مسئله‌ی ۱ .

مجموعه نقاط درون و روی محیط دایره واحد را در نظر بگیرید.

$$D = \{(x, y) | x^۲ + y^۲ \leqslant ۱\}$$

فرض کنید یک نقطه (x, y) به صورت تصادفی و با احتمال یکنواخت از D انتخاب میشود. این یعنی تابع چگالی احتمال مشترک X و Y به صورت زیر خواهد بود :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{۱}{\pi} & (x, y) \in D \\ ۰ & \text{Otherwise} \end{cases}$$

حال فرض کنید (R, Θ) مختصات قطبی متناظر با همان نقطه (X, Y) باشد. در اینصورت میدانیم روابط زیر بین پارامتر ها برقرار میباشد :

$$\begin{cases} X = Rcos\Theta \\ Y = Rsin\Theta \end{cases}$$

تابع چگالی مشترک R و Θ را بیابید و نشان دهید مستقل هستند.

حال فرض کنید توزیع X ، Y تنها محدود به دایره واحد نباشد و بتواند کل صفحه مختصات را در بر داشته باشد. به عبارتی X و Y هر دو توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۱ داشته باشند.

$$X \sim \mathcal{N}(۰, ۱), Y \sim \mathcal{N}(۰, ۱)$$

و همینطور این دو متغیر تصادفی مستقل باشند.
در این حالت هم تابع چگالی R و Θ را محاسبه کنید و نشان دهید مستقل هستند.

حل.

در ابتدا توجه کنید که با توجه به تعریف دستگاه قطبی داریم :

$$۰ \leqslant R \leqslant ۱, ۰ \leqslant \Theta < ۲\pi$$

حال میدانیم :

$$f_{R\Theta}(r, \theta) = |\frac{\partial(X, Y)}{\partial(R, \Theta)}| f_{XY}(x, y) = |R| \times \frac{۱}{\pi} = \frac{R}{\pi}$$

حال چون داریم $f_{R\Theta} = g_R \times h_\Theta$ میتوانیم این نتیجه را بگیریم که این دو متغیر تصادفی مستقل هستند. همچنین با مارجینال گیری به توابع زیر میرسیم :

$$f_R(r) = ۲r$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{۱}{۲\pi}$$

که روی بازه های تعیین شده برای هرکدام از آنها ، توزیع معتبری هستند و ضرب آنها توزیع joint آنها را تشکیل میدهد. پس مستقل هستند.

حال فرض کنید X و Y هر دو نرمال و مستقل باشند. توزیع توام آنها به صورت زیر خواهد بود :

$$f_{XY}(x, y) = \frac{۱}{۲\pi} e^{-\frac{x^۲+y^۲}{۲}}$$

با استفاده از ماتریس J که پیشتر استفاده کردیم داریم :

$$f_{R\Theta}(r, \theta) = \frac{r}{۲\pi} e^{-\frac{r^۲}{۲}}$$

در این حالت هم مانند دفعه قبل میتوان تابع چگالی را به صورت ضرب دو تابع جدا از هم نوشت. بنابراین در این حالت هم R و Θ مستقل از هم میباشند.

پ.ن: در این حالت متغیر تصادفی Θ توزیع یکنواخت دارد و متغیر تصادفی R از توزیع Rayleigh تبعیت میکند.
$\triangleright$

مسئله‌ی ۲.

فرض کنید متغیر های تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots X_n$ از توزیع یکنواخت با پارامتر های ۰ و ۱ و همچنین مستقل هستند. فرض کنید داریم :

$$M_n = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n}$$

الف

مقادیر $\mathbb{E}[M_n]$ و همچنین $Var(M_n)$ را بیابید.

ب

یک کران بالای غیربدیهی برای مقدار زیر پیدا کنید:

$$\mathbb{P}(|M_n - \frac{۱}{۲}| \geqslant \frac{۱}{۱۰۰})$$

ج

مقدار زیر را با استفاده از قسمت قبل محاسبه کنید :

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(|M_n - \frac{۱}{۲}| \geqslant \frac{۱}{۱۰۰})$$

حل.

فرض کنید متغیر های تصادفی $X_۱, X_۲, \dots X_n$ از توزیع یکنواخت با پارامتر های ۰ و ۱ و همچنین مستقل هستند.
فرض کنید داریم :

$$M_n = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n}$$

الف

$$\mathbb{E}[M_n] = \frac{\sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}[X_i]}{n} = \frac{n}{n} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$Var(M_n) = \frac{Var(\sum_{i=۱}^{n} X_i)}{n^۲} = \frac{n \times Var(X_۱)}{n^۲} = \frac{۱}{۱۲n}$$

ب

با استفاده از chebyshev داریم :

$$\mathbb{E}(|M_n - \frac{۱}{۲}| \geqslant \frac{۱}{۱۰۰}) \leqslant \sigma^۲ ۱۰۰^۲ = \frac{۱۰۰^۲}{(۱۲n)^۲}$$

ج

داریم :

$$\lim_{x \to \infty} \mathbb{P}(|M_n - \frac{۱}{۲}| \geqslant \frac{۱}{۱۰۰}) = \lim_{x \to \infty} \frac{۱۰۰^۲}{(۱۲n)^۲} = ۰$$

▷

نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم Quiz#_[STD-Num] آپلود کنید.

موفق باشید :)