РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ 2 июня 2014 г

1A (Булыгин В.С.) $C(P) = \nu (C_P - RT/(P\frac{dT}{dP}))$ (см. Методические материалы 2 сем.). Так как $T(P) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} (P - P_1)$ (лин. зависимость), то с учётом соотношения Майера и при $C_V = \frac{3}{2}R$: $C(P) = \nu \left(C_V - \frac{R}{P} \, \frac{T_1 P_2 - P_1 T_2}{T_2 - T_1} \right) = \nu \, C_V \left(1 - \frac{2}{3} \, \frac{T_1 P_2 - P_1 T_2}{T_2 - T_1} \, \frac{1}{P} \right), \text{ откуда } \partial(V) \equiv \frac{C(P)}{\nu C_V} = 1 - \frac{4}{3} \, \frac{1}{P}.$ Из $\partial(P_2) = \frac{1}{3}$, $\partial(P_1) = -\frac{1}{3}$ следует ответ: $\left| \frac{C(P_2)}{C(P_1)} = \frac{\partial(P_2)}{\partial(P_1)} = -1 \right|$

2A (Попов П.В.) Распределение плотности во вращающемся цилиндре $\rho(r) = \rho_0 \exp(\alpha r^2/a^2)$, где $\alpha = \mu \omega^2 a^2/(2RT_0) \approx 10^{-2}$. Энергия, запасенная во вращении (в расчёте на 1 моль):

$$E = \frac{\int_{0}^{a} \frac{1}{2} \omega^{2} r^{2} \cdot \rho(r) \cdot 2\pi r dr}{\int_{0}^{a} \frac{\rho(r)}{\mu} \cdot 2\pi r dr} = RT_{0} \frac{1 - (1 + \alpha)e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \approx \frac{1}{2} \alpha RT_{0}$$

(то же самое получим, сразу пользуясь приближением $\rho(r) \approx \rho_0$) :

$$E \approx \frac{\int_{0}^{a} \frac{1}{2} \mu \omega^{2} r^{2} \cdot \rho_{0} \cdot 2\pi r dr}{\int_{0}^{a} \rho_{0} \cdot 2\pi r dr} = \frac{1}{2} \alpha R T_{0}$$

Температура вырастет на $\Delta T = \frac{E}{C_V} = \frac{1}{2} \alpha \frac{RT_0}{C_V} = \frac{1}{5} \alpha T_0 = \frac{\mu \omega^2 a^2}{10R} \approx 270 \cdot \frac{10^{-2}}{5} \approx \boxed{0.54K}$

3A (Прут Э.В.) Характеристические температуры $\theta_1 = \frac{h\nu_1}{k} \approx 480K; \; \theta_2 \approx 4320K; \theta_3 \approx 4800K.$ Колебательная теплоёмкость (см. задание 8.52 из сборника

$$C_V^{\text{колеб}} = R \frac{\left(\frac{\theta}{T}\right)^2 \exp\left(\frac{\theta}{T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\theta}{T}\right) - 1\right)^2} \underset{T < \theta}{\approx} R \left(\frac{\theta}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{\theta}{T}\right)$$

При $T = T_1$: При $T = T_1$: При $T = T_2$: $T_1 < \theta_1 \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_1) \approx (4.8)^2 e^{-4.8} R \approx 0.2 R$ $T_2 > \theta_1 \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_1) \approx R$ $T_1 \ll \theta_2 \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_2) \approx 0$ $T_2 < \theta_2 \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_2) \approx (4.3)^2 e^{-4.3} R \approx 0.25 R$ $T_1 \ll \theta_3 \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_3) \approx 0$ $T_2 < \theta_3 \Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_3) \approx (4.8)^2 e^{-4.8} R \approx 0.2 R$ Итого: $(C_V)_1 = 3R + 0.2R = 3.2R$, $(C_P)_1 = R + (C_V)_1 = 4.2R$, $\gamma_1 \approx 1.31$, $(C_V)_2 = 3R + R + 0.25R + 0.2R = 4.45 R$, $(C_P)_2 = 5.45 R$, $\gamma_2 \approx 1.23$, $\gamma_1 = \frac{1.23}{1.31} \approx 0.94$

4A (Кириченко Н.А.) Смещение частицы между столкновениями с другими частицами $l \sim \frac{1}{n\sigma}$, $\sigma \propto R^2$. При броуновском движении частица смещается на расстояние l за время $t \sim l^2/D$, D = kTB, $B = \frac{1}{6\pi\eta R}$. Тогда $t \sim \frac{1}{(n\sigma)^2} \frac{6\pi\eta R}{kT} \propto \frac{1}{n^2R^3}$. Одна частица испытывает в единицу времени

число столкновений $\nu\sim 1/t\propto n^2R^3$, а n частиц – $v=\nu n\propto n^3R^3$. С учётом сохранения массы: $n_0R_0^3=n_1R_1^3$, получим $\boxed{v_1\over v_0}=\frac{n_1^3R_1^3}{n_0^3R_0^3}=\frac{n_1^2}{n_0^2}=4$.

$$n_0R_0^3=n_1R_1^3$$
, получим $\left[rac{v_1}{v_0}=rac{n_1^3R_1^3}{n_0^3R_0^3}=rac{n_1^2}{n_0^2}=4
ight]$.

5А (Коротков П.Ф.) Закон сохранения массы $\Pi_0 \rho_0 v_0 = \Pi \rho v$. Уравнение адиабаты $\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$. Преобразуем уравнение Бернулли $\frac{1}{2}\rho v^2 + C_P T = {\rm const}\ {\rm c}\ {\rm y}$ чётом, что $v = M\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}; C_P = \frac{\gamma}{\gamma-1}R;$ получим $T\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right) = {\rm const}$. Тогда

$$\frac{\Pi}{\Pi_0} = \frac{\rho_0 v_0}{\rho v} = \frac{M_0}{M} \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{M_0}{M} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_0^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

При
$$\gamma=7/5, M=2, M_0=1$$
 получим $\boxed{\frac{\Pi}{\Pi_0}=\frac{27}{16}\approx 1.68}$.