Московский физико-технический институт
Факультет молекулярной и химической физики

Лабораторная работа №1.2.5

«Исследование прецессии уравновешенного гироскопа»

Выполнил:
студент 1 курса
642 группы ФМХФ
Демьянов Георгий
Сергеевич

Москва 2016

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

Оборудование: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

1 Теоретическое введение

Уравнение движения твердого тела запишем в виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{2}$$

Уравнение (1) выражает закон движения центра масс тела, а (2) - уравнение вращательного движения твердого тела. Уравнение (2) соответствует задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. В данной работе рассматривается именно эта задача.

Момент импульса твердого тела в его главных осях x, y, z можно записать как:

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z, \tag{3}$$

где I_x, I_y и I_z - главные моменты инерции тела, ω_x, ω_y и ω_z - компоненты вектора угловой скорости тела $\vec{\omega}$. Если по одной оси момент импульса много больше, чем по другим, т.е. $I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, I_y\omega_y$, данное тело приобретает гироскопические свойства.

Из (2) получим приращение момента импульса:

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M}dt. \tag{4}$$

Тогда, если время действия внешней силы мало, то из (4) следует, что

$$|\Delta\vec{L}| \ll |\vec{L}|. \tag{5}$$

Именно это придает устойчивость гироскопу после приведения его в быстрое вращение.

Выясним, какие силы надо приложить к гироскопу, чтобы изменить направление его оси вращения. Рассмотрим для примера маховик, который вращается только вокруг оси z, перпендикулярной плоскости маховика (рис. 1).

Тогда $\omega_z = \omega_0$. Пусть ось вращения повернулась в плоскости Ozx по направлению к оси x на малый угол $d\varphi$.

Тогда маховик начал вращаться вокруг оси y с угловой скоростью Ω:

$$d\varphi = \Omega dt.$$

Но т.к. в таких условиях $L_\Omega \ll L_{\omega_0}$, момент импульса маховика, равный $I_z\omega_0$, только повернется в плоскости Ozx по направлению к оси x и не изменит свою величину.

Тогда:

$$|d\vec{L}| = Ld\varphi = L\Omega dt$$

Тогда можно записать данное выражение:

$$d\vec{L} = \vec{\Omega} \times \vec{L}dt$$

или

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

В силу (2):

$$\boxed{\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}} \tag{6}$$

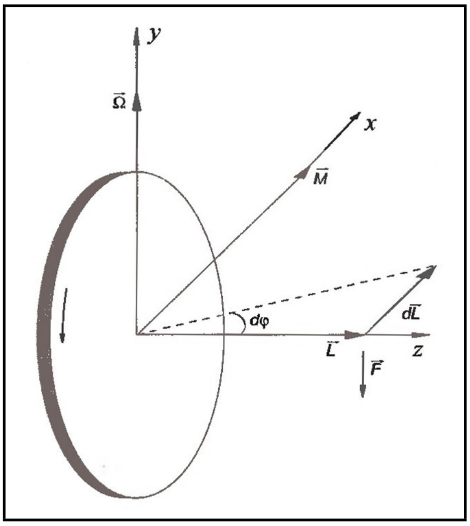


Рис. 1: Маховик

Формула (6) справедлива только при условии (5). Она позволят определить момент сил $\vec{M}$, который необходимо приложить к маховику для того, чтобы вызвать прецессию маховика с угловой скоростью $\vec{\Omega}$.

Найдем угловую скорость прецессии гироскопа, к оси которого подвешен груз массой m. Сама же ось наклонена на угол α от вертикали:

$$\Omega = \frac{M}{I_z\omega_0 \sin\alpha} = \frac{mgl\sin\alpha}{I_z\omega_0\sin\alpha} = \frac{mgl}{I_z\omega_0}, \tag{7}$$

где m - масса груза, g - ускорение свободного падения, l - расстояние от центра масс гироскопа до точки крепления груза на оси гироскопа.

Более полно теория по гироскопам раскрыта в классическом курсе механики [1].

2 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка для исследования прецессии уравновешенного гироскопа показана на рис. 2. Ротором гироскопа является ротор высокоскоростного электромотора М, питающегося током частотой 400 Гц. Кожух мотора сцеплен с кольцом Б. Мотор с кольцом Б может вращаться в кольце А вокруг горизонтальной оси, которое может вращаться вокруг вертикальной оси. Ротор электромотора представляет массивный стальной цилиндр с прожилками меди, образующими «беличье колесо». Рычаг С направлен по оси симметрии ротора. На рычаг подвешивают грузы Г. Подвешивая различные грузы, можно менять силу F, момент которой определяется расстоянием l от точки подвеса до горизонтальной оси кольца А (до центра масс гироскопа).

Вследствие моментов сил трения, ось гироскопа будет опускаться в направлении действия груза, и появится $\Omega_{\text{опуск}}$, вектор которой перпендикулярен плоскости рисунка и направлен на читателя.

Описание экспериментальной установки взято из [2].

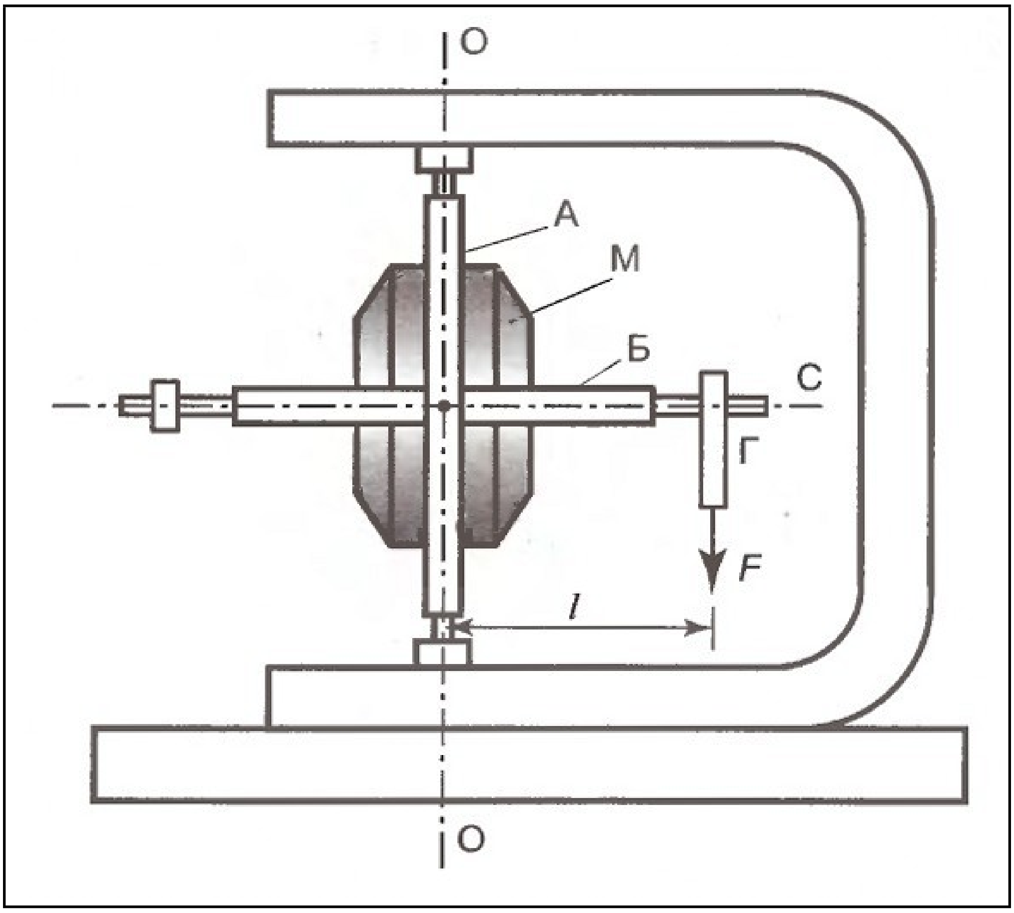


Рис. 2: Схема экспериментальной установки

3 Обработка результатов измерений

3.1 Измерение значения ω_0 гироскопа через значение Ω вынужденной прецессии

3.1.1 Определение величины $I_z\omega_0$

Подвесим различные грузы на рычаг и измерим время, за которое он сделает полный оборот N раз. Тогда можно измерить Ω по формуле:

$$\Omega = 2\pi\frac{N}{t},$$

момент сил M:

$$M = mgl,$$

а также найдем стандартную ошибку σ_Ω:

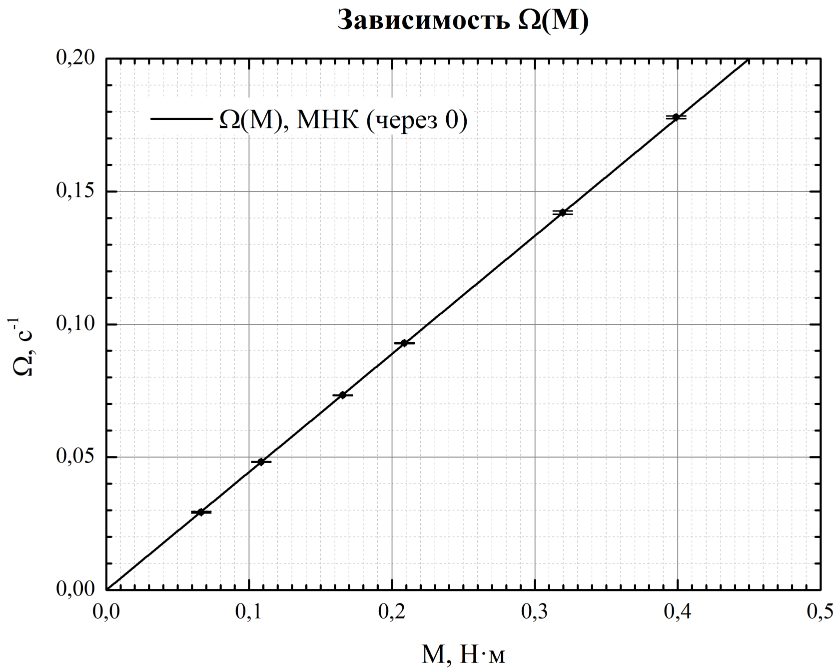
$$\sigma_\Omega = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(\Omega_i - \bar{\Omega})^2}{3-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}(\Omega_i - \bar{\Omega})^2}{2}}$$

Усредним результаты и занесем в таблицу 1:

Таблица 1:

m, кг	Ω, с$^{-1}$	l, м	M, Н·м	σ_Ω, 10^{-4} c^{-1}
0.057	0.029	0.119	0.066	2.6
0.093	0.048		0.11	0.61
0.142	0.073		0.17	0.97
0.179	0.093		0.21	1.8
0.274	0.14		0.32	5.8
0.342	0.18		0.40	5.1

Нанесем на график экспериментальные точки $\Omega(M)$ и проведем по ним прямую методом наименьших квадратов (через начало координат):



Тогда величина обратная тангенсу угла наклона прямой из (7) равна $I_z\omega_0$:

$$\frac{1}{\tan(\varphi)} = I_z\omega_0 = \frac{1}{0.444}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} = 2.27\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Из МНК:

$$\sigma_{\tan(\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{<\Omega^2>}{<M^2>} - \tan^2(\varphi)} = 0.012\,\frac{\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}^2}.$$

Найдем $\sigma_{I_z\omega_0}$ из формулы:

$$\left(\frac{\sigma_{\tan(\varphi)}}{\tan(\varphi)}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{I_z\omega_0}}{I_z\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \sigma_{I_z\omega_0} = 0.06\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Тогда получим, что:

$$\boxed{I_z\omega_0 = 2.27 \pm 0.06\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}}. \tag{8}$$

3.1.2 Измерение момента инерции ротора I_z

Момент инерции ротора относительно оси симметрии измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_z и модуля кручения проволоки f:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{f}}. \tag{9}$$

Чтобы исключить f, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции $I_\text{ц}$. Тогда получим выражение для определения момента инерции ротора гироскопа:

$$I_z = I_\text{ц}\frac{T_0^2}{T_\text{ц}^2}, \tag{10}$$

где $T_\text{ц}$ - период крутильных колебаний цилиндра.

Измерение периода крутильных колебаний проведем 3 раза и усредним значения. Для этого измерим время за которое совершается 10 крутильных колебаний и найдем периоды T_0 и $T_\text{ц}$. Также найдем стандартные ошибки σ_{T_0} и $\sigma_{T_\text{ц}}$. Получим:

$$T_0 = 8.42 \pm 0.03\text{ с},\ T_\text{ц} = 10.612 \pm 0.012\text{ с}.$$

С помощью штангенциркуля получим значение диаметра цилиндра $d = (7.90 \pm 0.01)\cdot 10^{-2}$ м. Т.к. $I_\text{ц} = \frac{1}{2}m_\text{ц}R^2 = \frac{1}{2}m_\text{ц}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}m_\text{ц}d^2$, где $m_\text{ц}$ - масса цилиндра, равная $m_\text{ц} = (1618.9 \pm 0.5)\cdot 10^{-3}$ кг. Найдем стандартную ошибку $\sigma_{I_\text{ц}}$ по формуле:

$$\left(\frac{\sigma_{I_\text{ц}}}{I_\text{ц}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{m_\text{ц}}}{m_\text{ц}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2.$$

Подставив, получим:

$$I_\text{ц} = (1.263 \pm 0.003)\cdot 10^{-3}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

У нас есть все данные, чтобы получить I_z. Найдем стандартную ошибку σ_{I_z} по формуле:

$$\left(\frac{\sigma_{I_z}}{I_z}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{I_\text{ц}}}{I_\text{ц}}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{T_\text{ц}}}{T_\text{ц}}\right)^2.$$

Подставив полученные значения в формулу (10), получим:

$$\boxed{I_z = (8.16 \pm 0.06)\cdot 10^{-4}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2}. \tag{11}$$

3.1.3 Измерение момента инерции ротора I_z

Теперь найдем ω_0 из (8), разделив значение $I_z\omega_0$ на значение I_z. Стандартную ошибку σ_{ω_0} получим по формуле:

$$\left(\frac{\sigma_{\omega_0}}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{I_z\omega_0}}{I_z\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_z}}{I_z}\right)^2.$$

Подставив значения, получим:

$$\boxed{\omega_0 = (2.82 \pm 0.08) \cdot 10^3\ \text{с}^{-1}}. \tag{12}$$

3.2 Измерение значения ω_0 гироскопа с помощью осциллографа

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку используют для раскрутки гироскопа, а вторую - для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагничен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную ЭДС индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой - переменной напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

В данном эксперименте была получена частота $\nu = 439.0 \pm 0.5$ Гц. Тогда

$$\omega_{0_{\text{осц}}} = 2\pi\nu$$

и

$$\left(\frac{\sigma_{\omega_{0_{\text{осц}}}}}{\omega_{0_{\text{осц}}}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)^2.$$

Подставив, получим:

$$\boxed{\omega_{0_{\text{осц}}} = 2\pi\nu = (2.758 \pm 0.003) \cdot 10^3\, c^{-1}}. \tag{13}$$

3.3 Сравнение ω_0 и $\omega_{0_{\text{осц}}}$

Рассчитаем, насколько отличаются значения ω, полученные разными способами:

$$\delta = \frac{|\omega_0 - \omega_{0_{\text{осц}}}|}{\omega_{0_{\text{осц}}}} \cdot 100 \simeq 2.2\%.$$

Видим, что значения ω, полученные разными способами, достаточно близки друг к другу.

3.4 Расчет значения $\Omega_{\text{опуск}}$

С помощью линейки измерим высоту подъема рычага. Повесим на него груз и через некоторое время снова измерим высоту подъема рычага. Т.к. действуют силы трения, высота подъема уменьшилась. В данном эксперименте это изменение равно $\Delta H = 0.008$ м, причем рычаг опустился за время $t_{\text{опуск}} = 170.36$ с. Т.к. угол малый, считаем, что

$$\frac{\Delta H}{l_1} = \tan\alpha_{\text{опуск}} \approx \alpha_{\text{опуск}},$$

где $\alpha_{\text{опуск}}$ - угол, на который опустился рычаг, l_1 - полная длина рычага, равная $l_1 = 0.123$ м.

Таким образом:

$$\alpha_{\text{опуск}} = \frac{\Delta H}{l_1} = 0.065 \text{ рад}.$$

Тогда найдем значение $\Omega_{\text{опуск}}$:

$$\Omega_{\text{опуск}} = \frac{\alpha_{\text{опуск}}}{t_{\text{опуск}}} \approx 3.8 \cdot 10^{-4}\,\text{с}^{-1}.$$

В силу (6):

$$\boxed{M_{\text{трения}} = \Omega_{\text{опуск}} I_z \omega_0 \approx 0.87 \cdot 10^{-3} \sim 10^{-3}\,\text{Н} \cdot \text{м}}. \tag{14}$$

Видно, что момент сил трения мал, однако этого достаточно, чтобы рычаг гироскопа поворачивался в сторону линии действия силы тяжести груза.

4 Заключение

В данной работе мы наблюдали вынужденную прецессию гироскопа.

Определив угловую скорость прецессии Ω, мы нашли значение угловой скорости вращения ротора гироскопа $\omega_0 = (2.82 \pm 0.08) \cdot 10^3\,\text{с}^{-1}$, которая почти совпадает (отличие на 2.2%) со значением $\omega_{0_{\text{осц}}} = (2.758 \pm 0.003) \cdot 10^3\,\text{с}^{-1}$, измеренным с помощью осциллографа.

Также мы по порядку величины определили момент сил трения: $M_{\text{трения}} \sim 10^{-3}\,\text{Н} \cdot \text{м}$.

Список литературы

[1] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. 5-е изд. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

[2] Гладун А.Д. Лабораторный практикум по общей физике. Москва: МФТИ, 2004.