آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱ ـ ۱۴۰۰

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

گردآورندگان: امیرحسین عابدی

کوئیز ۴ — تخمین نقطه‌ای

مسئله‌ی ۱.

داده های $(X_1, Y_1), \dots (X_n, Y_n)$ را در نظر بگیرید. میدانیم که $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. و همینطور رابطه X_i و Y_i به صورت زیر میباشد :

$$Y_i = w_1 X_i + w_0 + Z_i$$

در عبارت بالا $Z_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ هستند. همچنین این فرض را داشته باشید که Z_i و X_i ها از هم مستقل میباشند.

تخمینگر w^* را به این صورت تعریف میکنیم.

$$w^* = \underset{w=(w_1, w_0)}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - w_1 X_i - w_0)^2$$

نشان دهید که $w_{MLE} = w^*$ که در اینجا w_{MLE} تخمینگر بیشینه درست نمایی میباشد.

راهنمایی : در محاسبات خود میتوانید از رابطه زیر استفاده کنید.

$$\mathbb{P}((X_i, Y_i)|w) = \mathbb{P}(X_i|w)\mathbb{P}(Y_i|X_i, w)$$

حل.

در ابتدا تخمینگر w_{MLE} را بدست می‌آوریم. برای اینکار ابتدا تابع $\mathcal{L}$ را بدست می‌آوریم و در ادامه با $log\mathcal{L}$ کار میکنیم.

$$\mathcal{L}(w) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}((X_i, Y_i)|w) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i|w)\mathbb{P}(Y_i|X_i, w)$$

دقت داشته باشید که بردار w در ساخت X_i ها نقشی ندارد بنابراین داریم :

$$\mathcal{L}(w) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i)\mathbb{P}(Y_i|X_i, w)$$

این نکته را نظر داشته باشید که چون متغیر های تصادفی استفاده شده در مسئله پیوسته میباشند ، برای تمامی احتمالات بالا از چگالی آنها استفاده میکنیم.

$$log\mathcal{L}(w) = n \times log(\frac{1}{2\pi\sigma}) - \sum_{i=1}^{n}[\frac{x_i^2}{2\sigma^2}] - \sum_{i=1}^{n}[\frac{Y_i - w_1 X_i - w_0}{2}]^2$$

در تابع $log\mathcal{L}$ تمامی جملات به غیر از جمله آخر ثابت میباشند. بنابراین برای بیشینه شدن تابع $\mathcal{L}$ کافی است که جمله آخر کمینه شود (چون ضریب منفی آن در تابع حضور دارد).

بنابراین w_{MLE} را میتوان به این صورت بازنویسی کرد.

$$w_{MLE} = \underset{w=(w_1,w_0)}{\text{argmax}}\, log\mathcal{L} = \underset{w=(w_1,w_0)}{\text{argmax}} - \sum_{i=1}^{n}[\frac{Y_i - w_1 X_i - w_0}{2}]^2 = \underset{w=(w_1,w_0)}{\text{argmin}} \sum_{i=1}^{n}[\frac{Y_i - w_1 X_i - w_0}{2}]^2$$

$$= \underset{w=(w_1,w_0)}{\text{argmin}} \sum_{i=1}^{n}[Y_i - w_1 X_i - w_0]^2 = w^*$$

$\triangleright$

مسئله‌ی ۲. سوال آخره کاپیتان !

کاپیتان بعد از ماه های متوالی مطالعه درس آمار و احتمال ، تصمیم گرفت که دیگر از تمام تخمینگرها خسته شده است و تصمیم گرفت یک تخمینگر برای خود درست کند. در حال حاضر این تخمینگر فقط برای میانگین خوب کار میکند ولی کاپیتان قول این را داده که تخمینگر های دیگری هم معرفی کند. این تخمینگر میانگین که آنرا با μ_{cap}^k نشان میدهیم برای $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} Bernouli(p)$ به این صورت تعریف میشود :

$$\mu_{cap}^k = \frac{\frac{k}{2} + \sum_{i=1}^{n} X_i}{k+n}$$

الف

در ابتدا تخمینگر بیشینه درست نمایی p_{MLE} را بیابید و نشان دهید که تخمینگر بیشینه درست نمایی حالتی خاص از مجموعه تخمینگر های کاپیتان میباشد.

ب

فرض کنید برای $n = 3$ داده های $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$ به ما داده شده است و همینطور کاپیتان $k = 8$ را برای تخمینگر خود انتخاب میکند. هردو مقدار p_{MLE} و μ_{cap}^8 را بدست آورید. کدام تخمینگر بهتر عمل کرده است ؟ (فرض کنید مقدار اصلی p برابر با ۰/۷ میباشد.)

حل.

الف

برای یک متغیر تصادفی با توزیع برنولی میتوانیم تابع جرم آنرا به این صورت نمایش دهیم :

$$\mathbb{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

از $log\mathcal{L}$ استفاده میکنیم. داریم :

$$\mathcal{L}(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{X_i}(1-p)^{1-X_i}$$

$$log\mathcal{L}(p) = [\sum_{i=1}^{n} X_i]log(p) + [n - \sum_{i=1}^{n} X_i]log(1-p)$$

حال با مشتق گیری نقطه بیشینه آنرا پیدا میکنیم.

$$\frac{\partial log\mathcal{L}}{\partial p} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=۱}^{n} X_i}{۱ - p} = ۰$$

$$p_{MLE} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n}$$

واضح است که داریم :

$$\mu^{\cdot}_{cap} = p_{MLE}$$

ب

با توجه به عبارت بدست آمده از قسمت قبل داریم :

$$\mu^{۸}_{cap} = \frac{۳ + ۴}{۱۱} = ۰/۶۳$$

$$p_{MLE} = \frac{۳}{۳} = ۱$$

دقت کنید که در این مثال تخمینگر کاپیتان بهتر عمل کرده است چرا که ضریبی که در صورت و مخرج اضافه شده است به این منظور است که برای تعداد داده های کم ، تخمین بهتری از پارامتر داشته باشیم. این روند برای همیشه ادامه ندارد چرا که این تخمینگر جدید ، بایاس دارد و همینطور با افزایش k مقدار تخمینگر به ۰/۵ متمایل میشود.

▷

نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم Quiz#_[STD-Num] آپلود کنید.

موفق باشید :)