

1. Верно ли, что для любых векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ справедливы следующие неравенства?

(a) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) = 0$

(b) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i$

(c) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i$

(d) $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

2. Пусть $y_i = \mu + \varepsilon_i$, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. Найдите:

(a) $\mathbb{E}(\bar{y})$

(b) $\text{Var}(\bar{y})$

(c) $\mathbb{E}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2)$

(d) $\text{Var}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2)$

3. Рассматривается модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких значениях параметров c_i несмещённая оценка $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i y_i}{\sum_{i=1}^n c_i x_i}$ имеет наименьшую дисперсию?

4. Найдите каждую из следующих матриц в каждой из следующих степеней $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, -1 , 100 .

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую (перпендикуляр) вектора u_1 на линейное подпространство $L = \mathcal{L}(u_2)$, порождённое вектором u_2 , если

(a) $u_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1), u_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$

(b) $u_1 = (2 \ 2 \ 2 \ 2), u_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$

(c) $u_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1), u_2 = (7 \ 0 \ 0 \ 7)$

6. Найдите обратные матрицы ко всем матрицам, представленным ниже.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Найдите ранг следующих матриц в зависимости от значений параметра λ .

$$(a) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 - 2\lambda \\ 1 + \lambda & 1 + 3\lambda \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

8. Пусть $i = (1, \dots, 1)'$ — вектор из n единиц и $\pi = i(i'i)^{-1}i'$. Найдите:

$$(a) \operatorname{tr}(\pi) \text{ и } \operatorname{rk}(\pi)$$

$$(b) \operatorname{tr}(I - \pi) \text{ и } \operatorname{rk}(I - \pi)$$

9. Пусть $i = (1, \dots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)' \sim N(0, I)$.

$$(a) \text{ Найдите } \mathbb{E}(\varepsilon'\pi\varepsilon), \mathbb{E}(\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon) \text{ и } \mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')$$

(b) Как распределены случайные величины $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon$?

(c) Запишите выражения $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon$, используя знак суммы

10. Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, и пусть $\text{rk}(X) = k$. Верно ли, что матрица $P = X(X'X)^{-1}X'$ симметрична и идемпотентна?
11. Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, и пусть $\text{rk}(X) = k$. Верно ли, что каждый столбец матрицы $P = X(X'X)^{-1}X'$ является собственным вектором матрицы P , отвечающим собственному значению 1?
12. Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, пусть $\text{rk}(X) = k$ и $P = X(X'X)^{-1}X'$. Верно ли, что каждый вектор-столбец u , такой что $X'u = 0$, является собственным вектором матрицы P , отвечающим собственному значению 0?
13. Верно ли, что для любых матриц A размера $m \times n$ и матриц B размера $n \times m$ выполняется равенство $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$?
14. Верно ли, что собственные значения симметричной и идемпотентной матрицы могут быть только нулями и единицами?
15. Пусть P — матрица размера $n \times n$, $P' = P$, $P^2 = P$. Верно ли, что $\text{rk}(P) = \text{tr}(P)$?
16. Верно ли, что для симметричной матрицы собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны?

17. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.

(a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$

(b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$

(c) При помощи таблиц найдите такое число q , что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$

18. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.

(a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$

(b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$

(c) При помощи таблиц найдите такое число q , что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$

19. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.

(a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$.

(b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$.

(c) При помощи таблиц найдите такое число q , что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$.

20. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $P = X(X'X)^{-1}X'$, если

(a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$