۱.۰ ماتریس‌های معکوس

۱. اگر ماتریس مربع A معکوس داشته باشد، آنگاه هم $A^{-1}A = I$ و هم $AA^{-1} = I$ برقرار است.

۲. الگوریتم آزمون معکوس‌پذیری، حذف است: A باید n لولای (غیرصفر) داشته باشد.

۳. آزمون جبری برای معکوس‌پذیری، دترمینان A است: $\det(A)$ نباید صفر باشد.

۴. معادله‌ای که معکوس‌پذیری را می‌آزماید $A\mathbf{x} = 0$ است: $\mathbf{x} = 0$ باید تنها جواب باشد.

۵. اگر A و B (هم‌اندازه) معکوس‌پذیر باشند، آنگاه AB نیز معکوس‌پذیر است: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

۶. $AA^{-1} = I$ شامل n معادله برای n ستون از A^{-1} است. روش گاوس ـ جردن ماتریس الحاقی $[A\ I]$ را به $[I\ A^{-1}]$ تبدیل می‌کند.

۷. در صفحه آخر کتاب، ۱۴ شرط معادل برای معکوس‌پذیر بودن ماتریس مربع A ارائه شده است.

فرض کنید A یک ماتریس مربع است. ما به دنبال یک «ماتریس معکوس» A^{-1} با همان اندازه هستیم، به طوری که حاصل‌ضرب A^{-1} در A برابر با I شود. هر کاری که A انجام می‌دهد، A^{-1} آن را خنثی می‌کند. حاصل‌ضرب آن‌ها ماتریس همانی است——که هیچ تأثیری بر یک بردار ندارد، بنابراین $A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. اما A^{-1} ممکن است وجود نداشته باشد.

(توضیح مترجم: شهود اصلی پشت ماتریس معکوس، مفهوم «عملیات معکوس» است. همان‌طور که تقسیم، عمل ضرب را خنثی می‌کند و ریشه دوم، عمل توان دو را، ماتریس معکوس نیز تبدیل خطی اعمال‌شده توسط ماتریس اصلی را خنثی کرده و ما را به بردار اولیه بازمی‌گرداند.)

کاری که یک ماتریس عمدتاً انجام می‌دهد، ضرب شدن در یک بردار $\mathbf{x}$ است. ضرب کردن $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ در A^{-1} نتیجه می‌دهد $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. این یعنی $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. حاصل‌ضرب $A^{-1}A$ مانند ضرب کردن در یک عدد و سپس تقسیم بر همان عدد است. یک عدد اگر صفر نباشد، معکوس دارد. ماتریس‌ها پیچیده‌تر و جالب‌تر هستند. ماتریس A^{-1} «معکوس A» نامیده می‌شود.

تعریف: ماتریس A معکوس‌پذیر (invertible) است اگر ماتریسی مانند A^{-1} وجود داشته باشد که A را «معکوس» کند:

$$A^{-1}A = I \quad \text{و} \quad AA^{-1} = I \quad \text{(معکوس دوطرفه)} \qquad ()$$

همه ماتریس‌ها معکوس ندارند. این اولین سوالی است که در مورد یک ماتریس مربع می‌پرسیم: آیا A معکوس‌پذیر است؟ منظور ما این نیست که بلافاصله A^{-1} را محاسبه کنیم. در بیشتر مسائل هرگز آن را محاسبه نمی‌کنیم! در اینجا شش «نکته» در مورد A^{-1} آورده شده است.

نکته ۱ معکوس وجود دارد اگر و تنها اگر فرآیند حذف، n لولا تولید کند (جابجایی سطرها مجاز است). حذف، معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ را بدون استفاده صریح از ماتریس A^{-1} حل می‌کند.

نکته ۲ ماتریس A نمی‌تواند دو معکوس متفاوت داشته باشد. فرض کنید $BA = I$ و همچنین $AC = I$. آنگاه $B = C$، طبق این «اثبات با پرانتز»:

$$B(AC) = (BA)C \implies BI = IC \implies B = C \qquad ()$$

این نشان می‌دهد که یک معکوس چپ B (که از سمت چپ ضرب می‌شود) و یک معکوس راست C (که از سمت راست در A ضرب می‌شود تا $AC = I$ را بدهد) باید ماتریس یکسانی باشند.

نکته ۳ اگر A معکوس‌پذیر باشد، تنها جواب برای $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ برابر است با $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

نکته ۴ (مهم) فرض کنید بردار غیرصفری مانند $\mathbf{x}$ وجود داشته باشد که $A\mathbf{x} = ۰$. آنگاه A نمی‌تواند معکوس داشته باشد. هیچ ماتریسی نمی‌تواند ۰ را به $\mathbf{x}$ برگرداند.

اگر A معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $A\mathbf{x} = ۰$ فقط می‌تواند جواب صفر $\mathbf{x} = A^{-۱}۰ = ۰$ را داشته باشد.

نکته ۵ یک ماتریس ۲ در ۲ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $ad - bc$ صفر نباشد:

معکوس ماتریس ۲ در ۲:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad ()$$

این عدد $ad - bc$ دترمینان ماتریس A است. یک ماتریس معکوس‌پذیر است اگر دترمینان آن صفر نباشد (این مفهوم در فصل ۵ به تفصیل بررسی خواهد شد). آزمون وجود n لولا معمولاً قبل از ظهور دترمینان مشخص می‌شود.

نکته ۶ یک ماتریس قطری معکوس دارد به شرطی که هیچ درایه قطری آن صفر نباشد:

$$\text{اگر} A = \begin{bmatrix} d_۱ & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \quad \text{آنگاه} \quad A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱/d_۱ & & \\ & \ddots & \\ & & ۱/d_n \end{bmatrix}$$

مثال ۱

ماتریس ۲ در ۲ $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر نیست. این ماتریس آزمون نکته ۵ را رد می‌کند، زیرا $ad - bc$ برابر $۲ - ۲ = ۰$ است. آزمون نکته ۴ را رد می‌کند، زیرا $A\mathbf{x} = ۰$ برای $\mathbf{x} = (۲, -۱)^T$. و آزمون نکته ۱ را رد می‌کند چون دو لولا ندارد. حذف، سطر دوم این ماتریس را به یک سطر صفر تبدیل می‌کند.

معکوس حاصل‌ضرب AB

برای دو عدد غیرصفر a و b، مجموع $a + b$ ممکن است معکوس‌پذیر باشد یا نباشد. اعداد $a = ۳$ و $b = -۳$ معکوس‌های ۱/۳ و ۱/۳− را دارند. مجموع آن‌ها $a + b = ۰$ معکوسی ندارد. اما حاصل‌ضرب آن‌ها $ab = -۹$ معکوس دارد.

برای دو ماتریس A و B وضعیت مشابه است. گفتن چیزی در مورد معکوس‌پذیری $A+B$ دشوار است. اما حاصل‌ضرب AB معکوس دارد، اگر و تنها اگر دو عامل A و B به طور جداگانه معکوس‌پذیر باشند (و هم‌اندازه باشند). نکته مهم این است که $A^{-۱}$ و $B^{-۱}$ به ترتیب معکوس ظاهر می‌شوند:

اگر A و B معکوس‌پذیر باشند، آنگاه AB نیز معکوس‌پذیر است. معکوس حاصل‌ضرب AB عبارت است از:

$$(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱} \quad ()$$

برای اینکه ببینیم چرا ترتیب معکوس می‌شود، AB را در $B^{-۱}A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم. در داخل آن $BB^{-۱} = I$ وجود دارد:

$$(AB)(B^{-۱}A^{-۱}) = A(BB^{-۱})A^{-۱} = A(I)A^{-۱} = AA^{-۱} = I$$

ما پرانتزها را جابجا کردیم تا ابتدا $BB^{-۱}$ را ضرب کنیم. به طور مشابه، ضرب $B^{-۱}A^{-۱}$ در AB برابر با I می‌شود.

$B^{-۱}A^{-۱}$ یک قانون اساسی ریاضیات را نشان می‌دهد: معکوس‌ها به ترتیب معکوس می‌آیند. این موضوع منطقی هم هست: اگر اول جوراب و بعد کفش بپوشید، اولین چیزی که باید درآورید کفش است. همین ترتیب معکوس برای سه ماتریس یا بیشتر نیز اعمال می‌شود:

$$(ABC)^{-۱} = C^{-۱}B^{-۱}A^{-۱} \quad \text{ترتیب معکوس} \quad ()$$

مثال ۲

معکوس یک ماتریس حذف. اگر E پنج برابر سطر ۱ را از سطر ۲ کم کند، آنگاه $E^{-۱}$ پنج برابر سطر ۱ را به سطر ۲ اضافه می‌کند:

$$E = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۵ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad E^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$EE^{-۱}$ را ضرب کنید تا ماتریس همانی I به دست آید. همچنین $E^{-۱}E$ را ضرب کنید تا I به دست آید. برای ماتریس‌های مربع، اگر $AC = I$ باشد، آنگاه به طور خودکار $CA = I$ نیز برقرار است.

مثال ۳

فرض کنید F چهار برابر سطر ۲ را از سطر ۳ کم می‌کند و $F^{-۱}$ آن را دوباره اضافه می‌کند. حالا F را در ماتریس E مثال ۲ ضرب کنید تا FE به دست آید. همچنین $E^{-۱}$ را در $F^{-۱}$ ضرب کنید تا $(FE)^{-۱}$ پیدا شود. به ترتیب‌های FE و $E^{-۱}F^{-۱}$ توجه کنید!

$$FE = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۴ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۵ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۵ & ۱ & ۰ \\ ۲۰ & -۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$E^{-۱}F^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

نتیجه زیبا و درست است. حاصل‌ضرب FE شامل «۲۰» است اما معکوس آن اینطور نیست. E پنج برابر سطر ۱ را از سطر ۲ کم می‌کند. سپس F چهار برابر سطر ۲ جدید را (که توسط سطر ۱ تغییر کرده) از سطر ۳ کم می‌کند. در این ترتیب FE، سطر ۳ از سطر ۱ تأثیر می‌پذیرد.

در ترتیب $E^{-۱}F^{-۱}$، این اثر رخ نمی‌دهد. ابتدا $F^{-۱}$ چهار برابر سطر ۲ را به سطر ۳ اضافه می‌کند. پس از آن، $E^{-۱}$ پنج برابر سطر ۱ را به سطر ۲ اضافه می‌کند. هیچ ۲۰ وجود ندارد، زیرا سطر ۳ دوباره تغییر نمی‌کند. به همین دلیل است که بخش بعدی $A = LU$ را انتخاب می‌کند تا از ماتریس مثلثی U به A بازگردد. مضرب‌ها کاملاً در جای خود در ماتریس پایین مثلثی L قرار می‌گیرند.

محاسبه $A^{-۱}$ با حذف گاوس_جردن

اشاره کردم که ممکن است $A^{-۱}$ به صراحت مورد نیاز نباشد. معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ با $\mathbf{x} = A^{-۱}\mathbf{b}$ حل می‌شود. اما محاسبه $A^{-۱}$ و ضرب آن در $\mathbf{b}$ نه ضروری و نه کارآمد است. حذف مستقیماً به $\mathbf{x}$ می‌رسد. و حذف همچنین روشی برای محاسبه $A^{-۱}$ است، همانطور که اکنون نشان می‌دهیم. ایده گاوس_جردن حل $AA^{-۱} = I$ و یافتن هر ستون از $A^{-۱}$ است.

(توضیح مترجم: روش گاوس_جردن در واقع مانند حل همزمان n دستگاه معادله است. هر دستگاه به شکل $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$

است که $\mathbf{x}_i$ ستون iــام ماتریس معکوس و $\mathbf{e}_i$ ستون iــام ماتریس همانی است. با قرار دادن تمام ستون‌های $\mathbf{e}_i$ در کنار ماتریس A به صورت $[A|I]$، ما تمام این دستگاه‌ها را به یکباره حل می‌کنیم.)

A ستون اول $A^{-۱}$ (آن را $\mathbf{x}_۱$ بنامید) را ضرب می‌کند تا ستون اول I (آن را $\mathbf{e}_۱$ بنامید) را بدهد. این معادله ما $A\mathbf{x}_۱ = \mathbf{e}_۱ = (۱, ۰, ۰)^T$ است. دو معادله دیگر نیز وجود خواهد داشت. هر یک از ستون‌های $\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲, \mathbf{x}_۳$ از $A^{-۱}$ در A ضرب می‌شود تا یک ستون از I تولید شود:

$$AA^{-۱} = A\begin{bmatrix}\mathbf{x}_۱ & \mathbf{x}_۲ & \mathbf{x}_۳\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_۱ & \mathbf{e}_۲ & \mathbf{e}_۳\end{bmatrix} = I \quad ()$$

معمولاً «ماتریس الحاقی» $[A\ \mathbf{b}]$ یک ستون اضافی $\mathbf{b}$ دارد. اکنون ما سه سمت راست $\mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲, \mathbf{e}_۳$ داریم (وقتی A ماتریس ۳ در ۳ است). آنها ستون‌های I هستند، بنابراین ماتریس الحاقی در واقع ماتریس قطعه‌ای $[A\ I]$ است. از این فرصت برای معکوس کردن ماتریس مورد علاقه‌ام، K، با ۲ روی قطر اصلی و ۱- در کنار ۲ها استفاده می‌کنم:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۲ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{(\frac{۱}{۲}R_۱)+R_۲} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۲ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳/۲ & -۱ & ۱/۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{(\frac{۲}{۳}R_۲)+R_۳} \left[\begin{array}{ccc|cc} ۲ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳/۲ & -۱ & ۱/۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴/۳ & ۱/۳ & ۲/۳ \end{array}\right.$$

ما در نیمه راه رسیدن به $K^{-۱}$ هستیم. ماتریس در سه ستون اول U (بالا مثلثی) است. لولاها $۲, ۳/۲, ۴/۳$ روی قطر آن هستند. گاوس با جایگذاری پس‌رو کار را تمام می‌کرد. سهم جردن ادامه دادن با حذف است! او تا انتها به فرم پلکانی کاهش‌یافته $R = I$ می‌رود. سطرها به سطرهای بالای خود اضافه می‌شوند تا در بالای لولاها صفر ایجاد شود:

$$\xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۲ & ۰ & ۰ & ۳/۲ & ۱ & ۱/۲ \\ ۰ & ۳/۲ & ۰ & ۳/۴ & ۳/۲ & ۳/۴ \\ ۰ & ۰ & ۴/۳ & ۱/۳ & ۲/۳ & ۱ \end{array}\right]$$

گام نهایی گاوس ــ جردن تقسیم هر سطر بر لولای آن است. لولاهای جدید همه ۱ می‌شوند. ما به I در نیمه اول ماتریس رسیده‌ایم، زیرا K معکوس‌پذیر است. سه ستون $K^{-۱}$ در نیمه دوم $[I\ K^{-۱}]$ قرار دارند:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۳/۴ & ۱/۲ & ۱/۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱/۲ & ۱ & ۱/۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱/۴ & ۱/۲ & ۳/۴ \end{array}\right] = [I\ \mathbf{x}_۱\ \mathbf{x}_۲\ \mathbf{x}_۳] = [I\ K^{-۱}]$$

با شروع از ماتریس ۳ در ۶ $[K\ I]$، به $[I\ K^{-۱}]$ رسیدیم. کل فرآیند گاوس ــ جردن برای هر ماتریس معکوس‌پذیر A در یک خط به این صورت است:

گاوس ــ جردن: با انجام عملیات سطری روی $[A\ I]$، آن را به $[I\ A^{-۱}]$ تبدیل کنید.

ماتریس منفرد در مقابل ماتریس معکوس‌پذیر

به سوال اصلی باز می‌گردیم. کدام ماتریس‌ها معکوس دارند؟ در ابتدای این بخش آزمون لولا پیشنهاد شد: $A^{-۱}$ دقیقاً زمانی وجود دارد که A مجموعه کاملی از n لولا داشته باشد. (جابجایی سطرها مجاز است.) اکنون می‌توانیم این را با حذف گاوس ــ جردن اثبات کنیم:

۱. با n لولا، حذف تمام معادلات $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ را حل می‌کند. ستون‌های $\mathbf{x}_i$ در $A^{-۱}$ قرار می‌گیرند. آنگاه $AA^{-۱} = I$ و $A^{-۱}$ حداقل یک معکوس راست است.

۲. حذف در واقع دنباله‌ای از ضرب‌ها در ماتریس‌های E، P و D^{-1} است:

$$C = (D^{-1} \cdots E \cdots P \cdots E) \implies CA = I \text{معکوس چپ}$$

این استدلال نشان می‌دهد که اگر $AC = I$ باشد، آنگاه $CA = I$ و $C = A^{-1}$.

(توضیح مترجم: تمام شرایط معکوس‌پذیری (داشتن n لولا، دترمینان غیرصفر، نداشتن جواب غیرصفر برای $A\mathbf{x} = 0$) به یکدیگر وابسته‌اند. آنها جنبه‌های مختلفی از یک مفهوم واحد را توصیف می‌کنند: اینکه آیا تبدیل خطی نمایش داده شده توسط ماتریس A اطلاعاتی را از بین می‌برد یا خیر. اگر اطلاعات از بین برود (مثلاً یک بردار غیرصفر را به صفر تصویر کند)، ماتریس منفرد است و نمی‌توان آن تبدیل را معکوس کرد.)

شناخت یک ماتریس معکوس‌پذیر

معمولاً برای تصمیم‌گیری در مورد معکوس‌پذیر بودن یک ماتریس به کار نیاز است. اما برای برخی ماتریس‌ها می‌توانید به سرعت ببینید که معکوس‌پذیر هستند زیرا هر عدد a_{ii} روی قطر اصلی آن‌ها بر بقیه قسمت‌های آن سطر غلبه دارد.

ماتریس‌های قطری غالب (Diagonally dominant) معکوس‌پذیر هستند. در هر سطر i:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

این شرط نشان می‌دهد که $A\mathbf{x} = 0$ تنها زمانی ممکن است که $\mathbf{x} = 0$. بنابراین A معکوس‌پذیر است.

مروری بر ایده‌های کلیدی

۱. ماتریس معکوس روابط $AA^{-1} = I$ و $A^{-1}A = I$ را برقرار می‌کند.

۲. A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر n لولا داشته باشد (جابجایی سطرها مجاز است).

۳. مهم: اگر $A\mathbf{x} = 0$ برای یک بردار غیرصفر $\mathbf{x}$ برقرار باشد، آنگاه A معکوس ندارد.

۴. معکوس AB حاصل‌ضرب معکوس $B^{-1}A^{-1}$ است. و $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

۵. روش گاوس_جردن $AA^{-1} = I$ را حل می‌کند تا n ستون A^{-1} را پیدا کند. ماتریس الحاقی $[A\ I]$ به $[I\ A^{-1}]$ کاهش سطری می‌یابد.

۶. ماتریس‌های قطری غالب معکوس‌پذیر هستند. هر $|a_{ii}|$ بر سطر خود غلبه دارد.

مجموعه مسائل ۵.۲

مسائل ۱-۴۴

۱. (مسائل ۱-۲۱ درباره ویژگی‌های معکوس هستند.)
معکوس ماتریس‌های A, B, C را پیدا کنید (مستقیماً یا از فرمول ۲ در ۲):

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱/۳ \\ ۱/۴ & ۰ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱/۲ \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$$

۲. برای این «ماتریس‌های جایگشت» $P^{-۱}$ را با آزمون و خطا پیدا کنید (با ۱ و ۰). (راهنمایی: $P^{-۱}$ همان ترانهاده P است.)

$$P = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۳. برای ستون اول (x, y) و ستون دوم (t, z) از $A^{-۱}$ حل کنید (این ایده اصلی گاوس-جردن است):

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲۰ \\ ۲۰ & ۵۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} ۱۰ & ۲۰ \\ ۲۰ & ۵۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۴. نشان دهید که $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$ معکوس‌پذیر نیست با تلاش برای حل $A\mathbf{x}_۱ = (۱, ۰)^T$.

۵. یک ماتریس بالا مثلثی U (غیرقطری) با $U^۲ = I$ پیدا کنید که $U = U^{-۱}$ را نتیجه دهد.

۶. (الف) اگر A معکوس‌پذیر باشد و $AB = AC$، به سرعت ثابت کنید که $B = C$. (ب) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، دو ماتریس متفاوت B, C پیدا کنید که $AB = AC$.

۷. (مهم) اگر A دارای (سطر ۱ + سطر ۲ = سطر ۳) باشد، نشان دهید که A معکوس‌پذیر نیست:

(الف) توضیح دهید چرا $A\mathbf{x} = (۱, ۰, ۰)$ نمی‌تواند جوابی داشته باشد. (راهنمایی: معادله ۱ + معادله ۲ - معادله ۳ را در نظر بگیرید)

(ب) کدام سمت راست‌ها $\mathbf{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)^T$ ممکن است به $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ اجازه جواب دهند؟

(ج) در حذف، چه اتفاقی برای معادله ۳ می‌افتد؟

۸. اگر A دارای (ستون ۱ + ستون ۲ = ستون ۳) باشد، نشان دهید که A معکوس‌پذیر نیست:

(الف) یک جواب غیرصفر $\mathbf{x}$ برای $A\mathbf{x} = ۰$ پیدا کنید. ماتریس ۳ در ۳ است.

(ب) حذف، (ستون ۱ + ستون ۲ = ستون ۳) را حفظ می‌کند. توضیح دهید چرا لولای سومی وجود ندارد.

۹. فرض کنید A معکوس‌پذیر است و شما دو سطر اول آن را جابجا می‌کنید تا به B برسید. آیا ماتریس جدید B معکوس‌پذیر است؟ چگونه $B^{-۱}$ را از $A^{-۱}$ پیدا می‌کنید؟ (راهنمایی: $B = PA$)

۱۰. معکوس ماتریس‌های قطعه‌ای زیر را پیدا کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

۱۱. (الف) ماتریس‌های معکوس‌پذیر A و B را پیدا کنید به طوری که $A+B$ معکوس‌پذیر نباشد. (ب) ماتریس‌های منفرد A و B را پیدا کنید به طوری که $A+B$ معکوس‌پذیر باشد.

۱۲. اگر حاصل‌ضرب $C = AB$ معکوس‌پذیر باشد (A و B مربع هستند)، آنگاه خود A نیز معکوس‌پذیر است. فرمولی برای $A^{-۱}$ که شامل $C^{-۱}$ و B است، پیدا کنید.

۱۳. اگر حاصل‌ضرب $M = ABC$ از سه ماتریس مربع معکوس‌پذیر باشد، آنگاه B معکوس‌پذیر است. (همچنین A و C.) فرمولی برای $B^{-۱}$ پیدا کنید که شامل $M^{-۱}$ و A و C باشد.

۱۴. اگر سطر ۱ از A را به سطر ۲ اضافه کنید تا B به دست آید ($B = EA$)، چگونه $B^{-۱}$ را از $A^{-۱}$ پیدا می‌کنید؟

۱۵. ثابت کنید ماتریسی با یک ستون صفر نمی‌تواند معکوس داشته باشد.

۱۶. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ضرب کنید. معکوس هر ماتریس چیست اگر $ad \neq bc$؟

۱۷. (الف) چه ماتریس ۳ در ۳ به نام E همان تأثیر این سه مرحله را دارد؟ سطر ۱ را از سطر ۲ کم کنید، سطر ۱ را از سطر ۳ کم کنید، سپس سطر ۲ را از سطر ۳ کم کنید. (ب) چه ماتریس واحدی به نام L همان تأثیر این سه مرحله معکوس را دارد؟ سطر ۲ را به سطر ۳ اضافه کنید، سطر ۱ را به سطر ۳ اضافه کنید، سپس سطر ۱ را به سطر ۲ اضافه کنید.

۱۸. اگر B معکوس $A^۲$ باشد ($A^۲B = I$)، نشان دهید که AB معکوس A است.

۱۹. اعداد a و b را پیدا کنید که معکوس ماتریس $n \times n$ زیر را در فرم $aI + bJ$ بدهد (که J ماتریس تمام یک است):

$$((n-۱)I - J)^{-۱} = aI + bJ \quad (\text{در سوال اصلی} \ n = ۵ \ \text{برای})$$

۲۰. نشان دهید که $A = (n-۱)I - J$ (برای اندازه $n = ۴$) معکوس‌پذیر نیست. (راهنمایی: بردار تمام یک را در آن ضرب کنید.)

۲۱. شانزده ماتریس ۲ در ۲ وجود دارد که درایه‌های آنها ۱ و ۰ است. چند تای آنها معکوس‌پذیر هستند؟

۲۲. (مسائل ۲۲–۲۸ در مورد روش گاوس–جردن برای محاسبه $A^{-۱}$ هستند.)
I را به $A^{-۱}$ تبدیل کنید همانطور که A را به I کاهش می‌دهید (با عملیات سطری):

$$[A\ I] = \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۳ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۷ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \quad \text{و} \quad [A\ I] = \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۹ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

۲۳. مثال ۳ در ۳ متن را با علامت‌های مثبت در A دنبال کنید. بالا و پایین لولاها را حذف کنید تا $[A\ I]$ به $[I\ A^{-1}]$ کاهش یابد:

$$[A\ I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

۲۴. از حذف گاوس–جردن روی $[U\ I]$ استفاده کنید تا معکوس بالا مثلثی U^{-1} را پیدا کنید:

$$UU^{-1} = I \implies \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [U^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۵. A^{-1} و B^{-1} را (در صورت وجود) با حذف روی $[A\ I]$ و $[B\ I]$ پیدا کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

۲۶. چه سه ماتریس E_{21} و E_{12} و D^{-1} ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ را به ماتریس همانی کاهش می‌دهند؟ $A^{-1} = D^{-1}E_{12}E_{21}$ را محاسبه کنید.

۲۷. این ماتریس‌ها را با روش گاوس–جردن با شروع از $[A\ I]$ معکوس کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

۲۸. سطرها را جابجا کرده و با گاوس–جردن ادامه دهید تا A^{-1} را پیدا کنید:

$$[A\ I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

۲۹. (مسائل ۲۹-۳۸ مسائل مفهومی درباره معکوس‌پذیری هستند.)
درست یا غلط (با یک مثال نقض اگر غلط و یک دلیل اگر درست است):

(الف) یک ماتریس ۴ در ۴ با یک سطر صفر معکوس‌پذیر نیست.

(ب) هر ماتریسی با ۱ روی قطر اصلی معکوس‌پذیر است.

(ج) اگر A معکوس‌پذیر باشد، آنگاه A^{-1} و A^2 نیز معکوس‌پذیر هستند.

۳۰. (توصیه شده) ثابت کنید که A معکوس‌پذیر است اگر $a \neq 0$ و $a \neq b$. سپس مقادیر c را طوری پیدا کنید که C

معکوس‌پذیر نباشد:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c & c & c \\ c & c & c \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

۳۱. این ماتریس یک معکوس قابل توجه دارد. $A^{-۱}$ را با حذف روی $[A\ I]$ پیدا کنید. آن را حل کرده و برای ماتریس ۵ در ۵ مشابهی حدس بزنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad$$ معادله $A\mathbf{x} = (۱, ۱, ۱, ۱)^T$ را حل کنید.

۳۲. فرض کنید ماتریس‌های P و Q همان سطرهای I را اما به هر ترتیبی دارند. آنها «ماتریس‌های جایگشت» هستند. نشان دهید که $P - Q$ با حل $(P-Q)\mathbf{x} = ۰$ برای یک $\mathbf{x}$ غیرصفر، منفرد است.

۳۳. معکوس این ماتریس‌های قطعه‌ای را پیدا و بررسی کنید (با فرض وجود):

$$\begin{bmatrix} I & ۰ \\ C & I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & ۰ \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۰ & I \\ I & D \end{bmatrix}$$

۳۴. آیا یک ماتریس ۴ در ۴ A می‌تواند معکوس‌پذیر باشد اگر هر سطر شامل اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ به ترتیبی باشد؟ چه می‌شود اگر هر سطر از B شامل ۰، ۱، ۲، ۳- به ترتیبی باشد؟ (راهنمایی: مجموع درایه‌های هر سطر را بررسی کنید.)

۳۵. در مثال حل شده ۵.۲ ج، ماتریس مثلثی پاسکال L دارای $L^{-۱} = DLD$ است، که در آن ماتریس قطری D درایه‌های متناوب ۱، ۱-، ۱، ۱- دارد. از این رابطه نتیجه بگیرید که $(LD)^{-۱} = LD$ است.

۳۶. ماتریس‌های هیلبرت دارای $H_{ij} = ۱/(i+j-۱)$ هستند. از متلب معکوس دقیق ۶ در ۶ ('invhilb(۶') را بخواهید. سپس از آن بخواهید '((۶)inv(hilb' را محاسبه کند. چگونه این دو می‌توانند متفاوت باشند، در حالی که کامپیوتر هرگز اشتباه نمی‌کند؟

۳۷. (الف) از 'inv(P)' برای معکوس کردن ماتریس متقارن ۴ در ۴ متلب $P = \text{pascal}(۴)$ استفاده کنید. (ب) ماتریس پایین مثلثی پاسکال $L = \text{abs}(\text{pascal}(۴, ۱))$ را ایجاد کرده و $P = LL^T$ را آزمایش کنید.

۳۸. اگر $A = \text{ones}(۴, ۴)$ (ماتریس تمام یک) و $\mathbf{b} = \text{rand}(۴, ۱)$، متلب چگونه به شما می‌گوید که $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ جوابی ندارد؟ برای $\mathbf{b}$ خاص $\mathbf{b} = \text{ones}(۴, ۱)$، کدام جواب برای $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ توسط 'A\b' پیدا می‌شود؟

۳۹. (مسائل چالشی)
A یک ماتریس ۴ در ۴ دو قطری با ۱ روی قطر و a-، b-، c- روی ابرقطر است. $A^{-۱}$ را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -a & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -b & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -c \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۴۰. فرض کنید E_1, E_2, E_3 ماتریس‌های همانی ۴ در ۴ هستند، با این تفاوت که E_1 دارای a, b, c در ستون ۱، E_2 دارای d, e در ستون ۲ و E_3 دارای f در ستون ۳ (همگی زیر قطر) است. $L = E_1E_2E_3$ را ضرب کنید تا نشان دهید همه این غیرصفرها در L کپی می‌شوند.

۴۱. ماتریس‌های تفاضل دوم اگر با $T_{11} = 1$ شروع شوند (به جای $K_{11} = 2$) معکوس‌های زیبایی دارند. ماتریس ۴ در ۴ T و معکوس آن را در نظر بگیرید:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

سوال: لولاهای T چیست؟ معکوس آن چگونه به دست می‌آید؟

۴۲. ترتیب معکوس UL (با $T = LU$) چه ماتریسی T^* می‌دهد؟ معکوس T^* چیست؟

۴۳. در اینجا دو ماتریس تفاضل دیگر، هر دو مهم، وجود دارد. آیا آنها معکوس‌پذیر هستند؟ (راهنمایی: مجموع هر سطر را بررسی کنید.)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۴۴. حذف برای یک ماتریس قطعه‌ای: وقتی سطر قطعه‌ای اول $[A\ B]$ را در CA^{-1} ضرب کرده و از سطر قطعه‌ای دوم $[C\ D]$ کم می‌کنید، «مکمل شور» S ظاهر می‌شود. $S = D - CA^{-1}B$. لولاهای قطعه‌ای A و S هستند. اگر آنها معکوس‌پذیر باشند، ماتریس قطعه‌ای نیز معکوس‌پذیر است. S را برای ماتریس زیر پیدا کنید:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

۴۵. این رابطه $A(I + BA) = (I + AB)A$ چگونه معکوس‌های $I + BA$ و $I + AB$ را به هم مرتبط می‌کند؟ نشان دهید که اگر A معکوس‌پذیر باشد، یکی از این دو معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر دیگری نیز باشد.