

```
require(ggplot2)
```

```
## Loading required package: ggplot2
```

```
## Loading required package: methods
```

### Задачи по программированию

1. Напишите программу, которая находит сумму элементов побочной диагонали квадратной матрицы.

2. Напишите программу, которая создает  $n \times n$ -матрицы вида

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & n \end{bmatrix}$$

3. Напишите программу, которая создает  $n \times n$ -матрицы вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ 3 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & n & \dots & \dots & \dots \\ n & \dots & \dots & \dots & 2n-1 \end{bmatrix}$$

4. Напишите программу, которая создает  $n \times n$ -матрицы вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 2 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & n \\ n & n & n & n \end{bmatrix}$$

5. Напишите программу, которая создает  $n \times n$ -матрицы вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ 3 & \dots & \dots & \dots & 3 \\ \dots & n & \dots & 3 & 2 \\ n & \dots & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Напишите программу, которая создает  $n \times n$ -матрицы вида

$$\begin{bmatrix} n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ \dots & n-1 & n & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{bmatrix}$$

7. Напишите программу, которая создает  $n \times n$ -матрицы вида

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \dots & \rho^n \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

8. Напишите программу, которая создает  $(2n - 1) \times (2n - 1)$ -матрицы вида

$$\begin{bmatrix} n & n & n & n & n & n & n \\ n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n \\ n & \dots & 2 & 2 & 2 & \dots & n \\ n & \dots & 2 & 1 & 2 & \dots & n \\ n & \dots & 2 & 2 & 2 & \dots & n \\ n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n \\ n & n & n & n & n & n & n \end{bmatrix}$$

9. Напишите программу, которая создает  $n \times n$ -матрицы вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & \dots \\ 3 & 5 & 8 & \dots & \dots \\ 6 & 9 & \dots & \dots & \dots \\ 10 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

10. Напишите программу, которая создает  $(2n) \times (2n)$ -матрицы вида

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & \dots & 2 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & \dots & 2 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 3 & \dots & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & \dots & 4 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 3 & \dots & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & \dots & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

11. Сгенерируйте выборку из двух зависимых, но некоррелированных случайных величин.

12. Сгенерируйте случайную выборку  $(X_i, Y_i)_{i=1}^n$  из двумерного нормального распределения с  $(X_i, Y_i) \sim (\mu, \Sigma)$ .

13. Сгенерируйте случайную выборку  $(X_{i1}, \dots, X_{ik})_{i=1}^n$  из  $k$ -мерного нормального распределения с  $(X_{i1}, \dots, X_{ik}) \sim (\mu, \Sigma)$ .

14. Сгенерируйте такой случайный вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , что  $X_i \sim (0, i), i = 1, \dots, n$ .

15. (интерполяция при помощи многочленов) Пусть заданы попарно различные точки  $x_1, \dots, x_k \subseteq \mathbb{R}$ . Для регрессионной модели  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \dots + \beta_k x_i^k + \varepsilon_i$  при  $i = 1, \dots, k + 1$

(a) Запишите матрицу  $X$ ,

(b) Напишите программу, которая создает матрицу  $X$ ,

(c) Найдите  $\det X$ ,

- (d) Найдите по методу наименьших квадратов  $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k$ ,
- (e) Найдите  $R^2$  и сделайте вывод,
- (f) В одних координатных осях изобразите наблюдения  $(x_1, y_1), \dots, (x_{k+1}, y_{k+1})$  и линию регрессии  $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \dots + \beta_k x_i^k$
- (g) Получите формулу для величины  $\det X$  в терминах точек  $x_1, \dots, x_k$  (в результате вы получите, так называемый, определитель Вандермонда).

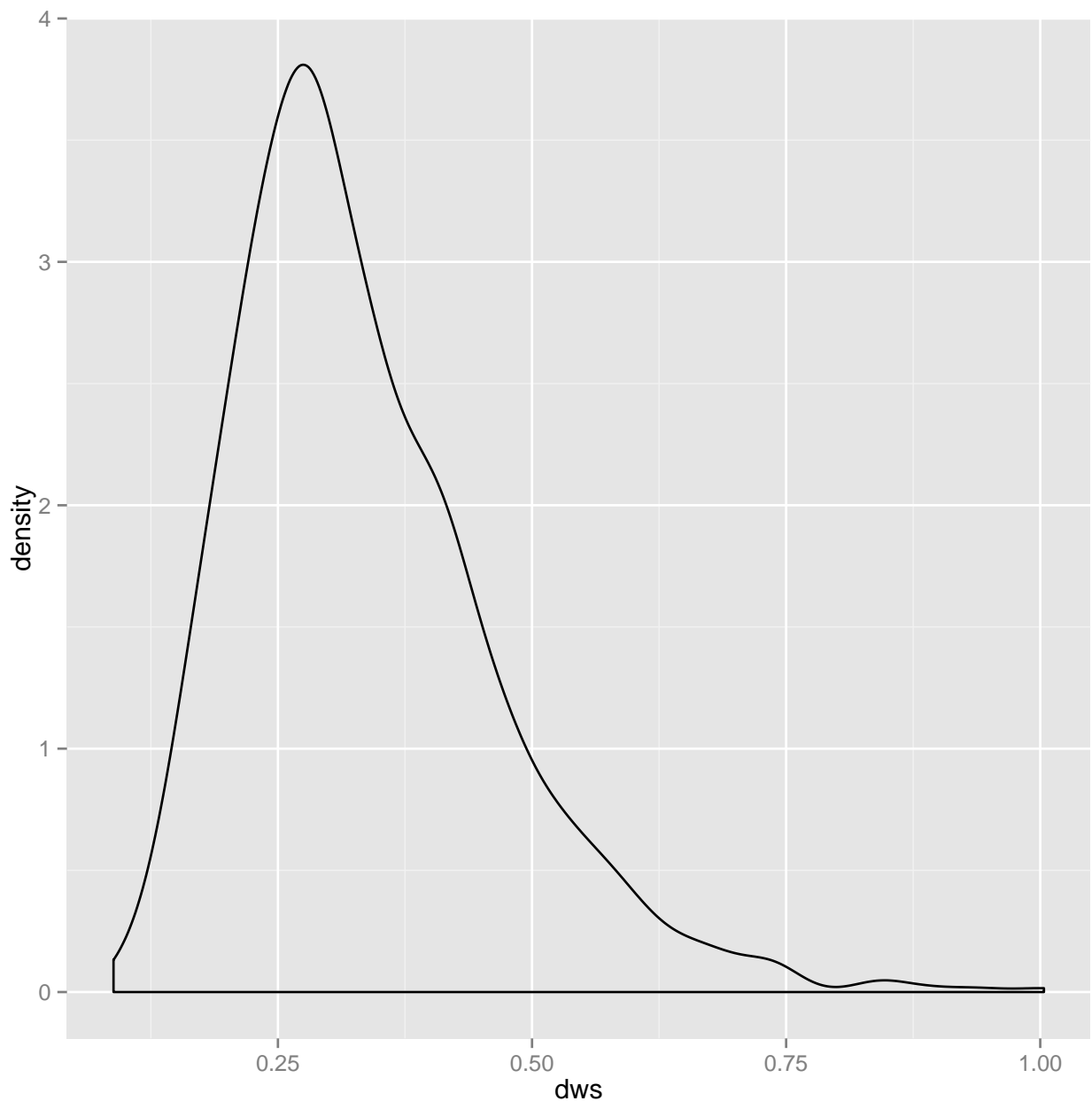
16. Пусть задан  $ARMA(p, q)$  процесс

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

- (a) Напишите программу, которая по заданному вектору  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  проверяет стационарность данного процесса.
- (b) Напишите программу, которая вычисляет и строит графики  $ACF$  и  $PACF$  для заданного процесса.

17. При помощи метода Монте-Карло постройте график ядерной плотности для статистики Дарбина-Уотсона. Используйте модель  $y_i = 1 + 2t + \varepsilon_t, t = 1, \dots, n$ , где  $\varepsilon_0 \sim N(0, 1/(1 - \rho^2))$ ,  $u_1, \dots, u_n \sim iid N(0, 1)$ ,  $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$ . Проведите расчет для  $\rho = 0.9, \rho = 0, \rho = -0.9$ .

```
simulate_dw <- function(n.sim = 1000, n.obs = 100, sigma = 1, x = 1:n.obs, beta = c(2
  3), rho = 0) {
  dw <- rep(0, n.sim)
  X <- model.matrix(~x)
  ImP <- diag(n.obs) - X %*% solve(t(X) %*% X) %*% t(X)
  for (i in 1:n.sim) {
    if (!rho == 0)
      u <- arima.sim(n = n.obs, list(ar = rho)) * sigma/sqrt(1 - rho^2)
    if (rho == 0)
      u <- rnorm(n.obs, sd = sigma)
    y <- beta[1] + beta[2] * x + u
    resid <- ImP %*% y
    dw[i] <- sum((resid[-n.obs] - resid[-1])^2)/sum(resid^2)
  }
  return(dw)
}
dws <- simulate_dw(n.sim = 1000, rho = 0.9)
qplot(dws, geom = "density")
```



18. Написать программу, которая генерирует процесс  $AR(1)$ . (Помимо генерации процесса программа должна проверять условие стационарности, и в случае отсутствия стационарности сообщать об этом).
19. Написать программу, которая оценивает параметры  $AR(1)$ -процесса.
20. Написать программу, которая генерирует процесс  $AR(2)$ . (Помимо генерации процесса программа должна проверять условие стационарности, и в случае отсутствия стационарности сообщать об этом).
21. Написать программу, которая оценивает параметры  $AR(2)$ -процесса.
22. Написать программу, которая генерирует процесс  $MA(2)$ .

23. Написать программу, которая оценивает параметры  $MA(2)$ -процесса.
24. Написать программу, которая генерирует процесс  $ARMA(1,1)$ . (Помимо генерации процесса программа должна проверять условие стационарности, и в случае отсутствия стационарности сообщать об этом).
25. Написать программу, которая оценивает параметры  $ARMA(1,1)$ -процесса.
26. Написать программу, которая генерирует процесс  $ARMA(2,1)$ . (Помимо генерации процесса программа должна проверять условие стационарности, и в случае отсутствия стационарности сообщать об этом).
27. Написать программу, которая оценивает параметры  $ARMA(2,1)$ -процесса.
28. Напишите программу, которая вычисляет произведение матриц (используйте циклы, допускается использовать умножение числа на число или вектора строки на вектор столбец).
29. Напишите программу, которая находит определитель квадратной матрицы.