

Московский физико-технический институт
Факультет молекулярной и химической физики

Лабораторная работа №1.4.2

«Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника»

Выполнил:
студент 1 курса
642 группы ФМХФ
Демьянов Георгий
Сергеевич

Москва 2016

Цель работы: определить величину ускорения свободного падения.

Оборудование: оборотный маятник, счетчик числа колебаний, секундомер, штангенциркуль с пределом измерений 1м.

1 Теоретическое введение

Ускорение свободного падения, которое вблизи поверхности обычно обозначают g , определяется массой тела m и силой F , действующей на тело,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1)$$

Ускорение свободного падения можно измерить с помощью физического маятника. Период колебаний физического маятника определяется формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (2)$$

Здесь I - момент инерции маятника относительно оси качения, m - масса маятника, a - расстояние от центра масс до оси качения.

Массу маятника и период колебаний можно измерить с очень высокой точностью, но точно измерить момент инерции не удастся. Указанного недостатка лишен метод оборотного маятника, который позволяет исключить момент инерции из расчетной формулы для g .

Метод оборотного маятника основан на том, что период колебаний физического маятника не изменяется при перемещении оси качаний в центр качаний, т.е. в точку, отстоящую от оси качаний на расстояние, равное приведенной длине маятника, и лежащую на одной прямой с точкой подвеса и центром масс маятника.

Применяемый в настоящей работе оборотный маятник (рис. 1) состоит из стальной пластины, на которой укреплены две однородные призмы Π_1 и Π_2 . Период колебаний маятника можно менять при помощи подвижных грузов Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 .

Если нам удалось найти такое положение грузов, при котором периоды колебаний маятника T_1 и T_2 на призмах Π_1 и Π_2 совпадают, то справедливо:

$$T_1 = T_2 = T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mga_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mga_2}}, \quad (3)$$

где a_1 и a_2 - расстояния от центра массы маятника до призм Π_1 и Π_2 .

Условием этого является равенство приведенных длин, т.е. равенство величин $\frac{I_1}{ma_1}$ и $\frac{I_2}{ma_2}$. По теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I_1 = I_0 + ma_1^2, I_2 = I_0 + ma_2^2, \quad (4)$$

где I_0 - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс. Исключая из (3) и (4) I_0 и m , получим формулу для определения g :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(a_1 + a_2) = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}, \quad (5)$$

Здесь $L = a_1 + a_2$ — расстояние между призмами Π_1 и Π_2 (причем $a_1 \neq a_2$), которое легко может быть измерено с высокой точностью (0.1 мм) при помощи большого штангенциркуля.

При выводе формулы (5) мы полагали, что $T_1 = T_2$, что на практике невозможно. Тогда

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{I_i}{mga_i}}, i = 1, 2,$$

откуда получим формулу:

$$g = 4\pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2} = 4\pi^2 \frac{L}{T_0^2}, \quad (6)$$

где

$$T_0^2 = T_2^2 + \frac{L - a_2}{L - 2a_2}(T_1^2 - T_2^2). \quad (7)$$

Погрешность g может найдена из (6):

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2}. \quad (8)$$

Погрешность σ_{T_0} найдем по формуле:

$$\sigma_{T_0^2}^2 = \left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_2^2)}\right|^2 \sigma_{T_2^2}^2 + \left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(L)}\right|^2 \sigma_L^2 + \left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(a_2)}\right|^2 \sigma_{a_2}^2 + \left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_1^2)}\right|^2 \sigma_{T_1^2}^2, \quad (9)$$

где

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_2^2)}\right| = \left|\frac{a_2}{2a_2 - L}\right| \quad (10)$$

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(L)}\right| = \left|\frac{T_2^2 - T_1^2}{(L - 2a_2)^2} a_2\right| \quad (11)$$

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(a_2)}\right| = \left|\frac{T_1^2 - T_2^2}{(L - 2a_2)^2} L\right| \quad (12)$$

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_1^2)}\right| = \left|\frac{L - a_2}{L - 2a_2}\right| \quad (13)$$

$$\sigma_{T_2^2} = 2\sigma_{T_2} T_2 \quad (14)$$

$$\sigma_{T_1^2} = 2\sigma_{T_1} T_1. \quad (15)$$

А σ_{T_0} найдем так:

$$\sigma_{T_0^2} = 2\sigma_{T_0} T_0 \Rightarrow \sigma_{T_0} = \frac{\sigma_{T_0^2}}{2T_0}. \quad (16)$$

Теоретические выкладки взяты из [1] - с. 252-256.

2 Схема экспериментальной установки

Схема устройства оборотного маятника изображена на рис. 1. Расстояние L между опорными призмами Π_1 и Π_2 не меняется. Расстояния a_1 и a_2 можно менять, перемещая грузы Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 . Для определения числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя, фотоэлемента и пересчетного устройства. Легкий стержень, укрепленный на торце маятника, пересекает световой луч дважды за период. Возникающие в фотоэлементе импульсы поступают на пересчетный прибор. Если n_1 и n_2 - начальное и конечное значения показаний прибора за время наблюдения t , то измеренное число периодов, очевидно, равно $N = \frac{n_2 - n_1}{2}$, а период колебаний равен $T = \frac{t}{N}$. Время t измеряется секундомером, установленным на пересчетном приборе. Для определения расстояний a_1 и a_2 маятник снимают с консоли и располагают горизонтально на специальной подставке, имеющей острую грань. Перемещая маятник, нетрудно найти положение центра масс. Расстояния от него до опорных призм и есть искомые a_1 и a_2 .

Описание установки взято из [1] - с. 257.

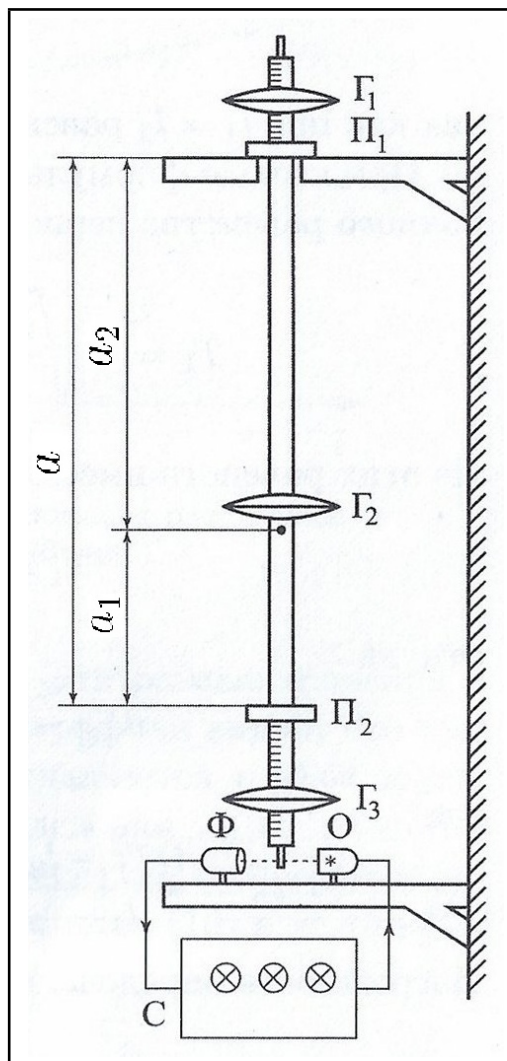


Рис. 1: Схема экспериментальной установки

3 Обработка результатов

Проведя эксперимент, занесем полученные данные в таблицу:

Таблица 1:

| $t_1, \text{с}$ | $t_2, \text{с}$ | $L, 10^{-2} \text{ м}$ | $a_2, 10^{-2} \text{ м}$ |
|-----------------|-----------------|------------------------|--------------------------|
| 302.7 ± 0.4 | 300.6 ± 0.4 | 56.65 ± 0.01 | 20.9 ± 0.1 |

Тогда ($N = 200$):

$$T_1 = \frac{t_1}{N} = 1.514 \pm 0.002 \text{ с}$$

$$T_2 = \frac{t_2}{N} = 1.503 \pm 0.002 \text{ с.}$$

Получим T_0 по формуле (7):

$$T_0 = 1.528 \text{ с.}$$

Используя формулы (10)-(15), определим значения:

$$\left| \frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_2^2)} \right| = 1.41$$

$$\left| \frac{\partial(T_0^2)}{\partial(L)} \right| = 0.31$$

$$\left| \frac{\partial(T_0^2)}{\partial(a_2)} \right| = 0.85$$

$$\left| \frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_1^2)} \right| = 2.41$$

$$\sigma_{T_1^2} = \sigma_{T_2^2} = 0.006 \text{ с}^2,$$

откуда

$$\sigma_{T_0^2} = 0.017 \text{ с}^2 \Rightarrow \sigma_{T_0} = 0.006 \text{ с.} \quad (17)$$

В итоге:

$$\boxed{T_0 = 1.528 \pm 0.006 \text{ с}}. \quad (18)$$

Интересно посмотреть на вклад слагаемых в погрешность $\sigma_{T_0^2}^2$ в формуле (9):

Таблица 2:

| Частная производная T_0^2 по | Вклад в погрешность, % |
|--------------------------------|------------------------|
| T_2^2 | 25.0821 |
| L | 0.0003 |
| a_2 | 0.2546 |
| T_1^2 | 74.6630 |

Таким образом, видим, что слагаемыми, связанными с частными производными по L и по a_2 , можно пренебречь. Они не повлияют на конечное значение погрешности.

По формуле (6) найдем значение ускорения свободного падения g :

$$g = 9.56 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

а погрешность получим по формуле (8):

$$\sigma_g = 0.07 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

В итоге, получим:

$$\boxed{g = 9.57 \pm 0.07 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}^1. \quad (19)$$

¹Ускорение свободного падения на широте Москвы равно $g_0 = 9.82 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Тогда полученное значение отличается от истинного на $\delta = \frac{|9.82 - 9.57|}{9.82} \cdot 100\% = 2.55\%$

4 Заключение

В данной работе для измерения ускорения свободного падения g мы использовали обратный маятник. Были получены формулы: (6) и (7) для расчета значения g , (8) и (9) для расчета погрешности измерений. Таким образом, проведя требуемые измерения и расчеты, получили значение ускорения свободного падения $g = 9.57 \pm 0.07 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Список литературы

- [1] Гладун А.Д. Лабораторный практикум по общей физике: Учебное пособие. В трех томах. Т. 1. Механика. Москва: МФТИ, 2004.