گردآورندگان: علی انصاری ، مهدی لطفیان ، امیرحسین عابدی

مسئله‌ی ۱.

نامساوی کوشی‌ـ شوارتز را برای متغیر های تصادفی X و Y دلخواه اثبات کنید. این نامساوی به این صورت میباشد :

$$(\mathbb{E}[XY])^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$$

راهنمایی :

میتوانید نامساوی زیر را بسط دهید :

$$\mathbb{E}[(tX+Y)^2] \geqslant 0$$

حل.

داریم :

$$\mathbb{E}[(tX+Y)^2] \geqslant 0$$

بنابراین به ازای هر t دلخواه باید داشته باشیم :

$$t^2\mathbb{E}[X^2] + 2t\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] \geqslant 0$$

بنابراین معادله درجه ۲ ای با این ضرایب باید همواره مثبت باشد پس داریم :

$$4(\mathbb{E}[XY])^2 \leqslant 4\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$$

که در نهایت نتیجه میدهد که :

$$(\mathbb{E}[XY])^2 \leqslant \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$$

▷

مسئله‌ی ۲.

ثابت کنید که به ازای متغیر تصادفی X دلخواه با تابع چگالی تجمعی $F_X(x)$ ، متغیر تصادفی $Y = F_X(X)$ توزیعی یکنواخت دارد. پارامتر های این توزیع یکنواخت را بدست آورید.

حل.

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(F_X(X) \leqslant y)$$

با توجه به اینکه F_X تابعی صعودی میباشد میتوانیم بنویسیم :

$$\mathbb{P}(F_X(X) \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y = F_Y(y)$$

پس اثبات شد که Y توزیع یکنواخت دارد همچنین واضح است که پارامتر های این توزیع ۰ و ۱ هستند چرا که طبق تعریف تابع تجمیعی ، فقط مقادیر بین صفر و ۱ را به خود میگیرد.

▷

نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم Quiz#_[STD-Num] آپلود کنید.

موفق باشید :)