ترجمه پاسخنامه مجموعه مسائل ۱.۱

صفحه ۸

۲۸ تیر ۱۴۰۴

مجموعه مسائل ۱.۱، صفحه ۸

۱. ترکیب‌ها (الف) یک خط در $R^{۳}$ (ب) یک صفحه در $R^{۳}$ (ج) تمام فضای $R^{۳}$ را تولید می‌کنند.

۲. $v + w = (۲, ۳)$ و $v - w = (۶, -۱)$ قطرهای متوازی‌الاضلاعی خواهند بود که v و w دو ضلع آن هستند که از مبدأ $(۰, ۰)$ خارج می‌شوند.

۳. این مسئله قطرهای $v + w$ و $v - w$ یک متوازی‌الاضلاع را داده و اضلاع آن را می‌خواهد: برعکس مسئله ۲. در این مثال $v = (۳, ۳)$ و $w = (۲, -۲)$ هستند.

۴. $۳v + w = (۷, ۵)$ و $cv + dw = (۲c + d, c + ۲d)$.

۵. $u + v = (-۲, ۳, ۱)$ و $u + v + w = (۰, ۰, ۰)$ و $۲u + ۲v + w =$ (با افزودن پاسخ‌های اول) $= (-۲, ۳, ۱)$. بردارها u، v و w در یک صفحه قرار دارند زیرا ترکیبی از آنها بردار $(۰, ۰, ۰)$ را نتیجه می‌دهد. به بیانی دیگر: $u = -v - w$ در صفحه‌ای است که توسط v و w ساخته می‌شود.

۶. مجموع مؤلفه‌های هر $cv + dw$ صفر است زیرا مجموع مؤلفه‌های v و w صفر است. $c = ۳$ و $d = ۹$ بردار $(۳, ۳, -۶)$ را می‌دهد. هیچ جوابی برای $cv + dw = (۳, ۳, ۶)$ وجود ندارد زیرا مجموع $۳ + ۳ + ۶$ صفر نیست.

۷. نُه ترکیب $c(۲, ۱) + d(۰, ۱)$ با مقادیر $c = ۰, ۱, ۲$ و $d = ۰, ۱, ۲$ بر روی یک شبکه قرار می‌گیرند. اگر تمام اعداد صحیح c و d را در نظر بگیریم، این شبکه کل صفحه را پوشش می‌دهد.

۸. قطر دیگر $v - w$ (یا $w - v$) است. جمع کردن قطرها $۲v$ (یا $۲w$) را نتیجه می‌دهد.

۹. گوشه چهارم می‌تواند $(۴, ۴)$ یا $(۴, ۰)$ یا $(-۲, ۲)$ باشد. سه متوازی‌الاضلاع ممکن وجود دارد!

۱۰. $i - j = (۱, ۱, ۰)$ در صفحه پایه (صفحه x-y) قرار دارد. $i + j + k = (۱, ۱, ۱)$ گوشه مقابل $(۰, ۰, ۰)$ است. نقاط درون مکعب در شرایط $۰ \leq x \leq ۱$، $۰ \leq y \leq ۱$، $۰ \leq z \leq ۱$ صدق می‌کنند.

۱۱. چهار گوشه دیگر: $(۰, ۱, ۱)$، $(۱, ۰, ۱)$، $(۱, ۱, ۰)$، $(۱, ۱, ۱)$. نقطه مرکزی $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ است. مراکز وجوه عبارتند از $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۰)$، $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۱)$ و $(۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$، $(۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ و $(\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲})$، $(\frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۱}{۲})$.

۱۲. ترکیب‌های $i = (۱, ۰, ۰)$ و $i + j = (۱, ۱, ۰)$ صفحه xy را در فضای xyz پر می‌کنند.

۱۳. مجموع = بردار صفر. مجموع = بردار ساعت ۲:۰۰- = بردار ساعت ۸:۰۰. بردار ساعت ۲:۰۰ با محور افقی زاویه ۳۰° می‌سازد $= (\cos \frac{\pi}{۶}, \sin \frac{\pi}{۶}) = (\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲})$.

۱۴. انتقال مبدأ به موقعیت ساعت ۶:۰۰، بردار $j = (۰, ۱)$ را به هر بردار اضافه می‌کند. بنابراین مجموع دوازده بردار از ۰ به $۱۲j = (۰, ۱۲)$ تغییر می‌کند.

۱۵. نقطه $\frac{3}{4}v + \frac{1}{4}w$ در سه‌چهارم مسیر به سمت v با شروع از w قرار دارد. بردار $\frac{1}{4}v + \frac{1}{4}w$ در نیمه راه به سمت $u = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$ است. بردار $v + w$ برابر با $2u$ (گوشه دورتر متوازی‌الاضلاع) است.

۱۶. تمام ترکیب‌ها با شرط $c + d = 1$ روی خطی قرار دارند که از v و w می‌گذرد. نقطه $V = -v + 2w$ روی آن خط قرار دارد اما خارج از محدوده w است.

۱۷. تمام بردارهای $cv + cw$ روی خطی قرار دارند که از $(0, 0)$ و $u = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$ می‌گذرد. این خط به سمت بیرون از $v + w$ و به عقب از $(0, 0)$ ادامه می‌یابد. با شرط $c \geq 0$، نیمی از این خط حذف شده و یک نیم‌خط باقی می‌ماند که از $(0, 0)$ شروع می‌شود.

۱۸. ترکیب‌های $cv + dw$ با شرایط $0 \leq c \leq 1$ و $0 \leq d \leq 1$ متوازی‌الاضلاع با اضلاع v و w را پر می‌کنند. برای مثال، اگر $v = (1, 0)$ و $w = (0, 1)$ باشند، آنگاه $cv + dw$ مربع واحد را پر می‌کند. اما وقتی $v = (a, 0)$ و $w = (b, 0)$ باشند، این ترکیب‌ها تنها یک پاره‌خط را پر می‌کنند.

۱۹. با شرایط $c \geq 0$ و $d \geq 0$، ما «مخروط» یا «گوه» بی‌نهایت بین v و w را به دست می‌آوریم. برای مثال، اگر $v = (1, 0)$ و $w = (0, 1)$ باشند، آنگاه مخروط کل ربع صفحه با $x \geq 0$ و $y \geq 0$ است. سوال: اگر $w = -v$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ مخروط به یک نیم‌فضا باز می‌شود. اما ترکیب‌های $v = (1, 0)$ و $w = (-1, 0)$ تنها یک خط را پر می‌کنند.

۲۰. (الف) $\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}w$ مرکز مثلث بین u, v, w است؛ $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w$ بین u و w قرار دارد. (ب) برای پر کردن مثلث، شرایط $c \geq 0, d \geq 0, e \geq 0$ و $c + d + e = 1$ را حفظ کنید.

۲۱. مجموع برابر است با $(v - u) + (w - v) + (u - w) =$ بردار صفر. این سه ضلع یک مثلث در یک صفحه قرار دارند!

۲۲. بردار $\frac{1}{2}(u + v + w)$ خارج از هرم قرار دارد زیرا $c + d + e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 1$.

۲۳. تمام بردارها ترکیب‌هایی از u, v, w هستند که (در یک صفحه نیستند) رسم شده‌اند. با این مشاهده شروع کنید که $cu + dv$ یک صفحه را پر می‌کند، سپس افزودن ew کل فضای R^3 را پر می‌کند.

۲۴. ترکیب‌های u و v یک صفحه را پر می‌کنند. ترکیب‌های v و w صفحه‌ای دیگر را پر می‌کنند. این دو صفحه در یک خط یکدیگر را قطع می‌کنند: تنها بردارهای cv در هر دو صفحه قرار دارند.

۲۵. (الف) برای یک خط، $u = v = w =$ هر بردار غیر صفری را انتخاب کنید. (ب) برای یک صفحه، u و v را در جهت‌های مختلف انتخاب کنید. ترکیبی مانند $w = u + v$ در همان صفحه قرار دارد.

۲۶. دو معادله از دو مؤلفه به دست می‌آید: $c + 3d = 14$ و $2c + d = 8$. جواب $c = 2$ و $d = 4$ است. سپس $2(1, 2) + 4(3, 1) = (14, 8)$.

۲۷. یک مکعب چهاربعدی دارای $2^4 = 16$ گوشه و $2 \cdot 4 = 8$ وجه سه‌بعدی و ۲۴ وجه دوبعدی و ۳۲ یال است (بر اساس مثال حل شده ۴.۲ A).

۲۸. شش عدد مجهول $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ وجود دارد. شش معادله از مؤلفه‌های $v + w = (4, 5, 6)$ و $v - w = (2, 5, 8)$ به دست می‌آیند. با جمع این دو معادله $2v = (6, 10, 14)$ حاصل می‌شود، بنابراین $v = (3, 5, 7)$ و $w = (1, 0, -1)$ است.

۲۹. واقعیت: برای هر سه بردار u, v, w در صفحه، ترکیبی مانند $cu + dv + ew$ برابر با بردار صفر است (فراتر از حالت بدیهی $c = d = e = 0$). بنابراین اگر یک ترکیب $Cu + Dv + Ew$ وجود داشته باشد که بردار b را تولید کند، ترکیبات بسیار بیشتری نیز وجود خواهد داشت — کافی است c, d, e یا $2c, 2d, 2e$ را به جواب خاص C, D, E اضافه کنید. در این مثال $3u - 2v + w = 3(1, 3) - 2(2, 7) + 1(1, 5) = (0, 0)$ است. همچنین $-2u + 1v + 0w = b = (0, 1)$ است. با جمع این دو داریم $u - v + w = (0, 1)$.

در این حالت c, d, e برابر با ۱, −۲, ۳ و C, D, E برابر با ۰, ۱, −۲ هستند. آیا ممکن است در مثالی دیگر، بردارها u, v, w نتوانند ترکیب شوند تا b را تولید کنند؟ بله. بردارهای (۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳) روی یک خط قرار دارند و هیچ ترکیبی از آنها b را تولید نمی‌کند. ما به راحتی می‌توانیم $cu + dv + ew = ۰$ را حل کنیم اما $Cu + Dv + Ew = b$ را نه.

۳۰. ترکیب‌های v و w صفحه را پر می‌کنند مگر اینکه v و w روی یک خط گذرنده از (۰, ۰) قرار داشته باشند. یک مثال از چهار برداری که ترکیب‌هایشان فضای چهاربعدی را پر می‌کند، «پایه استاندارد» است: (۱, ۰, ۰, ۰), (۰, ۱, ۰, ۰), (۰, ۰, ۱, ۰), و (۰, ۰, ۰, ۱).

۳۱. معادلات برای $cu + dv + ew = b$ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} ۲c - d &= ۱ \\ -c + ۲d - e &= ۰ \\ -d + ۲e &= ۰ \end{aligned}$$

از معادله سوم داریم $d = ۲e$.
با جایگذاری در معادله دوم: $-c + ۲(۲e) - e = ۰ \implies -c + ۳e = ۰ \implies c = ۳e$.
با جایگذاری c و d در معادله اول: $۲(۳e) - (۲e) = ۱ \implies ۶e - ۲e = ۱ \implies ۴e = ۱$.
بنابراین $e = \frac{۱}{۴}$.
و در نتیجه: $c = \frac{۳}{۴}$ و $d = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$.