



## نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم [STD-Num]\_HW# آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۴ خرداد است.
- مشورت در تمرین‌ها مجاز است و توصیه هم می‌شود، اما هر دانشجو موظف است تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده، باید توسط خود دانشجو نوشته شده باشد. در صورت کشف اولین مورد تقلب هر دانشجو، نمره‌ی همان تمرین وی، صفر در نظر گرفته شده و در صورت کشف دومین مورد تقلب، هر دانشجو، منفی نمره‌ی کل تمرین‌ها به وی تعلق خواهد گرفت. برای کسب اطلاعات بیشتر در خصوص آیین نامه‌ی مشورت و تقلب، می‌توانید به بخش مربوطه در ویکی دانشکده مراجعه کنید. لازم به ذکر است که این جرایم به هیچ عنوان بخشیده نخواهند شد.

## مسئله‌ی ۱.

- در هر یک از بخش‌های زیر، تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه را برای پارامترهای خواسته شده بیابید. در تمامی بخش‌ها، نمونه‌های مشاهده شده مستقل از یکدیگرند.
۱. داده‌های  $X_1, X_2, \dots, X_n$  از توزیع نمایی با پارامتر  $\theta$  مشاهده شده‌اند. تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه برای  $\theta$  را بیابید.
  ۲. داده‌های  $X_1, X_2, \dots, X_n$  از توزیع نرمال با پارامترهای  $(\mu, \sigma)$  مشاهده شده‌اند. تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه برای پارامترهای  $(\mu, \sigma)$  را بیابید.
  ۳. نقاط  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  از صفحه داده شده‌اند. می‌دانیم که  $y_i = ax_i + b + \alpha_i$  که  $\alpha_i$  ها، نمونه‌هایی مستقل از توزیع نرمال با پارامترهای  $(0, \sigma)$  هستند. تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه برای پارامترهای  $a, b$  را بیابید.

## مسئله‌ی ۲.

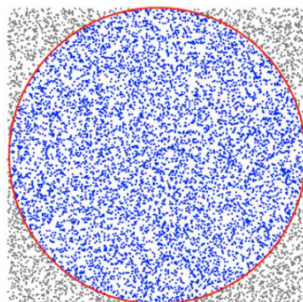
- فرض کنید که  $X$  یک متغیر تصادفی گسسته با دامنه  $1, 2, \dots, k$  باشد و  $p_i = P(X = i)$  داده‌های مستقل  $X_1, X_2, \dots, X_n$  از این متغیر تصادفی موجود است. اگر بردار احتمالات  $p$  را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه برای  $p$  را بیابید.

### مسئله‌ی ۳.

فرض کنید می‌خواهیم با استفاده از روش مونت کارلو عدد پی را گزارش کنیم. این روش بدین شکل است که بایستی به صورت یکنواخت از مربعی به اندازه دو در دو (شکل ۱)، یک نقطه انتخاب کرد. سپس تعداد نقاطی که داخل دایره افتاده اند تقسیم بر کل نقاط عدد تقریبی را به ما خواهد داد. در هنگام تکمیل گزارش بایستی نتیجه خود را به صورت یک جمله احتمالی در گزارش بنویسیم. تعداد نقاط لازم را به دست آورید که مطمئن شویم خطای تخمین ما از عدد پی با احتمال ۹۵٪، کمتر از ۰.۱۰ است.



شکل ۱: نمونه نقاط انتخاب شده

### مسئله‌ی ۴.

آماردانی برای به دست آوردن امید به زندگی دانشجویان شریف، بیست بازه اطمینان ۹۵٪ مستقل از هم به دست آورده است. او می‌خواهد بداند:

۱. احتمال اینکه مقدار امید به زندگی در دقیقا یکی از بازه‌ها نباشد؟
۲. احتمال اینکه مقدار امید به زندگی در هیچ یک از بازه‌ها نباشد؟
۳. احتمال اینکه مقدار امید به زندگی در حداقل یکی از بازه‌ها نباشد؟

### مسئله‌ی ۵.

سلف دانشگاه ادعا کرده است که میانگین هزینه ناهار هر دانشجو در هفته ۶۶۰۰ تومان است. یک نمونه گیری تصادفی از ۱۵۰ دانشجو، میانگین هزینه ۶۷۳۰ تومان با انحراف معیار ۹۰۰ تومان را برای یک هفته نشان می‌دهد. الف) مقدار  $p$ -value را به دست آورید و تفسیر کنید.

ب) با سطح اهمیت ۵٪، آیا ادعای سلف را رد می‌کنید؟

ج) با سطح اهمیت ۱٪، آیا ادعای سلف را رد می‌کنید؟ آیا آن را می‌پذیرید؟

د) فرض کنید که ادعای سلف در رابطه با  $\mu_0 = 6600$  خیلی عدد کمی نباشد، یعنی فرض جایگزین  $(H_1)$  برابر با  $\mu_0 < 6600$  یا  $\mu_0 > 6600$  باشد. در این حالت با استفاده از تست دو طرفه برای  $H_0$  مقدار  $p$ -value جدید را به دست آورید و به قسمت های ب و ج پاسخ دهید.

### مسئله‌ی ۶.

یکی از تی ای های درس بر سر دو راهی اپلای کردن و ماندن قرار گرفته است. یکی از معیار های او برای این انتخاب، میزان استرس وارد شده است. برای همین در سراسر دانشگاه راه می‌افتد و از طریق پرسش نامه ای، میزان استرس دانشجویان سال بالایی را محاسبه میکند. اطلاعات بدست آمده به صورت جدول زیر است:

	استرس پایین	استرس بالا
دختر	۸۲	۱۸
پسر	۱۱۲	۳۸

اعداد قرار گرفته نشانه تعداد هستند. این دانشجو میخواهد بررسی کند که آیا درصد دخترانی که استرس بالا دارند (در اینجا منظور از درصد، درصد در نمونه خود دختران است) با درصد پسرانی که استرس بالا دارند تفاوت چشمگیری دارد یا خیر. فرض صفر و فرض دیگر را بیان کنید. اگر از  $t$ -test استفاده کنیم، آماره این آزمون چیست؟ در نهایت پاسخ خود به سوال دانشجو را اعلام کنید. آیا می‌توان فرض صفر را با سطح دقت ۵٪ رد کرد؟ با سطح دقت ۱٪ چگونه؟

## مسئله‌ی ۷.

میر که دانشجویی منظم و توانا در درس آمار احتمال است ادعا کرده است که تمرین بسیار آسان هستند و بسیار سریع حل میشوند. لذا کاپیتان از نزدیکان میر درباره اینکه او چند دقیقه روی هر تمرین وقت میگذارد سوال پرسیده و به ۴ عدد زیر رسیده که هر کدام اعداد تقریبی هستند:

۱۵۲، ۱۴۸، ۱۵۳، ۱۵۳

الف) با کمک داده‌های بالا یک بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای زمان صرف شده توسط میر ارائه دهید.  
ب) کاپیتان معتقد است که اگر تمرینی کمتر از ۱۵۰ دقیقه وقت بگیرد آسان است. حال با توجه به اعداد بالا ادعا میر درباره آسان بودن تمرینات را بررسی کنید. فرض صفر و فرض دیگر این آزمون را بیان کنید و سپس مشخص کنید آیا با سطح اهمیت ۰/۰۵ میتوان فرض صفر را رد کرد یا خیر؟ (اگر این اعداد به طور معنی داری از ۱۵۰ کوچک تر باشند میتوان گفت تمرینات آسان هستند).  
پ) برای کاهش خطای نوع اول باید سطح اهمیت را افزایش داد یا کاهش؟ برای کاهش خطای نوع دوم چگونه؟

موفق باشید (:)