فصل ۱

مقدمه‌ای بر بردارها

۱.۱ بردارها و ترکیب‌های خطی

۲.۱ طول‌ها و ضرب‌های داخلی

بخش اول از ضرب کردن بردارها عقب‌نشینی کرد. اکنون ما برای تعریف «ضرب داخلی» $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ به پیش می‌رویم. این ضرب شامل حاصل‌ضرب‌های جداگانه v_1w_1 و v_2w_2 است، اما به همین جا ختم نمی‌شود. آن دو عدد با هم جمع می‌شوند تا یک عدد واحد $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ را تولید کنند. این بخش، بخش هندسه است (طول بردارها و کسینوس زوایای بین آن‌ها).

تعریف: ضرب داخلی یا inner product برای بردارهای $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ و $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ عدد $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ است:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2$$

(توضیح مترجم: معنای ضرب داخلی چیست؟)
ضرب داخلی یک عدد است که میزان هم‌جهت بودن دو بردار را نشان می‌دهد.

- اگر $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} > 0$ (مثبت)، زاویه بین دو بردار تند (کمتر از ۹۰ درجه) است. یعنی بردارها کم و بیش در یک جهت هستند.
- اگر $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} < 0$ (منفی)، زاویه بین دو بردار باز (بیشتر از ۹۰ درجه) است. یعنی بردارها در جهت‌های مخالف هم قرار دارند.
- اگر $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$ (صفر)، دو بردار دقیقاً بر هم عمود هستند. آن‌ها هیچ اشتراکی در جهت ندارند.

این عدد همچنین در محاسبه «تصویر» یک بردار بر روی دیگری نقش اساسی دارد.

طول‌ها و بردارهای یکه

یک حالت مهم، ضرب داخلی یک بردار در خودش است. در این حالت $\mathbf{v}$ برابر با $\mathbf{w}$ است. وقتی بردار $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ باشد، ضرب داخلی آن با خودش برابر است با $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{v}||^2 = 14$. ضرب داخلی $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ مجذور طول $\mathbf{v}$ را می‌دهد.

تعریف: طول $||\mathbf{v}||$ یک بردار $\mathbf{v}$، جذر $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ است:

$$\text{طول} = ||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

در دو بعد، طول برابر با $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ است. این همان فرمول قضیه فیثاغورس است. برای محاسبه طول $\mathbf{v}=(1,2,3)$ ما از قضیه فیثاغورس دو بار استفاده می‌کنیم. بردار پایه $(1,2,0)$ طولی برابر $\sqrt{5}$ دارد. این بردار پایه بر بردار $(0,0,3)$ که مستقیم به بالا می‌رود، عمود است. بنابراین قطر جعبه طولی برابر با $||\mathbf{v}|| = \sqrt{(\sqrt{5})^2+3^2} = \sqrt{5+9} = \sqrt{14}$ دارد.

تصویر شکل ۶.۱ در اینجا قرار می‌گیرد

شکل ۱.۱: طول $\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$ برای بردارهای دو بعدی و سه بعدی.

(توضیح مترجم: بردار یکه چیست و چرا مهم است؟)
کلمه «یکه» یا «واحد» (unit) همیشه به این معنی است که یک اندازه‌گیری برابر با «یک» است. یک بردار یکه، برداری است که طول آن دقیقاً برابر با ۱ است.
بردارهای یکه بسیار مهم هستند زیرا فقط جهت را نشان می‌دهند و اثر طول در آن‌ها حذف شده است. برای یافتن بردار یکه در جهت هر بردار غیرصفر $\mathbf{v}$، کافی است $\mathbf{v}$ را بر طولش $||\mathbf{v}||$ تقسیم کنیم. این فرآیند نرمال‌سازی نامیده می‌شود.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \quad (\text{بردار یکه در جهت } \mathbf{v})$$

تعریف: یک بردار یکه $\mathbf{u}$، برداری است که طول آن برابر با یک است. در نتیجه $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=1$.

بردارهای یکه استاندارد در امتداد محورهای x و y به صورت $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ نوشته می‌شوند. در صفحه xy، بردار یکه‌ای که زاویه θ با محور x می‌سازد، بردار $(\cos\theta, \sin\theta)$ است. این بردارها به دایره واحد اشاره دارند.

تصویر شکل ۷.۱ در اینجا قرار می‌گیرد

شکل ۲.۱: بردارهای مختصات $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$. بردار یکه $\mathbf{u}$ در زاویه ۴۵ درجه (چپ) از تقسیم $\mathbf{v}=(1,1)$ بر طولش $||\mathbf{v}||=\sqrt{2}$ به دست می‌آید. بردار یکه $\mathbf{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$ در زاویه θ قرار دارد.

زاویه بین دو بردار

ما بیان کردیم که بردارهای عمود بر هم $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$ دارند. برای توضیح این موضوع، باید زوایا را به ضرب‌های داخلی متصل کنیم.

اثبات. وقتی $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ عمود بر هم هستند، دو ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه را تشکیل می‌دهند. ضلع سوم (وتر) برابر با $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ است. قانون فیثاغورس برای اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه $a^2+b^2=c^2$ است:

$$||\mathbf{v}||^2+||\mathbf{w}||^2=||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^2$$

با نوشتن فرمول‌ها برای طول‌ها، این معادله به شکل زیر در می‌آید:

تصویر شکل ۸.۱ در اینجا قرار می‌گیرد

شکل ۳.۱: بردارهای عمود بر هم دارای $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$ هستند. در این حالت $||\mathbf{v}||^2+||\mathbf{w}||^2=||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^2$.

$$(v_1^2+v_2^2)+(w_1^2+w_2^2)=(v_1-w_1)^2+(v_2-w_2)^2$$

$$v_1^2+v_2^2+w_1^2+w_2^2=(v_1^2-2v_1w_1+w_1^2)+(v_2^2-2v_2w_2+w_2^2)$$

با حذف جملات مشابه از دو طرف، به دست می‌آوریم:

$$0=-2v_1w_1-2v_2w_2 \quad\Rightarrow\quad v_1w_1+v_2w_2=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$$

$\square$

اکنون فرض کنید $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ صفر نیست. علامت آن به ما می‌گوید که زاویه تند است یا باز.

- زاویه کمتر از ۹۰ درجه است وقتی $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ مثبت باشد.
- زاویه بیشتر از ۹۰ درجه است وقتی $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ منفی باشد.

ضرب داخلی زاویه دقیق θ را آشکار می‌سازد. برای بردارهای یکه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{U}$، ضرب داخلی آن‌ها دقیقاً برابر با کسینوس زاویه بینشان است: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}=\cos\theta$.

تصویر شکل ۹.۱ در اینجا قرار می‌گیرد

شکل ۴.۱: بردارهای یکه: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}$ برابر با کسینوس θ (زاویه بین آن‌ها) است.

اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهای یکه نباشند، آن‌ها را بر طولشان تقسیم می‌کنیم تا به بردارهای یکه $\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$ و $\mathbf{U}=\frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||}$ برسیم. آنگاه ضرب داخلی این بردارهای یکه، $\cos\theta$ را به ما می‌دهد.

فرمول کسینوس: اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهای غیرصفر باشند، آنگاه:

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$$

از آنجایی که $|\cos\theta|$ هرگز از ۱ تجاوز نمی‌کند، فرمول کسینوس دو نامساوی بزرگ را به ما می‌دهد:

نامساوی کوشی–شوارتز:

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq ||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||$$

نامساوی مثلث:

$$||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$$

(توضیح مترجم: نامساوی کوشی–شوارتز به زبان ساده می‌گوید که میزان هم‌جهتی دو بردار (ضرب داخلی) نمی‌تواند از حاصلضرب طول‌های آن‌ها بیشتر باشد. نامساوی مثلث نیز بیان می‌کند که طول یک ضلع مثلث (ضلع $\mathbf{v} + \mathbf{w}$) نمی‌تواند از مجموع طول دو ضلع دیگر (ضلع‌های $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$) بزرگتر باشد.)

مروری بر ایده‌های کلیدی (بخش ۲.۱)

۱. ضرب داخلی $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ هر مؤلفه v_i را در w_i ضرب کرده و تمام v_iw_iها را جمع می‌کند.

۲. طول $||\mathbf{v}||$ جذر $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ است. آنگاه $\mathbf{u}=\mathbf{v}/||\mathbf{v}||$ یک بردار یکه است با طول ۱.

۳. وقتی بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بر هم عمود باشند، ضرب داخلی آن‌ها $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=۰$ است.

۴. کسینوس زاویه θ (بین هر دو بردار غیرصفر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$) هرگز از ۱ تجاوز نمی‌کند:

$$|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|\le||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| \text{ :نامساوی شوارتز} \qquad \cos\theta=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||} \text{ :کسینوس}$$

مثال‌های حل شده (بخش ۲.۱)

مثال ۲.۱ الف

برای بردارهای $\mathbf{v}=(۳,۴)$ و $\mathbf{w}=(۴,۳)$، نامساوی شوارتز را بر روی $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ و نامساوی مثلث را بر روی $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||$ بیازمایید. $\cos\theta$ را برای زاویه بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بیابید. چه زمانی در این نامساوی‌ها تساوی برقرار می‌شود؟

راه حل: ضرب داخلی $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=(۳)(۴)+(۴)(۳)=۲۴$ است. طول $\mathbf{v}$ برابر با $||\mathbf{v}||=\sqrt{۹+۱۶}=۵$ و همچنین $||\mathbf{w}||=۵$ است. جمع $\mathbf{v}+\mathbf{w}=(۷,۷)$ طولی برابر با $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||=\sqrt{۴۹+۴۹}=\sqrt{۹۸}=۷\sqrt{۲}$ دارد.

نامساوی شوارتز: $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|\le||\mathbf{v}||||\mathbf{w}|| \implies ۲۴<(۵)(۵)=۲۵$. (برقرار است)

نامساوی مثلث: $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||\le||\mathbf{v}||+||\mathbf{w}|| \implies ۷\sqrt{۲}\le ۵+۵=۱۰$. (برقرار است، زیرا $۹۸<۱۰۰$)

کسینوس زاویه: $\cos\theta=\frac{۲۴}{۲۵}$.

حالت تساوی: تساوی زمانی رخ می‌دهد که یک بردار مضربی از دیگری باشد (مانند $\mathbf{w}=c\mathbf{v}$). در این حالت زاویه ۰ یا ۱۸۰ درجه است و $|\cos\theta|=۱$.

مجموعه مسائل ۲.۱

۱. ضرب‌های داخلی $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ و $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ و $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$ را محاسبه کنید:

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-۰/۶\\ ۰/۸\end{bmatrix}\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}۴\\ ۳\end{bmatrix}\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$$

۲. طول‌های $||\mathbf{u}||$ و $||\mathbf{v}||$ و $||\mathbf{w}||$ را برای بردارهای بالا محاسبه کنید. نامساوی‌های شوارتز $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|\le||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||$ و $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|\le||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||$ را بررسی کنید.

۳. بردارهای یکه در جهت $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ در مسئله ۱، و کسینوس زاویه θ بین آن‌ها را بیابید. بردارهای a، b، c را انتخاب کنید که زوایای ۰، ۹۰ و ۱۸۰ درجه با $\mathbf{w}$ بسازند.

۴. برای هر دو بردار یکه $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$، ضرب‌های داخلی زیر را بیابید (اعداد واقعی): (الف) $(\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w})$ (ب) $(\mathbf{v}-۲\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}+۲\mathbf{w})$

۵. بردارهای یکه $\mathbf{u}_۱$ و $\mathbf{u}_۲$ را در جهت $\mathbf{v}=(۱,۳)$ و $\mathbf{w}=(۲,۱,۲)$ بیابید. بردارهای یکه $\mathbf{U}_۱$ و $\mathbf{U}_۲$ را بیابید که به ترتیب بر $\mathbf{u}_۱$ و $\mathbf{u}_۲$ عمود باشند.

۶. (الف) هر بردار $\mathbf{w} = (w_۱, w_۲)$ را که بر $\mathbf{v} = (۲, -۱)$ عمود است، توصیف کنید. (ب) تمام بردارهایی که بر $\mathbf{V} = (۱, ۱, ۱)$ عمود هستند، بر روی یک صفحه در فضای سه بعدی قرار دارند. (ج) بردارهایی که هم بر $(۱, ۱, ۱)$ و هم بر $(۱, ۲, ۳)$ عمود هستند، بر روی یک خط قرار دارند.

۷. زاویه θ (از روی کسینوس آن) را بین این زوج بردارها بیابید: (الف) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۱ \\ \sqrt{۳} \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ (ب) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

(ج) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۱ \\ \sqrt{۳} \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -۱ \\ \sqrt{۳} \end{bmatrix}$ (د) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$

۸. درست یا غلط (اگر درست است دلیل بیاورید و اگر غلط است مثال نقض بیابید): (الف) اگر $\mathbf{u} = (۱, ۱, ۱)$ بر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ عمود باشد، آنگاه $\mathbf{v}$ با $\mathbf{w}$ موازی است. (ب) اگر $\mathbf{u}$ بر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ عمود باشد، آنگاه $\mathbf{u}$ بر $\mathbf{v} + ۲\mathbf{w}$ عمود است. (ج) اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای یکه عمود بر هم باشند، آنگاه $||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| = \sqrt{۲}$.

۹. شیب‌های پیکان‌ها از $(۰, ۰)$ به $(v_۱, v_۲)$ و $(w_۱, w_۲)$ به ترتیب $v_۲/v_۱$ و $w_۲/w_۱$ هستند. فرض کنید حاصلضرب این شیب‌ها، یعنی $(v_۲w_۲)/(v_۱w_۱)$، برابر با ۱- باشد. نشان دهید که $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ۰$ و بردارها بر هم عمودند.

۱۰. پیکان‌هایی از مبدأ (۰،۰) به نقاط $\mathbf{v} = (۲, ۱)$ و $\mathbf{w} = (-۱, ۲)$ رسم کنید. شیب‌های آن‌ها را در هم ضرب کنید. این پاسخ، سیگنالی است که نشان می‌دهد $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ۰$ و این پیکان‌ها بر هم ____ هستند.

۱۱. اگر $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ منفی باشد، این در مورد زاویه بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ چه می‌گویید؟ یک بردار سه بعدی $\mathbf{v}$ رسم کنید و نشان دهید تمام $\mathbf{w}$هایی که $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < ۰$ دارند، کجا یافت می‌شوند.

۱۲. با $\mathbf{v} = (۱, ۱)$ و $\mathbf{w} = (۱, ۵)$، عدد c را طوری انتخاب کنید که $\mathbf{w} - c\mathbf{v}$ بر $\mathbf{v}$ عمود باشد. سپس فرمول c را برای هر دو بردار غیرصفر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ پیدا کنید.

۱۳. بردارهای غیرصفر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را بیابید که بر $(۱, ۰, ۱)$ و بر یکدیگر عمود باشند.

۱۴. بردارهای ناصفر $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ را بیابید که بر بردار $(۱, ۱, ۱, ۱)$ و بر یکدیگر عمود باشند.

۱۵. میانگین هندسی $x = ۲$ و $y = ۸$ برابر با $۴ = \sqrt{xy}$ است. میانگین حسابی بزرگتر است: $۵ = \frac{۱}{۲}(x + y)$. این از نامساوی شوارتز برای $\mathbf{v} = (\sqrt{۲}, \sqrt{۸})$ و $\mathbf{w} = (\sqrt{۸}, \sqrt{۲})$ به دست می‌آید. $\cos\theta$ را برای این $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بیابید.

۱۶. طول بردار $\mathbf{v} = (۱, ۱, \ldots, ۱)$ در ۹ بعد چقدر است؟ یک بردار یکه $\mathbf{u}$ در همان جهت $\mathbf{v}$ و یک بردار یکه $\mathbf{w}$ که بر $\mathbf{v}$ عمود باشد، بیابید.

۱۷. کسینوس‌های زوایای α, β, γ بین بردار $(۱, ۰, -۱)$ و بردارهای یکه $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ در امتداد محورها چیست؟ فرمول $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$ را بررسی کنید.

مسائل ۱۸-۳۳ به حقایق اصلی در مورد طول‌ها و زوایا در مثلث‌ها می‌پردازند.

۱۸. متوازی‌الاضلاع با اضلاع $\mathbf{v} = (۴, ۲)$ و $\mathbf{w} = (-۱, ۲)$ یک مستطیل است. فرمول فیثاغورس $a^۲ + b^۲ = c^۲$ را که فقط برای مثلث‌های قائم‌الزاویه است، بررسی کنید: $(\text{طول } \mathbf{v})^۲ + (\text{طول } \mathbf{w})^۲ = (\text{طول } \mathbf{v} + \mathbf{w})^۲$.

۱۹. (قواعد ضرب داخلی) این معادلات ساده اما مفید هستند: (۱) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$ (۲) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ (۳) $(c\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=c(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$. از قاعده (۲) با $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$ استفاده کنید تا اثبات کنید $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^۲=$ $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+۲\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}$.

۲۰. «قانون کسینوس‌ها» از رابطه $(\mathbf{v}-\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-۲\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}$ به دست می‌آید:

$$||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^۲=||\mathbf{v}||^۲-۲||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||\cos\theta+||\mathbf{w}||^۲$$

یک مثلث با اضلاع $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ رسم کنید. کدام یک از زوایا θ است؟

۲۱. نامساوی مثلث می‌گوید: (طول $\mathbf{v}+\mathbf{w}$) $\le$ (طول $\mathbf{v}$) + (طول $\mathbf{w}$). مسئله ۱۹ نشان داد $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^۲=||\mathbf{v}||^۲+$ $۲\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+||\mathbf{w}||^۲$. مقدار $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ را به $||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||$ (بزرگترین مقدار ممکنش طبق نامساوی شوارتز) افزایش دهید تا نشان دهید طول ضلع سوم نمی‌تواند از مجموع طول دو ضلع دیگر بیشتر باشد:

$$||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^۲\le(||\mathbf{v}||+||\mathbf{w}||)^۲ \quad \text{یا} \quad ||\mathbf{v}+\mathbf{w}||\le||\mathbf{v}||+||\mathbf{w}||$$

۲۲. اثبات جبری نامساوی شوارتز $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|\le||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||$ به جای روش مثلثاتی: (الف) هر دو طرف نامساوی $(v_۱w_۱+v_۲w_۲)^۲\le(v_۱^۲+v_۲^۲)(w_۱^۲+w_۲^۲)$ را باز کنید. (ب) نشان دهید که تفاضل بین دو طرف برابر با $(v_۱w_۲-v_۲w_۱)^۲$ است. این عبارت نمی‌تواند منفی باشد زیرا یک مجذور کامل است - بنابراین نامساوی درست است.

۲۳. شکل نشان می‌دهد که $\cos\alpha=v_۱/||\mathbf{v}||$ و $\sin\alpha=v_۲/||\mathbf{v}||$. به طور مشابه $\cos\beta$ برابر با ___ و $\sin\beta$ برابر با ___ است. زاویه θ برابر با $\beta-\alpha$ است. این مقادیر را در فرمول مثلثاتی $\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$ جایگذاری کنید تا به دست آورید $\cos\theta=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}/(||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||)$.

۲۴. اثبات یک خطی نامساوی $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}|\le ۱$ برای بردارهای یکه $(u_۱,u_۲)$ و $(U_۱,U_۲)$:

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}|\le|u_۱||U_۱|+|u_۲||U_۲|\le\frac{u_۱^۲+U_۱^۲}{۲}+\frac{u_۲^۲+U_۲^۲}{۲}=\frac{u_۱^۲+u_۲^۲}{۲}+\frac{U_۱^۲+U_۲^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

۲۵. مقادیر $(u_۱,u_۲)=(۰/۶,۰/۸)$ و $(U_۱,U_۲)=(۰/۸,۰/۶)$ را در تمام خط بالا قرار دهید و $\cos\theta$ را بیابید. چرا در وهله اول $|\cos\theta|$ هرگز از ۱ بزرگتر نیست؟

۲۶. (توصیه شده) یک متوازی الاضلاع رسم کنید

۲۷. با توجه به سوالات بالا(متوازی الاضلاع) نشان دهید که مجموع مجذورهای طول قطرهایش $||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^۲+||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^۲$، برابر با مجموع مجذورهای طول چهار ضلع آن، $۲||\mathbf{v}||^۲+۲||\mathbf{w}||^۲$، است (قانون متوازی‌الاضلاع).

۲۸. اگر $\mathbf{v}=(۱,۲)$ است، تمام بردارهای $\mathbf{w}=(x,y)$ را در صفحه xy رسم کنید که در شرط $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=x+۲y=۵$ صدق می‌کنند. چرا این $\mathbf{w}$ها بر روی یک خط قرار می‌گیرند؟ کوتاه‌ترین $\mathbf{w}$ کدام است؟

۲۹. (توصیه شده) اگر $||\mathbf{v}||=۵$ و $||\mathbf{w}||=۳$، کمترین و بیشترین مقادیر ممکن برای $||\mathbf{v}-\mathbf{w}||$ چیست؟ کمترین و بیشترین مقادیر ممکن برای $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ چیست؟

مسائل چالشی

۳۰. آیا سه بردار در صفحه xy می‌توانند شرایط $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}<۰$ و $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}<۰$ و $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}<۰$ را داشته باشند؟

۳۱. اعدادی دلخواه انتخاب کنید که مجموعشان $x + y + z = ۰$ باشد. زاویه بین بردار $\mathbf{v} = (x, y, z)$ و بردار $\mathbf{w} = (z, x, y)$ را بیابید. سوال چالشی: توضیح دهید چرا $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}/(||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||)$ همیشه برابر با $-۱/۲$ است.

۳۲. چگونه می‌توانید نامساوی $\sqrt[۳]{xyz} \le \frac{x+y+z}{۳}$ (میانگین هندسی $\le$ میانگین حسابی) را اثبات کنید؟

۳۳. ۴ بردار یکه عمود بر هم به شکل $(\pm\frac{۱}{۲}, \pm\frac{۱}{۲}, \pm\frac{۱}{۲}, \pm\frac{۱}{۲})$ بیابید: علامت + یا - را انتخاب کنید.

۳۴. با استفاده از '$\mathrm{v} = \mathrm{randn}(3,\ 1)$' در متلب، یک بردار یکه تصادفی '$\mathrm{u} = \mathrm{v}/\mathrm{norm}(\mathrm{v})$' بسازید. با استفاده از '$\mathrm{V} = \mathrm{randn}(3,\ 30)$'، سی بردار یکه تصادفی دیگر U_j بسازید. اندازه میانگین ضرب‌های داخلی $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}_j|$ چقدر است؟ در حسابان، این میانگین برابر است با $\int_۰^{\pi} |\cos\theta| d\theta/\pi = ۲/\pi$.