Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 2. Неделя 8

11.8.6. Найти компоненты тензора инерции в главных центральных осях для однородного полого цилиндра массы M с внешним радиусом R_2 и внутренним радиусом R_1. *Высота цилиндра также известна и равна* H.

► Направим ось z вдоль оси цилиндра $\mathcal{V}$ и найдём компоненты тензора инерции в заданном таким образом ортонормированном базисе. Если результат получится диагональным, задача будет полностью решена.

Итак,

$$\hat{J} = \rho \int_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} dV = \tag{1}$$

$$= \rho \int\limits_{R_1}^{R_2}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-H/2}^{H/2} \begin{pmatrix} r^2\sin^2\varphi + z^2 & -r^2\sin\varphi\cos\varphi & -r\cos\varphi z \\ -r^2\sin\varphi\cos\varphi & r^2\cos^2\varphi + z^2 & -r\sin\varphi z \\ -r\cos\varphi z & -r\sin\varphi z & r^2 \end{pmatrix} r\,dr\,d\varphi\,dz = \tag{2}$$

$$= \frac{M}{\pi H\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \cdot 2\pi \int\limits_{R_1}^{R_2}\int\limits_{-H/2}^{H/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}r^2+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}r^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} r\,dr\,dz = \tag{3}$$

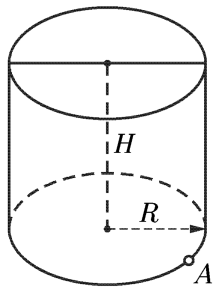
$$= \frac{2M}{H\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \int\limits_{R_1}^{R_2} r\,dr \int\limits_{-H/2}^{H/2} \operatorname{diag}\left(\frac{r^2}{2}+z^2,\ \frac{r^2}{2}+z^2,\ r^2\right) dz = \tag{4}$$

$$= \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2} \int\limits_{R_1}^{R_2} \operatorname{diag}\left(\frac{r^3}{2} + \frac{H^2}{12}r,\ \frac{r^3}{2} + \frac{H^2}{12}r,\ r^3\right) dr = \tag{5}$$

$$= M \operatorname{diag}\left(\frac{R_1^2+R_2^2}{4} + \frac{H^2}{12},\ \frac{R_1^2+R_2^2}{4} + \frac{H^2}{12},\ \frac{R_1^2+R_2^2}{2}\right). \tag{6}$$

Ответ: $\quad I_{xx} = I_{yy} = M\dfrac{R_1^2+R_2^2}{4} + M\dfrac{H^2}{12}, \quad I_{zz} = M\dfrac{R_1^2+R_2^2}{2}.$ ◄

11.11. Найти главные оси инерции в точке A однородного прямого кругового цилиндра массы m. Высота цилиндра равна H, радиус основания равен R. Для случая $H = \sqrt{3}R$ выписать тензор инерции цилиндра в главных осях для точки A.



► Применим теорему Гюйгенса–Штейнера, полагая тензор инерции цилиндра в центральных главных осях известным *(хотя бы положив $R_1 = 0$ в 11.8.6)*, направив ось Ox вдоль полярной плоскости точки A и выполнив параллельный перенос начала отсчёта в A:

$$\overline{AO} = \left(-R;\ 0;\ \frac{H}{2}\right); \tag{7}$$

$$\hat{J}_A = M \begin{pmatrix} \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{3}H^2 & 0 & \frac{1}{2}RH \\ 0 & \frac{5}{4}R^2 + \frac{1}{3}H^2 & 0 \\ \frac{1}{2}RH & 0 & \frac{3}{2}R^2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Поскольку дальше будет плохо, подставлю сразу $H = \sqrt{3}R$:

$$\hat{J}_A = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 9 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Эту матрицу неплохо было бы диагонализировать. Для этого вспомним курс линейной алгебры и начнём искать её собственные числа и собственные векторы. *Этот процесс я, конечно, опущу.*

$$\hat{J}_A^{\pi} = \frac{MR^2}{4} \operatorname{diag}(2,\ 9,\ 9), \tag{10}$$

главные оси направлены вдоль собственных векторов, из которых составим матрицу:

$$\mathcal{M} \equiv (\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}') = \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что ось $y' \parallel y$, то есть одна из найденных главных осей касается окружности, лежащей в основании цилиндра.

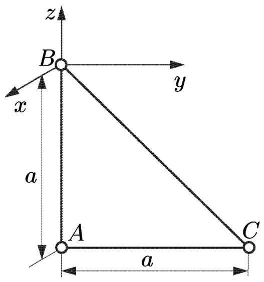
Угол между осью x' и z есть

$$\arccos \frac{1}{|\vec{x}'|} = \arccos \frac{\sqrt{21}}{7} \simeq 49^\circ, \tag{12}$$

что согласуется с авторским ответом к задаче при $H = \sqrt{3}R$.

Ответ: главные оси направлены вдоль собственных векторов, из которых составлена матрица $\mathcal{M}$ — см. (11); в этих осях тензор инерции относительно точки A имеет вид $\hat{J}_A^{\pi} = MR^2/4 \operatorname{diag}(2,\ 9,\ 9)$. ◄

11.92. Материальные точки A, B и C массы m каждая находятся в вершинах невесомого равнобедренного прямоугольного треугольника с длиной катета, равной a. Найти тензор инерции системы для точки B в указанных на рисунке осях. Найти главные оси для точки B. Показать, что эллипсоид инерции для точки A является эллипсоидом вращения.



► По определению:

$$\hat{J}_A = ma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \hat{J}_B = ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Аналогично 11.11, выпишем матрицу собственных векторов $\hat{J}_B$: вдоль них направлены искомые оси.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Процедура сама по себе простая, хотя и требующая аккуратности. ◄

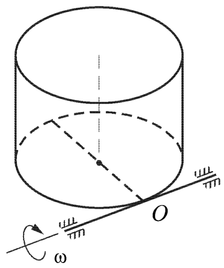
T2. Полярным моментом инерции относительно некоторой точки O называется величина, равная сумме произведений масс точек системы на квадраты их расстояний до точки O. Показать, что центр масс системы можно определить как такую точку пространства, для которой полярный момент инерции имеет наименьшее значение.

► Рассмотрим систему из N материальных точек массами m_ν, положениям которых соответствуют радиусы-векторы $\vec{r}_\nu$, где $\nu = 1, \ldots, N$. Запишем выражение для полярного момента инерции относительно некоторой точки $O \to \vec{r}_0$ и зададимся целью исследовать его на экстремум:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_0} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\vec{r}_\nu - \vec{r}_0\right)^2 = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_0} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(r_\nu^2 + r_0^2 - 2\left(\vec{r}_\nu, \vec{r}_0\right)\right) = 2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\vec{r}_0 - \vec{r}_\nu\right) = 0. \tag{15}$$

Из последнего равенства непосредственно вытекает, что $\vec{r}_0$ есть радиус-вектор центра масс системы (согласно известному определению). ■

11.17. Прямой однородный круговой цилиндр массы M, радиуса R и высоты h вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, направленной по касательной к основанию цилиндра в точке O. Найти момент импульса цилиндра относительно точки O.



► Используем выражение для момента инерции цилиндра относительно точки O, полученное в 11.11, в тех же осях:

$$\vec{K}_O = \hat{J}_O \vec{\omega} = M \begin{pmatrix} \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{3}h^2 & 0 & \frac{1}{2}Rh \\ 0 & \frac{5}{4}R^2 + \frac{1}{3}h^2 & 0 \\ \frac{1}{2}Rh & 0 & \frac{3}{2}R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Ответ: $\vec{K}_O = M\omega \left(\frac{5}{4}R^2 + \frac{1}{3}h^2\right)\hat{y}.$ ◄