آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: عماد دیلم صالحی ، امیرحسین عابدی ، علی انصاری

تمرین شماره ۱ تئوری

ترکیبیات ، اصول موضوعه احتمال ، امیدریاضی و واریانس

مسئله‌ی ۱.

فرض کنید اعداد $a_1, a_2, \ldots a_N$ جایگشتی تصادفی از اعداد ۱ تا N باشند. چقدر احتمال دارد که هیچ یک از اعداد

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = S_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_N = S_{N-1} + a_n$$

بر ۳ بخش پذیر نباشند ؟

حل.

در ابتدا توجه کنید که طبق تعریف ، مقدار S_N برابر با جمع مقادیر ۱ تا N خواهد بود. بنابراین باقیمانده N بر ۳ باید ۱ باشد چرا که در غیر این صورت مقدار S_N به ۳ بخش پذیر خواهد بود.
حال فرض کنید داشته باشیم $N = 3k + 1$. و همینطور فرض کنید که هرکدام از a_i ها را با باقیمانده آن به ۳ نشان دهیم. به این معنی که a_i ها هرکدام یکی از مقادیر ۰ و ۱ و ۲ خواهند بود (در آخر جایگشت های مختلف آنها را لحاظ خواهیم کرد.) حال مسئله تبدیل میشود به پیدا کردن تعداد رشته هایی از $k + 1$ تا یک ، k تا صفر و k تا ۲ به طوری که در هیچ اندیسی باقیمانده جمع اول بازه تا این اندیس برابر با صفر نباشد.
حال مسئله را باز هم کمی ساده تر میکنیم. میدانیم مقدار ۰ نمیتواند در اول رشته قرار داشته باشد. حال اگر فرض کنیم که به ازای S_{i-1} شرایط مسئله برقرار باشد و داشته باشیم $a_i = 0$ در این صورت خواسته مسئله برای S_i هم برقرار خواهد بود چرا که صفر مقدار باقیمانده را تغییر نمیدهد. حال مسئله تبدیل میشود به پیدا کردن جایگشتی از $k + 1$ یک و k تا دو به طوری که جمع از اول رشته تا هر اندیسی به ۳ بخش‌پذیر نباشد.
در ابتدا فرض کنید که این رشته با ۲ شروع شود. مقادیر بعدی به طور یکتا مشخص خواهند شد و رشته به صورت ۲۱ ... ۲۲۱۲۱ خواهد بود. در این رشته تعداد ۲ ها از ۱ ها یکی بیشتر است. بنابراین رشته به دست آمده به صورت ۲۱ ... ۲۱۱۱ خواهد بود چرا که در آخر فقط میتوانیم ۱ به آن اضافه کنیم. واضح است که بین ۳ رشته آخر حداقل یکی از آنها به ۳ بخش پذیر خواهد بود.
بنابراین رشته موردنظر نمیتواند با ۲ شروع نمیشود. و با فرض اینکه رشته با ۱ شروع شود به طور یکتا مکان های ۲ و ۱ ها مشخص میشود که به این صورت است ۲۱ ... ۱۲۱۲۱.
حال لازم است جایگشت های مختلف آنها را لحاظ کنیم تا مسئله به طور کامل حل شود. در ابتدا از بین $3k + 1$ مکان مختلف برای اعداد ، در k تا از آنها باید مقدار ۰ قرار دهیم به طوری که هیچکدام در خانه اول نباشند و سپس به جای صفر اعداد اصلی را قرار دهیم. با انتخاب جای اعداد صفر ، جای اعداد ۱ و ۲ هم به طور یکتا مشخص خواهد شد و هرکدام از این اعداد را با اعداد اصلی جایگزین میکنیم. در نهایت جواب آخر به این صورت خواهد بود :

$$\frac{\binom{N-1}{k} \times k! \times k! \times (k+1)!}{N!}$$

که $N!$ برابر با تعداد تمامی حالات ممکن است. ▷

مسئله‌ی ۲.

در یک هواپیما با گنجایش ۱۰۰ نفر، نفر اول بلیط خود را گم کرده است. در نتیجه به صورت تصادفی یک صندلی را انتخاب میکند و می‌نشیند. در ادامه نفر دوم وارد میشود، اگر جای او پر باشد، یک صندلی را به تصادف انتخاب میکند و در غیر این صورت روی صندلی خودش می‌نشیند، همینطور نفرات بعد از او هم همینکار را انجام میدهند.

الف

احتمال اینکه نفر آخر بر روی صندلی خودش باشد را حساب کنید.

ب

پرسش مطرح شده در بخش الف را به جای ۱۰۰ برای N حل کنید.

حل.
در ابتدا مسئله را برای هر N حل میکنیم. دقت داشته باشید که هنگام نشستن نفر آخر ، یا صندلی خودش خالی خواهد بود یا صندلی نقر اول. چرا که در غیر این صورت اگر صندلی دیگری خالی باشد ، یعنی نفری که روی صندلی خودش ننشسته است ، صندلی خودش خالی بوده ولی به صورت رندوم صندلی خودش را انتخاب کرده است که این با فرضیات مسئله تناقض دارد.
حال میدانیم که به علت تقارن مسئله ، صندلی نفر اول و آخر برای بقیه مسافران فرقی نداشته است. به این معنی که اگر مسافری به صورت رندوم صندلی‌ای را انتخاب کرده است ، هرکدام از این ۲ صندلی را میتوانسته است با شانس برابر انتخاب کند. بنابراین نفر آخر به احتمال $\frac{۱}{۲}$ بر روی صندلی خودش خواهد نشست. ▷

مسئله‌ی ۳.

تیراندازی میخواهد به هدف خود شلیک کند. فرض کنید می‌خواهیم محدوده شلیک او را با صفحه مختصات دو بعدی مدل کنیم به این معنا که او به هرجایی میتواند شلیک کند. همینطور فرض کنید که اگر تیر او در فاصله d از مبدا قرار داشته باشد داریم :

$$\mathbb{P}[d \leqslant r_۰] = ۲\mathbb{P}[r_۰ < d \leqslant ۲r_۰] = ۴\mathbb{P}[۲r_۰ < d \leqslant ۳r_۰] = \dots$$

همچنین فرض کنید در درون هر یک از $mr_۰ < d \leqslant (m+۱)r_۰$ ها احتمال انتخاب نقاط برابر میباشد. چقد احتمال دارد که هدف شلیک شده درون مربع زیر قرار بگیرد ؟

$$(۲r_۰, ۲r_۰), (۲r_۰, -۲r_۰), (-۲r_۰, ۲r_۰), (-۲r_۰, -۲r_۰)$$

حل.
در ابتدا فرض کنید که احتمال برخورد تیر به دایره اول p باشد ، بنابراین احتمال برخورد آن به دایره دوم $\frac{p}{۲}$ خواهد بود و همینطور برای دایره های دیگر هم میتوانیم این احتمال را حساب کنیم. واضح است که اجتماع این پیشامد ها فضای نمونه را تشکیل میدهد و همچنین ۲ به ۲ هیچ اشتراکی ندارند. بنابراین جمع آنها برابر با ۱ خواهد بود.

$$p \times \sum_{i=۰}^{\infty} ۲^{-i} = ۱$$

$$p = \frac{۱}{۲}$$

حال اگر مربع خواسته شده را ترسیم کنیم ، میبینیم که به طور کامل دایره اول و دوم را در بر دارد و همچنین قسمتی از دایره سوم را در خودش قرار میدهد. بنابراین احتمال خواسته شده به این صورت به دست می‌آید :

$$= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} \times \frac{\text{مساحت درون دایره سوم}}{\text{مساحت دایره سوم}}$$

$$= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} \times \frac{۱۶ - ۴\pi}{۵\pi}$$

▷

مسئله‌ی ۴.

علی از بین جایگشت های n تایی یکی را به تصادف انتخاب میکند. (احتمال انتخاب هریک از این جایگشت ها یکسان است). پدر علی به ازای هر یک از اعداد جایگشت که از اعداد قبلی خود بزرگتر است، به علی یک دلار میدهد. امیدریاضی دارایی علی را بدست آورید. (فرض کنید دارایی علی از صفر شروع میشود).

حل.
با استفاده از متغیر تصادفی داریم :

$$X_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر i امین عنصر در جایگشت از همه عناصر قبلی بزرگتر باشد} \\ ۰ & \text{Otherwise} \end{cases}$$

با توجه به اینکه احتمال همه جایگشت ها یکسان است پس احتمال اینکه در i عنصر اول ، عنصر i ام بیشینه باشد برابر با بیشینه شدن هر یک از عناصر دیگر است و این یعنی $\mathbb{P}[X_i = ۱] = \frac{۱}{i}$ و در نتیجه $\mathbb{E}[X_i] = \frac{۱}{i}$ با استفاده از خطی بودن امیدریاضی داریم :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{i}$$

▷

مسئله‌ی ۵.

G گوی سبز، W گوی سفید و R گوی قرمز داریم به طوری که $G + R + W = ۳E$. گوی ها در E جعبه به صورت ۳ تایی قرار میدهیم. امیدریاضی تعداد جعبه هایی را بدست آورید که در آنها ۳ گوی همرنگ وجود داشته باشد. (فرض کنید که $G, W, R \geqslant ۳$)

حل.
متغیر های تصادفی X_i را به این صورت تعریف میکنیم :

$$X_i = \begin{cases} ۱ & \text{همه مهره ها درون جعبه i به یکرنگ باشند} \\ ۰ & \text{Otherwise} \end{cases}$$

حال داریم :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=۱}^{E} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=۱}^{E} \mathbb{P}[X_i = ۱]$$

$$= E \times \frac{\binom{G}{۳} + \binom{R}{۳} + \binom{W}{۳}}{\binom{۳E}{۳}}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۶.

دستگاه تولید سکه‌ای داریم که احتمال شیر آمدن سکه‌هایی که میسازد باهم برابر نیست. به عبارت دیگر، اگر متغیر تصادفی Y را برابر با احتمال شیر آمدن سکه‌ای که دستگاه تولید میکند درنظر بگیریم، تابع جرم احتمال آن به شرح زیر است:

$$\mathbb{P}[Y = y] = \begin{cases} y & y = \frac{۱}{۲^i}, i \in \mathbb{N} \\ ۰ & \text{Otherwise} \end{cases}$$

این دستگاه سکه‌ای تولید میکند. حال با علم به اینکه احتمال شیر یا خط آمدن آن را نمیدانیم و فقط توزیع آن را داریم، به سوال های زیر پاسخ دهید. دقت کنید که احتمال شیر یا خط آمدن سکه پس از تولید شدن مقدار ثابتی است ولی این مقدار، یک مقدار تصادفی است.

الف

سکه را یکبار پرتاب میکنیم. احتمال شیر آمدن آن چند است ؟

ب

سکه را n بار پرتاب میکنیم. در این n بار پرتاب متوالی، هر بار که یک پرتاب شیر بیاید و پرتاب بلافاصله بعدی آن خط بیاید، یک دلار دریافت میکنیم. متغیر تصادفی میزان دلاری که دریافت میکنیم X است. $\mathbb{E}[X]$ را محاسبه کنید.

ج

با توجه به قسمت قبل Var(X) را حساب کنید.

حل.

الف

متغیر تصادفی X را برابر با ۱ میگیریم اگر سکه شیر بیاید در غیر اینصورت صفر در نظر میگیریم. طبق قانون احتمال کل داریم :

$$\mathbb{P}[X = ۱] = \sum_{i=۱}^{\infty} \mathbb{P}[X = ۱, Y = \frac{۱}{۲^i}]$$

$$= \sum_{i=۱}^{\infty} \mathbb{P}[X = ۱ | Y = \frac{۱}{۲^i}] \times \mathbb{P}[Y = \frac{۱}{۲^i}]$$

$$= \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{۱}{۴^i} = \frac{۱}{۳}$$

ب

متغیر تصادفی X_i به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$X_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر پرتاب i شیر بیاید و پرتاب بعدی خط بیاید} \\ ۰ & \text{Otherwise} \end{cases}$$

حال داریم :

$$X = \sum_{i=۱}^{n-۱} X_i$$

و با استفاده از خواص خطی امیدریاضی داریم :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=۱}^{n-۱} \mathbb{E}[X_i]$$

با توجه به اینکه X_i ها متغیر تصادفی برنولی هستند داریم :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}[X = ۱]$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=۱}^{n-۱} \mathbb{P}[X_i = ۱] = \sum_{i=۱}^{n-۱} \sum_{y=۱}^{\infty} \mathbb{P}[X_i = ۱ | Y = \frac{۱}{۲^y}] \times \mathbb{P}[Y = \frac{۱}{۲^y}]$$

$$= (n-۱) \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{۱}{۴^i} - \frac{۱}{۸^i} = \frac{۴(n-۱)}{۲۱}$$

ج

طبق تعریف X_iدر بخش قبل پیش میرویم :

$$X_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر پرتاب i شیر بیاید و پرتاب بعدی خط بیاید} \\ ۰ & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^۲] - \mathbb{E}[X]^۲$$

برای محاسبه $\mathbb{E}[X^۲]$ داریم :

$$\mathbb{E}[X^۲] = \mathbb{E}[(\sum_{i=۱}^{n-۱} X_i)^۲]$$

$$= \mathbb{E}[\sum_{i=۱}^{n-۱} X_i^۲ + \sum_{i<j} ۲X_iX_j] = \sum_{i=۱}^{n-۱} \mathbb{E}[X_i^۲] + \sum_{i=j-۱} ۲\mathbb{E}[X_iX_j] + \sum_{i<j-۱} ۲\mathbb{E}[X_iX_j]$$

همینطور توجه داشته باشید که ۲ تا X_i متوالی نمیتوانند همزمان برابر با ۱ باشند چرا که ناسازگار هستند و همینطور فقط مقادیر ۰ و ۱ را اختیار میکنند بنابراین داریم :

$$\sum_{i=j-1} 2\mathbb{E}[X_iX_j] = 0$$

و همینطور چون X_i ها متغیر تصادفی برنولی هستند داریم :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[X_i^2] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}[X_i] = \frac{4(n-1)}{21}$$

حال X_i هایی که بیشتر از یک واحد اختلاف داشته باشند مستقل خواهند بود بنابراین داریم :

$$\sum_{i<j-1} 2\mathbb{E}[X_iX_j] = \sum_{i<j-1} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] = 2\binom{n-2}{2}(\frac{4}{21})^2$$

و در کل داریم :

$$Var(X) = \frac{4(n-1)}{21} + \frac{16(n-2)(n-3)}{441} - (\frac{4(n-1)}{21})^2$$

▷

مسئله‌ی ۷.

در یک دریاچه N نوع ماهی داریم. فرض کنید که در هر بار صید کردن، به احتمال P_i ماهی نوع i را صید میکنیم. فرض کنید X تعداد انواع ماهی هایی باشد که پس از n بار صید کردن بدست آورده ایم. میانگین X را بدست آورید.

حل.
متغیر تصادفی زیر را تعریف میکنیم.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر ماهی نوع i شکار شود} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

داریم :

$$\mathbb{P}[X_i = 1] = 1 - (1 - P_i)^n$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[X_i] = N - \sum_{i=1}^{N} (1 - P_i)^n$$

▷

نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم HW#_[STD-Num] آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز شنبه ۲۰ فروردین ۱۴۰۱ می‌باشد.

موفق باشید :)