1. Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{1i} + \beta_3 x_{2i} + \varepsilon_i$ — регрессионная модель, где $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Для удобства расчётов даны матрицы: $X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $(X'X)' = \begin{pmatrix} 0.3333 & -0.3333 & 0.0000 \\ -0.3333 & 1.3333 & -1.0000 \\ 0.0000 & -1.0000 & 2.0000 \end{pmatrix}$

   (a) Укажите число наблюдений

   (b) Укажите число регрессоров в модели, учитывая свободный член

   (c) Найдите $TSS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$

   (d) Найдите $RSS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$

   (e) Методом МНК найдите оценку для вектора неизвестных коэффициентов

   (f) Чему равен R^2 в модели? Прокомментируйте полученное значение с точки зрения качества оценённого уравнения регрессии

   (g) Сформулируйте основную и альтернативную гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость переменной x_1 в уравнении регрессии

   (h) Протестируйте на значимость переменную x_1 в уравнении регрессии на уровне значимости 10%:

      i. Приведите формулу для тестовой статистики

      ii. Укажите распределение тестовой статистики

      iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

      iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

      v. Сделайте статистический вывод о значимости переменной x_1

   (i) Найдите $P-$значение, соответствующее наблюдаемому значению тестовой статистики (T_{obs}) из предыдущего пункта. На основе полученного $P-$значения сделайте вывод о значимости переменной x_1

(j) На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_1 \neq 1$:

   i. Приведите формулу для тестовой статистики

   ii. Укажите распределение тестовой статистики

   iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

   iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

   v. Сделайте статистический вывод

(k) На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_1 > 1$:

   i. Приведите формулу для тестовой статистики

   ii. Укажите распределение тестовой статистики

   iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

   iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

   v. Сделайте статистический вывод

(l) На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_1 < 1$:

   i. Приведите формулу для тестовой статистики

   ii. Укажите распределение тестовой статистики

   iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

   iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

   v. Сделайте статистический вывод

(m) Сформулируйте основную гипотезу, которая соответствует тесту на значимость регрессии «в целом»

(n) На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о значимости регрессии «в целом»:

   i. Приведите формулу для тестовой статистики

   ii. Укажите распределение тестовой статистики

   iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

   iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

   v. Сделайте статистический вывод

(o) Найдите $P-$значение, соответствующее наблюдаемому значению тестовой статистики (T_{obs}) из предыдущего пункта. На основе полученного $P-$значения сделайте вывод о значимости регрессии «в целом»

(p) На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 2$:

i. Приведите формулу для тестовой статистики

ii. Укажите распределение тестовой статистики

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

v. Сделайте статистический вывод

(q) На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_1 + \beta_2 > 2$:

i. Приведите формулу для тестовой статистики

ii. Укажите распределение тестовой статистики

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

v. Сделайте статистический вывод

(r) На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_1 + \beta_2 < 2$:

i. Приведите формулу для тестовой статистики

ii. Укажите распределение тестовой статистики

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

v. Сделайте статистический вывод

Решение

(a) $n = 5$

(b) $k = 3$

(c) $TSS = 10$

(d) $RSS = 2$

(e) $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 0.8$. R^2 высокий, построенная эконометрическая модель «хорошо» описывает данные

(g) Основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = 0$, альтернативная гипотеза — $H_a : \beta_1 \neq 0$

(h) Проверка гипотезы

i. $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

ii. $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

iii. $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-0}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 1.7321$

iv. Нижняя граница $= -2.920$, верхняя граница $= 2.920$

v. Поскольку $T_{obs} = 1.7321$, что принадлежит промежутку от -2.920 до 2.920, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

(i) $p-value(T_{obs}) = \mathbb{P}(|T| > |T_{obs}|) = 2F_T(|T_{obs}|)$, где $F_T(|T_{obs}|)$ — функция распределения $t-$распределения с $n-k = 5-3 = 2$ степенями свободы в точке $|T_{obs}|$. $p-value(T_{obs}) = 2tcdf(-|T_{obs}|, n-k) = 2tcdf(-1.7321, 2) = 0.2253$. Поскольку $P-$значение превосходит уровень значимости 10%, то основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = 0$ не может быть отвергнута

(j) Проверка гипотезы

i. $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

ii. $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

iii. $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 0.8660$

iv. Нижняя граница $= -2.920$, верхняя граница $= 2.920$

v. Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -2.920 до 2.920, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

(k) Проверка гипотезы

i. $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

ii. $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

iii. $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 0.8660$

iv. Нижняя граница $= -\infty$, верхняя граница $= 1.8856$

v. Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от $-\infty$ до 1.8856, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

(l) Проверка гипотезы

i. $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

ii. $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

iii. $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 0.8660$

iv. Нижняя граница $= -1.8856$, верхняя граница $= +\infty$

v. Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -1.8856 до $+\infty$, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

(m) Основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$, альтернативная гипотеза — $H_a : |\beta_1| + |\beta_2| > 0$

(n) Проверка гипотезы

i. $T = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k}; n = 5; k = 3$

ii. $T \sim F(n-k); n = 5; k = 3$

iii. $T_{obs} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k} = \frac{0.8}{1-0.8} \cdot \frac{5-3}{2} = 4$

iv. Нижняя граница $= 0$, верхняя граница $= 19$

v. Поскольку $T_{obs} = 4$, что принадлежит промежутку от 0 до 19, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%. Следовательно, регрессия в целом незначима. Напомним, что $R^2 = 0.8$, то есть он высокий. Но при этом регрессия «в целом» незначима. Такой эффект может возникать при малом объёме выборки, например, таком, как в данной задаче

(o) $p-value(T_{obs}) = \mathbb{P}(|T| > |T_{obs}|) = 2F_T(|T_{obs}|)$, где $F_T(|T_{obs}|)$ — функция распределения $F-$распределения с $k = 3$ и $n - k = 5 - 3 = 2$ степенями свободы в точке T_{obs}. $p-value(T_{obs}) = 1 - fcdf(-|T_{obs}|, n-k) = 1 - fcdf(4, 2) = 0.2$. Поскольку $P-$значение превосходит уровень значимости 10%, то основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ не может быть отвергнута. Таким образом, регрессия «в целом» незначима

(p) Проверка гипотезы

i. $T = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - (\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1; \hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{22} + 2\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{23} + \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$

ii. $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

iii. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333 + 2(-1.0000) + 2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

iv. Нижняя граница $= -4.3027$, верхняя граница $= 4.3027$

v. Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -4.3027 до 4.3027, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

(q) Проверка гипотезы

i. $T = \frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}}$, где $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2) = \widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)+\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2)+2\widehat{\text{Cov}}(\hat{\beta}_1;\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{22}+ 2\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{23} + \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$

ii. $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

iii. $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333 + 2(-1.0000) + 2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-2}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

iv. Нижняя граница $= -\infty$, верхняя граница $= 2.9200$

v. Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от $-\infty$ до 2.9200, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

(r) Проверка гипотезы

i. $T = \frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}}$, где $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2) = \widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)+\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2)+2\widehat{\text{Cov}}(\hat{\beta}_1;\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{22}+ 2\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{23} + \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$

ii. $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

iii. $\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333 + 2(-1.0000) + 2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-2}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

iv. Нижняя граница $= -2.9200$, верхняя граница $= +\infty$

v. Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -2.9200 до $+\infty$, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

2. На основе 100 наблюдений была оценена функция спроса:

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{\ln Q}} = \underset{(0.04)}{0.87} - \underset{(0.02)}{1.23} \ln P$$

Значимо ли коэффициент эластичности спроса по цене отличается от -1? Рассмотрите уровень значимости 5%.

3. На основе 100 наблюдений была оценена функция спроса:

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{\ln Q}} = \underset{(0.04)}{2.87} - \underset{(0.02)}{1.12} \ln P$$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_{\ln P} = -1$ против альтернативной $H_a : \beta_{\ln P} < -1$. Дайте экономическую интерпретацию проверяемой гипотезе и альтернативе.

4. Используя годовые данные с 1960 по 2005 г., была построена кривая Филлипса, связывающая уровень инфляции Inf и уровень безработицы $Unem$:

$$\widehat{Inf} = 2.34 - 0.23Unem$$

$$\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_{Unem})} = 0.04, R^2 = 0.12$$

На уровне значимости 1% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_{Unem} = 0$ против альтернативной $H_a : \beta_{Unem} \neq 0$.

5. Была оценена функция Кобба-Дугласа с учётом человеческого капитала H (K — физический капитал, L — труд):

$$\widehat{\ln Q} = 1.4 + 0.46 \ln L + 0.27 \ln H + 0.23 \ln K$$

$$ESS = 170.4, RSS = 80.3, n = 21$$

   (a) Чему равен коэффициент R^2?

   (b) На уровне значимости 1% проверьте гипотезу о значимости регрессии «в целом»

6. На основе опроса 25 человек была оценена следующая модель зависимости логарифма зарплаты $\ln W$ от уровня образования Edu (в годах) и возраста Age:

$$\widehat{\ln W} = 1.7 + 0.5Edu + 0.06Age - 0.0004Age^2$$

$$ESS = 90.3, RSS = 60.4$$

Когда в модель были введены переменные $Fedu$ и $Medu$, учитывающие уровень образования родителей, величина ESS уведичилась до 110.3.

   (a) Напишите спецификацию уравнения регрессии с учётом образования родителей

   (b) Сформулируйте и на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о значимом влиянии уровня образования родителей на заработную плату:

      i. Сформулируйте гипотезу

      ii. Приведите формулу для тестовой статистики

iii. Укажите распределение тестовой статистики

iv. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

v. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

vi. Сделайте статистический вывод

Решение

Ограниченная модель (Restricted model):

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \varepsilon_i$$

Неограниченная модель (Unrestricted model):

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \beta_{Fedu} Fedu_i + \beta_{Medu} Medu_i + \varepsilon_i$$

По условию $ESS_R = 90.3$, $RSS_R = 60.4$, $TSS = ESS_R + RSS_R = 90.3 + 60.4 = 150.7$. Также сказано, что $ESS_{UR} = 110.3$. Значит, $RSS_{UR} = TSS - ESS_{UR} = 150.7 - 110.3 = 40.4$

(a) Спецификация:

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \beta_{Fedu} Fedu_i + \beta_{Medu} Medu_i + \varepsilon_i$$

(b) Проверка гипотезы

i. $H_0 : \begin{cases} \beta_{Fedu} = 0 \\ \beta_{Medu} = 0 \end{cases} \quad H_a : |\beta_{Fedu}| + |\beta_{Medu}| > 0$

ii. $T = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k)}$, где $q = 2$ — число линейно независимых уравнений в основной гипотезе H_0, $n = 25$ — число наблюдений, $k = 6$ — число коэффициентов в модели без ограничения

iii. $T \sim F(q; n-k)$

iv. $T_{obs} = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k)} = \frac{(60.4-40.4)/2}{40.4/(25-6)} = 4.70$

v. Нижняя граница $= 0$, верхняя граница $= 3.52$

vi. Поскольку $T_{obs} = 4.70$, что не принадлежит промежутку от 0 до 3.52, то на основе имеющихся данных можно отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%. Таким образом, образование родителей существенно влияет на заработную плату.

7. Рассмотрим следующую модель зависимости цены дома $Price$ (в тысячах долларов) от его площади $Hsize$ (в квадратных метрах), площади участка $Lsize$ (в квадратных метрах), числа ванных комнат $Bath$ и числа спален BDR:

$$\widehat{Price} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Hsize + \hat{\beta}_3 Lsize + \hat{\beta}_4 Bath + \hat{\beta}_5 BDR$$

$$R^2 = 0.218, n = 23$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистистической гипотезы $H_0 : \beta_3 = 20\beta_4$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Для регрессии с ограничением был вычислен коэффициент $R_R^2 = 0.136$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.

8. Рассмотрим следующую модель зависимости почасовой оплаты труда W от уровня образования $Educ$, возраста Age, уровня образования родителей $Fathedu$ и $Mothedu$:

$$\widehat{\ln W} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Educ + \hat{\beta}_3 Age + \hat{\beta}_4 Age^2 + \hat{\beta}_5 Fathedu + \hat{\beta}_6 Mothedu$$

$$R^2 = 0.341, n = 27$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистистической гипотезы $H_0 : \beta_5 = 2\beta_4$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Для регрессии с ограничением был вычислен коэффициент $R_R^2 = 0.296$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.

9. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$,

$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$.

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 2$:

(a) Приведите формулу для тестовой статистики

(b) Укажите распределение тестовой статистики

(c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

(d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

(e) Сделайте статистический вывод

10. Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 18$ — классическая регрессионная модель, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^{18} y_i^2 = 4256, \sum_{i=1}^{18} x_i^2 = 185, \sum_{i=1}^{18} x_i y_i = 814.25, \sum_{i=1}^{18} y_i = 225, \sum_{i=1}^{18} x_i = 49.5$. Используя эти данные, оцените эту регрессию и на уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 3.5$ против альтернативной $H_a : \beta_1 > 3.5$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики

    (b) Укажите распределение тестовой статистики

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

    (e) Сделайте статистический вывод

11. По данным для 27 фирм исследователь оценил зависимость объёма выпуска y от труда l и капитала k с помощью двух моделей:

$$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln l_i + \beta_3 \ln k_i + \varepsilon_i$$

$$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln(l_i \cdot k_i) + \varepsilon_i$$

Он получил для этих двух моделей суммы квадратов остатков $RSS_1 = 0.851$ и $RSS_2 = 0.894$ соответственно. Сформулируйте гипотезу, которую хотел проверить исследователь. На уровне значимости 5% проверьте эту гипотезу и дайте экономическую интерпретацию.

12. Пусть задана линейная регрессионная модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{1i} + \beta_3 x_{2i} + \beta_4 x_{3i} + \beta_5 x_{4i} + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, 20$$

По имеющимся данным оценены следующие регрессии:

$$\underset{(s.e.)}{\hat{y}_i} = \underset{(0.15)}{10.01} + \underset{(0.06)}{1.05}x_1 + \underset{(0.04)}{2.06}x_2 + \underset{(0.06)}{0.49}x_3 - \underset{(0.06)}{1.31}x_4, RSS = 6.85$$

$$\widehat{y_i - x_1 - 2x_2} = \underset{(0.15)}{10.00} + \underset{(0.07)}{0.50}x_3 - \underset{(0.06)}{1.32}x_4, RSS = 8.31$$
$(s.e.)$

$$\widehat{y_i + x_1 + 2x_2} = \underset{(3.62)}{9.93} + \underset{(1.48)}{0.56}x_3 - \underset{(1.42)}{1.50}x_4, RSS = 4310.62$$
$(s.e.)$

$$\widehat{y_i - x_1 + 2x_2} = \underset{(3.26)}{10.71} + \underset{(1.33)}{0.09}x_3 - \underset{(1.28)}{1.28}x_4, RSS = 3496.85$$
$(s.e.)$

$$\widehat{y_i + x_1 - 2x_2} = \underset{(1.25)}{9.22} + \underset{(0.51)}{0.97}x_3 - \underset{(0.49)}{1.54}x_4, RSS = 516.23$$
$(s.e.)$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \begin{cases} \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = 2 \end{cases}$ против альтернативной гипотезы $H_a : |\beta_2 - 1| + |\beta_3 - 2| \neq 0$.

13. Рассмотрим следующую модель зависимости расходов на образование на душу населения от дохода на душу населения, доли населения в возрасте до 18 лет, а также доли городского населения:

$$education_i = \beta_1 + \beta_2 income_i + \beta_3 young_i + \beta_4 urban_i + \varepsilon_i$$

Ниже приведены результаты оценивания уравнения этой линейной регрессии:

$$\widehat{education}_i = -\underset{(64.9199)}{287} + \underset{(0.0093)}{0.0807} \cdot income_i + \underset{(0.1598)}{0.817} \cdot young_i - \underset{(0.0343)}{0.106} \cdot urban_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	-286.84	64.92	-4.42	0.00
Income	0.08	0.01	8.67	0.00
Young	0.82	0.16	5.12	0.00
Urban	-0.11	0.03	-3.09	0.00

(a) Сформулируйте основную и альтернативую гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость коэффициента при переменной доход на душу населения в уравнении регрессии

(b) На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о значимости коэффициента при переменной доход на душу населения в уравнении регрессии:

i. Приведите формулу для тестовой статистики

ii. Укажите распределение тестовой статистики

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

v. Сделайте статистический вывод

(c) На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_1 > 1$:

i. Приведите формулу для тестовой статистики

ii. Укажите распределение тестовой статистики

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

v. Сделайте статистический вывод

(d) Сформулируйте основную гипотезу, которая соответствует тесту на значимость регрессии «в целом»

(e) На уровне значимости 1% проверьте гипотезу о значимости регрессии «в целом»,если известно, что $F-$статистика равна 34.81 со степенями свободы 3 и 47, $P-$значение равно $5.337e^{-12}$:

i. Приведите формулу для тестовой статистики

ii. Укажите распределение тестовой статистики

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

v. Сделайте статистический вывод

(f) Далее приведены результаты оценивания уравнения регрессии без переменной, отражающей долю городского населения:

$$\widehat{education}_i = -\underset{(70.27134)}{301} + \underset{(0.00741)}{0.0612} \cdot income_i + \underset{(0.17327)}{0.836} \cdot young_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	-301.09	70.27	-4.28	0.00
Income	0.06	0.01	8.25	0.00
Young	0.84	0.17	4.83	0.00

Также известно, что RSS для первой модели равен 33489.35, а для второй модели — 40276.61. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_4 = 0$ против альтернативной $H_0 : \beta_4 \neq 0$:

i. Приведите формулу для тестовой статистики

ii. Укажите распределение тестовой статистики

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

v. Сделайте статистический вывод

14. Рассмотрим следующую модель зависимости расходов на образование на душу населения от дохода на душу населения, доли населения в возрасте до 18 лет, а также доли городского населения:

$$education_i = \beta_1 + \beta_2 income_i + \beta_3 young_i + \beta_4 urban_i + \varepsilon_i$$

Ниже приведены результаты оценивания уравнения этой линейной регрессии:

$$\widehat{education}_i = -\underset{(64.9199)}{287} + \underset{(0.0093)}{0.0807} \cdot income_i + \underset{(0.1598)}{0.817} \cdot young_i - \underset{(0.0343)}{0.106} \cdot urban_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	-286.84	64.92	-4.42	0.00
Income	0.08	0.01	8.67	0.00
Young	0.82	0.16	5.12	0.00
Urban	-0.11	0.03	-3.09	0.00

(a) Сформулируйте основную и альтернативую гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость коэффициента при переменной доля населения в возрасте до 18 лет в уравнении регрессии

(b) На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о значимости коэффициента при переменной доля населения в возрасте до 18 лет в уравнении регрессии:

i. Приведите формулу для тестовой статистики

ii. Укажите распределение тестовой статистики

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

v. Сделайте статистический вывод

(c) Далее приведены результаты оценивания уравнения регрессии без переменной, отражающей долю населения в возрасте до 18 лет:

$$\widehat{education}_i = \underset{(27.3827)}{25.3} + \underset{(0.0114)}{0.0762} \cdot income_i - \underset{(0.0423)}{0.112} \cdot urban_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	25.25	27.38	0.92	0.36
Income	0.08	0.01	6.67	0.00
Urban	-0.11	0.04	-2.66	0.01

Также известно, что RSS для первой модели равен 33489.35, а для второй модели — 52132.29. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_3 = 0$ против альтернативной $H_0 : \beta_3 \neq 0$:

i. Приведите формулу для тестовой статистики

ii. Укажите распределение тестовой статистики

iii. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

iv. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

v. Сделайте статистический вывод