Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 2

3.6. Плоская фигура движется в своей плоскости. Найти положение точки A, если известны скорость этой точки $\vec{v}_A$, скорость некоторой другой точки $\vec{v}_0$ и угловая скорость фигуры $\vec{\omega}$. Использовать полученный результат для определения положения мгновенного центра скоростей P.

► По теореме о распределении скоростей в твёрдом теле

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \overline{OA}. \tag{1}$$

Умножим векторно уравнение (1) на $\vec{\omega}$ слева:

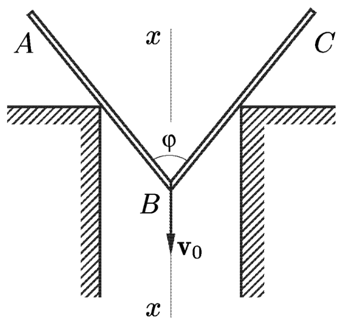
$$\vec{\omega} \times (\vec{v}_A - \vec{v}_0) = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overline{OA} = \vec{\omega}\cancelto{0}{(\vec{\omega}, \overline{OA})} - \overline{OA}\,(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = -\omega^2 \cdot \overline{OA}; \tag{2}$$

$$\overline{OA} = \frac{\vec{\omega} \times (\vec{v}_0 - \vec{v}_A)}{\omega^2}. \tag{3}$$

В частности, для мгновенного центра скоростей P можно записать $\vec{v}_P = \vec{0}$.

Ответ: $\overline{OA} = \dfrac{\vec{\omega} \times (\vec{v}_0 - \vec{v}_A)}{\omega^2}$; $\qquad \overline{OP} = \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2}$. ◄

3.12. Стержни AB и BC шарнирно соединены в точке B и опираются на два прямых угла, как показано на рисунке. Точка B движется по прямой xx, равноудалённой от вертикальных сторон углов. Во время движения стержни касаются вершин прямых углов. Доказать, что скорость точки касания каждого стержня вершин прямого угла направлена вдоль стержня. Найти также скорости этой точки в зависимости от угла $\angle ABC = \varphi$, если скорость точки B равна v_0.



► Введём неподвижную систему координат $T\xi\eta$ в точке T касания стержнем угла в данный момент времени; ось ξ направим вдоль стержня, ось η — перпендикулярно названному направлению. Точка T имеет скорость

$$\vec{v}_O = v_\xi \mathbf{e}_\xi + v_\eta \mathbf{e}_\eta. \tag{4}$$

Требуется показать, что $v_\eta = 0$. В самом деле, рассмотрим точку A стержня с координатами $(\delta\xi; 0)$, которая станет точкой касания через промежуток времени δt. С одной стороны, понятно, что

$$\vec{v}_A = \frac{\delta\xi}{\delta t}\,\mathbf{e}_\xi; \tag{5}$$

с другой стороны, по теореме Эйлера

$$\vec{v}_A = \vec{v}_T + \vec{\omega} \times \overline{TA}. \tag{6}$$

Используя (4) и (5), запишем (6) в «проекциях»:

$$\frac{\delta\xi}{\delta t}\,\mathbf{e}_\xi = v_\xi\mathbf{e}_\xi + v_\eta\mathbf{e}_\eta - \omega\,\delta\xi\cdot([\mathbf{e}_\xi\times\mathbf{e}_\eta]\times\mathbf{e}_\xi) = v_\xi\mathbf{e}_\xi + v_\eta\mathbf{e}_\eta + \omega\,\delta\xi\,\mathbf{e}_\eta. \tag{7}$$

Таким образом, $v_\eta = \omega\,\delta\xi \to 0$, что и требовалось доказать. ■

Проекции скоростей точек стержня на ось ξ равны между собой (это, между прочим, побочный результат приведённого выше доказательства). В силу симметрии системы нетрудно записать искомый результат.

Ответ: $v_T = v_B\cos\dfrac{\varphi}{2}$. ◀

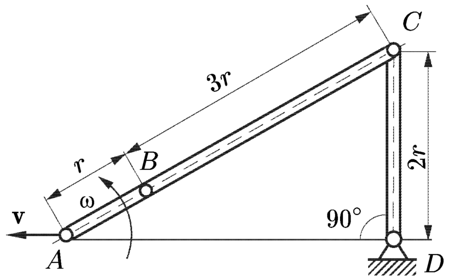
3.15. Плоская фигура движется в своей плоскости, причём её угловая скорость равна ω. Найти радиус кривизны траектории точки A фигуры, если известны ускорение этой точки $\vec{w}_A$ и положение мгновенного центра скоростей P.

► Радиус кривизны траектории точки выражается через её нормальное ускорение. Дальнейший ход решения состоит в следующей выкладке:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\left|\vec\omega\times\overline{PA}\right|^2}{\sqrt{\vec w_A^2 - (\vec w_A,\vec\tau)^2}} = \frac{\left|\vec\omega\times\overline{PA}\right|^3}{\left|\vec w_A\times\vec v\right|} = \frac{\left|\vec\omega\times\overline{PA}\right|^3}{\left|\vec w_A\times\vec\omega\times\overline{PA}\right|} = \frac{\omega^2\left|\overline{PA}\right|^3}{\left|\left(\vec w_A,\overline{PA}\right)\right|}. \tag{8}$$

Ответ: $\rho = \dfrac{\omega^2\left|\overline{PA}\right|^3}{\left|\left(\vec w_A,\overline{PA}\right)\right|}$. ◀

3.24. Стержни AB, BC и CD соединены шарнирами, причём стержень CD может поворачиваться вокруг неподвижной точки D, а стержень AB вращается с постоянной угловой скоростью $\vec\omega$ вокруг точки A, движущейся по прямой AD с постоянной скоростью $\vec v$. Найти скорость и ускорение точки C в момент, когда $\angle ABC = 180°$, а $\angle ADC = 90°$.



► Введём координатные оси на плоскости следующим образом: ось x направим вдоль DA, ось y — вдоль DC. Дополним координатную систему осью z до правой тройки: $\mathbf{e_z} = \mathbf{e_x}\times\mathbf{e_y}$.

Введём для краткости обозначение $\psi \equiv \angle DAC = 30°$ и запишем скорость точки C двумя способами:

$$\vec v_C = \vec\omega_{DC}\times\overline{DC} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_{DC}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2r\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2r\omega_1\\0\\0\end{pmatrix}; \tag{9}$$

$$\vec v_C = \vec v_B + \vec\omega_{BC}\times\overline{BC} = \vec v_A + \vec\omega_{AB}\times\overline{AB} + \vec\omega_{BC}\times\overline{BC} =$$
$$= \begin{pmatrix}v\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cos\psi\\\sin\psi\\0\end{pmatrix} + 3r\begin{pmatrix}0\\0\\\omega_2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cos\psi\\\sin\psi\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v-(\omega-3\omega_2)r\sin\psi\\-(\omega-3\omega_2)r\cos\psi\\0\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Приравнивая компоненты вектора $\vec{v}_C$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -2r\omega_1 = v - (\omega - 3\omega_2)r\sin\psi; \\ 0 = -(\omega - 3\omega_2)r\cos\psi. \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \omega_1 = -v/2r; \\ \omega_2 = \omega/3. \end{cases} \tag{11}$$

Пристальный взгляд на (10) позволяет установить, что $\vec{v}_C = \vec{v}$.

Теперь займёмся ускорениями:

$$\begin{aligned} \vec{w}_C &= \vec{\varepsilon}_{DC} \times \overline{DC} + \vec{\omega}_{DC} \times \vec{\omega}_{DC} \times \overline{DC} = \vec{\varepsilon}_{DC} \times \overline{DC} - \omega_1^2 \cdot \overline{DC} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 \cdot 2r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\varepsilon_1 r \\ -v^2/(2r) \\ 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_C &= \vec{w}_B + \vec{\varepsilon}_{BC} \times \overline{BC} - \omega_2^2 \cdot \overline{BC} = -\omega^2 \cdot \overline{AB} - \omega_2^2 \cdot \overline{BC} + \vec{\varepsilon}_{BC} \times \overline{BC} = \\ &= \begin{pmatrix} \left(\omega^2 + 3\omega_2^2\right) r\cos\psi \\ -\left(\omega^2 + 3\omega_2^2\right) r\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} + 3r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\omega^2\cos\psi - 3\varepsilon_2\sin\psi \\ -\frac{4}{3}\omega^2\sin\psi - 3\varepsilon_2\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} r. \end{aligned} \tag{13}$$

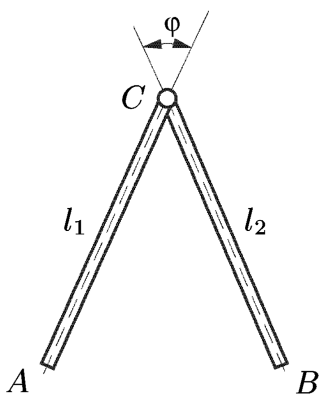
Теперь нетрудно уже вновь перейти к системе уравнений:

$$\begin{cases} -4\sqrt{3}\varepsilon_1 = 4\omega^2 - 3\sqrt{3}\varepsilon_2; \\ v^2/r^2 = \frac{4}{3}\omega^2 + 3\sqrt{3}\varepsilon_2. \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad -4\sqrt{3}\varepsilon_1 + \frac{v^2}{r^2} = \frac{16}{3}\omega^2. \tag{14}$$

$$\vec{\omega}_C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{16}{3}\omega^2 r - v^2/r\right) \\ -\frac{1}{2}v^2/r \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{15}$$

$$\omega_C = \sqrt{\frac{64}{27}\omega^4 r^2 + \frac{1}{3}\frac{v^4}{r^2} - \frac{8}{9}\omega^2 v^2}. \tag{16}$$

Ответ: $\vec{v}_C = \vec{v}$; $\quad \vec{w}_C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{16}{3}\omega^2 r - v^2/r\right) \\ -\frac{1}{2}v^2/r \\ 0 \end{pmatrix}$. ◀



3.33. Стержни AC и BC длины l_1 и l_2 соответственно, соединённые в точке C шарниром, движутся в плоскости. Известны скорости свободных концов стержней $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, а также их ускорения $\vec{w}_A$ и $\vec{w}_B$. Найти угловые скорости и угловые ускорения стержней, если угол между ними в рассматриваемый момент времени равен φ $(0 < \varphi < \pi)$.

► Запишем скорость и ускорение точки C двумя способами:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \overline{AC}, \tag{17}$$
$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \times \overline{BC}; \tag{18}$$

$$\vec{w}_C = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}_1 \times \overline{AC} - \omega_1^2 \cdot \overline{AC}, \tag{19}$$
$$\vec{w}_C = \vec{w}_B + \vec{\varepsilon}_2 \times \overline{BC} - \omega_2^2 \cdot \overline{BC}. \tag{20}$$

Умножим уравнения (17) и (18) скалярно на $\overline{BC}$ и исключим $\vec{v}_C$:

$$\left(\vec{v}_A, \overline{BC}\right) + \left(\overline{BC}, \vec{\omega}_1, \overline{AC}\right) = \left(\vec{v}_B, \overline{BC}\right) + \cancel{\left(\overline{BC}, \vec{\omega}_2, \overline{BC}\right)}, \tag{21}$$

$$\left(\vec{\omega}_1, \overline{BC}, \overline{AC}\right) = \left(\vec{v}_A - \vec{v}_B, \overline{BC}\right), \tag{22}$$

$$\omega_1 = \frac{(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \overline{BC}}{l_1 l_2 \sin\varphi}. \tag{23}$$

Для нахождения другой угловой скорости умножим те же уравнения скалярно на $\overline{AC}$:

$$\left(\vec{v}_A, \overline{AC}\right) + \cancel{\left(\overline{AC}, \vec{\omega}_1, \overline{AC}\right)} = \left(\vec{v}_B, \overline{AC}\right) + \left(\overline{AC}, \vec{\omega}_2, \overline{BC}\right), \tag{24}$$

$$\left(\vec{\omega}_1, \overline{AC}, \overline{BC}\right) = \left(\vec{v}_B - \vec{v}_A, \overline{AC}\right), \tag{25}$$

$$\omega_2 = \frac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \overline{AC}}{l_1 l_2 \sin\varphi}. \tag{26}$$

Теперь умножим уравнения (19) и (20) скалярно на $\overline{BC}$ и исключим $\vec{w}_C$:

$$\left(\vec{w}_A, \overline{BC}\right) + \left(\overline{BC}, \vec{\varepsilon}_1, \overline{AC}\right) - \omega_1^2 \cdot \left(\overline{AC}, \overline{BC}\right) = \left(\vec{w}_B, \overline{BC}\right) - \omega_2^2 \cdot \left(\overline{BC}, \overline{BC}\right), \tag{27}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(\vec{w}_B - \vec{w}_A) \cdot \overline{BC} - \omega_2^2 l_2^2 + \omega_1^2 l_1 l_2 \cos\varphi}{l_1 l_2 \sin\varphi}. \tag{28}$$

Аналогично для ε_2:

$$\left(\vec{w}_A, \overline{AC}\right) - \omega_1^2 \cdot \left(\overline{AC}, \overline{AC}\right) = \left(\vec{w}_B, \overline{AC}\right) + \left(\overline{AC}, \vec{\varepsilon}_2, \overline{BC}\right) - \omega_2^2 \cdot \left(\overline{AC}, \overline{BC}\right), \tag{29}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(\vec{w}_B - \vec{w}_A) \cdot \overline{AC} + \omega_1^2 l_1^2 - \omega_2^2 l_1 l_2 \cos\varphi}{l_1 l_2 \sin\varphi}. \tag{30}$$

Примечание. Направления искомых векторов без ограничения общности можно установить, используя частный случай, например, ситуацию, когда точка C является мгновенным центром скоростей стержней. Безусловно, эти векторы ортогональны плоскости рисунка.

Ответ: $\omega_1 = \dfrac{(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \overline{BC}}{l_1 l_2 \sin\varphi}$; $\quad \omega_2 = \dfrac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \overline{AC}}{l_1 l_2 \sin\varphi}$;

$\varepsilon_1 = \dfrac{(\vec{w}_B - \vec{w}_A) \cdot \overline{BC} - \omega_2^2 l_2^2 + \omega_1^2 l_1 l_2 \cos\varphi}{l_1 l_2 \sin\varphi}$; $\quad \varepsilon_2 = \dfrac{(\vec{w}_B - \vec{w}_A) \cdot \overline{AC} + \omega_1^2 l_1^2 - \omega_2^2 l_1 l_2 \cos\varphi}{l_1 l_2 \sin\varphi}$. ◀