# ترجمه پاسخنامه مجموعه مسائل ۴.۲

صفحه ۷۷

## مجموعه مسائل ۴.۲، صفحه ۷۷

۱. اگر تمام درایه‌های A، B، C و D برابر با ۱ باشند، آنگاه BA ماتریسی ۵×۵ با تمام درایه‌های ۳ است؛ AB ماتریسی ۳×۳ با تمام درایه‌های ۵ است؛ ABD ماتریسی ۳×۱ با تمام درایه‌های ۱۵ است. DC و A(B+C) تعریف نشده‌اند.

۲. (الف) ستون A(دوم B) (ب) (سطر اول A)B (ج) (سطر سوم ستون A)(پنجم B) (د) (سطر اول ستون C)D(اول E). (بخش (ج) فرض کرده است که B دارای ۵ ستون است).

۳. $AB + AC$ همانند $A(B+C) = \begin{bmatrix} ۳ & ۸ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix}$ است. (قانون توزیع‌پذیری).

۴. A(BC)=(AB)C طبق قانون شرکت‌پذیری. در این مثال هر دو پاسخ برابر $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ هستند. ستون ۱ از AB و سطر ۲ از C صفر هستند (سپس ستون‌ها را در سطرها ضرب کنید).

۵. (الف) $A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲b \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A^n = \begin{bmatrix} ۱ & nb \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. (ب) $A^۲ = \begin{bmatrix} ۴ & ۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A^n = \begin{bmatrix} ۲^n & ۲^n \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$.

۶. $A^۲ + AB + BA + B^۲ = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۴ \\ ۶ & ۶ \end{bmatrix} = (A+B)^۲$. اما $A^۲ + ۲AB + B^۲ = \begin{bmatrix} ۱۶ & ۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$.

۷. (الف) صحیح (ب) غلط (ج) صحیح (د) غلط: معمولاً $(AB)^۲ = ABAB \neq A^۲B^۲$.

۸. سطرهای DA برابر با ۳(سطر ۱ از A) و ۵(سطر ۲ از A) هستند. هر دو سطر EA برابر سطر ۲ از A هستند. ستون‌های AD برابر با ۳(ستون ۱ از A) و ۵(ستون ۲ از A) هستند. ستون اول AE صفر است، ستون دوم برابر با ستون ۱ از A + ستون ۲ از A است.

۹. $AF = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix}$ و E(AF) برابر با (EA)F است زیرا ضرب ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است.

۱۰. $FA = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}$ و سپس $E(FA) = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+۲c & b+۲d \end{bmatrix}$. عبارت E(FA) با F(EA) یکسان نیست زیرا ضرب جابجایی‌پذیر نیست: $EF \neq FE$.

۱۱. فرض کنید EA عملیات سطری را انجام می‌دهد و سپس (EA)F عملیات ستونی را انجام می‌دهد (زیرا F از سمت راست ضرب می‌شود). قانون شرکت‌پذیری می‌گوید که E(AF) = (EA)F بنابراین عملیات ستونی می‌تواند اول انجام شود!

۱۲. (الف) $B = ۴I$ (ب) $B = ۰$ (ج) $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ (د) هر سطر از B برابر ۱، ۰، ۰ است.

۱۳. $AB = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ c & ۰ \end{bmatrix} = BA = \begin{bmatrix} a & b \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ نتیجه می‌دهد $b = c = ۰$. سپس $AC = CA$ نتیجه می‌دهد $a = d$. تنها ماتریس‌هایی که با B و C (و تمام ماتریس‌های دیگر) جابجا می‌شوند، مضاربی از I هستند: $A = aI$.

۱۴. $(A-B)^۲ = (B-A)^۲ = A(A-B) - B(A-B) = A^۲ - AB - BA + B^۲$. در یک حالت معمول (وقتی $AB \neq BA$) ماتریس $A^۲ - ۲AB + B^۲$ با $(A-B)^۲$ متفاوت است.

۱۵. (الف) صحیح ($A^۲$ تنها زمانی تعریف می‌شود که A مربعی باشد). (ب) غلط (اگر A از مرتبه m×n و B از مرتبه n×m باشد، آنگاه AB از مرتبه m×m و BA از مرتبه n×n است). (ج) صحیح به استناد بخش (ب). (د) غلط (B=۰ را در نظر بگیرید).

۱۶. (الف) mn (از هر درایه A استفاده کنید) (ب) mnp (برابر است با p × بخش الف) (ج) $n^۳$ (شامل $n^۲$ ضرب داخلی).

۱۷. (الف) فقط از ستون ۲ ماتریس B استفاده کنید (ب) فقط از سطر ۲ ماتریس A استفاده کنید (ج)–(د) از سطر ۲ اولین ماتریس A استفاده کنید. ستون ۲ از $AB = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$، سطر ۲ از $AB = [۱, ۰, ۰]$، سطر ۲ از $A^۲ = [۰, ۱]$، سطر ۲ از $A^۳ = [۳, -۲]$.

۱۸. $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ دارای $a_{ij} = \min(i,j)$ است. $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ دارای $a_{ij} = (-۱)^{i+j}$ است (ماتریس علامت متناوب). $A = \begin{bmatrix} ۱/۱ & ۱/۲ & ۱/۳ \\ ۲/۱ & ۲/۲ & ۲/۳ \\ ۳/۱ & ۳/۲ & ۳/۳ \end{bmatrix}$ دارای $a_{ij} = i/j$ است. این مثالی از یک ماتریس رتبه یک خواهد بود: ۱ ستون $\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$ در ۱ سطر $(۱ \quad ۱/۲ \quad ۱/۳)$ ضرب می‌شود.

۱۹. ماتریس قطری، پایین‌مثلثی، متقارن، تمام سطرها برابر. ماتریس صفر در هر چهار دسته قرار می‌گیرد.

۲۰. (الف) $a_{۱۱}$ (ب) $l_{۳۱} = a_{۳۱}/a_{۱۱}$ (ج) $a_{۳۲} - \frac{a_{۳۱}}{a_{۱۱}} a_{۱۲}$ (د) $a_{۲۲} - \frac{a_{۲۱}}{a_{۱۱}} a_{۱۲}$.

۲۱. $A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $A^۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، $A^۴ =$ ماتریس صفر برای A اکیداً مثلثی. آنگاه $Av = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲y \\ ۲z \\ ۲t \\ ۰ \end{bmatrix}$، $A^۲v = \begin{bmatrix} ۴z \\ ۴t \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $A^۳v = \begin{bmatrix} ۸t \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $A^۴v = ۰$.

۲۲. $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ دارای $A^۲ = -I$ است؛ $BC = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$؛ $DE = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = -ED$. شما می‌توانید مثال‌های بیشتری پیدا کنید.

۲۳. $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ دارای $A^۲ = ۰$ است. توجه: هر ماتریس $uv^T =$ سطر × ستون $= A$ دارای $A^۲ =$ $uv^Tuv^T = ۰$ خواهد بود اگر $v^Tu = ۰$. $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ دارای $A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ است اما $A^۳ = ۰$؛ اکیداً مثلثی مانند مسئله ۲۱.

۲۴. $(A_۱)^n = \begin{bmatrix} ۲^n & ۲^{n-۱} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $(A_۲)^n = ۲^{n-۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $(A_۳)^n = \begin{bmatrix} a^n & a^{n-۱}b \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$.

۲۵. $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} [۱, ۰, ۰] + \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} [۰, ۱, ۰] + \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} [۰, ۰, ۱].$$

۲۶. ستون‌های A ضربدر سطرهای B: $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} [۳, ۳, ۰] + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \\ ۱ \end{bmatrix} [۱, ۲, ۱] = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۰ \\ ۶ & ۶ & ۰ \\ ۶ & ۶ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۸ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} =$ $AB = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۰ \\ ۱۰ & ۱۴ & ۴ \\ ۷ & ۸ & ۱ \end{bmatrix}$.

۲۷. (الف) (سطر ۳ از A) ⍰ (ستون ۱ یا ۲ از B) و (سطر ۳ از A) ⍰ (ستون ۲ از B) همگی صفر هستند.
(ب) $\begin{bmatrix} x \\ x \\ ۰ \end{bmatrix} [۰, x, x] = \begin{bmatrix} ۰ & x^۲ & x^۲ \\ ۰ & x^۲ & x^۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} [۰, ۰, x] = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & x^۲ \\ ۰ & ۰ & x^۲ \\ ۰ & ۰ & x^۲ \end{bmatrix}$ : هر دو بالا مثلثی هستند.

۲۸. ضرب ماتریس A در B با برش‌ها: A) با ۴ ستون)(B با ۲ سطر) غیرممکن. A) با ۲ سطر)(B با ۴ ستون) غیر ممکن. A) با ۳ ستون)(B با ۳ سطر) ممکن است.

۲۹. $E_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $E_{۳۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ در درایه‌های (۲،۱) و (۳،۱) صفر تولید می‌کنند.
ماتریس‌های E را ضرب کنید تا $E = E_{۳۱}E_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ به دست آید. سپس $EA = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ نتیجه هر دو E است زیرا $(E_{۳۱}E_{۲۱})A = E_{۳۱}(E_{۲۱}A)$.

۳۰. در سوال ۲۹، $c = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۸ \end{bmatrix}$، $D = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ (فرض شده)، $D - \frac{cb^T}{a} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix} - \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۲ \\ -۸ \end{bmatrix} [۱, ۰] = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۴ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۹ & ۶ \end{bmatrix}$. (توجه: متن اصلی ناقص بود، با فرض مقادیر معمول تکمیل شد).

۳۱. $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax - By \\ Bx + Ay \end{bmatrix}$ بخش حقیقی، بخش موهومی. ضرب ماتریس مختلط در بردار مختلط به ۴ ضرب عدد حقیقی در عدد حقیقی نیاز دارد.

۳۲. A ضربدر $X = [x_۱, x_۲, x_۳]$ برابر با ماتریس همانی $I = [Ax_۱, Ax_۲, Ax_۳]$ خواهد بود.

۳۳. $b = \begin{bmatrix}۳\\۵\\۸\end{bmatrix}$ نتیجه می‌دهد $x = ۳x_۱ + ۵x_۲ + ۸x_۳ = \begin{bmatrix}۳\\۸\\۱۶\end{bmatrix}$؛ ماتریس $A = \begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ بردارهای $x_۱ = (۱,۱,۱)^T, x_۲ = (۰,۱,۱)^T, x_۳ = (۰,۰,۱)^T$ را به عنوان ستون‌های «معکوس» خود $A^{-۱}$ خواهد داشت.

۳۴. $A \cdot \text{ones} = \begin{bmatrix}a+b & a+b\\ c+d & c+d\end{bmatrix}$ با $\text{ones} \cdot A = \begin{bmatrix}a+c & b+d\\ a+c & b+d\end{bmatrix}$ زمانی برابر است که $b = c$ و $a+b = a+c$ (که همان است) و $c+d = b+d$ (که همان است). پس شرط لازم و کافی $b = c$ است.

۳۵. $S^۲ = \begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰ & ۲\\ ۲ & ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$. اینها ۱۶ مسیر ۲ مرحله‌ای را در گراف نشان می‌دهند.

۳۶. ضرب $AB = (m \times n)(n \times p)$ به $mnp$ عمل ضرب نیاز دارد. سپس $(AB)C$ به $mpq$ عمل ضرب بیشتر نیاز دارد. ضرب $BC = (n \times p)(p \times q)$ به $npq$ و سپس $A(BC)$ به $mnq$ عمل ضرب نیاز دارد. (الف) اگر $m, n, p, q$ برابر با ۲، ۴، ۷، ۱۰ باشند، ما $(۲)(۴)(۷) + (۲)(۷)(۱۰) = ۵۶ + ۱۴۰ = ۱۹۶$ را با $(۲)(۴)(۱۰) + (۴)(۷)(۱۰) = ۸۰ + ۲۸۰ = ۳۶۰$ مقایسه می‌کنیم. بنابراین محاسبه (AB)C اول بهتر است. (ب) اگر u، v، w بردارهای N×۱ باشند، آنگاه $(u^T v)w^T$ به N (برای $u^T v$) و سپس $N$ (برای ضرب اسکالر در $w^T$) عمل ضرب نیاز دارد، جمعاً ۲N. اما $u^T(vw^T)$ برای یافتن ماتریس $N \times N$ یعنی $vw^T$ به $N^۲$ و برای ضرب $u^T$ در آن به $N^۲$ عمل ضرب دیگر نیاز دارد. (ج) ما در حال مقایسه $mnp + mpq$ با $npq + mnq$ هستیم. تمام جملات را بر $mnpq$ تقسیم کنید: اکنون ما $q^{-۱} + n^{-۱}$ را با $m^{-۱} + p^{-۱}$ مقایسه می‌کنیم. این یک قانون ساده و مهم را به دست می‌دهد: اگر ماتریس‌های A و B در حال ضرب در v برای $ABv$ هستند، ابتدا ماتریس‌ها را ضرب نکنید. بهتر است ابتدا $Bv$ و سپس $A(Bv)$ را محاسبه کنید.

۳۷. اثبات $(AB)c = A(Bc)$ از قانون ستونی برای ضرب ماتریس استفاده کرد. «همین امر برای تمام ستون‌های دیگر C نیز صادق است.» حتی برای تبدیلات غیرخطی، $A(B(c))$ «ترکیب» A با B خواهد بود (اعمال B و سپس A). این ترکیب $A \circ B$ برای ماتریس‌ها به سادگی به صورت AB نوشته می‌شود. یکی از کاربردهای بسیار قانون شرکت‌پذیری: معکوس چپ B برابر با معکوس راست C است، زیرا $B = B(AC) = (BA)C = IC = C$.

۳۸. (الف) ستون‌های $a_۱, ..., a_m$ را در سطرهای $a_۱^T, ..., a_m^T$ ضرب کرده و ماتریس‌های حاصل (که رتبه یک دارند) را با هم جمع کنید. (ب) $A^T C A = c_۱ a_۱ a_۱^T + \cdots + c_m a_m a_m^T$. ماتریس قطری C این عبارت را مرتب و ساده می‌کند.