ترجمه پاسخنامه مجموعه مسائل ۷.۲

صفحه ۱۱۷

مجموعه مسائل ۷.۲، صفحه ۱۱۷

۱. $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۹ & ۳ \end{bmatrix}$ دارای $A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۹ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$، $A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۳ & ۱/۳ \end{bmatrix}$ و $(A^{-۱})^T = (A^T)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۱/۳ \end{bmatrix}$ است؛ $A = \begin{bmatrix} ۱ & c \\ c & ۰ \end{bmatrix}$ دارای $A^T = A$ و $A^{-۱} = \frac{۱}{-c^۲}\begin{bmatrix} ۰ & -c \\ -c & ۱ \end{bmatrix}$ است که این نیز متقارن است $.(A^{-۱})^T = A^{-۱}$

۲. $B^TA^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix} = (AB)^T$. این پاسخ با A^TB^T متفاوت است (مگر زمانی که $AB = BA$ باشد و ترانهاده‌گیری نتیجه دهد $B^TA^T = A^TB^T$).

۳. (الف) $((AB)^{-۱})^T = (B^{-۱}A^{-۱})^T = (A^{-۱})^T(B^{-۱})^T$. این همچنین برابر است با $.(A^T)^{-۱}(B^T)^{-۱}$
(ب) اگر U بالا‒ مثلثی باشد، $U^{-۱}$ نیز چنین است: آنگاه $(U^{-۱})^T$ پایین‒ مثلثی است.

۴. $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ دارای $A^۲ = ۰$ است. اما قطر A^TA حاصلضرب‌های داخلی ستون‌های A در خودشان را دارد. اگر $A^TA = ۰$ باشد، حاصلضرب‌های داخلی صفر $\Rightarrow$ ستون‌های صفر $\Rightarrow$ A = ماتریس صفر.

۵. (الف) $x^TAy = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۵$. (ب) این برابر است با سطر $x^TA = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ ضربدر y. (ج) این همچنین برابر است با سطر x^T ضربدر $.Ay = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$

۶. $M^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$؛ برای اینکه $M^T = M$ باشد، باید $A^T = A$، $B^T = C$ و $D^T = D$ باشد.

۷. (الف) غلط: $\begin{bmatrix} ۰ & A \\ A^T & ۰ \end{bmatrix}$ متقارن است. (ب) غلط: ترانهاده AB برابر با $B^TA^T = BA$ است. بنابراین $(AB)^T = AB$ نیاز به $BA = AB$ دارد. (ج) صحیح: ماتریس‌های متقارن معکوس‌پذیر، معکوس‌های متقارن دارند! ساده‌ترین اثبات، ترانهاده گرفتن از $AA^{-۱} = I$ است. (د) صحیح: $(ABC)^T = C^TB^TA^T$ (= CBA برای ماتریس‌های متقارن A، B، C).

۸. عدد ۱ در سطر اول n انتخاب دارد؛ سپس ۱ در سطر دوم ‎n-1‎ انتخاب دارد ... (در کل n! حالت).

۹. $P_۱P_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ اما $P_۲P_۱ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. اگر $P_۳$ و $P_۴$ جفت‌های متفاوتی از سطرها را جابجا کنند، $P_۳P_۴ = P_۴P_۳$ و هر دو جابجایی را انجام می‌دهند.

۱۰. جایگشت‌های (۴،۲،۱،۳) و (۴،۱،۳،۲) عنصر ۴ را در جای خود نگه می‌دارند؛ ۶ جایگشت زوج دیگر عنصر ۱ یا ۲ یا ۳ را ثابت نگه می‌دارند؛ جایگشت‌های (۳،۴،۱،۲) و (۲،۱،۴،۳) و (۱،۲،۳،۴) دو جفت را جابجا می‌کنند. جایگشت (۴،۳،۲،۱) همانی است. مجموعاً ۱۲ جایگشت زوج وجود دارد.

۱۱. $PA = \begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۰&۰&۱\\۱&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۰&۶\\۱&۲&۳\\۰&۴&۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۰&۴&۵\\۰&۰&۶\end{bmatrix}$ بالا مثلثی است. ضرب A از سمت راست در ماتریس جایگشت $P_۲$، ستون‌های A را جابجا می‌کند. برای پایین مثلثی کردن این A، نیاز داریم که $P_۱$ نیز سطرهای ۲ و ۳ را جابجا کند: $P_۱AP_۲ = \begin{bmatrix}۱&&\\&&۱\\&۱&\end{bmatrix} A \begin{bmatrix}&&۱\\&۱&\\۱&&\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۶&۰&۰\\۵&۴&۰\\۳&۲&۱\end{bmatrix}$.

۱۲. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^TP^TP\boldsymbol{y} = (P\boldsymbol{x})^T(P\boldsymbol{y})$ زیرا $P^TP = I$. به طور کلی $P\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\cdot P^T\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}\cdot P\boldsymbol{y}$.

۱۳. یک ماتریس جایگشت دوری مانند $P = \begin{bmatrix}۰&۱&۰\\۰&۰&۱\\۱&۰&۰\end{bmatrix}$ یا ترانهاده آن دارای $P^۳ = I$ است: (۳،۲،۱) -> (۱،۳،۲) -> (۲،۱،۳) -> (۳،۲،۱). جایگشت $P' = \begin{bmatrix}۱&۰\\۰&P\end{bmatrix}$ دارای $(P')^۳ = I$ است.

۱۴. «ماتریس همانی معکوس» P، بردار (۱،...،n) را به (n،...،۱) می‌برد. وقتی سطرها و همچنین ستون‌ها معکوس شوند، درایه‌های ۱،۱ و n،n در ماتریس A در PAP^T جابجا می‌شوند. درایه‌های ۱n، و n۱، نیز همینطور. به طور کلی، $(PAP^T)_{ij}$ برابر با $(A)_{n-i+۱,n-j+۱}$ است.

۱۵. (الف) اگر P سطر ۱ را به سطر ۴ ببرد، آنگاه P^T سطر ۴ را به سطر ۱ می‌برد. (ب) $P = \begin{bmatrix}E&۰\\۰&E\end{bmatrix} = P^T$ با $E = \begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ تمام سطرها را جابجا می‌کند: ۱ و ۲ جابجا می‌شوند، ۳ و ۴ جابجا می‌شوند.

۱۶. $A^۲ - B^۲$ و همچنین ABA متقارن هستند اگر A و B متقارن باشند. اما $(A+B)(A-B)$ و $ABAB$ به طور کلی متقارن نیستند.

۱۷. (الف) $S = \begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۱\end{bmatrix} = S^T$ معکوس‌پذیر نیست. (ب) $S = \begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۱\end{bmatrix}$ نیاز به جابجایی سطر دارد. (ج) $S = \begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$ دارای محورهای $D = \begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$ است: ریشه دوم حقیقی ندارد.

۱۸. (الف) ۱۵ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ درایه مستقل اگر $S = S^T$ باشد. (ب) L دارای ۱۰ درایه و D دارای ۵ درایه است؛ مجموعاً ۱۵ درایه در LDL^T. (ج) اگر $A^T = -A$ باشد، قطر صفر است و ۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ انتخاب باقی می‌ماند.

۱۹. (الف) ترانهاده A^TSA برابر است با $A^TS^TA = A^TSA$ که ماتریسی n×n است وقتی $S^T = S$ (برای هر ماتریس m×n مانند A). (ب) $(A^TA)_{jj} =$ (ستون j از A)·(ستون j از A) = (طول مربع ستون j) ≥ ۰.

۲۰. $\begin{bmatrix}۱&۳\\۳&۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱&۰\\۳&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&-۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}۱&b\\b&c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱&۰\\b&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&c-b^۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&b\\۰&۱\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}۲&-۱&۰\\-۱&۲&-۱\\۰&-۱&۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱&&\\-۱/۲&۱&\\۰&-۲/۳&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&&\\&۳/۲&\\&&۴/۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱/۲&۰\\&۱&-۲/۳\\&&۱\end{bmatrix} = LDL^T$.

۲۱. حذف روی یک ماتریس متقارن ۳×۳، یک ماتریس متقارن ۲×۲ در پایین سمت راست باقی می‌گذارد. $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۸ \\ ۴ & ۳ & ۹ \\ ۸ & ۹ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ به ترتیب به $\begin{bmatrix} -۵ & -۷ \\ -۷ & -۳۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} d-b^۲ & e-bc \\ e-bc & f-c^۲ \end{bmatrix}$ منجر می‌شوند که متقارن هستند!

۲۲. $\begin{bmatrix} & ۱ & \\ ۱ & & \\ & & ۱ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۱ & & \\ ۰ & ۱ & \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ & ۱ & ۱ \\ & & -۱ \end{bmatrix}$.

۲۳. $P = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = A$ و $L = U = I$. حذف روی این $A = P$، سطرهای ۱-۲، سپس ۲-۳ و سپس ۳-۴ را جابجا می‌کند.

۲۴. $PA = LU$ به صورت $\begin{bmatrix} & & ۱ \\ & ۱ & \\ ۱ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۸ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & & \\ ۰ & ۱ & \\ ۰ & ۱/۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ & ۳ & ۸ \\ & & -۲/۳ \end{bmatrix}$ است.

۲۵. یک راه برای تشخیص زوج یا فرد بودن یک جایگشت، شمردن تمام جفت‌هایی است که P در ترتیب اشتباه قرار داده است. آنگاه P زوج یا فرد است وقتی آن شمارش زوج یا فرد باشد. مرحله دشوار: نشان دهید که یک جابجایی همیشه آن شمارش را تغییر می‌دهد! آنگاه ۳ یا ۵ جابجایی آن شمارش را فرد باقی می‌گذارند.

۲۶. (الف) $E_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۱ & & \\ -۳ & ۱ & \\ & & ۱ \end{bmatrix}$ درایه (۱،۲) ماتریس $E_{۲۱}A$ را صفر می‌کند. آنگاه $E_{۲۱}AE_{۲۱}^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۴ & ۹ \end{bmatrix}$ هنوز متقارن است و درایه (۲،۱) آن نیز صفر است. (ب) اکنون از $E_{۳۲} = \begin{bmatrix} ۱ & & \\ & ۱ & \\ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ استفاده کنید تا درایه (۲،۳) صفر شود و $E_{۳۲}E_{۲۱}AE_{۲۱}^TE_{۳۲}^T = D$ نیز درایه (۳،۲) خود را صفر خواهد داشت. نکته کلیدی: حذف از هر دو طرف (سطرها + ستون‌ها) تجزیه متقارن LDL^T را نتیجه می‌دهد.

۲۷. $A^T = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} = A$ در هر سطر خود ۰،۱،۲،۳ را دارد. من قانونی برای چنین ساختار متقارنی (ماتریس هانکل با پادقطرهای ثابت) نمی‌شناسم.

۲۸. مرتب‌سازی مجدد سطرها و/یا ستون‌های $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ درایه a را جابجا می‌کند. بنابراین نتیجه نمی‌تواند ترانهاده باشد (که a را جابجا نمی‌کند).

۲۹. (الف) جریان‌های کل $\begin{bmatrix} y_{BC}+y_{BS} \\ -y_{BC}+y_{CS} \\ -y_{CS}-y_{BS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{BC} \\ y_{CS} \\ y_{BS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ \end{bmatrix} = A^T\boldsymbol{y}$ هستند. (ب) در هر دو حالت $(A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T(A^T\boldsymbol{y}) = x_By_{BC} + x_By_{BS} - x_Cy_{BC} + x_Cy_{CS} - x_Sy_{CS} - x_Sy_{BS}$. شش جمله.

۳۰. $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1 & 50\\ 40 & 1000\\ 2 & 50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$؛ $A^T\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}1 & 40 & 2\\ 50 & 1000 & 50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}700\\ 3\\ 3000\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6820\\ 188000\end{bmatrix}$ (۱ کامیون، ۱ هواپیما).

۳۱. $A\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ هزینه ورودی‌هاست در حالی که $\boldsymbol{x}\cdot A^T\boldsymbol{y}$ ارزش خروجی‌هاست.

۳۲. $P^3 = I$ بنابراین سه دوران برای ۳۶۰ درجه؛ P هر بردار v را حول خط (۱،۱،۱) به اندازه ۱۲۰ درجه می‌چرخاند.

۳۳. $EH = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 9\end{bmatrix}$ = (ماتریس مقدماتی) ضربدر (ماتریس متقارن).

۳۴. $L(U^T)^{-1}$ حاصلضرب پایین‌مثلثی در پایین‌مثلثی است، بنابراین پایین‌مثلثی است. ترانهاده U^TDU برابر با $(U^TDU)^T = U^TD^T(U^T)^T = U^TDU$ است، بنابراین U^TDU متقارن است.

۳۵. اینها گروه هستند: ماتریس‌های پایین‌مثلثی با درایه‌های قطری ۱، ماتریس‌های قطری معکوس‌پذیر D، ماتریس‌های جایگشت P، ماتریس‌های متعامد با $Q^T = Q^{-1}$.

۳۶. قطعاً B^T شمال‌ـغربی است. B^2 یک ماتریس کامل است! B^{-1} جنوب‌ـشرقی است. سطرهای B به ترتیب معکوس از یک ماتریس پایین‌مثلثی L هستند، بنابراین $B = PL$. آنگاه $B^{-1} = L^{-1}P^{-1}$ ستون‌ها را به ترتیب معکوس از L^{-1} دارد. بنابراین B^{-1} جنوب‌ـشرقی است.

۳۷. تعداد n! ماتریس جایگشت از مرتبه n وجود دارد. سرانجام دو توان از P باید همان جایگشت باشند. و اگر $P^r = P^s$ باشد، آنگاه $P^{r-s} = I$. قطعاً $r - s \le n!$.

۳۸. برای تجزیه ماتریس M به (متقارن S) + (پادمتقارن A)، تنها انتخاب این است که $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ و $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$.

۳۹. از $Q^TQ = I$ شروع کنید، به این صورت: $\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^T\\ \boldsymbol{q}_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. (الف) درایه‌های قطری نتیجه می‌دهند $\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{q}_1 = 1$ و $\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{q}_2 = 1$: بردارهای یکه. (ب) درایه غیرقطری $\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{q}_2 = 0$ است (و به طور کلی $\boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{q}_j = 0$). (ج) مثال اصلی برای Q، ماتریس دوران $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ است.