(*)

$$P(A) = p^2 + qp\,P(A|HT) + pq\,P(A|TH)$$ 2

$$\begin{cases} P(A|HT) = p\,P(A|TH) \\ P(A|TH) = p + q\,P(A|HT) \end{cases}$$

اگر HT آمده باشد پس برای برد A حتماً بعدی باید H باشد با احتمال p

در اینجا اگر H بیاید بازی تمام است

و با احتمال p می آید اگر T بیاید که با احتمال q می آید

بازی با HT ادامه می یابد.

5

$$P(A|HT) = p\,(p + q\,P(A|HT)) = p^2 + pq\,P(A|HT)$$

$$\Rightarrow P(A|HT) = \frac{p^2}{1-pq} \Rightarrow P(A|TH) = \frac{p}{1-pq}$$ 2

$$\Rightarrow (*) \Rightarrow P(A) = p^2 + \frac{p^3 q}{1-pq} + \frac{p^2 q}{1-pq} = p^2\left(\frac{1+q}{1-pq}\right)$$

$$\Rightarrow P(X_1 = H|A) = \frac{p^2 + \frac{p^3 q}{1-pq}}{p^2\left(\frac{1+q}{1-pq}\right)} = \frac{1}{1+q} = \frac{1}{2-p}$$ 5

---

a)

$$f_{X|Y}(X|Y=y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{-1}^{+1} \left(x^2 + \tfrac{1}{3}y\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \tfrac{1}{3}xy\right]_{-1}^{+1}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{2}{3}(1+y) \quad ; \quad 0 \le y \le 1$$ 0.5

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{x^2 + \frac{1}{3}y}{\frac{2}{3}(1+y)} \quad -1 \le x \le 1 \;,\; 0 \le y \le 1$$

0.5

$$b)\quad f_{XY}(X>0 \mid Y=y) = \int_0^{\infty} \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2+\frac{1}{3}y}{\frac{2}{3}(1+y)}\, dx = \frac{x^3}{2(1+y)}\Big|_0^1 + \frac{y}{2+2y} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

1

1 پس به مقدار y بستگی ندارد.

$$c)\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}y\right) dy = \left[x^2 y + \frac{1}{6}y^2\right]_0^1$$

$$\Rightarrow f_X(x) = x^2 + \frac{1}{6}$$ 1

اما برای استقلال $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ ، $\frac{2}{3}(1+y) \times \left(x^2+\frac{1}{6}\right)$

$$\neq$$

پس مستقل نیستند. $x^2+\frac{1}{3}y$ 1

___ / ___ / ___

a) $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y|x) = 2 \; : 0 < x < 1,\; 0 < y < x$ 1
3

$f_Y(y) = \int_y^1 2\, dx = 2(1-y) \; : 0 < y < 1$ 1

$f_X(x|y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{1}{1-y} \; : y < x < 1$ 1

b) $E[X|Y=y] = \int_y^1 x \cdot f_X(x|y)\, dx = \int_y^1 \dfrac{x}{1-y}\, dx$
4

$= \dfrac{x^2}{2(1-y)} \Big|_y^1 = \boxed{\dfrac{1+y}{2}}$ 4

c) $Z = yx, \quad W = x \quad \Rightarrow f_{ZW}(z,w) = \dfrac{f_{XY}(w, z/w)}{\det(J(x,y))}$
4 $x = w, \quad$ 2 $\; y = z/w$

$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -x$

$\Rightarrow \sqrt{z} < w$

$\Rightarrow f_{ZW}(z,w) = \dfrac{2}{w}$ 1 $\quad 0 < w < 1, \quad 0 < \dfrac{z}{w} < w$

$\Rightarrow f_Z(z) = \int_{\sqrt{w}}^1 \dfrac{2}{w}\, dw = \dots = -\ln(z)$

1 $\quad 0 < z < 1$

الف) $H_0: \mu = 1.5$ میانگین نمونه مورد استفاده = A

$H_A: \mu > 1.5$

$$\text{P-value} = P(\bar{X} > A \mid H_0)$$

$$= P\left(Z > \frac{A-1.5}{\frac{0.2}{\sqrt{100}}}\right) = Pr(Z > 50(A-1.5)) = 0.016$$

$$\Rightarrow P(Z < 50(A-1.5)) = 0.984$$ 3

طبق جدول نرمال استاندارد نقطه مورد نظر برابر است با 2.15 ۱

$$\Rightarrow 50(A-1.5) = 2.15 \rightarrow A = 1.5 + \frac{2.15}{50} = 1.543$$ 1

ب) $$\hat{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha/2}$$ 2

$$1-\alpha = 0.99 \longrightarrow 1-\alpha/2 = 0.995 \rightarrow Z_{1-\alpha/2} = 2.58$$

$$1.543 - \frac{0.2}{10} \times 2.58 < \mu < 1.543 + \frac{0.2}{10} \times 2.58$$

$$\Rightarrow 1.4914 < \mu < 1.5946$$ 2

میانگین واقعی نیکوتین موجود در سیگارهای این برند با احتمال 99% داخل بازه

(1.4914, 1.5946) میلی گرم قرار دارد. 1

5) MLE[A|X]   فرض کنید $X=x$ پرتاب گلپکان باشد

$= \arg\max_{x} \ln(P(X=x \mid A=\lambda))$ 1

$= \ln\left(\frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!}\right) = -\ln(x!) + x\ln\lambda - \lambda$ 2

$l'(\lambda) = \frac{x}{\lambda} - 1 \Rightarrow l'(\lambda)=0 \Rightarrow \boxed{\lambda = X}$ 2

b) MAP : $l(\lambda) = \ln P(X=x \mid A=\lambda) P(A=\lambda)$

$= \ln\left(\frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} p(1-p)^{\lambda-1}\right) = -\ln(x!) + x\ln\lambda + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) - \lambda\ln\left(\frac{e}{1-p}\right)$

4

$\Rightarrow l'(\lambda) = \frac{x}{\lambda} - \ln\left(\frac{e}{1-p}\right) \Rightarrow MAP[A|X] = X\left(1+\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right)^{-1}$

4

2