گردآورندگان: علی انصاری ، مهدی لطفیان ، امیرحسین عابدی

مسئله‌ی ۱.

مجموعه نقاط درون و روی محیط دایره واحد را در نظر بگیرید.

$$D = \{(x, y) | x^{۲} + y^{۲} \leqslant ۱\}$$

فرض کنید یک نقطه (x, y) به صورت تصادفی و با احتمال یکنواخت از D انتخاب میشود. این یعنی تابع چگالی احتمال مشترک X و Y به صورت زیر خواهد بود :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{۱}{\pi} & (x, y) \in D \\ ۰ & \text{Otherwise} \end{cases}$$

حال فرض کنید (R, Θ) مختصات قطبی متناظر با همان نقطه (X, Y) باشد. در اینصورت میدانیم روابط زیر بین پارامتر ها برقرار میباشد :

$$\begin{cases} X = Rcos\Theta \\ Y = Rsin\Theta \end{cases}$$

تابع چگالی مشترک R و Θ را بیابید و نشان دهید مستقل هستند.

حال فرض کنید توزیع X ، Y تنها محدود به دایره واحد نباشد و بتواند کل صفحه مختصات را در بر داشته باشد. به عبارتی X و Y هر دو توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۱ داشته باشند.

$$X \sim \mathcal{N}(۰, ۱), Y \sim \mathcal{N}(۰, ۱)$$

و همینطور این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.
در این حالت هم تابع چگالی R و Θ را محاسبه کنید و نشان دهید مستقل هستند.

مسئله‌ی ۲.

فرض کنید متغیر های تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots X_n$ از توزیع یکنواخت با پارامتر های ۰ و ۱ و همچنین مستقل هستند. فرض کنید داریم :

$$M_n = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n}$$

الف

مقادیر $\mathbb{E}[M_n]$ و همچنین $Var(M_n)$ را بیابید.

ب

یک کران بالای غیربدیهی برای مقدار زیر پیدا کنید:

$$\mathbb{P}(|M_n - \frac{۱}{۲}| \geqslant \frac{۱}{۱۰۰})$$

ج

مقدار زیر را با استفاده از قسمت قبل محاسبه کنید :

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(|M_n - \frac{۱}{۲}| \geqslant \frac{۱}{۱۰۰})$$

نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم Quiz#_[STD-Num] آپلود کنید.

موفق باشید :)