



نکات مهم

- پاسخ خود را در قالب یک فایل pdf با اسم [STD-Num]_HW# آپلود کنید.
- ددلاین تمرین ساعت ۲۳:۵۹ روز ۲۴ فروردین می باشد.
- سوالات ستاره دار، غیرتحویلی هستند و برای تمرین بیشتر قرار داده شده اند.
- مشورت در تمرین ها مجاز است و توصیه هم می شود، اما هر دانشجو موظف است تمرین را به تنهایی انجام دهد و راه حل نهایی ارسال شده، باید توسط خود دانشجو نوشته شده باشد. در صورت کشف اولین مورد تقلب هر دانشجو، نمره ی همان تمرین وی، صفر در نظر گرفته شده و در صورت کشف دومین مورد تقلب هر دانشجو، منفی نمره ی کل تمرین ها به وی تعلق خواهد گرفت. برای کسب اطلاعات بیش تر در خصوص آیین نامه ی مشورت و تقلب، می توانید به بخش مربوطه در ویکی دانشکده مراجعه کنید. لازم به ذکر است که این جرایم به هیچ عنوان بخشیده نخواهند شد.

مسئله ی ۱. کلاس کلوچه پزی *

کوکو در یک کلاس کلوچه پزی شرکت می کند. به کمک مربی مقداری خمیر برای درست کردن ۲۰۰۰ کلوچه هم اندازه آماده و به آن ۳۰۰۰ تکه شکلات و ۲۰۰۰ تکه گردو اضافه کردند. سپس خمیر را خوب مخلوط کردند.

الف

پس از حاضر شدن کلوچه ها کوکو یک کلوچه برمی دارد و شروع به خوردن می کند. چقدر احتمال دارد این کلوچه حداقل ۳ تکه شکلات داشته باشد؟

ب

هنرجویان کلاس ۱۰۰ کلوچه را خورده اند. در این ۱۰۰ کلوچه مجموعاً ۲۰۰ تکه شکلات و ۳۰۰ تکه گردو وجود داشته است. مدیر مجموعه وارد کلاس می شود و کلوچه ای برمی دارد، با چه احتمالی داخل این کلوچه m تکه شکلات و n تکه گردو وجود دارد؟

مسئله ی ۲. تابع چگالی احتمال

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f_X(x) = Ae^{-2|x|} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^2}$ است.

الف

مقدار A و میانگین و واریانس X را به دست آورید.

ب

$$Y = \begin{cases} \sqrt{2|X|} - 1 & |X| \geq 1/2 \\ 0 & |X| < 1/2 \end{cases} \quad \text{اگر } f_Y(y) \text{ را بیاید}$$

مسئله ۳. پیتزا پیتزا

پس از نوشتن تمرین‌های درس آمار و احتمال مهندسی، علی می‌خواهد برای شام پیتزا سفارش دهد. او با احتمال $\frac{2}{8}$ به پیتزافروشی A و با احتمال $\frac{3}{8}$ به پیتزافروشی B سفارش می‌دهد. مدت زمان آماده‌سازی غذا برای پیتزافروشی A ، 30 دقیقه است و برای پیتزافروشی B از توزیع نرمال با میانگین 30 و واریانس 25 پیروی می‌کند. مدت زمانی که طول می‌کشد تا پیک غذا را از پیتزافروشی دریافت کرده و به علی برساند برای پیتزافروشی A از توزیع نمایی با میانگین 10 پیروی می‌کند و برای پیتزافروشی B برابر 15 دقیقه است.

می‌دانیم غذای علی حداکثر 40 دقیقه پس از سفارش به دستش رسیده است. چقدر احتمال دارد علی از پیتزافروشی B سفارش داده باشد؟

مسئله ۴. شیرین مثل کیک

یک شیرینی فروشی از بخش کیک تولد و بخش شیرینی خشک تشکیل شده است. تعداد مشتری بخش کیک تولد در یک ساعت $X \sim Poiss(\lambda_1)$ و تعداد مشتری بخش شیرینی خشک در یک ساعت $Y \sim Poiss(\lambda_2)$ می‌باشد.

الف

تعداد مشتری کل شیرینی فروشی در یک ساعت چه توزیعی دارد؟ (پارامترهای توزیع را نیز مشخص کنید.)

ب

حال فرض می‌کنیم $\lambda_1 = 20$ و $\lambda_2 = 10$ باشد. در 20 دقیقه گذشته کسی وارد شیرینی فروشی نشده است. چقدر احتمال دارد در 10 دقیقه بعدی تنها 1 نفر برای خرید کیک تولد وارد شیرینی فروشی شود؟

مسئله ۵. مسابقه

کوشا در یک مسابقه تلویزیونی شرکت کرده است. در هر مرحله این مسابقه، کوشا سه سکه A و B و C را به صورت همزمان پرتاب می‌کند. سکه A با احتمال $\frac{1}{4}$ ، سکه B با احتمال $\frac{1}{4}$ و سکه C با احتمال $\frac{1}{4}$ رو می‌آیند.

الف

کوشا 10 مرحله سکه‌ها را پرتاب می‌کند. در هر مرحله، اگر حداقل دو سکه رو بیاید 10 تومان برنده می‌شود. با چه احتمالی کوشا حداقل 80 تومان برنده می‌شود؟

ب

با توجه به قسمت الف، امید ریاضی و واریانس مقدار پولی که کوشا برنده می‌شود را به دست آورید.

ج

پس از ۴ مرحله، کوشا هنوز پولی برنده نشده است. چقدر احتمال دارد پیش از پرتاب نهم، کوشا پولی برنده شده باشد؟ (با توجه به اطلاعات قسمت الف این بخش را حل کنید).

د

حال فرض کنید مسابقه به گونه ای است که کوشا در هر مرحله دو انتخاب دارد: ۱ – می تواند بازی را ترک کند و پولی که تا آن مرحله برنده شده است را دریافت کند. ۲ – یک مرحله دیگر بازی را ادامه دهد و سه سکه را همزمان پرتاب کند. در این صورت اگر حداقل یک سکه پشت بیاید ۱۰ تومان برنده می شود و در غیر این صورت از مسابقه حذف شده و پولی دریافت نمی کند. کوشا چند مرحله به بازی ادامه دهد تا امید ریاضی پولی که برنده می شود بیشینه باشد؟

مسئله ۶. عیدی

افشین قرار است امسال عید دیدنی خانه ۴ دایی اش برود. دایی، محمود، احمد، حامد و محمد. طبق تجربه سال های قبل، او او می داند، احمد به احتمال $0/2$ ، محمد به احتمال $0/5$ ، حامد به احتمال $0/7$ و محمود به احتمال $0/9$ به او عیدی می دهد. او دوست دارد بداند چند تا از دایی ها به او عیدی خواهند داد. با استفاده از متغیر نشانگر، محاسبه کنید انتظار می رود چند دایی به او عیدی بدهند؟

مسئله ۷. چراغ راهنما *

فرض کنید یک چراغ راهنمایی در مسیر شما به دانشگاه وجود دارد که هر روز ساعت ۷ صبح شروع به کار می کند. به این صورت که به تناوب یک دقیقه سبز و سه دقیقه قرمز است (چراغ راهنمایی با سبز شروع به کار می کند). فرض کنید زمان رسیدن شما بر حسب دقیقه به این چراغ راهنمایی نسبت به مبدأ ۷ صبح یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = \ln(2)$ باشد. Y را مدت زمان توقف شما (بر حسب دقیقه) پشت چراغ تعریف می کنیم. تابع توزیع تجمعی Y و میانگین آن را محاسبه کنید.

مسئله ۸. واکسیناسیون

برای دریافت دوز سوم واکسن کرونا به مرکز واکسیناسیون مراجعه می کنید. این مرکز دو ایستگاه واکسیناسیون دارد. افراد برای دریافت واکسن در یک صف می ایستند و هر یک از دو ایستگاه که زودتر خالی شود، نفر ابتدای صف جای او را می گیرد. فرض کنید شما وارد مرکز می شوید و اولین نفر در صف هستید. مدت زمان واکسن زدن برای هر فرد از تابع نمایی با میانگین λ تبعیت می کند.

الف

احتمال اینکه واکسیناسیون شما زودتر از فردی که هم اکنون در ایستگاه شماره ۱ حضور دارد، انجام شود را به دست آورید.

ب

امید ریاضی مدت زمانی که در مرکز واکسیناسیون هستید چقدر است؟

مسئله‌ی ۹. توزیع تجمعی

فرض کنید X متغیر تصادفی با توزیع تجمعی F است. مقدار c میانه X است که برای این مقدار $F(c) = 1/2$ و $X < c$ را به احتمال $0/5$ داریم و $X > c$ را نیز به احتمال $0/5$ داریم. در سه حالت زیر c را به دست آورید.

الف

X توزیع یکنواخت در بازه $[a, b]$ داشته باشد

ب

X توزیع نرمال با پارامترهای μ, σ داشته باشد

ج

X توزیع نمایی با پارامتر λ داشته باشد

مسئله‌ی ۱۰. کارت بازی *

فاطمه ۳ کیسه پر از کارت دارد. کیسه اول، دارای ۴ کارت از شماره ۱ تا ۴، کیسه دوم دارای ۶ کارت از شماره ۱ تا ۶ و کیسه سوم دارای ۱۲ کارت از شماره ۱ تا ۱۲ است. او از هر کیسه، یک کارت را به صورت تصادفی بیرون می‌آورد. به روش متغیر نشانگر، امید ریاضی تعداد ۳ هایی که خواهد دید را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۱۱. بندرگاه

یک بندرگاه تجاری هر روز میزبان تعدادی کشتی است که در هر واحد زمان، تعداد کشتی‌های حاضر در این بندرگاه توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 4$ دارد. در هر لحظه هر کشتی به احتمال $0/6$ از بندرگاه خارج می‌شود یا با احتمال $0/4$ لنگر می‌اندازد و تا روز بعد آنجا می‌ماند. اگر X متغیر تصادفی تعداد کشتی‌های خروجی در هر لحظه باشد، توزیع X را بیاید.

(موفق باشید:)