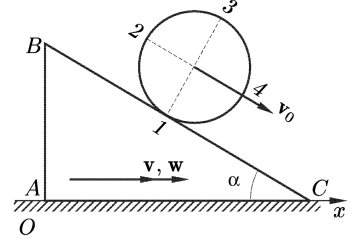


Иван Утешев
621 группа

Аналитическая механика

Задание 1. Неделя 3

2.11. Призма ABC движется поступательно вдоль оси Ox с ускорением \vec{w} , имея в данный момент скорость \vec{v} . По линии наибольшего ската BC призмы катится без скольжения цилиндр, скорость центра которого относительно призмы постоянна и равна \vec{v}_0 . Радиус цилиндра R , $\angle BCA = \alpha$. Найти скорости и ускорения точек 1, 2, 3, 4 цилиндра в данный момент времени.



► В подвижной (штрихованной) системе отсчёта призмы цилиндр совершает мгновенное вращение вокруг точки 1: $\vec{v}'_1 = \vec{0}$. Введём координатные оси: направление Ox уже задано, Oy направим вертикально вверх, $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. Без доказательства заявим, что угловая скорость цилиндра

$$\vec{\omega} = -\frac{v_0}{R} \hat{z}. \quad (1)$$

Скорости всех заданных точек найдутся по формуле Эйлера ($\vec{v}'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'_{1i}$):

$$\vec{v}'_2 = -\frac{v_0}{R} \hat{z} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}R \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2}R \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}v_0 \left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \hat{x} - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \hat{y} \right]; \quad (2)$$

$$\vec{v}'_3 = -\frac{v_0}{R} \hat{z} \times \begin{pmatrix} 2R \sin \alpha \\ 2R \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_0 [\cos \alpha \cdot \hat{x} - \sin \alpha \cdot \hat{y}]; \quad (3)$$

$$\vec{v}'_4 = -\frac{v_0}{R} \hat{z} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2}R \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2}R \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}v_0 \left[\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \hat{x} - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \hat{y} \right]. \quad (4)$$

Переход к неподвижной системе отсчёта осуществляется легко и приятно: $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}$.

$$\vec{v}_1 = v \hat{x}, \quad v_1 = v; \quad (5)$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v + v_0(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ v_0(\cos \alpha - \sin \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \sqrt{v^2 + 2v_0^2 + 2vv_0(\cos \alpha + \sin \alpha)}; \quad (6)$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} v + 2v_0 \cos \alpha \\ -2v_0 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \sqrt{v^2 + 4v_0^2 + 4vv_0 \cos \alpha}; \quad (7)$$

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} v + v_0(\cos \alpha - \sin \alpha) \\ -v_0(\sin \alpha + \cos \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \sqrt{v^2 + 2v_0^2 + 2vv_0(\cos \alpha - \sin \alpha)}. \quad (8)$$

Ускорение центра цилиндра в штрихованной системе равно нулю. Значит, $\vec{w}'_i = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{0i}$:

$$\vec{w}'_1 = -\omega^2 R [-\sin \alpha \cdot \hat{x} - \cos \alpha \cdot \hat{y}]; \quad (9)$$

$$\vec{w}'_2 = -\omega^2 R [-\cos \alpha \cdot \hat{x} + \sin \alpha \cdot \hat{y}]; \quad (10)$$

$$\vec{w}'_3 = -\omega^2 R [+ \sin \alpha \cdot \hat{x} + \cos \alpha \cdot \hat{y}]; \quad (11)$$

$$\vec{w}'_4 = -\omega^2 R [+ \cos \alpha \cdot \hat{x} - \sin \alpha \cdot \hat{y}]. \quad (12)$$

Аналогично, поскольку призма движется поступательно, всё очень приятно:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} w + v_0^2/R \cdot \sin \alpha \\ v_0^2/R \cdot \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} + \frac{2wv_0^2}{R} \sin \alpha}; \quad (13)$$

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} w + v_0^2/R \cdot \cos \alpha \\ -v_0^2/R \cdot \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} + \frac{2wv_0^2}{R} \cos \alpha}; \quad (14)$$

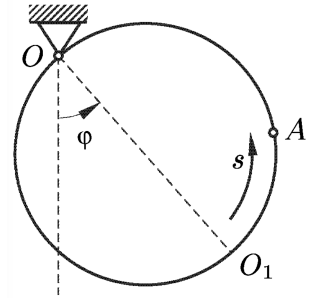
$$\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} w - v_0^2/R \cdot \sin \alpha \\ -v_0^2/R \cdot \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} - \frac{2wv_0^2}{R} \sin \alpha}; \quad (15)$$

$$\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} w - v_0^2/R \cdot \cos \alpha \\ -v_0^2/R \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \sqrt{w^2 + \frac{v_0^4}{R^2} - \frac{2wv_0^2}{R} \cos \alpha}. \quad (16)$$

Ответ: (5) – (8), (13) – (16). ◀

2.14. Круговое кольцо, точка O которого неподвижна, совершает колебания в своей плоскости по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Радиус кольца равен R . Точка A движется по кольцу так, что $s = at^2$, где s — длина дуги O_1A . Найти скорость и ускорение точки A в момент времени $t = \pi/\omega$.

► В заданный момент времени линия OO_1 отвесна. Введём декартову систему координат: $\hat{x} \uparrow \uparrow OO_1$, \hat{y} — вправо, $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$.



В системе отсчёта кольца

$$\begin{cases} x_A = R \left(1 + \cos \frac{s}{R}\right), \\ y_A = R \sin \frac{s}{R}. \end{cases} \quad (17)$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получим компоненты скорости и ускорения точки A в этой системе:

$$\begin{cases} \dot{x}_A = -\sin \frac{s}{R} \cdot 2at, \\ \dot{y}_A = \cos \frac{s}{R} \cdot 2at; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x}_A = -\cos \frac{s}{R} \cdot \frac{4a^2t^2}{R} - \sin \frac{s}{R} \cdot 2a, \\ \ddot{y}_A = -\sin \frac{s}{R} \cdot \frac{4a^2t^2}{R} + \cos \frac{s}{R} \cdot 2a. \end{cases} \quad (18)$$

Угловая скорость и угловое ускорение кольца

$$\vec{\Omega} = -\varphi_0 \omega \hat{z}; \quad (19)$$

$$\vec{\varepsilon} = +\varphi_0 \omega^2 \hat{z}. \quad (20)$$

Можем теперь применить теоремы о сложении скоростей и ускорений:

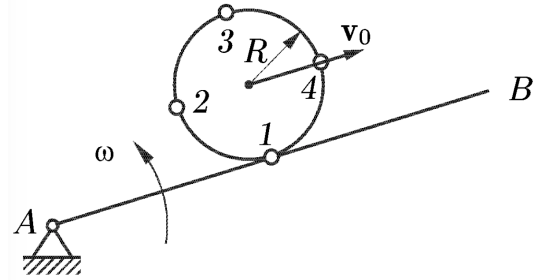
$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{\Omega} \times \vec{r}_A + \vec{v}'_A = \\ &= -\varphi_0 \omega R \hat{z} \times \begin{pmatrix} 1 + \cos \frac{at^2}{R} \\ \sin \frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} + 2at \begin{pmatrix} -\sin \frac{at^2}{R} \\ \cos \frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\varphi_0 \omega R - \frac{2a\pi}{\omega}] \sin \frac{a\pi^2}{\omega^2 R} \\ -2\varphi_0 \omega R \cos^2 \frac{a\pi^2}{2\omega^2 R} + \frac{2a\pi}{\omega} \cos \frac{a\pi^2}{\omega^2 R} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Примечание. Проверка совпадения модуля \vec{v}_A с ответом из задачника представляет собой весьма занимательное занятие. На сей раз с этим помогает справиться Wolfram Alpha. Для \vec{w}_A аналогичная проверка производиться не будет.

$$\begin{aligned} \vec{w}_A &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A - \Omega^2 \vec{r}_A + \vec{w}'_A + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'_A = \varphi_0 \omega^2 \hat{z} \times \begin{pmatrix} 1 + \cos \frac{at^2}{R} \\ \sin \frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} - \\ &- \varphi_0^2 \omega^2 \begin{pmatrix} 1 + \cos \frac{at^2}{R} \\ \sin \frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4a^2 t^2}{R} \cos \frac{at^2}{R} - 2a \sin \frac{at^2}{R} \\ -\frac{4a^2 t^2}{R} \sin \frac{at^2}{R} + 2a \cos \frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} - 2\varphi_0 \omega \hat{z} \times 2at \begin{pmatrix} -\sin \frac{at^2}{R} \\ \cos \frac{at^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\varphi_0 \omega^2 \sin \frac{a\pi^2}{\omega^2 R} - 2\varphi_0^2 \omega^2 \cos^2 \frac{a\pi^2}{2\omega^2 R} - \frac{4a^2 t^2}{R} \cos \frac{at^2}{R} - 2a \sin \frac{at^2}{R} + 4\varphi_0 \pi \omega a \cos \frac{a\pi^2}{\omega^2 R} \\ 2\varphi_0 \omega^2 \cos^2 \frac{a\pi^2}{2\omega^2 R} - \varphi_0^2 \omega^2 \sin \frac{a\pi^2}{\omega^2 R} - \frac{4a^2 t^2}{R} \sin \frac{at^2}{R} + 2a \cos \frac{at^2}{R} + 4\varphi_0 \pi \omega a \sin \frac{a\pi^2}{\omega^2 R} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Ответ: (21), (22). ◀

3.22. Диск радиуса R катится без скольжения по направляющей AB , вращающейся в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω . Найти скорости и ускорения точек 1, 2, 3, 4 диска, если относительная скорость его центра постоянна и равна v_0 . В начальный момент точка касания диска с направляющей совпадала с точкой A .



► В подвижной системе отсчёта направляющей скорости и ускорения указанных точек равны соответственно (см. задачу 2.11)

$$\vec{v}'_i = \vec{\Omega}' \times \vec{r}'_{1i}, \quad (23)$$

$$\vec{w}'_i = -\Omega'^2 \vec{r}'_{0i}; \quad (24)$$

где $\Omega' = v_0/R$ — угловая скорость вращения диска.

Используем теоремы о сложении скоростей и ускорений:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{Ai} + \vec{v}'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A1} + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}') \times (\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{01}); \quad (25)$$

$$\vec{w}_i = \omega \times \omega \times \vec{r}_{Ai} + \vec{w}'_i + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_i = -\omega^2 \vec{r}_{A1} + (\omega - 2\Omega') \omega \vec{r}_{01} - (\omega - \Omega')^2 \vec{r}_{0i}. \quad (26)$$

Зададимся целью получить ответы в адекватном виде. Для этого введём систему координат следующим образом: $Ax \uparrow\uparrow AB$, $Ay \perp AB$ и направлена вверх, $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. В этой системе все нужные векторы имеют «красивый» вид:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}, \quad (27)$$

$$\vec{\Omega}' = -\frac{v_0}{R} \hat{z}; \quad (28)$$

$$\vec{r}_{A1} = v_0 t \cdot \hat{x}; \quad (29)$$

$$\vec{r}_{01} = -R \hat{y}, \quad (30)$$

$$\vec{r}_{02} = -R \hat{x}, \quad (31)$$

$$\vec{r}_{03} = +R \hat{y}, \quad (32)$$

$$\vec{r}_{04} = +R \hat{x}. \quad (33)$$

Осталось произвести вычисления по формулам (25) и (26). ◀

Например,

$$\vec{v}_1 = \omega v_0 t \cdot \hat{z} \times \hat{x} = \omega v_0 t \cdot \hat{y}; \quad (34)$$

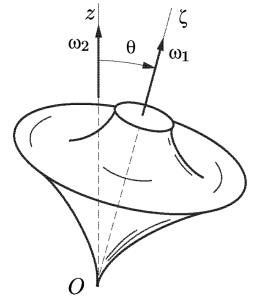
$$\vec{w}_1 = -\omega^2 v_0 t \cdot \hat{x} - \left(\omega - \frac{2v_0}{R} \right) \omega R \cdot \hat{y} + \left(\omega - \frac{v_0}{R} \right)^2 R \cdot \hat{y} = \begin{pmatrix} -\omega^2 v_0 t \\ v_0^2/R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

$$\vec{v}_3 = \omega v_0 t \cdot \hat{z} \times \hat{x} + 2(\omega R - v_0) \cdot \hat{z} \times \hat{y} = \begin{pmatrix} 2(v_0 - \omega R) \\ \omega v_0 t \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (36)$$

$$\vec{w}_3 = -\omega^2 v_0 t \cdot \hat{x} - \left(\omega - \frac{2v_0}{R} \right) \omega R \cdot \hat{y} - \left(\omega - \frac{v_0}{R} \right)^2 R \cdot \hat{y} = - \begin{pmatrix} \omega^2 v_0 t \\ 2\omega^2 R - 4v_0\omega + \frac{v_0^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

4.4. Юла вращается вокруг своей оси симметрии $O\zeta$ с постоянной угловой скоростью ω_1 . Ось $O\zeta$ равномерно вращается относительно вертикали Oz с угловой скоростью ω_2 , так что угол θ остаётся постоянным (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы относительно Oz .

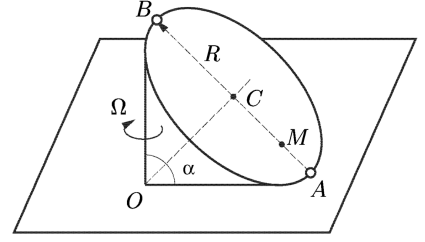
► Результирующее вращение юлы происходит в данный момент времени с угловой скоростью и угловым ускорением



$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, & \omega &= \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \theta}; \\ \vec{\varepsilon} &= \omega_1 \times \omega_2, & \varepsilon &= \omega_1\omega_2 \sin \theta. \end{aligned}$$

◀

4.34. Круговой конус с прямым углом при вершине и радиусом основания, равным R , катится без скольжения по горизонтальной плоскости так, что скорость центра основания постоянна и равна v . Вдоль прямолинейного канала, проведённого из вершины O конуса в центр C его основания, равномерно движется точка со скоростью, также равной v . Определить ускорение этой точки в момент, когда она попадает в центр основания.



► Вопрос об угловых скоростях в такой системе ранее был решён на семинаре, поэтому заявим сразу, что в подвижной системе конус вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}'$ вокруг OC , а сама эта система — с угловой скоростью Ω вокруг OB , так что конус в неподвижной системе совершает мгновенное вращение вокруг OA с угловой скоростью ω :

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}'. \quad (38)$$

Найдём ускорение указанной точки, применив теорему о сложении ускорений:

$$\vec{w} = \vec{a}' + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{OC} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}'. \quad (39)$$

Введём систему координат: $Ox \uparrow OA$, $Oy \uparrow OB$, $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$. В таких координатах

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 R/\sqrt{2} \\ 0 \\ -2\Omega v/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Выразим Ω через скорость точки C :

$$\vec{v}_C = \Omega \times \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega R/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow v = \frac{\Omega R}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Omega = \frac{\sqrt{2}v}{R}. \quad (41)$$

Подстановка (41) в (40) даёт

$$\vec{w} = - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{v^2}{R}; \quad (42)$$

$$w = \frac{\sqrt{6}v^2}{R}. \quad (43)$$

Ответ: $\vec{w} = - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{v^2}{R}.$ ◀