Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 5

5.9. Парашютист массы m прыгает с самолёта, летящего горизонтально на высоте H со скоростью v_0. По какой траектории движется парашютист при затяжном прыжке (до момента раскрытия парашюта), если сила сопротивления воздуха $\vec{F} = -\beta\vec{v}$, где $\vec{v}$ — скорость парашютиста, а изменение ускорения свободного падения с высотой не учитывается? Из полученного уравнения предельным переходом $\beta \to 0$ найти уравнение траектории в отсутствие сил сопротивления.

► Введём координатную систему: ось x направим по $\vec{v}_0$ (горизонтально), ось y — вертикально вверх, точке прыжка сопоставим координаты $(0; H)$. Запишем уравнения движения парашютиста, рассматривая его как материальную точку (II закон Ньютона):

$$m\ddot{\vec{r}} = -\beta\dot{\vec{r}} + m\vec{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = 0; \\ \ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} = -g. \end{cases} \tag{1}$$

Интегрируя уравнения (1) в координатах, имеем

$$\begin{cases} x(t) = C_{x,1}\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) + C_{x,2}; \\ y(t) = C_{y,1}\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) + C_{y,2} - \frac{mg}{\beta}t. \end{cases} \tag{2}$$

Начальные условия задачи Коши:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0; \\ y(0) = H, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует параметрический (по времени) вид траектории:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{mv_0}{\beta}\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right)\right]; \\ y(t) = H + \frac{m^2 g}{\beta^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right)\right] - \frac{mg}{\beta}t. \end{cases} \tag{4}$$

Выразим $\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right)\right]$ и t через $x(t)$ и подставим в $y(t)$:

$$1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) = \frac{\beta x}{mv_0}; \tag{5}$$

$$t = -\frac{m}{\beta}\ln\left(1 - \frac{\beta x}{mv_0}\right); \tag{6}$$

$$y(x) = H + \frac{mg}{\beta v_0}x + \frac{m^2 g}{\beta^2}\ln\left(1 - \frac{\beta x}{mv_0}\right). \tag{7}$$

Устремив $\beta \to 0$, разложим последнее слагаемое выражения зависимости $y(x)$ в ряд Маклорена по β до $o(\beta^3)$:

$$y(x)\big|_{\beta\to 0} = H + \cancel{\frac{mg}{\beta v_0}x - \frac{mg}{\beta v_0}x} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 + o(\beta^3). \tag{8}$$

Ответ: $y(x) = H + \dfrac{mg}{\beta v_0}x + \dfrac{m^2 g}{\beta^2}\ln\left(1 - \dfrac{\beta x}{mv_0}\right) \overset{\beta\to 0}{\simeq} H - \dfrac{g}{2v_0^2}x^2.$ ◄

6.18. Однородный диск массы m может катиться без скольжения по горизонтальной прямой. К центру диска прикладывается горизонтальная сила, в результате чего центр диска начинает колебаться по синусоидальному закону с амплитудой a и частотой ω. Найти зависимость силы трения от времени.

► К диску приложены три силы: к центру диска — сила тяжести $m\vec{g}$, в точке касания диска и прямой — сила нормальной реакции и сила трения $\vec{f}$. Направим ось x параллельно прямой. Поскольку скорость точки касания направлена вдоль прямой, $\vec{f}(t) = f(t)\hat{x}$.

Условие движения диска без проскальзывания приводит к соотношению

$$\ddot{x} = R\ddot{\varphi}. \tag{9}$$

Поскольку $x(t) = a\sin\omega t$ (с точностью до выбора начального момента времени), уравнение вращательного движения диска запишется в виде

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi}(t) = f(t)R, \tag{10}$$

откуда

$$f(t) = -\frac{1}{2}ma\omega^2\sin\omega t. \tag{11}$$

Ответ: зависимость силы трения от времени имеет синусоидальный вид с частотой ω и амплитудой $f_{\max} = ma\omega^2/2$. ◄

6.30. В упражнении с обручем гимнастка сообщает центру однородного кругового обруча радиуса r горизонтальную скорость v_0 и закручивает его с угловой скоростью ω_0. Коэффициент трения между обручем и полом равен f (во время движения обруч не подпрыгивает). Как должны быть связаны величины v_0 и ω_0 для того, чтобы обруч вернулся в исходное положения за время t, определяемое музыкальным сопровождением?

► Для простоты восприятия решения условимся считать положительным направление угловой скорости *против часовой стрелки,* вдоль прямой — *вправо.*

В режиме проскальзывания зависимости скорости и ускорения от времени имеют вид

$$v = v_0 - fgt; \tag{12}$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{fgt}{r}. \tag{13}$$

Проскальзывание прекращается, когда $v = -\omega r$, т. е. за время

$$t_0 = \frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg}. \tag{14}$$

В случае, если $t \leqslant t_0$ (проскальзывание не прекращается до возврата в начальную точку), достаточно потребовать

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2}fgt^2 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \frac{1}{2}fgt; \tag{15}$$

$$\frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg} \geqslant t = \frac{2v_0}{fg} \quad \Longrightarrow \quad 3v_0 \leqslant \omega_0 r. \tag{16}$$

В противном случае в момент окончания проскальзывания скорость обруча составит

$$v_1 = \frac{v_0 - \omega_0 r}{2} \leqslant 0, \tag{17}$$

откуда, кстати, следует ограничение $v_0 \leqslant \omega_0 r$, а оставшийся до возврата путь

$$S = v_0 t_0 - \frac{1}{2} f g t_0^2 = \frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg} \left(v_0 - \frac{v_0 + \omega_0 r}{4} \right). \tag{18}$$

Тогда полное время движения

$$t = t_0 + \frac{S}{|v_1|} = \frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg} + \frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg} \left(v_0 - \frac{v_0 + \omega_0 r}{4} \right) \frac{2}{\omega_0 r - v_0}, \tag{19}$$

что и является искомым уравнением, связывающим v_0 и ω_0 в этом случае.

Ответ: $\begin{cases} v_0 = fgt/2, & \omega_0 r \geqslant 3v_0; \\ \text{ур-ние (19)}, & v_0 \leqslant \omega_0 r \leqslant 3v_0. \end{cases}$ ◀

6.34. Пластина массы m может двигаться в неподвижной плоскости xy. Положение пластины задаётся координатами x, y полюса P и углом φ, который прямая, соединяющая полюс P с центром масс пластины C, образует с осью Ox. Составить уравнения плоско-параллельного движения пластины в переменных x, y, φ, если момент инерции пластины относительно оси, проходящей через полюс P перпендикулярно плоскости пластины, равен J, а $PC = l$.

► По теореме о движении центра масс ($\vec{R}$ — главный вектор сил, приложенных к пластине)

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix} = m\ddot{\vec{r}}_C = m\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x + l\cos\varphi \\ y + l\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi - l\sin\varphi\ddot{\varphi} \\ \ddot{y} - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi + l\cos\varphi\ddot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

По определению углового момента

$$L_z = (J - ml^2)\dot{\varphi} + ml(v_{C,y}\cos\varphi - v_{C,x}\sin\varphi). \tag{21}$$

Оставшееся соотношение нетрудно продифференцировать, при этом $\dot{L}_z = M_z$ — модуль главного вектора момента внешних сил.

Ответ: $\begin{cases} R_x = m\ddot{x} - ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi - ml\ddot{\varphi}\sin\varphi; \\ R_y = m\ddot{y} - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi; \\ M_z = J\ddot{\varphi} + ml(\ddot{y}\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi). \end{cases}$ ◀

7.11. Показать, что потенциальная энергия пружины, состоящей из двух последовательно соединённых частей AB и BD с жёсткостями c_1 и c_2 соответственно, совпадает с потенциальной энергией пружины жёсткости

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \tag{22}$$

Решить аналогичную задачу для параллельно соединённых пружин.

► В силу равенства сил, с которыми части пружины действуют друг на друга, имеем

$$c_1 \Delta x_1 = c_2 \Delta x_2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x_2 \left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right); \tag{23}$$

$$W_{\text{посл}} = \frac{1}{2} c_1 \Delta x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \Delta x_2^2 = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}, \tag{24}$$

что и требовалось показать. ■

Для параллельно соединённых пружин $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$,

$$W_{\text{пар}} = \frac{c_1 + c_2}{2} \Delta x^2.$$ ◄