



نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم [STD-Num]_HW# آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۴ فروردین می باشد.
- سوالات ستاره دار، غیرتحویلی هستند و برای تمرین بیشتر قرار داده شده اند.
- مشورت در تمرین ها مجاز است و توصیه هم می شود، اما هر دانشجو موظف است تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه حل نهایی ارسال شده، باید توسط خود دانشجو نوشته شده باشد. در صورت کشف اولین مورد تقلب هر دانشجو، نمره‌ی همان تمرین وی، صفر در نظر گرفته شده و در صورت کشف دومین مورد تقلب هر دانشجو، منفی نمره‌ی کل تمرین ها به وی تعلق خواهد گرفت. برای کسب اطلاعات بیش تر در خصوص آیین نامه‌ی مشورت و تقلب، می توانید به بخش مربوطه در ویکی دانشکده مراجعه کنید. لازم به ذکر است که این جرایم به هیچ عنوان بخشیده نخواهند شد.

مسئله‌ی ۱.

علی و رضا و فرشاد همیشه ناهار خود را با هم می خورند. به این منظور جایی در محوطه دانشگاه مشخص کرده اند و هرروز برای خوردن ناهار آنجا منتظر یکدیگر می مانند و به محض رسیدن آخرین نفر، خوردن ناهار را آغاز می کنند. زمان رسیدن هر کدام به محل مورد نظر از توزیع یکنواخت $(12, 13)$ پیروی می کند. توزیع زمان رسیدن اول نفر به محل ناهار را با M و توزیع زمان شروع کردن ناهار را با S نشان می دهیم.

الف

توزیع توأم M و S را به دست آورید.

ب

تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای M را بیابید.

ج

میانگین زمانی که اولین نفر تا خوردن ناهار منتظر می ماند چقدر است؟

د *

حال فرض کنید که این گروه دوستی شامل n نفر است و زمان رسیدن همگی آنها از توزیع یکنواخت $(12, 13)$ پیروی می کند. توزیع توأم زمان رسیدن i امین نفر و زمان رسیدن j امین نفر را به دست آورید.

مسئله ۲.

تابع چگالی احتمال توأم به صورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = ay \quad 0 \leq x \leq y \leq 2$$

الف

مقدار a را محاسبه کرده و سپس $Cov(X,Y)$ را به دست آورید.

ب

حال با توجه به نتایج بخش قبل، $\rho(X+Y, X-Y)$ را حساب کنید.

مسئله ۳.

فرض کنید که تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی به شکل زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < y, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

نشان دهید که X و Y نسبت به هم وابسته هستند ولی $E(XY) = E(X)E(Y)$

مسئله ۴.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل یکنواخت به ترتیب در فاصله های $(0, 4)$ و $(0, 1)$ باشند. تابع چگالی احتمال $\frac{X^2}{Y}$ را حساب کنید.

مسئله ۵.

اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع $Uniform(-1, 1)$ و $Y = X^2$ باشد.

الف

با استفاده از توزیع Y و تعریف امید ریاضی $E[X]$ را پیدا کنید.

ب

حال $E[X]$ را با استفاده از LOTUS پیدا کنید.

ج

آیا $E[X^2]$ برابر $(E[X])^2$ می باشد؟

مسئله‌ی ۶.

ابتدا نقطه Y به طور تصادفی از بازه $(0, 1)$ انتخاب میشود. سپس یک نقطه X دیگر به طور تصادفی از بازه $(Y, 1)$ انتخاب میشود. تابع چگالی احتمال X را بدست آورید.

مسئله‌ی ۷.*

X و Y دو متغیر تصادفی با ضریب همبستگی ρ هستند. ثابت کنید:

$$E[Var(Y|X)] \leq (1 - \rho^2)Var(Y)$$

مسئله‌ی ۸.*

متغیر تصادفی X از توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 پیروی میکند.

الف

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = e^X$ را بدست آورید.

ب

امید ریاضی Y را بدست آورید.

موفق باشید :)