



مسئله‌ی ۱. اخراج کاپیتان

فرض کنید در هر یک از روزهای پیش رو کاپیتان با احتمال p اخراج شود و این احتمال برای هر روز از روزهای دیگر مستقل است. فرض کنید بدانیم کاپیتان در n روز آینده دیگر کاپیتان نیست یعنی به علت عملکرد ضعیف اخراج شده است. امید ریاضی تعداد روزهای کاپیتانی کاپیتان را محاسبه کنید..

مسئله‌ی ۲. کاپیتان و دره

از جایی که کاپیتان ایستاده تنها یک قدم به سمت چپ کافی است تا کاپیتان به انتهای دره بیفتد. او تنها یا به سمت چپ حرکت میکند یا به سمت راست (یعنی یا به دره نزدیک می شود یا دور) که به احتمال p از آن دور و به احتمال $1-p$ به آن نزدیک میشود. احتمال از دست دادن کاپیتان را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۳. کاپیتان و نمره کمینه

استاد برای امتحان کاپیتان آزمونی ترتیب داده است که به شرط زیر است. استاد برگه های سال پیش را که هیچ کدام نمره برابری با هم ندارند جلوی کاپیتان میگذارد، کاپیتان میتواند هر برگه را نگاه کند و بگوید ”دیگر از این کمتر نمی شود” و این جمله را تنها یک بار میتواند بگوید اگر درست بگوید به عنوان کاپیتان انتخاب خواهد شد در غیر اینصورت رد میشود. کاپیتان چگونه در امتحان موفق شود؟

مسئله‌ی ۴. درخواست تمدید

فرض کنید شما سخت زیر فشار هستید و میخواهید برای تمرین امتیازی در گروه درخواست تمدید بدهید، میدانید که استاد مخالف است و اگر پیام شما را ببیند قطعاً درخواست شما رد خواهد شد. از طرفی میدانید که استاد با یک فرایند پواسون با نرخ λ پیام ها را چک میکند، لذا شما تصمیم میگیرید اگر برای زمان n استاد گروه را چک نکند پیام را بفرستید تا کاپیتان ببیند و تمدید کند. امید ریاضی تعداد بارهایی که استاد قبل از تمدید گروه را چک میکند را حساب کنید.

مسئله ۵.

دو متغیر تصادفی مستقل X و Y داریم. که هر یک از مقادیر طبیعی $1, 2, \dots, n$ را با احتمال مساوی به خود میگیرند. ثابت کنید:

$$\mathbb{E}[|X - Y|] = \frac{n^2 - 1}{3n}$$

مسئله ۶.

متغیر تصادفی X از توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 پیروی میکند.

الف

تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = e^X$ را بدست آورید.

ب

امید ریاضی Y را محاسبه کنید.

مسئله ۷.

در ظرفی تعدادی گوی از m نوع مختلف وجود دارد و هریک از گوی ها را انتخاب میکنیم، به احتمال مساوی ممکن است هریک از m نوع انتخاب شده باشد. امید ریاضی تعداد گوی های متمایز در یک مجموعه n تایی انتخاب شده بیاوید.

مسئله ۸. پیوند سوالات

(X_1, X_2, \dots, X_n) یک بردار تصادفی یکنواخت از مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n : 0 < x_1 < \dots < x_n < 1\}$ میباشد. همینطور فرض کنید که $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع پیوسته باشد، با فرض اینکه $X_0 = 0$ تعریف میکنیم:

$$Y = \sum_{i=0}^{n-1} f(X_{i+1})(X_{i+1} - X_i)$$

حال ثابت کنید :

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 f(x)(1 - (1-x)^n) dx$$

نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم Emtiazi_[STD-Num] آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۷ تیر ۱۴۰۱ می باشد.

موفق باشید :)