ترجمه پاسخنامه مجموعه مسائل ۲.۱

صفحه ۱۸

مجموعه مسائل ۲.۱، صفحه ۱۸

۱. $u\cdot v = (-۲/۴)+۲/۴ = ۰$، $u\cdot w = (-۰/۶)+۱/۶ = ۱$، $u\cdot(v+w) = u\cdot v+u\cdot w = ۰+۱ = ۱$، $w\cdot v = ۴+۶ = ۱۰ = v\cdot w$.

۲. $\|u\| = ۱$ و $\|v\| = ۵$ و $\|w\| = \sqrt{۵}$. آنگاه $|u\cdot v| = ۰ < (۱)(۵)$ و $|v\cdot w| = ۱۰ < ۵\sqrt{۵}$، که نامساوی شوارتز را تأیید می‌کند.

۳. بردارهای یکه $v/\|v\| = (\frac{۴}{۵}, \frac{۳}{۵}) = (۰/۸, ۰/۶)$. بردارهای $w, (۲, -۱)$ و $-w$ با w زوایای $۰°, ۹۰°, ۱۸۰°$ می‌سازند. کسینوس زاویه θ برابر است با $\frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|} = \frac{۱۰}{۵\sqrt{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$.

۴. (الف) $v\cdot(-v) = -۱$ (ب) $(v+w)\cdot(v-w) = v\cdot v+w\cdot v-v\cdot w-w\cdot w = ۱-۱ = ۰$ بنابراین $\theta = ۹۰°$ (توجه کنید که $v\cdot w = w\cdot v$) (ج) $(v-۲w)\cdot(v+۲w) = v\cdot v-۴w\cdot w = ۱-۴ = -۳$.

۵. $u_۱ = v/\|v\| = (۱, ۳)/\sqrt{۱۰}$ و $u_۲ = w/\|w\| = (۲, ۱, ۲)/۳$. بردار $U_۱ = (۳, -۱)/\sqrt{۱۰}$ بر $u_۱$ عمود است (و همچنین $(-۳, ۱)/\sqrt{۱۰}$). بردار $U_۲$ می‌تواند $(۱, -۲, ۰)/\sqrt{۵}$ باشد: یک صفحه کامل از بردارها بر $u_۲$ عمود هستند، و یک دایره کامل از بردارهای یکه در آن صفحه وجود دارد.

۶. تمام بردارهای $w = (c, ۲c)$ بر v عمود هستند. آنها روی یک خط قرار دارند. تمام بردارهای (x, y, z) که $x+y+z = ۰$ روی یک صفحه قرار دارند. تمام بردارهای عمود بر $(۱, ۱, ۱)$ و $(۱, ۲, ۳)$ روی یک خط در فضای سه‌بعدی قرار دارند.

۷. (الف) $\cos\theta = \frac{۱}{(۲)(۱)}$ پس $\theta = ۶۰°$ یا $\pi/۳$ رادیان. (ب) $\cos\theta = ۰$ پس $\theta = ۹۰°$ یا $\pi/۲$ رادیان. (ج) $\cos\theta = \frac{۲}{(۲)(۲)} = \frac{۱}{۲}$ پس $\theta = ۶۰°$ یا $\pi/۳$ رادیان. (د) $\cos\theta = -۱/\sqrt{۲}$ پس $\theta = ۱۳۵°$ یا $۳\pi/۴$ رادیان.

۸. (الف) غلط: v و w هر برداری در صفحه‌ی عمود بر u هستند. (ب) صحیح: $u\cdot(v+۲w) = u\cdot v+۲u\cdot w = ۰$. (ج) صحیح: $\|u-v\|^۲ = (u-v)\cdot(u-v)$ به $u\cdot u+v\cdot v = ۲$ تجزیه می‌شود وقتی $u\cdot v = v\cdot u = ۰$.

۹. اگر $v_۲w_۲/v_۱w_۱ = -۱$ باشد، آنگاه $v_۲w_۲ = -v_۱w_۱$ یا $v\cdot w = v_۱w_۱+v_۲w_۲ = ۰$: عمود هستند! بردارهای $(۱, ۴)$ و $(۱, -۱/۴)$ بر هم عمودند.

راه حل تمرینات ۶

۱۰. شیب‌های $۲/۱$ و $-۱/۲$ در هم ضرب شده و حاصل -۱ می‌دهند: در این صورت $v\cdot w = ۰$ و بردارها (جهت‌ها) عمود هستند.

۱۱. $v\cdot w < ۰$ به این معناست که زاویه بزرگتر از $۹۰°$ است؛ این بردارهای w نیمی از فضای سه‌بعدی را پر می‌کنند.

۱۲. بردار $(۱,۱)$ بر $(۱,۵) - c(۱,۱)$ عمود است اگر $(۱,۱)\cdot(۱,۵) - c(۱,۱)\cdot(۱,۱) = ۶ - ۲c = ۰$ یا $c = ۳$. به طور کلی $v\cdot(w - cv) = ۰$ است اگر $c = \frac{v\cdot w}{v\cdot v}$. کم کردن cv کلید ساختن یک بردار عمود است.

۱۳. صفحه‌ی عمود بر $(۱,۰,۱)$ شامل تمام بردارهای $(c,d,-c)$ است. در آن صفحه، $v = (۱,۰,-۱)$ و $w = (۰,۱,۰)$ بر هم عمود هستند.

۱۴. یک امکان از میان بسیاری: $u = (۱,-۱,۰,۰)$، $v = (۰,۰,۱,-۱)$، $w = (۱,۱,-۱,-۱)$ و $(۱,۱,۱,۱)$ بر یکدیگر عمود هستند.

۱۵. $\frac{۱}{۲}(x+y) = (۲+۸)/۲ = ۵$ و $۵ > ۴$. $\cos\theta = \frac{۱۶}{\sqrt{۱۰}\sqrt{۱۰}} = \frac{۸}{۱۰}$.

۱۶. $۹ = ۱ + \cdots + ۱ = \|v\|^۲$ پس $\|v\| = ۳$؛ بردار $u = v/۳ = (\frac{۱}{۳},\ldots,\frac{۱}{۳})$ یک بردار یکه در فضای ۹ بعدی است؛ $w = (۱,-۱,۰,\ldots,۰)/\sqrt{۲}$ یک بردار یکه در ابرصفحه ۸ بعدی عمود بر v است.

۱۷. $\cos\alpha = ۱/\sqrt{۲}, \cos\beta = ۰, \cos\gamma = -۱/\sqrt{۲}$. برای هر بردار $v = (v_۱, v_۲, v_۳)$، $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = (v_۱^۲ + v_۲^۲ + v_۳^۲)/\|v\|^۲ = ۱$.

۱۸. $\|v\|^۲ = ۴^۲ + ۲^۲ = ۲۰$ و $\|w\|^۲ = (-۱)^۲ + ۲^۲ = ۵$. قضیه فیثاغورس برای طول وتر $v+w = (۳,۴)$ به صورت $\|(۳,۴)\|^۲ = ۲۵ = ۲۰ + ۵$ برقرار است.

۱۹. از قوانین (۱)، (۲)، (۳) برای $v\cdot w = w\cdot v$ و $u\cdot(v+w)$ و $(cv)\cdot w$ شروع کنید. طبق قانون (۲) داریم $(v+w)\cdot(v+w) = v\cdot v + v\cdot w + w\cdot v + w\cdot w = v\cdot v + ۲v\cdot w + w\cdot w$. نکته اصلی این است که در باز کردن پرانتزها راحت باشید.

۲۰. می‌دانیم که $(v-w)\cdot(v-w) = v\cdot v - ۲v\cdot w + w\cdot w$. قانون کسینوس‌ها به جای $v\cdot w$ عبارت $\|v\|\,\|w\|\cos\theta$ را قرار می‌دهد. وقتی $\theta < ۹۰^\circ$ باشد، $v\cdot w$ مثبت است، بنابراین $\|v-w\|^۲ < v\cdot v + w\cdot w$.

راه حل تمرینات ۷

۲۱. $۲v\cdot w \le ۲\|v\|\,\|w\|$ منجر به $\|v+w\|^۲ = v\cdot v + ۲v\cdot w + w\cdot w \le \|v\|^۲ + ۲\|v\|\,\|w\| + \|w\|^۲ = (\|v\| + \|w\|)^۲$. با جذر گرفتن، به $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$ می‌رسیم.

۲۲. $v_۱^۲w_۱^۲ + ۲v_۱w_۱v_۲w_۲ + v_۲^۲w_۲^۲ \le v_۱^۲w_۱^۲ + v_۱^۲w_۲^۲ + v_۲^۲w_۱^۲ + v_۲^۲w_۲^۲$ صحیح است زیرا تفاضل آنها $(v_۱w_۲ - v_۲w_۱)^۲ \ge ۰$ می‌باشد.

۲۳. $\cos\beta = w_۱/\|w\|$ و $\sin\beta = w_۲/\|w\|$. آنگاه $\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \frac{v\cdot w}{\|v\|\|w\|} = \cos\theta$.

۲۴. مثال ۶ می‌دهد $|u_۱||U_۱| + |u_۲||U_۲| \le \frac{۱}{۲}(u_۱^۲ + U_۱^۲) + \frac{۱}{۲}(u_۲^۲ + U_۲^۲)$. این به $۰/۹۶ \le (۰/۶)(۰/۸) + (۰/۶)(۰/۸)$ تبدیل می‌شود که صحیح است: $۰/۹۶ < ۱$.

۲۵. کسینوس θ برابر است با $x/\sqrt{x^۲ + y^۲}$. آنگاه $|\cos\theta|^۲ = x^۲/(x^۲ + y^۲) \le ۱$.

۲۶. (با پوزش بابت آن غلط تایپی!) جمع این دو خط برابر با $۲\|v\|^۲ + ۲\|w\|^۲$ است:

$$\|v+w\|^۲ = (v+w)\cdot(v+w) = v\cdot v + v\cdot w + w\cdot v + w\cdot w$$
$$\|v-w\|^۲ = (v-w)\cdot(v-w) = v\cdot v - v\cdot w - w\cdot v + w\cdot w$$

۲۷. بردارهای $w = (x,y)$ که $x + ۲y = ۵$ روی یک خط در صفحه xy قرار دارند. کوتاه‌ترین w روی آن خط، $(۱,۲)$ است (با طول $\sqrt{۵}$).

۲۸. طول $\|v-w\|$ بین ۲ و ۸ است (نامساوی مثلث). حاصلضرب نقطه‌ای $v\cdot w$ بین ۱۵− و ۱۵ است (نامساوی شوارتز).

۲۹. سه بردار در صفحه می‌توانند با یکدیگر زوایای بزرگتر از ۹۰° بسازند: مثلاً $(۱,۰),(-۱,۴),(-۱,-۴)$. چهار بردار نمی‌توانند. در R^n پاسخ $n+۱$ است.

۳۰. برای مثال $v=(۱,۲,-۳)$ و $w=(-۳,۱,۲)$. در این حالت $\cos\theta=\frac{-۷}{\sqrt{۱۴}\sqrt{۱۴}}=-۱/۲$ و $\theta=۱۲۰^\circ$. این همیشه زمانی رخ می‌دهد که $x+y+z=۰$.

۳۱. اثبات نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی: $G=\sqrt[۳]{xyz}\le A=(x+y+z)/۳$.

۳۲. ستون‌های «ماتریس آدامار» ۴ در ۴ (ضربدر ۱/۲) بردارهای یکه عمود بر هم هستند:

$$\frac{۱}{۲}H=\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

۳۳. دستورات MATLAB زیر ۳۰ بردار یکه تصادفی در ستون‌های ماتریس U ایجاد می‌کند:

```
U=V./D; D=sqrt(diag(V'*V)); V=randn(3,30);
```