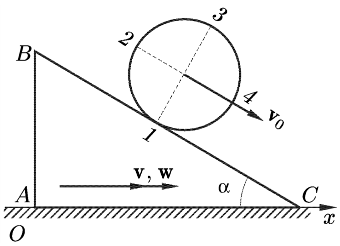
Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 3

2.11. Призма ABC движется поступательно вдоль оси Ox с ускорением $\vec{w}$, имея в данный момент скорость $\vec{v}$. По линии наибольшего ската BC призмы катится без скольжения цилиндр, скорость центра которого относительно призмы постоянна и равна $\vec{v_0}$. Радиус цилиндра R, $\angle BCA = \alpha$. Найти скорости и ускорения точек $1, 2, 3, 4$ цилиндра в данный момент времени.



► В подвижной (штрихованной) системе отсчёта призмы цилиндр совершает мгновенное вращение вокруг точки 1: $\vec{v}_1' = \overline{0}$. Введём координатные оси: направление Ox уже задано, Oy направим вертикально вверх, $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. *Без доказательства* заявим, что угловая скорость цилиндра

$$\vec{\omega} = -\frac{v_0}{R}\hat{z}. \tag{1}$$

Скорости всех заданных точек найдутся по формуле Эйлера ($\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_{1i}$):

$$\vec{v}_2' = -\frac{v_0}{R}\hat{z} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}R\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}R\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}v_0\left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\hat{x} - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\hat{y}\right]; \tag{2}$$

$$\vec{v}_3' = -\frac{v_0}{R}\hat{z} \times \begin{pmatrix} 2R\sin\alpha \\ 2R\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_0\left[\cos\alpha \cdot \hat{x} - \sin\alpha \cdot \hat{y}\right]; \tag{3}$$

$$\vec{v}_4' = -\frac{v_0}{R}\hat{z} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}R\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}R\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}v_0\left[\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\hat{x} - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\hat{y}\right]. \tag{4}$$

Переход к неподвижной системе отсчёта осуществляется легко и приятно: $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}$.

$$\vec{v}_1 = v\hat{x}, \qquad v_1 = v; \tag{5}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v + v_0(\cos\alpha + \sin\alpha) \\ v_0(\cos\alpha - \sin\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \sqrt{v^2 + 2v_0^2 + 2vv_0(\cos\alpha + \sin\alpha)}; \tag{6}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} v + 2v_0\cos\alpha \\ -2v_0\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \sqrt{v^2 + 4v_0^2 + 4vv_0\cos\alpha}; \tag{7}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} v + v_0(\cos\alpha - \sin\alpha) \\ -v_0(\sin\alpha + \cos\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \sqrt{v^2 + 2v_0^2 + 2vv_0(\cos\alpha - \sin\alpha)}. \tag{8}$$

Ускорение центра цилиндра в штрихованной системе равно нулю. Значит, $\vec{w}_i' = \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}_{0i}$:

$$\vec{w}_1' = -\omega^2 R\,[-\sin\alpha\cdot\hat{x} - \cos\alpha\cdot\hat{y}]\,; \tag{9}$$
$$\vec{w}_2' = -\omega^2 R\,[-\cos\alpha\cdot\hat{x} + \sin\alpha\cdot\hat{y}]\,; \tag{10}$$
$$\vec{w}_3' = -\omega^2 R\,[+\sin\alpha\cdot\hat{x} + \cos\alpha\cdot\hat{y}]\,; \tag{11}$$
$$\vec{w}_4' = -\omega^2 R\,[+\cos\alpha\cdot\hat{x} - \sin\alpha\cdot\hat{y}]\,. \tag{12}$$

Аналогично, поскольку призма движется поступательно, всё очень приятно:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} w + v_0^2/R\cdot\sin\alpha \\ v_0^2/R\cdot\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} + \frac{2wv_0^2}{R}\sin\alpha}; \tag{13}$$

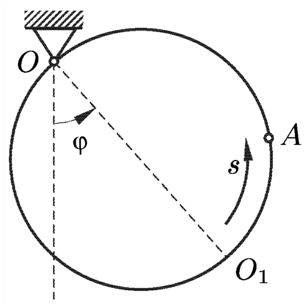
$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} w + v_0^2/R\cdot\cos\alpha \\ -v_0^2/R\cdot\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} + \frac{2wv_0^2}{R}\cos\alpha}; \tag{14}$$

$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} w - v_0^2/R\cdot\sin\alpha \\ -v_0^2/R\cdot\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} - \frac{2wv_0^2}{R}\sin\alpha}; \tag{15}$$

$$\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} w - v_0^2/R\cdot\cos\alpha \\ -v_0^2/R\cdot\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_4 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} - \frac{2wv_0^2}{R}\cos\alpha}. \tag{16}$$

Ответ: (5) – (8), (13) – (16). ◀

2.14. Круговое кольцо, точка O которого неподвижна, совершает колебания в своей плоскости по закону $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$. Радиус кольца равен R. Точка A движется по кольцу так, что $s = at^2$, где s — длина дуги O_1A. Найти скорость и ускорение точки A в момент времени $t = \pi/\omega$.



▶ В заданный момент времени линия OO_1 отвесна. Введём декартову систему координат: $\hat{x} \upuparrows OO_1$, $\hat{y}$ — вправо, $\hat{z} = \hat{x}\times\hat{y}$.

В системе отсчёта кольца

$$\begin{cases} x_A = R\left(1 + \cos\dfrac{s}{R}\right), \\ y_A = R\sin\dfrac{s}{R}. \end{cases} \tag{17}$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получим компоненты скорости и ускорения точки A в этой системе:

$$\begin{cases} \dot{x}_A = -\sin\dfrac{s}{R}\cdot 2at, \\ \dot{y}_A = \cos\dfrac{s}{R}\cdot 2at; \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \ddot{x}_A = -\cos\dfrac{s}{R}\cdot\dfrac{4a^2t^2}{R} - \sin\dfrac{s}{R}\cdot 2a, \\ \ddot{y}_A = -\sin\dfrac{s}{R}\cdot\dfrac{4a^2t^2}{R} + \cos\dfrac{s}{R}\cdot 2a. \end{cases} \tag{18}$$

Угловая скорость и угловое ускорение кольца

$$\vec{\Omega} = -\varphi_0\omega\hat{z}; \tag{19}$$
$$\vec{\varepsilon} = \overline{0}. \tag{20}$$

Можем теперь применить теоремы о сложении скоростей и ускорений:

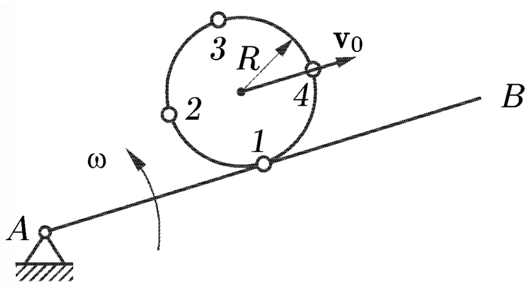
$$\vec{v}_A = \vec{\Omega}\times\vec{r}_A + \vec{v}'_A =$$
$$= -\varphi_0\omega R\hat{z}\times\begin{pmatrix}1+\cos\frac{at^2}{R}\\ \sin\frac{at^2}{R}\\ 0\end{pmatrix} + 2at\begin{pmatrix}-\sin\frac{at^2}{R}\\ \cos\frac{at^2}{R}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left[\varphi_0\omega R - \frac{2a\pi}{\omega}\right]\sin\frac{a\pi^2}{\omega^2 R}\\ -2\varphi_0\omega R\cos^2\frac{a\pi^2}{2\omega^2 R} + \frac{2a\pi}{\omega}\cos\frac{a\pi^2}{\omega^2 R}\\ 0\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Примечание. Проверка совпадения модуля $\vec{v}_A$ с ответом из задачника представляет собой весьма занимательное занятие. На сей раз с этим помогает справиться Wolfram Alpha. *Для $\vec{w}_A$ аналогичная проверка производиться не будет.*

$$\vec{w}_A = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}_A - \Omega^2\vec{r}_A + \vec{w}'_A + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}'_A = -\varphi_0^2\omega^2\begin{pmatrix}1+\cos\frac{at^2}{R}\\ \sin\frac{at^2}{R}\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{4a^2t^2}{R}\cos\frac{at^2}{R} - 2a\sin\frac{at^2}{R}\\ -\frac{4a^2t^2}{R}\sin\frac{at^2}{R} + 2a\cos\frac{at^2}{R}\\ 0\end{pmatrix} -$$
$$-2\varphi_0\omega\hat{z}\times 2at\begin{pmatrix}-\sin\frac{at^2}{R}\\ \cos\frac{at^2}{R}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4a^2\pi^2}{\omega^2 R}\cos\frac{a\pi^2}{\omega^2 R} - 2a\sin\frac{a\pi^2}{\omega^2 R} + 4\varphi_0\pi\omega a\cos\frac{a\pi^2}{\omega^2 R}\\ -\frac{4a^2\pi^2}{\omega^2 R}\sin\frac{a\pi^2}{\omega^2 R} + 2a\cos\frac{a\pi^2}{\omega^2 R} + 4\varphi_0\pi\omega a\sin\frac{a\pi^2}{\omega^2 R}\\ 0\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Ответ: (21), (22). ◀

3.22. Диск радиуса R катится без скольжения по направляющей AB, вращающейся в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Найти скорости и ускорения точек $1, 2, 3, 4$ диска, если относительная скорость его центра постоянна и равна v_0. В начальный момент точка касания диска с направляющей совпадала с точкой A.



▶ В подвижной системе отсчёта направляющей скорости и ускорения указанных точек равны соответственно (см. задачу 2.11)

$$\vec{v}'_i = \vec{\Omega}'\times\vec{r}_{1i}, \tag{23}$$
$$\vec{w}'_i = -\Omega'^2\vec{r}_{0i}; \tag{24}$$

где $\Omega' = v_0/R$ — угловая скорость вращения диска.

Используем теоремы о сложении скоростей и ускорений:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_{Ai} + \vec{v}'_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_{A1} + \left(\vec{\omega}+\vec{\Omega}'\right)\times\left(\vec{r}_{0i}-\vec{r}_{01}\right); \tag{25}$$
$$\vec{w}_i = \omega\times\omega\times\vec{r}_{Ai} + \vec{w}'_i + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_i = \underline{-\omega^2\vec{r}_{A1} + (\omega-2\Omega')\,\omega\vec{r}_{01}} - (\omega-\Omega')^2\,\vec{r}_{0i}. \tag{26}$$

Зададимся целью получить ответы в адекватном виде. Для этого введём систему координат следующим образом: $Ax \upuparrows AB$, $Ay \perp AB$ и направлена вверх, $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. В этой системе все нужные векторы имеют «красивый» вид:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}, \tag{27}$$

$$\vec{\Omega}' = -\frac{v_0}{R}\hat{z}; \tag{28}$$

$$\vec{r}_{A1} = v_0 t \cdot \hat{x}; \tag{29}$$

$$\vec{r}_{01} = -R\hat{y}, \tag{30}$$

$$\vec{r}_{02} = -R\hat{x}, \tag{31}$$

$$\vec{r}_{03} = +R\hat{y}, \tag{32}$$

$$\vec{r}_{04} = +R\hat{x}. \tag{33}$$

Осталось произвести вычисления по формулам (25) и (26). ◀

Например,

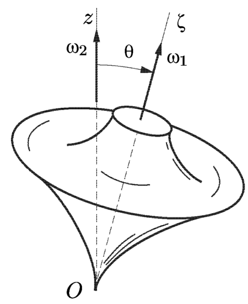
$$\vec{v}_1 = \omega v_0 t \cdot \hat{z} \times \hat{x} = \omega v_0 t \cdot \hat{y}; \tag{34}$$

$$\vec{w}_1 = -\omega^2 v_0 t \cdot \hat{x} - \left(\omega - \frac{2v_0}{R}\right)\omega R \cdot \hat{y} + \left(\omega - \frac{v_0}{R}\right)^2 R \cdot \hat{y} = \begin{pmatrix} -\omega^2 v_0 t \\ v_0^2/R \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

$$\vec{v}_3 = \omega v_0 t \cdot \hat{z} \times \hat{x} + 2(\omega R - v_0) \cdot \hat{z} \times \hat{y} = \begin{pmatrix} 2(v_0 - \omega R) \\ \omega v_0 t \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{36}$$

$$\vec{w}_3 = -\omega^2 v_0 t \cdot \hat{x} - \left(\omega - \frac{2v_0}{R}\right)\omega R \cdot \hat{y} - \left(\omega - \frac{v_0}{R}\right)^2 R \cdot \hat{y} = -\begin{pmatrix} \omega^2 v_0 t \\ 2\omega^2 R - 4v_0\omega + \frac{v_0^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

4.4. Юла вращается вокруг своей оси симметрии $O\zeta$ с постоянной угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается относительно вертикали Oz с угловой скоростью ω_2, так что угол θ остаётся постоянным (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы относительно Oz.

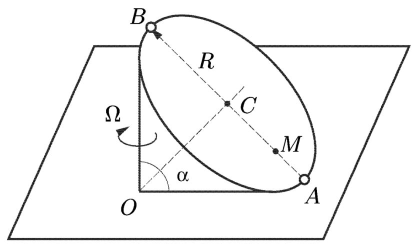


▶ Результирующее вращение юлы происходит в данный момент времени с угловой скоростью и угловым ускорением

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \qquad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2};$$

$$\vec{\varepsilon} = \omega_1 \times \omega_2, \qquad \varepsilon = \omega_1\omega_2 \sin\theta.$$ ◀

4.34. Круговой конус с прямым углом при вершине и радиусом основания, равным R, катится без скольжения по горизонтальной плоскости так, что скорость центра основания постоянна и равна v. Вдоль прямолинейного канала, проведённого из вершины O конуса в центр C его основания, равномерно движется точка со скоростью, также равной v. Определить ускорение этой точки в момент, когда она попадает в центр основания.



► Вопрос об угловых скоростях в такой системе *ранее был решён на семинаре,* поэтому заявим сразу, что в подвижной системе конус вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}'$ вокруг OC, а сама эта системе — с угловой скоростью Ω вокруг OB, так что конус в неподвижной системе совершает мгновенное вращение вокруг OA с угловой скоростью ω:

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}'. \tag{38}$$

Найдём ускорение указанной точки, применив теорему о сложении ускорений:

$$\vec{w} = \cancel{\vec{w}'} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overline{OC} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'. \tag{39}$$

Введём систему координат: $Ox \upuparrows OA$, $Oy \upuparrows OB$, $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. В таких координатах

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 R/\sqrt{2} \\ 0 \\ -2\Omega v/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Выразим Ω через скорость точки C:

$$\vec{v}_C = \Omega \times \overline{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega R/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{\Omega R}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \frac{\sqrt{2}v}{R}. \tag{41}$$

Подстановка (41) в (40) даёт

$$\vec{w} = -\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{v^2}{R}; \tag{42}$$

$$w = \frac{\sqrt{6}v^2}{R}. \tag{43}$$

Ответ: $\vec{w} = -\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \dfrac{v^2}{R}.$ ◄