ترجمه پاسخنامه مجموعه مسائل ۵.۲

صفحه ۹۲

مجموعه مسائل ۵.۲، صفحه ۹۲

۱. $A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱/۴ \\ ۱/۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱/۲ & ۰ \\ -۱ & ۱/۲ \end{bmatrix}$ و $C^{-۱} = \begin{bmatrix} ۷ & -۴ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix}$.

۲. برای ماتریس اول، یک جابجایی ساده سطرها $P^۲ = I$ را نتیجه می‌دهد، بنابراین $P^{-۱} = P$. برای ماتریس دوم، $P^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$. همیشه $P^{-۱}$ برابر با «ترانهاده»ی P است که در بخش ۷.۲ خواهد آمد.

۳. معادلات به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ -۰/۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۲ \\ ۰/۱ \end{bmatrix}$ هستند، بنابراین $A^{-۱} = \frac{۱}{۱۰} \begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$. این سوال $AA^{-۱} = I$ را ستون به ستون حل کرد که ایده اصلی حذف گاوس_جردن است. برای یک ماتریس متفاوت مانند $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، می‌توانستید ستون اول $A^{-۱}$ را پیدا کنید اما نه ستون دوم را - بنابراین A منفرد (بدون معکوس) خواهد بود.

۴. معادلات $x + ۲y = ۱$ و $۳x + ۶y = ۰$ هستند. جوابی وجود ندارد زیرا ۳ برابر معادله اول، $۳x + ۶y = ۳$ را نتیجه می‌دهد.

۵. یک ماتریس بالا مثلثی U که در آن $U^۲ = I$ باشد، برای هر مقدار a به صورت $U = \begin{bmatrix} ۱ & a \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ است. و همچنین $-U$.

۶. (الف) $AB = AC$ را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب کنید تا $B = C$ به دست آید (زیرا A معکوس‌پذیر است). (ب) تا زمانی که $B - C$ به شکل $\begin{bmatrix} x & y \\ -x & -y \end{bmatrix}$ باشد، برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ خواهیم داشت $AB = AC$.

۷. (الف) در $Ax = (۱, ۰, ۰)$، معادله ۱ + معادله ۲ - معادله ۳ برابر با $۱ = ۰$ است. (ب) سمت راست باید در $b_۱ + b_۲ = b_۳$ صدق کند. (ج) سطر ۳ به یک سطر صفر تبدیل می‌شود — محور سوم وجود ندارد.

۸. (الف) بردار $x = (۱, ۱, -۱)$ معادله $Ax = ۰$ را حل می‌کند. (ب) پس از حذف، ستون‌های ۱ و ۲ به صفر ختم می‌شوند. در نتیجه ستون ۳ که برابر با ستون ۱ + ۲ (ستون ۲) است نیز چنین است: محور سوم وجود ندارد.

۹. بله، B معکوس‌پذیر است (A فقط در یک ماتریس جایگشت P ضرب شده است). اگر سطرهای ۱ و ۲ از A را برای رسیدن به B جابجا کنید، ستون‌های ۱ و ۲ از $A^{-۱}$ را برای رسیدن به $B^{-۱}$ جابجا می‌کنید. در نماد ماتریسی، $B = PA$ دارای $B^{-۱} = A^{-۱}P^{-۱} = A^{-۱}P$ برای این P است.

۱۰. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1/5 \\ \cdot & \cdot & 1/4 & \cdot \\ \cdot & 1/3 & \cdot & \cdot \\ 1/2 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & \cdot & \cdot \\ -4 & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 6 & -5 \\ \cdot & \cdot & -7 & 6 \end{bmatrix}$ (هر بلوک از B را معکوس کنید).

۱۱. (الف) اگر $B = -A$ باشد، آنگاه قطعاً $A+B =$ ماتریس صفر، معکوس‌پذیر نیست. (ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix}$ هر دو منفرد هستند اما $A + B = I$ معکوس‌پذیر است.

۱۲. $C = AB$ را از سمت چپ در A^{-1} و از سمت راست در C^{-1} ضرب کنید. آنگاه $A^{-1} = BC^{-1}$.

۱۳. $M^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ بنابراین از سمت چپ در C و از سمت راست در A ضرب کنید: $B^{-1} = CM^{-1}A$.

۱۴. $B^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$: ستون دوم A^{-1} را از ستون اول آن کم کنید.

۱۵. اگر A یک ستون صفر داشته باشد، BA نیز چنین است. در این صورت $BA = I$ غیرممکن است. A^{-1} وجود ندارد.

۱۶. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & \cdot \\ \cdot & ad-bc \end{bmatrix}$. معکوس هر ماتریس برابر با دیگری تقسیم بر $ad - bc$ است.

۱۷. $E = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ \cdot & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} = E_{32}E_{31}E_{21}$. ترتیب را معکوس کرده و علامت‌ها را عوض کنید تا معکوس‌ها به دست آیند: $E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$ $L = E^{-1}$. توجه کنید که با ضرب معکوس‌ها در این ترتیب، ۱ ها بدون تغییر باقی می‌مانند.

۱۸. $A^2B = I$ را می‌توان به صورت $A(AB) = I$ نیز نوشت. بنابراین، A^{-1} برابر با AB است.

۱۹. درایه (۱،۱) نیاز به $4a - 3b = 1$ دارد؛ درایه (۲،۱) نیاز به $2b - a = 0$ دارد. آنگاه $b = 1/5$ و $a = 2/5$. برای حالت ۵×۵، $5a - 4b = 1$ و $a = 2b$ نتیجه می‌دهد $b = 1/6$ و $a = 2/6$.

۲۰. $A \times \text{ones}(4, 1) = A$(ستون یک‌ها) برابر با بردار صفر است، بنابراین A نمی‌تواند معکوس‌پذیر باشد.

۲۱. شش ماتریس از شانزده ماتریس ۰-۱ معکوس‌پذیر هستند: P ،I و هر چهار ماتریسی که سه درایه ۱ دارند.

۲۲. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & \cdot \\ 2 & 7 & \cdot & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \cdot & 7 & -3 \\ \cdot & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & \cdot \\ 3 & 9 & \cdot & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & \cdot \\ \cdot & -3 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \cdot & -3 & 4/3 \\ \cdot & 1 & 1 & -1/3 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$.

۲۳. $[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 2 & \cdot & \cdot & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdot & \cdot & 3/4 & -1/2 & 1/4 \\ \cdot & 1 & \cdot & -1/2 & 1 & -1/2 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$.

۲۴. $$\begin{bmatrix}۱&a&b&|&۱&۰&۰\\۰&۱&c&|&۰&۱&۰\\۰&۰&۱&|&۰&۰&۱\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۱&a&۰&|&۱&۰&-b\\۰&۱&۰&|&۰&۱&-c\\۰&۰&۱&|&۰&۰&۱\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۱&۰&۰&|&۱&-a&ac-b\\۰&۱&۰&|&۰&۱&-c\\۰&۰&۱&|&۰&۰&۱\end{bmatrix}.$$

۲۵. $\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۳&-۱&-۱\\-۱&۳&-۱\\-۱&-۱&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۱&۱\\۱&۲&۱\\۱&۱&۲\end{bmatrix}^{-۱}$ ؛ $\begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۱&-۱\\-۱&۲&-۱\\-۱&-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\end{bmatrix}$ بنابراین $B^{-۱}$ وجود ندارد.

۲۶. $E_{۲۱}A=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۲\end{bmatrix}$. $E_{۱۲}E_{۲۱}A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۲\end{bmatrix}$. با ضرب در $D=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱/۲\end{bmatrix}$ به $DE_{۱۲}E_{۲۱}A=I$ می‌رسیم. آنگاه $A^{-۱}=DE_{۱۲}E_{۲۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۶&-۲\\-۲&۱\end{bmatrix}$.

۲۷. $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\-۲&۱&-۳\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ (به تغییر علامت‌ها توجه کنید)؛ $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲&-۱&۰\\-۱&۲&-۱\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}$.

۲۸. $$\begin{bmatrix}۰&۲&|&۱&۰\\۲&۲&|&۰&۱\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۲&۲&|&۰&۱\\۰&۲&|&۱&۰\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۲&۰&|&-۱&۱\\۰&۲&|&۱&۰\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۱&۰&|&-۱/۲&۱/۲\\۰&۱&|&۱/۲&۰\end{bmatrix}.$$
این $[I|A^{-۱}]$ است: جابجایی سطرها قطعاً در روش گاوس‌ـجردن مجاز است.

۲۹. (الف) صحیح (اگر A یک سطر صفر داشته باشد، هر AB نیز چنین است و $AB=I$ غیرممکن است). (ب) غلط (ماتریس با تمام درایه‌های یک، حتی با ۱ روی قطر، منفرد است). (ج) صحیح (معکوس $A^{-۱}$ برابر A و معکوس $A^{۲}$ برابر $(A^{-۱})^{۲}$ است).

۳۰. حذف، محورهای a، a-b و a-b را تولید می‌کند. $A^{-۱}=\frac{۱}{a(a-b)}\begin{bmatrix}a&-b&۰\\-a&a&۰\\۰&-a&a\end{bmatrix}$. ماتریس C اگر $c=۰$ یا $c=۷$ یا $c=۲$ باشد، معکوس‌پذیر نیست.

۳۱. $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&-۱&۱&-۱\\۰&۱&-۱&۱\\۰&۰&۱&-۱\\۰&۰&۰&۱\end{bmatrix}$ و $x=A^{-۱}\begin{bmatrix}۱\\۱\\۱\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\۰\\۰\\۱\end{bmatrix}$. زمانی که ماتریس مثلثی A روی قطرهایش به تناوب ۱ و ‎-۱ داشته باشد، $A^{-۱}$ روی قطر و اولین اَبَرقطر (superdiagonal) خود ۱ دارد.

۳۲. $x=(۱,۱,\ldots,۱)$ دارای $x=Px=Qx$ است بنابراین $(P-Q)x=۰$. ماتریس‌های جایگشت این بردار تمام‌ـیک را تغییر نمی‌دهند.

۳۳. $\begin{bmatrix}I&۰\\-C&I\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}A^{-۱}&۰\\-D^{-۱}CA^{-۱}&D^{-۱}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-D&I\\I&۰\end{bmatrix}$.

۳۴. A می‌تواند با درایه‌های قطری صفر معکوس‌پذیر باشد (مثالی برای پیدا کردن). B منفرد است زیرا مجموع هر سطر آن صفر است. بردار تمام‌ـیک x دارای $Bx=۰$ است.

۳۵. معادله $LDL^TD=I$ می‌گوید که $LD=\mathrm{pascal}(۴,۱)$ معکوس خودش است.

۳۶. دستور hilb(۶) در متلب ماتریس دقیق هیلبرت را نمی‌سازد زیرا کسرها گرد می‌شوند. بنابراین inv(hilb(۶)) نیز معکوس دقیق آن نیست.

۳۷. سه ماتریس پاسکال دارای $P = LU = LL^T$ هستند و سپس $inv(P) = inv(L^T) \times inv(L)$.

۳۸. معادله $Ax = b$ زمانی که $A = \text{ones}(۴,۴)$ (منفرد) و $b = \text{ones}(۴,۱)$ باشد، جواب‌های زیادی دارد. دستور $A \setminus b$ در متلب کوتاه‌ترین جواب یعنی $x = (۱,۱,۱,۱)/۴$ را انتخاب می‌کند. این تنها جوابی است که ترکیبی از سطرهای A است (بعداً از «شبه‌معکوس» $A^+ = \text{pinv}(A)$ به دست می‌آید که جایگزین $A^{-۱}$ در زمان منفرد بودن A می‌شود). هر برداری که $Ax = ۰$ را حل کند، می‌تواند به این جواب خاص x اضافه شود.

۳۹. معکوس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -a & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -b & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -c \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ برابر است با $A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & a & ab & abc \\ ۰ & ۱ & b & bc \\ ۰ & ۰ & ۱ & c \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. (این مثال خوبی برای فرمول کهاد $A^{-۱} = C^T / \det A$ در بخش ۳.۵ خواهد بود).

۴۰. در این ترتیب ضرب، ضرایب a، b، c، d، e، f در حاصلضرب بدون تغییر باقی می‌مانند (این برای تجزیه $A = LU$ در بخش ۶.۲ مهم است).

۴۱. ماتریس ۴×۴ که هنوز $T_{۱۱} = ۱$ دارد، دارای محورهای ۱،۱،۱،۱ است؛ برعکس کردن به $T^* = UL$ باعث می‌شود $T^*_{۴۴} = ۱$ شود. $T = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $T^{-۱} = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$.

۴۲. معادلات $Cx = b$ را جمع کنید تا $۰ = b_۱ + b_۲ + b_۳ + b_۴$ به دست آید. بنابراین C منفرد است. همین امر برای $Fx = b$ نیز صادق است.

۴۳. محورهای بلوکی A و $S = D - CA^{-۱}B$ هستند (و $d - cb/a$ محور دوم صحیح یک ماتریس معمولی ۲×۲ است). مسئله مثال دارای مکمل شور $S = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix} \frac{۱}{۲} [۳, ۳] = \begin{bmatrix} -۵ & -۶ \\ -۶ & -۵ \end{bmatrix}$ است.

۴۴. با معکوس‌گیری از رابطه $A(I + BA) = (I + AB)A$ به $(I + BA)^{-۱}A^{-۱} = A^{-۱}(I + AB)^{-۱}$ می‌رسیم. بنابراین $I + BA$ و $I + AB$ هر دو معکوس‌پذیر یا هر دو منفرد هستند زمانی که A معکوس‌پذیر باشد. (این موضوع زمانی که A منفرد است نیز صادق است: فصل ۶ نشان خواهد داد که AB و BA مقادیر ویژه غیرصفر یکسانی دارند، و ما در اینجا به دنبال مقدار ویژه ۱- هستیم.)