

Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 1

1.20. В некотором приближении орбиту Меркурия можно представить плоской розеткой, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \omega \varphi}, \quad \omega = \text{const} \neq 1. \quad (1)$$

Используя закон площадей $r^2 \dot{\varphi} = c = \text{const}$, найти зависимость ускорения w планеты от r .

► Компоненты скорости в полярной системе координат известны:

$$v_r = H_r \dot{r} = \dot{r}, \quad (2)$$

$$v_\varphi = H_\varphi \dot{\varphi} = r \dot{\varphi}; \quad (3)$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (4)$$

Найдём компоненты разложения ускорения $\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_\varphi$:

$$w_r = \frac{1}{2H_r} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial v^2}{\partial r} \right] = \frac{d\dot{r}}{dt} - r \dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2; \quad (5)$$

$$w_\varphi = \frac{1}{2H_\varphi} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\varphi})}{dt} = 2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}. \quad (6)$$

Продифференцируем по времени уравнение (1) с учётом $\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}$ и $e \cos \omega \varphi = \frac{p}{r} - 1$:

$$\dot{r} = \frac{p e \omega \sin \omega \varphi \cdot \dot{\varphi}}{(1 + e \cos \omega \varphi)^2} = \frac{\cancel{p} e \omega \sin \omega \varphi \cdot \frac{c}{\cancel{p}^2}}{\cancel{p}^2} = \frac{e c \omega}{p} \sin \omega \varphi, \quad (7)$$

$$\ddot{r} = \frac{e c \omega^2}{p} \cos \omega \varphi \cdot \frac{c}{r^2} = \frac{c^2 \omega^2}{p r^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right). \quad (8)$$

Совершив подстановку в (5), получим

$$w_r = \frac{c^2 \omega^2}{p r^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) - \frac{c^2}{r^3} = \frac{c^2}{p r^3} (p \omega^2 - r \omega^2 - p) = -\frac{c^2}{p r^3} [\omega^2 r + (1 - \omega^2) p]. \quad (9)$$

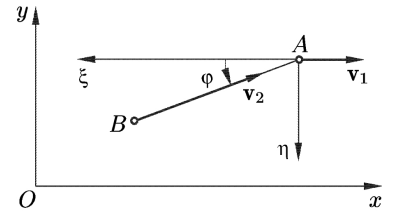
Примечание. При $\omega \rightarrow 1$ приходим к классическому ньютоновскому закону $\omega_r = -c^2/(p r^2)$.

Осталось убедиться, что, как и в классическом случае, $w_\varphi = 0$. Это видно из выражения (6) и соотношения

$$r \ddot{\varphi} = r \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{r^2} \right) = -\frac{2c}{r^2} \cdot \dot{r} = -2\dot{r} \dot{\varphi}. \quad (10)$$

Ответ: $w = |w_r| = \frac{c^2}{p r^3} \cdot \left| \omega^2 r + (1 - \omega^2) p \right|.$ ◀

1.29. Самолёт, изображённый на рисунке точкой A , движется горизонтально на высоте H с постоянной скоростью $\vec{v}_1 = \vec{v}$. В момент, когда самолёт пролетает над ракетной установкой, пускают самонаводящуюся ракету B , имеющую скорость \vec{v}_2 и всё время направленную к точке A , $|\vec{v}_2| = 2|\vec{v}|$.



Найти уравнение траектории ракеты $AB = r(\varphi)$ в системе отсчёта $A\xi\eta$, движущейся вместе с самолётом. Найти также время полёта ракеты с момента вылета до поражения самолёта и её ускорение как функцию угла φ .

► Радиальная и тангенциальная скорости ракеты равны по модулю соответствующим проекциям относительной скорости $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ вдоль и ортогонально AB :

$$v_r = -v_2 + v_1 \cos \varphi = -(2 - \cos \varphi)v, \quad (11)$$

$$v_\varphi = -v_1 \sin \varphi = -v \sin \varphi. \quad (12)$$

Компоненты скорости в полярной системе координат известны: вводя в систему уравнения (2) и (3), получим

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -(2 - \cos \varphi)v, \\ \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v \sin \varphi}{r} \end{cases} \implies \frac{dr}{r} = \frac{2 - \cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi. \quad (13)$$

Последнее дифференциальное уравнение легко интегрируется:

$$\int \frac{dr}{r} = \ln r + \text{const}; \quad (13^A)$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \int \frac{d\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = \int \frac{\cos \frac{\varphi}{2} d(\frac{\varphi}{2})}{\sin \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \int \frac{d \tan \frac{\varphi}{2}}{\tan \frac{\varphi}{2}} = \ln \tan \frac{\varphi}{2} + \text{const}; \quad (13^B)$$

$$\int \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin \varphi} = \frac{d \sin \varphi}{\sin \varphi} = \ln \sin \varphi + \text{const}. \quad (13^C)$$

$$r = C_1 \frac{\tan^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin \varphi} = C_1 \frac{\sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}. \quad (14)$$

Константу интегрирования найдём из начального условия $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = H = C_1$.

Для нахождения времени заметим, что при $r \rightarrow 0$ полярный угол $\varphi \rightarrow 0$;

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v}{H} (1 + \cos \varphi)^2 \implies \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = -\frac{v dt}{H}. \quad (15)$$

Очередное дифференциальное уравнение также интегрируется:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\frac{\varphi}{2})}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}\right) d \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \tan \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\varphi}{2} + C_2. \end{aligned} \quad (15^A)$$

$$t = -\frac{H}{v} \left(\frac{1}{2} \tan \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\varphi}{2} + C_2 \right). \quad (16)$$

С учётом $t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ найдём очередную константу дифференцирования $C_2 = -\frac{2}{3}$. Таким образом, искомое время полёта ракеты

$$T = t(0) = \frac{2H}{3v}. \quad (17)$$

Определим компоненты ускорения при помощи (5) и (6) с учётом (11), (12) и (14):

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -v \sin \varphi \cdot \left(-\frac{v \sin \varphi}{r}\right) - \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{r} = 0; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} w_\varphi &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{d(r\dot{\varphi})}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi} = -v \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + (\cos \varphi - 2)v \cdot \dot{\varphi} \\ &= -2v\dot{\varphi} = \frac{2v^2 \sin \varphi}{r} = \frac{2v^2}{H} (1 + \cos \varphi)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Ответ: $r(\varphi) = \frac{H \sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}; \quad T = \frac{2H}{3v}; \quad w(\varphi) = \frac{2v^2}{H} (1 + \cos \varphi)^2.$ ◀

1.37(6). Найти скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для сферических координат r, θ, φ :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (20)$$

► Сначала найдём коэффициенты Ламе данной координатной системы:

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta} = 1; \quad (21)$$

$$H_\theta = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta} = r; \quad (22)$$

$$H_\varphi = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = r \sin \theta. \quad (23)$$

Квадрат модуля скорости точки в таком случае есть

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2; \quad (24)$$

компоненты ускорения рассчитываются аналогично (5):

$$w_r = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial v^2}{\partial r} \right] = \ddot{r} - r \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right), \quad (25)$$

$$w_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} - r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 \right] = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (26)$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d(r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta)}{dt} = (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta. \quad (27)$$

Ответ: $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta}; \quad w = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}.$ ◀

1.41. Точка движется по поверхности сферы вдоль координатной линии сферической системы координат $\varphi(r = \text{const}, \theta = \text{const})$ с постоянной скоростью v . Найти вектор кривизны траектории и указать условия, при которых траектория точки является геодезической.

► При решении настоящей задачи удобно воспользоваться ранее полученными в 1.37(б) результатами:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi. \quad (28)$$

Поскольку точка движется вдоль координатной линии φ , производные \dot{r} и $\dot{\theta} = 0$, следовательно, векторы скорости и ускорения имеют разложения

$$\vec{v} = r\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi; \quad (29)$$

$$\vec{w} = -r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \mathbf{e}_r - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \theta \mathbf{e}_\varphi. \quad (30)$$

Таким образом, базисный орт \mathbf{e}_φ играет роль касательного вектора к траектории точки. Тогда нормальная компонента ускорения лежит в плоскости $\langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta \rangle$; вектор кривизны найдём делением последней на квадрат скорости:

$$\vec{\omega}_n = -r\dot{\varphi}^2 \sin \theta (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta); \quad (31)$$

$$\vec{k} = \frac{\vec{\omega}_n}{v^2} = -\frac{\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta}{r \sin \theta} = -\frac{1}{r} \left(\mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{\tan \theta} \right). \quad (32)$$

Траектория точки является геодезической, если \vec{k} направлен по нормали к поверхности сферы $r = \text{const}$, а стало быть — ортогонален \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_φ , что требует нулевых коэффициентов при упомянутых ортах в разложении \vec{k} ($\tan \theta \rightarrow \infty$).

Примечание. Данное рассуждение подтверждает геометрически интуитивную идею о том, что геодезическая параллель на сфере, большой круг с $\theta = \text{const}$ — это экватор.

Ответ: $\vec{k} = -\frac{1}{r} \left(\mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{\tan \theta} \right)$; при условии $\theta = \frac{\pi}{2}$. ◀

1.45. Выразить орты сопровождающего трёхгранника $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ через вектор скорости \vec{v} и вектор ускорения \vec{w} точки, если $\vec{w} \times \vec{v} \neq 0$, а $\vec{\tau} \cdot \vec{v} > 0$.

► Первое условие $\vec{w} \times \vec{v} \neq 0$ гарантирует $\vec{w} \nparallel \vec{v}$, а второе означает «естественную» ориентацию трёхгранника $(\vec{\tau} \uparrow \vec{v})$. В таком случае,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{|d\vec{r}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}; \quad (33)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{w}_n}{|\vec{w}_n|} = \frac{\vec{w} - \vec{w}_\tau}{\sqrt{(\vec{w} - \vec{w}_\tau)^2}} = \frac{\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}}{\sqrt{\vec{w}^2 - (\vec{w} \cdot \vec{\tau})^2}} = \frac{\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}}{|\vec{w} \times \vec{\tau}|} = \frac{|\vec{v}|^2 \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w} \times \vec{v}|}; \quad (34)$$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{w} \times \vec{v}|} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|}. \quad (35)$$

Ответ: $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$; $\vec{n} = \frac{|\vec{v}|^2 \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w} \times \vec{v}|}$; $\vec{b} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$. ◀