

1. Регрессионная модель задана в матричном виде при помощи уравнения  $y = X\beta + \varepsilon$ , где  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$ . Известно, что  $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$  и  $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$ . Известно также, что

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства расчетов приведены матрицы

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Найдите вектор МНК-оценок коэффициентов  $\hat{\beta}$ .
- (b) Найдите несмещенную оценку для неизвестного параметра  $\sigma^2$ .
- (c) Проверьте гипотезу  $\beta_2 = 0$  против альтернативной о неравенстве на уровне значимости 5%
2. По данным о пассажирах Титаника оценивается логит-модель. Зависимая переменная **survived** равна 1, если пассажир выжил. Объясняющая переменная **sexmale** равна 1 для мужчин.

	Model 1
(Intercept)	1.92*** (0.28)
age	-0.01 (0.01)
sexmale	-2.84*** (0.21)
AIC	633.45
BIC	646.80
Log Likelihood	-313.72
Deviance	627.45
Num. obs.	633

\*\*\* $p < 0.001$ , \*\* $p < 0.01$ , \* $p < 0.05$

Таблица 1: Statistical models

- (a) Оцените вероятность выжить для женщины 20 лет
- (b) Оцените предельный эффект увеличения возраста для женщины 20 лет
- (c) С помощью какого метода оценивается логит-модель? Каким образом при этом получаются оценки стандартных ошибок коэффициентов?

3. Теорема Гаусса-Маркова.

- (a) Аккуратно сформулируйте теорему Гаусса-Маркова для нестохастических регрессоров.
- (b) Поясните каждое из свойств оценок, фигурирующих в теореме.
- (c) Как меняются свойства оценок МНК при нарушении предпосылки теоремы о том, что дисперсия  $\varepsilon_i$  постоянна?

4. Рассмотрим временной ряд, описываемый МА(1) моделью,

$$y_t = \gamma + \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1},$$

где  $\varepsilon_t$  — белый шум с  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ .

- (a) Является ли данный процесс стационарным? Что такое стационарный процесс?
- (b) Найдите автокорреляционную функцию данного процесса,  $\rho(k) = \text{Cov}(y_t, y_{t-k})$ .
- (c) Выпишите функцию правдоподобия для данной модели в предположении нормальности  $\varepsilon_t$ .