



مسئله‌ی ۱.

آزمایشی عبارت است از انتخاب تصادفی یکی از اعداد ۱ تا ۹. این آزمایش را به طور مستقل تکرار می‌کنیم. امید ریاضی تعداد آزمایش‌های لازم برای اینکه پنج عدد ۷ پشت سر هم مشاهده شود را حساب کنید. (۵ امتیاز)

مسئله‌ی ۲.

علی و امیر به مغازه می‌روند تا برای خود لباس انتخاب کنند. هر کدام قطعا و دقیقا یک لباس برای خرید انتخاب می‌کنند. تنها مساله‌ای که هست، این است که علی و امیر به طور قطعی نمی‌دانند که چه رنگی را می‌خواهند برای خود انتخاب کنند، به همین خاطر تصمیم می‌گیرند احتمالاتی عمل کنند. این مغازه تنها لباس‌های با رنگ آبی، قرمز و سبز دارد. علی به احتمال $0/2$ رنگ آبی برای خودش برمی‌دارد و به احتمال $0/3$ رنگ قرمز را برای خودش انتخاب می‌کند. اما امیر برایش مهم است که علی چه رنگی را برای خودش انتخاب می‌کند، به همین خاطر صبر می‌کند تا علی انتخابش را کند و سپس، تصمیم خودش را می‌گیرد. نکته‌ی اول اینکه امیر به هیچ وجه نمی‌خواهد رنگ لباسش با علی یکسان باشد. نکته‌ی دوم اینکه اگر علی رنگ آبی بردارد، امیر به احتمال $0/3$ رنگ سبز را برمی‌دارد و اگر علی رنگ قرمز بردارد، امیر به احتمال $0/4$ رنگ سبز را برمی‌دارد و اگر علی رنگ آبی را انتخاب می‌کند. با توجه به این اطلاعات به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف

احتمال اینکه یکی از این دو فرد لباس آبی بردارد و دیگری قرمز را به دست آورید. (۵ امتیاز)

ب

اگر این را بدانیم که امیر رنگ آبی را انتخاب کرده است، چقدر احتمال دارد علی رنگ سبز را برداشته باشد؟ (۵ امتیاز)

مسئله‌ی ۳.

فرض کنید M و L دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع $Normal(0, 1)$ باشند. اگر X و Y به صورت زیر تعریف شوند، $COV(X, Y)$ را بدست آورید. (۷ امتیاز)

$$X = 5 + M$$

$$Y = 6 + X - 4ML^2$$

مسئله‌ی ۴.

یک گروه کوهنوردی ۶ نفره می‌خواهند به کوه بروند. در نتیجه به دو گروه ۳ نفره تقسیم شدند تا هر گروه با خودرو تا کوهپایه برود. با یکدیگر قرار گذاشتند تا در یک مکان جمع شوند و حرکت را از آنجا آغاز کنند. زمان رسیدن هر فرد از توزیع یکنواخت $(5, 6)$ پیروی می‌کند. هنگامی که تمام افراد یک گروه رسیده باشند خودروی آن گروه حرکت می‌کند. توزیع چگالی احتمال زمان حرکت اولین خودرو را بدست آورید. (۱۰ امتیاز)

مسئله‌ی ۵.

فرض کنید تیم تدریس شما ۲ کاپیتان دارد و شما هم آرزوی کاپیتان شدن دارید. از طرفی میدانید تعداد روزهای فعالیت هر دو کاپیتان از توزیع نمایی پیروی می‌کند که از هم مستقل هم هستند. اولی با پارامتر ۸۱ و دومی با پارامتر ۸۲.

الف

احتمال اینکه کاپیتان یک زودتر از کاپیتان دو برکنار شود را محاسبه کنید. (منظور از برکنار شدن پایان زمان فعالیت‌شان است) (۵ امتیاز)

ب

امید ریاضی تعداد روزهایی که باید انتظار کاپیتانی را بکشید را بگویید. (وقتی هر یک از دو کاپیتان برکنار شود شما کاپیتان می‌شوید.) (۵ امتیاز)

ج

حال فرض کنید در دوره شما همزمان n نفر کاپیتان شده‌اند و هر کدام طول فعالیتی دارند که از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی می‌کند. فرض کنید $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$ فاصله زمانی بین i امین برکناری و $i+1$ امین برکناری باشند. امید ریاضی $\min(t_i)$ ها را حساب کنید. (باز هم مثل قسمت قبل منظور از برکناری پایان زمان فعالیت است.) (۸ امتیاز)

موفق باشید (:)