РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ 2 июня 2014 г

1А (Булыгин В.С.) $C(P)=\nu(C_P-RT/(P\frac{dT}{dP}))$ (см. Методические материалы 2 сем.). Так как $T(P)=T_1+\dfrac{T_2-T_1}{P_2-P_1}(P-P_1)$ (лин. зависимость), то с учётом соотношения Майера и при $C_V=\dfrac{3}{2}R$: $C(P)=\nu\left(C_V-\dfrac{R}{P}\dfrac{T_1P_2-P_1T_2}{T_2-T_1}\right)=\nu\, C_V\left(1-\dfrac{2}{3}\dfrac{T_1P_2-P_1T_2}{T_2-T_1}\dfrac{1}{P}\right)$, откуда $\partial(V)\equiv\dfrac{C(P)}{\nu C_V}=1-\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{P}$.
Из $\partial(P_2)=\dfrac{1}{3},\partial(P_1)=-\dfrac{1}{3}$ следует ответ: $\boxed{\dfrac{C(P_2)}{C(P_1)}=\dfrac{\partial(P_2)}{\partial(P_1)}=-1}$

2А (Попов П.В.) Распределение плотности во вращающемся цилиндре $\rho(r)=\rho_0\exp(\alpha r^2/a^2)$, где $\alpha=\mu\omega^2a^2/(2RT_0)\approx10^{-2}$. Энергия, запасенная во вращении (в расчёте на 1 моль):

$$E=\frac{\int\limits_0^a\frac{1}{2}\omega^2r^2\cdot\rho(r)\cdot2\pi rdr}{\int\limits_0^a\frac{\rho(r)}{\mu}\cdot2\pi rdr}=RT_0\,\frac{1-(1+\alpha)e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\approx\frac{1}{2}\alpha RT_0$$

(то же самое получим, сразу пользуясь приближением $\rho(r)\approx\rho_0$) :

$$E\approx\frac{\int\limits_0^a\frac{1}{2}\mu\omega^2r^2\cdot\rho_0\cdot2\pi rdr}{\int\limits_0^a\rho_0\cdot2\pi rdr}=\frac{1}{2}\alpha RT_0$$

Температура вырастет на $\Delta T=\dfrac{E}{C_V}=\dfrac{1}{2}\alpha\dfrac{RT_0}{C_V}=\dfrac{1}{5}\alpha T_0=\dfrac{\mu\omega^2a^2}{10R}\approx270\cdot\dfrac{10^{-2}}{5}\approx\boxed{0{,}54K}$

3А (Прут Э.В.) Характеристические температуры $\theta_1=\dfrac{h\nu_1}{k}\approx480K;\ \theta_2\approx4320K;\theta_3\approx4800K$. Колебательная теплоёмкость (см. задание 8.52 из сборника)

$$C_V^{\text{колеб}}=R\frac{\left(\frac{\theta}{T}\right)^2\exp\left(\frac{\theta}{T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\theta}{T}\right)-1\right)^2}\underset{T<\theta}{\approx}R\left(\frac{\theta}{T}\right)^2\exp\left(-\frac{\theta}{T}\right)$$

При $T=T_1$:
- $T_1<\theta_1 \quad\Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_1)\approx(4.8)^2e^{-4.8}R\approx0.2R$
- $T_1\ll\theta_2 \quad\Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_2)\approx0$
- $T_1\ll\theta_3 \quad\Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_3)\approx0$

При $T=T_2$:
- $T_2>\theta_1 \quad\Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_1)\approx R$
- $T_2<\theta_2 \quad\Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_2)\approx(4.3)^2e^{-4.3}R\approx0.25R$
- $T_2<\theta_3 \quad\Rightarrow C_V^{\text{колеб}}(\theta_3)\approx(4.8)^2e^{-4.8}R\approx0.2R$

Итого: $(C_V)_1=3R+0.2R=3.2R$, $(C_P)_1=R+(C_V)_1=4.2R,\gamma_1\approx1.31,(C_V)_2=3R+R+0.25R+0.2R=4.45R,(C_P)_2=5.45R,\gamma_2\approx1.23,$ $\boxed{\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}=\dfrac{1.23}{1.31}\approx0.94}$

4А (Кириченко Н.А.) Смещение частицы между столкновениями с другими частицами $l\sim\frac{1}{n\sigma}$, $\sigma\propto R^2$. При броуновском движении частица смещается на расстояние l за время $t\sim l^2/D$, $D=kTB,B=\dfrac{1}{6\pi\eta R}$. Тогда $t\sim\dfrac{1}{(n\sigma)^2}\dfrac{6\pi\eta R}{kT}\propto\dfrac{1}{n^2R^3}$. Одна частица испытывает в единицу времени число столкновений $\nu\sim1/t\propto n^2R^3$, а n частиц – $v=\nu n\propto n^3R^3$. С учётом сохранения массы: $n_0R_0^3=n_1R_1^3$, получим $\boxed{\dfrac{v_1}{v_0}=\dfrac{n_1^3R_1^3}{n_0^3R_0^3}=\dfrac{n_1^2}{n_0^2}=4}$.

5A (Коротков П.Ф.) Закон сохранения массы $\Pi_0\rho_0 v_0 = \Pi\rho v$. Уравнение адиабаты $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{\dfrac{1}{\gamma-1}}$.

Преобразуем уравнение Бернулли $\frac{1}{2}\rho v^2 + C_P T = \mathrm{const}$ с учётом, что $v = M\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$; $C_P = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$; получим $T\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right) = \mathrm{const}$. Тогда

$$\frac{\Pi}{\Pi_0} = \frac{\rho_0 v_0}{\rho v} = \frac{M_0}{M}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{M_0}{M}\left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_0^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

При $\gamma = 7/5, M = 2, M_0 = 1$ получим $\boxed{\dfrac{\Pi}{\Pi_0} = \dfrac{27}{16} \approx 1.68}$.