Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 1

1.20. В некотором приближении орбиту Меркурия можно представить плоской розеткой, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\omega\varphi}, \quad \omega = \text{const} \neq 1. \tag{1}$$

Используя закон площадей $r^2\dot\varphi = c = \text{const}$, найти зависимость ускорения w планеты от r.

► Компоненты скорости в полярной системе координат известны:

$$v_r = H_r \dot r = \dot r, \tag{2}$$
$$v_\varphi = H_\varphi \dot\varphi = r\dot\varphi; \tag{3}$$
$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2. \tag{4}$$

Найдём компоненты разложения ускорения $\vec w = \vec w_r + \vec w_\varphi$:

$$w_r = \frac{1}{2H_r}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial v^2}{\partial r}\right] = \frac{d\dot r}{dt} - r\dot\varphi^2 = \ddot r - r\dot\varphi^2; \tag{5}$$
$$w_\varphi = \frac{1}{2H_\varphi}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot \varphi}\right) - \frac{\partial v^2}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot\varphi)}{dt} = 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi. \tag{6}$$

Продифференцируем по времени уравнение (1) с учётом $\dot\varphi = \dfrac{c}{r^2}$ и $e\cos\omega\varphi = \dfrac{p}{r} - 1$:

$$\dot r = \frac{pe\omega\sin\omega\varphi\cdot\dot\varphi}{(1+e\cos\omega\varphi)^2} = \frac{\cancel{r^2}}{p}e\omega\sin\omega\varphi\cdot\frac{c}{\cancel{r^2}} = \frac{ec\omega}{p}\sin\omega\varphi, \tag{7}$$
$$\ddot r = \frac{ec\omega^2}{p}\cos\omega\varphi\cdot\frac{c}{r^2} = \frac{c^2\omega^2}{pr^2}\left(\frac{p}{r} - 1\right). \tag{8}$$

Совершив подстановку в (5), получим

$$w_r = \frac{c^2\omega^2}{pr^2}\left(\frac{p}{r}-1\right) - \frac{c^2}{r^3} = \frac{c^2}{pr^3}\left(p\omega^2 - r\omega^2 - p\right) = -\frac{c^2}{pr^3}\left[\omega^2 r + \left(1-\omega^2\right)p\right]. \tag{9}$$

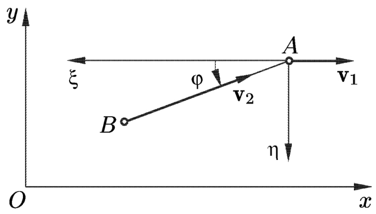
Примечание. При $\omega \to 1$ приходим к классическому ньютоновскому закону $\omega_r = -c^2/(pr^2)$.

Осталось убедиться, что, как и в классическом случае, $w_\varphi = 0$. Это видно из выражения (6) и соотношения

$$r\ddot\varphi = r\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{r^2}\right) = -\frac{2c}{r^2}\cdot\dot r = -2\dot r\dot\varphi. \tag{10}$$

Ответ: $w = |w_r| = \dfrac{c^2}{pr^3}\cdot\left|\omega^2 r + (1-\omega^2)\,p\right|.$ ◄

1.29. Самолёт, изображённый на рисунке точкой A, движется горизонтально на высоте H с постоянной скоростью $\vec{v}_1 = \vec{v}$. В момент, когда самолёт пролетает над ракетной установкой, пускают самонаводящуюся ракету B, имеющую скорость $\vec{v}_2$ и всё время направленную к точке A, $|\vec{v}_2| = 2\,|\vec{v}|$. Найти уравнение траектории ракеты $AB = r(\varphi)$ в системе отсчёта $A\xi\eta$, движущейся вместе с самолётом. Найти также время полёта ракеты с момента вылета до поражения самолёта и её ускорение как функцию угла φ.



▶ Радиальная и трансверсальная скорости ракеты равны по модулю соответствующим проекциям относительной скорости $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ вдоль и ортогонально AB:

$$v_r = -v_2 + v_1 \cos\varphi = -(2-\cos\varphi)v, \tag{11}$$

$$v_\varphi = -v_1 \sin\varphi = -v\sin\varphi. \tag{12}$$

Компоненты скорости в полярной системе координат известны: вводя в систему уравнения (2) и (3), получим

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -(2-\cos\varphi)v, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{v\sin\varphi}{r} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dr}{r} = \frac{2-\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi. \tag{13}$$

Последнее дифференциальное уравнение легко интегрируется:

$$\int \frac{dr}{r} = \ln r + \text{const}; \tag{13$^\text{A}$}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \int \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \int \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \int \frac{d\tan\frac{\varphi}{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}} = \ln\tan\frac{\varphi}{2} + \text{const}; \tag{13$^\text{B}$}$$

$$\int \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi} = \ln\sin\varphi + \text{const}. \tag{13$^\text{C}$}$$

$$r = C_1\frac{\tan^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi} = C_1\frac{\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}. \tag{14}$$

Константу интегрирования найдём из начального условия $r\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = H = C_1$.

Для нахождения времени заметим, что при $r \to 0$ полярный угол $\varphi \to 0$;

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v}{H}(1+\cos\varphi)^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = -\frac{v\,dt}{H}. \tag{15}$$

Очередное дифференциальное уравнение также интегрируется:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^4\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\int\left(1+\tan^2\frac{\varphi}{2}\right)d\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\tan\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\varphi}{2} + C_2. \end{aligned} \tag{15$^\text{A}$}$$

$$t = -\frac{H}{v}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\varphi}{2} + C_2\right). \tag{16}$$

С учётом $t\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ найдём очередную константу дифференцирования $C_2 = -\dfrac{2}{3}$. Таким образом, искомое время полёта ракеты

$$T = t(0) = \frac{2H}{3v}. \tag{17}$$

Определим компоненты ускорения при помощи (5) и (6) с учётом (11), (12) и (14):

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -v\sin\varphi \cdot \left(-\frac{v\sin\varphi}{r}\right) - \frac{v^2\sin^2\varphi}{r} = 0; \tag{18}$$

$$\begin{aligned} w_\varphi &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{d(r\dot{\varphi})}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi} = -v\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + (\cos\varphi - 2)v\cdot\dot{\varphi} \\ &= -2v\dot{\varphi} = \frac{2v^2\sin\varphi}{r} = \frac{2v^2}{H}\left(1+\cos\varphi\right)^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Ответ: $r(\varphi) = \dfrac{H\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$; $\quad T = \dfrac{2H}{3v}$; $\quad w(\varphi) = \dfrac{2v^2}{H}\left(1+\cos\varphi\right)^2$. ◀

1.37(б). Найти скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для сферических координат r, θ, φ:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{20}$$

► Сначала найдём коэффициенты Ламе данной координатной системы:

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1; \tag{21}$$

$$H_\theta = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta} = r; \tag{22}$$

$$H_\varphi = \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = r\sin\theta. \tag{23}$$

Квадрат модуля скорости точки в таком случае есть

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2; \tag{24}$$

компоненты ускорения рассчитываются аналогично (5):

$$w_r = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v^2}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial v^2}{\partial r}\right] = \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right), \tag{25}$$

$$w_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2\right] = r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta, \tag{26}$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)}{dt} = (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta. \tag{27}$$

Ответ: $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta^2}$; $\quad w = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}$. ◀

1.41. Точка движется по поверхности сферы вдоль координатной линии сферической системы координат $\varphi(r = \text{const}, \theta = \text{const})$ с постоянной скоростью v. Найти вектор кривизны траектории и указать условия, при которых траектория точки является геодезической.

► При решении настоящей задачи удобно воспользоваться ранее полученными в 1.37(б) результатами:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi = \dot{r}\,\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi. \tag{28}$$

Поскольку точка движется вдоль координатной линии φ, производные $\dot{r}$ и $\dot{\theta} = 0$, следовательно, векторы скорости и ускорения имеют разложения

$$\vec{v} = r\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi; \tag{29}$$
$$\vec{w} = -r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\,\mathbf{e_r} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi. \tag{30}$$

Таким образом, базисный орт $\mathbf{e}_\varphi$ играет роль касательного вектора к траектории точки. Тогда нормальная компонента ускорения лежит в плоскости $\langle\mathbf{e_r}, \mathbf{e}_\theta\rangle$; вектор кривизны найдём делением последней на квадрат скорости:

$$\vec{\omega}_n = -r\dot{\varphi}^2\sin\theta\,(\sin\theta\,\mathbf{e_r} + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta)\,; \tag{31}$$
$$\vec{k} = \frac{\vec{\omega}_n}{v^2} = -\frac{\sin\theta\,\mathbf{e_r} + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta}{r\sin\theta} = -\frac{1}{r}\left(\mathbf{e_r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{\tan\theta}\right). \tag{32}$$

Траектория точки является геодезической, если $\vec{k}$ направлен по нормали к поверхности сферы $r = \text{const}$, а стало быть — ортогонален $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\varphi$, что требует нулевых коэффициентов при упомянутых ортах в разложении $\vec{k}$ ($\tan\theta \to \infty$).

Примечание. Данное рассуждение подтверждает геометрически интуитивную идею о том, что геодезическая параллель на сфере, большой круг с $\theta = \text{const}$ — это экватор.

Ответ: $\vec{k} = -\dfrac{1}{r}\left(\mathbf{e_r} + \dfrac{\mathbf{e}_\theta}{\tan\theta}\right)$; при условии $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. ◄

1.45. Выразить орты сопровождающего трёхгранника $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ через вектор скорости $\vec{v}$ и вектор ускорения $\vec{w}$ точки, если $\vec{w} \times \vec{v} \neq 0$, а $\vec{\tau} \cdot \vec{v} > 0$.

► Первое условие $\vec{w} \times \vec{v} \neq 0$ гарантирует $\vec{w} \nparallel \vec{v}$, а второе означает «естественную» ориентацию трёхгранника ($\vec{\tau} \upuparrows \vec{v}$). В таком случае,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{|d\vec{r}|} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}; \tag{33}$$
$$\vec{n} = \frac{\vec{w}_n}{|\vec{w}_n|} = \frac{\vec{w} - \vec{w}_\tau}{\sqrt{(\vec{w} - \vec{w}_\tau)^2}} = \frac{\vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{\tau})\vec{\tau}}{\sqrt{\vec{w}^2 - (\vec{w}\cdot\vec{\tau})^2}} = \frac{\vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{\tau})\vec{\tau}}{|\vec{w}\times\vec{\tau}|} = \frac{|\vec{v}|^2\,\vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{v})\,\vec{v}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}\times\vec{v}|}; \tag{34}$$
$$\vec{b} = \vec{\tau}\times\vec{n} = \frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{w}\times\vec{v}|} = \frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|}. \tag{35}$$

Ответ: $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$; $\vec{n} = \dfrac{|\vec{v}|^2\,\vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{v})\,\vec{v}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}\times\vec{v}|}$; $\vec{b} = \dfrac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|}$. ◄

Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 2

3.6. Плоская фигура движется в своей плоскости. Найти положение точки A, если известны скорость этой точки $\vec{v}_A$, скорость некоторой другой точки $\vec{v}_0$ и угловая скорость фигуры $\vec{\omega}$. Использовать полученный результат для определения положения мгновенного центра скоростей P.

► По теореме о распределении скоростей в твёрдом теле

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \overline{OA}. \tag{1}$$

Умножим векторно уравнение (1) на $\vec{\omega}$ слева:

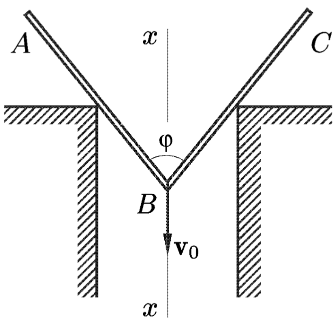
$$\vec{\omega} \times (\vec{v}_A - \vec{v}_0) = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overline{OA} = \vec{\omega}\cancelto{0}{(\vec{\omega}, \overline{OA})} - \overline{OA}\,(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = -\omega^2 \cdot \overline{OA}; \tag{2}$$

$$\overline{OA} = \frac{\vec{\omega} \times (\vec{v}_0 - \vec{v}_A)}{\omega^2}. \tag{3}$$

В частности, для мгновенного центра скоростей P можно записать $\vec{v}_P = \vec{0}$.

Ответ: $\overline{OA} = \dfrac{\vec{\omega} \times (\vec{v}_0 - \vec{v}_A)}{\omega^2}$; $\quad \overline{OP} = \dfrac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2}$. ◄

3.12. Стержни AB и BC шарнирно соединены в точке B и опираются на два прямых угла, как показано на рисунке. Точка B движется по прямой xx, равноудалённой от вертикальных сторон углов. Во время движения стержни касаются вершин прямых углов. Доказать, что скорость точки касания каждого стержня вершин прямого угла направлена вдоль стержня. Найти также скорости этой точки в зависимости от угла $\angle ABC = \varphi$, если скорость точки B равна v_0.



► Введём неподвижную систему координат $T\xi\eta$ в точке T касания стержнем угла в данный момент времени; ось ξ направим вдоль стержня, ось η — перпендикулярно названному направлению. Точка T имеет скорость

$$\vec{v}_T = v_\xi \mathbf{e}_\xi + v_\eta \mathbf{e}_\eta. \tag{4}$$

Требуется показать, что $v_\eta = 0$. В самом деле, рассмотрим точку U стержня с координатами $(\delta\xi; 0)$, которая станет точкой касания через промежуток времени δt. С одной стороны, понятно, что

$$\vec{v}_U = \frac{\delta\xi}{\delta t}\,\mathbf{e}_\xi; \tag{5}$$

с другой стороны, по теореме Эйлера

$$\vec{v}_A = \vec{v}_T + \vec{\omega} \times \overline{TA}. \tag{6}$$

Используя (4) и (5), запишем (6) в «проекциях»:

$$\frac{\delta\xi}{\delta t}\,\mathbf{e}_\xi = v_\xi\mathbf{e}_\xi + v_\eta\mathbf{e}_\eta - \omega\,\delta\xi\cdot([\mathbf{e}_\xi\times\mathbf{e}_\eta]\times\mathbf{e}_\xi) = v_\xi\mathbf{e}_\xi + v_\eta\mathbf{e}_\eta + \omega\,\delta\xi\,\mathbf{e}_\eta. \tag{7}$$

Таким образом, $v_\eta = \omega\,\delta\xi \to 0$, что и требовалось доказать. ■

Проекции скоростей точек стержня на ось ξ равны между собой (это, между прочим, побочный результат приведённого выше доказательства). В силу симметрии системы нетрудно записать искомый результат.

Ответ: $v_T = v_B\cos\dfrac{\varphi}{2}$. ◀

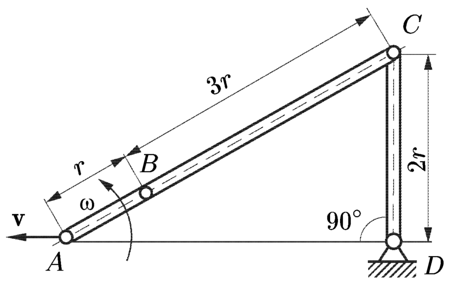
3.15. Плоская фигура движется в своей плоскости, причём её угловая скорость равна ω. Найти радиус кривизны траектории точки A фигуры, если известны ускорение этой точки $\vec{w}_A$ и положение мгновенного центра скоростей P.

► Радиус кривизны траектории точки выражается через её нормальное ускорение. Дальнейший ход решения состоит в следующей выкладке:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\left|\vec\omega\times\overline{PA}\right|^2}{\sqrt{\vec{w}_A^2 - (\vec{w}_A,\vec\tau)^2}} = \frac{\left|\vec\omega\times\overline{PA}\right|^3}{|\vec{w}_A\times\vec{v}|} = \frac{\left|\vec\omega\times\overline{PA}\right|^3}{\left|\vec{w}_A\times\vec\omega\times\overline{PA}\right|} = \frac{\omega^2\left|\overline{PA}\right|^3}{\left|\left(\vec{w}_A,\overline{PA}\right)\right|}. \tag{8}$$

Ответ: $\rho = \dfrac{\omega^2\left|\overline{PA}\right|^3}{\left|\left(\vec{w}_A,\overline{PA}\right)\right|}$. ◀

3.24. Стержни AB, BC и CD соединены шарнирами, причём стержень CD может поворачиваться вокруг неподвижной точки D, а стержень AB вращается с постоянной угловой скоростью $\vec\omega$ вокруг точки A, движущейся по прямой AD с постоянной скоростью $\vec{v}$. Найти скорость и ускорение точки C в момент, когда $\angle ABC = 180°$, а $\angle ADC = 90°$.



► Введём координатные оси на плоскости следующим образом: ось x направим вдоль DA, ось y — вдоль DC. Дополним координатную систему осью z до правой тройки: $\mathbf{e_z} = \mathbf{e_x}\times\mathbf{e_y}$.

Введём для краткости обозначение $\psi \equiv \angle DAC = 30°$ и запишем скорость точки C двумя способами:

$$\vec{v}_C = \vec\omega_{DC}\times\overline{DC} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_{DC}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2r\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2r\omega_1\\0\\0\end{pmatrix}; \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_C &= \vec{v}_B + \vec\omega_{BC}\times\overline{BC} = \vec{v}_A + \vec\omega_{AB}\times\overline{AB} + \vec\omega_{BC}\times\overline{BC} = \\ &= \begin{pmatrix}v\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cos\psi\\\sin\psi\\0\end{pmatrix} + 3r\begin{pmatrix}0\\0\\\omega_2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cos\psi\\\sin\psi\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v-(\omega-3\omega_2)r\sin\psi\\-(\omega-3\omega_2)r\cos\psi\\0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{10}$$

Приравнивая компоненты вектора $\vec{v}_C$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -2r\omega_1 = v - (\omega - 3\omega_2) r \sin\psi; \\ 0 = -(\omega - 3\omega_2) r \cos\psi. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \omega_1 = -v/2r; \\ \omega_2 = \omega/3. \end{cases} \tag{11}$$

Пристальный взгляд на (10) позволяет установить, что $\vec{v}_C = \vec{v}$.

Теперь займёмся ускорениями:

$$\begin{gathered} \vec{w}_C = \vec{\varepsilon}_{DC} \times \overline{DC} + \vec{\omega}_{DC} \times \vec{\omega}_{DC} \times \overline{DC} = \vec{\varepsilon}_{DC} \times \overline{DC} - \omega_1^2 \cdot \overline{DC} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 \cdot 2r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\varepsilon_1 r \\ -v^2/(2r) \\ 0 \end{pmatrix}; \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \vec{w}_C = \vec{w}_B + \vec{\varepsilon}_{BC} \times \overline{BC} - \omega_2^2 \cdot \overline{BC} = -\omega^2 \cdot \overline{AB} - \omega_2^2 \cdot \overline{BC} + \vec{\varepsilon}_{BC} \times \overline{BC} = \\ = \begin{pmatrix} \left(\omega^2 + 3\omega_2^2\right) r \cos\psi \\ -\left(\omega^2 + 3\omega_2^2\right) r \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} + 3r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\omega^2 \cos\psi - 3\varepsilon_2 \sin\psi \\ -\frac{4}{3}\omega^2 \sin\psi - 3\varepsilon_2 \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} r. \end{gathered} \tag{13}$$

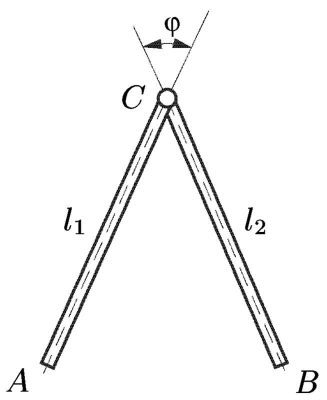
Теперь нетрудно уже вновь перейти к системе уравнений:

$$\begin{cases} -4\sqrt{3}\varepsilon_1 = 4\omega^2 - 3\sqrt{3}\varepsilon_2; \\ v^2/r^2 = \frac{4}{3}\omega^2 + 3\sqrt{3}\varepsilon_2. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad -4\sqrt{3}\varepsilon_1 + \frac{v^2}{r^2} = \frac{16}{3}\omega^2. \tag{14}$$

$$\vec{\omega}_C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{16}{3}\omega^2 r - v^2/r\right) \\ -\frac{1}{2}v^2/r \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{15}$$

$$\omega_C = \sqrt{\frac{64}{27}\omega^4 r^2 + \frac{1}{3}\frac{v^4}{r^2} - \frac{8}{9}\omega^2 v^2}. \tag{16}$$

Ответ: $\vec{v}_C = \vec{v}$; $\quad \vec{w}_C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{16}{3}\omega^2 r - v^2/r\right) \\ -\frac{1}{2}v^2/r \\ 0 \end{pmatrix}$. ◄



3.33. Стержни AC и BC длины l_1 и l_2 соответственно, соединённые в точке C шарниром, движутся в плоскости. Известны скорости свободных концов стержней $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, а также их ускорения $\vec{w}_A$ и $\vec{w}_B$. Найти угловые скорости и угловые ускорения стержней, если угол между ними в рассматриваемый момент времени равен φ $(0 < \varphi < \pi)$.

► Запишем скорость и ускорение точки C двумя способами:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \times \overline{AC}, \tag{17}$$
$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \times \overline{BC}; \tag{18}$$

$$\vec{w}_C = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}_1 \times \overline{AC} - \omega_1^2 \cdot \overline{AC}, \tag{19}$$
$$\vec{w}_C = \vec{w}_B + \vec{\varepsilon}_2 \times \overline{BC} - \omega_2^2 \cdot \overline{BC}. \tag{20}$$

Умножим уравнения (17) и (18) скалярно на $\overline{BC}$ и исключим $\vec{v}_C$:

$$\left(\vec{v}_A, \overline{BC}\right) + \left(\overline{BC}, \vec{\omega}_1, \overline{AC}\right) = \left(\vec{v}_B, \overline{BC}\right) + \cancel{\left(\overline{BC}, \vec{\omega}_2, \overline{BC}\right)}, \tag{21}$$

$$\left(\vec{\omega}_1, \overline{BC}, \overline{AC}\right) = \left(\vec{v}_A - \vec{v}_B, \overline{BC}\right), \tag{22}$$

$$\omega_1 = \frac{(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \overline{BC}}{l_1 l_2 \sin\varphi}. \tag{23}$$

Для нахождения другой угловой скорости умножим те же уравнения скалярно на $\overline{AC}$:

$$\left(\vec{v}_A, \overline{AC}\right) + \cancel{\left(\overline{AC}, \vec{\omega}_1, \overline{AC}\right)} = \left(\vec{v}_B, \overline{AC}\right) + \left(\overline{AC}, \vec{\omega}_2, \overline{BC}\right), \tag{24}$$

$$\left(\vec{\omega}_1, \overline{AC}, \overline{BC}\right) = \left(\vec{v}_B - \vec{v}_A, \overline{AC}\right), \tag{25}$$

$$\omega_2 = \frac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \overline{AC}}{l_1 l_2 \sin\varphi}. \tag{26}$$

Теперь умножим уравнения (19) и (20) скалярно на $\overline{BC}$ и исключим $\vec{w}_C$:

$$\left(\vec{w}_A, \overline{BC}\right) + \left(\overline{BC}, \vec{\varepsilon}_1, \overline{AC}\right) - \omega_1^2 \cdot \left(\overline{AC}, \overline{BC}\right) = \left(\vec{w}_B, \overline{BC}\right) - \omega_2^2 \cdot \left(\overline{BC}, \overline{BC}\right), \tag{27}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(\vec{w}_B - \vec{w}_A) \cdot \overline{BC} - \omega_2^2 l_2^2 + \omega_1^2 l_1 l_2 \cos\varphi}{l_1 l_2 \sin\varphi}. \tag{28}$$

Аналогично для ε_2:

$$\left(\vec{w}_A, \overline{AC}\right) - \omega_1^2 \cdot \left(\overline{AC}, \overline{AC}\right) = \left(\vec{w}_B, \overline{AC}\right) + \left(\overline{AC}, \vec{\varepsilon}_2, \overline{BC}\right) - \omega_2^2 \cdot \left(\overline{AC}, \overline{BC}\right), \tag{29}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(\vec{w}_B - \vec{w}_A) \cdot \overline{AC} + \omega_1^2 l_1^2 - \omega_2^2 l_1 l_2 \cos\varphi}{l_1 l_2 \sin\varphi}. \tag{30}$$

Примечание. Направления искомых векторов без ограничения общности можно установить, используя частный случай, например, ситуацию, когда точка C является мгновенным центром скоростей стержней. Безусловно, эти векторы ортогональны плоскости рисунка.

Ответ: $\omega_1 = \dfrac{(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \overline{BC}}{l_1 l_2 \sin\varphi}$; $\omega_2 = \dfrac{(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \overline{AC}}{l_1 l_2 \sin\varphi}$;

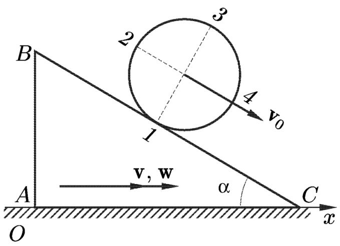
$\varepsilon_1 = \dfrac{(\vec{w}_B - \vec{w}_A) \cdot \overline{BC} - \omega_2^2 l_2^2 + \omega_1^2 l_1 l_2 \cos\varphi}{l_1 l_2 \sin\varphi}$; $\varepsilon_2 = \dfrac{(\vec{w}_B - \vec{w}_A) \cdot \overline{AC} + \omega_1^2 l_1^2 - \omega_2^2 l_1 l_2 \cos\varphi}{l_1 l_2 \sin\varphi}$. ◄

Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 3

2.11. Призма ABC движется поступательно вдоль оси Ox с ускорением $\vec{w}$, имея в данный момент скорость $\vec{v}$. По линии наибольшего ската BC призмы катится без скольжения цилиндр, скорость центра которого относительно призмы постоянна и равна $\vec{v_0}$. Радиус цилиндра R, $\angle BCA = \alpha$. Найти скорости и ускорения точек $1, 2, 3, 4$ цилиндра в данный момент времени.



► В подвижной (штрихованной) системе отсчёта призмы цилиндр совершает мгновенное вращение вокруг точки 1: $\vec{v}_1' = \overline{0}$. Введём координатные оси: направление Ox уже задано, Oy направим вертикально вверх, $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. *Без доказательства* заявим, что угловая скорость цилиндра

$$\vec{\omega} = -\frac{v_0}{R}\hat{z}. \tag{1}$$

Скорости всех заданных точек найдутся по формуле Эйлера ($\vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_{1i}$):

$$\vec{v}_2' = -\frac{v_0}{R}\hat{z} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}R\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}R\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}v_0\left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\hat{x} - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\hat{y}\right]; \tag{2}$$

$$\vec{v}_3' = -\frac{v_0}{R}\hat{z} \times \begin{pmatrix} 2R\sin\alpha \\ 2R\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_0\left[\cos\alpha\cdot\hat{x} - \sin\alpha\cdot\hat{y}\right]; \tag{3}$$

$$\vec{v}_4' = -\frac{v_0}{R}\hat{z} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}R\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}R\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}v_0\left[\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\hat{x} - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\hat{y}\right]. \tag{4}$$

Переход к неподвижной системе отсчёта осуществляется легко и приятно: $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}$.

$$\vec{v}_1 = v\hat{x}, \qquad v_1 = v; \tag{5}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v + v_0(\cos\alpha + \sin\alpha) \\ v_0(\cos\alpha - \sin\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \sqrt{v^2 + 2v_0^2 + 2vv_0(\cos\alpha + \sin\alpha)}; \tag{6}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} v + 2v_0\cos\alpha \\ -2v_0\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \sqrt{v^2 + 4v_0^2 + 4vv_0\cos\alpha}; \tag{7}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} v + v_0(\cos\alpha - \sin\alpha) \\ -v_0(\sin\alpha + \cos\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \sqrt{v^2 + 2v_0^2 + 2vv_0(\cos\alpha - \sin\alpha)}. \tag{8}$$

Ускорение центра цилиндра в штрихованной системе равно нулю. Значит, $\vec{w}_i' = \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}_{0i}$:

$$\vec{w}_1' = -\omega^2 R\left[-\sin\alpha\cdot\hat{x} - \cos\alpha\cdot\hat{y}\right]; \tag{9}$$
$$\vec{w}_2' = -\omega^2 R\left[-\cos\alpha\cdot\hat{x} + \sin\alpha\cdot\hat{y}\right]; \tag{10}$$
$$\vec{w}_3' = -\omega^2 R\left[+\sin\alpha\cdot\hat{x} + \cos\alpha\cdot\hat{y}\right]; \tag{11}$$
$$\vec{w}_4' = -\omega^2 R\left[+\cos\alpha\cdot\hat{x} - \sin\alpha\cdot\hat{y}\right]. \tag{12}$$

Аналогично, поскольку призма движется поступательно, всё очень приятно:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} w + v_0^2/R\cdot\sin\alpha \\ v_0^2/R\cdot\cos\alpha \\ 0\end{pmatrix}, \qquad w_1 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} + \frac{2wv_0^2}{R}\sin\alpha}; \tag{13}$$

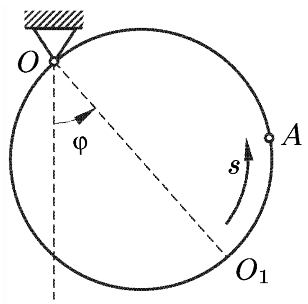
$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} w + v_0^2/R\cdot\cos\alpha \\ -v_0^2/R\cdot\cos\alpha \\ 0\end{pmatrix}, \qquad w_2 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} + \frac{2wv_0^2}{R}\cos\alpha}; \tag{14}$$

$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} w - v_0^2/R\cdot\sin\alpha \\ -v_0^2/R\cdot\cos\alpha \\ 0\end{pmatrix}, \qquad w_3 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} - \frac{2wv_0^2}{R}\sin\alpha}; \tag{15}$$

$$\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} w - v_0^2/R\cdot\cos\alpha \\ -v_0^2/R\cdot\sin\alpha \\ 0\end{pmatrix}, \qquad w_4 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} - \frac{2wv_0^2}{R}\cos\alpha}. \tag{16}$$

Ответ: (5) – (8), (13) – (16). ◄

2.14. Круговое кольцо, точка O которого неподвижна, совершает колебания в своей плоскости по закону $\varphi = \varphi_0\sin\omega t$. Радиус кольца равен R. Точка A движется по кольцу так, что $s = at^2$, где s — длина дуги O_1A. Найти скорость и ускорение точки A в момент времени $t = \pi/\omega$.



► В заданный момент времени линия OO_1 отвесна. Введём декартову систему координат: $\hat{x}\upuparrows OO_1$, $\hat{y}$ — вправо, $\hat{z} = \hat{x}\times\hat{y}$.

В системе отсчёта кольца

$$\begin{cases} x_A = R\left(1 + \cos\dfrac{s}{R}\right), \\ y_A = R\sin\dfrac{s}{R}. \end{cases} \tag{17}$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получим компоненты скорости и ускорения точки A в этой системе:

$$\begin{cases} \dot{x}_A = -\sin\dfrac{s}{R}\cdot 2at, \\ \dot{y}_A = \cos\dfrac{s}{R}\cdot 2at; \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x}_A = -\cos\dfrac{s}{R}\cdot\dfrac{4a^2t^2}{R} - \sin\dfrac{s}{R}\cdot 2a, \\ \ddot{y}_A = -\sin\dfrac{s}{R}\cdot\dfrac{4a^2t^2}{R} + \cos\dfrac{s}{R}\cdot 2a. \end{cases} \tag{18}$$

Угловая скорость и угловое ускорение кольца

$$\vec{\Omega} = -\varphi_0 \omega \hat{z}; \tag{19}$$
$$\vec{\varepsilon} = +\varphi_0 \omega^2 \hat{z}. \tag{20}$$

Можем теперь применить теоремы о сложении скоростей и ускорений:

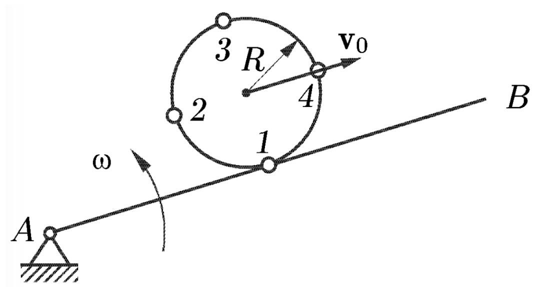
$$\vec{v}_A = \vec{\Omega} \times \vec{r}_A + \vec{v}'_A =$$
$$= -\varphi_0 \omega R \hat{z} \times \begin{pmatrix} 1+\cos\frac{at^2}{R} \\ \sin\frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} + 2at \begin{pmatrix} -\sin\frac{at^2}{R} \\ \cos\frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\varphi_0\omega R - \frac{2a\pi}{\omega}\right]\sin\frac{a\pi^2}{\omega^2 R} \\ -2\varphi_0\omega R\cos^2\frac{a\pi^2}{2\omega^2 R} + \frac{2a\pi}{\omega}\cos\frac{a\pi^2}{\omega^2 R} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Примечание. Проверка совпадения модуля $\vec{v}_A$ с ответом из задачника представляет собой весьма занимательное занятие. На сей раз с этим помогает справиться Wolfram Alpha. *Для $\vec{w}_A$ аналогичная проверка производиться не будет.*

$$\vec{w}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A - \Omega^2 \vec{r}_A + \vec{w}'_A + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_A = \varphi_0 \omega^2 \hat{z} \times \begin{pmatrix} 1+\cos\frac{at^2}{R} \\ \sin\frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} -$$
$$- \varphi_0^2\omega^2 \begin{pmatrix} 1+\cos\frac{at^2}{R} \\ \sin\frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4a^2t^2}{R}\cos\frac{at^2}{R} - 2a\sin\frac{at^2}{R} \\ -\frac{4a^2t^2}{R}\sin\frac{at^2}{R} + 2a\cos\frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} - 2\varphi_0\omega\hat{z} \times 2at \begin{pmatrix} -\sin\frac{at^2}{R} \\ \cos\frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \tag{22}$$
$$= \begin{pmatrix} -\varphi_0\omega^2\sin\frac{a\pi^2}{\omega^2R} - 2\varphi_0^2\omega^2\cos^2\frac{a\pi^2}{2\omega^2R} - \frac{4a^2\pi^2}{\omega^2R}\cos\frac{a\pi^2}{\omega^2R} - 2a\sin\frac{a\pi^2}{\omega^2R} + 4\varphi_0\pi\omega a\cos\frac{a\pi^2}{\omega^2R} \\ 2\varphi_0\omega^2\cos^2\frac{a\pi^2}{2\omega^2R} - \varphi_0^2\omega^2\sin\frac{a\pi^2}{\omega^2R} - \frac{4a^2\pi^2}{\omega^2R}\sin\frac{a\pi^2}{\omega^2R} + 2a\cos\frac{a\pi^2}{\omega^2R} + 4\varphi_0\pi\omega a\sin\frac{a\pi^2}{\omega^2R} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (21), (22). ◀

3.22. Диск радиуса R катится без скольжения по направляющей AB, вращающейся в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Найти скорости и ускорения точек $1, 2, 3, 4$ диска, если относительная скорость его центра постоянна и равна v_0. В начальный момент точка касания диска с направляющей совпадала с точкой A.



► В подвижной системе отсчёта направляющей скорости и ускорения указанных точек равны соответственно (см. задачу 2.11)

$$\vec{v}'_i = \vec{\Omega}' \times \vec{r}_{1i}, \tag{23}$$
$$\vec{w}'_i = -\Omega'^2 \vec{r}_{0i}; \tag{24}$$

где $\Omega' = v_0/R$ — угловая скорость вращения диска.

Используем теоремы о сложении скоростей и ускорений:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ai} + \vec{v}'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A1} + \left(\vec{\omega} + \vec{\Omega}'\right) \times \left(\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{01}\right); \tag{25}$$
$$\vec{w}_i = \omega \times \omega \times \vec{r}_{Ai} + \vec{w}'_i + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_i = \underline{-\omega^2 \vec{r}_{A1} + (\omega - 2\Omega')\,\omega \vec{r}_{01}} - (\omega - \Omega')^2\, \vec{r}_{0i}. \tag{26}$$

Зададимся целью получить ответы в адекватном виде. Для этого введём систему координат следующим образом: $Ax \upuparrows AB$, $Ay \perp AB$ и направлена вверх, $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. В этой системе все нужные векторы имеют «красивый» вид:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}, \tag{27}$$
$$\vec{\Omega}' = -\frac{v_0}{R}\hat{z}; \tag{28}$$

$$\vec{r}_{A1} = v_0 t \cdot \hat{x}; \tag{29}$$
$$\vec{r}_{01} = -R\hat{y}, \tag{30}$$
$$\vec{r}_{02} = -R\hat{x}, \tag{31}$$
$$\vec{r}_{03} = +R\hat{y}, \tag{32}$$
$$\vec{r}_{04} = +R\hat{x}. \tag{33}$$

Осталось произвести вычисления по формулам (25) и (26). ◀

Например,

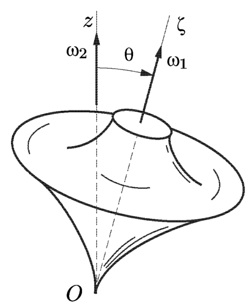
$$\vec{v}_1 = \omega v_0 t \cdot \hat{z} \times \hat{x} = \omega v_0 t \cdot \hat{y}; \tag{34}$$

$$\vec{w}_1 = -\omega^2 v_0 t \cdot \hat{x} - \left(\omega - \frac{2v_0}{R}\right)\omega R \cdot \hat{y} + \left(\omega - \frac{v_0}{R}\right)^2 R \cdot \hat{y} = \begin{pmatrix} -\omega^2 v_0 t \\ v_0^2/R \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

$$\vec{v}_3 = \omega v_0 t \cdot \hat{z} \times \hat{x} + 2(\omega R - v_0) \cdot \hat{z} \times \hat{y} = \begin{pmatrix} 2(v_0 - \omega R) \\ \omega v_0 t \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{36}$$

$$\vec{w}_3 = -\omega^2 v_0 t \cdot \hat{x} - \left(\omega - \frac{2v_0}{R}\right)\omega R \cdot \hat{y} - \left(\omega - \frac{v_0}{R}\right)^2 R \cdot \hat{y} = -\begin{pmatrix} \omega^2 v_0 t \\ 2\omega^2 R - 4v_0\omega + \frac{v_0^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

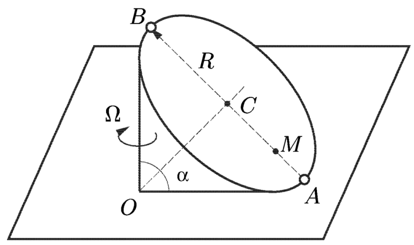
4.4. Юла вращается вокруг своей оси симметрии $O\zeta$ с постоянной угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается относительно вертикали Oz с угловой скоростью ω_2, так что угол θ остаётся постоянным (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы относительно Oz.



► Результирующее вращение юлы происходит в данный момент времени с угловой скоростью и угловым ускорением

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \qquad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2};$$
$$\vec{\varepsilon} = \omega_1 \times \omega_2, \qquad \varepsilon = \omega_1\omega_2 \sin\theta.$$ ◀

4.34. Круговой конус с прямым углом при вершине и радиусом основания, равным R, катится без скольжения по горизонтальной плоскости так, что скорость центра основания постоянна и равна v. Вдоль прямолинейного канала, проведённого из вершины O конуса в центр C его основания, равномерно движется точка со скоростью, также равной v. Определить ускорение этой точки в момент, когда она попадает в центр основания.



► Вопрос об угловых скоростях в такой системе *ранее был решён на семинаре,* поэтому заявим сразу, что в подвижной системе конус вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}'$ вокруг OC, а сама эта системе — с угловой скоростью Ω вокруг OB, так что конус в неподвижной системе совершает мгновенное вращение вокруг OA с угловой скоростью ω:

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}'. \tag{38}$$

Найдём ускорение указанной точки, применив теорему о сложении ускорений:

$$\vec{w} = \cancel{\vec{w}'} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overline{OC} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'. \tag{39}$$

Введём систему координат: $Ox \upuparrows OA$, $Oy \upuparrows OB$, $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. В таких координатах

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 R/\sqrt{2} \\ 0 \\ -2\Omega v/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Выразим Ω через скорость точки C:

$$\vec{v}_C = \Omega \times \overline{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega R/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{\Omega R}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \frac{\sqrt{2} v}{R}. \tag{41}$$

Подстановка (41) в (40) даёт

$$\vec{w} = -\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{v^2}{R}; \tag{42}$$

$$w = \frac{\sqrt{6} v^2}{R}. \tag{43}$$

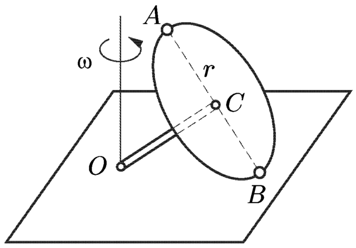
Ответ: $\vec{w} = -\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{v^2}{R}.$ ◄

Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 4

4.10. Коническое колесо радиуса r, жёстко насаженное на стержень OC длины $l = r\sqrt{3}$, катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Стержень OC описывает коническую поверхность, вращаясь вокруг неподвижной точки O (в точке O сферический шарнир) с угловым ускорением ε, имея в данный момент угловую скорость ω. Определить угловые скорость и ускорение колеса и ускорения его точек A и B.



► Стержень — твёрдое тело с неподвижной точкой O, вращающееся с угловой скоростью $\vec{\omega}$. С другой стороны, колесо катится без проскальзывания, так что $\vec{v}_B = \overline{0}$. В таком случае,

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \overline{OC} = \vec{\Omega} \times \overline{BC}; \tag{1}$$
$$\vec{w}_C = \vec{\varepsilon} \times \overline{OC} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overline{OC}. \tag{2}$$

где $\vec{\Omega}$ — искомая угловая скорость колеса. Из уравнения (1) найдём её компоненты, введя правую декартову систему координат $Oxyz$ (ось $Ox \upuparrows OB$, ось $Oz \upuparrows \vec{\omega}$):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} r; \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\Omega_y \\ \Omega_z - \sqrt{3}\Omega_x \\ \Omega_y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Видим, что $\Omega_y = 0$. Заметим также, что $\vec{v}_C = \vec{\Omega} \times \overline{OC}$, поскольку колесо движется в целом как твёрдое тело:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_z - \sqrt{3}\Omega_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ 0 \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\Omega_z - \sqrt{3}\Omega_x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теперь с необходимостью $\Omega_z = 0$, так что $\vec{\Omega} = -\sqrt{3}\omega\hat{x}$.

Примечание. Как направление, так и модуль угловой скорости колеса можно было указать, в принципе не совершив никаких вычислений. С другой стороны, приведено относительно строгое доказательство утверждения из абзаца 1 решения задачи 4.34 (может быть применено по аналогии).

Найдём теперь угловое ускорение колеса:

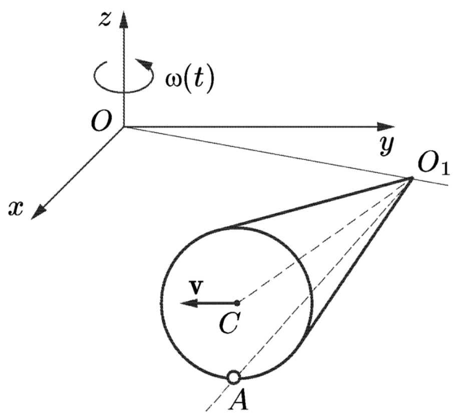
$$\vec{\mathscr{E}} = \dot{\vec{\Omega}} = -\sqrt{3}\dot{\omega}\hat{x} - \sqrt{3}\omega\left(\vec{\omega} \times \hat{x}\right) = -\sqrt{3}\left(\varepsilon\hat{x} + \omega^2\hat{y}\right); \tag{6}$$
$$\mathscr{E} = \sqrt{3\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right)}. \tag{7}$$

Ускорения точек A и B колеса могут быть рассчитаны по формуле Ривальса:

$$\vec{w}_A = \vec{\mathscr{E}} \times \overline{OA} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overline{OA} = \left\| \overline{OA} = r\hat{x} + \sqrt{3}r\hat{y} \right\| = \cdots ; \tag{8}$$

$$\vec{w}_B = \vec{\mathscr{E}} \times \overline{OB} + \cancel{\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overline{OB}} = -\sqrt{3}\left(\varepsilon\hat{x} + \omega^2\hat{y}\right) \times 2r\hat{x} = -2\sqrt{3}\omega^2 r. \tag{9}$$

Ответ: $\vec{\Omega} = -\sqrt{3}\omega\hat{x}$; $\quad \vec{\mathscr{E}} = -\sqrt{3}\left(\varepsilon\hat{x} + \omega^2\hat{y}\right)$; $\quad$ (8) – (9). ◀



4.25. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\omega(t)$. Конус, вершина O_1 которого неподвижна относительно плоскости, катится по ней без скольжения. Центр основания конуса C движется равномерно относительно плоскости со скоростью $\vec{v}$. Найти угловую скорость и угловое ускорение конуса. Высота конуса h, угол при вершине 2β.

► Перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вместе с плоскостью. В ней конус совершает мгновенное вращение с некоторой угловой скоростью ω_1 вокруг O_1A, так что по формуле Эйлера

$$v = \omega_1 \cdot h \tan\beta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \omega_1 h \sin\beta. \tag{10}$$

Вектор $\vec{\omega}_1$ вращается в подвижной системе отсчёта с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, направленной против Oz, модуль которой

$$\omega_2 = \frac{v}{h\cos\beta}. \tag{11}$$

В неподвижной системе отсчёта

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_1, \qquad \left|\vec{\Omega}\right| = \sqrt{\omega^2 + \frac{v^2}{h^2\sin^2\beta}}; \tag{12}$$

$$\vec{\mathscr{E}} = \dot{\vec{\omega}} + (\vec{\omega} + \vec{\omega}_2) \times \vec{\omega}_1, \qquad \left|\vec{\mathscr{E}}\right| = \sqrt{\dot{\omega}^2 + \frac{v^2}{h^2\sin^2\beta}\left(\omega - \frac{v}{h\cos\beta}\right)^2}. \tag{13}$$

Ответ: (12) – (13). ◀

4.29. При движении твёрдого тела известны ускорение точки O тела $\vec{w}_O$, угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$, причём $\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon} \neq 0$. Найти точку, ускорение которой равно заданному вектору $\vec{w}$.

► По формуле Ривальса

$$\vec{w} - \vec{w}_O = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{14}$$

Разложим радиус-вектор искомой точки следующим образом:

$$\vec{r} = \alpha\vec{\omega} + \beta\vec{\varepsilon} + \gamma\left[\vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}\right], \tag{15}$$

а затем подставим последнее выражение в (14).

$$
\begin{aligned}
\vec{w}-\vec{w}_O &= \vec{\varepsilon}\times(\alpha\vec{\omega}+\beta\vec{\varepsilon}+\gamma\,[\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}]) + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times(\alpha\vec{\omega}+\beta\vec{\varepsilon}+\gamma\,[\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}]) = \\
&= \alpha\,[\vec{\varepsilon}\times\vec{\omega}] + \gamma\,[\vec{\varepsilon}\times\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}] + \beta\,[\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}] + \gamma\,[\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}] = \\
&= -\alpha\,[\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}] + \gamma\left(\varepsilon^2\vec{\omega}-\vec{\varepsilon}(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})\right) + \beta\left(\vec{\omega}\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})-\omega^2\vec{\varepsilon}\right) + \\
&\qquad + \gamma\left[\vec{\omega}\times\left(\cancel{\vec{\omega}\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})}-\omega^2\vec{\varepsilon}\right)\right] = \\
&= \left\{\gamma\varepsilon^2+\beta\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})\right\}\vec{\omega} - \left\{\gamma\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})+\beta\omega^2\right\}\vec{\varepsilon} - \left\{\alpha+\gamma\omega^2\right\}[\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}]\,.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{cases}
\gamma\varepsilon^2+\beta\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon}) = \dfrac{(\vec{w}-\vec{w}_O,\vec{\omega})}{\omega^2}; \\[2ex]
\gamma\,(\vec{\omega},\vec{\varepsilon})+\beta\omega^2 = -\dfrac{(\vec{w}-\vec{w}_O,\vec{\varepsilon})}{\varepsilon^2}; \\[2ex]
\alpha+\gamma\omega^2 = -\dfrac{(\vec{w}-\vec{w}_O,\vec{\omega},\vec{\varepsilon})}{[\vec{\omega}\times\vec{\varepsilon}]^2}.
\end{cases}
$$
◀

4.38. При движении твёрдого тела, имеющего неподвижную точку O, углы Эйлера меняются по закону $\psi=\omega t$, $\theta=\pi/3$, $\varphi=2\omega t$. Определить ускорение точек M и N тела, если $\overline{OM}\parallel\vec{\Omega}$, а $\overline{ON}\parallel\vec{\mathscr{E}}$, где $\vec{\Omega}$ — угловая скорость, $\vec{\mathscr{E}}$ — угловое ускорение тела. Расстояния $OM=ON=r$.

► Используем для решения настоящей задачи кинематические уравнения Эйлера (в неподвижных осях — *нетрудно вывести*):

$$
\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot\varphi\sin\theta\sin\psi \\ -\dot\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \dot\varphi\cos\theta+\dot\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin\omega t \\ -\sqrt{3}\cos\omega t \\ 2 \end{pmatrix}\omega;
\tag{17}
$$

$$
\vec{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}\dot\varphi\dot\psi\sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}\sqrt{3}\omega^2.
\tag{18}
$$

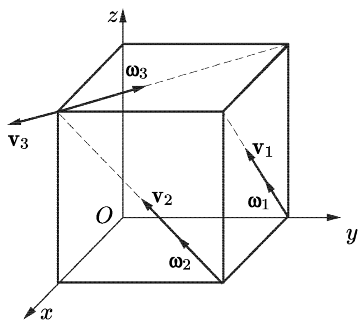
По формуле Ривальса

$$
\vec{w}_M = \vec{\mathscr{E}}\times\overline{OM} = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin\omega t \\ -\sqrt{3}\cos\omega t \\ 2 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{3}\omega^2 r}{\sqrt{7}} = \begin{pmatrix} 2\sin\omega t \\ -2\cos\omega t \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\frac{\sqrt{3}\omega^2 r}{\sqrt{7}},
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{w}_N &= \vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\overline{ON} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin\omega t \\ -\sqrt{3}\cos\omega t \\ 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin\omega t \\ -\sqrt{3}\cos\omega t \\ 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}\omega^2 r = \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin\omega t \\ -\sqrt{3}\cos\omega t \\ 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -2\sin\omega t \\ 2\cos\omega t \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\omega^2 r = \begin{pmatrix} -7\cos\omega t \\ -7\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}\omega^2 r;
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
|\vec{w}_M| = \sqrt{3}\omega^2 r, \qquad |\vec{w}_N| = 7\omega^2 r.
$$

Ответ: $w_M=\sqrt{3}\omega^2 r;\qquad w_N=7\omega^2 r.$ ◀



4.45. Тело участвует одновременно в трёх винтовых движениях, оси которых расположены по диагоналям граней куба (см. рис.). Найти результирующее движение тела, если $|\vec{\omega}_i| = \omega$, $|\vec{v}_i| = v$. Ребро куба равно a.

► Рассмотрим произвольную точку тела A и найдём её скорость:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1A} + \vec{v}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2A} + \vec{v}_3 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{3A} = \\ = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{21} + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31}) + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{r}_{1A}. \tag{21}$$

Выберем для определённости в качестве рассматриваемой точки полюс O и проведём некоторые вычисления:

$$\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = \left[\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right]\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\omega; \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_O = &\left[\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right] v + \\ &+ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\omega a = \\ &= \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} v + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\omega a = \begin{pmatrix} 2v + \omega a \\ -2v - 2\omega a \\ 2v - \omega a \end{pmatrix}\Big/\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Ищем кинематический винт:

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overline{OS} = p\vec{\omega}, \tag{24}$$

где S — точка на оси винта. Это — уравнение прямой. Запишем его в более определённом, а лучше — каноническом виде:

$$\frac{v_{Ox} + (\cancel{\omega_y z} - \omega_z y)}{\cancel{\omega_x}} = \frac{v_{Oy} + (\omega_z x - \cancel{\omega_x z})}{\cancel{\omega_y}} = \boxed{\frac{v_{Oz} + (\omega_x y - \omega_y x)}{\omega_z}}. \tag{25}$$

Примечание. Результирующая угловая скорость найдена в (22), поступательная скорость найдётся с учётом связи векторной и канонической формы уравнения прямой (нужная часть заключена в рамку), остальную работу сделала аналитическая геометрия.

Ответ: винтовое движение с $\omega' = \sqrt{2}\omega$ и $v' = \dfrac{2v - \omega a}{\sqrt{2}}$ вокруг $\begin{cases} x = \dfrac{v}{\omega} + a; \\ y = \dfrac{v}{\omega} + \dfrac{a}{2}. \end{cases}$ ◄

4.53. В постоянном магнитном поле электрон движется по винтовой линии $\begin{cases} x = a\cos bt, \\ y = a\sin bt, \\ z = ct \end{cases}$
Найти кинематический винт натурального триэдра точки.

► Триэдр движется со скоростью электрона $\vec{v}$. Найдём его угловую скорость $\vec{\omega}$. Здесь и далее скобки $\lfloor \vec{V} \rfloor$ обозначают операцию нормировки вектора.

$$\vec{\tau} = \lfloor \vec{v} \rfloor = \left\lfloor \begin{pmatrix} -ab\sin bt \\ ab\cos bt \\ c \end{pmatrix} \right\rfloor; \tag{26}$$

$$\vec{n} = \dot{\vec{\tau}} = \left\lfloor \begin{pmatrix} -ab^2\cos bt \\ -ab^2\sin bt \\ 0 \end{pmatrix} \right\rfloor = \begin{pmatrix} -\cos bt \\ -\sin bt \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{27}$$

$$\dot{\vec{n}} = b\begin{pmatrix} \sin bt \\ -\cos bt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos bt \\ -\sin bt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z\sin bt \\ \omega_z\cos bt \\ -\omega_x\sin bt + \omega_y\cos bt \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Поскольку соотношение (28) выполняется $\forall t$, вектор $\vec{\omega} = b\hat{z}$.
Ну, что ж, ищем винт аналогично 4.45 (см. (25)).

Ответ: винтовое движение с $\omega' = b$ и $v' = c$ вокруг $x = y = 0$. ◄

Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 5

5.9. Парашютист массы m прыгает с самолёта, летящего горизонтально на высоте H со скоростью v_0. По какой траектории движется парашютист при затяжном прыжке (до момента раскрытия парашюта), если сила сопротивления воздуха $\vec{F} = -\beta\vec{v}$, где $\vec{v}$ — скорость парашютиста, а изменение ускорения свободного падения с высотой не учитывается? Из полученного уравнения предельным переходом $\beta \to 0$ найти уравнение траектории в отсутствие сил сопротивления.

► Введём координатную систему: ось x направим по $\vec{v}_0$ (горизонтально), ось y — вертикально вверх, точке прыжка сопоставим координаты $(0; H)$. Запишем уравнения движения парашютиста, рассматривая его как материальную точку (II закон Ньютона):

$$m\ddot{\vec{r}} = -\beta\dot{\vec{r}} + m\vec{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = 0; \\ \ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} = -g. \end{cases} \tag{1}$$

Интегрируя уравнения (1) в координатах, имеем

$$\begin{cases} x(t) = C_{x,1}\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) + C_{x,2}; \\ y(t) = C_{y,1}\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) + C_{y,2} - \frac{mg}{\beta}t. \end{cases} \tag{2}$$

Начальные условия задачи Коши:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0; \\ y(0) = H, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует параметрический (по времени) вид траектории:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{mv_0}{\beta}\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right)\right]; \\ y(t) = H + \frac{m^2 g}{\beta^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right)\right] - \frac{mg}{\beta}t. \end{cases} \tag{4}$$

Выразим $\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right)\right]$ и t через $x(t)$ и подставим в $y(t)$:

$$1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) = \frac{\beta x}{mv_0}; \tag{5}$$

$$t = -\frac{m}{\beta}\ln\left(1 - \frac{\beta x}{mv_0}\right); \tag{6}$$

$$y(x) = H + \frac{mg}{\beta v_0}x + \frac{m^2 g}{\beta^2}\ln\left(1 - \frac{\beta x}{mv_0}\right). \tag{7}$$

Устремив $\beta \to 0$, разложим последнее слагаемое выражения зависимости $y(x)$ в ряд Маклорена по β до $o(\beta^3)$:

$$y(x)\big|_{\beta\to 0} = H + \cancel{\frac{mg}{\beta v_0}x - \frac{mg}{\beta v_0}x} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 + o(\beta^3). \tag{8}$$

Ответ: $y(x) = H + \dfrac{mg}{\beta v_0}x + \dfrac{m^2 g}{\beta^2}\ln\left(1 - \dfrac{\beta x}{mv_0}\right) \overset{\beta\to 0}{\simeq} H - \dfrac{g}{2v_0^2}x^2.$ ◄

6.18. Однородный диск массы m может катиться без скольжения по горизонтальной прямой. К центру диска прикладывается горизонтальная сила, в результате чего центр диска начинает колебаться по синусоидальному закону с амплитудой a и частотой ω. Найти зависимость силы трения от времени.

► К диску приложены три силы: к центру диска — сила тяжести $m\vec{g}$, в точке касания диска и прямой — сила нормальной реакции и сила трения $\vec{f}$. Направим ось x параллельно прямой. Поскольку скорость точки касания направлена вдоль прямой, $\vec{f}(t) = f(t)\hat{x}$.

Условие движения диска без проскальзывания приводит к соотношению

$$\ddot{x} = R\ddot{\varphi}. \tag{9}$$

Поскольку $x(t) = a\sin\omega t$ (с точностью до выбора начального момента времени), уравнение вращательного движения диска запишется в виде

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi}(t) = f(t)R, \tag{10}$$

откуда

$$f(t) = -\frac{1}{2}ma\omega^2\sin\omega t. \tag{11}$$

Ответ: зависимость силы трения от времени имеет синусоидальный вид с частотой ω и амплитудой $f_{\max} = ma\omega^2/2$. ◄

6.30. В упражнении с обручем гимнастка сообщает центру однородного кругового обруча радиуса r горизонтальную скорость v_0 и закручивает его с угловой скоростью ω_0. Коэффициент трения между обручем и полом равен f (во время движения обруч не подпрыгивает). Как должны быть связаны величины v_0 и ω_0 для того, чтобы обруч вернулся в исходное положения за время t, определяемое музыкальным сопровождением?

► Для простоты восприятия решения условимся считать положительным направление угловой скорости *против часовой стрелки,* вдоль прямой — *вправо.*

В режиме проскальзывания зависимости скорости и ускорения от времени имеют вид

$$v = v_0 - fgt; \tag{12}$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{fgt}{r}. \tag{13}$$

Проскальзывание прекращается, когда $v = -\omega r$, т. е. за время

$$t_0 = \frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg}. \tag{14}$$

В случае, если $t \leqslant t_0$ (проскальзывание не прекращается до возврата в начальную точку), достаточно потребовать

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2}fgt^2 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \frac{1}{2}fgt; \tag{15}$$

$$\frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg} \geqslant t = \frac{2v_0}{fg} \quad \Longrightarrow \quad 3v_0 \leqslant \omega_0 r. \tag{16}$$

В противном случае в момент окончания проскальзывания скорость обруча составит

$$v_1 = \frac{v_0 - \omega_0 r}{2} \leqslant 0, \tag{17}$$

откуда, кстати, следует ограничение $v_0 \leqslant \omega_0 r$, а оставшийся до возврата путь

$$S = v_0 t_0 - \frac{1}{2} f g t_0^2 = \frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg} \left(v_0 - \frac{v_0 + \omega_0 r}{4} \right). \tag{18}$$

Тогда полное время движения

$$t = t_0 + \frac{S}{|v_1|} = \frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg} + \frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg} \left(v_0 - \frac{v_0 + \omega_0 r}{4} \right) \frac{2}{\omega_0 r - v_0}, \tag{19}$$

что и является искомым уравнением, связывающим v_0 и ω_0 в этом случае.

Ответ: $\begin{cases} v_0 = fgt/2, & \omega_0 r \geqslant 3v_0; \\ \text{ур-ние (19)}, & v_0 \leqslant \omega_0 r \leqslant 3v_0. \end{cases}$ ◀

6.34. Пластина массы m может двигаться в неподвижной плоскости xy. Положение пластины задаётся координатами x, y полюса P и углом φ, который прямая, соединяющая полюс P с центром масс пластины C, образует с осью Ox. Составить уравнения плоско-параллельного движения пластины в переменных x, y, φ, если момент инерции пластины относительно оси, проходящей через полюс P перпендикулярно плоскости пластины, равен J, а $PC = l$.

► По теореме о движении центра масс ($\vec{R}$ — главный вектор сил, приложенных к пластине)

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix} = m\ddot{\vec{r}}_C = m\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x + l\cos\varphi \\ y + l\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi - l\sin\varphi\ddot{\varphi} \\ \ddot{y} - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi + l\cos\varphi\ddot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

По определению углового момента

$$L_z = (J - ml^2)\dot{\varphi} + ml(v_{C,y}\cos\varphi - v_{C,x}\sin\varphi). \tag{21}$$

Оставшееся соотношение нетрудно продифференцировать, при этом $\dot{L}_z = M_z$ — модуль главного вектора момента внешних сил.

Ответ: $\begin{cases} R_x = m\ddot{x} - ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi - ml\ddot{\varphi}\sin\varphi; \\ R_y = m\ddot{y} - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi; \\ M_z = J\ddot{\varphi} + ml(\ddot{y}\cos\varphi - \ddot{x}\sin\varphi). \end{cases}$ ◀

7.11. Показать, что потенциальная энергия пружины, состоящей из двух последовательно соединённых частей AB и BD с жёсткостями c_1 и c_2 соответственно, совпадает с потенциальной энергией пружины жёсткости

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \tag{22}$$

Решить аналогичную задачу для параллельно соединённых пружин.

► В силу равенства сил, с которыми части пружины действуют друг на друга, имеем

$$c_1 \Delta x_1 = c_2 \Delta x_2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x_2 \left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right); \tag{23}$$

$$W_{\text{посл}} = \frac{1}{2} c_1 \Delta x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \Delta x_2^2 = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}, \tag{24}$$

что и требовалось показать. ■

Для параллельно соединённых пружин $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$,

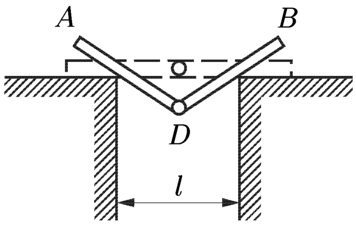
$$W_{\text{пар}} = \frac{c_1 + c_2}{2} \Delta x^2. \qquad ◄$$

Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 6

7.29. Однородные стержни AD и BD, шарнирно соединённые в точке D, опираются на два гладких угла. Длина каждого стержня равна расстоянию между опорами l. В начальный момент стержни горизонтальны и расположены симметрично относительно опор, а затем (после малого начального толчка) приходят в движение за счёт собственного веса, причём точка D перемещается по вертикали. Определить скорость точки D в момент, когда концы стержней A и B достигнут угловых точек.



► При решении задачи 3.12 было показано, что скорость v_T точки касания стержня вершины угла направлена вдоль стержня и связана со скоростью точки D и углом между стержнями φ соотношением

$$v_T = v_D \cos\frac{\varphi}{2}. \tag{1}$$

Применив закон сохранения энергии и теорему Кёнига, получим для рассматриваемого момента времени ($\varphi \to \varphi_0 = 60°$):

$$0 = -2\cdot g\frac{l\cos\frac{\varphi_0}{2}}{2} + 2\cdot\frac{v_C^2}{2} + 2\cdot\frac{l^2}{12}\frac{\omega^2}{2}. \tag{2}$$

▷ Пусть концы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ однородного стержня, совершающего плоскопараллельное движение, имеют скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Найдём скорость $\vec{v}_C$ его центра масс и угловую скорость ω:

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2} \quad\Longrightarrow\quad \vec{v}_C = \frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}; \tag{3}$$

$$\vec{v}_2-\vec{v}_1 = \vec{\omega}\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \quad\Longrightarrow\quad \vec{\omega}\times(\vec{v}_2-\vec{v}_1) = -\omega^2(\vec{r}_2-\vec{r}_1). \tag{4}$$

Последнее соотношение скаляризируем как

$$\omega = \frac{\left|v_2^{\perp}-v_1^{\perp}\right|}{l}, \tag{5}$$

что, в общем-то, и так было понятно. ◁

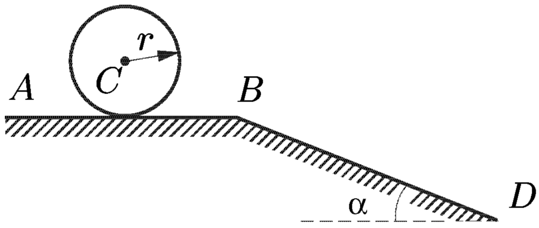
Выполним соответствующие подстановки в (2):

$$\frac{\sqrt{3}}{2}gl = v_C^2 + \frac{1}{3}\omega^2 l^2 = \left(v_T^2+\frac{1}{4}\omega^2 l^2\right) + \frac{1}{12}\omega^2 l^2 = v_D^2\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right). \tag{6}$$

Ответ: $\quad v_D = \sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{5}gl}.$ ◄

Примечание. Вообще говоря, стержни оторвутся от углов раньше рассматриваемого момента времени. Доказывать это утверждение здесь и сейчас я, конечно же, не буду.

7.42. Шар радиуса r катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости AB, переходя с этой плоскости на плоскость BD, образующую угол α с горизонтом. Достигнув точки B, шар начинает поворачиваться вокруг неё. В начальный момент времени скорость центра C шара равна v_0. Найти наибольшее значение угла α, при котором шар, переходя на наклонную плоскость, не будет делать скачка. (Отрыв шара происходит в тот момент, когда проекция силы реакции опоры в угловой точки на нормаль к траектории шара обращается в нуль.)



► Рассмотрим момент времени, когда линия BC образует с вертикалью угол β. Угловую скорость шара в этот момент найдём из ЗСЭ:

$$\frac{I_B}{2}\omega^2 = mgR(1-\cos\beta) + \frac{I_B}{2}\left(\frac{v_0}{R}\right)^2, \tag{7}$$

$$\text{где } I_B = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2. \tag{8}$$

Закон движения шара (в проекции на нормаль к траектории центра) запишется в виде

$$mg\cos\beta - R_N = m\omega^2 R = m\frac{v_0^2}{R} + \frac{10mg}{7}(1-\cos\beta). \tag{9}$$

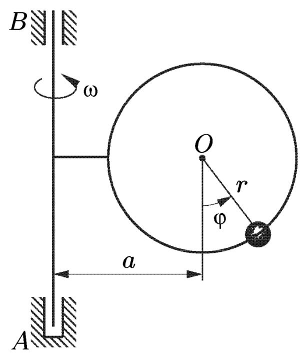
Нетрудно видеть, что силу R_N можно обратить в нуль:

$$\cos\beta_0 = \frac{\frac{7v_0^2}{gR} + 10}{17}. \tag{10}$$

Геометрическое ограничение $\beta_0 \geqslant \alpha$ является искомым.

Ответ: $\alpha_{\max} = \arccos\left(\dfrac{7v_0^2}{17gR} + \dfrac{10}{17}\right).$ ◄

9.5. Гладкое кольцо радиуса r, плоскость которого вертикальна, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси AB, находящейся на расстоянии a от центра кольца O. По кольцу может скользить тяжёлая бусинка. Найти угловую скорость, при которой положение относительного равновесия бусинки будет определяться заданным углом φ_0, если $a + r\sin\varphi_0 \neq 0$. Найти относительную скорость бусинки в зависимости от угла φ, если в начальный момент её скорость относительно кольца была равна нулю, а угол $\varphi(0) = \varphi_0$.



► Равнодействующая центробежной и гравитационной сил должна быть направлена по нормали к кольцу, иначе равновесия не получится:

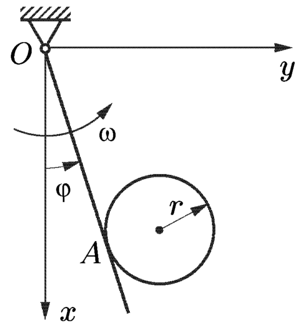
$$\tan\varphi_0 = \omega^2(a + r\sin\varphi_0)/g. \tag{11}$$

Во вращающейся вместе с кольцом системе отсчёта действуют силовые поля гравитации и инерции с потенциалами

$$u_g = -gr\cos\varphi; \quad u_c = -\omega^2(a + r\sin\varphi)^2/2. \tag{12}$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{g\tan\varphi_0}{a + r\sin\varphi_0}}; \quad v = \sqrt{2}\sqrt{u_g(\varphi_0) - u_g(\varphi) + u_c(\varphi_0) - u_c(\varphi)}.$ ◄

9.16. Невесомый стержень, конец O которого шарнирно закреплён, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси Oz, перпендикулярной плоскости рисунка. По стержню катится без проскальзывания диск радиуса r и массы m. Найти силу трения и силу нормальной реакции со стороны стержня на диск в зависимости от угла φ поворота стержня и расстояния l от точки O до точки A касания диска со стержнем. В начальный момент точки O и A совпадали, а диск покоился относительно стержня.



► В неинерциальной системе отсчёта, связанной со стержнем, к центру диска приложены силы инерции: центробежная, направленная от точки O, $m\omega^2\sqrt{l^2+r^2}$, и кориолисова, направленная нормально к стержню.

Запишем для диска теорему о движении центра масс в проекциях на направление стержня и теорему об изменении кинетического момента диска с учётом $\varepsilon = \dot{v}/r$:

$$m\dot{v} = m\omega^2 l + mg\cos\varphi - F_{\text{тр}}; \tag{13}$$

$$\frac{mr^2}{2}\frac{\dot{v}}{r} = F_{\text{тр}}r \quad \Longrightarrow \quad m\dot{v} = 2F_{\text{тр}}. \tag{14}$$

Подставляя результат из (14) в (13), сразу получаем ответ для $F_{\text{тр}}$.

Аналогично, записывая уравнение для проекций сил на нормальное к стержню направление, имеем

$$N = mg\sin\varphi + 2m\omega v - m\omega^2 r. \tag{15}$$

Нахождение v в таком случае представляет собой важнейшую задачу народного хозяйства. Обозрим поля гравитационных и центробежных сил и используем закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2 = mgl\cos\varphi + m\frac{\omega^2 l^2}{2}. \tag{16}$$

Ответ: $\quad F_{\text{тр}} = \dfrac{m}{3}\left(\omega^2 l + g\cos\varphi\right); \quad N = mg\sin\varphi + \dfrac{4m\omega}{\sqrt{3}}\sqrt{gl\cos\varphi + \dfrac{\omega^2 l^2}{2}} - m\omega^2 r.$ ◄

9.24. Однородный диск может катиться без проскальзывания по горизонтальной направляющей Ox, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oy. Найти закон относительного движения диска.

► Запишем для диска теорему о движении центра масс в проекциях на направляющую и теорему об изменении кинетического момента диска с учётом $\varepsilon = \dot{v}/r$:

$$m\dot{v} = m\omega^2 x - F_{\text{тр}}; \tag{17}$$

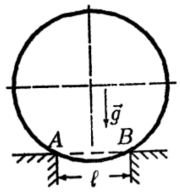
$$\frac{mr^2}{2}\frac{\dot{v}}{r} = F_{\text{тр}}r. \tag{18}$$

В итоге имеем уравнение на координату x:

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}\omega^2 x. \tag{19}$$

Ответ: $\quad x(t) = A\exp\left(+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\omega t\right) + B\exp\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\omega t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$ ◄

Т1. Гладкий однородный цилиндр массы m и радиуса r опирается на расположенные на одном уровне уступы A и B, расстояние между которыми равно l. Определить реакцию опоры A в момент удаления опоры B и вертикальное смещение центра цилиндра в момент его отделения от опоры A.



► До отрыва цилиндр движется по окружности с центром в A. Пусть в некоторый момент времени линия AO (O — центр цилиндра) образует с вертикалью угол φ:

$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\varphi - N. \tag{20}$$

В момент отрыва $N = 0$, следовательно, $v_1^2 = gr\cos\varphi_1$. Кроме того, из закона сохранения энергии

$$\frac{v_1^2}{r} = 2g(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1) \quad \Longrightarrow \quad \cos\varphi_1 = \frac{2}{3}\cos\varphi_0. \tag{21}$$

Осталось разобраться с геометрией:

$$\cos\varphi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2}; \tag{22}$$

$$\Delta h = r(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1) = \frac{r\cos\varphi_0}{3}. \tag{23}$$

Ответ: $\quad N_0 = mg\sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2}; \quad \Delta h = \frac{r}{3}\sqrt{1 - \left(\frac{l}{2r}\right)^2}.$ ◄

Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 7

8.8. Спутник движется вокруг Земли по эллиптической орбите с эксцентриситетом e. Найти отношение максимального и минимального значений угловой скорости радиуса-вектора спутника.

► ЗСМИ гласит:

$$\omega r^2 = \text{const}. \tag{1}$$

Ответ: $\dfrac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} = \dfrac{r_{\max}^2}{r_{\min}^2} = \left(\dfrac{1+e}{1-e}\right)^2.$ ◄

8.22. Комета массы m движется в поле тяготения звезды S массы M, имея невозмущённую скорость v_∞ (на бесконечности) и прицельное расстояние d. Найти уравнение траектории кометы и определить угол θ, на который отклоняется её траектория, когда она снова удаляется в бесконечность.

► В полярных координатах

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma M}{r^2}; \tag{2}$$

$$w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \tag{3}$$

Из ЗСМИ следует зависимость $\dot{\varphi}(r)$:

$$\dot{\varphi} = \frac{v_\infty d}{r^2}. \tag{4}$$

Введём замену:

$$y \equiv \frac{1}{r}; \qquad y' = \frac{dy}{d\varphi} = -\frac{r'}{r^2} = -\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi} r^2} = -\frac{\dot{r}}{v_\infty d}; \qquad y'' = -\frac{\ddot{r} r^2}{v_\infty^2 d^2}. \tag{5}$$

Уравнение (2) примет вид

$$y'' + y = \frac{\gamma M}{v_\infty^2 d^2} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{r} = \frac{\gamma M}{v_\infty^2 d^2} + A\cos(\varphi + \varphi_0). \tag{6}$$

Осталось вспомнить (задать) начальные условия: при $\varphi \to 0$: $y \to 0$, $\dot{r} \to v_\infty$, откуда

$$A = -\frac{\gamma M}{v_\infty^2 d^2 \cos\varphi_0}; \tag{7}$$

$$y'(0) = -\frac{1}{d} = \frac{\gamma M}{v_\infty^2 d^2} \tan\varphi_0 \quad \Longrightarrow \quad \tan\varphi_0 = -\frac{v_\infty^2 d}{\gamma M} \equiv \xi. \tag{8}$$

$$r(\varphi) = \frac{\xi d}{1 - \sqrt{1+\xi^2}\cos\left(\varphi - \arctan\xi\right)}. \tag{9}$$

Угол $\pi - \theta$ равен модулю (генеральной) разности корней уравнения $y(\varphi) = 0$:

$$\cos(\varphi - \varphi_0) + \cos\varphi_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \varphi_0\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \pi - \theta = |2\varphi_0|\,. \tag{10}$$

Ответ: см. (9); $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\gamma M}{v_\infty^2 d}$. ◀

8.24. С северного полюса Земли запускается снаряд так, что направление начальной скорости v_0 составляет угол α с горизонтом. Какой должна быть величина v_0, чтобы место падения снаряда имело географическую широту φ?

► Удельный момент импульса снаряда (в квадрате)

$$v_0^2 R^2 \cos^2\alpha = \gamma M p. \tag{11}$$

Уравнение траектории — эллипса — запишется с учётом симметрии в виде

$$R = \frac{p}{1 - e\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{1 - \frac{p}{R}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}; \tag{12}$$

с другой стороны, интеграл энергии выглядит как

$$\frac{v_0^2}{\gamma M} = \frac{2}{R} - \frac{1 - e^2}{p} = \frac{2}{R} - \frac{1}{p} + \frac{\left(1 - \frac{p}{R}\right)^2}{p\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}. \tag{13}$$

Указание. Систему $\{(11); (13)\}$ нужно решить относительно v_0. ◀

8.50. Спутнику, движущемуся со скоростью v по круговой орбите радиуса R, сообщается импульс торможения, в результате которого скорость изменилась на величину Δv. Найти параметр p, эксцентриситет e новой орбиты и угол φ между радиусом-вектором в точке приложения импульса и направлением на перигей новой орбиты.

► Удельный момент импульса снаряда (в квадрате)

$$\begin{aligned} (v_0 - \Delta v)^2 R^2 &= \gamma M p; \\ v_0^2 R^2 &= \gamma M R. \end{aligned} \tag{14}$$

$$p = \frac{(v_0 - \Delta v)^2}{v_0^2} R. \tag{15}$$

Точка, очевидно, стала апогеем; $\varphi = \pi$. Найдём эксцентриситет орбиты:

$$R = a(1 + e) = \frac{p}{1 - e} \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{\Delta v\,(2v_0 - \Delta v)}{v_0^2}. \tag{16}$$

Ответ: $p = \dfrac{(v_0 - \Delta v)^2}{v_0^2} R$; $e = \dfrac{\Delta v\,(2v_0 - \Delta v)}{v_0^2}$; $\varphi = \pi$. ◀