



مسئله‌ی ۱.

داده های $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ را در نظر بگیرید. میدانیم که $X_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ و همینطور رابطه X_i و Y_i به صورت زیر می باشد:

$$Y_i = w_1 X_i + w_0 + Z_i$$

در عبارت بالا $Z_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ هستند. همچنین این فرض را داشته باشید که X_i و Z_i ها از هم مستقل می باشند. تخمینگر w^* را به این صورت تعریف میکنیم.

$$w^* = \underset{w=(w_1, w_0)}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n (Y_i - w_1 X_i - w_0)^2$$

نشان دهید که $w_{MLE} = w^*$ که در اینجا w_{MLE} تخمینگر بیشینه درست نمایی می باشد. راهنمایی: در محاسبات خود میتوانید از رابطه زیر استفاده کنید.

$$\mathbb{P}((X_i, Y_i)|w) = \mathbb{P}(X_i|w)\mathbb{P}(Y_i|X_i, w)$$

مسئله‌ی ۲. سوال آخره کاپیتان!

کاپیتان بعد از ماه های متوالی مطالعه درس آمار و احتمال، تصمیم گرفت که دیگر از تمام تخمینگرها خسته شده است و تصمیم گرفت یک تخمینگر برای خود درست کند. در حال حاضر این تخمینگر فقط برای میانگین خوب کار میکند ولی کاپیتان قول این را داده که تخمینگرهای دیگری هم معرفی کند. این تخمینگر میانگین که آنرا با μ_{cap}^k نشان میدهم برای $X_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Bernouli}(p)$ به این صورت تعریف میشود:

$$\mu_{cap}^k = \frac{\frac{k}{n} + \sum_{i=1}^n X_i}{k + n}$$

الف

در ابتدا تخمینگر بیشینه درست نمایی p_{MLE} را بیابید و نشان دهید که تخمینگر بیشینه درست نمایی حالتی خاص از مجموعه تخمینگرهای کاپیتان می باشد.

ب

فرض کنید برای $n = 3$ داده های $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$ به ما داده شده است و همینطور کاپیتان $k = 8$ را برای تخمینگر خود انتخاب میکند. هردو مقدار p_{MLE} و μ_{cap}^{\wedge} را بدست آورید. کدام تخمینگر بهتر عمل کرده است ؟ (فرض کنید مقدار اصلی p برابر با $0/7$ میباشد.)

نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم Quiz#__[STD-Num] آپلود کنید.

موفق باشید (: