آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۰-۱۴۰۱

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر
گردآورندگان: یاسمن زلفی موصلو، سیدمحمدپوریا ممتازاصفهانی

تمرین سری ۲ — توزیع‌های احتمالاتی — مهلت ارسال:۲۳:۵۹ ــ ۲۴ فروردین

نکات مهم

- بخش تئوری را در قالب یک فایل pdf با اسم HW#_[STD-Num] آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۴ فروردین می‌باشد.
- سوالات ستاره‌دار، غیرتحویلی هستند و برای تمرین بیشتر قرار داده شده‌اند
- مشورت در تمرین ها مجاز است و توصیه هم می‌شود، اما هر دانشجو موظف است تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه‌حل نهایی ارسال شده، باید توسط خود دانشجو نوشته شده باشد. در صورت کشف اولین مورد تقلب هر دانشجو، نمره‌ی همان تمرین وی، صفر در نظر گرفته شده و در صورت کشف دومین مورد تقلب هر دانشجو، منفی نمره‌ی کل تمرین ها به وی تعلق خواهد گرفت. برای کسب اطلاعات بیش تر در خصوص آیین نامه‌ی مشورت و تقلب، می‌توانید به بخش مربوطه در ویکی دانشکده مراجعه کنید. لازم به ذکر است که این جرایم به هیچ عنوان بخشیده نخواهند شد.

مسئله‌ی ۱. کلاس کلوچه‌پزی *

کوکو در یک کلاس کلوچه‌پزی شرکت می‌کند. به کمک مربی مقداری خمیر برای درست کردن ۲۰۰۰ کلوچه هم‌اندازه آماده و به آن ۳۰۰۰ تکه شکلات و ۲۰۰۰ تکه گردو اضافه کردند. سپس خمیر را خوب مخلوط کردند.

الف

پس از حاضر شدن کلوچه‌ها کوکو یک کلوچه برمی‌دارد و شروع به خوردن می‌کند. چقدر احتمال دارد این کلوچه حداقل ۳ تکه شکلات داشته باشد؟

ب

هنرجویان کلاس ۱۰۰ کلوچه را خورده‌اند. در این ۱۰۰ کلوچه مجموعا ۲۰۰ تکه شکلات و ۳۰۰ تکه گردو وجود داشته است. مدیر مجموعه وارد کلاس می‌شود و کلوچه‌ای برمی‌دارد، با چه احتمالی داخل این کلوچه m تکه شکلات و n تکه گردو وجود دارد؟

حل.

▷

مسئله‌ی ۲. تابع چگالی احتمال

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f_X(x) = Ae^{-2|x|} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^2}$ است.

الف

مقدار A و میانگین و واریانس X را به دست آورید.

ب

اگر $Y = \begin{cases} \sqrt{۲|X|-۱} & |X| >= ۱/۲ \\ ۰ & |X| < ۱/۲ \end{cases}$ باشد $f_Y(y)$ را بیابید

حل. توضیح کلی راه حل

الف

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-۲|x|} + \frac{۲}{\sqrt{\pi} e^{-۴x^۲}} = A\int_{۰}^{\infty} e^{-۲x} + A\int_{-\infty}^{۰} e^{۲x} + \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۴x^۲} = ۱$$

$$\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-۴x^۲} = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{۲} = ۱ \Rightarrow A(\int_{۰}^{\infty} e^{-۲x} + \int_{-\infty}^{۰} e^{۲x}) = ۰$$

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-۲x} = -\frac{۱}{۲}e^{-۲x}|_{۰}^{\infty} = \frac{۱}{۲}, \int_{-\infty}^{۰} e^{۲x} = \frac{۱}{۲}e^{۲x}|_{-\infty}^{۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow A * ۱ = ۰ \Rightarrow A = ۰$$

$$f_X(x) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}e^{-۴x^۲}$$

با توجه به عبارت به دست آمده، می‌توانیم توزیع نرمال را ببینیم

$$f(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(\frac{x-\mu}{\sigma})^۲}$$

$$\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۱}{۸} = var, \mu = ۰ = mean$$

ب

$$f_Y(y) = \sigma_i f_X(g_i^{-۱}(y))|g_i'^{-۱}(y)|$$

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{-۲x-۱}, g^{-۱}(x) = -\frac{y^۲+۱}{۲} & -\infty < x < -\frac{۱}{۲} \\ g(x) = \sqrt{۲x-۱}, g^{-۱}(x) = \frac{y^۲+۱}{۲} & \frac{۱}{۲} < x < \infty \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} y > ۰, \frac{۴}{\sqrt{\pi}}e^{-(y^۲+۱)^۲}y \\ y < ۰, ۰ \end{cases}$$

▷

مسئله‌ی ۳. پیتزا پیتزا

پس از نوشتن تمرین‌های درس آمارواحتمال مهندسی، علی می‌خواهد برای شام پیتزا سفارش دهد. او با احتمال $\frac{۲}{۵}$ به پیتزافروشی A و با احتمال $\frac{۳}{۵}$ به پیتزافروشی B سفارش می‌دهد. مدت زمان آماده‌سازی غذا برای پیتزا فروشی A، ۳۰ دقیقه است و برای پیتزافروشی B از توزیع نرمال با میانگین ۳۰ و واریانس ۲۵ پیروی می‌کند. مدت زمانی که طول می‌کشد تا پیک غذا را از پیتزافروشی دریافت کرده و به علی برساند برای پیتزافروشی A از توزیع نمایی با میانگین ۱۰ پیروی می‌کند و برای پیتزافروشی B برابر ۱۵ دقیقه است.

می‌دانیم غذای علی حداکثر ۴۰ دقیقه پس از سفارش به دستش رسیده است. چقدر احتمال دارد علی از پیتزافروشی B سفارش داده باشد؟

حل.

توضیح کلی راه حل

مدت زمان آماده‌سازی پیتزا فروشی A را با X_A و زمان آماده‌سازی پیتزا فروشی B را با X_B نشان می‌دهیم.همچنین زمان رسیدن پیک از پیتزا فروشی به علی برای پیتزا فروشی A را با Y_A و برای پیتزا فروشی B را با Y_B نشان می‌دهیم.

$$X_A = ۳۰ \ \ , \ \ Y_A \sim exp(\frac{۱}{۱۰})$$

$$X_B \sim N(۳۰, ۵) \ \ , \ \ Y_B = ۱۵$$

$$p(X_A + Y_A \leqslant ۴۰) = p(Y_A \leqslant ۱۰) = ۱ - e^{-\frac{۱}{۱۰} \times ۱۰} = ۱ - e^{-۱}$$

در اینجا X_B کمتر از ۰ را برابر ۰ در نظر می‌گیریم. (اگر زمان کمتر از صفر را در نظر نگرفتید نیز صحیح است.)

$$p(X_B + Y_B \leqslant ۴۰) = p(X_B \leqslant ۲۵) = \phi(\frac{۲۵ - ۳۰}{۵}) = \phi(-۱)$$

در عبارات زیر T نشان‌دهنده زمان رسیدن سفارش علی است:

$$p(T \leqslant ۴۰) = p(A)P(X_A + Y_A \leqslant ۴۰) + p(B)P(X_B + Y_B \leqslant ۴۰) = \frac{۲}{۵} \times (۱ - e^{-۱}) + \frac{۳}{۵} \times \phi(-۱)$$

$$p(B|T \leqslant ۴۰) = \frac{\frac{۳}{۵} \times \phi(-۱)}{\frac{۲}{۵} \times (۱ - e^{-۱}) + \frac{۳}{۵} \times \phi(-۱)} = \frac{۰/۶ \times ۰/۱۵۸۶۶}{۰/۴ \times ۰/۶۳۲۱۲ + ۰/۶ \times ۰/۱۵۸۶۶}$$

▷

مسئله‌ی ۴. شیرین مثل کیک

یک شیرینی فروشی از بخش کیک تولد و بخش شیرینی خشک تشکیل شده است. تعداد مشتری بخش کیک تولد در یک ساعت $X \sim Poiss(\lambda_۱)$ و تعداد مشتری بخش شیرینی خشک در یک ساعت $Y \sim Poiss(\lambda_۲)$ می‌باشد.

الف

تعداد مشتری کل شیرینی فروشی در یک ساعت چه توزیعی دارد؟ (پارامترهای توزیع را نیز مشخص کنید.)

ب

حال فرض می‌کنیم $\lambda_۱ = ۲۰$ و $\lambda_۲ = ۱۰$ باشد. در ۲۰ دقیقه گذشته کسی وارد شیرینی فروشی نشده است. چقدر احتمال دارد در ۱۰ دقیقه بعدی تنها ۱ نفر برای خرید کیک تولد وارد شیرینی فروشی شود؟

حل. توضیح کلی راه حل

الف

$$X \sim Poiss(\lambda_1) \ \ , \ \ Y \sim Poiss(\lambda_2) \ \ , \ \ X+Y=Z$$

$$P(Z=\beta)=\sum_{i=0}^{\beta} p(X=i)p(Y=\beta-i)=\sum_{i=0}^{\beta}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\times\frac{\lambda_2^{\beta-i}e^{-\lambda_2}}{(\beta-i)!}=$$

$$\frac{\beta!}{\beta!}\times e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\times\sum_{i=0}^{\beta}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{\beta-i}}{i!(\beta-i)!}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{\beta!}\sum_{i=0}^{\beta}\binom{\beta}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{\beta-i}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^\beta}{\beta!}$$

بنابراین تعداد مشتری کل شیرینی فروشی در یک ساعت از توزیع $Poiss(\lambda_1+\lambda_2)$ پیروی می‌کند.

ب

اگر X_1 را تعداد مشتری‌های بخش کیک تولد در ۲۰ دقیقه در نظر بگیریم در این صورت $X_1 \sim Poiss(\frac{\lambda_1}{6})$ است.

$$p(X_1=1)=\frac{(\frac{\lambda_1}{6})^1 e^{-\frac{\lambda_1}{6}}}{1!}=\frac{10}{3}e^{-\frac{10}{3}}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۵. مسابقه

کوشا در یک مسابقه تلویزیونی شرکت کرده است. در هر مرحله این مسابقه، کوشا سه سکه A و B و C را به‌صورت همزمان پرتاب می‌کند. سکه A با احتمال $\frac{1}{2}$، سکه B با احتمال $\frac{1}{4}$ و سکه C با احتمال $\frac{1}{6}$ رو می‌آیند.

الف

کوشا ۱۰ مرحله سکه‌ها را پرتاب می‌کند. اگر حداقل دو سکه رو بیاید ۱۰ تومان برنده می‌شود. با چه احتمالی کوشا حداقل ۸۰ تومان برنده می‌شود؟

ب

با توجه به قسمت الف، امید ریاضی و واریانس مقدار پولی که کوشا برنده می‌شود را به دست آورید.

ج

پس از ۴ مرحله، کوشا هنوز پولی برنده نشده است. چقدر احتمال دارد پیش از پرتاب نهم، کوشا پولی برنده شده باشد؟ (با توجه به اطلاعات قسمت الف این بخش را حل کنید.)

د

حال فرض کنید مسابقه به‌گونه‌ای است که کوشا در هر مرحله دو انتخاب دارد: ۱ــ می‌تواند بازی را ترک کند و پولی که تا آن مرحله برنده شده است را دریافت کند. ۲ــ یک مرحله دیگر بازی را ادامه دهد و سه سکه را همزمان پرتاب کند. در این صورت اگر حداقل یک سکه پشت بیاید ۱۰ تومان دریافت می‌کند و در غیر این صورت از مسابقه حذف

شده و پولی دریافت نمی‌کند. کوشا باید چند مرحله به بازی ادامه دهد تا امید ریاضی پولی که برنده می‌شود بیشینه باشد؟

حل. توضیح کلی راه حل

الف

اگر W را برابر تعداد مراحل برنده شده در نظر بگیریم، در اینجا احتمال $p(W \geqslant ۸)$ خواسته شده است.

$$W \sim Binomial(۱۰, p')$$

در اینجا p' احتمال آن است که حداقل دو سکه رو بیاید.

$$X_i = \begin{cases} ۰ & \text{اگر سکه i پشت بیاید} \\ ۱ & \text{اگر سکه i رو بیاید} \end{cases}$$

$$p' = p(X_۱ + X_۲ + X_۳ \geqslant ۲) = p(X_۱ + X_۲ + X_۳ = ۲) + p(X_۱ + X_۲ + X_۳ = ۳)$$

$$p(X_۱ + X_۲ + X_۳ = ۳) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۴۸}$$

$$p(X_۱ + X_۲ + X_۳ = ۲) = (\frac{۲-۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۶}) + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۴-۱}{۴} \times \frac{۱}{۶}) + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۶-۱}{۶}) = \frac{۱}{۴۸} + \frac{۳}{۴۸} + \frac{۵}{۴۸} = \frac{۹}{۴۸}$$

$$\Longrightarrow p' = \frac{۱۰}{۴۸} = \frac{۵}{۲۴} \Longrightarrow W \sim Binomial(۱۰, \frac{۵}{۲۴})$$

$$p(W \geqslant ۸) = \sum_{i=۸}^{۱۰} \binom{۱۰}{i} (p')^i (۱ - p')^{۱۰-i}$$

ب

$$E[W] = ۱۰ \times p' = ۱۰ \times \frac{۵}{۲۴} = \frac{۲۵}{۱۲} \Longrightarrow E[۱۰W] = ۱۰E[W] = \frac{۱۲۵}{۶}$$

$$var(W) = ۱۰ \times (p')(۱ - p') \Longrightarrow var(۱۰W) = ۱۰۰var(W) = ۱۰۰۰(p')(۱ - p') = ۱۰۰۰ \times \frac{۵}{۲۴} \times \frac{۱۹}{۲۴}$$

ج

مقدار پول برنده شده در مرحله i را با C_i نشان می‌دهیم.

$$p(\sum_{i=۱}^{۸} C_i \geqslant ۱ | \sum_{i=۱}^{۴} = ۰) = p(\sum_{i=۵}^{۸} C_i \geqslant ۱) = ۱ - p(\sum_{i=۵}^{۸} C_i = ۰) = ۱ - (۱ - p')^۴ = ۱ - (\frac{۱۹}{۲۴})^۴$$

د

در هر مرحله احتمال آنکه برنده شود:

$$p_۱ = p(X_۱ + X_۲ + X_۳ \leqslant ۲) = ۱ - p(X_۱ + X_۲ + X_۳ = ۳) = ۱ - \frac{۱}{۴۸} = \frac{۴۷}{۴۸}$$

فرض کنیم کوشا k مرحله به بازی ادامه داده است؛ در این صورت در مرحله $k+۱$ مقدار امید ریاضی برای انصراف و ادامه به صورت زیر است:

$$E[X_{continue}] = ۱۰(k+۱) \times p_۱ \ \ , \ \ E[X_{leave}] = ۱۰k$$

$$E[X_{continue}] < E[X_{leave}] \Longrightarrow ۱۰(k+۱) \times p_۱ < ۱۰k \Longrightarrow p_۱ k + p_۱ < k$$

$$\Longrightarrow \frac{۴۷}{۴۸} < (۱ - \frac{۴۷}{۴۸})k \Longrightarrow ۴۷ < k$$

بنابراین اگر بر اساس امید ریاضی در هر مرحله ادامه یا انصراف را تعیین کند، پس از ۴۷ مرتبه برنده شدن بایستی در مرحله ۴۸ ام انصراف دهد تا مقدار امید ریاضی بیشینه شود.

$$E[X] = ۱۰k \times p_۱^k = ۱۰ \times ۴۷ \times (\frac{۴۷}{۴۸})^{۴۷}$$

▷

مسئله‌ی ۶. عیدی

افشین قرار است امسال عید دیدنی خانه ۴ دایی‌اش برود. دایی، محمود، احمد، حامد و محمد.طبق تجربه سال‌های قبل، او او می‌داند، احمد به احتمال ۰/۲ ، محمد به احتمال ۰/۵ ، حامد به احتمال ۰/۷ و محمود به احتمال ۰/۹ به او عیدی می‌دهد.او دوست دارد بداند چند تا از دایی‌ها به او عیدی خواهند داد. با استفاده از متغیر نشانگر، محاسبه کنید انتظار می‌رود چند دایی به او عیدی بدهند؟

حل. برای هر یک از دایی‌ها، متغیر نشانگری به شکل زیر تعریف می‌کنیم و سپس برای هر یک، امید ریاضی را محاسبه می‌کنیم و در آخر، جمع می‌کنیم

$$I_i = \begin{cases} ۱ \\ ۰ \end{cases}$$

$$E[I_۱] = ۰/۲ * ۱ + ۰/۸ * ۰, E[I_۲] = ۰/۵ * ۱ + ۰/۵ * ۰, E[I_۳] = ۰/۷ * ۱ + ۰/۳ * ۰, E[I_۴] = ۰/۹ * ۱ + ۰/۱ * ۰,$$
$$E[I] = E[I_۱] + E[I_۲] E[I_۳] + E[I_۴] = ۲/۳$$

▷

مسئله‌ی ۷. چراغ راهنما *

فرض کنید یک چراغ راهنمایی در مسیر شمابه دانشگاه وجود دارد که هر روز ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کند. به این‌صورت که به تناوب یک دقیقه سبز و سه دقیقه قرمز است (چراغ راهنمایی با سبز شروع به کار می‌کند). فرض کنید زمان رسیدن شما بر حسب دقیقه به این چراغ راهنمایی نسبت به مبدأ ۷ صبح یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = ln(۲)$ باشد. Y را مدت زمان توقف شما(بر حسب دقیقه) پشت چراغ تعریف می‌کنیم. تابع توزیع تجمعی Y و میانگین آن را محاسبه کنید.

حل.

▷

مسئله‌ی ۸. واکسیناسیون

برای دریافت دوز سوم واکسن کرونا به مرکز واکسیناسیون مراجعه می‌کنید. افراد برای دریافت واکسن در یک صف ایستاده‌اند. این مرکز دو ایستگاه واکسیناسیون دارد؛ هر یک از دو ایستگاه که زودتر خالی شود، نفر ابتدای صف جای او را می‌گیرد. فرض کنید شما وارد مرکز می‌شوید و اولین نفر در صف هستید. مدت زمان واکسن زدن برای هر فرد از تابع نمایی با میانگین λ تبعیت می‌کند.

الف

احتمال اینکه واکسیناسیون شما زودتر از فردی که هم‌اکنون در ایستگاه شماره ۱ حضور دارد، انجام شود را به دست آورید.

ب

امید ریاضی مدت زمانی که در مرکز واکسیناسیون هستید چقدر است؟

حل. توضیح کلی راه حل

الف

فرض کنید مدت زمان واکسن زدن شما را با t، مدت زمان واکسن زدن فردی که در ایستگاه اول است با $t_۱$ و مدت زمان واکسن زدن فردی که در ایستگاه دوم است با $t_۲$ نشان می‌دهیم.

$$p(t+t_۲<t_۱\cap t_۲<t_۱)=p(t+t_۲<t_۱|t_۲<t_۱)p(t_۲<t_۱)$$

$$p(t+t_۲<t_۱|t_۲<t_۱)=p(t<t_۱-t_۲)$$

$$p(t_۲<t_۱)=\int_۰^{+\infty}p(t_۲<x)p(t_۱=x)dx=\int_۰^{+\infty}(۱-e^{-\frac{۱}{\lambda}x})(\frac{۱}{\lambda}e^{-\frac{۱}{\lambda}x})=\frac{۱}{۲}$$

$$\Longrightarrow p(t+t_۲<t_۱\cap t_۲<t_۱)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

ب

$$E[t+min(t_۱,t_۲)]=E[t]+E[min(t_۱,t_۲)]=\lambda+E[min(t_۱,t_۲)]$$

$$p(min(t_۱,t_۲)>x)=p(t_۱>x\cap t_۲>x)=p(t_۱>x)p(t_۲>x)=e^{-\frac{۱}{\lambda}x}e^{-\frac{۱}{\lambda}x}=e^{-\frac{۲}{\lambda}x}$$

$$\Longrightarrow min(t_۱,t_۲)\sim Exp(\frac{۲}{\lambda})\Longrightarrow E[min(t_۱,t_۲)]=\frac{\lambda}{۲}\Longrightarrow E[t+min(t_۱,t_۲)]=\lambda+\frac{\lambda}{۲}=\frac{۳\lambda}{۲}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۹. توزیع تجمعی

فرض کنید X متغیر تصادفی با توزیع تجمعی F است.مقدار c میانهٔ X است که برای این مقدار $F(c)=۱/۲$ و $X<c$ را به احتمال ۰/۵ داریم و $X>c$ را نیز به احتمال ۰/۵ داریم. در سه حالت زیر c را به دست آورید.

الف

X توزیع یکنواخت در بازهٔ $[a,b]$ داشته باشد

ب

X توزیع نرمال با پارامترهای μ,σ داشته باشد

ج

X توزیع نمایی با پارامتر λ داشته باشد

حل.

الف

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \to F(c) = \frac{c-a}{b-a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

ب

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\sigma)^2}{2\sigma^2}} dx \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2} = c \Rightarrow \mu = c$$

ج

$$F(c) \int_{0}^{c} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_{0}^{c} = 1 - e^{-\lambda c} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\lambda c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{ln2}{\lambda}$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۱۰. کارت بازی *

فاطمه ۳ کیسه پر از کارت دارد. کیسه اول، دارای ۴ کارت از شماره ۱ تا ۴، کیسه دوم دارای ۶ کارت از شماره ۱ تا ۶ و کیسه سوم دارای ۱۲ کارت از شماره ۱ تا ۱۲ است. او از هر کیسه، یک کارت را به صورت تصادفی بیرون می‌آورد. به روش متغیر نشانگر، امید ریاضی تعداد ۳ هایی که خواهد دید را محاسبه کنید.

حل.

$\triangleright$

مسئله‌ی ۱۱. بندرگاه

یک بندرگاه تجاری هر روز میزبان تعدادی کشتی است که در هر واحد زمان، تعداد کشتی‌های حاضر در این بندرگاه توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 4$ دارد.در هر لحظه هر کشتی به احتمال ۰/۶ از بندرگاه خارج می‌شود یا با احتمال ۰/۴ لنگر می‌اندازد و تا روز بعد آنجا می‌ماند. اگر X متغیر تصادفی تعداد کشتی‌های خروجی در هر لحظه باشد، توزیع X را بیابید.

حل. اگر در هر لحظه، n کشتی در بندرگاه باشند که از این n کشتی، m تا خارج شوند، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$P(X=m) = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \binom{i}{m} p^m (1-p)^{i-m}$$

که در این رابطه، p احتمال خروج است. پس از ساده سازی رابطه، خواهیم داشت:

$$\frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} = \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda p}}{m!} \sim poiss(\lambda p) = poiss(2/4)$$

$\triangleright$

موفق باشید :)