Статистики Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака

Фермионы – частицы с *полуцелым* спином (протоны, нейтроны, электроны)

Бозоны - частицы с *целым* спином (фотоны).

В этих статистиках частицы принципиально неразличимы и тождественны. В статистике Ферми-Дирака в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы (принцип запрета Паули).

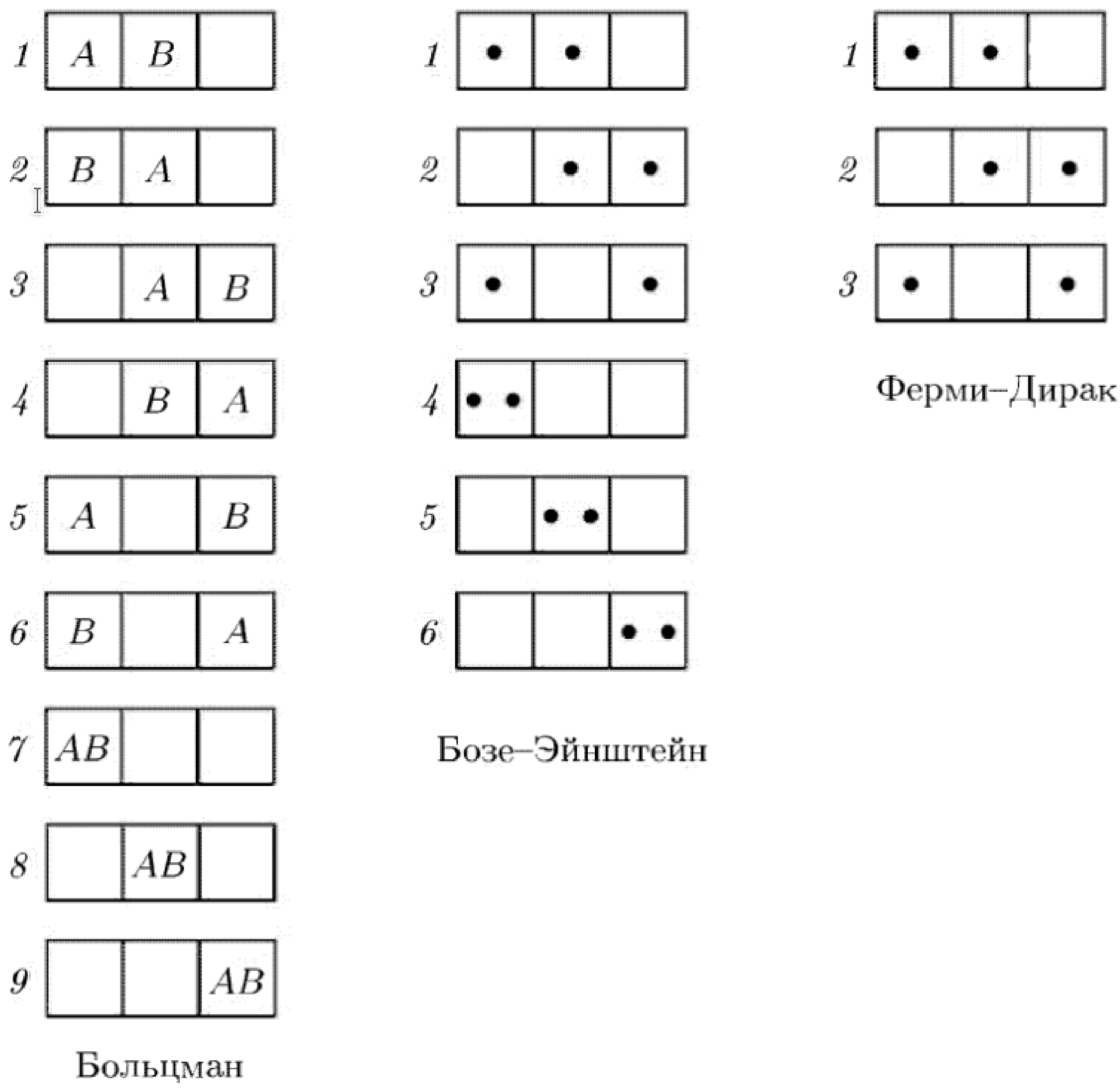

Рис. 1. Примеры распределений.

На рис. 1 видно, что между тремя статистиками имеются различия.

Решим задачу о распределении N тождественных частиц по Z квантовых состояний. Для *фермионов* пусть будет N занятых и $Z - N$ незанятых состояний ($Z \geqslant N$, иначе нерешаемо). Произведем всевозможные перестановки между ними, учитывая, что перестановки между занятыми и между незанятыми состояниями не приводят к новому макросостоянию. В итоге число перестановок, удовлетворяющих заданным условиям, будет равно $\dfrac{Z!}{N!(Z-N)!}$

Для *бозонов* у нас имеется Z «клеток», $Z-1$ «перегородок», N частиц. Всего $N+Z-1$ элементов. Произведем перестановки между ними, учитывая, что перестановки между «перегородками» и между частицами не приводит к новому макросостоянию. В итоге число перестановок, соответствующих заданным условиям, будет равно $\dfrac{(Z+N-1)!}{N!(Z-1)!}$. Разделим все квантовые состояния на энергетические слои. Каждый слой состоит из квантовых состояний с близкими значениями энергии частиц. Для i-ого слоя:

$$G_i = \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i-N_i)!} \qquad G_i = \frac{(Z_i+N_i-1)!}{N_i!(Z_i-1)!}$$

Перемножая все G_i, найдем статистический вес макросостояния: $G = \prod\limits_i G_i$.

Найдем наиболее вероятные распределения. При больших N_i и Z_i:

$$S_{\text{ФД}} = -k\sum_i \left[\, N_i \ln N_i + (Z_i - N_i)\ln(Z_i - N_i)\right] + C$$

$$S_{\text{БЭ}} = -k\sum_i \left[(Z_i + N_i - 1)\ln(Z_i + N_i - 1) - N_i \ln N_i\right] + C$$

Из условия максимума энтропии и $\sum\limits_i N_i = N = \text{const}\,,\ \sum\limits_i \mathcal{E}_i N_i = E = \text{const}$:

$$\sum_i \ln\frac{N_i}{Z_i - N_i}\, dN_i = 0 \qquad \text{(для фермионов)}$$

$$\sum_i \ln\frac{N_i}{Z_i + N_i - 1}\, dN_i = 0 \qquad \text{(для бозонов)}$$

$$\sum_i dN_i = 0 \qquad \sum_i \mathcal{E}_i dN_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \left(\ln\frac{N_i}{Z_i - N_i} + \beta + \alpha\mathcal{E}_i\right) dN_i = 0 \qquad \text{(для фермионов).}$$

$$\sum_i \left(\ln\frac{N_i}{Z_i + N_i - 1} + \beta + \alpha\mathcal{E}_i\right) dN_i = 0 \qquad \text{(для бозонов).}$$

Множители при dN_i должны обратиться в нуль:

$$\frac{\overline{N_i}}{Z_i - \overline{N_i}} = Ae^{-\alpha\mathcal{E}_i} \quad \text{(для фермионов).}$$
$$\frac{\overline{N_i}}{Z_i + \overline{N_i}} = Ae^{-\alpha\mathcal{E}_i} \quad \text{(дя бозонов, } Z_i, N_i \gg 1)$$
$$\overline{n_i} = \frac{\overline{N_i}}{Z_i}, \qquad \alpha = \frac{1}{kT}$$

$$\boxed{\overline{n_i} = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\mathcal{E}_i - \mu}{kT}\right) + 1} \quad \text{(для фермионов)}}$$

$$\boxed{\overline{n_i} = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\mathcal{E}_i - \mu}{kT}\right) - 1} \quad \text{(для бозонов)}}$$

Здесь μ связано с A соотношением: $A = \exp\left(\dfrac{\mu}{kT}\right)$. Это и есть распределение Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна. При $\overline{n_i} \ll 1$ оно переходит в распределение Больцмана:

$n_i \approx \exp\left(\dfrac{\mu - \mathcal{E}_i}{kT}\right) = C\exp\left(\dfrac{-\mathcal{E}_i}{kT}\right)$

Выведем свободную энергию Ψ при постоянных T, V в зависимости от N. При изменении N $\mathcal{E}_i$ и Z_i не меняются только числа заполнения N_i. Поэтому для приращения энтропии S_Φ:

$dS_\Phi = -K\sum\limits_i \ln\dfrac{N_i}{Z_i - N_i} dN_i$

В состоянии равновесия: $\ln\dfrac{N_i}{Z_i - N_i} = \dfrac{\mu - \mathcal{E}_i}{kT} \Rightarrow dS_\Phi = -K\sum\limits_i \dfrac{\mu - \mathcal{E}_i}{kT} d\overline{N_i}$. При этом $\sum\limits_i \mathcal{E}_i d\overline{N_i} = dU$, $\sum\limits_i dN_i = dN$. Тогда $TdS_\Phi = -\mu dN + dU$, $d\psi = \mu dN$, $\mu = \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial N}\right)_{T,V}$, т.е. μ – химический потенциал. Он определяется из условий нормировки:

$$\sum_i Z_i\overline{n_i} = \sum_i \frac{Z_i}{\exp\left(\dfrac{\mathcal{E}_i - \mu}{kT}\right) \pm 1}$$

но с точностью до произвольной постоянной, как и $\mathcal{E}_i$. Если энергию самого нижнего уровня принять за 0, то μ определится однозначно.

$\overline{n_i} \geqslant 0 \Rightarrow \mu \ll \mathcal{E}_i$ для бозе-газа, $\forall i$.

$i = 1, \mu \leqslant 0$ (для Больцмана $\mu < 0$ из $n_i \ll 1$).

При $\mu > 0$ и $T \to 0$ для Ферми-Дирака имеем:

$$\overline{n_i} \to \begin{cases} 1,\ \mathcal{E}_i < \mu \\ \dfrac{1}{2},\ \mathcal{E}_i = \mu \\ 0,\ \mathcal{E}_i > \mu \end{cases}$$

При $T = 0$ частицы заполняют все состояния с энергией $\mathcal{E}_i < \mu$, состояния с более высокими энергиями не заняты - это называется состоянием полного вырождения.

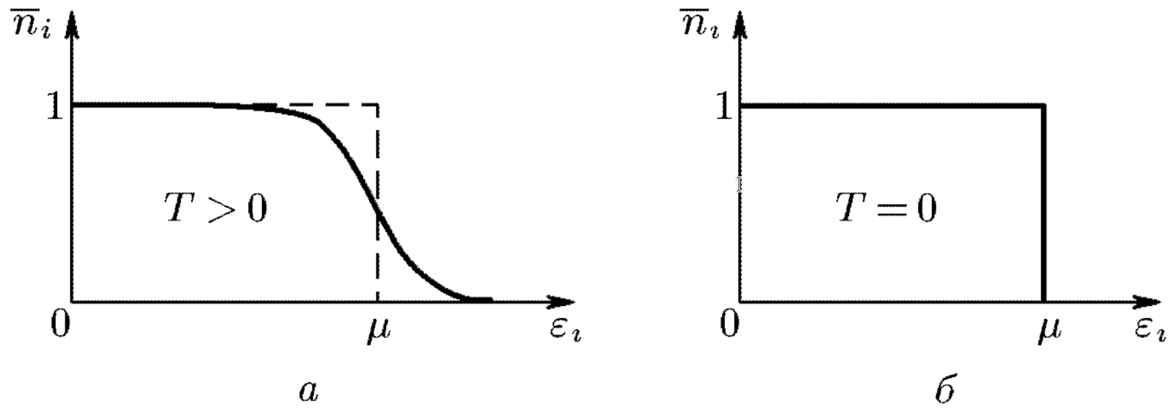

Рис. 2. Зависимость $\overline{n_i}$ от $\mathcal{E}_i$ при $\mu > 0$.

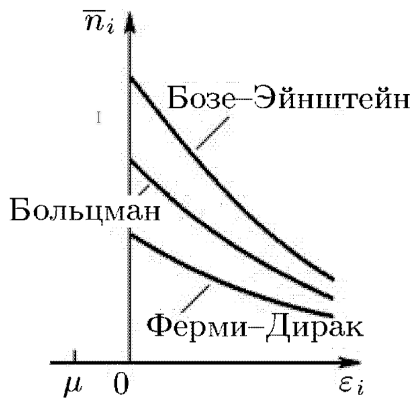

Рис. 3. Сравнения распределений.

При $T \to 0$ для Бозе-Эйнштейна наблюдается явление Бозе-Эйнштейновской конденсации. При $T = 0$ $\mu = 0$, все частицы накапливаются на нижнем квантовом уровне $\mathcal{E}_i = 0$

Применение

Равновесное излучение как фотонный газ:

$$\overline{n}(\mathcal{E}) = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\mathcal{E}-\mu}{kT}\right) - 1}$$

Число частиц переменно (фотоны могут излучаться и поглощаться в любом количестве).

Свободная энергия – функция от N, T, V. Если при некоторых T, V в газе содержится N фотонов, то из условия минимума свободной энергии при равновесии:

$\left(\dfrac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} = 0 \Rightarrow$ хим. потенциал $\mu = 0$

$\Rightarrow \overline{n}(\mathcal{E}) = \dfrac{1}{\exp\left(\dfrac{\mathcal{E}}{kT}\right) - 1} = \dfrac{1}{\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right) - 1}$. Это распределние Планка.

$g(\nu)d\nu = V \cdot \dfrac{4\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$ - стат. вес состояний в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$.

$$dN(\nu) = g(\nu)n(\nu)d\nu = \frac{V \cdot 8\pi\nu^2 d\nu}{c^3\left(\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT}\right)\right) - 1}$$

$$U = \int\limits_0^\infty dE(\nu) = V \cdot \sigma T^4, \text{ где } \sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3}$$

$$\frac{U}{V} = \sigma T^4 - \text{закон Стефана-Больцмана}$$