۱. معادله ۱ را در $_{۲۱} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$ ضرب کرده و از معادله ۲ کم کنید تا $۲x + ۳y = ۱$ (بدون تغییر) و $۶y = ۶$ به دست آید. محورهایی که باید دایره‌ای دورشان کشیده شود ۲ و ۶- هستند.

۲. از $۶y = ۶$ نتیجه می‌شود $y = ۱$. سپس $۲x + ۳y = ۱$ نتیجه می‌دهد $x = ۲$. ضرب کردن سمت راست $(۱, ۱۱)$ در ۴، جواب را در ۴ ضرب می‌کند تا جواب جدید $(x, y) = (۸, ۴)$ به دست آید.

۳. $-\frac{۱}{۲}$ (یا $\frac{۱}{۲}$) برابر معادله ۱ را کم (یا اضافه) کنید. معادله دوم جدید $۳y = ۳$ است. آنگاه $y = ۱$ و $x = ۵$. اگر سمت راست علامت عوض کند، جواب نیز چنین می‌کند: $(x, y) = (۵, ۱)$.

۴. $\frac{c}{a} =$ برابر معادله ۱ را از معادله ۲ کم کنید. محور دوم جدیدی که در $y$ ضرب می‌شود $d(\frac{cb}{a})$ یا $\frac{(adbc)}{a}$ است. آنگاه $y = \frac{(agcf)}{(adbc)}$. به «دترمینان $adbc$ = A» توجه کنید. برای این تقسیم باید غیرصفر باشد.

۵. $۶x + ۴y$ دو برابر $۳x + ۲y$ است. جوابی وجود ندارد مگر اینکه سمت راست $۲۰۱۰ = ۲۰$ باشد. آنگاه تمام نقاط روی خط $۳x + ۲y = ۱۰$ جواب هستند، شامل $(۰, ۵)$ و $(۴, ۱)$. دو خط در تصویر سطری یک خط یکسان هستند که شامل تمام جواب‌هاست.

۶. سیستم منفرد است اگر $b = ۴$ باشد، زیرا $۴x + ۸y$ دو برابر $۲x + ۴y$ است. آنگاه $g = ۳۲$ باعث می‌شود خطوط $۲x + ۴y = ۱۶$ و $۴x + ۸y = ۳۲$ یکسان شوند: بی‌نهایت جواب مانند $(۸, ۰)$ و $(۰, ۴)$.

۷. اگر $a = ۲$ باشد، حذف باید با شکست مواجه شود (دو خط موازی در تصویر سطری). معادلات جوابی ندارند. با $a = ۰$، حذف برای تعویض سطر متوقف می‌شود. آنگاه $۳y = ۳$ نتیجه می‌دهد $y = ۱$ و $۴x + ۶y = ۶$ نتیجه می‌دهد $x = ۳$.

۸. اگر $k = ۳$ باشد حذف باید با شکست مواجه شود: جوابی وجود ندارد. اگر $k = ۳$ باشد، حذف به $۰ = ۰$ در معادله ۲ می‌رسد: بی‌نهایت جواب. اگر $k = ۰$ باشد نیاز به تعویض سطر است: یک جواب.

۹. در سمت چپ، $۶x۴y$ دو برابر $(۳x۲y)$ است. بنابراین در سمت راست به $b_۲ = ۲b_۱$ نیاز داریم. آنگاه بی‌نهایت جواب وجود خواهد داشت (دو خط موازی به یک خط واحد در تصویر سطری تبدیل می‌شوند). تصویر ستونی هر دو ستون را در امتداد یک خط دارد.

۱۰. معادله $y = ۱$ از حذف به دست می‌آید (کم کردن $x + y = ۵$ از $x + ۲y = ۶$). آنگاه $x = ۴$ و $۵x۴y = ۲۰۴ = c = ۱۶$.

۱۱. (الف) جواب دیگر $\frac{۱}{۲}(x+X, y+Y, z+Z)$ است. (ب) اگر ۲۵ صفحه در دو نقطه تلاقی کنند، در تمام خطی که از آن دو نقطه می‌گذرد تلاقی می‌کنند.

۱۲. حذف به این سیستم بالا مثلثی منجر می‌شود؛ سپس جایگزینی معکوس انجام می‌شود.

$$۲x + ۳y + z = ۸$$
$$y + ۳z = ۴$$
$$۸z = ۸$$

۱۳.
$$۲x۳y = ۳$$
$$۴x۵y + z = ۷$$
$$۲xy۳z = ۵$$
نتیجه می‌دهد
$$x = ۲$$
$y = ۱$ اگر یک صفر در ابتدای سطر ۲ یا ۳ باشد،
$z = ۱$ از یک عملیات سطری جلوگیری می‌کند.
$$۲x۳y = ۳$$
$$y + z = ۱$$
$$۲y + ۳z = ۲$$
نتیجه می‌دهد
$$۲x۳y = ۳$$
$$y + z = ۱$$
$$۵z = ۰$$
و
$$x = ۳$$
$$y = ۱$$
$$z = ۰$$
و
اینجا مراحل ۱، ۲، ۳ آمده است: ۲ × سطر ۱ را از سطر ۲ کم کنید، ۱ × سطر ۱ را از سطر ۳ کم کنید، ۲ × سطر ۲ را از سطر ۳ کم کنید.

۱۴. ۲ برابر سطر ۱ را از سطر ۲ کم کنید تا به $(d۱۰)yz = ۲$ برسید. معادله (۳) $yz = ۳$ است. اگر $d = ۱۰$ باشد سطرهای ۲ و ۳ را تعویض کنید. اگر $d = ۱۱$ باشد سیستم منفرد می‌شود.

۱۵. موقعیت محور دوم شامل $۲b$ خواهد بود. اگر $b = ۲$ باشد با سطر ۳ تعویض می‌کنیم. اگر $b = ۱$ (حالت منفرد) باشد معادله دوم $yz = ۰$ است. اما معادله (۳) همان است، بنابراین یک خط از جواب‌ها $(x, y, z) = (۱, ۱, ۱)$ وجود دارد.

۱۶. (الف) مثالی از ۲ تعویض:

$$۰x + ۰y + ۲z = ۴$$
$$x + ۲y + ۲z = ۵$$
$$۰x + ۳y + ۴z = ۶$$
(تعویض ۱ و ۲، سپس ۲ و ۳)
(ب) تعویض اما سپس شکست:
$$۰x + ۳y + ۴z = ۴$$
$$x + ۲y + ۲z = ۵$$
$$۰x + ۳y + ۴z = ۶$$
(سطرهای ۱ و ۳ سازگار نیستند)

۱۷. اگر سطر ۱ = سطر ۲، آنگاه سطر ۲ پس از مرحله اول صفر است؛ سطر صفر را با سطر ۳ تعویض کنید و سطر ۳ محوری ندارد. اگر ستون ۲ = ستون ۱، آنگاه ستون ۲ محوری ندارد.

۱۸. مثال $x + ۲y + ۳z = ۰, ۴x + ۸y + ۱۲z = ۰, ۵x + ۱۰y + ۱۵z = ۰$ دارای ۹ ضریب متفاوت است اما سطرهای ۲ و ۳ به $۰ = ۰$ تبدیل می‌شوند: بی‌نهایت جواب برای $Ax = ۰$ اما تقریباً به طور قطع هیچ جوابی برای $Ax = b$ برای یک $b$ تصادفی وجود ندارد.

۱۹. سطر ۲ به $۳y۴z = ۵$ تبدیل می‌شود، سپس سطر ۳ به $(q + ۴)z = t۵$ تبدیل می‌شود. اگر $q = ۴$ باشد سیستم منفرد است——محور سومی وجود ندارد. آنگاه اگر $t = ۵$ باشد معادله سوم $۰ = ۰$ است که به بی‌نهایت جواب اجازه می‌دهد. با انتخاب $z = ۱$، معادله $۳y۴z = ۵$ نتیجه می‌دهد $y = ۳$ و معادله ۱ نتیجه می‌دهد $x = ۹$.

۲۰. منفرد است اگر سطر ۳ ترکیبی از سطرهای ۱ و ۲ باشد. از نمای انتهایی، سه صفحه یک مثلث تشکیل می‌دهند. این اتفاق می‌افتد اگر سطر ۱ + سطر ۲ = سطر ۳ در سمت چپ باشد اما در سمت راست نه: $x + y + z = ۰, x۲yz = ۱, ۲xy = ۴$. هیچ صفحه موازی‌ای وجود ندارد اما هنوز جوابی نیست. سه صفحه در تصویر سطری یک تونل مثلثی تشکیل می‌دهند.

۲۱. (الف) محورها $۲, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۴}$ در معادلات $۲x + y = ۰, \frac{۳}{۲}y + z = ۰, \frac{۴}{۳}z + t = ۰, \frac{۵}{۴}t = ۵$ پس از حذف. جایگزینی معکوس نتیجه می‌دهد $x = ۱, y = ۲, z = ۳, t = ۴$. (ب) اگر درایه‌های خارج از قطر از +۱ به -۱ تغییر کنند، محورها یکسان هستند. جواب $(۱, ۲, ۳, ۴)$ به جای $(۱, ۲, ۳, ۴)$ است.

۲۲. محور پنجم برای هر دو ماتریس (۱ ها یا -۱ ها خارج از قطر) $\frac{۶}{۵}$ است. محور ام-n $\frac{n+۱}{n}$ است.

۲۳. اگر حذف معمولی به $x + y = ۱$ و $۲y = ۳$ منجر شود، معادله دوم اصلی می‌توانست $۲y + (x + y) = ۳ +$ برای هر باشد. آنگاه مضربی خواهد بود که با کم کردن برابر معادله ۱ از معادله ۲، به $۲y = ۳$ می‌رسد.

۲۴. حذف روی $\begin{bmatrix} a & ۲ \\ a & a \end{bmatrix}$ اگر $a = ۲$ یا $a = ۰$ باشد با شکست مواجه می‌شود. (می‌توانید توجه کنید که دترمینان $a^۲ ۲a$ برای $a = ۲$ و $a = ۰$ صفر است.)

۲۵. $a = ۲$ (ستون‌های مساوی)، $a = ۴$ (سطرهای مساوی)، $a = ۰$ (ستون صفر).

۲۶. برای $s = ۱۰$ قابل حل است (دو جفت معادله را جمع کنید تا در سمت چپ $a+b+c+d$ و در سمت راست ۱۲ و $s + ۲$ به دست آید). بنابراین ۱۲ باید با $s + ۲$ برابر باشد، که $s = ۱۰$ می‌شود. چهار معادله برای $a, b, c, d$ منفرد هستند! دو جواب عبارتند از $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & ۷ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$،

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } U = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

۲۷. حذف ماتریس قطری $\mathrm{diag}(۳, ۲, ۱)$ را در $۳x = ۳, ۲y = ۲, z = ۲$ باقی می‌گذارد. آنگاه $x = ۱, y = ۱, z = ۲$.

۲۸. دستور $A(۲,:) = A(۲,:)۳A(۱,:)$، ۳ برابر سطر ۱ را از سطر ۲ کم می‌کند.

۲۹. میانگین محورها برای `rand(3)` بدون تعویض سطر در یک آزمایش $\frac{۱}{۲}, ۵, ۱۰$ بود—اما محورهای ۲ و ۳ می‌توانند به طور دلخواه بزرگ باشند. میانگین آنها در واقع بی‌نهایت است! با تعویض سطر در کد `lu` متلب، میانگین‌ها ۰/۷۵ و ۰/۵۰ و ۰/۳۶۵ بسیار پایدارتر هستند (و باید قابل پیش‌بینی باشند، همچنین برای `randn` با توزیع احتمال نرمال به جای یکنواخت برای اعداد در A).

۳۰. اگر $A(۵,۵)$ به جای ۱۱، ۷ باشد، آنگاه محور آخر به جای ۴، ۰ خواهد بود.

۳۱. سطر $j$ از $U$ ترکیبی از سطرهای $j, \ldots, ۱$ از $A$ است (وقتی هیچ تعویض سطری وجود ندارد). اگر $Ax = ۰$ باشد آنگاه $Ux = ۰$ (اگر $b$ جایگزین ۰ شود درست نیست). $U$ فقط قطر $A$ را نگه می‌دارد وقتی $A$ پایین مثلثی است.

۳۲. این سوال به ۱۰۰ معادله $Ax = ۰$ می‌پردازد وقتی $A$ منفرد است. (الف) ترکیبی خطی از ۱۰۰ سطر، سطر ۱۰۰ صفر است. (ب) ترکیبی خطی از ۱۰۰ ستون، ستون صفرها است. (ج) یک ماتریس بسیار منفرد همه درایه‌هایش یک است: $A = \mathrm{ones}(۱۰۰)$. یک مثال بهتر دارای ۹۹ سطر تصادفی است (یا اعداد $۱^i, \ldots, ۱۰۰^i$ در آن سطرها). سطر صدم می‌تواند مجموع ۹۹ سطر اول باشد (یا هر ترکیب دیگری از آن سطرها بدون صفر). (د) تصویر سطری دارای ۱۰۰ صفحه است که در امتداد یک خط مشترک از مبدأ می‌گذرند. تصویر ستونی دارای ۱۰۰ بردار است که همگی در یک ابرصفحه ۹۹ بعدی قرار دارند.