۱. $$E_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۵ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, E_{۳۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

۲. $E_{۳۲}E_{۲۱}b = (۱, -۵, -۳۵)$ اما $E_{۲۱}E_{۳۲}b = (۱, -۵, ۰)$. وقتی $E_{۳۲}$ اول می‌آید، سطر ۳ هیچ تأثیری از سطر ۱ نمی‌پذیرد.

۳. $$M = E_{۳۲}E_{۳۱}E_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۴ & ۱ & ۰ \\ ۱۰ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۴ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$
این ماتریس‌های E به ترتیب درستی هستند تا $MA = U$ را نتیجه دهند.

۴. حذف روی ستون ۴: $b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{۲۱}} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \\ ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{۳۱}} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \\ ۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{۳۲}} \begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$. معادله اصلی $Ax = b$ به $Ux = c = (۱, -۴, ۱۰)$ تبدیل شده است. سپس جایگزینی معکوس نتیجه می‌دهد $z = -۵, y = \frac{۱}{۲}, x = \frac{۱}{۲}$. این جواب معادله $Ax = (۱, ۰, ۰)$ است.

۵. تغییر $a_{۳۳}$ از ۷ به ۱۱، محور سوم را از ۵ به ۹ تغییر می‌دهد. تغییر $a_{۳۳}$ از ۷ به ۲، محور را از ۵ به بدون محور تغییر می‌دهد.

۶. مثال: $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۷ \\ ۲ & ۳ & ۷ \\ ۲ & ۳ & ۷ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \\ ۴ \end{bmatrix}$. اگر همه ستون‌ها مضربی از ستون ۱ باشند، محور دومی وجود ندارد.

۷. برای معکوس کردن $E_{۳۱}$، ۷ برابر سطر ۱ را به سطر ۳ اضافه کنید. معکوس ماتریس حذف $E = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۷ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ برابر است با $E^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۷ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. ضرب $EE^{-۱} = I$ این موضوع را تأیید می‌کند.

۸. $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $M^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{bmatrix}$. دترمینان M^* یعنی $a(d-b) - b(c-a)$ به $ad - bc$ کاهش می‌یابد! کم کردن سطر ۱ از سطر ۲ دترمینان M را تغییر نمی‌دهد.

۹. $M = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$. پس از تعویض، نیاز داریم $E_{۳۱}$ (و نه $E_{۲۱}$) روی سطر ۳ جدید عمل کند.

۱۰. $E_{۱۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$؛ $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$؛ $E_{۳۱}E_{۱۳} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. روی ماتریس همانی امتحان کنید!

۱۱. یک مثال با دو محور منفی $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است. درایه‌های قطری می‌توانند در طول حذف علامت عوض کنند.

۱۲. حاصل‌ضرب اول $\begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۷ \\ ۶ & ۵ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است که سطرها و همچنین ستون‌ها معکوس شده‌اند. حاصل‌ضرب دوم $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ است.

۱۳. (الف) حاصل‌ضرب E در ستون سوم B، ستون سوم EB است. ستونی که با صفر شروع می‌شود، صفر باقی می‌ماند. (ب) E می‌تواند سطر ۲ را به سطر ۳ اضافه کند تا یک سطر صفر را به یک سطر غیرصفر تغییر دهد.

۱۴. $E_{۲۱}$ دارای $-_{۲۱} = \frac{۱}{۲}$، $E_{۳۲}$ دارای $-_{۳۲} = \frac{۲}{۳}$ و $E_{۴۳}$ دارای $-_{۴۳} = \frac{۳}{۴}$ است. در غیر این صورت، ماتریس‌های E با I مطابقت دارند.

۱۵. $a_{ij} = ۲i۳j$: $\begin{bmatrix} -۱ & -۴ & -۷ \\ ۰ & -۶ & -۱۲ \\ ۰ & -۱۲ & -۲۴ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -۱ & -۴ & -۷ \\ ۱ & -۲ & -۵ \\ ۳ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} = A$. صفر به ۱۲- تبدیل شد که مثالی از «پر شدن» (fill-in) است. برای حذف آن ۱۲-، $E_{۳۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را انتخاب کنید. هر ماتریس ۳ در ۳ با درایه‌های $a_{ij} = ci + dj$ منفرد است!

۱۶. (الف) سن X و Y برابر x و y است: $x ۲y = ۰$ و $x + y = ۳۳$؛ $x = ۲۲$ و $y = ۱۱$. (ب) خط $y = mx + c$ از نقاط $x = ۲, y = ۵$ و $x = ۳, y = ۷$ می‌گذرد وقتی $۲m + c = ۵$ و $۳m + c = ۷$. آنگاه $m = ۲$ شیب است.

۱۷. سهمی $y = a + bx + cx^{۲}$ از ۳ نقطه داده‌شده می‌گذرد وقتی:

$$a+b+c=۴$$
$$a+۲b+۴c=۸$$
$$a+۳b+۹c=۱۴$$

آنگاه $a=۲, b=۱, c=۱$. این ماتریس با ستون‌های $(۱,۱,۱), (۱,۲,۳), (۱,۴,۹)$ یک «ماتریس وندرموند» است.

۱۸. $EF = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & ۱ & ۰ \\ b & c & ۱ \end{bmatrix}, FE = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & ۱ & ۰ \\ b+ac & c & ۱ \end{bmatrix}, E^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲a & ۱ & ۰ \\ ۲b & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, F^{۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳c & ۱ \end{bmatrix}$.

۱۹. $PQ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$. در ترتیب مخالف، دو تعویض سطر $QP = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ را نتیجه می‌دهد، $P^{۲} = I$. اگر M سطرهای ۲ و ۳ را تعویض کند، آنگاه $M^{۲} = I$ (همچنین $(-M)^{۲} = I$). ریشه‌های دوم زیادی برای I وجود دارد: هر ماتریس $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ دارای $M^{۲} = I$ است اگر $a^{۲} + bc = ۱$.

۲۰. (الف) هر ستون EB برابر است با E ضرب در یک ستون از B. (ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۸ \end{bmatrix}$. تمام سطرهای EB مضربی از ‘[۱ ۲ ۴]’ هستند.

۲۱. خیر. $E = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ نتیجه می‌دهند $EF = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ اما $FE = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$.

۲۲. (الف) $\sum_j a_{۳j}x_j$ (ب) $a_{۲۱} - a_{۱۱}$ (ج) $a_{۲۱} - ۲a_{۱۱}$ (د) $(EAx)_{۱} = (Ax)_{۱} = \sum_j a_{۱j}x_j$.

۲۳. $E(EA)$، ۴ برابر سطر ۱ را از سطر ۲ کم می‌کند (EEA این عملیات سطری را دو بار انجام می‌دهد). AE، ۲ برابر ستون ۲ ماتریس A را از ستون ۱ کم می‌کند (ضرب از سمت راست در E به جای سطرها روی ستون‌ها عمل می‌کند).

۲۴. $A|b = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۱۷ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & -۵ & ۱۵ \end{bmatrix}$. سیستم مثلثی عبارت است از: $۲x_۱ + ۳x_۲ = ۱, -۵x_۲ = ۱۵$. جایگزینی معکوس $x_۱ = ۵$ و $x_۲ = -۳$ را می‌دهد.

۲۵. معادله آخر به $۳ = ۰$ تبدیل می‌شود. اگر عدد ۶ اصلی، ۳ بود، آنگاه سطر ۱ + سطر ۲ = سطر ۳. در این صورت معادله آخر $۰ = ۰$ می‌شود و سیستم بی‌نهایت جواب دارد.

۲۶. (الف) دو ستون b و b^* را اضافه کنید تا '[A b b*]' به دست آید. مثال به صورت زیر است:
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۷ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix} \to x = \begin{bmatrix} -۷ \\ ۲ \end{bmatrix} \text{ و } x^* = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \end{bmatrix}.$$

۲۷. (الف) اگر $d = ۰$ و $c \neq ۰$ جوابی وجود ندارد. (ب) اگر $d = ۰ = c$ جواب‌های زیادی وجود دارد. a, b تأثیری ندارند.

۲۸. $A = AI = A(BC) = (AB)C = IC = C$. آن معادله وسطی بسیار مهم است.

۲۹. $E = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ هر سطر را از سطر بعدی کم می‌کند. نتیجه $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ هنوز در یک ماتریس پاسکال ۳ در ۳ دارای مضرب‌های ۱ است. حاصل‌ضرب M از تمام ماتریس‌های حذف برابر است با $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & -۳ & ۱ \end{bmatrix}$. این «ماتریس پاسکال با علامت متناوب» در صفحه ۹۱ آمده است.

۳۰. (الف) $E = A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ سطر دوم EM را به '[۲ ۳]' کاهش می‌دهد. (ب) سپس $F = B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ سطر اول FEM را به '[۱ ۱]' کاهش می‌دهد. (ج) سپس $E = A^{-۱}$ دو بار، سطر دوم $EEFEM$ را به '[۰ ۱]' کاهش می‌دهد. (د) اکنون $EEFEM = B$. ماتریس‌های E و F را جابجا کنید تا $M = ABAAB$ به دست آید. این سوال بر روی ماتریس‌های با درایه‌های صحیح مثبت M با $ad - bc = ۱$ تمرکز دارد. همین مراحل درایه‌ها را کوچکتر و کوچکتر می‌کنند تا زمانی که M حاصل‌ضرب‌هایی از A و B شود.

.۳۱ $E_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۱ & & & \\ a & ۱ & & \\ ۰ & ۰ & ۱ & \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, E_{۳۲} = \begin{bmatrix} ۱ & & & \\ ۰ & ۱ & & \\ ۰ & b & ۱ & \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, E_{۴۳} = \begin{bmatrix} ۱ & & & \\ ۰ & ۱ & & \\ ۰ & ۰ & ۱ & \\ ۰ & ۰ & c & ۱ \end{bmatrix}, E_{۴۳}E_{۳۲}E_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۱ & & & \\ a & ۱ & & \\ ab & b & ۱ & \\ abc & bc & c & ۱ \end{bmatrix}.$