فصل ۱

فصل ۱: مقدمه‌ای بر بردارها

۱.۱ بردارها و ترکیب‌های خطی

۲.۱ طول‌ها و ضرب‌های داخلی

۳.۱ ماتریس‌ها

۱. $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ۳ در ۲ است: $m = ۳$ سطر و $n = ۲$ ستون.

۲. $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$ یک ترکیب خطی از ستون‌ها است.

۳. سه مؤلفه $A\mathbf{x}$ حاصلضرب داخلی ۳ سطر ماتریس A با بردار $\mathbf{x}$ هستند.

۴. معادلات به شکل ماتریسی $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: $\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{bmatrix}$ جایگزین دستگاه $۲x_۱ + ۵x_۲ = b_۱$ و $x_۱ + x_۲ = b_۲$ می‌شود.

۵. جواب $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{x} = A^{-۱}\mathbf{b}$ نوشت. اما برخی ماتریس‌ها $A^{-۱}$ ندارند.

این بخش با سه بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ شروع می‌کند. من آن‌ها را با استفاده از ماتریس‌ها ترکیب خواهم کرد.

$$\text{سه بردار} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

ترکیب‌های خطی آن‌ها در فضای سه بعدی به صورت $x_۱\mathbf{u} + x_۲\mathbf{v} + x_۳\mathbf{w}$ است:

$$x_۱ \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + x_۲ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} + x_۳ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ - x_۱ \\ x_۳ - x_۲ \end{bmatrix} \tag{۱.۱}$$

اکنون یک نکته مهم: آن ترکیب را با استفاده از یک ماتریس بازنویسی می‌کنیم. بردارهای $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ به ستون‌های ماتریس A تبدیل می‌شوند. آن ماتریس، بردار $(x_۱, x_۲, x_۳)$ را «ضرب» می‌کند:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ - x_۱ \\ x_۳ - x_۲ \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس ضربدر بردار} \qquad (۲.۱)$$

اعداد $x_۱, x_۲, x_۳$ مؤلفه‌های یک بردار $\mathbf{x}$ هستند. حاصلضرب ماتریس A در بردار $\mathbf{x}$ همان ترکیب $x_۱\mathbf{u} + x_۲\mathbf{v} + x_۳\mathbf{w}$ از سه ستون در معادله (۱) است.

(توضیح مترجم: دو دیدگاه برای ضرب ماتریس در بردار)
این بخش مهم‌ترین ایده این فصل را معرفی می‌کند. برای محاسبه حاصلضرب $A\mathbf{x}$ دو راه وجود دارد:

۱. دیدگاه سطری (روشی که معمولاً ابتدا یاد می‌گیریم): حاصلضرب $A\mathbf{x}$ برداری است که هر مؤلفه آن، حاصل ضرب داخلی یکی از سطرهای ماتریس A در بردار $\mathbf{x}$ است.

$$\begin{bmatrix} \text{—— سطر ۱ ——} \\ \text{—— سطر ۲ ——} \\ \text{—— سطر ۳ ——} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\text{سطر ۱}) \cdot \mathbf{x} \\ (\text{سطر ۲}) \cdot \mathbf{x} \\ (\text{سطر ۳}) \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

۲. دیدگاه ستونی (مهم‌ترین دیدگاه در جبر خطی): حاصلضرب $A\mathbf{x}$ یک ترکیب خطی از ستون‌های ماتریس A است که ضرایب این ترکیب، مؤلفه‌های بردار $\mathbf{x}$ هستند.

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = x_۱\mathbf{u} + x_۲\mathbf{v} + x_۳\mathbf{w}$$

این دو دیدگاه دقیقاً یک نتیجه را می‌دهند، اما دیدگاه ستونی از نظر مفهومی بسیار قدرتمندتر است و به ما کمک می‌کند تا بفهمیم معادلات خطی واقعاً به چه معنا هستند.

معادلات خطی

یک تغییر دیدگاه دیگر حیاتی است. تا به حال، اعداد $x_۱, x_۲, x_۳$ معلوم بودند. ما بردار $\mathbf{b}$ را با ضرب کردن A در $\mathbf{x}$ پیدا می‌کردیم. اکنون ما $\mathbf{b}$ را معلوم فرض کرده و به دنبال $\mathbf{x}$ می‌گردیم.

- سوال قدیم: ترکیب خطی $x_۱\mathbf{u} + x_۲\mathbf{v} + x_۳\mathbf{w}$ را برای یافتن $\mathbf{b}$ محاسبه کنید.
- سوال جدید: کدام ترکیب از $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ بردار خاص $\mathbf{b}$ را تولید می‌کند؟

این مسئله معکوس است—یافتن ورودی $\mathbf{x}$ که خروجی مطلوب $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ را بدهد. شما این را قبلاً به عنوان یک دستگاه معادلات خطی برای $x_۱, x_۲, x_۳$ دیده‌اید.

$$\text{معادلات} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \begin{cases} x_1 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \\ -x_2 + x_3 = b_3 \end{cases} \qquad \text{جواب} \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_1 + b_2 \\ x_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

باید اعتراف کنم—اکثر دستگاه‌های خطی به این راحتی حل نمی‌شوند. در این مثال، معادلات را می‌توان به ترتیب (از بالا به پایین) حل کرد زیرا A یک ماتریس مثلثی است.

ماتریس معکوس

بیایید جواب x را در معادله (۶) تکرار کنیم. یک ماتریس «جمع» ظاهر خواهد شد!

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{با جواب} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad (۳.۱)$$

اگر تفاضل‌های xها برابر با bها باشند، آنگاه جمع‌های bها برابر با xها هستند. این برای اعداد فرد $\mathbf{b} = (1, 3, 5)$ و مربع‌های کامل $\mathbf{x} = (1, 4, 9)$ صادق بود. این برای همه بردارها صادق است. ماتریس جمع در معادله (۷) معکوس (A^{-1}) ماتریس تفاضلی A است.

مثال: تفاضل‌های بردار $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ برابر با $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ است. بنابراین $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ و $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

معادله (۷) برای بردار جواب $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ دو حقیقت مهم را به ما می‌گوید:

۱. برای هر $\mathbf{b}$، یک جواب برای $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ وجود دارد.

۲. ماتریس A^{-1} جواب $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ را تولید می‌کند.

فصول بعدی به دیگر معادلات $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ می‌پردازند. آیا جوابی وجود دارد؟ چگونه آن را پیدا کنیم؟

(توضیح مترجم: ارتباط با حسابان)

بیایید این ماتریس‌های خاص را به حسابان متصل کنیم. بردار x به یک تابع x(t) تبدیل می‌شود. تفاضل‌های $A\mathbf{x}$ به مشتق $dx/dt = b(t)$ تبدیل می‌شوند. در جهت معکوس، جمع‌های $A^{-1}\mathbf{b}$ به انتگرال b(t) تبدیل می‌شوند. جمع تفاضل‌ها مانند انتگرال مشتق‌هاست. قضیه اساسی حسابان می‌گوید: انتگرال‌گیری معکوس مشتق‌گیری است.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ و } \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \iff \quad \frac{dx}{dt} = b(t) \text{ و } x(t) = \int_0^t b(\tau)d\tau \qquad (۴.۱)$$

تفاضل مربع‌های کامل ۰، ۱، ۴، ۹ اعداد فرد ۱، ۳، ۵ هستند. مشتق $x(t) = t^2$ برابر با $2t$ است. یک قیاس کامل باید اعداد زوج b=(۲،۴،۶) را در زمان‌های t=۱،۲،۳ تولید می‌کرد. اما تفاضل‌ها با مشتق‌ها یکسان نیستند، و ماتریس A ما به

جای $2t$، $2t-1$ را تولید می‌کند:

$$x(t)-x(t-1)=t^2-(t-1)^2=t^2-(t^2-2t+1)=2t-1 \quad \text{تفاضل پس‌رو:} \qquad (5.1)$$

مجموعه مسائل نشان خواهد داد که «تفاضل‌های پیش‌رو» $2t+1$ را تولید می‌کنند. بهترین انتخاب (که همیشه در دوره‌های حسابان دیده نمی‌شود) یک تفاضل مرکزی است که از $x(t+1)-x(t-1)$ استفاده می‌کند. این Δx را بر فاصله Δt از $t-1$ تا $t+1$ که برابر با ۲ است، تقسیم کنید:

$$\frac{(t+1)^2-(t-1)^2}{2}=\frac{4t}{2}=2t \quad \text{(دقیقاً)} \qquad \text{تفاضل مرکزی از } x(t)=t^2: \qquad (6.1)$$

ماتریس‌های تفاضلی عالی هستند. نوع مرکزی بهترین است. مثال دوم ما معکوس‌پذیر نیست.

اختلاف‌های دوری

این مثال ستون‌های $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را حفظ می‌کند اما $\mathbf{w}$ را به یک بردار جدید $\mathbf{w}^*$ تغییر می‌دهد:

$$\text{مثال دوم} \quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \quad \mathbf{w}^*=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

اکنون ترکیب‌های خطی از $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}^*$ به یک ماتریس اختلاف «دوری» C منجر می‌شود:

$$C\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_3\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}=\mathbf{b} \qquad (7.1)$$

این ماتریس C معکوس‌پذیر نیست. حل $C\mathbf{x}=\mathbf{b}$ غیرممکن است، زیرا معادلات یا بی‌نهایت جواب دارند (گاهی) یا هیچ جوابی ندارند (معمولاً).

- بی‌نهایت جواب برای $C\mathbf{x}=0$: هر بردار ثابت مانند $\mathbf{x}=(c,c,c)$ اختلاف‌های دوری صفر دارد.
- هیچ جوابی برای $C\mathbf{x}=\mathbf{b}$: سمت چپ‌های معادله $(x_1-x_3)+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)$ همیشه با هم جمع شده و صفر می‌شوند. بنابراین، برای اینکه جوابی وجود داشته باشد، سمت راست‌ها نیز باید جمعشان صفر شود: $b_1+b_2+b_3=0$. اگر این شرط برقرار نباشد، جوابی وجود ندارد.

استقلال و وابستگی

بیایید این موضوع را به صورت هندسی ببینیم.

- استقلال خطی: ستون‌های ماتریس A یعنی $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$، در یک صفحه قرار ندارند. ترکیب‌های خطی آن‌ها تمام فضای سه بعدی را پر می‌کنند. به همین دلیل $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ همیشه جواب دارد.
- وابستگی خطی: ستون‌های ماتریس C یعنی $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}^*)$، همگی در یک صفحه قرار دارند. ترکیب‌های خطی آن‌ها فقط می‌توانند بردارهایی را در همان صفحه تولید کنند. دلیل آن این است که $\mathbf{w}^*$ خود ترکیبی از $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است: $\mathbf{w}^*=-\mathbf{u}-\mathbf{v}$. بنابراین، بردار سوم هیچ «جهت جدیدی» به مجموعه اضافه نمی‌کند.

تصویر شکل ۱۰.۱ در اینجا قرار می‌گیرد

شکل ۱.۱: بردارهای مستقل $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. بردارهای وابسته $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}^*$ در یک صفحه.

این دو کلمه کلیدی جبر خطی هستند:

- بردارهای مستقل: تنها ترکیب خطی که حاصل آن صفر است، ترکیب بدیهی است (همه ضرایب صفر). ماتریس حاصل، معکوس‌پذیر است.
- بردارهای وابسته: ترکیب‌های غیربدیهی وجود دارند که حاصلشان صفر است. ماتریس حاصل، تکین (منفرد) یا معکوس‌ناپذیر است.

مروری بر ایده‌های کلیدی (بخش ۳.۱)

۱. ضرب ماتریس در بردار ($A\mathbf{x}$): یک ترکیب خطی از ستون‌های A است.

۲. جواب معادله $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ برابر با $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ است، زمانی که A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد.

۳. ماتریس دوری C معکوس ندارد. سه ستون آن در یک صفحه قرار دارند. این ستون‌های وابسته با هم جمع شده و بردار صفر را می‌دهند. $C\mathbf{x} = 0$ بی‌نهایت جواب دارد.

۴. این بخش نگاهی به آینده و ایده‌های کلیدی دارد که هنوز به طور کامل توضیح داده نشده‌اند.

مثال‌های حل شده

مثال ۳.۱ الف

درایه جنوب غربی a_{31} ماتریس A (سطر ۳، ستون ۱) را به $a_{31} = 1$ تغییر دهید:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

جواب $\mathbf{x}$ را برای هر $\mathbf{b}$ بیابید. از $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ ماتریس معکوس A^{-1} را استخراج کنید.
راه حل: دستگاه مثلثی $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ را از بالا به پایین حل می‌کنیم:

- از سطر اول: $x_1 = b_1$
- از سطر دوم: $-x_1 + x_2 = b_2 \implies x_2 = x_1 + b_2 = b_1 + b_2$
- از سطر سوم: $x_1 - x_2 + x_3 = b_3 \implies x_3 = -x_1 + x_2 + b_3 = -b_1 + (b_1 + b_2) + b_3 = b_2 + b_3$

پس جواب به صورت $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ برابر است با:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ b_2 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \implies A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۳.۱ ب

E یک ماتریس حذفی است. E یک عمل تفریق انجام می‌دهد و E^{-1} یک عمل جمع.

$$\mathbf{b} = E\mathbf{x} \implies \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

معادله اول $x_1 = b_1$ است. معادله دوم $x_2 - lx_1 = b_2$ است. معکوس، lb_1 را به b_2 اضافه خواهد کرد:

$$\mathbf{x} = E^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

مجموعه مسائل ۳.۱

۱. ترکیب خطی $۳\mathbf{s}_۱ + ۴\mathbf{s}_۲ + ۵\mathbf{s}_۳ = \mathbf{b}$ را بیابید. سپس $\mathbf{b}$ را به صورت ضرب ماتریس‌ـ بردار $S\mathbf{x}$ بنویسید، که در آن ۳، ۴ و ۵ در $\mathbf{x}$ قرار دارند. سه ضرب داخلی (سطرهای S)$\cdot\mathbf{x}$ را محاسبه کنید:

$$\mathbf{s}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_۳ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۲. معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۹ \end{bmatrix}$$

S یک ماتریس جمع است. مجموع ۵ عدد فرد اول برابر با ___ است.

۳. این سه معادله را برای $y_۱, y_۲, y_۳$ بر حسب $c_۱, c_۲, c_۳$ حل کنید:

$$S\mathbf{y} = \mathbf{c} \quad \text{که در آن} \quad S = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

جواب $\mathbf{y}$ را به صورت یک ماتریس $A = S^{-۱}$ ضربدر بردار $\mathbf{c}$ بنویسید. آیا ستون‌های S مستقل هستند یا وابسته؟

۴. ترکیبی از $x_۱\mathbf{w}_۱ + x_۲\mathbf{w}_۲ + x_۳\mathbf{w}_۳$ را بیابید که با $x_۱ = ۱$ برابر با بردار صفر شود:

$$\mathbf{w}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_۲ = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \\ ۶ \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_۳ = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۸ \\ ۹ \end{bmatrix}$$

این بردارها (مستقل) (وابسته) هستند. این سه بردار در یک ___ قرار دارند. ماتریس W با این سه ستون معکوس‌پذیر نیست.

۵. سطرهای ماتریس W (در مسئله قبل) سه بردار زیر را تولید می‌کنند (که آنها را به صورت ستونی می‌نویسیم):

$$\mathbf{r}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \\ ۷ \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_۲ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \\ ۸ \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_۳ = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۶ \\ ۹ \end{bmatrix}$$

جبر خطی می‌گوید که این بردارها نیز باید در یک صفحه قرار گیرند. بنابراین، باید ترکیب‌های زیادی به صورت $y_۱\mathbf{r}_۱ + y_۲\mathbf{r}_۲ + y_۳\mathbf{r}_۳ = ۰$ وجود داشته باشد. دو مجموعه از yها را بیابید.

۶. چه اعدادی برای c ستون‌های زیر را وابسته می‌کنند تا ترکیبی از ستون‌ها برابر با صفر شود؟

$$\begin{bmatrix} ۱ & c \\ c & ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & c & ۵ \\ ۶ & ۷ & ۸ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c & c & c \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}$$

۷. اگر ستون‌ها در $A\mathbf{x} = ۰$ ترکیب شوند، آنگاه هر یک از سطرها $\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} = ۰$ دارد:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_۱ \\ \mathbf{r}_۲ \\ \mathbf{r}_۳ \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_۱ \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{r}_۲ \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{r}_۳ \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

سه سطر نیز در یک صفحه قرار دارند. چرا آن صفحه بر $\mathbf{x}$ عمود است؟

۸. با رفتن به یک معادله تفاضلی ۴ در ۴، $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$، چهار مؤلفه $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴$ را بیابید. سپس این جواب را به صورت $\mathbf{x} = A^{-۱}\mathbf{b}$ بنویسید تا ماتریس معکوس را بیابید:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \\ b_۴ \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

۹. ماتریس تفاضلی دوری ۴ در ۴، C، چیست؟ این ماتریس در هر سطر و هر ستون یک ۱ و یک ۱- خواهد داشت. تمام جواب‌های $\mathbf{x} = (x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ برای $C\mathbf{x} = ۰$ را بیابید. چهار ستون C در یک «ابرصفحه سه بعدی» درون فضای چهار بعدی قرار دارند.

۱۰. یک ماتریس تفاضل پیشرو Δ، بالا_ مثلثی است:

$$\Delta\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_۱ \\ z_۲ \\ z_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$z_۱, z_۲, z_۳$ را از روی $b_۱, b_۲, b_۳$ بیابید. ماتریس معکوس در رابطه $\mathbf{z} = \Delta^{-۱}\mathbf{b}$ چیست؟

۱۱. نشان دهید که تفاضل‌های پیشرو $(t+۱)^۲ - t^۲$ برابر با $۲t + ۱$ (اعداد فرد) هستند. مانند حسابان، تفاضل $(t+۱)^n - t^n$ با مشتق t^n که برابر با ___ است، شروع خواهد شد.

۱۲. آخرین خطوط مثال حل شده می‌گویند که ماتریس تفاضل مرکزی ۴ در ۴ در معادله (۱۶) معکوس‌پذیر است. $C\mathbf{x} = (b_۱, b_۲, b_۳, b_۴)$ را حل کنید تا معکوس آن را در $\mathbf{x} = C^{-۱}\mathbf{b}$ بیابید.

۱۳. مسائل چالشی:

۱۴. آخرین کلمات می‌گویند که ماتریس تفاضل مرکزی ۵ در ۵ معکوس‌پذیر نیست. ۵ معادله $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ را بنویسید. ترکیبی از سمت چپ‌ها را بیابید که صفر بدهد. چه ترکیبی از $b_۱, b_۲, b_۳, b_۴, b_۵$ باید صفر باشد؟

۱۵. اگر (a, b) مضربی از (c, d) باشد و $abcd \neq 0$، نشان دهید که (a, c) مضربی از (b, d) است. این به طور شگفت‌انگیزی مهم است. این سوال به این نتیجه منجر خواهد شد: اگر ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ سطرهای وابسته داشته باشد، آنگاه ستون‌های وابسته نیز دارد.