Московский физико-технический институт
Факультет молекулярной и химической физики

Лабораторная работа №1.4.2

«Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника»

Выполнил:
студент 1 курса
642 группы ФМХФ
Демьянов Георгий
Сергеевич

Москва 2016

Цель работы: определить величину ускорения свободного падения.

Оборудование: оборотный маятник, счетчик числа колебаний, секундомер, штангенциркуль с пределом измерений 1 м.

1 Теоретическое введение

Ускорение свободного падения, которое вблизи поверхности обычно обозначают g, определяется массой тела m и силой F, действующей на тело,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{1}$$

Ускорение свободного падения можно измерить с помощью физического маятника. Период колебаний физического маятника определяется формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}. \tag{2}$$

Здесь I - момент инерции маятника относительно оси качения, m - масса маятника, a - расстояние от центра масс до оси качения.

Массу маятника и период колебаний можно измерить с очень высокой точностью, но точно измерить момент инерции не удается. Указанного недостатка лишен метод оборотного маятника, который позволяет исключить момент инерции из расчетной формулы для g.

Метод оборотного маятника основан на том, что период колебаний физического маятника не изменяется при перемещении оси качаний в центр качаний, т.е. в точку, отстоящую от оси качаний на расстояние, равное приведенной длине маятника, и лежащую на одной прямой с точкой подвеса и центром масс маятника.

Применяемый в настоящей работе оборотный маятник (рис. 1) состоит из стальной пластины, на которой укреплены две однородные призмы Π_1 и Π_2. Период колебаний маятника можно менять при помощи подвижных грузов Γ_1, Γ_2 и Γ_3.

Если нам удалось найти такое положение грузов, при котором периоды колебаний маятника T_1 и T_2 на призмах Π_1 и Π_2 совпадают, то справедливо:

$$T_1 = T_2 = T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mga_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mga_2}}, \tag{3}$$

где a_1 и a_2 - расстояния от центра массы маятника до призм Π_1 и Π_2.

Условием этого является равенство приведенных длин, т.е. равенство величин $\frac{I_1}{ma_1}$ и $\frac{I_2}{ma_2}$. По теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I_1 = I_0 + ma_2^2, I_2 = I_0 + ma_2^2, \tag{4}$$

где I_0 - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс. Исключая из (3) и (4) I_0 и m, получим формулу для определения g:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(a_1 + a_2) = 4\pi^2\frac{L}{T^2}, \tag{5}$$

Здесь $L = a_1 + a_2$ — расстояние между призмами Π_1 и Π_2 (причем $a_1 \neq a_2$), которое легко может быть измерено с высокой точностью (0.1 мм) при помощи большого штангенциркуля.

При выводе формулы (5) мы полагали, что $T_1 = T_2$, что на практике невозможно. Тогда

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{I_i}{mga_i}}, i = 1, 2,$$

откуда получим формулу:

$$\boxed{g = 4\pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1T_1^2 - a_2T_2^2} = 4\pi^2 \frac{L}{T_0^2}}, \tag{6}$$

где

$$\boxed{T_0^2 = T_2^2 + \frac{L - a_2}{L - 2a_2}(T_1^2 - T_2^2)}. \tag{7}$$

Погрешность g может найдена из (6):

$$\boxed{\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2}}. \tag{8}$$

Погрешность σ_{T_0} найдем по формуле:

$$\boxed{\sigma^2_{T_0^2} = \left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_2^2)}\right|^2 \sigma^2_{T_2^2} + \left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(L)}\right|^2 \sigma^2_L + \left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(a_2)}\right|^2 \sigma^2_{a_2} + \left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_1^2)}\right|^2 \sigma^2_{T_1^2}}, \tag{9}$$

где

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_2^2)}\right| = \left|\frac{a_2}{2a_2 - L}\right| \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(L)}\right| = \left|\frac{T_2^2 - T_1^2}{(L - 2a_2)^2}a_2\right| \tag{11}$$

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(a_2)}\right| = \left|\frac{T_1^2 - T_2^2}{(L - 2a_2)^2}L\right| \tag{12}$$

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_1^2)}\right| = \left|\frac{L - a_2}{L - 2a_2}\right| \tag{13}$$

$$\sigma_{T_2^2} = 2\sigma_{T_2}T_2 \tag{14}$$

$$\sigma_{T_1^2} = 2\sigma_{T_1}T_1. \tag{15}$$

А σ_{T_0} найдем так:

$$\sigma_{T_0^2} = 2\sigma_{T_0}T_0 \Rightarrow \sigma_{T_0} = \frac{\sigma_{T_0^2}}{2T_0}. \tag{16}$$

Теоретические выкладки взяты из [1] - с. 252-256.

2 Схема экспериментальной установки

Схема устройства оборотного маятника изображена на рис. 1. Расстояние L между опорными призмами $П_1$ и $П_2$ не меняется. Расстояния a_1 и a_2 можно менять, перемещая грузы $Г_1$, $Г_2$ и $Г_3$. Для определения числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя, фотоэлемента и пересчетного устройства. Легкий стержень, укрепленный на торце маятника, пересекает световой луч дважды за период. Возникающие в фотоэлементе импульсы поступают на пересчетный прибор. Если n_1 и n_2 - начальное и конечное значения показаний прибора за время наблюдения t, то измеренное число периодов, очевидно, равно $N = \dfrac{n_2 - n_1}{2}$, а период колебаний равен $T = \dfrac{t}{N}$. Время t измеряется секундомером, установленным на пересчетном приборе. Для определения расстояний a_1 и a_2 маятник снимают с консоли и располагают горизонтально на специальной подставке, имеющей острую грань. Перемещая маятник, нетрудно найти положение центра масс. Расстояния от него до опорных призм и есть искомые a_1 и a_2.

Описание установки взято из [1] - с. 257.

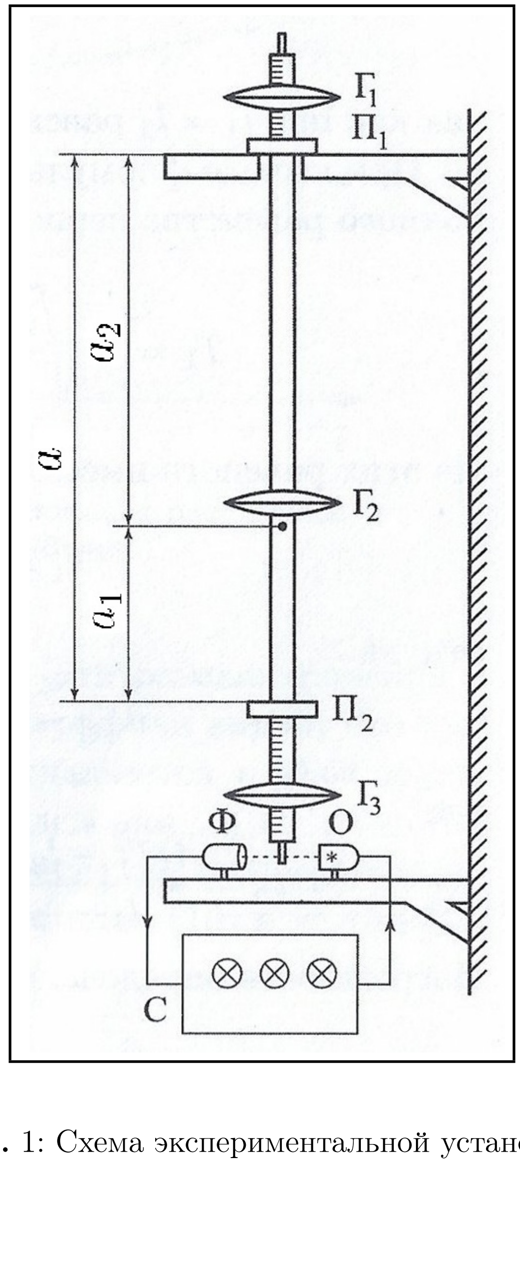

Рис. 1: Схема экспериментальной установки

3 Обработка результатов

Проведя эксперимент, занесем полученные данные в таблицу:

Таблица 1:

t_1, с	t_2, с	$L, 10^{-2}$ м	$a_2, 10^{-2}$ м
302.7 ± 0.4	300.6 ± 0.4	56.65 ± 0.01	20.9 ± 0.1

Тогда ($N = 200$):

$$T_1 = \frac{t_1}{N} = (1.514 \pm 0.002)\,\text{с}$$

$$T_2 = \frac{t_2}{N} = (1.503 \pm 0.002)\,\text{с}.$$

Получим T_0 по формуле (7):

$$T_0 = 1.528\,\text{с}.$$

Используя формулы (10)-(15), определим значения:

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_2^2)}\right| = 1.41$$

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(L)}\right| = 0.31\frac{\text{с}^2}{\text{м}}$$

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(a_2)}\right| = 0.85\,\frac{\text{с}^2}{\text{м}}$$

$$\left|\frac{\partial(T_0^2)}{\partial(T_1^2)}\right| = 2.41$$

$$\sigma_{T_1^2} = \sigma_{T_2^2} = 0.006\,\text{с}^2,$$

откуда

$$\sigma_{T_0^2} = 0.017\,\text{с}^2 \Rightarrow \sigma_{T_0} = 0.006\,\text{с}. \quad (17)$$

В итоге:

$$\boxed{T_0 = (1.528 \pm 0.006)\,\text{с}}. \quad (18)$$

Интересно посмотреть на вклад слагаемых в погрешность $\sigma^2_{T_0^2}$ в формуле (9):

Таблица 2:

Частная производная T_0^2 по	Вклад в погрешность, %
T_2^2	25.0821
L	0.0003
a_2	0.2546
T_1^2	74.6630

Таким образом, видим, что слагаемыми, связанными с частными производными по L и по a_2, можно пренебречь. Они не повлияют на конечное значение погрешности.

По формуле (6) найдем значение ускорения свободного падения g:

$$g = 9.56\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

а погрешность получим по формуле (8):

$$\sigma_g = 0.07\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

В итоге, получим:

$$\boxed{g = (9.56 \pm 0.07)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}. \tag{19}$$

Сравним с табличным значением. Ускорение свободного падения на широте Москвы равно $g_0 = 9.82\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Тогда полученное значение отличается от табличного на:

$$\delta = \frac{|9.82 - 9.56|}{9.82} \cdot 100\% = 2.65\%$$

.

4 Заключение

В данной работе мы измеряли ускорение свободного падения g с помощью оборотного маятника. Были получены формулы: (6) и (7) для расчета значения g, (8) и (9) - для погрешности измерений. Обработав экспериментальные данные по этим формулам, получили значение ускорения свободного падения $g = (9.56 \pm 0.07)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, которое отличается от табличного значения на 2.65%.

Список литературы

[1] Гладун А.Д. Лабораторный практикум по общей физике: Учебное пособие. В трех томах. Т. 1. Механика. Москва: МФТИ, 2004.