به نام خدا

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

پروژه رباتیک:

فاز اول – سینماتیک مستقیم و معکوس

اعضا گروه:

شماره دانشجویی	نام و نام خانوادگی
۹۹۲۶۰۶۸	علیرضا طاهری
۹۹۲۶۰۵۲	سید شهاب حسینیان

استاد:

دکتر حامد غفاری راد

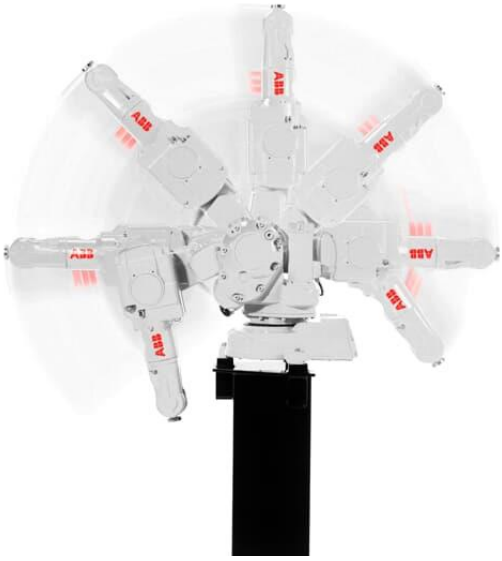
تدریس یار:

مهندس میرحقگوی

بهار ۱۴۰۲

مقدمه – معرفی ربات

ربات انتخابی	ABB IRB 140



این ربات به دلیل برخوداری از ۶ بازو برای اجرای دســـتورات برنامه ریزی شـــده، به ربات شش محوره سریع و قوی، شهرت یافته است. همچنین به دلیل ابعاد کوچک و ظریفی که دارد به ربات کوچک قوی معروف شـــده اســـت. مزیت مهم این ربات این اســـت که می‌توان آن را در هر زاویه ای از کف یا ســـقف یا حتی به صـــورت معکوس نصب نمود.

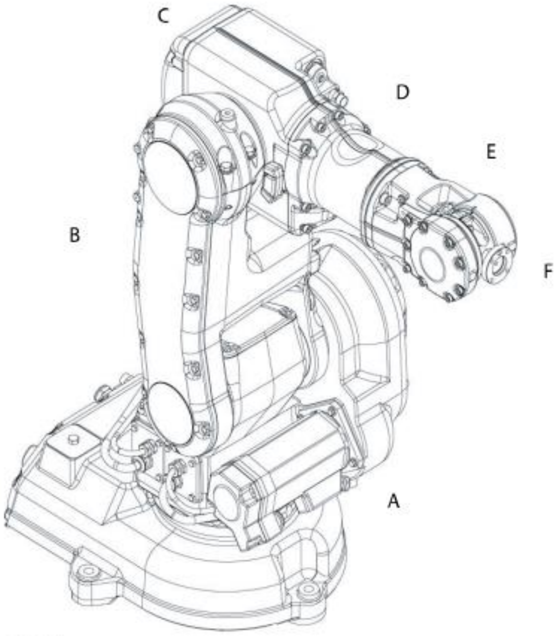
ربات های زیر مجموعه IRB ۱۴۰ به چهار دسته تقسیم می‌شوند:

- ربات های استاندارد
- ربات های ریخته گری
- ربات های شستشو
- ربات کلین روم (برای استفاده در صنایع دارویی)

کلیه ربات های این مجموعه دارای سطح حفاظتی IP67 هستند که نشان دهنده حفاظت ربات در برابر نفوذ آب و رطوبت است.

❋ تعداد درجات آزادی : ۶

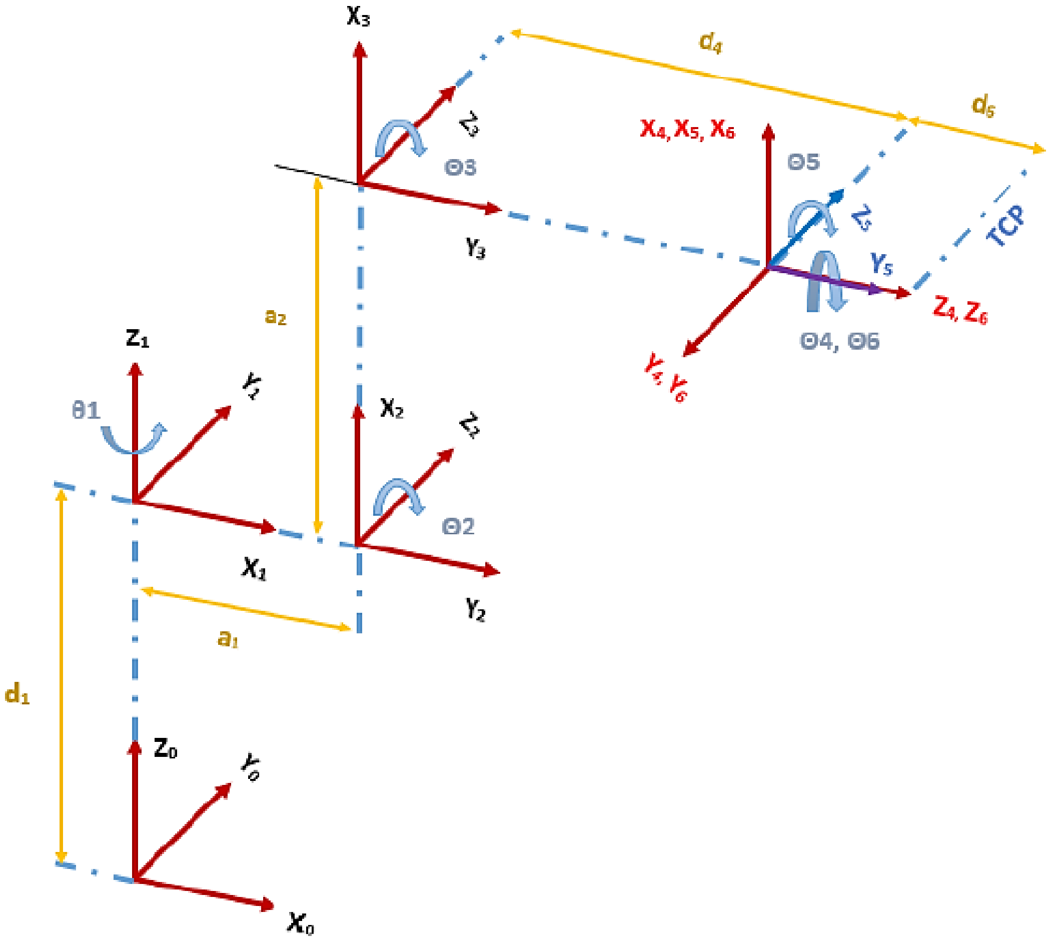
Manipulator axes



Posi-tion	Description	Posi-tion	Description
A	Axis 1	B	Axis 2
C	Axis 3	D	Axis 4
E	Axis 5	F	Axis 6

انتخاب فریم ها

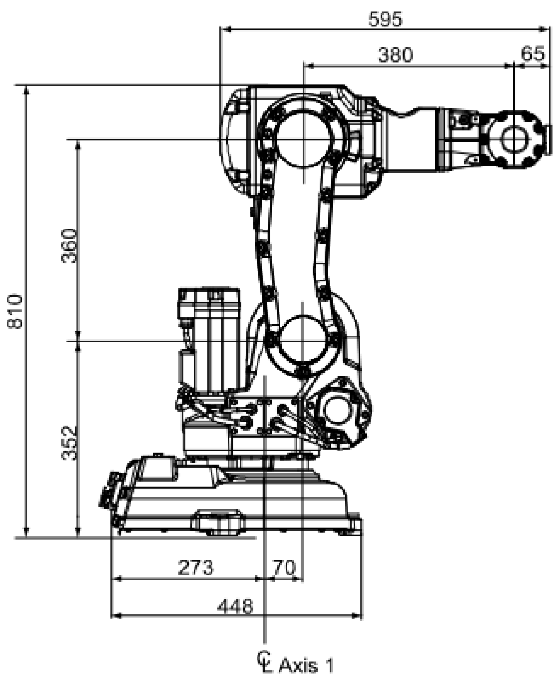
* ۳ فرم آخر بروی هم منطبق هستند.



جدول DH

i	α_{i-1}	a_{i-1} (mm)	d_i (mm)	θ_i
1	0	0	$d_1 = 352$	$\boldsymbol{\theta_1}$
2	$-\frac{\pi}{2}$	$a_1 = 70$	0	$-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} + \theta_2$
3	0	$a_2 = 360$	0	$\boldsymbol{\theta_3}$
4	$-\frac{\pi}{2}$	0	$d_4 = 380$	$\boldsymbol{\theta_4}$
5	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\boldsymbol{\theta_5}$
6	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	$\boldsymbol{\theta_6}$

❈ یادآوری از فاز صفر:



سینماتیک مستقیم

به کمک کد متلب ضمیمه شده و جدول دنویت-هارتنبرگ به دست آمده در بخش قبل، تلاش داریم تا ماترس تبدیل همگن فریم آخر به صفر، T_6^0، را محاسبه کنیم و می‌دانیم که :

$$T_6^0 = T_1^0 * T_2^1 * T_3^2 * T_4^3 * T_5^4 * T_6^5$$

و

$${}^{i-1}_{\ i}T = \begin{pmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i} c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i} c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -d_i s_{\alpha_{i-1}} \\ s_{\theta_i} s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i} s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & d_i c_{\alpha_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

پس داریم:

T1 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 352 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T2 =

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T3 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 360 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T4 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 380 \\ -\sin(\theta_4) & -\cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T5 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T6 =

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_6) & -\cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و در نهایت برای ماتریس تبدیل از فریم آخر به صفر:

```
Position Of 6-Origin With Resect To Base:
```

$$\begin{pmatrix} 10\cos(\theta_1)\ (38\cos(\theta_2+\theta_3)+36\sin(\theta_2)+7) \\ 10\sin(\theta_1)\ (38\cos(\theta_2+\theta_3)+36\sin(\theta_2)+7) \\ 360\cos(\theta_2)-380\sin(\theta_2+\theta_3)+352 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
Rotation Matrix From 6-Origin To Base:
```

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta_6)\,\sigma_5+\cos(\theta_6)\,\sigma_2 & \cos(\theta_6)\,\sigma_5-\sin(\theta_6)\,\sigma_2 & -\sin(\theta_5)\,\sigma_6-\cos(\theta_5)\,\sigma_7 \\ -\sin(\theta_6)\,\sigma_4-\cos(\theta_6)\,\sigma_3 & \sin(\theta_6)\,\sigma_3-\cos(\theta_6)\,\sigma_4 & \sin(\theta_5)\,\sigma_8-\cos(\theta_5)\,\sigma_9 \\ -\cos(\theta_6)\,\sigma_1-\cos(\theta_2+\theta_3)\sin(\theta_4)\sin(\theta_6) & \sin(\theta_6)\,\sigma_1-\cos(\theta_2+\theta_3)\cos(\theta_6)\sin(\theta_4) & -\sin(\theta_2+\theta_3)\cos(\theta_5)-\cos(\theta_2+\theta_3)\cos(\theta_4)\sin(\theta_5) \end{pmatrix}$$

که در آن :

$$\sigma_1=\sin(\theta_2+\theta_3)\sin(\theta_5)-\cos(\theta_2+\theta_3)\cos(\theta_4)\cos(\theta_5)$$

$$\sigma_2=\cos(\theta_5)\,\sigma_6-\sin(\theta_5)\,\sigma_7$$

$$\sigma_3=\cos(\theta_5)\,\sigma_8+\sin(\theta_5)\,\sigma_9$$

$$\sigma_4=\cos(\theta_1)\cos(\theta_4)+\sin(\theta_4)\,\sigma_{11}$$

$$\sigma_5=\cos(\theta_4)\sin(\theta_1)-\sin(\theta_4)\,\sigma_{10}$$

$$\sigma_6=\sin(\theta_1)\sin(\theta_4)+\cos(\theta_4)\,\sigma_{10}$$

$$\sigma_7=\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)-\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)$$

$$\sigma_8=\cos(\theta_1)\sin(\theta_4)-\cos(\theta_4)\,\sigma_{11}$$

$$\sigma_9=\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)-\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)\sin(\theta_1)$$

$$\sigma_{10}=\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_3)\sin(\theta_2)$$

$$\sigma_{11}=\cos(\theta_2)\sin(\theta_1)\sin(\theta_3)+\cos(\theta_3)\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

موقعیت EE

با توجه به فریم گذاری های انجام شـده، می‌توان ادعا کرد که موقعیت عملگر نهایی، End Effector، تنها یک جا به جایی در راسـتـای $\hat{Z}$ فریم {6} و به اندازه $d_6 = 65\ mm$ می‌باشد. پس داریم:

$$P_{EE} = T_6^0 * P^{EE}$$

$$= T_6^0 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + r_{13}d_6 \\ y + r_{23}d_6 \\ z + r_{33}d_6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

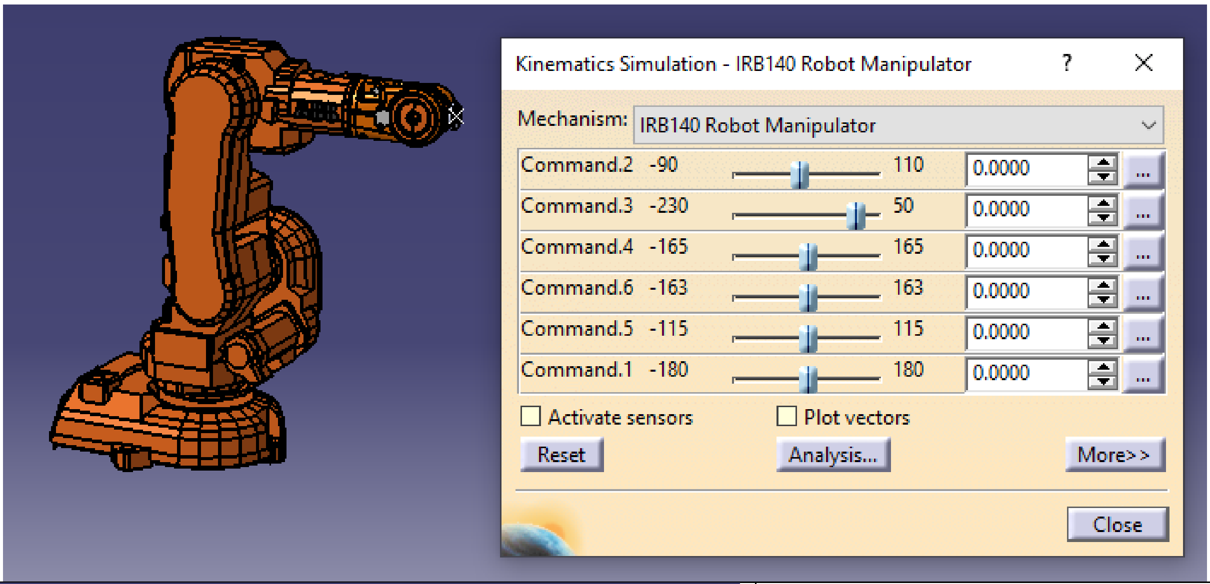
که در آن r_{ij} معرف مولفه سطر i و سـتون j ماتریس دروان R_6^0 اسـت که در بخش قبل محاسبه شده‌اند.

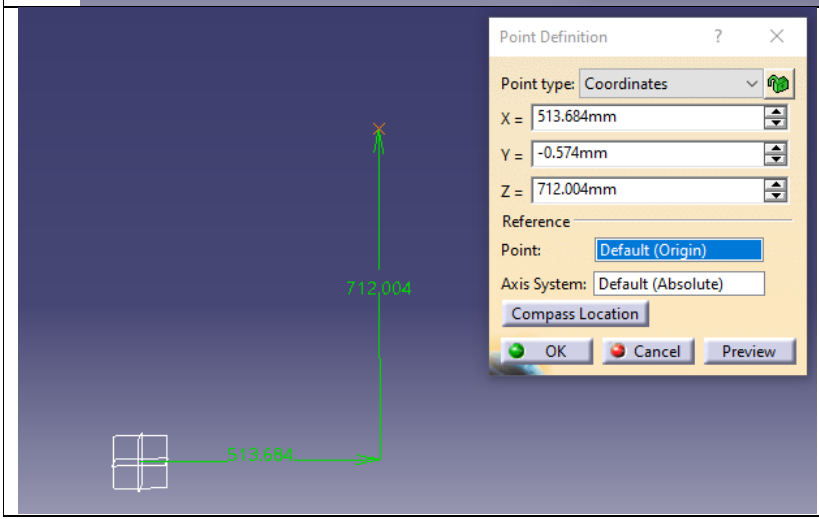
❄ موقعیت، *Orientation*، فریم عملگر نهایی با فریم *{6}* یکسان است.

❄ بخش روبه‌رو محتوی برخی حالات ربات است:

صحه گذاری بر نتایج متلب و نرم افزار کتیا

Robot At Rest





1) Robot At Rest

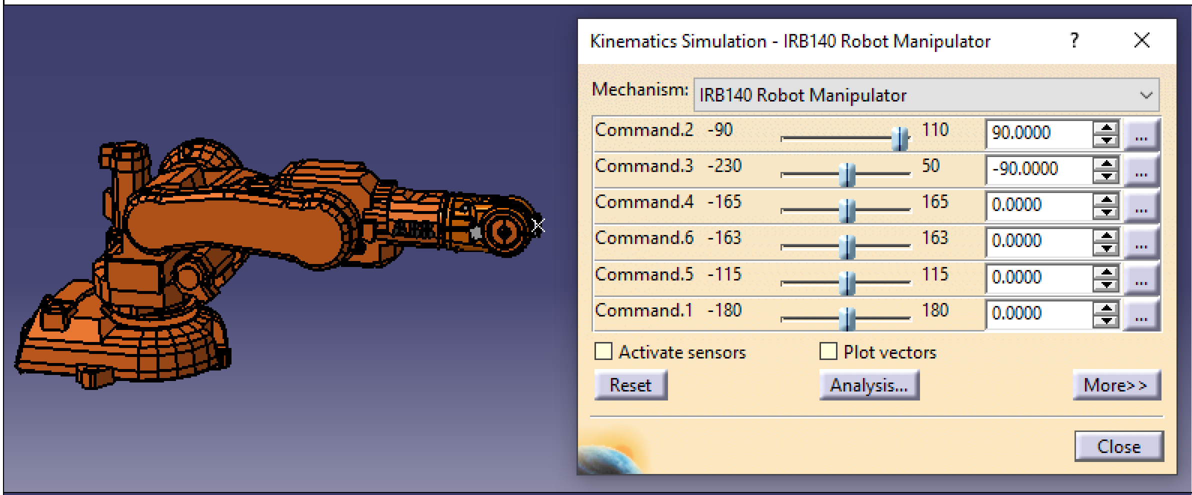
θ_i = 0 for i from 1 to 6

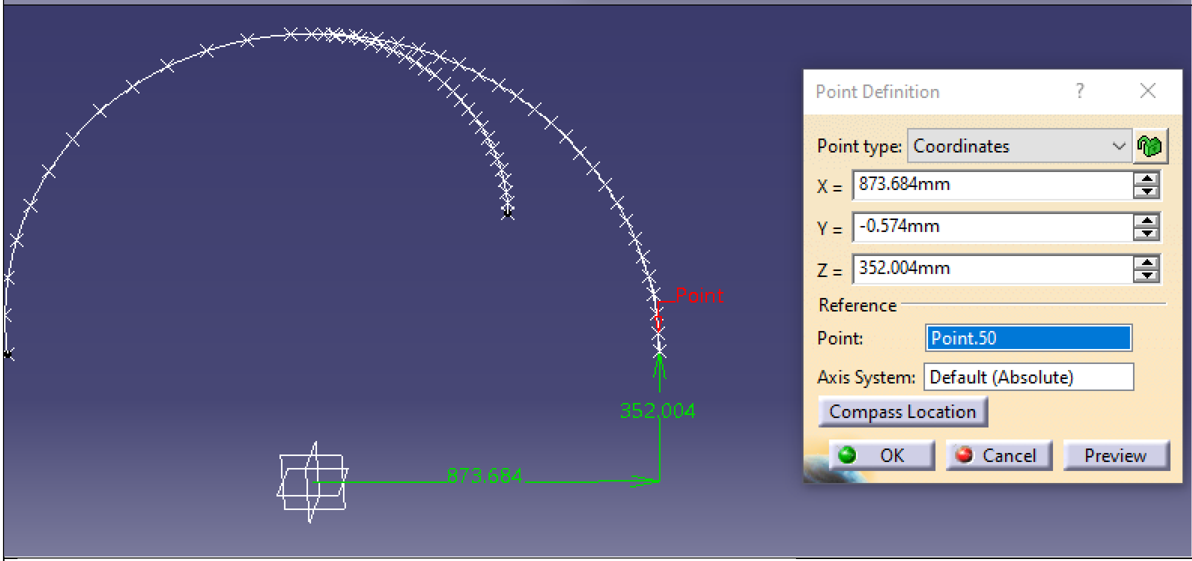
```
subs(P_ee(1:3,1),{theta_sym(1),theta_sym(2), ...
    theta_sym(3),theta_sym(4),theta_sym(5), ...
    theta_sym(6)},{0,0,0,0,0,0})
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 515 \\ 0 \\ 712 \end{pmatrix}$$

Stretched 1 $(\theta_2 = 90\ ,\theta_3 = -90\ )$





2) Stretched

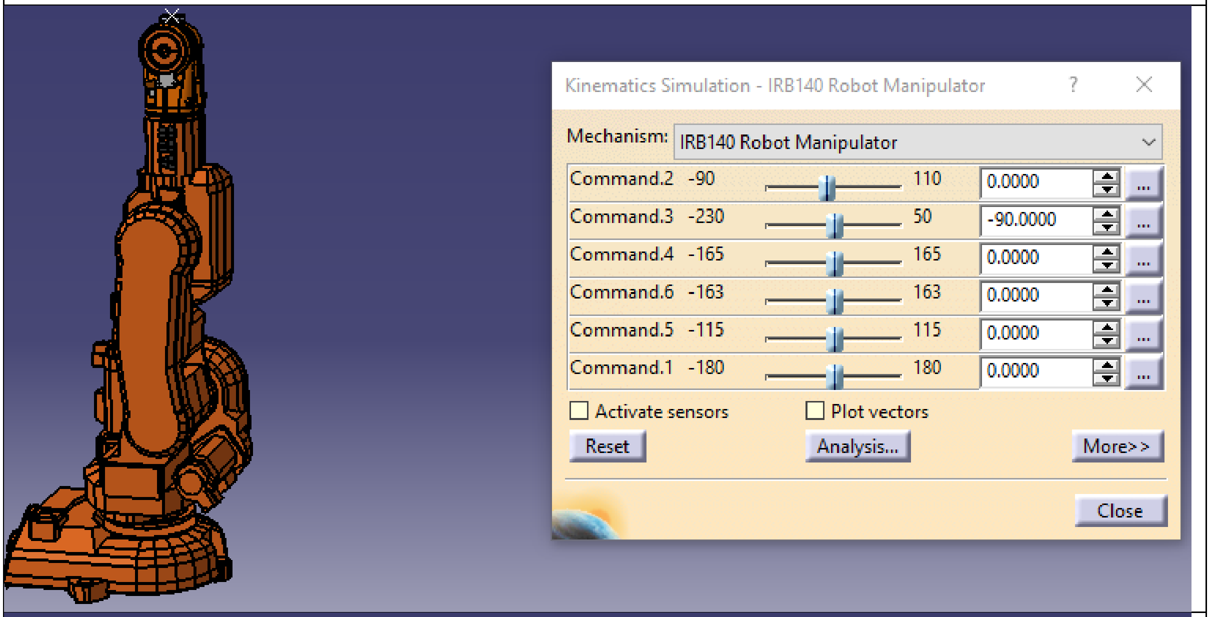
a) θ_3 = -90 , θ_2 = 90

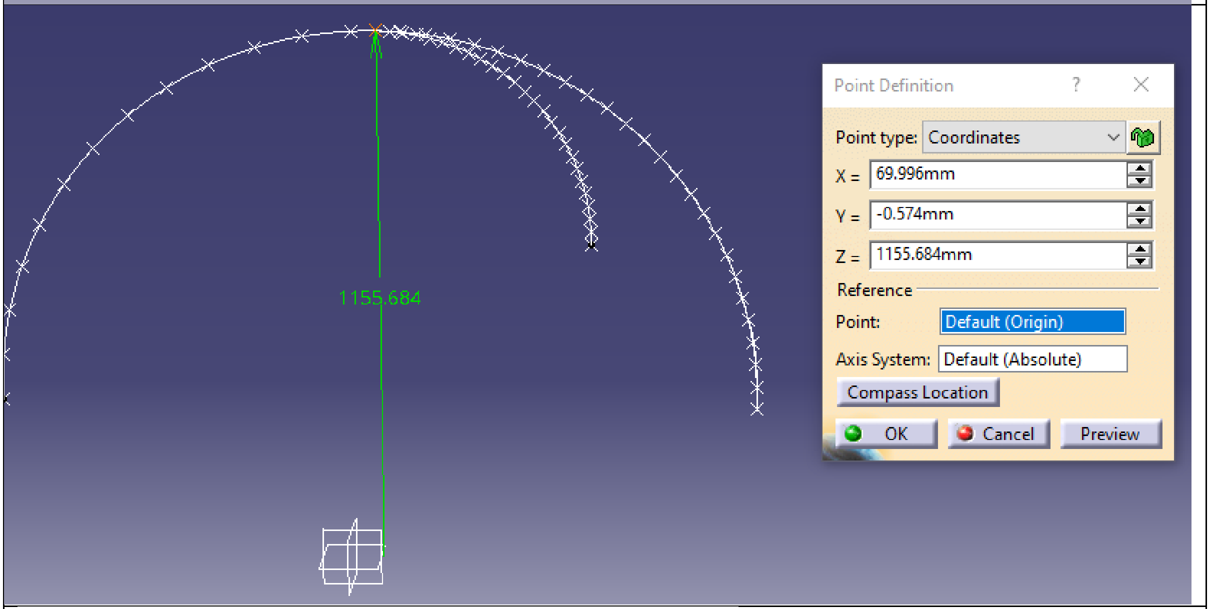
```
subs(P_ee(1:3,1),{theta_sym(1),theta_sym(2), ...
     theta_sym(3),theta_sym(4),theta_sym(5), ...
     theta_sym(6)},{0,deg2rad(90),deg2rad(-90),0,0,0})
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 875 \\ 0 \\ 352 \end{pmatrix}$$

Stretched 2 ($\theta_3 = -90$)





b) θ_3 = -90 , rest = 0

```
subs(P_ee(1:3,1),{theta_sym(1),theta_sym(2), ...
     theta_sym(3),theta_sym(4),theta_sym(5), ...
     theta_sym(6)},{0,0,deg2rad(-90),0,0,0})
```

ans =

$$\begin{pmatrix} 70 \\ 0 \\ 1157 \end{pmatrix}$$

سینماتیک معکوس

روش پایپر ... سه فریم آخر هم مرکز هستند.

الف) روش هندسی برای $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

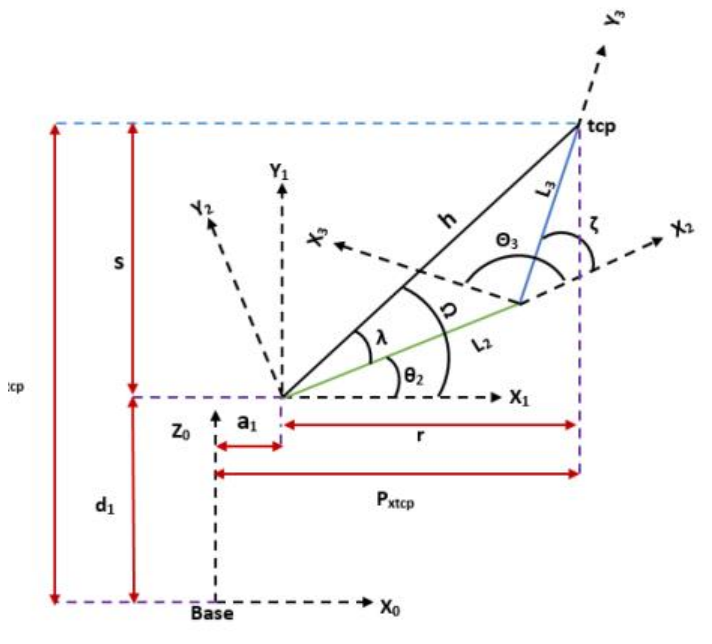
با توجه به قرار گیری فریم {۱} و {۰} می‌توان نتیجه گرفت که پارامتر های تصویر بازوی یک، در صفحه xy و بیان شده در {۱} برابر خواهند بود با مقادیر تصویر این بازو در همان صفحه و بیان شده در فریم {۰} .

از طرفی هر دو بازی دوم و سوم صفحه ای هستند، $zx\ plane$، پس بردار موقعیت در راستای y تنها با θ_1 تغییر می‌کند. از این رو به راحتی دو مقدار برای θ_1 مطابق روابط ذیل به‌دست خواهند آمد:

$$\theta_1 = Atan2(P_{ee}.\widehat{Y_0}, P_{ee}.\hat{X}_0) \tag{1}$$

$$\acute{\theta}_1 = \pi + \theta_1 \tag{2}$$

مقادیر θ_2 و θ_3 با توجه به صفحه‌ی ایجاد شده توسط لینک دوم و سوم و نسبت به جهات اصلی فریم {۰} محاسبه خواهند شد.



تصویر لینک ۲ و ۳

با توجه به شکل و قضیه کسینوس ها داریم:

$$h^2 = L_2^2 + L_3^2 - 2L_2L_3Cos(\pi - \zeta)$$

از طرفی چون موقعیت EE ورودی مسئله معکوس خواهد بود، داریم: $L_3 = d_4 + d_6$

و روابط زیر صادق خواهند بود:

$$L_2 = a_2\,, h^2 = s^2 + r^2$$

$$s^2 + r^2 = a_2^2 + (d_4 + d_6)^2 + 2a_2(d_4 + d_6)Cos(\zeta)$$

$$Cos(\zeta) = \frac{s^2+r^2-(a_2^2+(d_4+d_6)^2)}{2a_2(d_4+d_6)} \qquad (3)$$

حال مقادیر $s\,, r$ به ازای توابعی از θ_1 و موقعیت عملگر نهایی، P_{ee}، مشخص خواهند بود:

$$s = (P_{ee}\,.\hat{Z}_0 - d_1)$$

$$r = \pm\sqrt{\left(P_{ee}\,.\hat{X}_0 - a_1cos(\theta_1)\right)^2 + \left(P_{ee}\,.\hat{Y}_0 - a_1sin(\theta_1)\right)^2}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه (۳) و علم به اینکه $\sin(\zeta) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\zeta)}$

داریم:

$$\zeta = Atan2(\sin(\zeta)\,, \cos(\zeta))$$

$$\theta_3 = -(\frac{\pi}{2} + \zeta)$$

حال به سراغ حل θ_2 می‌رویم. با توجه به شکل تصویر شده لینک ۲و ۳ داریم:

$$\theta_2 = \Omega - \lambda$$

$$\Omega = Atan2(s, r)$$

$$\lambda = Atan2((d_4 + d_6)\sin(\zeta)\,, a_2 + (d_4 + d_6)\cos(\zeta)$$

$$\theta_2 = Atan2(s, r) - Atan2((d_4 + d_6)\sin(\zeta)\,, a_2 + (d_4 + d_6)\cos(\zeta)$$

توجه کنید که دوران در جهت منفی $\hat{Z}_0$–رخ داده و همچنین یک دوران اولیه بین بردار یکه ۱ و ۲ وجود دارد؛ پس مقدار نهایی θ_2 برابر خواهد بود با:

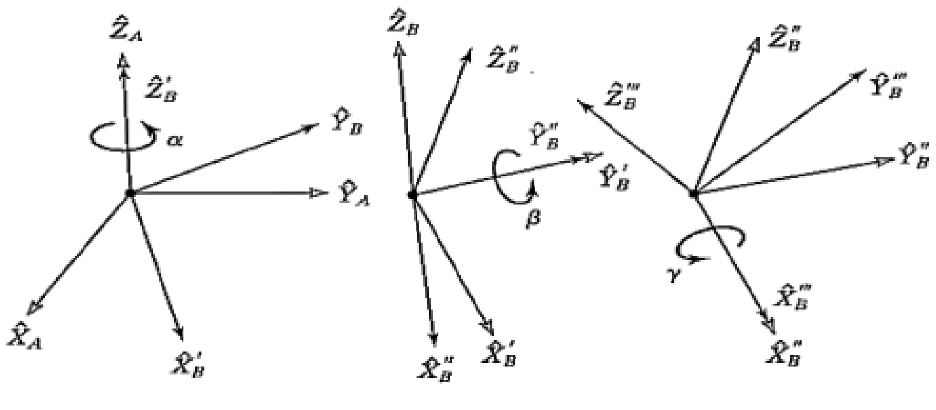
$$\theta_2 = -((\Omega - \lambda) - 90)$$

*** بررسی تعداد جواب برای ست اول متغیر های مفصلی**

از آنجایی که هر مقدار θ_1, θ_1'، منجر به ایجاد ۴ مقدار مختلف ζ و در نتیجه ۴ مقدار متفاوت θ_3 می‌شوند، در حالت کلی ۸ جواب برای مسئله سینماتیک معکوس داریم که ۲ دسته متفاوت θ_2 مربوط به جهت‌گیری ***elbow up*** و ***elbow down*** ربات می‌باشند.

ب) روش تحلیلی برای $\theta_4, \theta_5, \theta_6$

برای محاسبه این زوایا می‌توان از فرمول زوایای اویلری $Z - Y - X$ استفاده کرد.

زوایای اویلری *z-y-x*


ماتریس دوران فریم آخر، $\{6\}$، نسبت به پایه که توسط این سه دوران سری ایجاد می‌شود عبارت است از:

$$R_6^0 = R_{x'y'z'} = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma)$$

$$R_6^0 = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\beta & C_\alpha S_\beta S_\gamma - S_\alpha C_\gamma & C_\alpha S_\beta C_\gamma + S_\alpha S_\gamma \\ S_\alpha C_\beta & S_\alpha S_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma & S_\alpha S_\beta C_\gamma - C_\alpha S_\gamma \\ -S_\beta & C_\beta S_\gamma & C_\beta C_\gamma \end{pmatrix}$$

از سینماتیک مستقیم R_3^0 را می‌دانیم؛ پس:

$$R_6^3 = (R_3^0)^T R_6^0$$

$$R_6^3 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

همچنین می‌توان ادعا کرد که سه متقاطع آخر نسبت به فریم {۳} تشکیل یک ست زوایای اویلری ZYZ می‌دهند؛ یعنی داریم:

$$R_6^3 = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\beta C_\gamma - S_\alpha S_\gamma & -C_\alpha C_\beta S_\gamma - S_\alpha C_\gamma & C_\alpha S_\beta \\ S_\alpha C_\beta C_\gamma + C_\alpha S_\gamma & -S_\alpha C_\beta S_\gamma + C_\alpha C_\gamma & S_\alpha S_\beta \\ -S_\beta C_\gamma & S_\beta S_\gamma & C_\beta \end{pmatrix}$$

همچنین مقدار این ماتریس دوران را طبق تابعی از g_{ij} نیز از قبل داشتیم. با مقایسه این دو عبارت به این نتایج می‌رسیم:

$$\theta_5 = \beta = Atan2(+\sqrt{g_{31}^2 + g_{32}^2}\,, g_{33})$$

$$\theta_4 = \alpha = Atan2(\frac{g_{32}}{S_\beta}, \frac{-g_{31}}{S_\beta})$$

$$\theta_6 = \gamma = Atan2(\frac{g_{23}}{S_\beta} + \frac{g_{13}}{S_\beta})$$

❄ توجه

به ازای هر ۸ جواب به دست آمده از بخش الف برای سه سری متغیر مفصلی اول، یک حالت دومی هم برای زوایای ۴ تا ۶ داریم که معکوس شده اند یا به عبارتی:

$$\theta_5' = -\theta_5 \;\; ,\theta_4' = \pi + \theta_4 \;\; ,\theta_6' = \pi + \theta_6$$

❋ حالت خاص (سینگولار)

اگر مقدار زاویه β برابر صفر یا ۱۸۰ شود، ربات در موقعیت سینگولاریتی قرار خواهد داشت و بدان معناست که راستا های ۴ و ۶ در موقعیت موازی قرار گرفته‌اند.

پیشنهاد:

الف) $\beta = 0$

$$\theta_4 = 0$$
$$\theta_6 = Atan2(-g_{12}, g_{11})$$

ب) $\beta = 180$

$$\theta_4 = 0$$
$$\theta_6 = Atan2(g_{12}, -g_{11})$$

صحه گذاری سینماتیک معکوس

به ازای ورودی حالت *rest* یعنی تمام متغیر های مفصلی برابر با صفر که بردار موقعیت $[515\,, 0\,, 712]^T$ است، متغیر های مفصلی مربوط به موقعیت، یعنی $\theta_{\{1,2,3\}}$ به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\theta_{\{1,2,3\}} = [0\,, -22.4725\,, -169.2647\,]^T$$

❋ این دسته جواب، شامل فقط یک سری از جواب های ممکن است.

```
A = subs(final(1:3,4),{theta_sym(1),theta_sym(2),theta_sym(3)},{theta1,theta2,theta3});
double(A)
```

```
ans = 3×1
   -141.4225
           0
     -5.0521
```

جواب خطا دارد، در فاز بعدی اصلاح خواهد شد.