

К лабораторной работе 1.4.5

1. В ряде учебников присутствуют разделы, озаглавленные «Колебания и волны». Чем волна отличается от колебания? Как математически описать скалярную величину, совершающую одномерное волновое движение? Какая именно величина изменяется («волнуется») в задаче о движении натянутой струны?
2. Есть натянутая струна с погонной плотностью ρ_l . Сила натяжения струны равняется T . Струна двигается лишь в одной, вертикальной плоскости. Запишите волновое уравнение, описывающее движение струны. Как запомнить волновое уравнение из соображений размерности?
3. Бегущей гармонической волной называется волновое движение, описываемое формулой $f(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ или формулой $f(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$. Здесь ω называется круговой частотой волны, а k — ее волновым числом (частный случай волнового вектора \mathbf{k}). Будем считать, что $\omega > 0$, $k > 0$. Покажите, что бегущая гармоническая волна является решением волнового уравнения при определенном соотношении между ω и k (это соотношение называется законом дисперсии данных волн). Изобразите графически зависимость $\omega(k)$.
4. Изобразите «моментальную фотографию» бегущей волны (т.е. постройте график $f(x, t)|_{t=\text{const}}$). Что называется волновым числом k и длиной волны λ ? Как связаны друг с другом k и λ , в каких единицах они измеряются? Почему k называют еще «пространственной частотой»?
5. а) Вопрос из школьного курса математики. Изобразите график произвольной функции $f(x)$. Как по нему построить график функции $g(x) = f(x + a)$ ($a > 0$)? А если $a < 0$?
б) Чем «моментальная фотография» бегущей волны $f(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ в момент времени $t = t_0 + \tau$ отличается от «фотографии» в момент $t = t_0$? На сколько сдвинулась «фотография» за время τ ? Каков физический смысл фазовой скорости u ? Как представить себе эволюцию бегущей волны во времени?
в) Чем отличаются бегущие волны $f_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ и $f_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$? ω и k в $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$ — одинаковые.
6. Какое изменение величины f зафиксирует неподвижный наблюдатель, регистрирующий бегущую волну в точке с координатой x ? Постройте график функции $f(x, t)|_{x=\text{const}}$. Что называется периодом T , частотой ν и круговой частотой ω ? Как связаны между собой T , f и ω ? В каких единицах измеряются T , f и ω ?
7. Какое соотношение между λ , ν и u существует для бегущих гармонических волн, распространяющихся по «бесконечной» натянутой струне? В чем физический смысл этого соотношения?
8. Какое число параметров необходимо для полного задания бегущей гармонической волны? А для полного задания гармонической волны, «бегущей» по струне?
9. Покажите в одномерном случае, что для волнового уравнения справедлив принцип суперпозиции: если $f(x, t)$ и $g(x, t)$ — решения волнового уравнения, то и $h(x, t) = af(x, t) + bg(x, t)$ — тоже решение волнового уравнения.
10. Какое математическое выражение получится, если сложить две бегущие гармонические волны с одинаковыми A и ω , распространяющиеся навстречу друг другу? Получившаяся в результате волна называется стоячей.
Указание. Используйте математическую формулу для суммы косинусов, известную из школьного курса математики.
11. а) Что представляет из себя «моментальная фотография» стоячей волны?
б) Как представить себе эволюцию стоячей волны во времени?

в) Как стоячая волна будет выглядеть для неподвижного наблюдателя? Как связаны между собой длина волны и частота стоячей волны?

12. Концы натянутой струны длины L закреплены. Сила натяжения струны T и ее погонная плотность ρ_l известны. В такой струне могут существовать гармонические стоячие волны лишь с определенными длинами волн λ_n . Каковы эти длины волн λ_n ? Какие частоты ν_n им соответствуют? Чему равны наибольшие λ_1 и λ_2 ?

-
1. Распространение звука в одномерном случае описывается волновым уравнением, имеющим такой же вид, как и для натянутой струны. Изменение какой величины в звуковой волне описывается волновым уравнением?
2. (*Эффект Доплера*) Неподвижный (относительно воздуха) источник излучает плоскую звуковую волну с частотой ν_0 . Какую частоту звука зарегистрирует приемник, движущийся навстречу звуковой волне со скоростью v ? Скорость звука в воздухе равна u .
3. В экзаменационном билете говорится о «продольном эффекте Доплера». А что, существуют какие-то еще эффекты Доплера?
4. Источник звука движется относительно воздуха со скоростью v . Мембрана источника колеблется с частотой ν_0 . Какую частоту звука зарегистрирует неподвижный (относительно воздуха) приемник? Расстояние между источником и приемником уменьшается. Скорость звука в воздухе равна u . Где в Долгопрудном можно регулярно наблюдать (т.е. слышать) это явление?
5. Найдите величину относительного доплеровского сдвига частоты $\Delta\nu/\nu_0$ в условиях задач 2 и 4. Считать, что $v \ll u$.
6. («Собака лает, ветер носит») Мальчик слышит лай собаки, находящейся на некотором расстоянии от него. Мальчик и собака неподвижны относительно земли. Основная частота, присутствующая в лае собаки, равна ν_0 . Ветер дует от собаки к мальчику со скоростью v относительно земли. Звук какой частоты услышит мальчик? Скорость звука в воздухе равна u .

-
1. Выведите волновое уравнение, описывающее движение натянутой струны. Сила натяжения струны — T , ее погонная плотность — ρ_l . При рассмотрении считать, что натяжение равно T вне зависимости от текущего профиля $f(x, t)$. Волновое уравнение удобно вывести, последовательно ответив на следующие вопросы:
- а) Выразите ускорение элемента струны через функцию $f(x, t)$ (то есть через саму функцию или через ее частные производные).
- б) Элемент длины dx входит в участок струны, для которого в данный момент времени t : $f(x, t) = \text{const}(x)$. Какая сила dF при этом действует на элемент со стороны соседних элементов?
- в) Элемент длины dx входит в участок струны, для которого в данный момент времени t : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \text{const}(x)$. Какая сила dF действует на элемент?
- г) Элемент длины dx входит в участок струны, для которого в данный момент времени t : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \neq \text{const}(x)$. Какая сила dF действует на элемент в этом случае?
- д) Используя результат пункта г), запишите второй закон Ньютона для элемента длиной dx .
2. Чему равна скорость упругих поперечных волн, распространяющихся по натянутой струне? Почему рассматриваемые волны называются поперечными?
3. Упругий стержень может быть сжат или растянут в продольном направлении. Что называется модулем Юнга E , напряжением σ и относительным удлинением ε ? Закон Гука гласит, что эти величины связаны определенным образом; каким именно?

4. В упругом стержне могут распространяться продольные звуковые волны. Они описываются одномерным волновым уравнением. Изменение какой именно величины описывается волновым уравнением? Почему рассматриваемые волны называются продольными?
5. Выведите волновое уравнение, описывающее продольные звуковые волны в упругом стержне. Модуль Юнга стержня равняется E , а его объемная плотность — ρ . При выводе волнового уравнения удобно пользоваться рассуждениями, аналогичными рассуждениям для струны (см. выше). Чему равна продольная скорость звука в таком стержне?
6. Почему в экзаменационном билете говорится об упругих возмущениях именно в стержне, а не просто в упругом материале?
7. Можно ли переделать вывод, произведенный выше для определения скорости звука в упругом стержне, в вывод для определения скорости звука в воздухе? Что будет исполнять роль E , σ и ε при рассмотрении для воздуха? Какое выражение будет тогда получено для скорости звука в воздухе?