Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 1

1.20. В некотором приближении орбиту Меркурия можно представить плоской розеткой, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\omega\varphi}, \quad \omega = \mathrm{const} \neq 1. \tag{1}$$

Используя закон площадей $r^2\dot{\varphi} = c = \mathrm{const}$, найти зависимость ускорения w планеты от r.

► Компоненты скорости в полярной системе координат известны:

$$v_r = H_r\dot{r} = \dot{r}, \tag{2}$$

$$v_\varphi = H_\varphi\dot{\varphi} = r\dot{\varphi}; \tag{3}$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \tag{4}$$

Найдём компоненты разложения ускорения $\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_\varphi$:

$$w_r = \frac{1}{2H_r}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial v^2}{\partial r}\right] = \frac{d\dot{r}}{dt} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \tag{5}$$

$$w_\varphi = \frac{1}{2H_\varphi}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial v^2}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\varphi})}{dt} = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \tag{6}$$

Продифференцируем по времени уравнение (1) с учётом $\dot{\varphi} = \dfrac{c}{r^2}$ и $e\cos\omega\varphi = \dfrac{p}{r} - 1$:

$$\dot{r} = \frac{pe\omega\sin\omega\varphi\cdot\dot{\varphi}}{(1 + e\cos\omega\varphi)^2} = \frac{\cancel{r^2}}{p}e\omega\sin\omega\varphi\cdot\frac{c}{\cancel{r^2}} = \frac{ec\omega}{p}\sin\omega\varphi, \tag{7}$$

$$\ddot{r} = \frac{ec\omega^2}{p}\cos\omega\varphi\cdot\frac{c}{r^2} = \frac{c^2\omega^2}{pr^2}\left(\frac{p}{r} - 1\right). \tag{8}$$

Совершив подстановку в (5), получим

$$w_r = \frac{c^2\omega^2}{pr^2}\left(\frac{p}{r} - 1\right) - \frac{c^2}{r^3} = \frac{c^2}{pr^3}\left(p\omega^2 - r\omega^2 - p\right) = -\frac{c^2}{pr^3}\left[\omega^2 r + \left(1 - \omega^2\right)p\right]. \tag{9}$$

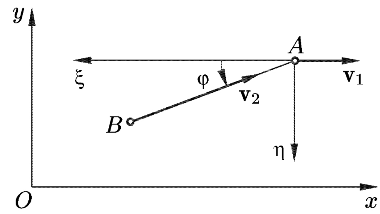
Примечание. При $\omega \to 1$ приходим к классическому ньютоновскому закону $\omega_r = -c^2/(pr^2)$.

Осталось убедиться, что, как и в классическом случае, $w_\varphi = 0$. Это видно из выражения (6) и соотношения

$$r\ddot{\varphi} = r\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{r^2}\right) = -\frac{2c}{r^2}\cdot\dot{r} = -2\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{10}$$

Ответ: $\quad w = |w_r| = \dfrac{c^2}{pr^3}\cdot\left|\omega^2 r + (1 - \omega^2)\,p\right|.$ ◄

1.29. Самолёт, изображённый на рисунке точкой A, движется горизонтально на высоте H с постоянной скоростью $\vec{v}_1 = \vec{v}$. В момент, когда самолёт пролетает над ракетной установкой, пускают самонаводящуюся ракету B, имеющую скорость $\vec{v}_2$ и всё время направленную к точке A, $|\vec{v}_2| = 2\,|\vec{v}|$. Найти уравнение траектории ракеты $AB = r(\varphi)$ в системе отсчёта $A\xi\eta$, движущейся вместе с самолётом. Найти также время полёта ракеты с момента вылета до поражения самолёта и её ускорение как функцию угла φ.



► Радиальная и трансверсальная скорости ракеты равны по модулю соответствующим проекциям относительной скорости $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ вдоль и ортогонально AB:

$$v_r = -v_2 + v_1 \cos\varphi = -(2 - \cos\varphi)v, \tag{11}$$

$$v_\varphi = -v_1 \sin\varphi = -v \sin\varphi. \tag{12}$$

Компоненты скорости в полярной системе координат известны: вводя в систему уравнения (2) и (3), получим

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -(2 - \cos\varphi)v, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{v \sin\varphi}{r} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dr}{r} = \frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi. \tag{13}$$

Последнее дифференциальное уравнение легко интегрируется:

$$\int \frac{dr}{r} = \ln r + \text{const}; \tag{13$^\text{A}$}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \int \frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \int \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \int \frac{d\tan\frac{\varphi}{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}} = \ln\tan\frac{\varphi}{2} + \text{const}; \tag{13$^\text{B}$}$$

$$\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi} = \ln\sin\varphi + \text{const}. \tag{13$^\text{C}$}$$

$$r = C_1 \frac{\tan^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi} = C_1 \frac{\sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2}. \tag{14}$$

Константу интегрирования найдём из начального условия $r\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = H = C_1$.

Для нахождения времени заметим, что при $r \to 0$ полярный угол $\varphi \to 0$;

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v}{H}(1 + \cos\varphi)^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2} = -\frac{v\,dt}{H}. \tag{15}$$

Очередное дифференциальное уравнение также интегрируется:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^4\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\int \left(1 + \tan^2\frac{\varphi}{2}\right) d\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\tan\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\varphi}{6} + C_2. \end{aligned} \tag{15$^\text{A}$}$$

$$t = -\frac{H}{v}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\varphi}{6} + C_2\right). \tag{16}$$

С учётом $t\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ найдём очередную константу дифференцирования $C_2 = -\dfrac{2}{3}$. Таким образом, искомое время полёта ракеты

$$T = t(0) = \frac{2H}{3v}. \tag{17}$$

Определим компоненты ускорения при помощи (5) и (6) с учётом (11), (12) и (14):

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -v\sin\varphi \cdot \left(-\frac{v\sin\varphi}{r}\right) - \frac{v^2\sin^2\varphi}{r} = 0; \tag{18}$$

$$\begin{aligned} w_\varphi &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{d(r\dot{\varphi})}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi} = -v\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + (\cos\varphi - 2)v \cdot \dot{\varphi} \\ &= -2v\dot{\varphi} = \frac{2v^2\sin\varphi}{r} = \frac{2v^2}{H}\left(1+\cos\varphi\right)^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Ответ: $r(\varphi) = \dfrac{H\sin\varphi}{\left(1+\cos\varphi\right)^2}$; $\quad T = \dfrac{2H}{3v}$; $\quad w(\varphi) = \dfrac{2v^2}{H}\left(1+\cos\varphi\right)^2$. ◀

1.37(б). Найти скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для сферических координат r, θ, φ:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{20}$$

► Сначала найдём коэффициенты Ламе данной координатной системы:

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1; \tag{21}$$

$$H_\theta = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta} = r; \tag{22}$$

$$H_\varphi = \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = r\sin\theta. \tag{23}$$

Квадрат модуля скорости точки в таком случае есть

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2; \tag{24}$$

компоненты ускорения рассчитываются аналогично (5):

$$w_r = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial v^2}{\partial r}\right] = \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right), \tag{25}$$

$$w_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r^2\sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\varphi}^2\right] = r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta, \tag{26}$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)}{dt} = (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta. \tag{27}$$

Ответ: $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta^2}$; $\quad w = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}$. ◀

1.41. Точка движется по поверхности сферы вдоль координатной линии сферической системы координат $\varphi(r = \text{const}, \theta = \text{const})$ с постоянной скоростью v. Найти вектор кривизны траектории и указать условия, при которых траектория точки является геодезической.

► При решении настоящей задачи удобно воспользоваться ранее полученными в 1.37(б) результатами:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi = \dot{r}\,\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi. \tag{28}$$

Поскольку точка движется вдоль координатной линии φ, производные $\dot{r}$ и $\dot{\theta} = 0$, следовательно, векторы скорости и ускорения имеют разложения

$$\vec{v} = r\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi; \tag{29}$$

$$\vec{w} = -r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\,\mathbf{e_r} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi. \tag{30}$$

Таким образом, базисный орт $\mathbf{e}_\varphi$ играет роль касательного вектора к траектории точки. Тогда нормальная компонента ускорения лежит в плоскости $\langle \mathbf{e_r}, \mathbf{e}_\theta \rangle$; вектор кривизны найдём делением последней на квадрат скорости:

$$\vec{\omega_n} = -r\dot{\varphi}^2\sin\theta\,(\sin\theta\,\mathbf{e_r} + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta)\,; \tag{31}$$

$$\vec{k} = \frac{\vec{\omega}_n}{v^2} = -\frac{\sin\theta\,\mathbf{e_r} + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta}{r\sin\theta} = -\frac{1}{r}\left(\mathbf{e_r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{\tan\theta}\right). \tag{32}$$

Траектория точки является геодезической, если $\vec{k}$ направлен по нормали к поверхности сферы $r = \text{const}$, а стало быть — ортогонален $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\varphi$, что требует нулевых коэффициентов при упомянутых ортах в разложении $\vec{k}$ ($\tan\theta \to \infty$).

Примечание. Данное рассуждение подтверждает геометрически интуитивную идею о том, что геодезическая параллель на сфере, большой круг с $\theta = \text{const}$ — это экватор.

Ответ: $\vec{k} = -\dfrac{1}{r}\left(\mathbf{e_r} + \dfrac{\mathbf{e}_\theta}{\tan\theta}\right)$; при условии $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. ◄

1.45. Выразить орты сопровождающего трёхгранника $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ через вектор скорости $\vec{v}$ и вектор ускорения $\vec{w}$ точки, если $\vec{w} \times \vec{v} \neq 0$, а $\vec{\tau} \cdot \vec{v} > 0$.

► Первое условие $\vec{w} \times \vec{v} \neq 0$ гарантирует $\vec{w} \nparallel \vec{v}$, а второе означает «естественную» ориентацию трёхгранника ($\vec{\tau} \upuparrows \vec{v}$). В таком случае,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{|d\vec{r}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}; \tag{33}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{w}_n}{|\vec{w}_n|} = \frac{\vec{w} - \vec{w}_\tau}{\sqrt{(\vec{w} - \vec{w}_\tau)^2}} = \frac{\vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{\tau})\vec{\tau}}{\sqrt{\vec{w}^2 - (\vec{w}\cdot\vec{\tau})^2}} = \frac{\vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{\tau})\vec{\tau}}{|\vec{w}\times\vec{\tau}|} = \frac{|\vec{v}|^2\,\vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{v})\,\vec{v}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}\times\vec{v}|}; \tag{34}$$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n} = \frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{w}\times\vec{v}|} = \frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|}. \tag{35}$$

Ответ: $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$; $\vec{n} = \dfrac{|\vec{v}|^2\,\vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{v})\,\vec{v}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}\times\vec{v}|}$; $\vec{b} = \dfrac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|}$. ◄