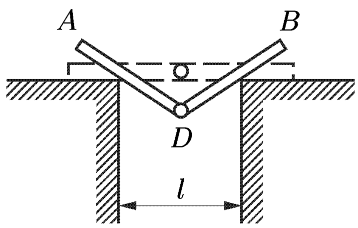
Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 6

7.29. Однородные стержни AD и BD, шарнирно соединённые в точке D, опираются на два гладких угла. Длина каждого стержня равна расстоянию между опорами l. В начальный момент стержни горизонтальны и расположены симметрично относительно опор, а затем (после малого начального толчка) приходят в движение за счёт собственного веса, причём точка D перемещается по вертикали. Определить скорость точки D в момент, когда концы стержней A и B достигнут угловых точек.



► При решении задачи 3.12 было показано, что скорость v_T точки касания стержня вершины угла направлена вдоль стержня и связана со скоростью точки D и углом между стержнями φ соотношением

$$v_T = v_D \cos\frac{\varphi}{2}. \tag{1}$$

Применив закон сохранения энергии и теорему Кёнига, получим для рассматриваемого момента времени ($\varphi \to \varphi_0 = 60°$):

$$0 = -2\cdot g\frac{l\cos\frac{\varphi_0}{2}}{2} + 2\cdot\frac{v_C^2}{2} + 2\cdot\frac{l^2}{12}\frac{\omega^2}{2}. \tag{2}$$

▷ Пусть концы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ однородного стержня, совершающего плоскопараллельное движение, имеют скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Найдём скорость $\vec{v}_C$ его центра масс и угловую скорость ω:

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2} \quad\Longrightarrow\quad \vec{v}_C = \frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}; \tag{3}$$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{\omega}\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \quad\Longrightarrow\quad \vec{\omega}\times(\vec{v}_2-\vec{v}_1) = -\omega^2(\vec{r}_2-\vec{r}_1). \tag{4}$$

Последнее соотношение скаляризируем как

$$\omega = \frac{\left|v_2^\perp - v_1^\perp\right|}{l}, \tag{5}$$

что, в общем-то, и так было понятно. ◁

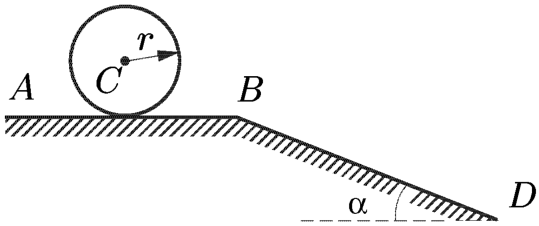
Выполним соответствующие подстановки в (2):

$$\frac{\sqrt{3}}{2}gl = v_C^2 + \frac{1}{3}\omega^2 l^2 = \left(v_T^2 + \frac{1}{4}\omega^2 l^2\right) + \frac{1}{12}\omega^2 l^2 = v_D^2\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right). \tag{6}$$

Ответ: $\quad v_D = \sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{5}}.$ ◄

Примечание. Вообще говоря, стержни оторвутся от углов раньше рассматриваемого момента времени. Доказывать это утверждение здесь и сейчас я, конечно же, не буду.

7.42. Шар радиуса r катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости AB, переходя с этой плоскости на плоскость BD, образующую угол α с горизонтом. Достигнув точки B, шар начинает поворачиваться вокруг неё. В начальный момент времени скорость центра C шара равна v_0. Найти наибольшее значение угла α, при котором шар, переходя на наклонную плоскость, не будет делать скачка. (Отрыв шара происходит в тот момент, когда проекция силы реакции опоры в угловой точки на нормаль к траектории шара обращается в нуль.)



► Рассмотрим момент времени, когда линия BC образует с вертикалью угол β. Угловую скорость шара в этот момент найдём из ЗСЭ:

$$\frac{I_B}{2}\omega^2 = mgR(1-\cos\beta) + \frac{I_B}{2}\left(\frac{v_0}{R}\right)^2, \tag{7}$$

$$\text{где } I_B = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2. \tag{8}$$

Закон движения шара (в проекции на нормаль к траектории центра) запишется в виде

$$mg\cos\beta - R_N = m\omega^2 R = m\frac{v_0^2}{R} + \frac{10mg}{7}(1-\cos\beta). \tag{9}$$

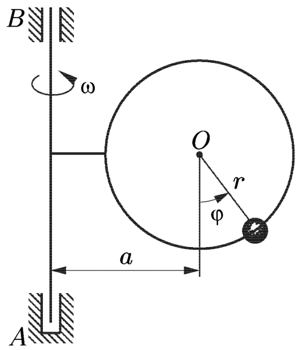
Нетрудно видеть, что силу R_N можно обратить в нуль:

$$\cos\beta_0 = \frac{\frac{7v_0^2}{gR}+10}{17}. \tag{10}$$

Геометрическое ограничение $\beta_0 \geqslant \alpha$ является искомым.

Ответ: $\alpha_{\max} = \arccos\left(\dfrac{7v_0^2}{17gR} + \dfrac{10}{17}\right).$ ◄

9.5. Гладкое кольцо радиуса r, плоскость которого вертикальна, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси AB, находящейся на расстоянии a от центра кольца O. По кольцу может скользить тяжёлая бусинка. Найти угловую скорость, при которой положение относительного равновесия бусинки будет определяться заданным углом φ_0, если $a + r\sin\varphi_0 \neq 0$. Найти относительную скорость бусинки в зависимости от угла φ, если в начальный момент её скорость относительно кольца была равна нулю, а угол $\varphi(0) = \varphi_0$.



► Равнодействующая центробежной и гравитационной сил должна быть направлена по нормали к кольцу, иначе равновесия не получится:

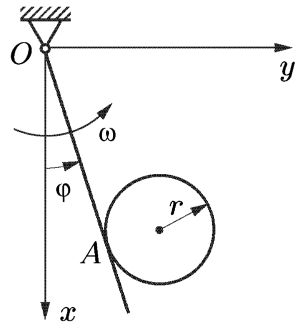
$$\tan\varphi_0 = \omega^2(a + r\sin\varphi_0)/g. \tag{11}$$

Во вращающейся вместе с кольцом системе отсчёта действуют силовые поля гравитации и инерции с потенциалами

$$u_g = -gr\cos\varphi; \quad u_c = -\omega^2(a + r\sin\varphi)^2/2. \tag{12}$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{g\tan\varphi_0}{a + r\sin\varphi_0}}; \quad v = \sqrt{2}\sqrt{u_g(\varphi_0) - u_g(\varphi) + u_c(\varphi_0) - u_c(\varphi)}.$ ◄

9.16. Невесомый стержень, конец O которого шарнирно закреплён, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси Oz, перпендикулярной плоскости рисунка. По стержню катится без проскальзывания диск радиуса r и массы m. Найти силу трения и силу нормальной реакции со стороны стержня на диск в зависимости от угла φ поворота стержня и расстояния l от точки O до точки A касания диска со стержнем. В начальный момент точки O и A совпадали, а диск покоился относительно стержня.



► В неинерциальной системе отсчёта, связанной со стержнем, к центру диска приложены силы инерции: центробежная, направленная от точки O, $m\omega^2\sqrt{l^2+r^2}$, и кориолисова, направленная нормально к стержню.

Запишем для диска теорему о движении центра масс в проекциях на направление стержня и теорему об изменении кинетического момента диска с учётом $\varepsilon = \dot v/r$:

$$m\dot v = m\omega^2 l + mg\cos\varphi - F_{\text{тр}}; \tag{13}$$

$$\frac{mr^2}{2}\frac{\dot v}{r} = F_{\text{тр}} r \quad \Longrightarrow \quad m\dot v = 2F_{\text{тр}}. \tag{14}$$

Подставляя результат из (14) в (13), сразу получаем ответ для $F_{\text{тр}}$.

Аналогично, записывая уравнение для проекций сил на нормальное к стержню направление, имеем

$$N = mg\sin\varphi + 2m\omega v - m\omega^2 r. \tag{15}$$

Нахождение v в таком случае представляет собой важнейшую задачу народного хозяйства. Обозрим поля гравитационных и центробежных сил и используем закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2 = mgl\cos\varphi + m\frac{\omega^2 l^2}{2}. \tag{16}$$

Ответ: $F_{\text{тр}} = \dfrac{m}{3}\left(\omega^2 l + g\cos\varphi\right); \quad N = mg\sin\varphi + \dfrac{4m\omega}{\sqrt{3}}\sqrt{gl\cos\varphi + \dfrac{\omega^2 l^2}{2}} - m\omega^2 r.$ ◄

9.24. Однородный диск может катиться без проскальзывания по горизонтальной направляющей Ox, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oy. Найти закон относительного движения диска.

► Запишем для диска теорему о движении центра масс в проекциях на направляющую и теорему об изменении кинетического момента диска с учётом $\varepsilon = \dot v/r$:

$$m\dot v = m\omega^2 x - F_{\text{тр}}; \tag{17}$$

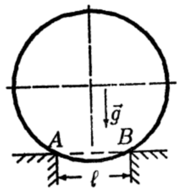
$$\frac{mr^2}{2}\frac{\dot v}{r} = F_{\text{тр}} r. \tag{18}$$

В итоге имеем уравнение на координату x:

$$\ddot x = \frac{2}{3}\omega^2 x. \tag{19}$$

Ответ: $x(t) = A\exp\left(+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\omega t\right) + B\exp\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\omega t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$ ◄

T1. Гладкий однородный цилиндр массы m и радиуса r опирается на расположенные на одном уровне уступы A и B, расстояние между которыми равно l. Определить реакцию опоры A в момент удаления опоры B и вертикальное смещение центра цилиндра в момент его отделения от опоры A.



► До отрыва цилиндр движется по окружности с центром в A. Пусть в некоторый момент времени линия AO (O — центр цилиндра) образует с вертикалью угол φ:

$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\varphi - N. \tag{20}$$

В момент отрыва $N = 0$, следовательно, $v_1^2 = gr\cos\varphi_1$. Кроме того, из закона сохранения энергии

$$\frac{v_1^2}{r} = 2g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1) \quad\Longrightarrow\quad \cos\varphi_1 = \frac{2}{3}\cos\varphi_0. \tag{21}$$

Осталось разобраться с геометрией:

$$\cos\varphi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2}; \tag{22}$$

$$\Delta h = r(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1) = \frac{r\cos\varphi_0}{3}. \tag{23}$$

Ответ: $N_0 = mg\sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2}; \quad \Delta h = \frac{r}{3}\sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2}.$ ◄