Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 7

8.8. Спутник движется вокруг Земли по эллиптической орбите с эксцентриситетом e. Найти отношение максимального и минимального значений угловой скорости радиуса-вектора спутника.

► ЗСМИ гласит:

$$\omega r^2 = \text{const}. \tag{1}$$

Ответ: $\dfrac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} = \dfrac{r_{\max}^2}{r_{\min}^2} = \left(\dfrac{1+e}{1-e}\right)^2.$ ◄

8.22. Комета массы m движется в поле тяготения звезды S массы M, имея невозмущённую скорость v_∞ (на бесконечности) и прицельное расстояние d. Найти уравнение траектории кометы и определить угол θ, на который отклоняется её траектория, когда она снова удаляется в бесконечность.

► В полярных координатах

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma M}{r^2}; \tag{2}$$

$$w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \tag{3}$$

Из ЗСМИ следует зависимость $\dot{\varphi}(r)$:

$$\dot{\varphi} = \frac{v_\infty d}{r^2}. \tag{4}$$

Введём замену:

$$y \equiv \frac{1}{r}; \qquad y' = \frac{dy}{d\varphi} = -\frac{r'}{r^2} = -\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi} r^2} = -\frac{\dot{r}}{v_\infty d}; \qquad y'' = -\frac{\ddot{r} r^2}{v_\infty^2 d^2}. \tag{5}$$

Уравнение (2) примет вид

$$y'' + y = \frac{\gamma M}{v_\infty^2 d^2} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{r} = \frac{\gamma M}{v_\infty^2 d^2} + A\cos(\varphi + \varphi_0). \tag{6}$$

Осталось вспомнить (задать) начальные условия: при $\varphi \to 0$: $y \to 0$, $\dot{r} \to v_\infty$, откуда

$$A = -\frac{\gamma M}{v_\infty^2 d^2 \cos\varphi_0}; \tag{7}$$

$$y'(0) = -\frac{1}{d} = \frac{\gamma M}{v_\infty^2 d^2}\tan\varphi_0 \quad \Longrightarrow \quad \tan\varphi_0 = -\frac{v_\infty^2 d}{\gamma M} \equiv \xi. \tag{8}$$

$$r(\varphi) = \frac{\xi d}{1 - \sqrt{1+\xi^2}\cos\left(\varphi - \arctan\xi\right)}. \tag{9}$$

Угол $\pi - \theta$ равен модулю (генеральной) разности корней уравнения $y(\varphi) = 0$:

$$\cos(\varphi - \varphi_0) + \cos\varphi_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \varphi_0\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \pi - \theta = |2\varphi_0|\,. \tag{10}$$

Ответ: см. (9); $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\gamma M}{v_\infty^2 d}$. ◀

8.24. С северного полюса Земли запускается снаряд так, что направление начальной скорости v_0 составляет угол α с горизонтом. Какой должна быть величина v_0, чтобы место падения снаряда имело географическую широту φ?

► Удельный момент импульса снаряда (в квадрате)

$$v_0^2 R^2 \cos^2\alpha = \gamma M p. \tag{11}$$

Уравнение траектории — эллипса — запишется с учётом симметрии в виде

$$R = \frac{p}{1 - e\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{1 - \frac{p}{R}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}; \tag{12}$$

с другой стороны, интеграл энергии выглядит как

$$\frac{v_0^2}{\gamma M} = \frac{2}{R} - \frac{1 - e^2}{p} = \frac{2}{R} - \frac{1}{p} + \frac{\left(1 - \frac{p}{R}\right)^2}{p\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}. \tag{13}$$

Указание. Систему $\{(11); (13)\}$ нужно решить относительно v_0. ◀

8.50. Спутнику, движущемуся со скоростью v по круговой орбите радиуса R, сообщается импульс торможения, в результате которого скорость изменилась на величину Δv. Найти параметр p, эксцентриситет e новой орбиты и угол φ между радиусом-вектором в точке приложения импульса и направлением на перигей новой орбиты.

► Удельный момент импульса снаряда (в квадрате)

$$\begin{aligned} (v_0 - \Delta v)^2 R^2 &= \gamma M p; \\ v_0^2 R^2 &= \gamma M R. \end{aligned} \tag{14}$$

$$p = \frac{(v_0 - \Delta v)^2}{v_0^2} R. \tag{15}$$

Точка, очевидно, стала апогеем; $\varphi = \pi$. Найдём эксцентриситет орбиты:

$$R = a(1 + e) = \frac{p}{1 - e} \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{\Delta v\,(2v_0 - \Delta v)}{v_0^2}. \tag{16}$$

Ответ: $p = \dfrac{(v_0 - \Delta v)^2}{v_0^2} R$; $e = \dfrac{\Delta v\,(2v_0 - \Delta v)}{v_0^2}$; $\varphi = \pi$. ◀