РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ 2 июня 2014 г

1Б (Булыгин В.С.) $C(V) = \nu(C_V + RT/(V\frac{dT}{dV}))$ (см. Методические материалы 2 сем.). Так как $T(V) = T_1 + \dfrac{T_2 - T_1}{V_2 - V_1}(V - V_1)$ (лин. зависимость), то с учётом соотношения Майера и при $C_P = \dfrac{5}{2}R$:
$C(V) = \nu\left(C_P - \dfrac{R}{V}\,\dfrac{T_1V_2 - V_1T_2}{T_2 - T_1}\right) = \nu\, C_P\left(1 - \dfrac{2}{5}\,\dfrac{T_1V_2 - V_1T_2}{T_2 - T_1}\,\dfrac{1}{V}\right)$, откуда $\partial(V) \equiv \dfrac{C(V)}{\nu C_P} = 1 - \dfrac{6}{5}\dfrac{1}{V}$.
Из $\partial(V_2) = \dfrac{2}{5}, \partial(V_1) = -\dfrac{1}{5}$ следует ответ: $\boxed{\dfrac{C(V_2)}{C(V_1)} = \dfrac{\partial(V_2)}{\partial(V_1)} = -2}$

2Б (Попов П.В.) Конечное распределение плотности в цилиндре $\rho(x) = \rho_0\exp(\alpha x/l)$, где $\alpha = \mu a l/(RT) \approx 10^{-2}$. В системе сосуда изменение внутренней энергии газа равно работе сил инерции: $\Delta E = -Ma(x_c - l/2)$, где M – масса газа, x_c – положение центра масс газа после установления равновесия:

$$x_c = \frac{\int\limits_0^l x\rho(x)dx}{\int\limits_0^l \rho(x)dx} = l\,\frac{1-(1+\alpha)e^{-\alpha}}{\alpha(1-e^{-\alpha})} \approx \frac{1}{2}\,l - \frac{1}{12}\,\alpha l$$

Исходная температура <u>меньше</u> конечной на $\Delta T = \dfrac{\Delta E}{\nu\, C_V} = \dfrac{\mu a}{\frac{5}{2}R}(l/2 - x_c) \approx \dfrac{1}{30}\alpha^2 T \approx \boxed{10^{-3}K}$

3Б (Прут Э.В.) Характеристические температуры $\theta_1 = \dfrac{h\nu_1}{k} \approx 192K;\ \theta_2 \approx 240K; \theta_3 \approx 3360K$. Колебательная теплоёмкость (см. задание 8.52 из сборника)

$$C_V^{\text{колеб}} = R\frac{\left(\frac{\theta}{T}\right)^2\exp\left(\frac{\theta}{T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\theta}{T}\right)-1\right)^2} \underset{T<\theta}{\approx} R\left(\frac{\theta}{T}\right)^2\exp\left(-\frac{\theta}{T}\right)$$

При $T = T_1$:	При $T = T_2$:
$T_1 > \theta_1 \quad \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_1) \approx R$	$T_2 \gg \theta_1 \quad \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_1) \approx R$
$T_1 > \theta_2 \quad \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_2) \approx R$	$T_2 \gg \theta_2 \quad \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_2) \approx R$
$T_1 \ll \theta_3 \quad \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_3) \approx 0$	$T_2 < \theta_3 \quad \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_3) \approx \frac{(2.24)^2e^{2.24}}{(e^{2.24}-1)^2} \approx 0.7R$

Итого: $(C_V)_1 = 3R + 2R = 5R$, $(C_P)_1 = R + (C_V)_1 = 6R, \gamma_1 \approx 1.20, (C_V)_2 = 3R + R + R + 0.7R = 5.7R, (C_P)_2 = 6.7R, \gamma_2 \approx 1.175$, $\boxed{\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} = \dfrac{1.175}{1.20} \approx 0.98}$

4Б (Кириченко Н.А.) Смещение частицы между столкновениями с другими частицами $l \sim \frac{1}{n\sigma}$, $\sigma \propto R^2$. При броуновском движении частица смещается на расстояние l за время $t \sim l^2/D$, $D = kTB, B = \dfrac{1}{6\pi\eta R}$. Тогда $t \sim \dfrac{1}{(n\sigma)^2}\,\dfrac{6\pi\eta R}{kT} \propto \dfrac{1}{n^2R^3}$. Одна частица испытывает в единицу времени число столкновений $\nu \sim 1/t \propto n^2R^3$, а n частиц – $v = \nu n \propto n^3R^3$. С учётом сохранения массы: $n_0R_0^3 = n_1R_1^3$, получим $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{n_1^3R_1^3}{n_0^3R_0^3} = \dfrac{n_1^2}{n_0^2} \Rightarrow \boxed{n_1 = n_0\sqrt{\dfrac{\nu_1}{\nu_0}} = \dfrac{n_0}{2}}$.

5Б (Коротков П.Ф.) Закон сохранения массы $\Pi_0\rho_0 v_0 = \Pi\rho v$. Уравнение адиабаты $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{\dfrac{1}{\gamma-1}}$.

Преобразуем уравнение Бернулли $\frac{1}{2}\mu v^2 + C_P T = \text{const}$ с учётом, что $v = M\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$; $C_P = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$; получим $T\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right) = \text{const}$. Тогда

$$\frac{\Pi}{\Pi_0} = \frac{\rho_0 v_0}{\rho v} = \frac{M_0}{M}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{M_0}{M}\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_0^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

При $\gamma = 5/3, M = 1/2, M_0 = 1$ получим $\boxed{\frac{\Pi}{\Pi_0} = \frac{64}{49} \approx 1.31}$.