ترجمه پاسخنامه مجموعه مسائل ۶.۲

صفحه ۱۰۴

مجموعه مسائل ۶.۲، صفحه ۱۰۴

۱. ضریب $\ell_{۲۱} = ۱$ سطر ۱ را ضرب کرد؛ $L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ضربدر $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = U\boldsymbol{x}$ همان $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۷ \end{bmatrix}$ است. به صورت حروفی، L در $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ ضرب می‌شود تا $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ را بدهد.

۲. $L\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ به صورت $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۷ \end{bmatrix}$ است که با پیشروی حذف، با $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$ حل می‌شود. $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ به صورت $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$ است که با جایگذاری پس‌رو، با $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ حل می‌شود.

۳. $\ell_{۳۱} = ۱$ و $\ell_{۳۲} = ۲$ (و $\ell_{۳۳} = ۱$): مراحل را معکوس کنید تا از $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ به $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ برسید: ۱ برابرِ $(x + y + z = ۵)$ + ۲ برابرِ $(y + ۲z = ۲)$ + ۱ برابرِ $(z = ۲)$ نتیجه می‌دهد $x + ۳y + ۶z = ۱۱$.

۴. $L\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} ۱ & & \\ ۱ & ۱ & \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۷ \\ ۱۱ \end{bmatrix}$؛ $U\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ & ۱ & ۲ \\ & & ۱ \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$؛ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$.

۵. $EA = \begin{bmatrix} ۱ & & \\ ۰ & ۱ & \\ -۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۲ \\ ۶ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} = U$. با در نظر گرفتن $E^{-۱}$ به عنوان L، داریم $A = LU = \begin{bmatrix} ۱ & & \\ ۰ & ۱ & \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۲ \\ ۶ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$.

۶. $\begin{bmatrix} ۱ & & \\ ۰ & ۱ & \\ ۰ & -۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & & \\ -۲ & ۱ & \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & -۶ \end{bmatrix} = U$. آنگاه $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} U$ همان $E_{۲۱}^{-۱} E_{۳۲}^{-۱} U = LU$ است. ضرایب $\ell_{۲۱} = \ell_{۳۲} = ۲$ در L سر جای خود قرار می‌گیرند.

۷. $E_{۳۲}E_{۳۱}E_{۲۱}A = \begin{bmatrix} ۱ & & \\ & ۱ & \\ & -۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & & \\ & ۱ & \\ -۳ & & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & & \\ -۲ & ۱ & \\ & & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$. این حاصل برابر است با $U = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$. آن ضرایب ۲، ۳، ۲ را در L قرار دهید. آنگاه $U = LU$ $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$.

۸. $E=E_{۳۲}E_{۳۱}E_{۲۱}=\begin{bmatrix}۱&&\\-a&۱&\\ac-b&-c&۱\end{bmatrix}$ ترکیبی است اما L برابر است با $E_{۲۱}^{-۱}E_{۳۱}^{-۱}E_{۳۲}^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&&\\a&۱&\\b&c&۱\end{bmatrix}$.

۹. برای حالت ۲×۲: $d=۰$ مجاز نیست؛ $\begin{bmatrix}۱&۱&۰\\۱&۱&۲\\۱&۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&&\\\ell&۱&\\m&n&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d&e&g\\&f&h\\&&i\end{bmatrix}$. داریم $d=۱, e=۱$ و سپس $\ell=۱$. اما در مرحله بعد $f=۰$ به دست می‌آید که مجاز نیست. محوری در سطر ۲ وجود ندارد.

۱۰. $c=۲$ منجر به صفر در جایگاه محور دوم می‌شود: سطرها را جابجا کنید و ماتریس منفرد نخواهد بود. $c=۱$ منجر به صفر در جایگاه محور سوم می‌شود. در این حالت ماتریس منفرد است.

۱۱. ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&۴&۸\\۰&۳&۹\\۰&۰&۷\end{bmatrix}$ دارای $L=I$ است (A از قبل بالا مثلثی است) و $D=\begin{bmatrix}۲&&\\&۳&\\&&۷\end{bmatrix}$؛ در تجزیه $A=LU$ ماتریس $U=A$ است؛ در تجزیه $A=LDU$ ماتریس $U=D^{-۱}A=\begin{bmatrix}۱&۲&۴\\۰&۱&۳\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ با درایه‌های ۱ روی قطر است.

۱۲. $A=\begin{bmatrix}۲&۴\\۴&۱۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۴\\۰&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}=LDU$. برای ماتریس دوم، $A=LDL^T$ به صورت $\begin{bmatrix}۱&&\\۴&۱&\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&&\\&-۴&\\&&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۴&۰\\۰&۱&-۱\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$ است.

۱۳. $\begin{bmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&&&\\۱&۱&&\\۱&۱&۱&\\۱&۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&a&a&a\\&b-a&b-a&b-a\\&&c-b&c-b\\&&&d-c\end{bmatrix}$. برای وجود تجزیه، باید محورها ناصفر باشند: $a\neq ۰$، $b\neq a$، $c\neq b$، $d\neq c$.

۱۴. $\begin{bmatrix}a&r&r&r\\a&b&s&s\\a&b&c&t\\a&b&c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&&&\\۱&۱&&\\۱&۱&۱&\\۱&۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&r&r&r\\&b-r&s-r&s-r\\&&c-s&t-s\\&&&d-t\end{bmatrix}$. باید محورها ناصفر باشند: $a\neq ۰$، $b\neq r$، $c\neq s$، $d\neq t$.

۱۵. $\begin{bmatrix}۱&۰\\۴&۱\end{bmatrix}\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}۲\\۱۱\end{bmatrix}$ نتیجه می‌دهد $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$. سپس $\begin{bmatrix}۲&۴\\۰&۱\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ نتیجه می‌دهد $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-۵\\۳\end{bmatrix}$. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ به صورت $\begin{bmatrix}۲&۴\\۸&۱۷\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}۲\\۱۱\end{bmatrix}$ است. با حذف به $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۴\\۰&۱\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ می‌رسیم.

۱۶. $\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۱&۱&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}۴\\۵\\۶\end{bmatrix}$ نتیجه می‌دهد $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}۴\\۱\\۱\end{bmatrix}$. سپس $\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۱&۱\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}۴\\۱\\۱\end{bmatrix}$ نتیجه می‌دهد $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}۳\\۰\\۱\end{bmatrix}$. اینها همان حذف پیش‌رو و جایگذاری پس‌رو برای $\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۲&۲\\۱&۲&۳\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}۴\\۵\\۶\end{bmatrix}$ هستند.

۱۷. (الف) L به I می‌رود (ب) I به L^{-1} می‌رود (ج) LU به U می‌رود. عملیات حذف یعنی ضرب کردن در L^{-1}!

۱۸. (الف) $LDU = L_1D_1U_1$ را در معکوس‌ها ضرب کنید تا $L_1^{-1}LD = D_1U_1U^{-1}$ به دست آید. سمت چپ پایین‌مثلثی و سمت راست بالامثلثی است ⇐ هر دو طرف قطری هستند. (ب) L، U، L_1، U_1 دارای درایه‌های قطری ۱ هستند، بنابراین $D = D_1$. آنگاه $L_1^{-1}L$ و U_1U^{-1} هر دو برابر I هستند.

۱۹. $\begin{bmatrix}1&&\\1&1&\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix} = LIU$؛ $\begin{bmatrix}a&a&0\\a&a+b&b\\0&b&b+c\end{bmatrix} = L\begin{bmatrix}a&&\\&b&\\&&c\end{bmatrix}U$. یک ماتریس سه‌قطری A دارای عامل‌های دوقطری L و U است.

۲۰. یک ماتریس سه‌قطری T در سطر محوری ۲ درایه غیرصفر دارد و تنها یک درایه غیرصفر زیر محور قرار دارد (یک عمل برای یافتن ℓ و سپس یک عمل برای محور جدید!). فقط n۲ عمل برای حذف روی یک ماتریس سه‌قطری لازم است. T برابر است با L دوقطری ضربدر U دوقطری.

۲۱. برای ماتریس اول A، ماتریس L سه صفر ابتدای سطرها را حفظ می‌کند. اما U ممکن است صفر بالایی را در جایی که $A_{24} = 0$ است، نداشته باشد. برای ماتریس دوم B، ماتریس L صفر پایین–چپ را در ابتدای سطر ۴ حفظ می‌کند. U صفر بالا–راست را در ابتدای ستون ۴ حفظ می‌کند. یک صفر در A و دو صفر در B پر می‌شوند.

۲۲. با حذف به سمت بالا، $\begin{bmatrix}5&3&1\\3&3&1\\1&1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}4&2&0\\2&2&0\\1&1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}2&0&0\\2&2&0\\1&1&1\end{bmatrix} = L$. به یک ماتریس پایین‌مثلثی L می‌رسیم و ضرایب در یک ماتریس بالامثلثی U قرار دارند. $A = UL$ با $U = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

۲۳. زیرماتریس بالا ۲×۲ یعنی A_2 دو محور اول ۵ و ۹ را دارد. دلیل: حذف روی A از گوشه بالا سمت چپ با حذف روی A_2 شروع می‌شود.

۲۴. بلوک‌های بالا سمت چپ همزمان با A تجزیه می‌شوند: $A_k = L_kU_k$. بنابراین $A = LU$ تنها در صورتی ممکن است که تمام آن بلوک‌های A_k معکوس‌پذیر باشند.

۲۵. درایه (i،j) از L^{-1} برای $i \geq j$ برابر j/i است. و درایه $L^{-1}_{i,i-1}$ زیر قطر برابر $(1-i)/i$ است.

۲۶. $(K^{-1})_{ij} = j(n-i+1)/(n+1)$ برای $i \geq j$ (و متقارن است): K^{-1} را در $n+1$ (دترمینان K) ضرب کنید تا همه اعداد صحیح را ببینید.