}(x)$ دو خط راست متمایز و موازی هستند. اگر فاصله‌ی بین این دو خط برابر با $2\sqrt{2}$ باشد، تمام مقادیر ممکن برای پارامتر b را بیابید.

سوال ۱۴۲: معمای حد چندوجهی

اگر حد زیر موجود و حاصل آن یک عدد حقیقی ناصفر a باشد، مقدار a^n کدام است؟

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^3} - 1) - 2 \tan([x])}{x^n (1 - \cos(\sqrt{3x}))}$$

سوال ۱۴۳: تله‌ی بی‌نهایت کوچک

مقدار پارامترهای حقیقی n و $a \neq 0$ را طوری بیابید که حد زیر موجود و برابر با a باشد. سپس مقدار $\frac{n}{a}$ را محاسبه کنید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + \sin(x^2)} - \cos(x)}{x^n}$$

سوال ۱۴۴: موازنه‌ی جزء کسری

اگر حد زیر موجود و حاصل آن یک عدد حقیقی ناصفر a باشد، مقدار an را بیابید.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\{x\} - \tan(\{x\})}{x^n}$$

(نماد $\{y\}$ نشان‌دهنده‌ی جزء کسری عدد y است که به صورت $y - [y]$ تعریف می‌شود.)

سوال ۱۴۵: نبرد دو جبهه

حد زیر را در نظر بگیرید که در آن m, n, p, q اعداد حقیقی ناصفر هستند.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(mx) - \cos(nx)}{\cos(px) - \cos(qx)}$$

اگر بدانیم که $n^2 - m^2 = 8$ و حاصل حد، L ، برابر با ۲ است، مقدار عبارت $p^2 - q^2$ را بیابید.

سوال ۱۴۶: حد شبیحوار

تابع $f(x)$ به عنوان حد نقطه‌ای زیر تعریف می‌شود. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را در بازه‌ی بسته $[0, 2\pi]$ بیابید.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^n x)^n$$

(توجه: در اینجا n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، نه x).

سوال ۱۴۷: پیوستگی در نقطه‌ی گنگ

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in \mathbb{Q} \\ 2x - 1 & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در چند نقطه بر روی محور اعداد حقیقی، این تابع پیوسته است؟

سوال ۱۴۸: معمای حد ضربی

حد زیر را محاسبه کنید.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

(نماد \prod نشان‌دهنده‌ی حاصل ضرب جملات است.)

سوال ۱۴۹: رقص کسینوسی در بی نهایت

تابع $f(x)$ به صورت حد زیر تعریف شده است. مجموع طول بازه‌هایی که تابع $f(x)$ روی آن‌ها تعریف شده و پیوسته است را در بازه‌ی اصلی $[0, 2\pi]$ بیابید.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos x)^n$$

سوال ۱۵۰: پل بی نهایت

تابع $f(x)$ به صورت حد زیر تعریف شده است. این تابع در بازه‌ی $(0, \infty)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - \cos(\frac{\pi}{x})}{x^{2n} + \cos(\frac{\pi}{x})}$$

سوال ۱۵۱: جزء صحیح در افق

برای هر عدد حقیقی x ، تابع $f(x)$ به صورت حد نقطه‌ای زیر تعریف می‌شود. مقدار عبارت $f(\sqrt{2}) + f(\pi)$ را بیابید.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[nx]}{n}$$

(نماد $[y]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد y است.)

سوال ۱۵۲: معمای حد و علامت

حد زیر را در نظر بگیرید که در آن $a \neq 0$.

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - (2a-1)x^2 + (a^2-2a)x + a^2}{x^2 - a^2}$$

اگر حاصل حد، L ، یک عدد حقیقی باشد و در نامساوی $a \cdot L \leq 0$ صدق کند، بزرگترین مقدار ممکن برای a را بیابید.

سوال ۱۵۳: دامنه مثلثاتی

مجموعه‌ی تمام مقادیر حقیقی پارامتر m را بیابید که به ازای آن‌ها، دامنه‌ی تابع زیر، تمام اعداد حقیقی (\mathbb{R}) باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(x) + m \sin(x) + 2}}$$

سوال ۱۵۴: پیوستگی در آشیانه

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x} [x^2 - 2x] \right]$ در بازه‌ی $(a, 1]$ پیوسته است. بیشترین مقدار ممکن برای a کدام است؟

سوال ۱۵۵: دستگاه حدود

دو حد زیر را در نظر بگیرید که در آن $a \notin \{0, 1\}$.

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^2 - a^2}$$
$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x - 1}$$

اگر هر دو حد موجود باشند و رابطه‌ی $2L_1 = L_2$ برقرار باشد، مقدار پارامتر a را بیابید.

سوال ۱۵۶: مخرج خاموش

به ازای چند مقدار حقیقی برای پارامتر a ، تابع زیر در دامنه‌اش دقیقاً دو نقطه‌ی بحرانی (ریشه‌های مشتق) دارد؟

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 8x^2 + a}$$

سوال ۱۵۷: مارپیچ براکتی

تابع $g(x) = x^2 - 4x + 3$ را در نظر بگیرید. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع مرکب $f(x) = [g(x)]$ در بازه‌ی $[0, 4]$ را بیابید. (نمادهای $[y]$ و $\{y\}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح و جزء کسری عدد y هستند.)

سوال ۱۵۸: هارمونی ناپیوستگی

تابع $f(x) = \{x\} - \{-x\}$ را در نظر بگیرید. حد چپ این تابع در هر یک از نقاط ناپیوستگی‌اش روی خط $y = m$ و حد راست آن در همین نقاط روی خط $y = n$ قرار می‌گیرد. مقدار $m + n$ کدام است؟ (نماد $\{y\}$ نشان‌دهنده‌ی جزء کسری عدد y است.)

سوال ۱۵۹: پیوستگی خودخفته

تابع $f(x) = [2x] - 2[x]$ را در نظر بگیرید. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع مرکب $g(x) = f(f(x))$ در بازه‌ی $[0, 10]$ کدام است؟

سوال ۱۶۰: سایه‌ی سهمی

تابع $h(x) = [x^2] - [x]^2$ در تمام نقاط صحیح دارای پیوستگی راست است. مقدار حد چپ این تابع در نقطه‌ی $x = k$ (که k یک عدد صحیح و $k > 1$ است) برابر با m_k می‌باشد. اگر بدانیم $m_k = 20$ ، مقدار k کدام است؟

سوال ۱۶۱: مسابقه‌ی توابع

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $y = \max\{[x], \sin x\}$ در بازه‌ی بسته $[-3, 3]$ کدام است؟

سوال ۱۶۲: تفاضل قدرمطلق

تابع $h(x) = \max\{[x], \{x\}\} - \min\{[x], \{x\}\}$ را در نظر بگیرید. مجموع تمام مقادیر صحیح k در بازه‌ی $[-10, 10]$ که این تابع در آن‌ها پیوسته است، کدام است؟ (نمادهای $[y]$ و $\{y\}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح و جزء کسری عدد y هستند).

سوال ۱۶۳: دوئل ماکسیمم‌ها

مجموعه‌ی تمام مقادیر متمایزی که تابع زیر می‌تواند اختیار کند (برد تابع) را بیابید.

$$f(x) = [\max(x, -x)] - \max([x], [-x])$$

سوال ۱۶۴: پیوستگی پارامتری

مجموعه‌ی تمام مقادیر حقیقی پارامتر a را بیابید که به ازای آن‌ها، تابع زیر در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \min\{[x + a], x^2\}$$

سوال ۱۶۵: معمای پیوستگی زوج و فرد

تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & ; [x] \text{ باشد زوج} \\ |x - [x - a]| & ; [x] \text{ باشد فرد} \end{cases}$$

اگر این تابع روی تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد و بدانیم که a یک عدد ثابت است، تمام مقادیر ممکن برای $[a]$ را بیابید.

سوال ۱۶۶: تابع خودآگاه

تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & ; [f(x)] \text{ باشد زوج} \\ -x + 4 & ; [f(x)] \text{ باشد فرد} \end{cases}$$

اگر این تابع روی تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

سوال ۱۶۷: مارپیچ بازگشتی

تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & ; [x] \text{ باشد زوج} \\ x - 1 & ; [x] \text{ باشد فرد} \end{cases}$$

کوچکترین عدد صحیح $k > 1$ که در معادله $f(f(k)) = 1$ صدق می‌کند، کدام است؟

سوال ۱۶۸: معمای سه گانه

تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} [x] + a & ; [x] \cdot f(x) < 0 \\ x + b & ; [x] \cdot f(x) = 0 \\ [x] + c & ; [x] \cdot f(x) > 0 \end{cases}$$

اگر این تابع در تمام نقاط صحیح مثبت، پیوسته باشد، مقدار $a + b + c$ را بیابید.

سوال ۱۶۹: هزارتوی پیوستگی

تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1 & ; [x] \text{ باشد اول} \\ bx + c & ; [x] \text{ باشد مرکب} \\ x^2 & ; \text{در سایر حالات} \end{cases}$$

اگر این تابع در تمام نقاط صحیح $k \geq 2$ پیوسته باشد، مقدار $a + b + c$ را بیابید.

سوال ۱۷۰: پیوستگی دوگانه

دو تابع $f(x) = [x]^2 + ax$ و $g(x) = [x]^2 + b$ را در نظر بگیرید. تابع $h(x)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; [x] \text{ زوج باشد} \\ g(x) & ; [x] \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

اگر تابع $h(x)$ هم در نقطه‌ی $x = 2$ و هم در نقطه‌ی $x = 3$ پیوسته باشد، مقدار $a - b$ را بیابید.

سوال ۱۷۲: معمای پیوستگی زوج و فرد

فرض کنید n یک عدد طبیعی ثابت باشد و تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$f(x) = \begin{cases} x + n & ; [x] \text{ زوج باشد} \\ -x + n[x] & ; [x] \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

اگر این تابع در نقطه‌ی صحیح $x = k$ پیوسته باشد، تمام مقادیر ممکن برای k را بیابید.

سوال ۱۷۳: تابع آونگ

تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} ax - [x] & ; [x] \text{ زوج باشد} \\ bx + [x]^2 & ; [x] \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

اگر این تابع هم در نقطه‌ی $x = 1$ و هم در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

سوال ۱۷۴: ناپیوستگی پارامتری

فرض کنید n یک پارامتر حقیقی است.

$$f(x) = \begin{cases} \max\{n, x\} & ; [x] \text{ زوج باشد} \\ \min\{n, x\} & ; [x] \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

مجموعه‌ی تمام مقادیر n را بیابید که به ازای آن‌ها، تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد.

سوال ۱۷۲: ماریچ کسری

دو تابع $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \left[\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]$ را در نظر بگیرید. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع مرکب $y = (g \circ f)(x)$ در بازه $[0, 10]$ کدام است؟

سوال ۱۷۳: شبج گسسته

دو تابع $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید. مجموع مقادیر تابع مرکب $h(x) = (g \circ f)(x)$ در نقاط $x = 0, 5$ و $x = 5$ کدام است؟

سوال ۱۷۴: پژواک دره

دو تابع $f(x) = (x - 2)^2$ و $g(u) = 2[u] - u$ را در نظر بگیرید. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع مرکب $h(x) = (g \circ f)(x)$ در بازه $[0, 5]$ کدام است؟

سوال ۱۷۵: پارادوکس تقارن

دو تابع پیوسته $g_1(x)$ و $g_2(x)$ را در نظر بگیرید. تابع $h(x)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$h(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{زوج باشد} \\ g_2(x) & \text{فرد باشد} \end{cases}$$

اگر تابع $h(x)$ بر روی تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

$$(1) \quad g_1(k) = g_2(k) \text{ برای تمام } k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad g_1(x) = g_2(x) \text{ برای تمام } x \in \mathbb{R}$$

$$(3) \quad g_1(1) = g_2(1)$$

$$(4) \quad \text{چنین توابعی وجود ندارند}$$

سوال ۱۷۶: آستانه‌ی وارون

تابع $f(x) = x^2$ را برای $x \geq 0$ و وارون آن $f^{-1}(x)$ را در نظر بگیرید. تابع $h(x)$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$h(x) = \begin{cases} a[f(x)] & ; [f(x)] > [x] \\ b[x] & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر تابع $h(x)$ در نقطه‌ی $x = \sqrt{2}$ پیوسته باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

سوال ۱۷۷: هزارتوی تودرتو

تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید. تابع جدید $h(x)$ به صورت $h(x) = f([x] + [f^{-1}(x)])$ تعریف شده است. این تابع در بازه‌ی $(0, 100)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

سوال ۱۷۸: خنثی‌سازی بازتابی

تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} x - a & ; x \geq a \\ 1 & ; x < a \end{cases}$$

اگر تابع $h(x) = f(x) \cdot f(6 - x)$ بر روی تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد، مقدار ثابت a کدام است؟

سوال ۱۷۹: چاه جاذبه

دو تابع $f(x)$ و $g(u)$ را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & ; x \geq 2 \\ 2x + 1 & ; x < 2 \end{cases}$$
$$g(u) = u^2 - au + 1$$

اگر تابع مرکب $h(x) = (g \circ f)(x)$ در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار پارامتر a را بیابید.

سوال ۱۸۰: کسر قابل تعمیر

دو تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x - a & ; x \geq 3 \\ a - x & ; x < 3 \end{cases}$$
$$g(x) = x^2 - 9$$

اگر حد تابع $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ در نقطه‌ی $x = a$ موجود و متناهی باشد، مقدار ثابت a کدام است؟

سوال ۱۸۱: پژواک‌های زنجیره‌ای

تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x < 1 \\ 4 - x & ; 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع مرکب $h(x) = (f \circ f)(x)$ در دامنه‌اش کدام است؟

سوال ۱۸۲: مرز پیوستگی

تابع $f(x) = [\log_{\delta} x] + 2$ در بازه $(\delta, k^2 + 10)$ پیوسته است. کدام یک از مقادیر زیر برای k نمی‌تواند صحیح باشد؟

(۱) ± 4

(۲) $\pm \sqrt{14}$

(۳) ± 3

(۴) $\pm \sqrt{7}$

سوال ۱۸۳: تعادل وارون نزولی

تابع $f(x) = \log_r(a - x)$ را در نظر بگیرید. تابع جدید $h(x)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$h(x) = [x] + [f^{-1}(x)]$$

که در آن $f^{-1}(x)$ تابع وارون $f(x)$ است. اگر تابع $h(x)$ در نقطه $x = 3$ پیوسته باشد و مقدار آن در این نقطه برابر با $h(3) = 12$ باشد، مقدار ثابت a کدام است؟

سوال ۱۸۴: معمای اعداد روی تخته

چند عدد صحیح را روی تخته نوشته‌ایم. این اعداد سه خاصیت منحصر به فرد زیر را دارند:

(i) یکی از آن‌ها عدد ۲۰۱۸ است.

(ii) حاصل جمع تمام این اعداد برابر با ۲۰۱۸ است.

(iii) حاصل ضرب تمام این اعداد نیز برابر با ۲۰۱۸ است.

تعداد این اعداد چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

سوال ۱۸۵: معمای ریشه‌های صحیح

یک چندجمله‌ای $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ با ضرایب صحیح را در نظر بگیرید. این چندجمله‌ای دو ویژگی دارد:

- (i) تمام n ریشه‌ی آن، اعداد صحیح و متمایز هستند.
 - (ii) حاصل جمع تمام ضرایب آن (شامل ضریب ۱ جمله‌ی x^n) برابر با -4 است و حاصل ضرب ریشه‌های آن برابر با -6 است.
- مقدار n (درجه‌ی چندجمله‌ای) را بیابید.
-

سوال ۱۸۶: معمای میانگین‌های ترکیبی

چهار عدد مثبت داده شده‌اند. در هر مرحله، سه تا از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم، میانگین حسابی آن‌ها را به دست می‌آوریم و آن را با چهارمین عدد جمع می‌کنیم. این کار به چهار روش مختلف انجام شده و اعداد به دست آمده به ترتیب عبارت‌اند از ۱۷، ۲۱، ۲۳ و ۲۹. بزرگ‌ترین عدد از چهار عدد اولیه چیست؟

سوال ۱۸۷: معمای میانگین‌های آمیخته

چهار عدد مثبت، چهار جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهند. ما این چهار عدد را به سه روش ممکن به دو جفت تقسیم می‌کنیم. برای هر تقسیم‌بندی، میانگین حسابی یک جفت را در میانگین هندسی جفت دیگر ضرب می‌کنیم. سه حاصل ضرب به دست آمده عبارتند از:

$$10, \quad 6\sqrt{2}, \quad 9\sqrt{2}$$

آن چهار عدد را بیابید.

سوال ۱۸۸: معمای ضرایب هندسی

یک دنباله‌ی درجه دوم ناشناخته به فرم $T(n) = an^2 + bn + c$ را در نظر بگیرید. این دنباله دو ویژگی ساختاری بسیار خاص دارد:

(i) ضرایب این دنباله، یعنی a, b, c ، به همین ترتیب، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله هندسی هستند.

(ii) دنباله‌ی تفاضل‌های مرتبه اول آن، که با $D(n) = T(n+1) - T(n)$ تعریف می‌شود، دارای دو جمله‌ی اول $D(1) = 6$ و $D(2) = 8$ است.

مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی اصلی، یعنی $S_{10} = \sum_{n=1}^{10} T(n)$ ، را بیابید.

سوال ۱۸۹: دنباله در کمین

مجموعه‌ی $M = \{100, 101, 102, \dots, 150\}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ۲۰ عضو از این مجموعه را انتخاب کنیم به طوری که این ۲۰ عدد، جملات متوالی یک دنباله حسابی را تشکیل دهند. اگر قدر نسبت این دنباله یک عدد صحیح مثبت باشد، این انتخاب به چند طریق ممکن است؟

سوال ۱۹۰: دنباله‌ی حسابگر

مجموعه‌ی $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم پنج عضو از این مجموعه را انتخاب کنیم که علاوه بر تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت مثبت، شرط زیر را نیز برآورده کنند:

مجموع این پنج عدد دقیقاً برابر با ۱۵۰ باشد.

این کار به چند طریق ممکن است؟

سوال ۱۹۱: دنباله‌ی مجموعه‌های بازگشتی

یک دنباله از مجموعه‌ها، (S_n) ، برای $n \geq 0$ به صورت بازگشتی زیر تعریف شده است:

• پایه‌ی بازگشت: $S_0 = \{0\}$

• قدم بازگشتی: برای هر $n \geq 0$ ، مجموعه‌ی S_{n+1} از تمام اعضای فرم $x+1$ و $x+2$ تشکیل شده است، که در آن x یکی از اعضای مجموعه‌ی S_n است. به عبارت دیگر:

$$S_{n+1} = \{y \mid x \in S_n, y = x+1 \text{ یا } y = x+2\}$$

حال، دنباله‌ی عددی (C_n) را به عنوان تعداد اعضای مشترک بین S_n و مجموعه‌ی اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۳ تعریف می‌کنیم. یعنی:

$$C_n = |S_n \cap \{3, 6, 9, 12, \dots\}|$$

مقدار جمله‌ی صدم این دنباله، یعنی C_{100} ، را بیابید.

سوال ۱۹۲: ماتریس حسابی-هندسی

ماتریس 3×3 زیر را با درایه‌های حقیقی در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} a & 8 & b \\ c & d & 6 \\ 27 & e & f \end{pmatrix}$$

این ماتریس دو ویژگی دارد:

(i) هر سطر آن یک دنباله‌ی حسابی را تشکیل می‌دهد.

(ii) هر ستون آن یک دنباله‌ی هندسی را تشکیل می‌دهد.

مجموع تمام مقادیر ممکن برای حاصل ضرب ab کدام است؟

سوال ۱۹۳: معمای ماتریس محصور

ماتریس 4×4 زیر با درایه‌های حقیقی و مثبت داده شده است:

$$A = \begin{pmatrix} x & ۲ & ۱ & y \\ ۸ & a & b & ۲ \\ ۴ & c & d & ۱ \\ z & ۱ & ۲ & w \end{pmatrix}$$

این ماتریس دارای یک ساختار دوگانه و تو در تو است:

- هسته مرکزی: ماتریس 2×2 مرکزی (شامل درایه‌های a, b, c, d) یک "بلوک هندسی" است؛ یعنی هر سطر و هر ستون آن یک دنباله‌ی هندسی را تشکیل می‌دهد.
- قاب بیرونی: چهار درایه‌ی واقع در هر یک از چهار ضلع ماتریس (سطر اول، سطر آخر، ستون اول و ستون آخر) یک دنباله‌ی حسابی را تشکیل می‌دهند.

مقدار دترمینان ماتریس هسته‌ی مرکزی، یعنی $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را بیابید.

سوال ۱۹۴: ماتریس با ساختار شطرنجی

ماتریس 3×3 زیر با درایه‌های حقیقی و مثبت داده شده است:

$$A = \begin{pmatrix} a & ۴ & c \\ d & ۱۲ & f \\ g & ۳۶ & ۵۰ \end{pmatrix}$$

ویژگی‌های ساختاری: این ماتریس دارای یک ساختار "شطرنجی" از دنباله‌هاست:

- سطرهاى اول و سوم (R_1, R_3) دنباله‌های حسابی هستند.
 - سطر دوم (R_2) یک دنباله‌ی هندسی است.
 - ستون‌های اول و سوم (C_1, C_3) دنباله‌های حسابی هستند.
 - ستون دوم (C_2) یک دنباله‌ی هندسی است.
- مطلوب است: مجموع تمام مقادیر ممکن برای درایه‌ی a را بیابید.
-

سوال ۱۹۵: معمای تقارن مرکزی

یک ماتریس 3×3 مانند $A = (a_{ij})$ با درایه‌های حقیقی مثبت را در نظر بگیرید که دارای همان ساختار "شطرنجی" سوال قبل است:

- سطرهای ۱ و ۳ حسابی هستند؛ سطر ۲ هندسی است.
 - ستون‌های ۱ و ۳ حسابی هستند؛ ستون ۲ هندسی است.
- فرض کنید دنباله‌های هندسی (سطر ۲ و ستون ۲) غیرثابت هستند (یعنی قدر نسبت آن‌ها ۱ نیست). ثابت کنید که "صلیب مرکزی" این ماتریس، که از درایه‌های $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}$ تشکیل شده است، دارای یک تقارن محوری است. به عبارت دیگر، ثابت کنید که یا حالت زیر برقرار است:

$$(a_{12} = a_{21} \text{ و } a_{32} = a_{23}) \text{ (تقارن روی قطر اصلی)}$$

و یا حالت زیر برقرار است:

$$(a_{12} = a_{23} \text{ و } a_{32} = a_{21}) \text{ (تقارن روی قطر فرعی)}$$

سوال ۱۹۶: دنباله‌ی کسرهای فیبوناچی

دنباله‌ی بازگشتی (a_n) با رابطه‌ی $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ و جمله‌ی اول $a_1 = 1$ تعریف شده است. جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟

سوال ۱۹۸: حاصل ضرب تلسکوپی

دنباله‌ی بازگشتی $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ با شرط $a_1 = -1$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب صد جمله‌ی اول این دنباله، $\prod_{i=1}^{100} a_i$ ، کدام است؟

سوال ۲۰۰: دنباله‌ی فرما

دنباله‌ی (x_n) با رابطه‌ی بازگشتی $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ و جمله‌ی اول $x_0 = 3$ تعریف شده است. باقی‌مانده‌ی تقسیم جمله‌ی x_{2024} بر جمله‌ی x_2 چقدر است؟

سوال ۲۰۱: دنباله‌های در هم تنیده (نیازمند دانش مختلط)

دو دنباله‌ی (a_n) و (b_n) با شروع از $a_0 = 1, b_0 = 1$ و روابط بازگشتی زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

کوچکترین عدد طبیعی $k > 0$ را بیابید که در شرط $a_k^2 + b_k^2 > 1,000,000$ صدق کند.

راهنمایی: یک دنباله‌ی مختلط به فرم $z_n = a_n + ib_n$ تعریف کنید.

سوال ۲۰۱: معمای دنباله‌های زوج

دو دنباله‌ی (a_n) و (b_n) برای $n \geq 0$ با شرایط اولیه‌ی $a_0 = 1$ و $b_0 = 3$ و روابط بازگشتی در هم تنیده‌ی زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$$

مقدار a_{10} را بیابید.

راهنمایی (روش خلاقانه):

- دنباله‌ی جدیدی به نام $S_n = a_n + b_n$ تعریف کنید. سعی کنید یک رابطه‌ی بازگشتی ساده برای S_n پیدا کنید.
 - دنباله‌ی دیگری به نام $D_n = a_n - b_n$ تعریف کنید و رابطه‌ی بازگشتی آن را نیز بیابید.
-

سوال ۲۰۱: معمای دنباله‌ی درجه دوم با اندیس‌های معکوس

فرض کنید (T_n) یک دنباله‌ی درجه دوم با فرم کلی $T(n) = an^2 + bn + c$ باشد، که در آن a, b, c ضرایب حقیقی و $a \neq 0$ هستند.

این دنباله سه ویژگی زیر را برآورده می‌کند:

(i) n و m دو عدد طبیعی متمایز و ناصفر هستند.

(ii) مقدار جمله‌ی m -ام برابر با n است (یعنی $T_m = n$).

(iii) مقدار جمله‌ی n -ام برابر با m است (یعنی $T_n = m$).

(iv) مقدار جمله‌ی صفرم برابر با صفر است (یعنی $T_0 = 0$).

مطلوب است: ثابت کنید که مقدار جمله‌ی $(m+n)$ -ام، یعنی T_{m+n} ، تنها به m و n وابسته است و مقدار آن را بیابید.

سوال ۲۰۲: معمای دنباله‌های همزاد

یک دنباله‌ی حسابی (a_n) با قدر نسبت d و یک دنباله‌ی هندسی (b_n) با قدر نسبت r (و جملات مثبت) را در نظر بگیرید. این دو دنباله سه ویژگی ساختاری بسیار خاص دارند:

(i) رابطه‌ی همزادی: برای یک پایه‌ی ثابت و حقیقی $k > 1$ ، همواره رابطه‌ی $a_n = \log_k(b_n)$ برقرار است.

(ii) رابطه‌ی اندیس معکوس: برای دو عدد طبیعی متمایز و ناصفر m و n ، داریم:

$$b_m = n \quad \text{و} \quad b_n = m$$

(iii) شرط ساختاری: قدر نسبت دنباله‌ی حسابی، خود برابر با پایه‌ی لگاریتم است. یعنی $d = k$.

مطلوب است: ثابت کنید که چنین ساختاری تنها به ازای یک مقدار منحصر به فرد برای قدر نسبت دنباله هندسی (r) امکان‌پذیر است و آن مقدار را بیابید.

سوال ۲۰۴: پله‌های خود-مرجع

یک دنباله‌ی حسابی (a_n) با قدر نسبت d و یک دنباله‌ی هندسی (b_n) با قدر نسبت r در یک رابطه‌ی ساختاری پیچیده قرار دارند:

(i) پل نمایی: جملات دنباله‌ی هندسی از روی جملات دنباله‌ی حسابی ساخته می‌شوند
$$b_n = d^{a_n}$$

(ii) پل بازگشتی: قدر نسبت دنباله‌ی هندسی نیز به قدر نسبت دنباله‌ی حسابی وابسته است:
$$r = d^d$$

اگر بدانیم که $a_1 = \log_2(3)$ و $b_1 = 9$ است، تمام مقادیر ممکن برای d را بیابید.

سوال ۲۰۵: موج کوانتومی

یک دنباله‌ی حسابی از زوایا (θ_n) با جمله‌ی اول $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ و قدر نسبت d داده شده است. دنباله‌ی جدیدی به نام (B_n) را با استفاده از تابع جزء صحیح به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_n = [10 \cdot \sin(\theta_n)]$$

اگر بدانیم که دنباله‌ی (B_n) خود یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت صحیح و غیرصفر D است و علاوه بر این، یک رابطه‌ی خود-ارجاع بین این دو دنباله برقرار است:

$$d = D \cdot \frac{\pi}{3}$$

مقدار جمله‌ی سوم دنباله‌ی براکتی، یعنی B_3 ، را بیابید.

سوال ۲۰۷: تعادل حسابی

در یک دنباله‌ی حسابی با $2N$ جمله (که در آن N یک عدد طبیعی ثابت است)، مجموع جملات با اندیس زوج، دقیقاً دو برابر مجموع جملات با اندیس فرد است.

اگر قدر نسبت این دنباله d و جمله‌ی اول آن a_1 باشد، نسبت $\frac{a_1}{d}$ را بر حسب N بیابید.

سوال ۲۰۸: دوگانه‌ی هندسی-لگاریتمی (نیازمند به دانش عدد نپر)

دو دنباله‌ی نامتناهی، یکی حسابی (a_n) با قدر نسبت d و دیگری هندسی (b_n) با قدر نسبت r (و جملات مثبت)، با رابطه‌ی $a_n = \ln(b_n)$ به یکدیگر متصل هستند.

می‌دانیم که برای دنباله‌ی هندسی (b_n) ، حد نسبت مجموع جملات زوج به مجموع جملات فرد، برابر با e^2 است. به عبارت دیگر:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_2 + b_4 + \dots + b_{2N}}{b_1 + b_3 + \dots + b_{2N-1}} = e^2$$

مقدار قدر نسبت دنباله‌ی حسابی (d) چقدر است؟

سوال ۲۰۹: پژواک کوانتومی

دنباله‌ی (T_n) به صورت $T_n = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ تعریف شده است.

• S_O را برابر با مجموع ۱۰۰ جمله‌ی اول با اندیس فرد در نظر بگیرید:

$$(S_O = T_1 + T_3 + \dots + T_{199})$$

• S_E را برابر با مجموع ۱۰۰ جمله‌ی اول با اندیس زوج در نظر بگیرید:

$$(S_E = T_2 + T_4 + \dots + T_{200})$$

مقدار دقیق نسبت $\frac{S_E}{S_O}$ را محاسبه کنید.

سوال ۲۱۰: دوگانه‌ی هیبریدی

یک دنباله‌ی ترکیبی (T_n) به صورت $T_n = a_n + b_n$ تعریف شده است، که در آن:

• (a_n) یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a_1 = 10$ و قدر نسبت $d = 2$ است.

• (b_n) یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $b_1 = 1$ و قدر نسبت r است.

حدِ نسبتِ مجموعِ جملاتِ زوج به فردِ دنباله‌ی (T_n) برابر با ۹ است:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T_2 + T_4 + \cdots + T_{2N}}{T_1 + T_3 + \cdots + T_{2N-1}} = 9$$

تمام مقادیر ممکن برای قدر نسبت r را بیابید.
