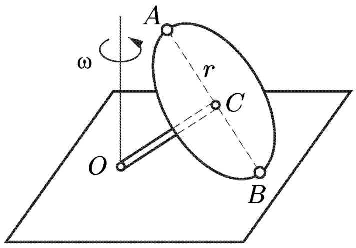
Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 4

4.10. Коническое колесо радиуса r, жёстко насаженное на стержень OC длины $l = r\sqrt{3}$, катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Стержень OC описывает коническую поверхность, вращаясь вокруг неподвижной точки O (в точке O сферический шарнир) с угловым ускорением ε, имея в данный момент угловую скорость ω. Определить угловые скорость и ускорение колеса и ускорения его точек A и B.



► Стержень — твёрдое тело с неподвижной точкой O, вращающееся с угловой скоростью $\vec{\omega}$. С другой стороны, колесо катится без проскальзывания, так что $\vec{v}_B = \overline{0}$. В таком случае,

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \overline{OC} = \vec{\Omega} \times \overline{BC}; \tag{1}$$

$$\vec{w}_C = \vec{\varepsilon} \times \overline{OC} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overline{OC}. \tag{2}$$

где $\vec{\Omega}$ — искомая угловая скорость колеса. Из уравнения (1) найдём её компоненты, введя правую декартову систему координат $Oxyz$ (ось $Ox \upuparrows OB$, ось $Oz \upuparrows \vec{\omega}$):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} r; \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\Omega_y \\ \Omega_z - \sqrt{3}\Omega_x \\ \Omega_y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Видим, что $\Omega_y = 0$. Заметим также, что $\vec{v}_C = \vec{\Omega} \times \overline{OC}$, поскольку колесо движется в целом как твёрдое тело:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_z - \sqrt{3}\Omega_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ 0 \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\Omega_z - \sqrt{3}\Omega_x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теперь с необходимостью $\Omega_z = 0$, так что $\vec{\Omega} = -\sqrt{3}\omega\hat{x}$.

Примечание. Как направление, так и модуль угловой скорости колеса можно было указать, в принципе не совершив никаких вычислений. С другой стороны, приведено относительно строгое доказательство утверждения из абзаца 1 решения задачи 4.34 (может быть применено по аналогии).

Найдём теперь угловое ускорение колеса:

$$\vec{\mathscr{E}} = \dot{\vec{\Omega}} = -\sqrt{3}\dot{\omega}\hat{x} - \sqrt{3}\omega\left(\vec{\omega} \times \hat{x}\right) = -\sqrt{3}\left(\varepsilon\hat{x} + \omega^2\hat{y}\right); \tag{6}$$

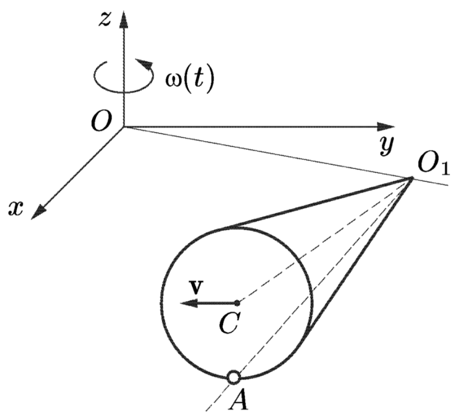
$$\mathscr{E} = \sqrt{3\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right)}. \tag{7}$$

Ускорения точек A и B колеса могут быть рассчитаны по формуле Ривальса:

$$\vec{w}_A = \vec{\mathscr{E}} \times \overline{OA} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overline{OA} = \left\| \overline{OA} = r\hat{x} + \sqrt{3}r\hat{y} \right\| = \cdots ; \tag{8}$$

$$\vec{w}_B = \vec{\mathscr{E}} \times \overline{OB} + \cancel{\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overline{OB}} = -\sqrt{3}\left(\varepsilon\hat{x} + \omega^2\hat{y}\right) \times 2r\hat{x} = -2\sqrt{3}\omega^2 r. \tag{9}$$

Ответ: $\vec{\Omega} = -\sqrt{3}\omega\hat{x}$; $\quad \vec{\mathscr{E}} = -\sqrt{3}\left(\varepsilon\hat{x} + \omega^2\hat{y}\right)$; $\quad$ (8) – (9). ◀



4.25. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\omega(t)$. Конус, вершина O_1 которого неподвижна относительно плоскости, катится по ней без скольжения. Центр основания конуса C движется равномерно относительно плоскости со скоростью $\vec{v}$. Найти угловую скорость и угловое ускорение конуса. Высота конуса h, угол при вершине 2β.

► Перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вместе с плоскостью. В ней конус совершает мгновенное вращение с некоторой угловой скоростью ω_1 вокруг O_1A, так что по формуле Эйлера

$$v = \omega_1 \cdot h \tan\beta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \omega_1 h \sin\beta. \tag{10}$$

Вектор $\vec{\omega}_1$ вращается в подвижной системе отсчёта с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, направленной против Oz, модуль которой

$$\omega_2 = \frac{v}{h\cos\beta}. \tag{11}$$

В неподвижной системе отсчёта

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_1, \qquad \left|\vec{\Omega}\right| = \sqrt{\omega^2 + \frac{v^2}{h^2\sin^2\beta}}; \tag{12}$$

$$\vec{\mathscr{E}} = \dot{\vec{\omega}} + (\vec{\omega} + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_1, \qquad \left|\vec{\mathscr{E}}\right| = \sqrt{\dot{\omega}^2 + \frac{v^2}{h^2\sin^2\beta}\left(\omega - \frac{v}{h\cos\beta}\right)^2}. \tag{13}$$

Ответ: (12) – (13). ◀

4.29. При движении твёрдого тела известны ускорение точки O тела $\vec{w}_O$, угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$, причём $\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon} \neq 0$. Найти точку, ускорение которой равно заданному вектору $\vec{w}$.

► По формуле Ривальса

$$\vec{w} - \vec{w}_O = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{14}$$

Разложим радиус-вектор искомой точки следующим образом:

$$\vec{r} = \alpha\vec{\omega} + \beta\vec{\varepsilon} + \gamma\left[\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}\right], \tag{15}$$

а затем подставим последнее выражение в (14).

$$
\begin{aligned}
\vec{w}-\vec{w}_O &= \vec{\varepsilon}\times(\alpha\vec{\omega}+\beta\vec{\varepsilon}+\gamma\,[\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}])+\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times(\alpha\vec{\omega}+\beta\vec{\varepsilon}+\gamma\,[\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}])= \\
&= \alpha\,[\vec{\varepsilon}\times\vec{\omega}]+\gamma\,[\vec{\varepsilon}\times\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}]+\beta\,[\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}]+\gamma\,[\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}]= \\
&= -\alpha\,[\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}]+\gamma\left(\varepsilon^2\vec{\omega}-\vec{\varepsilon}(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})\right)+\beta\left(\vec{\omega}\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})-\omega^2\vec{\varepsilon}\right)+ \\
&\qquad +\gamma\left[\vec{\omega}\times\left(\cancel{\vec{\omega}\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})}-\omega^2\vec{\varepsilon}\right)\right]= \\
&= \left\{\gamma\varepsilon^2+\beta\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})\right\}\vec{\omega}-\left\{\gamma\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})+\beta\omega^2\right\}\vec{\varepsilon}-\left\{\alpha+\gamma\omega^2\right\}[\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}]\,.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{cases}
\gamma\varepsilon^2+\beta\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})=\dfrac{(\vec{w}-\vec{w}_O,\vec{\omega})}{\omega^2}; \\[2ex]
\gamma\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})+\beta\omega^2=-\dfrac{(\vec{w}-\vec{w}_O,\vec{\varepsilon})}{\varepsilon^2}; \\[2ex]
\alpha+\gamma\omega^2=-\dfrac{(\vec{w}-\vec{w}_O,\vec{\omega},\vec{\varepsilon})}{[\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}]^2}.
\end{cases}
$$

◀

4.38. При движении твёрдого тела, имеющего неподвижную точку O, углы Эйлера меняются по закону $\psi=\omega t$, $\theta=\pi/3$, $\varphi=2\omega t$. Определить ускорение точек M и N тела, если $\overline{OM}\parallel\vec{\Omega}$, а $\overline{ON}\parallel\vec{\mathscr{E}}$, где $\vec{\Omega}$ — угловая скорость, $\vec{\mathscr{E}}$ — угловое ускорение тела. Расстояния $OM=ON=r$.

► Используем для решения настоящей задачи кинематические уравнения Эйлера (в неподвижных осях — *нетрудно вывести*):

$$
\vec{\Omega}=\begin{pmatrix}\dot\varphi\sin\theta\sin\psi\\ -\dot\varphi\sin\theta\cos\psi\\ \dot\varphi\cos\theta+\dot\psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\sin\omega t\\ -\sqrt{3}\cos\omega t\\ 2\end{pmatrix}\omega; \tag{17}
$$

$$
\vec{\mathscr{E}}=\begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\\ 0\end{pmatrix}\dot\varphi\dot\psi\sin\theta=\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}\sqrt{3}\omega^2. \tag{18}
$$

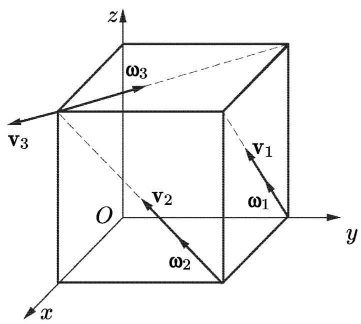
По формуле Ривальса

$$
\vec{w}_M=\vec{\mathscr{E}}\times\overline{OM}=\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\sqrt{3}\sin\omega t\\ -\sqrt{3}\cos\omega t\\ 2\end{pmatrix}\frac{\sqrt{3}\omega^2 r}{\sqrt{7}}=\begin{pmatrix}2\sin\omega t\\ -2\cos\omega t\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}\frac{\sqrt{3}\omega^2 r}{\sqrt{7}}, \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{w}_N=\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\overline{ON}&=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\sin\omega t\\ -\sqrt{3}\cos\omega t\\ 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\sqrt{3}\sin\omega t\\ -\sqrt{3}\cos\omega t\\ 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}\omega^2 r= \\
&=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\sin\omega t\\ -\sqrt{3}\cos\omega t\\ 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\sin\omega t\\ 2\cos\omega t\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}\omega^2 r=\begin{pmatrix}-7\cos\omega t\\ -7\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}\omega^2 r;
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
|\vec{w}_M|=\sqrt{3}\omega^2 r,\qquad |\vec{w}_N|=7\omega^2 r.
$$

Ответ: $w_M=\sqrt{3}\omega^2 r;\qquad w_N=7\omega^2 r.$ ◀



4.45. Тело участвует одновременно в трёх винтовых движениях, оси которых расположены по диагоналям граней куба (см. рис.). Найти результирующее движение тела, если $|\vec{\omega}_i| = \omega$, $|\vec{v}_i| = v$. Ребро куба равно a.

► Рассмотрим произвольную точку тела A и найдём её скорость:

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1A} + \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2A} + \vec{v}_3 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{3A} = \\ &= (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{21} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31}) + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{r}_{1A}.\end{aligned} \tag{21}$$

Выберем для определённости в качестве рассматриваемой точки полюс O и проведём некоторые вычисления:

$$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = \left[\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right]\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\omega; \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_O &= \left[\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right] v + \\ &+ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\omega a = \\ &= \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} v + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\omega a = \begin{pmatrix} 2v + \omega a \\ -2v - 2\omega a \\ 2v - \omega a \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{2}.\end{aligned} \tag{23}$$

Ищем кинематический винт:

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overline{OS} = p\vec{\omega}, \tag{24}$$

где S — точка на оси винта. Это — уравнение прямой. Запишем его в более определённом, а лучше — каноническом виде:

$$\frac{v_{Ox} + (\cancel{\omega_y z} - \omega_z y)}{\cancel{\omega_x}} = \frac{v_{Oy} + (\omega_z x - \cancel{\omega_x z})}{\cancel{\omega_y}} = \boxed{\frac{v_{Oz} + (\omega_x y - \omega_y x)}{\omega_z}}. \tag{25}$$

Примечание. Результирующая угловая скорость найдена в (22), поступательная скорость найдётся с учётом связи векторной и канонической формы уравнения прямой (нужная часть заключена в рамку), остальную работу сделала аналитическая геометрия.

Ответ: винтовое движение с $\omega' = \sqrt{2}\omega$ и $v' = \dfrac{2v - \omega a}{\sqrt{2}}$ вокруг $\begin{cases} x = \dfrac{v}{\omega} + a; \\ y = \dfrac{v}{\omega} + \dfrac{a}{2}. \end{cases}$ ◄

4.53. В постоянном магнитном поле электрон движется по винтовой линии $\begin{cases} x = a\cos bt, \\ y = a\sin bt, \\ z = ct \end{cases}$
Найти кинематический винт натурального триэдра точки.

► Триэдр движется со скоростью электрона $\vec{v}$. Найдём его угловую скорость $\vec{\omega}$. Здесь и далее скобки $\lfloor \vec{V} \rceil$ обозначают операцию нормировки вектора.

$$\vec{\tau} = \lfloor \vec{v} \rceil = \left\lfloor \begin{pmatrix} -ab\sin bt \\ ab\cos bt \\ c \end{pmatrix} \right\rceil; \tag{26}$$

$$\vec{n} = \dot{\vec{\tau}} = \left\lfloor \begin{pmatrix} -ab^2\cos bt \\ -ab^2\sin bt \\ 0 \end{pmatrix} \right\rceil = \begin{pmatrix} -\cos bt \\ -\sin bt \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{27}$$

$$\dot{\vec{n}} = b\begin{pmatrix} \sin bt \\ -\cos bt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos bt \\ -\sin bt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z \sin bt \\ \omega_z \cos bt \\ -\omega_x \sin bt + \omega_y \cos bt \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Поскольку соотношение (28) выполняется $\forall t$, вектор $\vec{\omega} = b\hat{z}$.
Ну, что ж, ищем винт аналогично 4.45 (см. (25)).

Ответ: винтовое движение с $\omega' = b$ и $v' = c$ вокруг $x = y = 0$. ◄