# ترجمه پاسخنامه مجموعه مسائل ۳.۱

صفحه ۲۹

## مجموعه مسائل ۳.۱، صفحه ۲۹

۱. $3s_1+4s_2+5s_3=(3,7,12)$. همین بردار $b$ از حاصلضرب ماتریس $S$ در بردار $x=(3,4,5)$ به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\text{سطر ۱})\cdot x\\(\text{سطر ۲})\cdot x\\(\text{سطر ۳})\cdot x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\\12\end{bmatrix}$$

۲. جواب‌ها عبارتند از $y_1=1,y_2=0,y_3=0$ (سمت راست = ستون اول) و $y_1=1,y_2=3,y_3=5$. آن مثال دوم نشان می‌دهد که مجموع $n$ عدد فرد اول برابر با $n^2$ است.

۳.

$$\begin{aligned}y_1&=B_1\\y_1+y_2&=B_2\\y_1+y_2+y_3&=B_3\end{aligned}\quad\text{می‌دهد}\quad\begin{aligned}y_1&=B_1\\y_2&=-B_1+B_2\\y_3&=-B_2+B_3\end{aligned}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس $S=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ است: ستون‌ها در $A$ و $S$ مستقل هستند!

۴. ترکیب $0w_1+0w_2+0w_3$ همیشه بردار صفر را می‌دهد، اما این مسئله به دنبال ترکیب‌های غیر صفر دیگری است (در این صورت بردارها وابسته هستند و در یک صفحه قرار می‌گیرند): $w_2=(w_1+w_3)/2$ بنابراین یک ترکیبی که حاصل آن صفر است $w_1-2w_2+w_3=0$ می‌باشد.

۵. سطرهای ماتریس ۳ در ۳ در مسئله ۴ نیز باید وابسته باشند: $r_2=\frac{1}{2}(r_1+r_3)$. ترکیب‌های ستونی و سطری که حاصل صفر می‌دهند یکسان هستند: این غیرمعمول است. دو جواب برای $y_1r_1+y_2r_2+y_3r_3=0$ عبارتند از $(Y_1,Y_2,Y_3)=(1,-2,1)$ و $(2,-4,2)$.

۶. برای $c=3$: $\begin{bmatrix}1&1&0\\3&2&1\\7&4&3\end{bmatrix}$ ستون ۳ = ستون ۱ - ستون ۲

برای $c=-1$: $\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ ستون ۳ = ـستون ۱ + ستون ۲

برای $c=0$: $\begin{bmatrix}0&0&0\\2&1&5\\3&3&6\end{bmatrix}$ ستون ۳ = ۳(ستون ۱) - ستون ۲

## راه حل تمرینات ۱۰

۷. هر سه سطر بر جواب $x$ عمود هستند (سه معادله $r_1 \cdot x = 0$ و $r_2 \cdot x = 0$ و $r_3 \cdot x = 0$ این را به ما می‌گویند). در نتیجه کل صفحه‌ی سطرها بر $x$ عمود است.

۸.

$$\begin{aligned} x_1 - 0 &= b_1 \\ x_2 - x_1 &= b_2 \\ x_3 - x_2 &= b_3 \\ x_4 - x_3 &= b_4 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 &= b_1 + b_2 \\ x_3 &= b_1 + b_2 + b_3 \\ x_4 &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \end{aligned} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = A^{-1}b$$

۹. ماتریس تفاضل چرخشی $C$ یک خط از جواب‌ها (در فضای ۴ بعدی) برای $Cx = 0$ دارد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{وقتی} \quad x = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \\ c \end{bmatrix}$$

۱۰.

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= b_1 \\ z_3 - z_2 &= b_2 \\ 0 - z_3 &= b_3 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} z_1 &= -b_1 - b_2 - b_3 \\ z_2 &= -b_2 - b_3 \\ z_3 &= -b_3 \end{aligned} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \Delta^{-1}b$$

۱۱. تفاضل‌های پیشروی توان‌های دوم برابر است با $(t+1)^2 - t^2 = 2t + 1$. تفاضل‌های توان $n$ام برابر است با $(t+1)^n - t^n = nt^{n-1} + \ldots$. جمله پیشرو، مشتق $nt^{n-1}$ است.

۱۲. به نظر می‌رسد ماتریس‌های تفاضل مرکزی با اندازه زوج، معکوس‌پذیر هستند.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_2 - b_4 \\ b_1 \\ -b_4 \\ b_1 + b_3 \end{bmatrix}$$

۱۳. اندازه فرد: پنج معادله تفاضل مرکزی منجر به $b_1 + b_3 + b_5 = 0$ می‌شود. با جمع معادلات ۱، ۳ و ۵، سمت چپ صفر و سمت راست $b_1 + b_3 + b_5$ می‌شود. پس جوابی وجود ندارد مگر اینکه $b_1 + b_3 + b_5 = 0$.

۱۴. یک مثال $(a, b) = (3, 6)$ و $(c, d) = (1, 2)$ است. اگر $a/c = b/d$ باشد، آنگاه $ad = bc$. با تقسیم بر $bd$ نتیجه می‌شود که $a/b = c/d$.