



مسئله‌ی ۱.

فرض کنید اعداد a_1, a_2, \dots, a_N جایگشتی تصادفی از اعداد ۱ تا N باشند. چقدر احتمال دارد که هیچ یک از اعداد

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = S_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_N = S_{N-1} + a_n$$

بر ۳ بخش پذیر نباشند ؟

مسئله‌ی ۲.

در یک هواپیما با گنجایش ۱۰۰ نفر، نفر اول بلیط خود را گم کرده است. در نتیجه به صورت تصادفی یک صندلی را انتخاب میکند و می‌نشیند. در ادامه نفر دوم وارد میشود، اگر جای او پر باشد، یک صندلی را به تصادف انتخاب میکند و در غیر این صورت روی صندلی خودش می‌نشیند، همینطور نفرات بعد از او هم همینکار را انجام میدهند.

الف

احتمال اینکه نفر آخر بر روی صندلی خودش باشد را حساب کنید.

ب

پرسش مطرح شده در بخش الف را به جای ۱۰۰ برای N حل کنید.

مسئله‌ی ۳.

تیراندازی میخواهد به هدف خود شلیک کند. فرض کنید می‌خواهیم محدوده شلیک او را با صفحه مختصات دو بعدی مدل کنیم به این معنا که او به هر جایی میتواند شلیک کند. همینطور فرض کنید که اگر تیر او در فاصله d از مبدا قرار داشته باشد داریم :

$$P[d \leq r_0] = 2P[r_0 < d \leq 2r_0] = 4P[2r_0 < d \leq 3r_0] = \dots$$

همچنین فرض کنید در درون هر یک از $mr_0 < d \leq (m+1)r_0$ ها احتمال انتخاب نقاط برابر میباشد. چقدر احتمال دارد که هدف شلیک شده درون مربع زیر قرار بگیرد ؟

$$(2r_0, 2r_0), (2r_0, -2r_0), (-2r_0, 2r_0), (-2r_0, -2r_0)$$

مسئله‌ی ۴.

علی از بین جایگشت های n تایی یکی را به تصادف انتخاب میکند. (احتمال انتخاب هریک از این جایگشت ها یکسان است). پدر علی به ازای هر یک از اعداد جایگشت که از اعداد قبلی خود بزرگتر است، به علی یک دلار میدهد. امیدریاضی دارایی علی را بدست آورید. (فرض کنید دارایی علی از صفر شروع میشود).

مسئله‌ی ۵.

G گوی سبز، W گوی سفید و R گوی قرمز داریم به طوری که $G + R + W = 3E$. گوی ها در E جعبه به صورت ۳ تایی قرار میدهم. امیدریاضی تعداد جعبه هایی را بدست آورید که در آنها ۳ گوی هم رنگ وجود داشته باشد. (فرض کنید که $G, W, R \geq 3$)

مسئله‌ی ۶.

دستگاه تولید سکه‌ای داریم که احتمال شیر آمدن سکه‌هایی که میسازد باهم برابر نیست. به عبارت دیگر، اگر متغیر تصادفی Y را برابر با احتمال شیر آمدن سکه‌ای که دستگاه تولید میکند در نظر بگیریم، تابع جرم احتمال آن به شرح زیر است:

$$P[Y = y] = \begin{cases} y & y = \frac{1}{4^i}, i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

این دستگاه سکه‌ای تولید میکند. حال با علم به اینکه احتمال شیر یا خط آمدن آن را نمیدانیم و فقط توزیع آن را داریم، به سوال های زیر پاسخ دهید. دقت کنید که احتمال شیر یا خط آمدن سکه پس از تولید شدن مقدار ثابتی است ولی این مقدار، یک مقدار تصادفی است.

الف

سکه را یکبار پرتاب میکنیم. احتمال شیر آمدن آن چند است ؟

ب

سکه را n بار پرتاب میکنیم. در این n بار پرتاب متوالی، هر بار که یک پرتاب شیر بیاید و پرتاب بلافاصله بعدی آن خط بیاید، یک دلار دریافت میکنیم. متغیر تصادفی میزان دلاری که دریافت میکنیم X است. $E[X]$ را محاسبه کنید.

ج

با توجه به قسمت قبل $Var(X)$ را حساب کنید.

مسئله‌ی ۷.

در یک دریاچه N نوع ماهی داریم. فرض کنید که در هر بار صید کردن، به احتمال P_i ماهی نوع i را صید میکنیم. فرض کنید X تعداد انواع ماهی هایی باشد که پس از n بار صید کردن بدست آورده ایم. میانگین X را بدست آورید.

نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم HW#[STD-Num] آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز شنبه ۲۰ فروردین ۱۴۰۱ می باشد.

موفق باشید :)