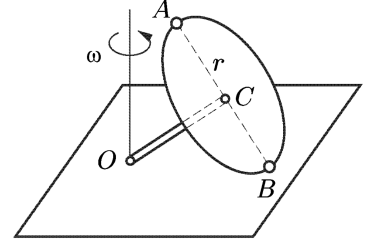


Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 4

4.10. Коническое колесо радиуса r , жёстко насаженное на стержень OC длины $l = r\sqrt{3}$, катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Стержень OC описывает коническую поверхность, вращаясь вокруг неподвижной точки O (в точке O сферический шарнир) с угловым ускорением ε , имея в данный момент угловую скорость ω . Определить угловые скорость и ускорение колеса и ускорения его точек A и B .



► Стержень — твёрдое тело с неподвижной точкой O , вращающееся с угловой скоростью $\vec{\omega}$. С другой стороны, колесо катится без проскальзывания, так что $\vec{v}_B = \vec{0}$. В таком случае,

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \overline{OC} = \vec{\Omega} \times \overline{BC}; \quad (1)$$

$$\vec{w}_C = \vec{\varepsilon} \times \overline{OC} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overline{OC}. \quad (2)$$

где $\vec{\Omega}$ — искомая угловая скорость колеса. Из уравнения (1) найдём её компоненты, введя правую декартову систему координат $Oxyz$ (ось $Ox \uparrow\uparrow OB$, ось $Oz \uparrow\uparrow \vec{\omega}$):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} r; \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\Omega_y \\ \Omega_z - \sqrt{3}\Omega_x \\ \Omega_y \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Видим, что $\Omega_y = 0$. Заметим также, что $\vec{v}_C = \vec{\Omega} \times \overline{OC}$, поскольку колесо движется в целом как твёрдое тело:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_z - \sqrt{3}\Omega_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ 0 \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\Omega_z - \sqrt{3}\Omega_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Теперь с необходимостью $\Omega_z = 0$, так что $\vec{\Omega} = -\sqrt{3}\omega\hat{x}$.

Примечание. Как направление, так и модуль угловой скорости колеса можно было указать, в принципе не совершив никаких вычислений. С другой стороны, приведено относительно строгое доказательство утверждения из абзаца 1 решения задачи 4.34 (может быть применено по аналогии).

Найдём теперь угловое ускорение колеса:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\Omega}} = -\sqrt{3}\dot{\omega}\hat{x} - \sqrt{3}\omega(\vec{\omega} \times \hat{x}) = -\sqrt{3}(\varepsilon\hat{x} + \omega^2\hat{y}); \quad (6)$$

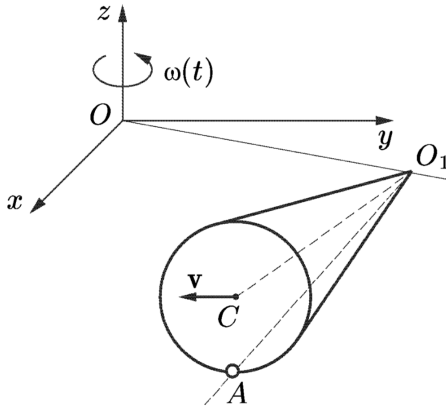
$$\varepsilon = \sqrt{3(\varepsilon^2 + \omega^4)}. \quad (7)$$

Ускорения точек A и B колеса могут быть рассчитаны по формуле Ривальса:

$$\vec{w}_A = \vec{\mathcal{E}} \times \overline{OA} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overline{OA} = \left\| \overline{OA} = r\hat{x} + \sqrt{3}r\hat{y} \right\| = \dots; \quad (8)$$

$$\vec{w}_B = \vec{\mathcal{E}} \times \overline{OB} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overline{OB} = -\sqrt{3}(\varepsilon\hat{x} + \omega^2\hat{y}) \times 2r\hat{x} = -2\sqrt{3}\omega^2r. \quad (9)$$

Ответ: $\vec{\Omega} = -\sqrt{3}\omega\hat{x}; \quad \vec{\mathcal{E}} = -\sqrt{3}(\varepsilon\hat{x} + \omega^2\hat{y}); \quad (8) - (9).$ ◀



4.25. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\omega(t)$. Конус, вершина O_1 которого неподвижна относительно плоскости, катится по ней без скольжения. Центр основания конуса C движется равномерно относительно плоскости со скоростью \vec{v} . Найти угловую скорость и угловое ускорение конуса. Высота конуса h , угол при вершине 2β .

► Перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вместе с плоскостью. В ней конус совершает мгновенное вращение с некоторой угловой скоростью ω_1 вокруг O_1A , так что по формуле Эйлера

$$v = \omega_1 \cdot h \tan \beta \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \omega_1 h \sin \beta. \quad (10)$$

Вектор $\vec{\omega}_1$ вращается в подвижной системе отсчёта с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, направленной против Oz , модуль которой

$$\omega_2 = \frac{v}{h \cos \beta}. \quad (11)$$

В неподвижной системе отсчёта

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_1, \quad \left| \vec{\Omega} \right| = \sqrt{\omega^2 + \frac{v^2}{h^2 \sin^2 \beta}}; \quad (12)$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \dot{\vec{\omega}} + (\vec{\omega} + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_1, \quad \left| \vec{\mathcal{E}} \right| = \sqrt{\dot{\omega}^2 + \frac{v^2}{h^2 \sin^2 \beta} \left(\omega - \frac{v}{h \cos \beta} \right)^2}. \quad (13)$$

Ответ: (12) – (13). ◀

4.29. При движении твёрдого тела известны ускорение точки O тела \vec{w}_O , угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$, причём $\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon} \neq 0$. Найти точку, ускорение которой равно заданному вектору \vec{w} .

► По формуле Ривальса

$$\vec{w} - \vec{w}_O = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (14)$$

Разложим радиус-вектор искомой точки следующим образом:

$$\vec{r} = \alpha \vec{\omega} + \beta \vec{\varepsilon} + \gamma [\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}], \quad (15)$$

а затем подставим последнее выражение в (14).

$$\begin{aligned}
\vec{w} - \vec{w}_O &= \vec{\varepsilon} \times (\alpha \vec{\omega} + \beta \vec{\varepsilon} + \gamma [\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}]) + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times (\alpha \vec{\omega} + \beta \vec{\varepsilon} + \gamma [\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}]) = \\
&= \alpha [\vec{\varepsilon} \times \vec{\omega}] + \gamma [\vec{\varepsilon} \times \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}] + \beta [\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}] + \gamma [\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}] = \\
&= -\alpha [\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}] + \gamma (\varepsilon^2 \vec{\omega} - \vec{\varepsilon}(\vec{\omega}, \vec{\varepsilon})) + \beta (\vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}) - \omega^2 \vec{\varepsilon}) + \\
&\quad + \gamma [\vec{\omega} \times (\vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}) - \omega^2 \vec{\varepsilon})] = \\
&= \{\gamma \varepsilon^2 + \beta (\vec{\omega}, \vec{\varepsilon})\} \vec{\omega} - \{\gamma (\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}) + \beta \omega^2\} \vec{\varepsilon} - \{\alpha + \gamma \omega^2\} [\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}].
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \gamma \varepsilon^2 + \beta (\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}) = \frac{(\vec{w} - \vec{w}_O, \vec{\omega})}{\omega^2}; \\ \gamma (\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}) + \beta \omega^2 = -\frac{(\vec{w} - \vec{w}_O, \vec{\varepsilon})}{\varepsilon^2}; \\ \alpha + \gamma \omega^2 = -\frac{(\vec{w} - \vec{w}_O, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon})}{[\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}]^2}. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

4.38. При движении твёрдого тела, имеющего неподвижную точку O , углы Эйлера меняются по закону $\psi = \omega t$, $\theta = \pi/3$, $\varphi = 2\omega t$. Определить ускорение точек M и N тела, если $\overline{OM} \parallel \vec{\Omega}$, а $\overline{ON} \parallel \vec{\mathcal{E}}$, где $\vec{\Omega}$ — угловая скорость, $\vec{\mathcal{E}}$ — угловое ускорение тела. Расстояния $OM = ON = r$.

► Используем для решения настоящей задачи кинематические уравнения Эйлера (в неподвижных осях — *нетрудно вывести*):

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \sin \omega t \\ -\sqrt{3} \cos \omega t \\ 2 \end{pmatrix} \omega; \tag{17}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{3} \omega^2. \tag{18}$$

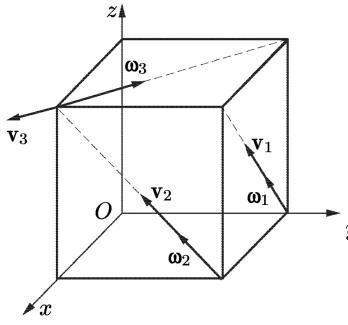
По формуле Ривальса

$$\vec{w}_M = \vec{\mathcal{E}} \times \overline{OM} = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{3} \sin \omega t \\ -\sqrt{3} \cos \omega t \\ 2 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3} \omega^2 r}{\sqrt{7}} = \begin{pmatrix} 2 \sin \omega t \\ -2 \cos \omega t \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3} \omega^2 r}{\sqrt{7}}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\vec{w}_N &= \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overline{ON} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \sin \omega t \\ -\sqrt{3} \cos \omega t \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{3} \sin \omega t \\ -\sqrt{3} \cos \omega t \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \omega^2 r = \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{3} \sin \omega t \\ -\sqrt{3} \cos \omega t \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \sin \omega t \\ 2 \cos \omega t \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \omega^2 r = \begin{pmatrix} -7 \cos \omega t \\ -7 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \omega^2 r;
\end{aligned} \tag{20}$$

$$|\vec{w}_M| = \sqrt{3} \omega^2 r, \quad |\vec{w}_N| = 7 \omega^2 r.$$

Ответ: $w_M = \sqrt{3} \omega^2 r$; $w_N = 7 \omega^2 r$. ◀



4.45. Тело участвует одновременно в трёх винтовых движениях, оси которых расположены по диагоналям граней куба (см. рис.). Найти результирующее движение тела, если $|\vec{\omega}_i| = \omega$, $|\vec{v}_i| = v$. Ребро куба равно a .

► Рассмотрим произвольную точку тела A и найдём её скорость:

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1A} + \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2A} + \vec{v}_3 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{3A} = \\ &= (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{21} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31}) + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{r}_{1A}.\end{aligned}\quad (21)$$

Выберем для определённости в качестве рассматриваемой точки полюс O и проведём некоторые вычисления:

$$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \omega; \quad (22)$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_O &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} v + \\ &+ \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \omega a = \quad (23) \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} v + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \omega a = \begin{bmatrix} 2v + \omega a \\ -2v - 2\omega a \\ 2v - \omega a \end{bmatrix} / \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Ищем кинематический винт:

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overline{OS} = p\vec{\omega}, \quad (24)$$

где S — точка на оси винта. Это — уравнение прямой. Запишем его в более определённом, а лучше — каноническом виде:

$$\frac{v_{Ox} + (\cancel{\omega_x x} - \omega_z y)}{\cancel{\omega_x}} = \frac{v_{Oy} + (\omega_z x - \cancel{\omega_y y})}{\cancel{\omega_y}} = \boxed{\frac{v_{Oz} + (\omega_x y - \omega_y x)}{\omega_z}}. \quad (25)$$

Примечание. Результирующая угловая скорость найдена в (22), поступательная скорость найдётся с учётом связи векторной и канонической формы уравнения прямой (нужная часть заключена в рамку), остальную работу сделала аналитическая геометрия.

Ответ: винтовое движение с $\omega' = \sqrt{2}\omega$ и $v' = \frac{2v - \omega a}{\sqrt{2}}$ вокруг $\begin{cases} x = \frac{v}{\omega} + a; \\ y = \frac{v}{\omega} + \frac{a}{2}. \end{cases}$ ◀

4.53. В постоянном магнитном поле электрон движется по винтовой линии $\begin{cases} x = a \cos bt, \\ y = a \sin bt, \\ z = ct \end{cases}$.
Найти кинематический винт натурального триэдра точки.

► Триэдр движется со скоростью электрона \vec{v} . Найдём его угловую скорость $\vec{\omega}$. Здесь и далее скобки $[\vec{V}]$ обозначают операцию нормировки вектора.

$$\vec{\tau} = [\vec{v}] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -ab \sin bt \\ ab \cos bt \\ c \end{pmatrix} \end{bmatrix}; \quad (26)$$

$$\vec{n} = \dot{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -ab^2 \cos bt \\ ab^2 \sin bt \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos bt \\ \sin bt \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (27)$$

$$\dot{\vec{n}} = b \begin{pmatrix} \sin bt \\ \cos bt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos bt \\ \sin bt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z \sin bt \\ -\omega_z \cos bt \\ \omega_x \sin bt + \omega_y \cos bt \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Поскольку соотношение (28) выполняется $\forall t$, вектор $\vec{\omega} = -b\hat{z}$.

Ну, что ж, ищем винт аналогично 4.45 (см. (25)).

Ответ: винтовое движение с $\omega' = b$ и $v' = c$ вокруг $x = y = 0$. ◀