Исаев К.П.
Кривошеева О.А.
Путинцева А.А.

Дискретная математика

Сборник задач

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.П. Исаев, О.А. Кривошеева, А.А. Путинцева

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник задач

Уфа
РИЦ БашГУ
2022

УДК 519.2
ББК 22.176
И85

Печатается по решению учебно-методической комиссии факультета математики и информационных технологий БашГУ. Протокол № 6 от 05.05.2022 г.

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, профессор **И.Х. Мусин**
(Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа);
канд. физ.-мат. наук, доцент **Н.Т. Ахтямов**
(УГНТУ, г. Уфа)

Исаев К.П., Кривошеева О.А., Путинцева А.А.
И85 Дискретная математика: сборник задач / К.П. Исаев, О.А. Кривошеева, А.А. Путинцева. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. – 72 с.
ISBN 978-5-7477-5483-6

Задачник является дополнением к курсу лекций Исаева К.П., Кривошеевой О.А., Путинцевой А.А. «Дискретная математика». Содер-жит необходимый для освоения учебного материала набор задач и упражнений для проведения практических занятий по дисциплине «Дискретная математика».

Сборник задач разработан по рекомендациям «НТЦ-Газпромнефть» и предназначен для студентов младших курсов направлений 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

УДК 519.2
ББК 22.176

ISBN 978-5-7477-5483-6

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Элементы теории множеств и комбинаторика 5
1.1. Основы теории множеств. 5
Основные понятия 5
Задания для работы на занятии. 6
Задания для домашней работы. 8
1.2. Отношения на множествах 10
Основные понятия 10
Задания для работы на занятии. 11
Задания для домашней работы. 12
1.3. Отображения множеств 14
Основные понятия 14
Задания для работы на занятии. 14
Задания для домашней работы. 15
1.4. Элементы комбинаторики. 17
Основные понятия 17
Задания для работы на занятии. 18
Задания для домашней работы. 20
Глава 2. Основы математической логики 22
2.1. Логика высказываний. 22
Основные понятия 22
Задания для работы на занятии. 26
Задания для домашней работы. 30
2.2. Булевы функции. 33
Основные понятия 33
Задания для работы на занятии. 34
Задания для домашней работы. 35
2.3 Логика предикатов. 37
Основные понятия 37
Задания для работы на занятии. 41

Задания для домашней работы. 43
Глава 3. Введение в теорию графов 46
Основные понятия 46
Задания для работы на занятии. 48
Задания для домашней работы. 51
Глава 4. Элементы теории алгоритмов 55
4.1. Машины Тьюринга. 55
Основные понятия 55
Задания для работы на занятии. 59
Задания для домашней работы. 61
4.2. Рекурсивные функции. 64
Основные понятия 64
Задания для работы на занятии 65
Задания для домашней работы 66

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И КОМБИНАТОРИКА

1.1. Основы теории множеств.

Основные понятия

U — универсальное множество,

$\emptyset$ — пустое множество,

$\lambda_A(x)$ – характеристическая функция множества A, заданная на множестве U и принимающая значения:

$$\lambda_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Мощность конечного множества A ($|A|$) – количество элементов этого множества.

Булеан множества A ($P(A)$) – множество всех подмножеств множества A. $|P(A)| = 2^n$, если $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Основные операции:

$A \cap B = \{x: x \in A$ и $x \in B\}$;

$A \cup B = \{x: x \in A$ или $x \in B\}$;

$A \backslash B = \{x: x \in A$ и $x \notin B\}$;

$\bar{A} = \{x: x \notin A\}$;

$A \Delta B = \{x: (x \in A$ и $x \notin B)$ или $(x \notin A$ и $x \in B)\}$=$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

***Свойства операций над множествами*:**

$A \cup B = B \cup A$, $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\quad A \cap B = B \cap A$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $\quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$$A \cup (A \cap B) = A, \; A \cap (A \cup B) = A,$$

$A \backslash B = A \cap \bar{B}$, $\quad \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$,

$\overline{(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$, $\quad A \cup \emptyset = A$, $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$,

$A \backslash \emptyset = A$, $\quad A \cup U = U$, $\quad A \cap U = A$, $\quad A \backslash U = \emptyset$, $\quad \emptyset \backslash A = \emptyset$,

$U \backslash A = \bar{A}$, $\quad A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash C)$, $\quad A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$,

$A \Delta B = B \Delta A$, $\quad (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$, $\;\bar{\bar{A}} = A$, $\quad A \cup \bar{A} = U$,

$A \cap \bar{A} = \emptyset$, $\; A \cup A = A$, $\; A \cap A = A$, $\; A \backslash A = \emptyset$.

Включения и равенство множеств:

$(X \subset У) \Leftrightarrow (\forall x \in X \Rightarrow x \in Y)$.

$(X = У) \Leftrightarrow (\forall x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$.

Если $X \subset Y$ и $Y \subset X$, то $X = Y$.

Если $X \subset Y$ и $Y \subset Z$, то $X \subset Z$.

$\emptyset \subset X$ для $\forall$ множества X.

Декартово произведение двух множеств:

$A \times B = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$.

<u>Задания для работы на занятии.</u>

1. Дано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и его подмножества $A = \{x: 2 < x \leq 6\}$, $B = \{x: x - \text{четно}\}$, $C = \{x: x \geq 4\}$. Выполните следующие задания:

а) записать характеристические функции множеств A, B, C в виде двоичных векторов;

б) представить множества U, A, B, C на диаграмме Эйлера-Венна, пронумеровать каждую область диаграммы двоичным кодом и указать на каждой из областей диаграммы элементы универсального множества, попавшие в эту область;

в) Составить характеристические функции множеств $A \cap (B \cup C)$, $C \triangle B$; $(A \backslash B) \cup (C \backslash B)$; $\overline{\bar{A} \cup \bar{\bar{B}}}$, $(C \backslash A) \triangle B$ и перечислить элементы этих множеств, сделав проверку на диаграмме Эйлера-Венна.

2. Изобразить с помощью кругов Эйлера-Венна множества:

а) $(A \triangle C) \cap (\bar{B} \backslash C)$;

б) $\left(\overline{A \cup B}\right) \triangle C$;

в) $(A \backslash \bar{B}) \triangle C$;

г) $(A \triangle C) \cup (\bar{B} \backslash C)$.

3. Доказать следующие тождества, используя свойства операций над множествами и сравнение характеристических функций множеств:

а) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$;

б) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$;

в) $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

4. Доказать включения с помощью диаграммы Эйлера-Венна и сравнения характеристических функций множеств:

а) $(A \bigtriangleup B)\backslash C \subset (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$;

б) $(A \cup B)\backslash C \subset A \cup (B\backslash C)$.

5. Используя закон двойственности и другие свойства операций над множествами, упростить выражения:

а) $\overline{\left(\overline{\bar{A} \cup B}\right) \cup (A \cup \bar{B})}$;

б) $\overline{(\bar{A} \cup \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})}$;

в) $\overline{\bar{A} \cap \bar{C} \cap (\bar{A} \cup B) \cap (B \cup \bar{C})}$.

6. Изобразить на координатной плоскости множества:

а) $([0,1) \cup \{2,3\}) \times \big((2,4] \cup \{5\}\big)$;

б) $\mathbb{N} \times [0,1]$;

в) $\{k\} \times [0,k),\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$;

г) $\big((2,5) \times [1,4]\big)\backslash\, ((3,4) \times [2,3])$

7. Пусть M_2, M_3, M_5 обозначают подмножества универсального множества $\mathbb{N}$, состоящие соответственно из всех чисел, кратных 2, 3, 5. С помощью операций над множествами выразите через них множества всех чисел:

а) делящихся на 6;

б) делящихся на 30;

в) взаимно простых с 30;

г) делящихся на 10, но не делящихся на 3.

8. Пусть $A, B, C -$ множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют перечисленным ниже условиям. Изобразите в системе координат xOy множество D, полученное из множеств A, B, C по указанной формуле:

а) $A = \{(x,y): x^2 + y^2 - 6y \le 0\}$, $B = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 9\}$,

$C = \{(x,y): x + 3 \ge y\}$. $D = (A \cap B) \bigtriangleup C$.

б) $A = \{(x,y): y + x^2 - 9 \le 0\}$, $B = \{(x,y): |x| > 4, |y| > 4\}$,

$C = \{(x,y): x > y\}$. $D = (A \cap B) \cap C$.

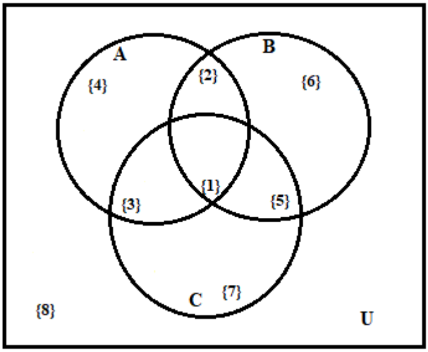
9. На диаграмме Эйлера-Венна обозначены множества и заданы их мощности: $|\{1\}| = 2,\ |\{2\}| = 5,\ |\{3\}| = 4,\ |\{4\}| = 6,\ \ |\{5\}| = 2,$

$|\{6\}| = 5,\qquad |\{7\}| = 7,\ |\{8\}| = 30.$

Выполнить следующее задание:

1) заштриховать на диаграмме множество, которое задается формулой $\overline{(A\Delta B)\backslash C}$;

2) определить мощность множества $|\overline{(A\Delta B)\backslash C}|$;.



<u>Задания для домашней работы.</u>

1. Дано универсальное множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ и его подмножества $A = \{x: 4 \leq x < 8\}$, $B = \{x: x - \text{нечетно}\}$, $C = \{x: x \leq 5\}$. Выполните следующие задания:

а) записать характеристические функции множеств A, B, C в виде двоичных векторов;

б) представить множества U, A, B, C на диаграмме Эйлера-Венна и пронумеровать каждую область диаграммы двоичным кодом;

в) перечислить элементы множеств $A \cap (B \cup C)$, $C \triangle B$; $(A\backslash B) \cup (C\backslash B)$; $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$, $(C\backslash A) \triangle B$ и составить их характеристические функции.

2. Изобразить с помощью кругов Эйлера-Венна множества:

а) $(A\backslash\bar{C}) \triangle \bar{B}$;

б) $(\overline{A \cap C}) \triangle B$;

в) $(A \cup \bar{B}) \triangle \bar{C}$;

г) $(A \cap C) \triangle (\overline{C \cap \bar{B}})$.

3. Доказать следующие тождества, используя свойства операций над множествами и сравнение характеристических функций множеств:

а) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$;

б) $(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash C)\backslash(B\backslash C)$;

в) $A\backslash B = A \cap \bar{B}$.

4. Доказать включения с помощью диаграммы Эйлера-Венна и сравнения характеристических функций множеств:

а) $\mathrm{A}\backslash C \subset (A\backslash B) \cup (B\backslash C)$;

б) $A \cap B \cap C \subset C\backslash(A \triangle B)$.

5. Используя закон двойственности и другие свойства операций над множествами, упростить выражения:

а) $\overline{(\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap \bar{C})}$;

б) $\overline{\overline{\overline{(\bar{A} \cup B)} \cup (A \cup \bar{B})} \cap \overline{(\bar{A} \cap B) \cup \overline{(A \cap \bar{B})}}}$;

в) $\overline{\overline{X \cup Y} \cap \overline{X \cup Z} \cap \overline{Y \cup Z}}$.

6. Изобразить на координатной плоскости множества:

а) $\big((-1,1) \cup \{3\}\big) \times ([0,2] \cup \{3\})$;

б) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$;

в) $(1,2k] \times \left\{\frac{k}{2}\right\},\ \forall k \in \mathbb{Z}$;

г) $([3,10] \times (1,8))\backslash\Big(([4,5] \times [2,3]) \cup \big((6,7) \times (4,5)\big) \cup ([8,9] \times [6,7])\Big)$.

7. Пусть M_2, M_3, M_5 обозначают подмножества универсального множества $\mathbb{N}$, состоящие соответственно из всех чисел, кратных 2, 3, 5. Используя теоретико-множественную символику, запишите утверждения:

а) 45 делится на 15;

б) 42 делится на6, но не делится на 10;

в) каждое число из множества {8,9,10} делится хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, но не делится на 6.

8. Пусть $A, B, C -$ множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют перечисленным ниже условиям. Изобразите в системе координат xOy множество D, полученное из множеств A, B, C по указанной формуле:

а) $A = \{(x, y): x < y + 5\}$, $B = \{(x, y): x > y - 5\}, C = \{(x, y): |x| < 2, |y| < 3\}$. $D = (A \cap B)\backslash C$.

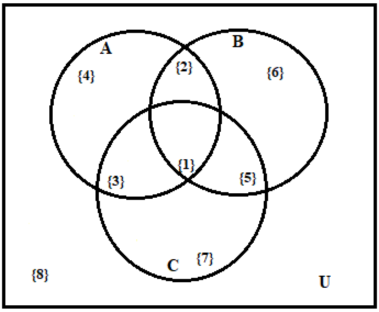
б) $A = \{(x, y): (x-2)^2 + y^2 - 4 \le 0\}$, $B = \{(x, y): x < y\}, C = \{(x, y): (x-4)^2 + y^2 - 4 \le 0\}$. $D = (A\backslash B) \triangle C$.

9. На диаграмме Эйлера-Венна обозначены множества и заданы их мощности: $|\{1\}| = 2,\ |\{2\}| = 5,\ |\{3\}| = 4,\ |\{4\}| = 6,\ |\{5\}| = 2,\ |\{6\}| = 5,\ |\{7\}| = 7,\ |\{8\}| = 30$.

Выполнить следующее задание:

1) заштриховать на диаграмме множество, которое задается формулой $(A\Delta B)\Delta C$;

2) определить мощность множества $|(A\Delta B)\Delta C|$;.



1.2. Отношения на множествах

<u>Основные понятия</u>

Бинарным отношением называется произвольное подмножество S декартова произведения $X \times Y$. Если $X = X$, то отношение называется бинарным отношением на множестве X.

Способы задания бинарного отношения:

1. перечисление элементов бинарного отношения;
2. характеристическое свойство бинарного отношения;
3. декартова диаграмма;
4. матрица бинарного отношения;
5. граф бинарного отношения.

Областью определения бинарного отношения φ называется множество $D_\varphi = \{x \in X : \exists y \in Y \quad (x, y) \in \varphi\}$.

Областью значений бинарного отношения φ называется множество $R_\varphi = \{y \in Y : \exists x \in X \quad (x, y) \in \varphi\}$.

Пусть φ – бинарное отношение из X в Y, т.е. подмножество декартова произведения двух множеств $X \times Y$. Отношение, образованное всеми упорядоченными парами $(y, x) \in Y \times X$ такими, что $(x, y) \in \varphi$, называется *обратным* для φ и обозначается φ^{-1}.

Пусть φ – бинарное отношение из X в Y, т.е. подмножество декартова произведения двух множеств $X \times Y$, ψ – бинарное отношение из Y в Z, т.е. подмножество декартова произведения $Y \times Z$. Отношение, образованное всеми упорядоченными парами $(x, z) \in X \times Z$ такими, что существует y: $(x, y) \in \varphi$ и $(y, z) \in \psi$, называется *композицией отношений* φ и ψ и обозначается $\varphi \circ \psi$.

Бинарное отношение φ на множестве X называется а) *рефлексивным*, если $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{x\varphi x}$;

б) *иррефлексивным*, если $\forall \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{x}$ не состоит в отношении $\boldsymbol{\varphi}$ с x;

в) *симметричным*, если $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}: \boldsymbol{x\varphi y} \Rightarrow \boldsymbol{y\varphi x}$;

г) *антисимметричным*, если $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}: \boldsymbol{x\varphi y}$ и $\boldsymbol{y\varphi x} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;

д) *транзитивным*, если $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{X}: \boldsymbol{x\varphi y}$ и $\boldsymbol{y\varphi z} \Rightarrow \boldsymbol{x\varphi z}$;

е) *отношением типа эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно;

ж) *отношением частичной упорядоченности*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Если на множестве X задано бинарное отношение типа эквивалентности φ, то *классом эквивалентности элемента* $x \in M$ называется множество $X_x = \{y \in X: \ x \ \varphi \ y\}$.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества X по отношению эквивалентности φ называется фактор-множеством множества X по отношению φ и обозначается X/φ.

<u>Задания для работы на занятии.</u>

1. Задано бинарное отношение S на множестве $X = \{1,2,3,4,5,6\}$. Требуется:

1) перечислить элементы множества S;

2) составить матрицу бинарного отношения;

3) составить граф бинарного отношения,

если бинарное отношение задано характеристическим свойством:

а) $x\varphi y \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 7$;

б) $x\varphi y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \le 20$.

2. Бинарные отношения S_1 и S_2 на множестве $X = \{1,2,3,4\}$ заданы характеристическими свойствами $x\varphi_1 y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge 10$ и $x\varphi_2 y \Leftrightarrow x^2 - y^2 \le 0$. Требуется:

а) записать матрицы бинарных отношений;

б) найти композиции $\varphi_1 \circ \varphi_2$ и $\varphi_2 \circ \varphi_1$;

в) найти $M_{\varphi_1^{-1}}, M_{\varphi_2^{-1}}$.

3. Определить, является ли данное бинарное отношение рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Для отношений типа эквивалентности найти X/φ. Для отношений частичной упорядоченности построить диаграмму Хассе.

а) $x\varphi y \Leftrightarrow x + y = 10, x, y \in X = \{1,2,3,4,5\}$;

б) бинарное отношение на множестве $X = \{1,2,3\}$, заданное определяющим множеством $S \subseteq X^2$: $\{(1,2),(2,1),(2,3)\}$;

в) $x\varphi y \Leftrightarrow x$ делится на y, $x, y \in X = \{1,2,\dots,8\}$;

г) $x\varphi y \Leftrightarrow x \le y, x, y \in X = \{1,2,\dots,8\}$;

д) $x\varphi y \Leftrightarrow x + 5 \le y, x, y \in X = \{2,4,6,8,10,12\}$;

е) $x\varphi y \Leftrightarrow x$ и y дают одинаковые остатки при делении на 5, $x, y \in X = \{5,6,10,11,15,16\}$;

ж) $X = \{1,2,3,4\}$, $S = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}$, $S \subseteq X^2$.

4. Пусть бинарное отношение задано на бесконечном множестве. Проверить, является ли данное бинарное отношение рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Для отношений типа эквивалентности найти все классы эквивалентности.

а) = в $\mathbb{R}$;

б) $x\varphi y \Leftrightarrow x + y = 1, x, y \in \mathbb{R}$;

в) $x\varphi y \Leftrightarrow x$ имеет тот же цвет глаз, что и y;

г) $x\varphi y \Leftrightarrow x \le y, x, y \in \mathbb{R}$;

д) $x\varphi y \Leftrightarrow x + 5 \le y, x, y \in \mathbb{R}$;

е) $x\varphi y \Leftrightarrow x$ и y дают одинаковые остатки при делении на 5, $x, y \in \mathbb{N}$;

ж) $x\varphi y \Leftrightarrow [x] = [y]$, $x, y \in \mathbb{R}$ ($[x]$ - целая часть числа x, то есть наибольшее целое число меньшее или равное x);

з) $(a,b)\varphi(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c, \quad a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

Задания для домашней работы.

1. Задано бинарное отношение S на множестве $X = \{1,2,\dots,8\}$. Требуется:

1) перечислить элементы множества S;

2) составить матрицу бинарного отношения;

3) составить граф бинарного отношения,

если бинарное отношение задано характеристическим свойством:

а) $x\varphi y \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 10$;

б) $x\varphi y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 \le 4$.

2. Бинарные отношения S_1 и S_2 на множестве $X = \{1,2,3,4,5\}$ заданы характеристическими свойствами $x\varphi_1 y \Leftrightarrow x \cdot y \leq 15$ и $x\varphi_2 y \Leftrightarrow x\colon y \leq 1$. Требуется:

а) записать матрицы бинарных отношений;

б) найти композиции $\varphi_1 \circ \varphi_2$ и $\varphi_2 \circ \varphi_1$;

в) найти $M_{\varphi_1^{-1}}$, $M_{\varphi_2^{-1}}$.

3. Определить, является ли данное бинарное отношение рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Для отношений типа эквивалентности найти X/φ. Для отношений частичной упорядоченности построить диаграмму Хассе.

а) $x\varphi y \Leftrightarrow x + y = 11, x, y \in X = \{1,2, \dots ,8\}$;

б) $X = \{1,2,3,4\}$, $S = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(3,3),(4,2),(4,4)\}$, $S \subseteq X^2$.

в) бинарное отношение задано матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

г) $l\varphi m \Leftrightarrow$ прямая l перпендикулярна или совпадает с прямой m; $l, m \in M = \{a, b, c, d\}$, где $a\colon x + y - 3 = 0$, $b\colon 3x + 3y + 13 = 0$, $c\colon -4x + 4y - 5 = 0$, $d\colon x - 2y = 0$.

д) $x\varphi y \Leftrightarrow x \geq y, x, y \in X = \{1,2, \dots ,10\}$;

е) $x\varphi y \Leftrightarrow x$ и y дают одинаковые остатки при делении на 3, $x, y \in X = \{3,4,5,6,7,8,9,11\}$.

4. Пусть бинарное отношение задано на бесконечном множестве. Проверить, является ли данное бинарное отношение рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Для отношений типа эквивалентности найти все классы эквивалентности.

а) параллельность прямых на плоскости;

б) перпендикулярность прямых на плоскости;

в) касание окружностей на плоскости;

г) $xRy \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Q}, x, y \in \mathbb{R}$;

д) $x\varphi y \Leftrightarrow x - (k + 1)y$ делится на k, $x, y \in \mathbb{Z}$, где $k -$ произвольное натуральное число;

е) $xRy \Leftrightarrow \{x\} = \{y\},\ x, y \in \mathbb{R}$ ($\{x\}$ − дробная часть числа x, $\{x\} = x - [x]$);

ж) $(a, b)\varphi(c, d) \Leftrightarrow ad = bc, \quad a, b, c, d \in \mathbb{N}$;

з) $\{x_n\}R\{y_n\} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ − сходящиеся последовательности действительных чисел.

1.3. Отображения множеств

Основные понятия

Говорят, что *задано отображение* f, действующее из множества X в множество Y ($f: X \to Y$), если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Элемент $y = f(x)$ называется образом элемента x.

Образ множества $\boldsymbol{A \subset X}$: $\boldsymbol{f(A) = \{y \in Y: \exists x \in A, f(x) = y\}}$.

Прообраз множества $\boldsymbol{B \subset Y}$: $\boldsymbol{f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}}$.

Отображение $f: X \to Y$ называется *инъективным*, если

$\forall \boldsymbol{x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$.

Отображение $f: X \to Y$ называется *сюръективным*, если

$\forall \boldsymbol{y \in Y \ \Rightarrow \ \exists x \in X: f(x) = y}$.

Отображение $f: X \to Y$ называется *биективным*, если оно инъективно и сюръективно.

Задания для работы на занятии.

1. Отображение $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Найти композицию $f \circ g$, $g \circ f$.

$f(x) = \begin{cases} 1 + x, x \ge 0, \\ 1 - x, x < 0, \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 1 + x, x \ge 1, \\ 2x, \quad x < 1. \end{cases}$

2. Отображение $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ действует по правилу

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, x \ge 0, \\ 1 - x, x < 0. \end{cases}$$

Найти $f([0,1]), f([-1,2]),\ f^{-1}([0,1]), f^{-1}([-1,2])$.

3. В прямоугольной декартовой системе координат на плоскости каждой точке соответствует радиус-вектор r. Пусть $f: X \to \mathbb{R}_+$, $f(r) = |r|$ (X - множество всех радиусов-векторов). Описать точки плоскости соответствующие радиус-векторам: $f^{-1}(0), f^{-1}(4), f^{-1}([1,3])$.

4. Отображение $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ставит в соответствие точке плоскости с координатами (x, y) точку с координатами (x^2, y^2) . Найти

а) $f^{-1}((16{,}81))$;

б) $f^{-1}((36, -25))$;

в) $f^{-1}(B)$, где $B = [0{,}1] \times [4{,}9]$;

г) $f(A)$, $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. Отображение $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ действует по правилу: $f\big((x, y)\big) = x + y$. Найти:

а) $f^{-1}(0)$;

б) $f^{-1}(B)$ где $B = \{1, -1\}$;

в) $f^{-1}(B)$ где $B = [-2{,}3]$.

6. Пусть X и Y – два множества. В каких из перечисленных ниже случаев соответствие, задаваемое правилом f, является сюръекцией? инъекцией? биекцией? В каждом из случаев отрицательного ответа укажите как нужно изменить X и (или) Y, чтобы f стало отображением, сюръекцией, биекцией?

а) $X -$ множество векторов на плоскости, коллинеарных данному вектору, $Y = \mathbb{R}$, f ставит в соответствие каждому вектору его длину;

б) $X -$ множество всех вещественных последовательностей, $Y = \mathbb{R}$, f ставит в соответствие каждой последовательности ее предел;

в) $X -$ множество треугольников, $Y = \mathbb{R}$, f ставит в соответствие каждому треугольнику его площадь;

г) $X = Y = \mathbb{R}^2$, f ставит в соответствие точке (x, y) точку с координатами (x^2, y^2);

д) $X = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = cos^2 x$;

е) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$;

ж) $X = Y = \mathbb{N}$,

$$f(k) = \begin{cases} n - k, k < n \\ n + k, k \geq n, \end{cases}$$

где $n -$ фиксированное натуральное число.

<u>Задания для домашней работы.</u>

1. Отображение $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Найти композицию $f \circ g$, $g \circ f$.

$f(x) = \begin{cases} x^2, x \geq 1, \\ x, x < 1, \end{cases}$ $\qquad$ $g(x) = \begin{cases} |x|, x < 2, \\ 4 - x, \quad x \geq 2. \end{cases}$

2. Отображение $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ действует по правилу $f(x) = sinx$. Найти $f((0, \pi)), f\left(\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)\right)$, $f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right), f^{-1}([0, 2))$.

3. Пусть $X -$ множество всех кругов на плоскости, $Y -$ множество всех точек плоскости, $Z = \mathbb{R}$. $f: X \to Y -$отображение, ставящее в соответствие каждому кругу его центр, $g: X \to Z -$ставит в соответствие кажому кругу его радиус. Что представляют собой множества $f^{-1}(y), g^{-1}(z)$.

4. Пусть $X = [0,2\pi]$, $Y = \mathbb{R}^2$, $f: X \to Y$, $f(x) = (cosx, sinx)$. Найти $f([0,2\pi]), f([0, \pi])$, $f^{-1}(B)$, где $B -$ квадрат $[-1; 1] \times [-1; 1]$.

5. Является ли соответствие, задаваемое формулой $y = lnx^2$ отображением:

а) из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}_+$;

б) из $(0; 1)$ в $\mathbb{R}$;

в) из $(0,5; 1)$ в $\mathbb{R}_+$.

В каждом из случаев, когда ответ положительный, найдите прообраз элемента y.

6. Пусть X и Y – два множества. В каких из перечисленных ниже случаев соответствие, задаваемое правилом f, является сюръекцией? инъекцией? биекцией? В каждом из случаев отрицательного ответа укажите как нужно изменить X и (или) Y, чтобы f стало отображением, сюръекцией, биекцией?

а) $X -$ множество разновидностей обоев в данном магазине, $Y -$ некоторое подмножество $\mathbb{N}$, f ставит в соответствие каждому виду обоев его цену в рублях;

б) $X -$ множество автомобилей на стоянке, $Y -$ множество красок (цветов), f ставит в соответствие каждому автомобилю его цвет;

в) $X -$ множество учителей, работающих в данной школе, $Y -$ множество предметов, изучаемых в средней школе, f ставит в соответствие каждому учителю предмет, который он преподает;

г) $X -$ множество окружностей на плоскости, $Y -$ множество точек на плоскости, f ставит в соответствие каждой окружности ее центр;

д) $X -$ множество квадратных матриц $n \times n$, $Y = \mathbb{R}$, f ставит в соответствие каждой матрице сумму элементов выбранной наугад строки этой матрицы;

е) $X = [-2; 4]$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$;
ж) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = lnx$;

1.4. Элементы комбинаторики.

<u>Основные понятия</u>

Количество *перестановок* из n элементов: $\boldsymbol{P_n = n!}$

Число перестановок из n_1 объектов первого типа, n_2 объектов второго типа, …, n_k объектов k-го типа: $\boldsymbol{P_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}}$.

Упорядоченные разбиения называются *размещениями*. Число размещений без повторений из n элементов по k: $\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$.

Число *размещений с повторениями* из n элементов по k: $\boldsymbol{\overline{A}_n^k = n^k}$.

Неупорядоченные разбиения называются *сочетаниями*. Число сочетаний без повторений из n элементов по k: $\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$.

Число *сочетаний с повторениями* из n элементов по k: $\boldsymbol{\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k}$.

Количество упорядоченных разбиений множества, состоящего из n элементов, на k непересекающихся подмножеств, состоящих соответственно из n_1, n_2, …, n_k элементов $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$: $\boldsymbol{C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}}$.

Количество неупорядоченных разбиений множества, состоящего из n элементов, на m_1 одноэлементных подмножеств, m_2 двухэлементных подмножеств, …, m_n n-элементных подмножеств $(1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \cdots + n \cdot m_n = n)$: $\boldsymbol{N(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_n! (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}}}$.

Формула бинома Ньютона: $\boldsymbol{(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}}$.

Обобщение формулы бинома Ньютона: $\boldsymbol{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n} C_n^{m_1, m_2, \dots, m_k} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_k^{m_k}}$.

Свойства биномиальных коэффициентов:

$\boldsymbol{C_n^k = C_n^{n-k}}$;

$\boldsymbol{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n}$;

$\boldsymbol{C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0}$.

Формула включений и исключений: $\left|\bigcup_{k=1}^{n} X_k\right| = \sum_{k=1}^{n}|X_k| - \sum_{k_1,k_2=1(k_1<k_2)}^{n}\left|X_{k_1} \cap X_{k_2}\right| + \sum_{k_1,k_2,k_3=1(k_1<k_2<k_3)}^{n}\left|X_{k_1} \cap\cap X_{k_2} \cap X_{k_3}\right| - \dots + (-1)^n|X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n|$.

<u>Задания для работы на занятии.</u>

1. а) Сколько существует 5-значных чисел?

б) Сколько существует 5-значных чисел со всеми четными цифрами?

в) Сколько существует 5-значных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, таких, как 67876, 17071)?

г) Сколько существует 5-значных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

д) Сколько существует 5-значных чисел, сумма цифр которых делится на 5?

е) Сколько существует 5-значных чисел, в которых нет рядом стоящих цифр 2 и 3?

2. а) Сколько различных делителей имеет число $3^5 \times 5^4$?

б) Пусть $p_1, \dots, p_n$ - различные простые числа. Сколько делителей имеет число $m = p_1^{\alpha_1}, \dots, p_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - некоторые натуральные числа?

в) Найти количество делителей чисел 1048, 10000?

3. а) Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2, \dots, n\}$ так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом в порядке возрастания?

б) Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2, \dots, n\}$ так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом в произвольном порядке?

4. а) Имеется n различных предметов. Сколько существует способов выложить их в ряд?

б) Сколько существует способов выложить эти же n предметов по окружности на стол?

в) Имеется n_1 предметов первого типа, n_2 - второго типа, …, n_k – k-го типа. Сколько существует способов выложить их в ряд?

5. а) Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «парабола»? (Словом называется любое сочетание букв.)

б) Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «комбинаторика»?

6. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

7. Имеется p белых и q черных шаров. Сколькими способами можно выложить шары в ряд так, чтобы никакие 2 черных шара не лежали рядом?

8. Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать? Дайте ответ на тот же самый вопрос, если в один день он может сдавать один экзамен.

9а. Коридор освещается 12 лампочками, у каждой свой выключатель. Сколько существует способов зажечь 5 лампочек?

9б. Коридор освещается 12 лампочками, у каждой свой выключатель. Сколько существует способов освещения коридора?

10. На оптовом складе имеется кафельная плитка 10-ти расцветок, расфасованная в одинаковые коробки. Предприниматель приехал на склад на машине в которую можно поместить 200 коробок плитки. Сколькими способами он может набрать плитку на складе, если она имеется там в неограниченном количестве?

11. а) Сколькими способами можно разделить 75 студентов на 3 группы так, чтобы в первой группе было 30 человек, во второй – 25, а в третьей 20 человек?

б) Сколькими способами можно разложить 13 разноцветных шаров в 4 различные корзины так, чтобы в одной корзине было 3 шара, в другой – 2 шара, в остальных двух – по 4 шара?

12. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт на две равные части так, чтобы в каждой из частей было ровно по два туза?

13. Пусть дано множество $A = \{1,2,\dots,10\}$ и функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2^x, & x - \text{четно} \\ x, & x - \text{нечетно} \end{cases},$$

определяющая мультимножество M. Найти мощность этого мультимножества.

14. На одной из кафедр университета работают 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро – немецкий, шестеро – французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо – английский и французский, трое – немецкий и французский.

а) Сколько человек знают все три языка?

б) Сколько человек знают ровно 2 языка?

в)) Сколько человек знают только английский язык?

15. Решите уравнения:

а) $\frac{A_{x+2}^{n+2} P_{x-n}}{P_x} = 110$;

б) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^{3} = 7(x-1)$;

в) $\frac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$.

16. а) Найдите числовой коэффициент в четвертом члене разложения $(2a - \frac{1}{2}b)^{10}$;

б) Найдите числовой коэффициент в члене разложения $(\sqrt{a} + b)^9$, содержащем a^3;

в) определите x из условия, что третий член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6$ равен $\frac{5}{9}$.

<u>Задания для домашней работы.</u>

1. а) Сколько существует 5-значных чисел, все цифры которых не делятся на 3?

б) Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000000, со всеми четными цифрами?

в) Если повернуть лист белой бумаги на 180 градусов, то цифры 0, 1, 8 не изменяются, цифры 6 и 9 переходят друг в друга, а остальные цифры теряют смысл. Сколько существует 5-значных чисел, величина которых не изменяется при повороте листа бумаги на 180 градусов?

г) Сколько существует 5-значных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

д) Сколько существует 5-значных чисел, у которых каждая следующая цифра не меньше предыдущей?

е) Сколько существует 5-значных чисел, у которых нет рядом стоящих цифр одной четности?

ж) Сколько существует 5-значных чисел, сумма цифр которых делится на 10?

з) Сколько существует 5-значных чисел, в которых нет рядом стоящих цифр 2 и 3 в порядке возрастания?

2. Сколько делителей у числа 16200?

3. а) Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2, \dots, n\}$ так, чтобы числа 1, 2, 3 не стояли рядом в порядке убывания?

б) Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2, \dots, n\}$ так, чтобы числа 1, 2, 3 не стояли рядом?

4. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать 5-значный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру

5. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Дайте ответ на тот же самый вопрос, если подъем и спуск осуществляются различными путями?

6. Имеется колода из 36 карт. Сколькими способами из нее можно выбрать 4 карты так, чтобы все они были или одной масти, или одного достоинства?

7. Сколько слов можно составить, переставляя буквы в слове «математика»?

8. Сколько пятибуквенных, шестибуквенных и семибуквенных слов можно составить, используя буквы а, ы, у, е?

9. Сколько способов выложить в ряд 6 синих, 3 красных и 10 белых ша-ров?

10. В группе студентов из 25 человек нужно выбрать старосту, профорга и двух заместителей старосты. Сколькими способами это можно сделать?

11. а) 12 белых и 12 черных шашек стоят на 32 черных полях. Сколько существует таких расстановок?

б) На прямой отмечено 10 точек, на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках (получите ответ двумя способами)?

12. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

13. Сколькими способами можно разложить в 9 лузах 7 белых и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.

14. При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что 60% студентов читает журнал А, 50% - журнал В, 50% - журнал С, 30% - журнал А и В, 20% - журнал В и С, 40% - журнал А и С, 10% - журналы А, В и С. Сколько процентов студентов

а) не читает ни один из журналов;

б) читает в точности два журнала;

в) читает не менее двух журналов?

15. Решите уравнение:

а) $\frac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$;

б) $C_x^{x-2} + A_x^3 = 14x$;

в) $\frac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5}$=89.

16. а) Найдите числовой коэффициент в шестом члене разложения $(a - \frac{1}{2}b)^8$;

б) Найдите числовой коэффициент в члене разложения $(\sqrt{a} + a^{\frac{1}{4}})^{20}$, содержащем a^7;

в) определите x из условия, что разность между пятым и третьим членами разложения $\left(x + \sqrt{5}\right)^6$ равна 300.

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Логика высказываний.

Основные понятия

Отрицанием высказывания A будем называть новое высказывание $\urcorner A$ или $\bar{A}$, истинностные значения которого определяются по таблице

A	$\urcorner A$
1	0
0	1

Конъюнкцией высказываний A и B будем называть новое высказывание $A \wedge B$ или AB, истинностные значения которого определяются по таблице

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкцией высказываний A и B будем называть новое высказываниe$A \vee B$, истинностные значения которого определяются по таблице

A	B	$A \vee B$

1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Импликацией высказываний A и B будем называть новое высказывание $A \Longrightarrow B$, истинностные значения которого определяются по таблице

A	B	$A \Longrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленцией высказываний A и B будем называть новое высказывание $A \Leftrightarrow B$, истинностные значения которого определяются по таблице

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Сложением по модулю 2 высказываний A и B будем называть новое высказывание$A + B$, истинностные значения которого определяются по таблице

A	B	$A + B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Штрихом Шеффера (отрицанием коньюнкции) высказываний A и B будем называть новое высказывание, которое обозначается $A|B$, и истинностные значения которого определяются по таблице

A	B	$A\|B$
0	0	1
0	1	1

1	0	1
1	1	0

Стрелкой Пирса (функцией Вебба, отрицанием дизъюнкции) высказываний A и B будем называть новое высказывание, которое обозначается $A \downarrow B$, и истинностные значения которого определяются по таблице

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Пропозициональная форма – это

1) Буквы $A, B, C, \ldots$,возможно с индексами: $R_j, Y^k, T_{ijkl}^{nmp}, \ldots$;

2) Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - пропозициональные формы, то пропозициональными формами являются также$(\neg\mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(A \Rightarrow B), (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \downarrow \mathcal{B}), (\mathcal{A} | \mathcal{B}), (\mathcal{A} + \mathcal{B})$;

3) Других пропозициональных форм нет.

Для экономного использования скобок определим следующий порядок операций: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Пропозициональная форма называется *тавтологией*, если она принимает значение И при любых наборах значений входящих в нее букв.

Две пропозициональные формы называются *эквивалентными*, если их эквиваленция является тавтологией.

Пропозициональная форма называется *противоречием*, если она принимает значение Л при любых наборах значений входящих в нее букв.

Пропозициональная форма $\mathcal{A}$ называется *логическим следствием* пропозициональной формы $\mathcal{B}$, если форма $(\mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A})$ является тавтологией.

$\lambda(\mathcal{A}) = 1$ означает, что пропозициональная форма $\mathcal{A}$ при данном распределении истинностных значений входящих в нее букв принимает значение И.

$\lambda(\mathcal{A}) = 0$ означает, что пропозициональная форма $\mathcal{A}$ при данном распределении истинностных значений входящих в нее букв принимает значение Л.

Таблица логических эквивалентностей:

$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ – коммутативность конъюнкции.

$(A \lor B) \equiv (B \lor A)$ – коммутативность дизъюнкции.

$(A \land A) \equiv A$ – идемпотентность конъюнкции.

$(A \lor A) \equiv A$ – идемпотентность конъюнкции.

$\big(A \lor (B \land C)\big) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$ - дистрибутивность $\lor$ относительно $\land$.

$\big(A \land (B \lor C)\big) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$ - дистрибутивность $\land$ относительно $\lor$.

$\big(A \land (A \lor B)\big) \equiv A$ - первый закон поглощения.

$\big(A \lor (A \land B)\big) \equiv A$ - второй закон поглощения.

$(\neg\neg A) \equiv A$ - снятие двойного отрицания.

$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$ - первый закон де Моргана.

$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$ - второй закон де Моргана.

$A \equiv \big((A \land B) \lor (A \land \neg B)\big)$ – первая формула расщепления.

$A \equiv \big((A \lor B) \land (A \lor \neg B)\big)$ – вторая формула расщепления.

$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \lor B)$ - выражение $\Rightarrow$через$\lor$ и $\neg$.

$(A \Rightarrow B) \equiv \neg(A \land \neg B)$ - выражение $\Rightarrow$через$\land$ и $\neg$.

$(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)$ - выражение $\Leftrightarrow$через$\Rightarrow$ и $\land$.

$(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$ - выражение $\Leftrightarrow$через$\lor$, $\land$ и $\neg$.

$(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \lor \neg B) \land (\neg A \lor B)$ - выражение $\Leftrightarrow$через$\lor$, $\land$ и $\neg$.

$(A \lor B) \equiv \neg(\neg A \land \neg B)$ – выражение $\lor$через$\land$ и $\neg$.

$(A \land B) \equiv \neg(\neg A \lor \neg B)$ – выражение $\land$через$\lor$ и $\neg$.

$(A \lor B) \equiv (\neg A \Rightarrow B)$ – выражение $\lor$через$\Rightarrow$ и $\neg$.

$(A \land B) \equiv \neg(A \Rightarrow \neg B)$ – выражение $\land$через$\Rightarrow$ и $\neg$.

$(A + B) \equiv \neg(A \Leftrightarrow B)$– выражение + через$\Leftrightarrow$ и $\neg$.

Пропозициональная форма называется *элементарной конъюнкцией (элементарной дизъюнкцией),* если она является конъюнкцией (дизъюнкцией) пропозициональных букв и отрицаний пропозициональных букв.

Говорят, что пропозициональная форма находится в *дизъюнктной нормальной форме (ДНФ),* если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

Говорят, что пропозициональная форма находится в *конъюнктной нормальной форме (КНФ),* если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Говорят, что пропозициональная форма $\mathcal{A}$, в которую входят буквы $A_1, A_2, \dots, A_n$, находится в *совершенной дизъюнктной нормальной форме (СДНФ) (совершенной конъюнктной нормальной форме (СКНФ)),* если выполнены следующие условия:

1) форма $\mathcal{A}$ находится в ДНФ (КНФ);

2) каждый дизъюнктный (конъюнктный) член формы $\mathcal{A}$ является элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией) вида $A'_1 \land A'_2 \land \dots \land A'_n$ ($A'_1 \lor A'_2 \lor \dots \lor A'_n$), где $A'_k, k = 1,2, \dots, n,$есть либо буква A_k, либо отрицание $\neg A_k$;

3) все дизъюнктные (конъюнктные) члены различны.

*Теорема 1.*Пусть $\mathcal{A}$ – пропозициональная форма, в которую входят буквы $A_1, A_2, \dots, A_n$ и эта форма не является противоречием. Тогда существует пропозициональная форма $\mathcal{B}$ с теми же буквами, находящаяся в СДНФ и логически эквивалентная форме $\mathcal{A}$. Форма $\mathcal{B}$ единственна с точностью до расположения дизъюнктных членов.

*Теорема 2.*Пусть $\mathcal{A}$ – пропозициональная форма, в которую входят буквы $A_1, A_2, \dots, A_n$ и эта форма не является тавтологией. Тогда существует пропозициональная форма $\mathcal{B}$ с теми же буквами, находящаяся в СКНФ и логически эквивалентная форме $\mathcal{A}$. Форма $\mathcal{B}$ единственна с точностью до расположения конъюнктных членов.

Задания для работы на занятии.

1. Составить таблицы истинности для следующих пропозициональных форм. Является ли данная форма тавтологией или противоречием?

а) $\big(A \Rightarrow (B \land C)\big) \Rightarrow (A + C) \lor A$;

б) $(A \lor \neg B) \Rightarrow ((B \land \neg C) \Rightarrow \big(A \lor (B \Leftrightarrow C)\big))$;

в) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\big((B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (C \Leftrightarrow A)\big) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C))$;

г) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$;

д) $\big((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

е) $(A \Rightarrow B) \land \neg(\neg B \Rightarrow \neg A)$;

ж) $\big((\neg A \lor \neg B) \downarrow (A + \neg B)\big) + \big(\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \lor B)\big)$;

з) $\Big((A \land B) \lor \big((C \lor A) \land \neg B\big)\Big) \land \neg\big(A \lor (C \land \neg B)\big)$.

2. Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний:

а) $\lambda(A \Leftrightarrow B) = 0, \lambda(A \Rightarrow B) = 1, \lambda\big((\urcorner A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A\big) = ?$

б) $\lambda(A \wedge B) = 0, \lambda(A \Leftrightarrow B) = 0, \lambda(A \Rightarrow B) = 1, , \lambda(A) = ?$

в) $\lambda(A \Rightarrow (B \Leftrightarrow A)) = 0, \lambda(A \Rightarrow B) = ?$

г) $\lambda((A \vee B) \Rightarrow A) = 1, \lambda(A \Rightarrow B) = 1,\ \lambda(\urcorner A \Leftrightarrow \urcorner B) = ?$

3. Для каждого из приведенных ниже высказываний определите, достаточно ли имеющихся сведений, чтобы установить его логическое значение (если достаточно, то укажите это значение; если недостаточно то покажите на примерах, что возможны и одно и другое истинностные значения):

а) $\urcorner(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow \urcorner(A \vee C), \lambda(A) = 1;$

б) $(\urcorner(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge \urcorner B)) \vee C, \lambda(A \Rightarrow B) = 0;$

в) $(A \wedge \urcorner E) \Leftrightarrow ((\urcorner A \vee \urcorner E) \Rightarrow (B \wedge D))\ , \lambda(A \vee B) = 0;$

г) $(A \Rightarrow (B \vee \urcorner E)) \Leftrightarrow E; \lambda(E) = 0.$

4. Докажите, что следующие формулы опровержимы, не составляя для них таблиц истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в них пропозициональных переменных, при которых эти формулы обращаются в ложные высказывания.

а) $\Big(\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow (R \Rightarrow P)\Big) \Rightarrow (P \Rightarrow Q);$

б) $\Big(P \Rightarrow \big((Q \Rightarrow R) \Rightarrow R\big)\Big) \Rightarrow \Big(\big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow \urcorner R)\Big);$

в) $((P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow \urcorner Q) \wedge (P \vee R)) \Rightarrow R;$

г) $(X \vee Y) \Rightarrow \big((\urcorner X \wedge Y) \vee (X \wedge \urcorner Y)\big).$

5. Для следующих формул выясните, будет ли какая-либо из них логическим следствием другой.

а) $P \vee (Q \Rightarrow R) \vee Q, (P \vee Q) \Leftrightarrow R;$

б) $P \Rightarrow Q, (P \Rightarrow R) \vee Q;$

в) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R), (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R;$

г) $(P \wedge Q) \Rightarrow R, (P \vee Q) \Rightarrow R.$

6. Записать следующие высказывания в виде пропозициональных форм, употребляя пропозициональные буквы для обозначения атомарных высказываний, т.е. таких высказываний, которые уже не построены из каких-либо других высказываний. Построить истинностные таблицы для этих высказываний.

а) необходимое и достаточное условие счастья для шейха состоит в том, чтобы иметь пить вино, любить женщин и услаждать свой слух пением.

б) Фиорелло ходит в кино только в том случае, когда там показывают комедию.

в) Необходимым условием сходимости последовательности s является ограниченность s.

г) Взятку платят тогда и только тогда, когда товар доставлен.

д) Если x положительно, то x^2 положительно.

7. Выяснить, являются ли следующие рассуждения логически правильными; для этого представить каждое предложение в виде пропозициональной формы и проверить, является ли заключение логическим следствием конъюнкции посылок.

а) Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы возрастут.

б) Если строить противоатомные убежища, то другие государства будут чувствовать себя в опасности, а наш народ получит ложное представление о своей безопасности. Если другие страны будут чувствовать себя в опасности, то они смогут начать превентивную войну. Если наш народ получит ложное представление о своей безопасности, то он ослабит свои усилия, направленные на сохранение мира. Если же не строить противоатомные убежища, то мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны. Следовательно, либо другие страны могут начать превентивную войну, и наш народ ослабит свои усилия, направленные на сохранение мира, либо мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны.

8. Проверить совместность множества утверждений. Для этого представить предложения в виде пропозициональных форм и затем проверить, является ли их конъюнкция противоречием.

Если курс, ценных бумаг растет или процентная ставка снижается, то либо падает курс акций, 7либо налоги не повышаются. Курс акций понижается тогда и только тогда, когда растет курс ценных бумаг и налоги растут. Если процентная ставка снижается, то либо курс акций не понижается, либо курс ценных бумаг не растет. Либо повышаются налоги, либо курс акций понижается и снижается процентная ставка.

9. Применяя равносильные преобразования, доказать следующие соотношения:

а) $A \lor \urcorner A \land B \Leftrightarrow A \lor B$;

б) $(A \lor B) \land (A \lor \urcorner B) \ \Leftrightarrow A$;

в) $A \land (\urcorner A \lor B) \Leftrightarrow A \land B$.

10. Применяя равносильные преобразования, доказать тождественную истинность формул:

а) $A \Rightarrow (A \lor B)$;

б) $A \Rightarrow \big(B \Rightarrow (A \land B)\big)$;

в) $\big((A \Rightarrow B) \land \urcorner B\big) \Rightarrow \urcorner A$;

г) $(A \Rightarrow C) \land (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \lor B) \Rightarrow C)$.

11. Применяя равносильные преобразования упростить:

а) $\urcorner\urcorner(A \land B) \lor (A \Rightarrow B) \land A$;

б) $\urcorner\big((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow \urcorner A)\big)$;

в)$(A \land C) \lor (A \land \urcorner C) \lor (B \land C) \lor (\urcorner A \land B \land C)$.

12. Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только связки "$\urcorner$" и "$\land$":

а) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$;

б) $\urcorner(A \Rightarrow B) \lor (\urcorner A \Rightarrow \urcorner B)$;

в) $(A \lor B) \Rightarrow (\urcorner A \Rightarrow C)$.

13. Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только связки "$\urcorner$" и "$\lor$":

а) $(A \land \urcorner \mathrm{C}) \Rightarrow (B \land A)$;

б) $(A \Leftrightarrow B) \land (B \Leftrightarrow C)$;

в) $\urcorner(A \Rightarrow B \land C) \Rightarrow \urcorner C \land A$.

14. Используя равносильные преобразования, привести к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) и к конъюнктивной нормальной форме (КНФ):

а) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$;

б) $(x \lor y \lor z) \land (x \Rightarrow y)$;

в) $x \Leftrightarrow y$;

г) $(x \Leftrightarrow y) \land (y \Leftrightarrow z) \land (z \Leftrightarrow x)$.

15. Привести к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) и к совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ)::

а) $(\bar{x} \Rightarrow y) \Rightarrow x$;

б) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$;

в) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \Leftrightarrow x)$;

г) $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \wedge (z \Rightarrow v)$.

<u>Задания для домашней работы.</u>

1. Составить таблицы истинности для следующих пропозициональных форм. Является ли данная форма тавтологией или противоречием?

а) $\big(A \Leftrightarrow \neg(B + C)\big) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow (B \vee C))$;

б)($(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((C \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)) \ \Rightarrow \neg C)) + (A \vee B)$;

в) (А$\Rightarrow (B \Rightarrow C)) \ \Leftrightarrow ((A + B) \vee (B + C))$;

г) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big((A \vee C) \Rightarrow (B \vee C)\big)$;

д) $\big((A + B) \Leftrightarrow C\big) \wedge (A \Rightarrow (B \wedge C))$;

е) $((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow \big((A \wedge B) \Rightarrow C\big)$;

ж) $\Big(\big((A \vee \neg B) \wedge C\big) \Rightarrow \big((A \Leftrightarrow C) + B\big)\Big) \wedge \big(A \wedge (B \wedge C)\big)$.

2. Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний:

а) $\lambda(A \vee B) =, \lambda(A \Rightarrow B) = 1, \lambda(\neg B \Rightarrow A) =?$

б) $\lambda(A \wedge B) = 0, \lambda(A \Leftrightarrow B) = 0, \lambda(A \Rightarrow B) = 1, , \lambda(B) =?$

в) $\lambda(A \wedge B) = 0, \lambda(A \vee B) = 1, \lambda(A \Rightarrow B) = 1, \lambda(B \Rightarrow A) =?$

г) $\lambda(A \Leftrightarrow B) = 1, \lambda\big((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)\big) =?$

3. Для следующих высказываний определите, достаточно ли имеющихся сведений, чтобы установить его логическое значение (если достаточно, то укажите это значение; если недостаточно, то покажите на примерах, что возможны и одно и другое истинностные значения):

а) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee C), \lambda(A) = 0$;

б) $(A \Leftrightarrow B) \vee (A \wedge C), \lambda(A) = 0$;

в) $A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)\ , \lambda(B) = 1$;

г) $(A \wedge B) \Rightarrow ((\neg A \Leftrightarrow C) \wedge (B \vee C)); \lambda(A \wedge B) = 1$.

4. Докажите, что следующие формулы опровержимы, не составляя для них таблиц истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в них пропозициональных переменных, при которых эти формулы обращаются в ложные высказывания.

а) $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \vee (U \wedge V) \vee (U \wedge W) \vee (V \wedge W) \vee (\urcorner X \wedge \urcorner U)$;

б) $((\urcorner P \Rightarrow P) \Rightarrow P) \Rightarrow \urcorner((\urcorner Q \Rightarrow \urcorner P) \Rightarrow \big((\urcorner Q \Rightarrow P) \Rightarrow Q\big))$;

в) $\big((Q \Rightarrow \urcorner P) \Rightarrow P\big) \Rightarrow (P \Rightarrow (P \Rightarrow \urcorner Q))$;

г) $\big((P \wedge \urcorner Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \vee \urcorner S)\big) \Rightarrow (S \wedge Q)$.

5. Для следующих формул выясните, будет ли какая-либо из них логическим следствием другой.

а) $(P \vee R) \Leftrightarrow Q, (P \vee Q) \Leftrightarrow R$;

б) $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Leftrightarrow R), P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$;

в) $((P \wedge Q) \Rightarrow R), (P \Rightarrow Q) \vee R$;

г) $(P \wedge Q) \Rightarrow R, P \vee (Q \Rightarrow R)$.

6. Записать следующие высказывания в виде пропозициональных форм, употребляя пропозициональные буквы для обозначения атомарных высказываний, т.е. таких высказываний, которые уже не построены из каких-либо других высказываний. Построить истинностные таблицы для этих высказываний.

а) Если мистер Джонс счастлив, то миссис Джонс несчастлива, и если мистер Джонс несчастлив, то миссис Джонс счастлива.

б) Или Сэм пойдет на вечеринку, и Макс не пойдет на нее, или Сэм не пойдет на вечеринку, и Макс отлично проведет время.

в) Для того, чтобы было x нечетным, достаточно, чтобы x было простым.

г) «Гиганты» выиграют приз, если «Хитрецы» сегодня не выиграют.

7. Выяснить, являются ли следующие рассуждения логически правильными; для этого представить каждое предложение в виде пропозициональной формы и проверить, является ли заключение логическим следствием конъюнкции посылок.

а) Если Джонс – коммунист, то Джонс – атеист. Джонс – атеист. Следовательно, Джонс – коммунист.

б) Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место, после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

8. Проверить совместность множества утверждений. Для этого представить предложения в виде пропозициональных форм и затем проверить, является ли их конъюнкция противоречием.

Если вечер скучен, то или Алиса начинает плакать, или Анатоль рассказывает смешные истории. Если Сильвестр приходит на вечер, то или вечер скучен, или Алиса начинает плакать. Если Анатоль рассказывает смешные истории, то Алиса не начинает плакать. Сильвестр приходит на вечер тогда и только тогда, когда Анатоль не рассказывает смешные истории. Если Алиса начинает плакать, то Анатоль рассказывает смешные истории.

9. Применяя равносильные преобразования, проверить следующие соотношения:

а) $A \wedge B \vee \urcorner A \wedge B \vee \urcorner(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$;

б) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

в) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;

г) $(\urcorner A \vee A \wedge B \vee A \wedge C \vee \urcorner A \wedge B \vee \urcorner A \wedge C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \vee C)$.

10. Применяя равносильные преобразования, доказать тождественную истинность формул:

а) $(A \vee B) \wedge \urcorner A \Rightarrow B$;

б) $\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$;

в) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

г) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow \big((A \vee B) \Rightarrow C\big))$.

11. Применяя равносильные преобразования упростить:

а) $(\urcorner(\urcorner A \vee B) \Rightarrow A \vee B) \wedge B$;

б) $\urcorner\big(A \wedge B \wedge (A \Rightarrow B)\big)$;

в) $(A \Rightarrow \urcorner B) \vee \urcorner(A \vee B)$.

12. Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только связки "$\urcorner$" и "$\wedge$":

а) $A \vee B \vee C$;

б) $A \vee (A \Leftrightarrow B)$;

в) $A \wedge \urcorner B \Rightarrow (\urcorner B \Rightarrow A)$.

13. Следующие формулы преобразовать так, чтобы они содержали только связки "$\urcorner$" и "$\vee$":

а) $\urcorner A \wedge (C \Rightarrow (B \vee \urcorner C))$;

б) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge C)$;

в) $A \vee \neg B \Longrightarrow (C \wedge B \Leftrightarrow A)$.

14. Используя равносильные преобразования, привести к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) и к конъюнктивной нормальной форме (КНФ):

а) $\overline{x \wedge y} \vee (x \Longrightarrow y)$;

б) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \Longrightarrow (x \vee z)$;

в) $(x \Longrightarrow y) \Leftrightarrow \overline{(x \Longrightarrow (y \Longrightarrow z))}$.

15. Привести к совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) и к совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ):

а) $(x \Longrightarrow y) \Longrightarrow x$;

б) $(x \Longrightarrow y) \wedge (y \Longrightarrow z) \Longrightarrow (x \Longrightarrow z)$;

в) $(x \Longrightarrow y) \wedge (y \Longrightarrow z) \wedge (z \Longrightarrow x)$;

2.2. Булевы функции.

<u>Основные понятия</u>

n-местной булевой функцией называется отображение $f: E^n \to E$, где $E = \{0,1\}$. Всего существует 2^{2^n}булевых функций, зависящих от n переменных.

Функция f^* называется *двойственной* к f, если $f^*(x_1, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n)$ для любых наборов значений $x_1, \dots, x_n$.

Функция f называется *самодвойственной*$(f \in S)$, если $f \equiv f^*$.

Функция f называется функцией *сохраняющей ноль*$(f \in T_0)$, если $f(0, \dots, 0) = 0$.

Функция f называется функцией *сохраняющей единицу*$(f \in T_1)$, если $f(1, \dots, 1) = 1$.

Функция f называется *линейной*$(f \in L)$, если она представляется в виде $f(x_1, \dots, x_n) \equiv a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, где $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}$.

Функция f называется *монотонной*$(f \in M)$, если $f(x_1, \dots, x_n) \le f(y_1, \dots, y_n)$ для всех наборов $(x_1, \dots, x_n) \prec (y_1, \dots, y_n)$.

Система булевых функций называется *полной*, если любую булеву функцию можно получить как суперпозицию функций из этой системы. Система булевых функций называется *базисом*, если она полная, а любая ее подсистема полной не является.

Теорема Поста. Система булевых функций K является полной тогда и только тогда, когда система K не содержится ни в одном из классов: T_0, T_1, S, L и M.

Многочленом Жегалкина называется многочлен, являющийся суммой константы и различных одночленов, в которых все переменные входят в степени не выше единицы:

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_k} + a,$$

$a, a_{i_1 i_2 \dots i_k} \in \{0,1\}$.

Теорема. Каждая булева функция единственным образом представляется многочленом Жегалкина.

<u>Задания для работы на занятии.</u>

1. Каково число булевых функций от n аргументов, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения? (Противоположными называются два двоичных набора вида $(a_1, a_2, \dots, a_n)$и $(\urcorner a_1, \urcorner a_2, \dots, \urcorner a_n)$).

2. На скольких наборах значений аргументов принимают значение 1 следующие булевы функции:

а) $x_1 x_2 \dots x_n + x_1$;

б) $x_1 x_2 + x_3 x_4 \dots x_n + 1$

в) $(x_1 x_2 \dots x_k) \vee (x_{k+1} x_{k+2} \dots x_n)$.

3. Найти канонические многочлены Жегалкина следующих функций:

а) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$;

б) $\urcorner A \wedge (B \wedge \urcorner C \vee \urcorner B \wedge C)$;

в) $A \wedge (B \Rightarrow C) \vee (\urcorner A \wedge B \vee A \wedge \urcorner B) \wedge (C + 1)$;

г) (10101100) - столбец значений функции f в ее таблице.

4. Какие из следующих функций самодвойственные?

а) $(A \Rightarrow B) A \wedge C$;

б) $A \wedge B + A \wedge C + B \wedge C$;

в) (0001001001100111) – столбец значений функции f в ее таблице;

г) $(A | \urcorner A) \downarrow B$.

5. Какие из следующих функций монотонны?

а) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$;

б) (00110111) – столбец значений функции f в ее таблице

в) $A \wedge B \wedge (A + C)$;

г) $xyz \vee xz \vee yz$.

6. Какие из следующих функций линейны?

а) $(A \Longrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Longrightarrow C)$;

б) $A \wedge \urcorner B \vee A$;

в) (00010010) – столбец значений функции f в ее таблице;

г) $xy\urcorner z \vee \big((\urcorner x \vee y \vee z) \Longrightarrow xyz\big) \vee \urcorner x \urcorner yz$.

7. Упростить СДНФ с помощью карты Карно и таблицы Куайна

а) (11100010) – столбец значений функции f в ее таблице;

б) $(\bar{x} \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{y} \vee z)$;

в) (0010111010011101) – столбец значений функции f в ее таблице.

8. Доказать полноту следующих систем функций сведением к заведомо полным системам:

а) $\{z \Leftrightarrow (y + xz)\}$;

б) $\{A \Longrightarrow B;\ \urcorner(A + B + C)\}$.

9. С помощью теоремы Поста проверить на полноту следующие системы функций:

а) $\{A \wedge B; A \vee B; 0; 1\}$;

б) $\{A \wedge \urcorner B; \urcorner A; A \wedge B; 1\}$;

в) $\{1; 0; A \wedge (B \Leftrightarrow C); \urcorner A \Longrightarrow A \wedge (B + C)\}$;

г) $\{A \wedge B \vee A \wedge C \vee B \wedge C; 0; 1\}$;

д) $\{xy \vee xz \vee yz; x \Leftrightarrow y; x + y\}$.

<u>Задания для домашней работы.</u>

1. Каково число булевых функций от n аргументов, принимающих на соседних наборах противоположные значения? (Соседними называются два таких двоичных набора одинаковой длины, которые отличаются друг от друга значениями лишь в одном месте).

2. На скольких наборах значений аргументов принимают значение 1 следующие булевы функции:

а) $x_1 x_2 \dots x_n + 1$;

б) $x_2 x_3 \dots x_n + x_1$;

в) $(x_1 x_2 \dots x_k) + (x_{k+1} \vee x_{k+2} \vee \dots \vee x_n)$.

3. Найдите канонические многочлены Жегалкина следующих функций:

а) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C$;

б) $(A \Rightarrow C) \wedge (B + C)$;

в) $A \wedge C \vee (A + C) \wedge B \vee \neg A \wedge \neg C$;

г) (11000100) – столбец значений функции f в ее таблице.

4. Какие из следующих функций самодвойственны?

а) $(\neg A \vee B \vee \neg A) \wedge D \vee \neg A \wedge B \wedge \neg C$;

б) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;

в) $xz + (x + z)(y + 1)$.

5. Какие из следующих функций являются монотонными?

а) $A \wedge B + A \wedge C + B \wedge C + A$;

б) (01100111) – столбец значений функции f в ее таблице;

в) $xyz + x + yz$;

г) $xyz \vee (xyz + xy)$.

6. Какие из следующих функций являются линейными?

а) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C$;

б) $\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow \big((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)\big)$;

в) (10010101) – столбец значений функции f в ее таблице;

г) $((x \vee y \vee z) \Rightarrow xy\neg z) \vee (x + y)z$.

7. Упростить СДНФ с помощью карты Карно и таблицы Куайна

а) (11100010) – столбец значений функции f в ее таблице;

б) $(\bar{x} \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{y} \vee z)$;

в) (0010111010011101) – столбец значений функции f в ее таблице

8. Доказать полноту следующих систем функций сведением к заведомо полным системам:

а) $\{xy \Rightarrow (x \Rightarrow \neg z)\}$;

б) $\{(0100); 1\}$.

9. С помощью теоремы Поста проверить на полноту следующие системы функций:

а) $\{A \Rightarrow B; A \Rightarrow \neg B \wedge C; 1\}$;

б) $\{0; 1; A \wedge (B \Leftrightarrow C) \vee \neg A \wedge (B + C)\}$;

в) $\{A \Rightarrow B; \neg A\}$;

г) $\{A \Leftrightarrow B; \urcorner A \Rightarrow \urcorner B; 1\}$;

д) $\{y \Rightarrow xz; 0; 1\}$.

2.3 Логика предикатов.

<u>Основные понятия</u>

n-местным предикатом, определенным на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, называют выражение, содержащее nпеременных $x_1, x_2, \dots, x_n$, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных конкретных элементов из множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$ соответственно. Для n-местного предиката будем использовать обозначение $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Высказывание будем считать 0-местным предикатом.

На предикаты переносятся все логические операции, которые определены для высказываний. Например, если на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$ определены два предиката P и Q, то $P \wedge Q$ – новый предикат, превращающийся в истинное высказывание на тех и только на тех значениях переменных из множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$, на которых в истинное высказывание обращаются оба данных предиката. Кроме того, для предикатов определяются еще две операции:

1) *квантор общности*$(\forall x)(P(x))$;

2) *квантор существования*$(\exists x)(P(x))$.

Эти операции ставят в соответствие одноместному предикату $P(x)$ высказывания, логические значения которых определяются следующими формулами:

$$(\forall x)\big(P(x)\big) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x) \text{ превращается в истинное высказывание для всех } x \text{ из области определения предиката,} \\ 0, & \text{если } P(x) \text{ превращается в ложное высказывание хотя бы для одного } x \text{ из области определения предиката.} \end{cases}$$

$$(\exists x)\big(P(x)\big) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x) \text{ превращается в истинное высказывание хотя бы для одного } x \text{ из области определения предиката,} \\ 0, & \text{если } P(x) \text{ превращается в ложное высказывание для всех } x \text{ из области определения предиката.} \end{cases}$$

Квантор можно применять и к n-местному предикату, в результате получается (n-1)-местный предикат. Переменную, к которой относится квантор, называют *связанной*, остальные переменные называют *свободными.*

Выражение $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$обозначают $(\forall P(x))(Q(x))$. Символ $\forall P(x)$ называют *ограниченным квантором общности.* Выражение $(\exists x)$(P(x)⋀Q(x)) обозначают $(\exists P(x))(Q(x))$. Символ $\exists P(x)$ называют *ограниченным квантором существования.*

Множеством истинности предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, называется

$P^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \ : \ P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1\}$.

Предикат называется *тождественно истинным*, если $P^+ = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$.

Предикат называется *тождественно ложным*, если $P^+ = \emptyset$.

Предикат называется *выполнимым*, если $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n : \ P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$.

Предикат называется *опровержимым*, если $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n : \ P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Предикаты $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над одними и теми же множествами называют *эквивалентными*, если $P^+ = Q^+$.

Предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют *следствием* предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданного над теми же множествами, если $Q^+ \supseteq P^+$.

Определим понятие *формулы логики предикатов:*

а) всякий 0-местный предикатный символ есть формула;

б) всякий n-местный предикатный символ $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$– свободные переменные, есть формула;

в) если F_1и F_2 – формулы, то формулами также являются $(\neg F_1), (\neg F_2), (F_1 \wedge F_2), \ (F_1 \vee F_2), (F_1 \Rightarrow F_2), (F_1 \Leftrightarrow F_2)$;

г) если F – формула, в которую переменная x входит свободно, то$(\forall x)(F)$и $(\exists x)(F)$ – формулы, в которых переменная x связана;

д) других формул нет.

Формула логики предикатов превращается в конкретный предикат при подстановке вместо всех ее предикатных переменных конкретных предикатов.

Формулу логики предикатов называют *выполнимой (опровержимой) на множестве* M, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в выполнимый (опровержимый) предикат.

Формулу логики предикатов называют *тождественно истинной (тождественно ложной) на множестве* M, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Две формулы логики предикатов F и Hс одноименными предикатными переменными называются *равносильными,* если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных над одними и теми же множествами. эти формулы превращаются в равносильные предикаты. Обозначение равносильных формул: $F \cong H$.

Формулу логики предикатов называют *общезначимой* или *тавтологией (тождественно ложной* или *противоречием*), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Правила выполнения кванторных операций в логических формулах

1. $(\forall x)(\forall y)P(x,y) = (\forall y)(\forall x)P(x,y)$;

2. $(\exists x)(\exists y)P(x,y) = (\exists y)(\exists x)P(x,y)$;

3. $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \leq (\exists x)(\exists y)P(x,y)$;

4. $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \neq (\exists y)(\forall x)P(x,y)$;

5. $\overline{(\forall x)(\exists y)P(x,y)} = (\exists x)(\forall y)\bar{P}(x,y)$;

6. $q \wedge \big((\forall x)P(x)\big) = (\forall x)(q \wedge P(x))$;

7. $q \wedge \big((\exists x)P(x)\big) = (\exists x)\big(q \wedge P(x)\big)$;

8. $q \vee \big((\forall x)P(x)\big) = (\forall x)\big(q \vee P(x)\big)$;

9. $q \vee \big((\exists x)P(x)\big) = (\exists x)\big(q \vee P(x)\big)$;

10. $q \Rightarrow \big((\forall x)P(x)\big) = (\forall x)(q \Rightarrow P(x))$;

11. $q \Rightarrow \big((\exists x)P(x)\big) = (\exists x)\big(q \Rightarrow P(x)\big)$;

12. $\big((\exists x)P(x)\big) \Rightarrow q = (\forall x)(P(x) \Rightarrow q)$;

13. $(\forall x)\big(P(x)\big) \Rightarrow q = (\exists x)(P(x) \Rightarrow q)$;

14. $\big((\forall x)P(x)\big) \wedge \big((\forall x)Q(x)\big) = (\forall x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$;

15. $\big((\exists x)P(x)\big) \vee \big((\exists x)Q(x)\big) = (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$;

16. $\big((\exists x)P(x)\big) \wedge \big((\exists y)Q(y)\big) = (\exists x)(\exists y)\big(P(x) \wedge Q(y)\big)$;

17. $\big((\forall x)P(x)\big) \vee \big((\forall y)Q(y)\big) = (\forall x)(\forall y)\big(P(x) \vee Q(y)\big)$;

18. $(\forall x)P(x) = (\forall y)P(y)$;

19. $(\exists x)P(x) = (\exists y)P(y)$.

Нормальные формы формулы логики предикатов

Формула логики предикатов имеет приведенную нормальную форму, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а знак отрицания отнесен только к элементарным формулам.

Приведенная формула логики предикатов называется предваренной нормальной формой (ПНФ), если кванторные операции в ней либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех логических операций.

1. заменить операции $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ на операции $\wedge$ и $\vee$;

2. представить формулу логики предикатов таким образом, чтобы отрицания в ней относились только к символам предикатов (таким образом мы получим приведенную нормальную форму);

3. для формул вида $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ и $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ ввести новые переменные;

4. используя равносильности 1, 2, 14, 15, 16, 17, привести формулу к ПНФ.

Задания для работы на занятии.

1. Задан одноместный предикат $P(x)$: «$x^2 > 9$ тогда и только тогда, когда $x > 3$», $x \in \mathbb{R}$. Показать на числовой оси множество истинности предиката.

2. Зная множества P^+ и $\overline{P^+}$ истинности предикатов $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\urcorner P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответственно, заданных над одними и теми же множествами, найдите множество истинности следующего предиката:

а) $\big(P(x) \Rightarrow \urcorner P(x)\big) \Rightarrow P(x)$;

б) $\Big(P(x) \Rightarrow \big(\urcorner P(x) \vee P(x)\big)\Big) \Rightarrow \urcorner P(x)$;

в) $\big(P(x) \Leftrightarrow \urcorner P(x)\big) \Rightarrow P(x)$;

г) $\big(\urcorner P(x) \wedge P(x)\big) \Rightarrow \big(\urcorner P(x) \vee P(x)\big)$.

3. Выразите множества истинности следующих предикатов через множества истинности входящих в них элементарных предикатов:

а) $\big(\urcorner P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \wedge \big(\urcorner P(x) \vee Q(x)\big)$;

б) $\urcorner\big(P(x) \wedge \urcorner R(x)\big) \wedge \urcorner\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \wedge \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$;

в) $\Big(\big(P(x) \vee \urcorner R(x)\big) \vee \urcorner\big(\urcorner Q(x) \Rightarrow P(x)\big)\Big) \Rightarrow \big(Q(x) \Rightarrow P(x)\big)$;

г) $\Big(\big(\urcorner P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow \big(P(x) \wedge \urcorner Q(x)\big)\Big) \vee \urcorner\big(P(x) \vee Q(x)\big)$.

4. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ - такие одноместные предикаты , заданные над одним и тем же множеством M, что высказывание

а) $(\exists x)\big[Q(x) \wedge (P(x) \vee \big(Q(x) \Leftrightarrow P(x)\big))\big]$ истинно; докажите, что тогда истинно и высказывание $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$;

б) $(\exists x)\big[P(x) \wedge (P(x) \Leftrightarrow \big(Q(x) \vee \urcorner P(x)\big))\big]$ истинно; докажите, что тогда истинно и высказывание $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$;

в) $(\forall x)\big[P(x) \Rightarrow (\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow \urcorner P(x))\big]$ ложно; докажите, что тогда истинно и высказывание $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$;

г) $(\forall x)[\urcorner P(x) \Rightarrow (P(x) \vee \urcorner(\urcorner Q(x) \Rightarrow P(x)))]$ ложно; докажите, что тогда истинно и высказывание $(\exists x)\big(Q(x)\big)$ и ложно высказывание $(\forall\, x)\ (P(x))$.

5. Какими могут быть множества P^+ и Q^+ истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно, заданных над непустым множеством M, если известно, что следующее высказывание истинно:

а) $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \wedge \urcorner(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$;

б) $\urcorner(\forall x)\big(\urcorner P(x) \wedge Q(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$;

в) $(\exists x)\big(\urcorner P(x) \Rightarrow \urcorner Q(x)\big) \Leftrightarrow \urcorner(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$;

г) $\urcorner(\forall x)\big(P(x) \vee \urcorner Q(x)\big) \wedge (\exists x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$.

6. Придайте следующим формулам указанные интерпретации и определите истинностные значения получающихся высказываний:

а) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$, $M = \mathbb{N}, P(x): x < 5, Q(x): x > 6$;

б) $\urcorner(\exists x)\ \big(P(x)\big)$, $M = \mathbb{N}, P(x): x < 2$;

в) $(\forall x)\big(P(x) \Leftrightarrow Q(x)\big)$, $M = \mathbb{N}, P(x)$: 3 делится на x, $Q(x)$: 2 делится на x;

г) $(\exists x)\ \big(P(x) \Rightarrow P(y)\big), M = \{2,3\}$, $P(x)$: 2 делится на x, y=3.

7. Определите, какие из следующих формул выполнимы, а какие нет (т.е. тождественно ложны):

а) $\big(P(x)\big) \Rightarrow (\forall y)\big(P(y)\big)$;

б) $(\exists x)\ \big(P(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x)\big)$;

в) $\urcorner P(x) \wedge (\forall y)\big(P(y)\big)$;

г) $(\forall x), (\forall y)\big(P(x) \vee \urcorner P(y)\big)$.

8. Докажите, что в каждой из следующих пар формулы не равносильны между собой:

а) $(\forall x)(\big(P(x) \Leftrightarrow Q(x)\big) \vee \big(Q(x) \Rightarrow P(x)\big))$ и $(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \vee (\forall x)\ (Q(x) \Rightarrow P(x)$;

б) $(\exists x)\ \big(P(x) \Rightarrow Q(y)\big)$ и $(\exists x)\ \big(P(x)\big) \Rightarrow Q(y)$;

в) $(\exists x)\ (P(y) \Rightarrow Q(x))$ и $P(y) \Rightarrow (\forall x)\big(Q(x)\big)$;

г) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow \big(Q(x) \Rightarrow R(x)\big))$ и $(\forall x)\ \Big(P(x) \Rightarrow \big(R(x) \Rightarrow Q(x)\big)\Big)$.

9. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями логики предикатов:

а) $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow \urcorner Q(x)\big) \Rightarrow \urcorner\Big((\forall x)\big(P(x)\big) \wedge (\exists x)\big(Q(x)\big)\Big)$;

б) $(\forall x)\big(P(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$;

в) $(\forall x)\big(P(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$;

г) $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(P(x)\big)$;

д) $(\exists x)\big(P(y) \Rightarrow P(x)\big)$;

е) $(\exists x)\big(P(x, x)\big) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)\big(P(x, y)\big)$;

ж) $(\exists x)(\exists y)\big(Q(x,y)\big) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\big(Q(x,y)\big)$;

з) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)\Big(\big(P(x) \wedge \neg P(y)\big) \Rightarrow Q(z)\Big)$.

10. Проанализируйте следующие рассуждения на предмет их правильности. Для этого выявите логические схемы, на которых они основаны, и выясните, справедливы ли они.

а) Все ромбы – параллелограммы. Все прямоугольники - параллелограммы. Следовательно все ромбы – прямоугольники.

б) Некоторые четные функции периодические. Ни одна монотонная функция не является четной. Следовательно, ни одна монотонная функция не является периодической.

в) Некоторые математики суть логики. Все логики знакомы с произведениями Аристотеля. Следовательно, некоторые математики знакомы с произведениями Аристотеля.

г) Все хирурги – врачи. Некоторые врачи – Герои России. Следовательно, некоторые хирурги – Герои России.

11. Привести к ПНФ формулу логики предикатов

а) $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)Q(x,y)$;

б) $\overline{(\forall x)P(x)} \vee (\exists x)Q(x,y)$;

в) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \wedge (\exists x)(\forall y)Q(x,y)$;

г) $(\forall x)\Big(\bar{P}(x) \Rightarrow (\exists y)\big(\bar{Q}(y)\big)\Big) \Rightarrow \big(Q(z) \Rightarrow P(z)\big)$.

Задания для домашней работы.

1. На множестве $X = \{1,2,\dots,20\}$ заданы предикаты: $A(x)$: «x не делится на 5», $B(x)$: «$x -$ четное число», $C(x)$: «$x -$ простое число», $D(x)$: «x кратно 3». Определите множества истинности следующих предикатов:

а) $A(x) \wedge B(x)$;

б) $\bar{B}(x) \wedge \bar{D}(x)$;

в) $D(x) \Rightarrow \bar{C}(x)$;

г) $(A(x) \wedge D(x)) \Rightarrow \bar{C}(x)$.

2. Зная множества P^+ и $\overline{P^+}$ истинности предикатов $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\neg P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответственно, заданных над одними и теми же множествами, найдите множество истинности следующего предиката:

а) $\big(P(x) \vee \neg P(x)\big) \Leftrightarrow (P(x) \Rightarrow \neg P(x))$;

б) $\neg P(x) \Longrightarrow (P(x) \wedge \neg P(x))$;

в) $\big(P(x) \Leftrightarrow \neg P(x)\big) \vee (\neg P(x) \Longrightarrow P(x))$;

г) $\big(\neg P(x) \Leftrightarrow P(x)\big) \Longrightarrow P(x)$.

3. Выразите множества истинности следующих предикатов через множества истинности входящих в них элементарных предикатов:

а) $\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big) \wedge \big(Q(x) \Longrightarrow R(x)\big) \wedge (Q(x) \Longrightarrow \neg R(x))$;

б) $(\neg P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \wedge \neg (P(x) \Longrightarrow \neg R(x)) \wedge \big(\neg P(x) \Longrightarrow \neg Q(x)\big)$;

в) $\big(Q(x) \Longrightarrow \neg R(x)\big) \wedge \neg (\neg R(x) \Longrightarrow Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee R(x))$;

г) $\Big(\big(\neg R(x) \Longrightarrow \neg P(x)\big) \Longrightarrow \big(Q(x) \vee \neg P(x)\big)\Big) \vee \big(\neg Q(x) \vee \neg P(x)\big) \wedge R(x)$.

4. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ - такие одноместные предикаты , заданные над одним и тем же множеством M, что высказывание

а) $(\forall x)\big[(P(x) \vee \big(Q(x) \Longrightarrow P(x)\big))\big]$ ложно; докажите, что тогда высказывание $(\forall x)(P(x))$ ложно, а $(\exists x)(Q(x))$ истинно;

б) $(\exists x)[((P(x) \Longrightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \neg P(x)) \wedge P(x)]$ истинно; докажите, что тогда ложно и высказывание $(\forall x)\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$;

в) $(\forall x)[P(x) \Longrightarrow (P(x) \wedge \neg (Q(x) \Longrightarrow \neg P(x)))]$ ложно; докажите, что тогда ложно и высказывание $(\forall x)\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$;

г) $(\exists x)[\neg P(x) \wedge (P(x) \vee (Q(x) \Longrightarrow P(x)))]$ истинно; докажите, что тогда ложно высказывание $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$.

5. Какими могут быть множества P^+ и Q^+ истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно, заданных над непустым множеством M, если известно, что следующее высказывание истинно:

а) $(\forall x)\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x)\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$;

б) $\neg (\forall x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$;

в) $(\forall x)\big(\neg P(x) \wedge Q(x)\big) \Leftrightarrow \neg (\exists x)\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$;

г) $(\forall x)\big(\neg P(x) \wedge Q(x)\big) \Leftrightarrow \neg (\exists x)\big(P(x) \Longrightarrow Q(x)\big)$.

6. Придайте следующим формулам указанные интерпретации и определите истинностные значения получающихся высказываний:

а) $(\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x)), M = \mathbb{N}, P(x){:}\, x < 5, Q(x){:}\, x > 6$;

б) $(\exists x)\ \big(\neg P(x)\big), M = \mathbb{N}, P(x){:}\, x < 2$;

в) $(\forall x)\big(P(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x)(Q(x))$, $M = \mathbb{N}, P(x)$: 3 делится на x, $Q(x)$: 2 делится на x;

г) $(\exists x)\,\big(P(x)\big) \Rightarrow P(y), M = \{2{,}3\}$, $P(x)$: 2 делится на x, y=3.

7. Определите, какие из следующих формул выполнимы, а какие нет (т.е. тождественно ложны):

а) $(\forall x)(P(x) \wedge \urcorner P(x))$;

б) $(\forall x)\ (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow ((\forall x)\big(P(x)\big) \vee (\forall x)\big(Q(x)\big))$;

в) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge \urcorner P(y))$;

г) $(\exists x)(\exists y)\big(P(x) \wedge \urcorner P(y)\big)$.

8. Докажите, что в каждой из следующих пар формулы не равносильны между собой:

а) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(F(x,y,z))$ и $(\exists z)(\forall y)(\exists x)(F(x,y,z))$;

б) $(\forall x)\ \big(P(x) \Rightarrow Q(y)\big)$ и $(\forall x)\ \big(P(x)\big) \Rightarrow Q(y)$;

в) $(\forall x)\ (P(y) \Rightarrow Q(x))$ и $P(y) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x)\big)$;

г) $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$ и $(\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(Q(x))$.

9. Являются ли тавтологиями следующие формулы логики предикатов?

а) $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow [(\forall x)\big(P(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(Q(x)\big)]$;

б) $(\exists x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow [(\exists x)\big(P(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(Q(x)\big)]$;

в) $(\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow [(\forall x)(P(x)) \Rightarrow (\exists x)(Q(x))]$;

г) $(\exists x)\ (\forall y)(P(y) \Rightarrow Q(x,y))$.

10. Проанализируйте следующие рассуждения на предмет их правильности. Для этого выявите логические схемы, на которых они основаны, и выясните, справедливы ли они.

а) Некоторые четные функции периодические. Ни одна монотонная функция не является четной. Следовательно, ни одна периодическая функция не является монотонной.

б) Все квадраты – правильные многоугольники. Ни одна трапеция не есть правильный многоугольник. Следовательно, ни одна трапеция не есть квадрат.

в) Все студенты БашГУ – жители Уфы. Некоторые жители Уфы - пенсионеры. Следовательно, некоторые студенты БашгУ – пенсионеры.

г) Все пловцы –спортсмены. Ни один спортсмен не курит. Следовательно, ни один курящий не является пловцом.

11. Привести к ПНФ формулу логики предикатов

а) $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(y)\big)$;

б) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \vee (\exists x)(\forall y)Q(x,y)$;

в) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Longrightarrow (\exists x)(\forall y)Q(x,y)$;

г) $\overline{(\forall x)P(x) \wedge (\exists y)Q(z,y)}$.

ГЛАВА 3. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГРАФОВ

Основные понятия

Графом G будем называть пару множеств (V,E), где V – множество *вершин* графа (точек); E – множество *ребер* графа (отрезков или дуг, соединяющих некоторые пары вершин): $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $e_i = \left(v_j, v_k\right)$ - ребро графа G, соединяющее вершины v_j и v_k. При этом различают *ориентированные графы* (*орграфы*) и *неориентированные графы*. В ориентированном графе каждая дуга направлена от начальной концевой вершины к конечной концевой вершине, то есть задается упорядоченной парой вершин. В неориентированном графе на ребрах направление не задается. Если концевые вершины ребра совпадают, то это ребро образует *петлю*. Если между парой вершин задано несколько ребер, то такие ребра называются *параллельными* или *кратными*.

Граф, не содержащий петель и кратных ребер, называется *простым,* иначе – *псевдографом* или *мультиграфом*. Если вершина v_j является началом или концом ребра e_i, то v_j называют вершиной, *инцидентной ребру* e_i , а e_i – ребром, *инцидентным вершине* v_j. Вершины, не являющиеся концами ни одного ребра, называются *изолированными*.

Два графа G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если между множествами их вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность.

Матрицей смежности ориентированного графа с n вершинами называется квадратная матрица размера $n \times n$, в которой элемент a_{ij} равен количеству ребер, исходящих из i-й вершины и входящих в -ю вершину. В простом орграфе все элементы матрицы смежности равны 0 или 1, причем на главной диагонали стоят нули.

Матрицей смежности неориентированного графа с n вершинами называется квадратная матрица размера $n \times n$, в которой элемент a_{ij} равен количеству ребер, инцидентных -й и j-й вершинам одновременно. При этом петли считаются дважды. Матрица смежности неориентированного графа является симметричной. Если граф простой, то все элементы матрицы смежности равны 0 или 1, причем на главной диагонали стоят нули.

Степенью вершины v называется количество инцидентных ей ребер. Степень вершины обозначается $\deg v$. В ориентированном случае определяются входящая $\deg^- v$ и исходящая $\deg^+ v$ степени вершины, соответственно как количество входящих в вершину ребер и количество исходящих из нее ребер. Степень вершины ориентированного графа $\deg v = \deg^- v + \deg^+ v$.

Матрица инциденций графа, имеющего n вершин и m ребер, - это матрица I, состоящая из n строк и m столбцов, которая определяется следующим образом:

<u>для ориентированного графа</u>

$b_{ij} = 1$, если ребро e_j выходит из вершины v_i;

$b_{ij} = -1$, если ребро e_j входит в вершину v_i;

$b_{ij} = 0$, если ребро e_j неинцидентно вершине v_i или является петлей при этой вершине;

<u>для неориентированного графа</u>

$b_{ij} = 1$, если ребро e_j инцидентно вершине v_i и не является ее петлей;

$b_{ij} = 2$, если ребро e_j является петлей при вершине v_i;

$b_{ij} = 0$, если ребро e_j неинцидентно вершине v_i.

Маршрутом или *путем* в графе G называют чередующуюся последовательность вершин и ребер. Эта последовательность начинается и кончается вершиной, соседние вершины различны и каждое ребро в последовательности инцидентно предыдущей и последующей вершинам (в орграфе ребро выходит из предыдущей вершины и входит в последующую). В простом графе маршрут можно обозначать просто последовательностью вершин.

Маршрут называется *замкнутым*, если его начальная и конечная вершины совпадают.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны и *простой цепью*, если различны и все вершины (за исключением, быть может, начальной и конечной).

Замкнутая цепь называется *циклом*. Цикл называется *простым циклом*, если все его вершины (за исключением начальной и конечной) различны.

Длиной маршрута называется число ребер, входящих в него.

Для графа с n вершинами матрица $B = (b_{ij})_{n \times n}$, в которой элемент b_{ij} равен 1, если i-ая вершина связана с j-ой, и равен 0 в противном случае, называется *матрицей достижимости*. Разумеется, $b_{ii} = 1$ для любого i=1,2,...,n.

<u>Задания для работы на занятии.</u>

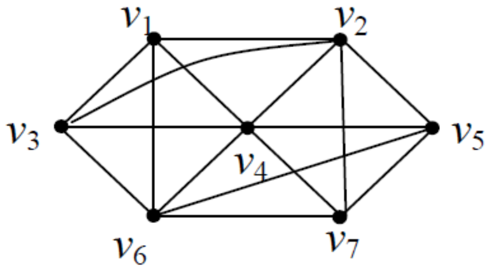
1. Простой граф на рисунке задайте

а) списком вершин и ребер;

б) матрицей смежности;

в) матрицей инцидентности.

Определите степени вершин данного графа.



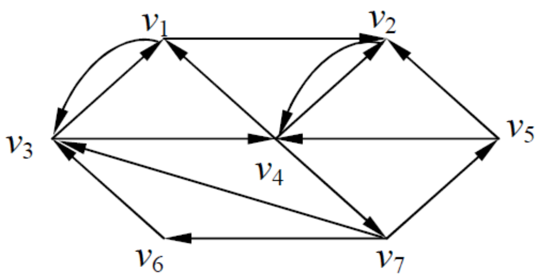
2. Орграф на рисунке задайте

а) списком вершин и ребер;

б) матрицей смежности;

в) матрицей инцидентности.

Определите положительные и отрицательные степени вершин, степени вершин данного графа.



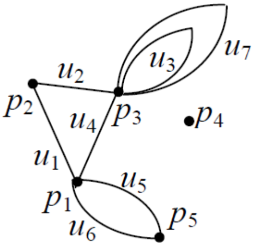
3. Граф на рисунке задайте

а) списком вершин и ребер;

б) матрицей смежности;

в) матрицей инцидентности.

Определите степени вершин данного графа. Перечислите изолированные вершины, петли, параллельные ребра.



4.. Построить

а) все попарно неизоморфные простые 4-вершинные графы;

б) все попарно неизоморфные простые несвязные 5-вершинные графы, не имеющие изолированных вершин;

в) все попарно неизоморфные 6-вершинные простые графы, состоящие из: 1) 4 компонент; 2) 3 компонент; 3) 1 компоненты и имеющие 7 ребер и 2 висячие вершины.

5. Дана матрица инцидентности простого ориентированного графа, в которой пропущена строка, соответствующая четвертой вершине

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
v_1	1		-1		1			
v_2	-1			-1		1		
v_3		1			-1			-1
v_5				1			-1	1

Требуется:

а) восстановить матрицу инцидентности этого графа и построить схему графа.;

б) записать его матрицу смежности;

в) вычислить матрицу достижимости.

Определить количество путей длиною 3 между парами его вершин.

6. Задан список ребер неориентированного графа:

1	1	2	2	2	3	4	4	4	4	5	6
2	3	4	5	6	2	3	5	6	7	7	7

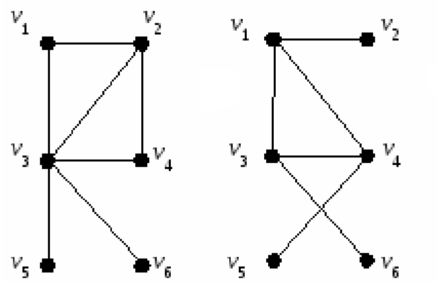
Требуется

1) построить граф;

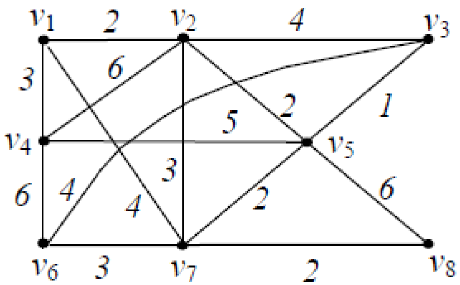
2) записать множество двоичных векторов пространства графа и выделить базис этого пространства;

3) построить все части графа, указав соответствующий вектор пространства графа.

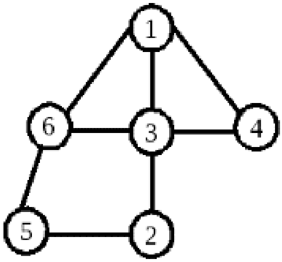
7. Для данных графов найти их объединение, пересечение, сумму, дополнение каждого из них.



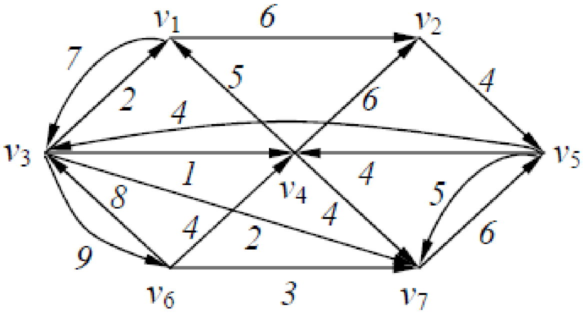
8. Используя алгоритм Прима, найти минимальное остовное дерево в нагруженном графе.



9. Построить деревья обхода графа в глубину и в ширину.



10. Найти минимальный путь в нагруженном орграфе из вершины v_3 в v_5 с помощью алгоритма Дейкстры.



<u>Задания для домашней работы.</u>

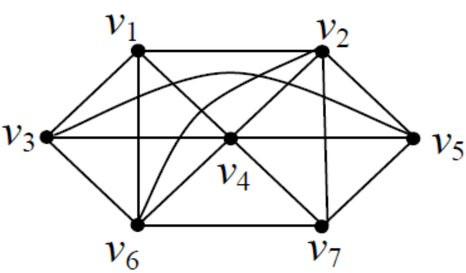
1. Простой граф на рисунке задайте

а) списком вершин и ребер;

б) матрицей смежности;

в) матрицей инцидентности.

Определите степени вершин данного графа.



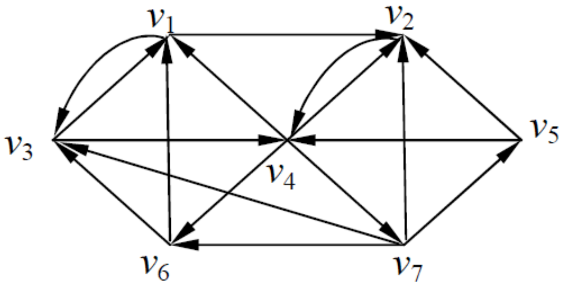
2. Орграф на рисунке задайте

а) списком вершин и ребер;

б) матрицей смежности;

в) матрицей инцидентности.

Определите положительные и отрицательные степени вершин, степени вершин данного графа.



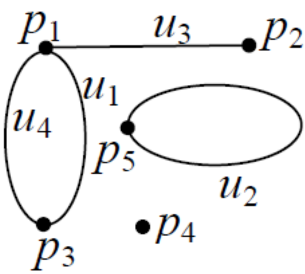
3. Граф на рисунке задайте

а) списком вершин и ребер;

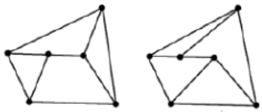
б) матрицей смежности;

в) матрицей инцидентности.

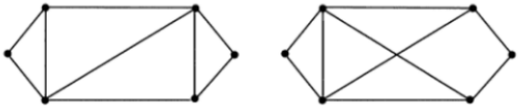
Определите степени вершин данного графа. Перечислите изолированные вершины, петли, параллельные ребра.



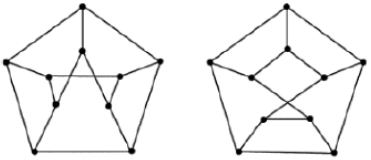
4. Среди пар графов указать пары изоморфных и пары неизоморфных



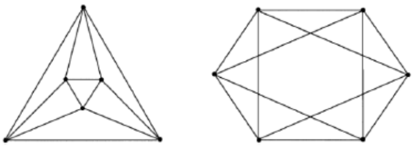
а



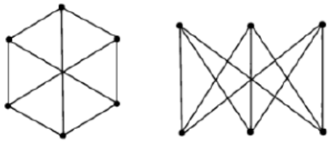
б



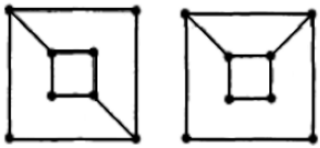
в



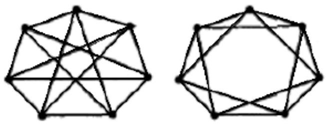
г



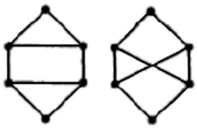
д



е



ж



з

5. Дана матрица инцидентности простого ориентированного графа, в которой пропущена строка, соответствующая пятой вершине.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
v_1	1			1	1		-1	-1
v_2		1		-1				
v_3					-1	1		1
v_4	-1		-1					

Требуется:

а) восстановить матрицу инцидентности этого графа и построить схему графа.;

б) записать его матрицу смежности;

в) вычислить матрицу достижимости.

Определить количество путей длиною 2 между парами его вершин.

6. Задан список ребер неориентированного графа:

1	1	1	2	3	4	4	4	4	4	5	6
2	3	4	5	6	2	3	5	6	7	7	7

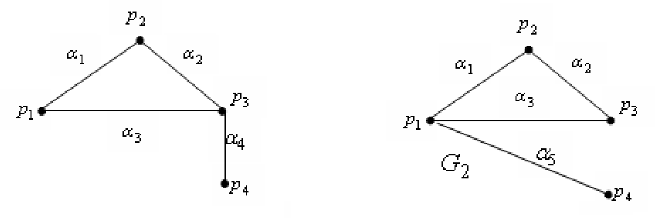
Требуется

1) построить граф;

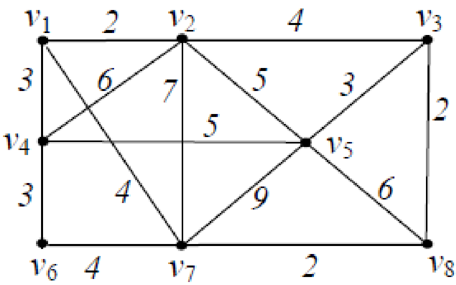
2) записать множество двоичных векторов пространства графа и выделить базис этого пространства;

3) построить все части графа, указав соответствующий вектор пространства графа.

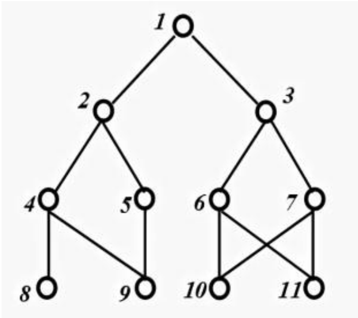
7. Для данных графов найти их объединение, пересечение, сумму, дополнение каждого из них.



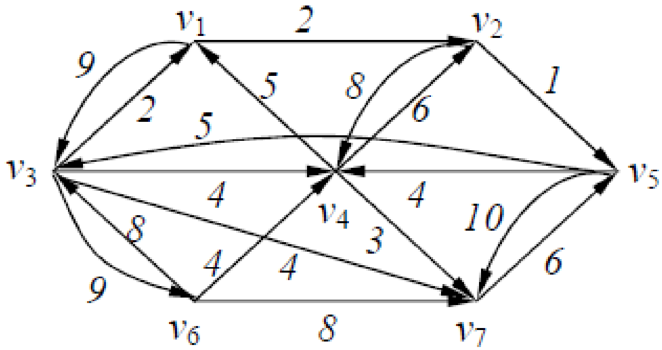
8. Используя алгоритм Прима, найти минимальное остовное дерево в нагруженном графе.



9. Построить деревья обхода графа в глубину и в ширину.



10. Найти минимальный путь в нагруженном орграфе из вершины v_3 в v_5 с помощью алгоритма Дейкстры.



ГЛАВА 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

4.1. Машины Тьюринга.

Основные понятия

Обозначим $N_1 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Отображение $f\colon N_1^k \to N_1$ будем называть k - *значной арифметической функцией.* Арифметическая функция, определенная не на всем множестве N_1^k, а лишь на его подмножестве, называется *частичной арифметической функцией*.

Машина Тьюринга есть математическая (воображаемая) машина, а не машина физическая. Она является таким же математическим объектом, как множество, функция, пространство и т.д. Как и другие математические понятия, машина ы Тьюринга моделирует некие реальные процессы. Тьюринг предпринял попытку смоделировать действия человека, осуществляющего некую умственную созидательную деятельность. Машина Тьюринга включает в себя:

- *ленту*, бесконечную в обе стороны и разделенную на квадраты (бесконечность ленты понимается в том смысле, что ее можно продлить настолько, насколько нам нужно);

…										…

- множество символов $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, называемое *внешним алфавитом* машины. Каждый квадрат ленты в любой момент времени может быть занят одним из символов. Ради единообразия удобно считать, что среди букв внешнего алфавита A имеется «пустая буква», и именно она записана в пустые ячейки ленты. Условимся, что символом пустой ячейки будет a_0. В каждый момент времени на ленте записано конечное число непустых букв;

- конечное множество внутренних состояний машины $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$, называемое *внутренним алфавитом* машины. В каждый дискретный момент времени машина находится в одном из внутренних состояний. Среди состояний выделяют два: начальное q_1 и заключительное (состояние остановки) q_0. Находясь в состоянии q_1, машина начинает работу. Попав в состояние q_0, машина останавливается;

- *читающе-пишущую головку*, которая в каждый момент времени находится на одном из квадратов ленты.

Работа машины определяется *программой (функциональной схемой)*. Программа состоит из команд. Каждая команда $K(i,j)$ $(i = 1,2,\dots,m;\ j = 0,1,2,\dots,n)$ представляет собой выражение одного из следующего видов:

$q_i a_j \to q_k a_l$, $q_i a_j \to q_k a_l$П, $q_i a_j \to q_k a_l$Л, где $0 \le k \le m$, $0 \le l \le n$.

Находясь в какой-либо момент времени в незаключительном состоянии (то есть в состоянии, отличном от q_0), машина совершает шаг, который полностью определяется ее текущим состоянием q_i и символом a_j, воспринимаемым головкой в данный момент на ленте. Содержание шага зависит от соответствующей команды $K(i,j)$:

- $q_i a_j \to q_k a_l$ – стирается символ a_j, вместо него записывается a_l (возможно $j = l$), состояние машины меняется с q_i на q_k (возможно $i = k$), головка машины остается в той же клетке;

- $q_i a_j \to q_k a_l$П – стирается символ a_j, вместо него записывается a_l, состояние машины меняется с q_i на q_k, головка машины сдвигается на соседнюю справа клетку;
- $q_i a_j \to q_k a_l$Л – стирается символ a_j, вместо него записывается a_l, состояние машины меняется с q_i на q_k, головка машины сдвигается на соседнюю слева клетку.

При переходе машины во внутреннее состояние q_0 ее работа останавливается.

Таким образом, для каждой пары q_i и a_j $(i = 1,2, \ldots, m;\ \ j = 0,1,2, \ldots, n)$ может быть только одна команда $K(i, j)$, начинающаяся с $q_i a_j$.

Словом в алфавите A или в алфавите Q, или в алфавите $A \cup Q$ называется любая последовательность букв соответствующего алфавита.

k *–ая конфигурация машины Тьюринга* – изображение ленты машины с информацией, сложившейся на ней к началу –го шага (слово в алфавите A, записанное на ленте к началу k–го шага), с указанием того, какая ячейка обозревается головкой и в каком внутреннем состоянии находится машина в этот момент.

Имеют смысл лишь конечные конфигурации, то есть такие, в которых все ячейки ленты, за исключением, может быть, конечного числа, пусты. Конфигурация называется заключительной, если состояние, в котором при этом находится машина, заключительное.

Для записи конфигураций машины удобно использовать слова из алфавита $A \cup Q$.

Будем записывать конфигурацию

$\downarrow\ q_t$

$\cdots$	a_0	a_{k_1}	a_{k_2}	$\cdots$	$a_{k_{s-1}}$	a_{k_s}	$a_{k_{s+1}}$	$\cdots$	a_{k_p}	a_0	$\cdots$

с помощью слова $a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_{s-1}} q_t a_{k_s} a_{k_{s+1}} \ldots a_{k_p}$.

То есть символ состояния записывается перед символом, на котором стоит головка машины.

Будем говорить, что непустое слово Λ_1 в алфавите $A \setminus \{a_0\}$ воспринимается машиной в *стандартном положении*, если его буквы записаны в последовательных ячейках ленты, все другие ячейки пусты, и головка машины находится на крайней правой непустой ячейке.

Стандартное положение называется начальным (соответственно заключительным), если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном внутреннем состоянии q_1 (соответственно в состоянии остановки q_0).

Будем говорить, что слово Λ_1 перерабатывается машиной в слово Λ_2, если от слова Λ_1, воспринимаемого машиной в стандартном начальном положении, машина после выполнения конечного числа команд приходит к слову Λ_2, воспринимаемому машиной в положении остановки. Если машина, начиная работать со словом Λ_1 в начальном стандартном положении, никогда не останавливается, то говорят, что машина не применима к данному слову.

Программы машин Тьюринга удобно записывать в виде таблиц, в которых названиями столбцов являются внутренние состояния, названиями строк – символы внешнего алфавита. В ячейке таблицы в столбце q_i и строке a_j записывается правая часть соответствующей команды $K(i,j)$.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – арифметическая функция (или частичная арифметическая функция). Значения $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ аргументов будем записывать на ленте машины Тьюринга, используя внешний алфавит $A = \{0,1\}$ (0 – пустая клетка), в следующем виде:

$$0\,\underbrace{11\dots1}_{x_1}\,0\,\underbrace{11\dots1}_{x_2}\,0\dots0\,\underbrace{11\dots1}_{x_n}\,0$$

Для натурального числа x обозначаем

$1^x = \underbrace{11\dots1}_{x}$, $0^x = \underbrace{00\dots0}_{x}$.

Дополнительно полагаем, $0^0 = 1^0 = \Lambda$ – пустое слово.

Так что на слова $1^0 = \Lambda$, $1^1 = 1$, $1^2 = 11$, $1^3 = 111, \dots$ будем смотреть как на «изображения» чисел $0,1,2,3\dots$ соответственно. Таким образом, набор значений аргументов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляется в виде слова $01^{x_1}01^{x_2}0\dots01^{x_n}0$.

Арифметическая функция f называется *вычислимой по Тьюрингу*, если существует машина Тьюринга, перерабатывающая слово $01^{x_1}01^{x_2}0\dots01^{x_n}0$ в слово $01^{f(x_1,x_2,\dots,x_n)}0$, если f определена на данном наборе значений аргументов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, и работающая бесконечно долго в противном случае.

Будем говорить, что машина Тьюринга *правильно вычисляет* функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если начальную конфигурацию $0q_1 01^{x_1}01^{x_2}0\dots01^{x_n}0$ она перерабатывает в конфигурацию $0q_0 01^{f(x_1,x_2,\dots,x_n)}0$, и при этом в процессе работы не пристраивает к начальному слову новых ячеек на ленте слева. Если же функция f не определена на данном наборе значений аргументов, то, начав работать из указанного положения, машина никогда не остановится и при этом не будет надстраивать ленту слева.

Пусть заданы машины Тьюринга Θ_1 и Θ_2, имеющие общий внешний алфавит $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ и алфавиты внутренних состояний $\{q_0, q_1, \dots, q_m\}$ и $\{q_0, q_1{}', \dots, q_l{}'\}$ соответственно. *Композицией* (*произведением*) машин Θ_1 и Θ_2 называется новая машина Тьюринга Θ с тем же внешним алфавитом $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, внутренним алфавитом $\{q_0, q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_{m+l}\}$ и программой, получающейся следующим образом. Во всех командах из Θ_1, содержащих символ остановки q_0, заменяем его на q_{m+1}. Все остальные символы в командах из Θ_1 остаются неизменными. В командах из Θ_2 символ q_0 оставляем неизменным, а все остальные состояния $q_i{}'$, $i = 1,2, \dots, l$, заменяем соответственно на q_{m+i}. Совокупность всех полученных команд образует программу машины Θ.

<u>Задания для работы на занятии</u>.

1. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$ и со следующей функциональной схемой (программой):

$A \backslash Q$	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
a_0	$q_4 a_0$П	$q_6 a_0$П	$q_6 a_0$П	$q_0 1$	$q_4 a_0$П	$q_0 a_0$	$q_6 a_0$П
1	$q_2 1$Л	$q_3 1$Л	$q_1 1$Л	$q_5 a_0$	$q_5 a_0$	$q_7 a_0$	$q_7 a_0$

Записывая на каждом такте работы машины получающуюся конфигурацию, определите, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов, исходя из начального стандартного положения: а) 11111; б) 111111; в) 1111; г) 1111111; д) 111;

е)$1a_0111a_0a_01111$; ж) $11a_0a_0111111$; з) $11a_0111$.

После этого постарайтесь усмотреть общую закономерность в работ машины.

2. Машина Тьюринга определяется следующей функциональной схемой:

$A \backslash Q$	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_1 a_0$П	$q_3 a_0$П	$q_3 a_0$Л	$q_1 a_0$Л
1	$q_2 a_0$Л	$q_2 1$Л	$q_4 a_0$П	$q_4 1$П
*	$q_0 a_0$	$q_3 *$Л		$q_4 *$П

Определите, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов, исходя из стандартного начального состояния:

а) 111*11; б) 11*11; в) 1111*1; г) 11111*111; д) 11111*1111. Постарайтесь выявить общую закономерность в работе машины.

3. Машина Тьюринга определяется следующей функциональной схемой (записанной в виде сокращенной таблицы):

$A \backslash Q$	q_1	q_2	q_3	$\overline{q_1}$	q_4	$\overline{q_2}$	q_5	$\overline{q_3}$	q_6	q_7
a_0	$\overline{q_1}$П	$\overline{q_2}$П	$\overline{q_3}$П	$q_6 a_0$	$\overline{q_1}$П	$q_0 1$	$\overline{q_2}$П	$q_7 1$	$\overline{q_3}$П	$q_0 1$
1	q_2Л	q_3Л	q_1Л	$q_4 a_0$		$q_5 a_0$		$q_6 a_0$		q_7П

Машина применяется к словам, состоящим из n единиц, и начинает работать в начальном стандартном состоянии. Выявить общую закономерность в работе машины.

4. Сконструируйте машину Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, которая каждое слово в алфавите $A_1 = \{1\}$ перерабатывает в пустое слово, исходя из стандартного начального положения.

5. На ленте машины Тьюринга записаны два набора единиц 1. Они разделены звездочкой *. Составьте функциональную схему машины так, чтобы она, исходя из стандартного начального положения, выбрала больший из этих наборов, а меньший стерла. Звездочка должна быть сохранена, чтобы было видно, какой из массивов выбран. Если наборы одинаковы, то может быть стерт любой из них.

6. Постройте машину Тьюринга, которая бы к натуральному числу (или нулю) в десятичной системе счисления прибавляла единицу.

7. Составьте функциональную схему машины Тьюринга, которая бы от натурального числа в десятичной системе счисления отнимала единицу и работала бесконечно долго, если исходное число 0. При этом запись числа $n-1$ не должна содержать левый нуль. Например, 100-1=99, а не 099.

8. Постройте машину Тьюринга, которая бы натуральное числу (или ноль) в десятичной системе счисления умножала на 3.

9. Дана конечная совокупность единиц, вписанных в ячейки, взятые подряд без пропусков. Постройте функциональную схему такой машины Тьюринга, которая записывала бы в десятичной системе число этих единиц, т. е. пересчитывала бы набор единиц (дешифратор).

10. Докажите, что следующие функции вычислимы по Тьюрингу, для чего постройте машины Тьюринга, правильно вычисляющие их:

а) $f(x,y) = x + y$;

б) $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \frac{4}{x-2}$;

г) $f(x) = \left[\frac{3}{x}\right]$;

д) $f(x) = 2^{1-x}$;

е) $f(x,y) = x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & x < y, \\ x - y, & x \geq y; \end{cases}$

ж) $f(x) = \frac{x}{2}$;

з) $f(x,y) = \text{НОД}(x,y)$.

11. Докажите, что если функции $f(z_1, z_2), g_1(x,y), g_2(x,y)$ вычислимы по Тьюрингу, то и сложная функция $\varphi(x,y) = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$ вычислима по Тьюрингу.

12. Используя машины Тьюринга: левый сдвиг $Б_-$, правый сдвиг $Б_+$, транспозицию В, удвоение Г и обнуление Z, - построить машину Тьюринга, переводящую конфигурацию $q_1 01^x 01^y 01^z 01^t$ в конфигурацию $q_0 01^t 01^z 01^y 01^y 01^t$.

<u>Задания для домашней работы.</u>

1. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1, *\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ и со следующей функциональной схемой (программой):

$A \backslash Q$	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 П$	$q_1 a_0 Л$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_2 1 Л$	$q_3 1 П$
*	$q_0 a_0$	$q_2 * Л$	$q_3 * П$

Записывая на каждом такте работы машины получающуюся конфигурацию, определите, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов, исходя из начального стандартного положения: а) 111*111; б) 1111*11; в) 111*1; г) 1*11; д) 11*111; е) 11111*; ж) *1111.

После этого постарайтесь усмотреть общую закономерность в работ машины.

2. Машина Тьюринга определяется следующей функциональной схемой:

$A \backslash Q$	q_1	q_2	q_3	q_4
a_0	$q_4 a_0 П$	$q_3 a_0 Л$	$q_1 a_0 П$	$q_0 a_0 Л$
1	$q_2 \alpha$	$q_1 \beta$	$q_1 1 П$	$q_1 1 Л$
α	$q_1 \alpha Л$	$q_2 \alpha П$	$q_3 1 Л$	$q_4 a_0 П$
β	$q_1 \beta Л$	$q_2 \beta П$	$q_3 a_0 Л$	$q_4 1 П$

Для следующих слов определите, в какое слово переработается каждое из них данной машиной, исходя из начального положения, при котором машина находится в состоянии q_1 и обозревается указываемая ячейка:

а) 11111 (обозревается ячейка 2, считая слева);

б) 111 (обозревается ячейка 1);

в) 1111111111 (обозревается ячейка 4);

г) 111111 (обозревается ячейка 2);

д) 111111111111111 (обозревается ячейка 6).

Какова общая закономерность работы машины?

3. Написать программу машины Тьюринга, которая бы исходя из стандартного начального положения перерабатывала слово, состоящее из n единиц, в слово, состоящее из единиц, количество которых равно остатку от деления n на 4.

4. Известно, что на ленте записано слово из n единиц 11...1; $n \geq 1$. Постройте машину Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, которая отыскивала бы левую единицу этого слова (т.е. приходила бы в состояние, при котором обозревалась бы ячейка с самой левой единицей данного слова, и в этом положении останавливалась), если в начальный момент головка машины обозревает одну из ячеек с буквой данного слова.

5. На ленте машины Тьюринга записаны два набора единиц 1. Они разделены звездочкой *. Составьте функциональную схему машины так, чтобы она, исходя из стандартного начального положения, выбрала меньший из этих наборов, а больший стерла. Звездочка должна быть сохранена, чтобы было видно, какой из массивов выбран. Если наборы одинаковы, то может быть стерт любой из них.

6. Постройте машину Тьюринга, которая бы к натуральному числу (или нулю) в десятичной системе счисления прибавляла 3.

7. Составьте функциональную схему машины Тьюринга, которая бы от натурального числа в десятичной системе счисления отнимала 2 и работала бесконечно долго, если исходное число 0 или 1. При этом запись числа $n - 2$ не должна содержать левый нуль. Например, 100-2=98, а не 098.

8. Постройте машину Тьюринга, которая бы натуральное число (или ноль) в десятичной системе счисления умножала на 2.

9. Используя программу счетчика, вычитающего единицу из десятичной записи натурального числа, составьте программу машины Тьюринга, которая бы по десятичной записи числа n выписывала бы на ленту n палочек (шифратор).

10. Докажите, что следующие функции вычислимы по Тьюрингу, для чего постройте машины Тьюринга, правильно вычисляющие их:

а) $f(x) = x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x - 1, & x > 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \overline{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \frac{1}{x-3}$;

г) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$;

д) $f(x) = 3^{2-x}$;

е) $f(x,y) = |x-y|$;

ж) $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$;

з) $f(x) = 2x+1$.

11. Докажите, что если функции $f(z_1, z_2, z_3), g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y)$ вычислимы по Тьюрингу, то и сложная функция $\varphi(x,y,z) = f(g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y))$ вычислима по Тьюрингу.

12. Используя машины Тьюринга: левый сдвиг Б$_-$, правый сдвиг Б$_+$, транспозицию В, удвоение Г и обнуление Z, - построить машину Тьюринга, переводящую конфигурацию $q_1 01^x 01^y 01^z 01^t$ в конфигурацию $q_0 01^x 01^t 01^t 01^y 01^x$.

4.2. Рекурсивные функции.

Основные понятия

Следующие функции называются *исходными*:

1). *Нуль - функция*: $Z(x) = 0$ при любом $x \in N_1$;

2). *Прибавление единицы*: $N(x) = x+1$ при любом $x \in N_1$;

3). *Проектирующие функции*:

$$U_m^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_m \ \ (1 \le m \le n),\ x_1, x_2, \dots, x_n \in N_1.$$

Следующие правила позволяют получать новые функции из уже имеющихся:

1. *Подстановка*

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$.

Говорят, что функция f получена с помощью подстановки из функций $g(x_1, x_2, \dots, x_m),\ h_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2. *Рекурсия* ($n > 0$):

$f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, x_2, \dots, x_n, y, f(x_1, x_2, \dots, x_n, y))$;

и рекурсия при $n = 0$:

$f(0) = k,\ k$ - фиксированное целое число,

$f(y+1) = h(y, f(y))$.

Говорят, что функция f получается рекурсией из функций g и h, если *n=0*, то из одной функции h. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются параметрами рекурсии.

3. μ – *оператор* (*оператор минимизации*). Через $\mu y(g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0)$ обозначим наименьшее значение y (если такое существует), при котором $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$. Таким образом, μ – оператор позволяет из каждой функции от $n+1$ переменных g получить новую (возможно частичную) арифметическую функцию n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если не существует y, при котором $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, то значение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не определено.

Функция f называется *примитивно рекурсивной*, если она может быть получена из исходных функций за конечное число подстановок и рекурсий. Иными словами, существует последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n$ такая, что $f_n = f$ и каждая функция f_i, $i < n$, или является исходной, или получена из предыдущих f_j подстановкой или рекурсией.

Функция f называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена из исходных функций за конечное число подстановок, рекурсий и применений μ – оператора.

Частично рекурсивная функция называется *общерекурсивной*, если она всюду определена.

Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ получена из функций $g(x_1, \ldots, x_n, z)$ и $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью *ограниченного оператора минимизации* (*ограниченного -оператора),* и обозначают $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu_{z \le \alpha(x_1,\ldots,x_n)}[g(x_1, \ldots, x_n, z) = 0]$, если выполнено условие: $f(x_1, \ldots, x_n) = z \le \alpha(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $g(x_1, \ldots, x_n, 0) \ne 0$, $g(x_1, \ldots, x_n, 1) \ne 0$,…, $g(x_1, \ldots, x_n, z-1) \ne 0$, а $g(x_1, \ldots, x_n, z) = 0$.

<u>Задания для работы на занятии</u>

1. Доказать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными

а) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$;

б) $g(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$;

в). $\delta(x_1) = x_1 \dot{-} 1 = max(x_1 - 1{,}0)$;

г) $v(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2 = ma\,x(x_1 - x_2, 0)$;

д) $t(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$;

е) $min(x_1, x_2)$;

ж) $min(x_1, x_2, \dots, x_n)$;

з) $Rm(x_1, x_2)$ - остаток от деления x_2 на x_1, если $x_1 \neq 0$ и x_2, если $x_1 = 0$.

2. Доказать, что если функция u примитивно рекурсивна, то функция $g(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = \sum_{y<z} u(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ также является примитивно рекурсивной.

3. Доказать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными

а) $\tau(x)$ - число делителей числа x, где $\tau(0) = 0$;

б) $\tau_p(x)$ - число простых делителей числа x, где $\tau_p(0) = 0$.

4. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ получена из функций $g(x_1, \dots, x_n, z)$ и $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ с помощью *ограниченного оператора минимизации* (*ограниченного -оператора).* Докажите, что f примитивно рекурсивна.

5. Используя ограниченный μ -оператор, докажите, что следующие функции примитивно рекурсивны:

а) $p(n) = p_n$ – n-е простое число ($p(0) = 2, p(1) = 3, p(2) = 5, p(3) = 7, \dots$);

б) $l(n)$ - номер наибольшего простого делителя числа n в его каноническом разложении на простые множители;

в) НОК(x, y) - наименьшее общее кратное чисел x и y, где НОК$(x, 0) =$ НОК$(0, y) = 0$;

г) $\left[\sqrt{x}\right]$ - целая часть числа $\sqrt{x}$.

6. Рассмотрите действие оператора минимизации для получения обратных функций. К каким функциям они являются обратными? Для каких значений аргументов эти функции определены? Докажите, что эти функции частично рекурсивны.

а) $d(x, y) = \mu_z[y + z = x]$;

б) $log_a x = \mu_y[a^y = x]$.

Задания для домашней работы

1. Доказать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными

а) $u(x_1, x_2) = {x_1}^{x_2}$;

б) $sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

в) $x!$;

г) $\overline{sgn}(x) = 1 - sgn(x)$;

д) $max(x_1, x_2)$;

е) $max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

ж) $qt(x_1, x_2)$ - частное от деления x_2 на x_1, если $x_1 \neq 0$ и 0, если $x_1 = 0$.

2. Доказать, что если функция u примитивно рекурсивна, то функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = \prod_{y<z} u(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ также является примитивно рекурсивной.

3. Доказать, что следующие функции являются примитивно рекурсивными

а) $\sigma(x)$ — сумма делителей числа x, где $\sigma(0) = 0$;

б) $\pi\ (x)$ — число простых чисел, не превосходящих x.

4. Используя ограниченный μ -оператор, докажите, что следующие функции примитивно рекурсивны:

а) $\exp(x, y)$ - показатель степени -го простого числа $p(x)$ в каноническом разложении на простые множители числа y, где $\exp(x, 0) = 0$;

б) $\text{НОД}(x, y)$ - наибольший общий делитель чисел x и y, где $\text{НОД}(0, 0) = 0$;

в) $\left[\sqrt[y]{x}\right]$ - целая часть числа $\sqrt[y]{x}$, где $\sqrt[0]{x} = x$;

г) $\left[x\sqrt{2}\right]$ - целая часть числа $x\sqrt{2}$.

5. Рассмотрите действие оператора минимизации для получения обратных функций. К каким функциям они являются обратными? Для каких значений аргументов эти функции определены? Докажите, что эти функции частично рекурсивны.

а) $q(x, \text{y}) = \mu_z[y \cdot z = x]$;

б) $\sqrt{x} = \mu_y[y^2 = x]$.

Учебное издание

ИСАЕВ Константин Петрович
КРИВОШЕЕВА Олеся Александровна
ПУТИНЦЕВА Анастасия Андреевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник задач

За достоверность информации, изложенной в сборнике задач, ответственность несут авторы

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 27.05.2022 г. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 4,14. Уч.-изд. л. 4,32.
Тираж 300 экз. Изд. № 36. Заказ 388.

Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.