



## مسئله ۱. بیز (۲۰ نمره)

اگر  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشند به طوری که پارامتر  $\lambda$  آن از توزیع  $beta(\alpha, \beta)$  تبعیت کند، با استفاده از تخمینگر MAP مقدار  $\lambda$  را بدست بیاورید (وقوع  $X_1, \dots, X_n$  مستقل از یکدیگرند).

## مسئله ۲. سوال عجیب (۴۰ نمره)

فرض کنید  $X$  متغیر تصادفی است با توزیع زیر:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \text{ if} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال اگر  $Y|X$  از توزیع پواسون که پارامتر آن از توزیع نمایی پیروی میکند پیروی کند. با استفاده از MAP مقدار  $x$  را برای  $Y = 3|X$  بدست آورید.

## مسئله ۳. سود دهی (۲۰ نمره)

دانشکده کامپیوتر میخواهد برای بهبود امکانات دانشکده چندین لامپ کم مصرف تهیه کند. حال آن ها در جمع بندی هایی که کردند به دو شرکت نهایی رسیدند. شرکت اول ادعا میکند عمر لامپ هایش از تابع توزیع نمایی پیروی میکند و شرکت دوم ادعا میکند عمر لامپ هایش از تابع توزی  $gamma(2, \beta)$  پیروی میکند. دانشکده یک اطلاعات دیگری هم دارد این که از هر ۱۰۰ لامپ شرکت اول ۶۸ تای آنها بیش از ۱۸۰ روز عمر میکنند در حالی که از شرکت دوم از هر ۱۰۰ لامپ ۶۳ تاشون بیش از ۱۸۰ روز عمر میکنند. حال با استفاده از MLE بگویید که کدام یک از این دو شرکت لامپشان با احتمال بیشتری بیش از ۱۲۰ روز عمر میکند.

## مسئله ۴. تابع Erlang (۲۰ نمره)

فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه های مستقل از تابع توزیع Erlang با چگالی احتمال زیر هستند. نشان دهید تخمینگر MLE برای  $\lambda$  برابر  $\hat{\lambda} = \frac{k}{\bar{x}}$  است.

$$f(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}$$

### مسئله ۵. برازش خط (۱۰ نمره امتیازی)

فرض کنید  $n$  نمونه از  $(x, y)$  در اختیار داریم و میدانیم این جفت ها از مدل  $Y = AX + B$  پیروی میکنند. حال با استفاده از روش کمترین مربعات نشان دهید بهترین تخمین برای  $A$  و  $B$  به شکل زیر است.

$$A = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad B = \bar{y} - A\bar{x}$$

### مسئله ۶. سوال ساده (۱۰ نمره امتیازی)

مدلی به شکل  $Z = \alpha X + \beta Y + \gamma$  داریم. با توجه به داده های مشاهده شده و روش کمترین مربعات بهترین تخمین برای  $\alpha, \beta, \gamma$  را پیدا کنید. (توجه کنید که داده ها به شکل  $(x, y, z)$  داده شده اند.)

$$(1, 2, 2), (3, 1, 4), (2, 2, 1), (5, 6, 11)$$

## نکات مهم

- بخش تئوری را در قالب یک فایل pdf با اسم [STD-Num]\_HW# آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز سه شنبه ۷ تیر می باشد.
- توجه داشته باشید که امتیازی این تمرین صرفاً روی همین تمرین تاثیر دارد و روی نمره کل شما تاثیری نخواهد گذاشت.

موفق باشید (:)