Эконометрика

с Монте-Карло и эконометрессами

в задачах и упражнениях

Дмитрий Борзых, Борис Демешев

26 декабря 2013 г.

Содержание

Todo list

1 МНК без матриц и вероятностей

Задача 1.1.
Верно ли, что для любых векторов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ справедливы следующие равенства?

1. $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) = 0$
2. $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i$
3. $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i$
4. $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

Задача 1.2.
При помощи метода наименьших квадратов найдите оценку неизвестного параметра θ в следующих моделях:

1. $y_i = \theta + \theta x_i + \varepsilon_i$
2. $y_i = \theta - \theta x_i + \varepsilon_i$
3. $\ln y_i = \theta + \ln x_i + \varepsilon_i$
4. $y_i = \theta + x_i + \varepsilon_i$
5. $y_i = 1 + \theta x_i + \varepsilon_i$
6. $y_i = \theta / x_i + \varepsilon_i$
7. $y_i = \theta x_{i1} + (1 - \theta) x_{i2} + \varepsilon_i$

Задача 1.3.
Покажите, что для моделей $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, $z_i = \gamma + \delta x_i + \upsilon_i$ и $y_i + z_i = \mu + \lambda x_i + \xi_i$ МНК-оценки связаны соотношениями $\hat{\mu} = \hat{\alpha} + \hat{\gamma}$ и $\hat{\lambda} = \hat{\beta} + \hat{\delta}$.

Задача 1.4.
Найдите МНК-оценки параметров α и β в модели $y_i = \alpha + \beta y_i + \varepsilon_i$.

Задача 1.5.
Рассмотрите модели $y_i = \alpha + \beta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$, $z_i = \gamma + \delta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$.

1. Как связаны между собой $\hat{\alpha}$ и $\hat{\gamma}$?
2. Как связаны между собой $\hat{\beta}$ и $\hat{\delta}$?

Задача 1.6.
Как связаны МНК-оценки параметров α, β и γ, δ в моделях $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ и $z_i = \gamma + \delta x_i + \upsilon_i$, если $z_i = 2y_i$.

Задача 1.7.
Для модели $y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$ решите условную задачу о наименьших квадратах: $Q(\beta_1, \beta_2) := \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})^2 \to \min_{\beta_1 + \beta_2 = 1}$

Задача 1.8.
Даны n пар чисел: (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Мы прогнозируем y_i по формуле $\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i$. Найдите $\hat{\beta}$ методом наименьших квадратов.

Задача 1.9.
Даны n чисел: $y_1, \ldots, y_n$. Мы прогнозируем y_i по формуле $\hat{y}_i = \hat{\beta}$. Найдите $\hat{\beta}$ методом наименьших квадратов.

Задача 1.10.
Даны n пар чисел: (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Мы прогнозируем y_i по формуле $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$. Найдите $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ методом наименьших квадратов.

Задача 1.11.

Даны n пар чисел: (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Мы прогнозируем y_i по формуле $\hat{y}_i = 1 + \hat{\beta}x_i$. Найдите $\hat{\beta}$ методом наименьших квадратов.

Задача 1.12.

Перед нами два золотых слитка и весы, производящие взвешивания с ошибками. Взвесив первый слиток, мы получили результат 300 грамм, взвесив второй слиток — 200 грамм, взвесив оба слитка — 400 грамм. Оцените вес каждого слитка методом наименьших квадратов.

Задача 1.13.

Аня и Настя утверждают, что лектор опоздал на 10 минут. Таня считает, что лектор опоздал на 3 минуты. С помощью мнк оцените на сколько опоздал лектор.

Задача 1.14.

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$. Найдите аналог МНК-оценок для регрессии без свободного члена в непрерывном случае. Более подробно: найдите минимум по $\hat{\beta}$ для функции

$$Q(\hat{\beta}) = \int_0^1 (f(x) - \hat{\beta}x)^2 \, dx \tag{1}$$

Задача 1.15.

Есть двести наблюдений. Вовочка оценил модель $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$ по первой сотне наблюдений. Петечка оценил модель $\hat{y} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x$ по второй сотне наблюдений. Машенька оценила модель $\hat{y} = \hat{m}_1 + \hat{m}_2 x$ по всем наблюдениям.

1. Возможно ли, что $\hat{\beta}_2 > 0$, $\hat{\gamma}_2 > 0$, но $\hat{m}_2 < 0$?
2. Возможно ли, что $\hat{\beta}_1 > 0$, $\hat{\gamma}_1 > 0$, но $\hat{m}_1 < 0$?
3. Возможно ли одновременное выполнение всех упомянутых условий?

Задача 1.16.

Вася оценил модель $y = \beta_1 + \beta_2 d + \beta_3 x + \varepsilon$. Дамми-переменная d обозначает пол, 1 для мужчин и 0 для женщин. Оказалось, что $\hat{\beta}_2 > 0$. Означает ли это, что для мужчин $\bar{y}$ больше, чем $\bar{y}$ для женщин?

Задача 1.17.

Какие из указанные моделей можно представить в линейном виде?

1. $y_i = \beta_1 + \frac{\beta_2}{x_i} + \varepsilon_i$
2. $y_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)$
3. $y_i = 1 + \frac{1}{\exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)}$
4. $y_i = \frac{1}{1 + \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)}$
5. $y_i = x_i^{\beta_2} e^{\beta_1 + \varepsilon_i}$
6. $y_i = \beta_1 \exp(\beta_2 x_i + \varepsilon_i)$

Задача 1.18.

У эконометриста Вовочки есть переменная 1_f, которая равна 1, если i-ый человек в выборке — женщина, и 0, если мужчина. Есть переменная 1_m, которая равна 1, если i-ый человек в выборке — мужчина, и 0, если женщина. Какие $\hat{y}$ получатся, если Вовочка попытается построить регрессии:

1. y на константу и 1_f
2. y на константу и 1_m
3. y на 1_f и 1_m без константы
4. y на константу, 1_f и 1_m

Задача 1.19.

У эконометриста Вовочки есть три переменных: r_i — доход i-го человека в выборке, m_i — пол (1 — мальчик, 0 — девочка) и f_i — пол (1 — девочка, 0 — мальчик). Вовочка оценил две модели

Модель А $m_i = \beta_1 + \beta_2 r_i + \varepsilon_i$

Модель В $f_i = \gamma_1 + \gamma_2 r_i + u_i$

1. Как связаны между собой оценки $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\gamma}_1$?

2. Как связаны между собой оценки $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\gamma}_2$?

Задача 1.20.

Эконометрист Вовочка оценил линейную регрессионную модель, где y измерялся в тугриках. Затем он оценил ту же модель, но измерял y в мунгу (1 тугрик = 100 мунгу). Как изменятся оценки коэффициентов?

Задача 1.21.

Возможно ли, что при оценке парной регрессии $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$ оказывается, что $\hat{\beta}_2 > 0$, а при оценке регрессии без константы, $y = \gamma x + \varepsilon$, оказывается, что $\hat{\gamma} < 0$?

Задача 1.22.

Эконометрист Вовочка оценил регрессию y только на константу. Какой коэффициент R^2 он получит?

Задача 1.23.

Эконометрист Вовочка оценил методом наименьших квадратов модель 1, $y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 z + \varepsilon$, а затем модель 2, $y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 z + \beta_4 w + \varepsilon$. Сравните полученные ESS, RSS, TSS и R^2.

Задача 1.24.

Создайте набор данных с тремя переменными y, x и z со следующими свойствами. При оценке модели $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$ получается $\hat{\beta}_2 > 0$. При оценке модели $\hat{y} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x + \hat{\gamma}_3 z$ получается $\hat{\gamma}_2 < 0$. Объясните принцип, руководствуясь которым легко создать такой набор данных.

Задача 1.25.

У меня есть набор данных с выборочным средним $\bar{y}$ и выборочной дисперсией s_y^2. Как нужно преобразовать данные, чтобы выборочное среднее равнялось 7, а выборочная дисперсия — 9?

2 Парный МНК без матриц

Задача 2.1.

Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot t + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t независимы и равномерны на $[-1; 1]$. С помощью симуляций на компьютере оцените и постройте график функции плотности для $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{s}^2$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)$ и $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.

Задача 2.2.

Пусть $y_i = \mu + \varepsilon_i$, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. Найдите:

1. $\mathbb{E}(\overline{y})$
2. $\mathrm{Var}(\overline{y})$
3. $\mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2)$
4. $\mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2)$, если дополнительно известно, что ε_i нормально распределены

Задача 2.3.

Рассматривается модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких значениях параметров c_i несмещённая оценка $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i}$ имеет наименьшую дисперсию?

Задача 2.4.

Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 55$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 3$, $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 12$, $\sum_{i=1}^{5} y_i = 15$, $\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$. Используя их, найдите:

1. $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$
2. $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$
3. TSS
4. ESS
5. RSS
6. R^2
7. $\hat{\sigma}^2$

Проверьте следующие гипотезы:

1. $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 2 \\ H_a : \beta_2 \neq 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 1 \end{cases}$

Задача 2.5.

Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^5 y_i^2 = 55$, $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 2$, $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 9$, $\sum_{i=1}^5 y_i = 15$, $\sum_{i=1}^5 x_i = 2$. Используя их, найдите:

1. $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$
2. $\operatorname{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$
3. TSS
4. ESS
5. RSS
6. R^2
7. $\hat{\sigma}^2$

Проверьте следующие гипотезы:

1. $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 2 \\ H_a : \beta_2 \neq 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 1 \end{cases}$

Задача 2.6.

Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Найдите $\mathbb{E}\hat{\beta}$. Какие из следующих оценок параметра β являются несмещенными:

1. $\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$
2. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{x_n}$
3. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}$
4. $\hat{\beta} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$
5. $\hat{\beta} = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$
6. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$
7. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{n}\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$
8. $\hat{\beta} = \frac{1}{n-1}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} + \ldots + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$
9. $\hat{\beta} = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$
10. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} + \frac{1}{2n}\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}$
11. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} + \frac{1}{2}\frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$
12. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}$
13. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(\overline{y} - y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}$
14. $\hat{\beta} = \frac{y_1 + 2y_2 + \ldots + n y_n}{x_1 + 2x_2 + \ldots + n x_n}$
15. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n i(x_i - \overline{x})}$
16. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$
17. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \overline{y}}{x_i - \overline{x}}$

Задача 2.7.

Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Найдите $\operatorname{Var}(\hat{\beta})$.

1. $\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$
2. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{x_n}$

3. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}\right)$
4. $\hat{\beta} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$
5. $\hat{\beta} = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$
6. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$
7. $\hat{\beta} = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$
8. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x^2})^2}$
9. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(\overline{y} - y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x^2})^2}$
10. $\hat{\beta} = \frac{y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n}{x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n}$
11. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n i(x_i - \overline{x})}$
12. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$
13. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \overline{y}}{x_i - \overline{x}}$

Задача 2.8.
Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta \cdot i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$. Какая из оценок $\hat{\beta}$ и $\tilde{\beta}$ является более эффективной?

1. $\hat{\beta} = y_1$ и $\tilde{\beta} = y_2/2$
2. $\hat{\beta} = y_1$ и $\tilde{\beta} = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}\frac{y_2}{2}$
3. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{1} + \ldots + \frac{y_n}{n}\right)$ и $\tilde{\beta} = \frac{1 \cdot y_1 + \ldots + n \cdot y_n}{1^2 + \ldots + n^2}$

Задача 2.9.
На основе 100 наблюдений была оценена функция спроса:

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{\ln Q}} = \underset{(0.04)}{0.87} - \underset{(0.02)}{1.23} \ln P$$

Значимо ли коэффициент эластичности спроса по цене отличается от -1? Рассмотрите уровень значимости 5%.

Задача 2.10.
На основе 100 наблюдений была оценена функция спроса:

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{\ln Q}} = \underset{(0.04)}{2.87} - \underset{(0.02)}{1.12} \ln P$$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_{\ln P} = -1$ против альтернативной $H_a : \beta_{\ln P} < -1$. Дайте экономическую интерпретацию проверяемой гипотезе и альтернативе.

Задача 2.11.
Используя годовые данные с 1960 по 2005 г., была построена кривая Филлипса, связывающая уровень инфляции Inf и уровень безработицы $Unem$:

$$\widehat{Inf} = 2.34 - 0.23 Unem$$

$$\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_{Unem})} = 0.04, R^2 = 0.12$$

На уровне значимости 1% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_{Unem} = 0$ против альтернативной $H_a : \beta_{Unem} \neq 0$.

Задача 2.12.
Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 18$ — классическая регрессионная модель, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^{18} y_i^2 = 4256, \sum_{i=1}^{18} x_i^2 = 185, \sum_{i=1}^{18} x_i y_i = 814.25, \sum_{i=1}^{18} y_i = 225, \sum_{i=1}^{18} x_i = 49.5$. Используя эти данные, оцените эту регрессию и на уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 3.5$ против альтернативной $H_a : \beta_1 > 3.5$:

1. Приведите формулу для тестовой статистики

2. Укажите распределение тестовой статистики
3. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики
4. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается
5. Сделайте статистический вывод

Задача 2.13.
Рассматривается модель $y_i = \mu + \varepsilon_i$, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ и $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких c_i несмещенная оцека

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

имеет наименьшую дисперсию?

Задача 2.14.
Рассмотрим классическую линейную регрессионную модель, $y_t = \beta \cdot t + \varepsilon_t$. Какая из оценок, $\hat{\beta}$ или $\hat{\beta}'$ является более эффективной?
1. $\hat{\beta} = y_1$, $\hat{\beta}' = y_2/2$
2. $\hat{\beta} = y_1$, $\hat{\beta}' = 0.5y_1 + 0.5\frac{y_2}{2}$
3. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3} + \ldots + \frac{y_n}{n}\right)$, $\hat{\beta}' = \frac{y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}$

Задача 2.15.
Ошибки регрессии ε_i независимы и равновероятно принимают значения $+1$ и -1. Также известно, что $y_i = \beta \cdot i + \varepsilon_i$. Модель оценивается всего по двум наблюдениям.
1. Найдите закон распределения $\hat{\beta}$, RSS, ESS, TSS, R^2
2. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta})$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$, $\mathbb{E}(RSS)$, $\mathbb{E}(ESS)$, $\mathbb{E}(R^2)$
3. При каком β величина $\mathbb{E}(R^2)$ достигает максимума?

Задача 2.16.
Рассмотрим модель с линейным трендом без свободного члена, $y_t = \beta t + \varepsilon_t$.
1. Найдите МНК оценку коэффициента β
2. Рассчитайте $\mathbb{E}(\hat{\beta})$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$ в предположениях теоремы Гаусса-Маркова
3. Верно ли, что оценка $\hat{\beta}$ состоятельна?

Задача 2.17.
В модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$, где $x_t = \begin{cases} 2, \ t = 1 \\ 1, \ t > 1 \end{cases}$:
1. Найдите мнк-оценку $\hat{\beta}_2$
2. Рассчитайте $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)$ в предположениях теоремы Гаусса-Маркова
3. Верно ли, что оценка $\hat{\beta}_2$ состоятельна?

Задача 2.18.
В модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t$, где $x_t = \begin{cases} 1, \ t = 2k + 1 \\ 0, \ t = 2k \end{cases}$:
1. Найдите мнк-оценку $\hat{\beta}_2$
2. Рассчитайте $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)$ в предположениях теоремы Гаусса-Маркова
3. Верно ли, что оценка $\hat{\beta}_2$ состоятельна?

Задача 2.19.
Априори известно, что парная регрессия должна проходить через точку (x_0, y_0).
1. Выведите формулы МНК оценок;
2. В предположениях теоремы Гаусса-Маркова найдите дисперсии и средние оценок

Задача 2.20.
Мы предполагаем, что y_t растёт с линейным трендом, т.е. $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$. Все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены. В качестве оценки $\hat{\beta}_2$ предлагается $\hat{\beta}_2 = \frac{Y_T - Y_1}{T-1}$, где T — общее количество наблюдений.
1. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)$
2. Совпадает ли оценка $\hat{\beta}_2$ с классической мнк-оценкой?
3. У какой оценки дисперсия выше, у $\hat{\beta}_2$ или классической мнк-оценки?

Задача 2.21.
Вася считает, что выборочная ковариация $\mathrm{sCov}(y,\hat{y}) = \frac{\sum(y_i-\bar{y})(\hat{y}_i-\bar{y})}{n-1}$ это неплохая оценка для $\mathrm{Cov}(y_i,\hat{y}_i)$. Прав ли он?
Задача 2.22.
В классической линейной регрессионной модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, дисперсия зависимой переменной не зависит от номера наблюдения, $\mathrm{Var}(y_i) = \sigma^2$. Почему для оценки σ^2 вместо известной из курса математической статистики формулы $\sum(y_i-\bar{y})^2/(n-1)$ используют $\sum \hat{\varepsilon}_i^2/(n-2)$?
Задача 2.23.
Оценка регрессии имеет вид $\hat{y}_i = 3-2x_i$. Выборочная дисперсия x равна 9, выборочная дисперсия y равна 40. Найдите R^2 и выборочные корреляции $\mathrm{sCorr}(x,y)$, $\mathrm{sCorr}(y,\hat{y})$.
Задача 2.24.
Слитки-вариант. Перед нами два золотых слитка и весы, производящие взвешивания с ошибками. Взвесив первый слиток, мы получили результат 300 грамм, взвесив второй слиток — 200 грамм, взвесив оба слитка — 400 грамм. Предположим, что ошибки взвешивания — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним.

1. Найдите несмещеную оценку веса первого слитка, обладающую наименьшей дисперсией.
2. Как можно проинтерпретировать нулевое математическое ожидание ошибки взвешивания?

Задача 2.25.
Рассмотрим линейную модель $y_i = \beta_1+\beta_2 x_i+\varepsilon_i$, где ошибки ε_i нормальны $N(0;\sigma^2)$ и независимы.

1. Верно ли, что y_i одинаково распределены?
2. Верно ли, что $\bar{y}$ — это несмещенная оценка для $\mathbb{E}(y_i)$?
3. Верно ли, что $\sum(y_i-\bar{y})^2/(n-1)$ — несмещенная оценка для σ^2? Если да, то докажите, если нет, то определите величину смещения

Задача 2.26.
Модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и нормальны $N(0;\sigma^2)$, оценивается по 22 наблюдениям. Найдите $\mathbb{E}(RSS)$, $\mathrm{Var}(RSS)$, $\mathbb{P}(10\sigma^2 < RSS < 30\sigma^2)$, $\mathbb{P}(10\hat{\sigma}^2 < RSS < 30\hat{\sigma}^2)$
Задача 2.27.
Модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и нормальны $N(0;\sigma^2)$, оценивается по 12 наблюдениям. Найдите

1. $\mathbb{P}(\hat{\beta}_1 > \beta_1)$, $\mathbb{P}(\beta_1 > 0)$, $\mathbb{P}(|\hat{\beta}_1-\beta_1| < se(\hat{\beta}_1))$, $\mathbb{P}(\hat{\beta}_2 > \beta_2 + se(\hat{\beta}_2))$, $\mathbb{P}(\hat{\beta}_2 > \beta_2 - se(\hat{\beta}_2))$
2. $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1)$, $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$, $\mathbb{E}(\beta_2)$
3. Закон распределения, математическое ожидание и дисперсию величин $\frac{\hat{\beta}_2-\beta_2}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)}}$, $\frac{\hat{\beta}_2-\beta_2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)}}$, $\frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-\beta_1-\beta_2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}}$
4. $\mathbb{P}(\hat{s} > \sigma)$, $\mathbb{P}(\hat{s} > 2\sigma)$

Задача 2.28.
Для модели парной регрессии известны $y = (1,2,3,4,5)'$ и $\hat{y} = (2,2,2,4,5)'$. Найдите RSS, TSS, R^2, $\hat{s}^2$.
Задача 2.29.
В классической парной регрессионной модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ с нормально распределенными ошибками, оцениваемой по 30 наблюдениям, дополнительно известно, что $\mathrm{Var}(\varepsilon_7) = 9$. Найдите

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_2)$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_3)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_3^5)$, $\mathbb{E}(e_5^3)$, $\mathrm{Var}(e_5)$, $\mathrm{Var}(y_3)$
2. $\mathbb{P}(e_2 > \varepsilon_3)$, $\mathbb{P}(e_1 > 0)$, $\mathbb{P}(e_1 > 3)$
3. $\mathbb{E}(RSS)$, $\mathrm{Var}(RSS)$, $\mathbb{P}(RSS > 200)$

Задача 2.30.
В модели парной регрессии придумайте такие наблюдения, чтобы:

- $R^2 = 0.9$
- $R^2 = 0.8$ и регрессия имела вид $\hat{y} = 2+3x$

Задача 2.31.
Оцененная с помощью линейной модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t$ методом наименьших квадратов зависимость расходов на питание y от времени, определённого как $t = 1$ для 1995 г., $t = 2$ для 1996 г., ..., $t = 12$ для 2006 г., задана уравнением $\hat{y}_t = 95 + 2.5t$.
Чему были бы равны оценки коэффициентов β_1 и β_2, если бы в качестве t использовались фактические даты (1995 – 2006), а не числа от 1 до 12?
Задача 2.32.
Пусть есть набор данных (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, $(x_i > 0, y_i > 0)$, порожденных уравнением $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, удовлетворяющих условиям стандартной модели парной регрессии. Рассматриваются следующие оценки параметра β_2:

$$\tilde{\beta}_2^a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}, \ \tilde{\beta}_2^b = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$$

Найти дисперсию и смещение каждой из оценок.
Задача 2.33.
Уравнение $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ оценивается по МНК. Может ли коэффициент детерминации быть малым ($<$0.05), а статистика $t_{\hat{\beta}_2}$ большой ($>$10)?
Задача 2.34.
Докажите, что в случае, когда $|\mathrm{sCorr}(x, y)| = 1$, линия парной регрессии y на x совпадает с линией парной регрессии x на y.
Задача 2.35.
Сгенерите выборку из двух зависимых но некоррелированных случайных величин. Можно ли «поймать» зависимость используя парную регрессию?
Задача 2.36.
Все предпосылки классической линейной модели выполнены, $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$. Рассмотрим альтернативную оценку коэффициента β_2,

$$\hat{\beta}_{2,IV} = \frac{\sum z_i (y_i - \bar{y})}{\sum z_i (x_i - \bar{x})} \tag{2}$$

1. Является ли оценка несмещенной?
2. Любые ли z_i можно брать?
3. Найдите $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{2,IV})$

Задача 2.37.
Напишите формулу для оценок коэффициентов в парной регрессии без матриц. Напишите формулу для дисперсий оценок коэффициентов.
Задача 2.38.
Рассматривается модель линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ являются независимыми нормально распределенными случайными величинами с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Найдите

1. $\mathbb{P}\{\varepsilon_1 > 0\}$,
2. $\mathbb{P}\{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 > 2\sigma^2\}$,
3. $\mathbb{P}\left\{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}} > 2\right\}$,
4. $\mathbb{P}\left\{\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2}} > \frac{5}{4\sqrt{3}}\right\}$,
5. $\mathbb{P}\left\{\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2}} < \frac{9}{2}\right\}$,
6. $\mathbb{P}\left\{\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2} > 17\right\}$.

3 Многомерный МНК без матриц

Задача 3.1.
Эконометрэсса Ширли зашла в пустую аудиторию, где царил приятный полумрак, и увидела на доске до боли знакомую надпись:

$$\hat{y} = \underset{(2.37)}{1.1} - \underset{(-0.4)}{0.7} \cdot x_2 + \underset{(3.15)}{0.9} \cdot x_3 - \underset{(-0.67)}{19} \cdot x_4$$

Помогите эконометрэссе Ширли определить, что находится в скобках

1. P-значения
2. t-статистики
3. стандартные ошибки коэффициентов
4. R^2 скорректированный на номер коэффициента
5. показатели VIF для каждого коэффициента

Задача 3.2.
Для нормальной регрессии с 5-ю факторами (включая свободный член) известны границы симметричного по вероятности 80% доверительного интервала для дисперсии σ^2_ε: $[45; 87.942]$.

1. Определите количество наблюдений в выборке
2. Вычислите $\hat{\sigma}^2_\varepsilon$

Задача 3.3.
Рассмотрим следующую регрессионную модель зависимости логарифма заработной платы индивида $\ln W$ от его уровня образования Edu, опыта работы Exp, Exp^2, уровня образования его отца $Fedu$, и уровня образования его матери $Medu$:

$$\widehat{\ln W} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Edu + \hat{\beta}_3 Exp + \hat{\beta}_4 Exp^2 + \hat{\beta}_5 Fedu + \hat{\beta}_6 Medu$$

Модель регрессии была отдельно оценена по выборкам из 35 мужчин и 23 женщин, и были получены остаточные суммы квадратов $RSS_1 = 34.4$ и $RSS_2 = 23.4$ соответственно. Остаточная сумма квадратов в регрессии, оценённой по объединённой выборке, равна 70.3. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу об отсутствии дискриминации в оплате труда между мужчинами и женщинами.

Задача 3.4.
Рассмотрим следующую регрессионную модель зависимости логарифма заработной платы $\ln W$ от уровня образования Edu, опыта работы Exp, Exp^2:

$$\widehat{\ln W} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Edu + \hat{\beta}_3 Exp + \hat{\beta}_4 Exp^2$$

Модель регрессии была отдельно оценена по выборкам из 20 мужчин и 20 женщин, и были получены остаточные суммы квадратов $RSS_1 = 49.4$ и $RSS_2 = 44.1$ соответственно. Остаточная сумма квадратов в регрессии, оценённой по объединённой выборке, равна 105.5. На уровне 5% проверьте гипотезу об отсутствии дискриминации в оплате труда между мужчинами и женщинами.

Задача 3.5.
Ниже приведены результаты оценивания спроса на молоко для модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 I_i + \beta_3 P_i + \varepsilon_i$, где y_i – стоимость молока, купленного i–ой семьёй за последние 7 дней (в руб.), I_i – месячный доход i–ой семьи (в руб.), P_i – цена 1 литра молока (в руб.). Вычисления для общей выборки, состоящей из 2127 семей, дали $RSS = 8841601$. Для двух подвыборок, состоящих из 348 городских и 1779 сельских семей, соответствующие суммы квадратов остатков оказались следующими: $RSS_1 = 1720236$ и $RSS_2 = 7099423$. Можно ли считать зависимость спроса на молоко от его цены и дохода единой для городской и сельской местности? Ответ обоснуйте подходящим тестом.

Задача 3.6.

По 52 наблюдениям была оценена следующая зависимость цены квадратного метра квартиры $Price$ (в долларах) от площади кухни K (в квадратных метрах), времени в пути пешком до ближайшего метро M (в минутах), расстояния до центра города C (в км) и наличия рядом с домом лесопарковой зоны P (1 — есть, 0 — нет).

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{Price}} = \underset{(3.73)}{16.12} + \underset{(0.14)}{1.7}\,K - \underset{(0.03)}{0.35}M - \underset{(0.12)}{0.46}C + \underset{(0.98)}{2.22}P$$

$$R^2 = 0.78, \sum_{i=1}^{52} (Price_i - \overline{Price})^2 = 278$$

Предположим, что все квартиры в выборке можно отнести к двум категориям: квартиры на севере города (28 наблюдений) и квартиры на юге города (24 наблюдения). Модель регрессии была оценена отдельно только по квартирам на севере и только по квартирам на юге. Ниже приведены результаты оценивания.

Для квартир на севере:

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{Price}} = \underset{(3.3)}{14} + \underset{(0.23)}{1.6}\,K - \underset{(0.04)}{0.33}M - \underset{(0.22)}{0.4}\,C + \underset{(0.78)}{2.1}\,P, RSS = 21.8$$

Для квартир на юге:

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{Price}} = \underset{(3.9)}{16.8} + \underset{(0.4)}{1.62}K - \underset{(0.12)}{0.29}M - \underset{(0.23)}{0.51}C + \underset{(1.28)}{1.98}P, RSS = 19.2$$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о различии в ценообразовании квартир на севере и на юге.

Задача 3.7.

По 52 наблюдениям была оценена следующая зависимость цены квадратного метра квартиры $Price$ (в долларах) от площади кухни K (в квадратных метрах), времени в пути пешком до ближайшего метро M (в минутах), расстояния до центра города C (в км) и наличия рядом с домом лесопарковой зоны P (1 — есть, 0 — нет).

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{Price}} = \underset{(3.73)}{16.12} + \underset{(0.14)}{1.7}\,K - \underset{(0.03)}{0.35}M - \underset{(0.12)}{0.46}C + \underset{(0.98)}{2.22}P$$

$$R^2 = 0.78, \sum_{i=1}^{52} (Price_i - \overline{Price})^2 = 278$$

Предположим, что все квартиры в выборке можно отнести к двум категориям: квартиры на севере города (28 наблюдений) и квартиры на юге города (24 наблюдения). Пусть S — это фиктивная переменная, равная 1 для домов в южной части города и 0 для домов в северной части города. Используя эту переменную, была оценена следующая регрессия:

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{Price}} = \underset{(3.13)}{14.12} + \underset{(0.11)}{0.25}S + \underset{(0.13)}{1.65}K + \underset{(0.14)}{0.17}K\cdot S - \underset{(0.039)}{0.37}\,M + \underset{(0.0012)}{0.05}\,M\cdot S - \underset{(0.13)}{0.44}C - \underset{(0.18)}{0.06}C\cdot S + \underset{(0.88)}{2.27}P - \underset{(0.08)}{0.23}P\cdot S$$

$$R^2 = 0.85$$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о различии в ценообразовании квартир на севере и на юге.

Задача 3.8.

На основе квартальных данных с 2003 по 2008 год было получено следующее уравнение регрессии, описывающее зависимость цены на товар Р от нескольких факторов:

$$P = 3.5 + 0.4X + 1.1W, ESS = 70.4, RSS = 40.5$$

Когда в уравнение были добавлены фиктивные переменные, соответствующие первым трем кварталам года Q_1, Q_2, Q_3, оцениваемая модель приобрела вид:

$$P_t = \beta + \beta_X X_t + \beta_W W_t + \beta_{Q_{1t}} Q_{1t} + \beta_{Q_{2t}} Q_{2t} + \beta_{Q_{3t}} Q_{3t} + \varepsilon_t$$

При этом величина ESS выросла до 86.4. Сформулируйте и на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о наличии сезонности.

Задача 3.9.

Рассмотрим следующую функцию спроса с сезонными переменными $SPRING$ (весна), $SUMMER$ (лето), $FALL$ (осень):

$$\widehat{\ln Q} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot \ln P + \hat{\beta}_3 \cdot SPRING + \hat{\beta}_4 \cdot SUMMER + \hat{\beta}_5 \cdot FALL$$

$$R^2 = 0.37, n = 20$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистической гипотезы $H_0 : \beta_3 = \beta_5$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Пусть для регрессии с ограничениями был вычислен коэффициент $R_R^2 = 0.23$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.

Задача 3.10.

Рассмотрим следующую функцию спроса с сезонными переменными $SPRING$ (весна), $SUMMER$ (лето), $FALL$ (осень):

$$\widehat{\ln Q} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot \ln P + \hat{\beta}_3 \cdot SPRING + \hat{\beta}_4 \cdot SUMMER + \hat{\beta}_5 \cdot FALL$$

$$R^2 = 0.24, n = 24$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистической гипотезы H_0 : $\begin{cases} \beta_3 = 0, \\ \beta_4 = \beta_5 \end{cases}$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Пусть для регрессии с ограничениями был вычислен коэффициент $R_R^2 = 0.13$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.

Задача 3.11.

Исследователь собирается по выборке, содержащей данные за 2 года, построить модель линейной регрессии с константой и 3-мя объясняющими переменными. В модель предполагается ввести 3 фиктивные сезонные переменные $SPRING$ (весна), $SUMMER$ (лето) и $FALL$ (осень) на все коэффициенты регрессии. Однако в процессе оценивания статистический пакет вывел на экран компьютера следующее сообщение “insufficient number of observations”. Объясните, почему имеющегося числа наблюдений не хватило для оценивания параметров модели.

Задача 3.12.

По данным для 57 индивидов оценили зависимость длительности обучения индивида S от способностей индивида, описываемых обобщённой переменной IQ, и пола индивида, описываемого с помощью фиктивной переменной $MALE$ (равной 1 для мужчин и 0 для женщин), с помощью двух регрессий (в скобках под коэффициентами указаны оценки стандартных отклонений):

$$\underset{(s.e.)}{\hat{S}} = \underset{(0.44)}{6.12} + \underset{(0.088)}{0.147} \cdot IQ, RSS = 2758.6$$

$$\underset{(s.e.)}{\hat{S}} = \underset{(0.73)}{6.12} + \underset{(0.014)}{0.147} \cdot IQ - \underset{(0.933)}{1.035} \cdot MALE + \underset{(0.018)}{0.0166} \cdot (MALE \cdot IQ), RSS = 2090.98$$

Зависит ли длительность обучения от пола индивида и почему?
Задача 3.13.
По данным, содержащим 30 наблюдений, построена регрессия:

$$\hat{y} = 1.3870 + 5.2587 \cdot x + 2.6259 \cdot d + 2.5955 \cdot x \cdot d,$$

где фиктивная переменная d определяется следующим образом:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in \{1, \dots, 20\}, \\ 0 & \text{при } i \in \{21, \dots, 30\}. \end{cases}$$

Найдите оценки коэффициентов в модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, построенной по первым 20-ти наблюдениям, т.е. при $i \in \{1, \dots, 20\}$.
Задача 3.14.
Выборка содержит 30 наблюдений зависимой переменной y и независимой переменной x. Ниже приведены результаты оценивания уравнения регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ по первым 20-ти и последним 10-ти наблюдениям соответственно:

$$\hat{y} = 4.0039 + 2.6632 \cdot x$$

$$\hat{y} = 1.3780 + 5.2587 \cdot x$$

По имеющимся данным найдите оценки коэффициентов модели, рассчитанной по 30-ти наблюдениям $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \Delta\beta_1 \cdot d_i + \Delta\beta_2 \cdot x_i \cdot d_i + \varepsilon_i$, где фиктивная переменная d определяется следующим образом:

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in \{1, \dots, 20\}, \\ 0 & \text{при } i \in \{21, \dots, 30\}. \end{cases}$$

Задача 3.15.
Пусть регрессионная модель имеет вид $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \beta_3 x_{i2} + \beta_4 x_{i3} + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$. Тестируемая гипотеза $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$. Запишите, какой вид имеет модель «с ограничением» для тестирования указанной гипотезы.
Задача 3.16.
Пусть регрессионная модель имеет вид $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \beta_3 x_{i2} + \beta_4 x_{i3} + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$. Тестируемая гипотеза $H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 1$. Какая модель из приведённых ниже может выступать в качестве модели «с ограничением» для тестирования указанной гипотезы? Если ни одна из них, то запишите свою.

1. $y_i - (x_{i2} + x_{i3}) = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \varepsilon_i$
2. $y_i + (x_{i2} - x_{i3}) = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \varepsilon_i$
3. $y_i + x_{i2} + x_{i3} = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \varepsilon_i$
4. $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \beta_3 + \beta_4 + \varepsilon_i$

Задача 3.17.
Пусть регрессионная модель имеет вид $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \beta_3 x_{i2} + \beta_4 x_{i3} + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$. Тестируемая гипотеза $H_0 : \begin{cases} \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1, \\ \beta_3 + \beta_4 = 0. \end{cases}$ Какая модель из приведённых ниже может выступать в качестве модели «с ограничением» для тестирования указанной гипотезы? Если ни одна из них, то запишите свою.

1. $y_i - x_{i1} = \beta_1 + \beta_3(x_{i2} - x_{i3}) + \varepsilon_i$
2. $y_i - x_{i1} = \beta_1 + \beta_4(x_{i3} - x_{i2}) + \varepsilon_i$
3. $y_i + x_{i1} = \beta_1 + \beta_3(x_{i2} + x_{i3}) + \varepsilon_i$
4. $y_i + x_{i1} = \beta_1 + \beta_3(x_{i2} - x_{i3}) + \varepsilon_i$

Задача 3.18.
Пусть регрессионная модель имеет вид $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i1} + \beta_3 x_{i2} + \beta_4 x_{i3} + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тестируемая гипотеза $H_0 : \begin{cases} \beta_2 - \beta_3 = 0, \\ \beta_3 + \beta_4 = 0. \end{cases}$ Какая модель из приведённых ниже может выступать в качестве модели «с ограничением» для тестирования указанной гипотезы? Если ни одна из них, то запишите свою.

1. $y_i = \beta_1 + \beta_3(x_{i2} - x_{i1} - x_{i3}) + \varepsilon_i$
2. $y_i - x_{i1} = \beta_1 + \beta_4(x_{i3} - x_{i2}) + \varepsilon_i$
3. $y_i = \beta_1 + \beta_3(x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}) + \varepsilon_i$
4. $y_i = \beta_1 + \beta_3(x_{i1} + x_{i2} - x_{i3}) + \varepsilon_i$

Задача 3.19.
Известно, что P-значение для коэффициента регрессии равно 0.087, а уровень значимости 0.1. Является ли значимым данный коэффициент в регрессии?

Задача 3.20.
Известно, что P-значение для коэффициента регрессии равно 0.078, а уровень значимости 0.05. Является ли значимым данный коэффициент в регрессии?

Задача 3.21.
Известно, что P-значение для коэффициента регрессии равно 0.09. На каком уровне значимости данный коэффициент в регрессии будет признан значимым?

Задача 3.22.
Ниже приведены результаты оценивания уравнения линейной регрессии зависимости количества смертей в автомобильных катастрофах от различных характеристик:

$$deaths_i = \beta_1 + \beta_2 drivers_i + \beta_3 popden_i + \beta_4 temp + \beta_5 fuel + \varepsilon_i$$

$$\widehat{deaths}_i = -\underset{(222.8803)}{27.1} + \underset{(0.3767)}{4.64} \cdot drivers_i - \underset{(0.0239)}{0.0228} \cdot popden_i + \underset{(4.6016)}{5.3} \cdot temp_i - \underset{(0.8679)}{0.663} \cdot fuel_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	-27.10	222.88	-0.12	0.90
Drivers	4.64	0.38	12.30	0.00
Popden	-0.02	0.02	-0.95	0.35
Temp	5.30	4.60	1.15	0.26
Fuel	-0.66	0.87	-0.76	0.45

Перечислите, какие из переменных в регрессии являются значимыми и на каком уровне значимости.

Задача 3.23.
Была оценена функция Кобба-Дугласа с учётом человеческого капитала H (K — физический капитал, L — труд):

$$\widehat{\ln Q} = 1.4 + 0.46 \ln L + 0.27 \ln H + 0.23 \ln K$$

$$ESS = 170.4, RSS = 80.3, n = 21$$

1. Чему равен коэффициент R^2?
2. На уровне значимости 1% проверьте гипотезу о значимости регрессии «в целом»

Задача 3.24.
На основе опроса 25 человек была оценена следующая модель зависимости логарифма зарплаты $\ln W$ от уровня образования Edu (в годах) и возраста Age:

$$\widehat{\ln W} = 1.7 + 0.5Edu + 0.06Age - 0.0004Age^2$$

$$ESS = 90.3, RSS = 60.4$$

Когда в модель были введены переменные $Fedu$ и $Medu$, учитывающие уровень образования родителей, величина ESS уведичилась до 110.3.

1. Напишите спецификацию уравнения регрессии с учётом образования родителей
2. Сформулируйте и на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о значимом влиянии уровня образования родителей на заработную плату:

   (a) Сформулируйте гипотезу

   (b) Приведите формулу для тестовой статистики

   (c) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0

   (d) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

   (e) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

   (f) Сделайте статистический вывод

Задача 3.25.

Рассмотрим следующую модель зависимости цены дома $Price$ (в тысячах долларов) от его площади $Hsize$ (в квадратных метрах), площади участка $Lsize$ (в квадратных метрах), числа ванных комнат $Bath$ и числа спален BDR:

$$\widehat{Price} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Hsize + \hat{\beta}_3 Lsize + \hat{\beta}_4 Bath + \hat{\beta}_5 BDR$$

$$R^2 = 0.218, n = 23$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистистической гипотезы $H_0 : \beta_3 = 20\beta_4$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Для регрессии с ограничением был вычислен коэффициент $R^2_R = 0.136$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.

Задача 3.26.

Рассмотрим следующую модель зависимости почасовой оплаты труда W от уровня образования $Educ$, возраста Age, уровня образования родителей $Fathedu$ и $Mothedu$:

$$\widehat{\ln W} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Educ + \hat{\beta}_3 Age + \hat{\beta}_4 Age^2 + \hat{\beta}_5 Fathedu + \hat{\beta}_6 Mothedu$$

$$R^2 = 0.341, n = 27$$

Напишите спецификацию регрессии с ограничениями для проверки статистистической гипотезы $H_0 : \beta_5 = 2\beta_4$. Дайте интерпретацию проверяемой гипотезе. Для регрессии с ограничением был вычислен коэффициент $R^2_R = 0.296$. На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу.

Задача 3.27.

По данным для 27 фирм исследователь оценил зависимость объёма выпуска y от труда l и капитала k с помощью двух моделей:

$$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln l_i + \beta_3 \ln k_i + \varepsilon_i$$

$$\ln y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln(l_i \cdot k_i) + \varepsilon_i$$

Он получил для этих двух моделей суммы квадратов остатков $RSS_1 = 0.851$ и $RSS_2 = 0.894$ соответственно. Сформулируйте гипотезу, которую хотел проверить исследователь. На уровне значимости 5% проверьте эту гипотезу и дайте экономическую интерпретацию.

Задача 3.28.

Пусть задана линейная регрессионная модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{1i} + \beta_3 x_{2i} + \beta_4 x_{3i} + \beta_5 x_{4i} + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, 20$$

По имеющимся данным оценены следующие регрессии:

$$\underset{(s.e.)}{\hat{y}_i} = \underset{(0.15)}{10.01} + \underset{(0.06)}{1.05}x_1 + \underset{(0.04)}{2.06}x_2 + \underset{(0.06)}{0.49}x_3 - \underset{(0.06)}{1.31}x_4, RSS = 6.85$$

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{y_i - x_1 - 2x_2}} = \underset{(0.15)}{10.00} + \underset{(0.07)}{0.50}x_3 - \underset{(0.06)}{1.32}x_4, RSS = 8.31$$

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{y_i + x_1 + 2x_2}} = \underset{(3.62)}{9.93} + \underset{(1.48)}{0.56}x_3 - \underset{(1.42)}{1.50}x_4, RSS = 4310.62$$

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{y_i - x_1 + 2x_2}} = \underset{(3.26)}{10.71} + \underset{(1.33)}{0.09}x_3 - \underset{(1.28)}{1.28}x_4, RSS = 3496.85$$

$$\underset{(s.e.)}{\widehat{y_i + x_1 - 2x_2}} = \underset{(1.25)}{9.22} + \underset{(0.51)}{0.97}x_3 - \underset{(0.49)}{1.54}x_4, RSS = 516.23$$

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \begin{cases} \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = 2 \end{cases}$ против альтернативной гипотезы $H_a : |\beta_2 - 1| + |\beta_3 - 2| \neq 0$.

Задача 3.29.

Рассмотрим следующую модель зависимости расходов на образование на душу населения от дохода на душу населения, доли населения в возрасте до 18 лет, а также доли городского населения:

$$education_i = \beta_1 + \beta_2 income_i + \beta_3 young_i + \beta_4 urban_i + \varepsilon_i$$

Ниже приведены результаты оценивания уравнения этой линейной регрессии:

$$\widehat{education}_i = -\underset{(64.9199)}{287} + \underset{(0.0093)}{0.0807} \cdot income_i + \underset{(0.1598)}{0.817} \cdot young_i - \underset{(0.0343)}{0.106} \cdot urban_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	-286.84	64.92	-4.42	0.00
Income	0.08	0.01	8.67	0.00
Young	0.82	0.16	5.12	0.00
Urban	-0.11	0.03	-3.09	0.00

1. Сформулируйте основную и альтернативую гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость коэффициента при переменной доход на душу населения в уравнении регрессии
2. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о значимости коэффициента при переменной доход на душу населения в уравнении регрессии:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики
   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0
   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики
   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается
   (e) Сделайте статистический вывод
3. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_1 > 1$:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики
   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0
   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики
   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

(e) Сделайте статистический вывод

4. Сформулируйте основную гипотезу, которая соответствует тесту на значимость регрессии «в целом»
5. На уровне значимости 1% проверьте гипотезу о значимости регрессии «в целом»,если известно, что $F-$статистика равна 34.81 со степенями свободы 3 и 47, $P-$значение равно $5.337e^{-12}$:

   (a) Приведите формулу для тестовой статистики

   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0

   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

   (e) Сделайте статистический вывод

   Далее приведены результаты оценивания уравнения регрессии без переменной, отражающей долю городского населения:

$$\widehat{education}_i = -\underset{(70.27134)}{301} + \underset{(0.00741)}{0.0612} \cdot income_i + \underset{(0.17327)}{0.836} \cdot young_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	-301.09	70.27	-4.28	0.00
Income	0.06	0.01	8.25	0.00
Young	0.84	0.17	4.83	0.00

   Также известно, что RSS для первой модели равен 33489.35, а для второй модели — 40276.61. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_4 = 0$ против альтернативной $H_0 : \beta_4 \neq 0$:

   (a) Приведите формулу для тестовой статистики

   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0

   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

   (e) Сделайте статистический вывод

Задача 3.30.

Рассмотрим следующую модель зависимости расходов на образование на душу населения от дохода на душу населения, доли населения в возрасте до 18 лет, а также доли городского населения:

$$education_i = \beta_1 + \beta_2 income_i + \beta_3 young_i + \beta_4 urban_i + \varepsilon_i$$

Ниже приведены результаты оценивания уравнения этой линейной регрессии:

$$\widehat{education}_i = -\underset{(64.9199)}{287} + \underset{(0.0093)}{0.0807} \cdot income_i + \underset{(0.1598)}{0.817} \cdot young_i - \underset{(0.0343)}{0.106} \cdot urban_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	-286.84	64.92	-4.42	0.00
Income	0.08	0.01	8.67	0.00
Young	0.82	0.16	5.12	0.00
Urban	-0.11	0.03	-3.09	0.00

1. Сформулируйте основную и альтернативую гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость коэффициента при переменной доля населения в возрасте до 18 лет в уравнении регрессии
2. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о значимости коэффициента при переменной доля населения в возрасте до 18 лет в уравнении регрессии:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики
   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0
   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики
   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается
   (e) Сделайте статистический вывод

   Далее приведены результаты оценивания уравнения регрессии без переменной, отражающей долю населения в возрасте до 18 лет:

$$\widehat{education}_i = \underset{(27.3827)}{25.3} + \underset{(0.0114)}{0.0762} \cdot income_i - \underset{(0.0423)}{0.112} \cdot urban_i$$

	Estimate	St.Error	t value	P-value
Intercept	25.25	27.38	0.92	0.36
Income	0.08	0.01	6.67	0.00
Urban	-0.11	0.04	-2.66	0.01

   Также известно, что RSS для первой модели равен 33489.35, а для второй модели — 52132.29. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_3 = 0$ против альтернативной $H_0 : \beta_3 \neq 0$:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики
   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0
   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики
   (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается
   (e) Сделайте статистический вывод

Задача 3.31.

Вася построил регрессию оценки за первую контрольную работу на константу, рост и вес студента, $\widehat{kr1}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 height_i + \hat{\beta}_3 weight_i$. Затем построил регрессию оценки за вторую контрольную работу на те же объясняющие переменные, $\widehat{kr2}_i = \hat{\beta}'_1 + \hat{\beta}'_2 height_i + \hat{\beta}'_3 weight_i$. Накопленная оценка считается по формуле $nak_i = 0.25 \cdot kr1_i + 0.75 \cdot kr2_i$. Чему равны оценки коэффициентов в регрессии накопленной оценки на те же объясняющие переменные? Ответ обоснуйте.

Задача 3.32.

Истинная модель имеет вид $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Вася оценивает модель $\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i$ по первой части выборки, получает $\hat{\beta}_a$, по второй части выборки — получает $\hat{\beta}_b$ и по всей выборке — $\hat{\beta}_{tot}$. Как связаны между собой $\hat{\beta}_a$, $\hat{\beta}_b$, $\hat{\beta}_{tot}$? Как связаны между собой дисперсии $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_a)$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_b)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{tot})$?

Задача 3.33.

Сгенерируйте вектор y из 300 независимых нормальных $N(10, 1)$ случайных величин. Сгенерируйте 40 «объясняющих» переменных, по 300 наблюдений в каждой, каждое наблюдение — независимая нормальная $N(5, 1)$ случайная величина. Постройте регрессию y на все 40 регрессоров и константу.

1. Сколько регрессоров оказалось значимо на 5% уровне?
2. Сколько регрессоров в среднем значимо на 5% уровне?

3. Эконометрист Вовочка всегда использует следующий подход: строит регрессию зависимой переменной на все имеющиеся регрессоры, а затем выкидывает из модели те регрессоры, которые оказались незначимы. Прокомментируйте Вовочкин эконометрический подход.

Задача 3.34.

Мы попытаемся понять, как введение в регрессию лишнего регрессора влияет на оценки уже имеющихся. В регрессии будет 100 наблюдений. Возьмем $\rho = 0.5$. Сгенерим выборку совместных нормальных x_i и z_i с корреляцией ρ. Настоящий y_i задаётся формулой $y_i = 5 + 6x_i + \varepsilon_i$. Однако мы будем оценивать модель $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i$.

1. Повторите указанный эксперимент 500 раз и постройте оценку для функции плотности $\hat{\beta}_1$.
2. Повторите указанный эксперимент 500 раз для каждого ρ от -1 до 1 с шагом в 0.05. Каждый раз сохраняйте полученные 500 значений $\hat{\beta}_1$. В осях $(\rho, \hat{\beta}_1)$ постройте 95%-ый предиктивный интервал для $\hat{\beta}_1$. Прокомментируйте.

Задача 3.35.

Цель задачи — оценить модель CAPM несколькими способами.

1. Соберите подходящие данные для модели CAPM. Нужно найти три временных ряда: ряд цен любой акции, любой рыночный индекс, безрисковый актив. Переведите цены в доходности.
2. Постройте графики
3. Оцените модель CAPM без свободного члена по всем наборам данных. Прокомментируйте смысл оцененного коэффициента
4. Разбейте временной период на два участка и проверьте устойчивость коэффициента бета
5. Добавьте в классическую модель CAPM свободный член и оцените по всему набору данных. Какие выводы можно сделать?
6. Методом максимального правдоподобия оцените модель с ошибкой измерения $R^m - R^0$, т.е. истинная зависимость имеет вид

$$(R^s - R^0) = \beta_1 + \beta_2(R^*_m - R^*_0) + \varepsilon \tag{3}$$

величины R^*_m и R^*_0 не наблюдаемы, но

$$R_m - R_0 = R^*_m - R^*_0 + u \tag{4}$$

Задача 3.36.

По 47 наблюдениям оценивается зависимость доли мужчин занятых в сельском хозяйстве от уровня образованности и доли католического населения по Швейцарским кантонам в 1888 году.

$$Agriculture_i = \beta_1 + \beta_2 Examination_i + \beta_3 Catholic_i + \varepsilon_i$$

```
h <- swiss
model1 <- glm(Agriculture~Examination+Catholic,data=h)
coef.t <- coeftest(model1)
dimnames(coef.t)[[2]] <-
    c("Оценка","Ст. ошибка",  "t-статистика", "P-значение")
coef.t <- coef.t[,-4]
coef.t[1,1] <- NA
coef.t[2,2] <- NA
coef.t[3,3] <- NA
```

```
xtable(coef.t)
```

1. Заполните пропуски в таблице
2. Укажите коэффициенты, значимые на 10% уровне значимости.
3. Постройте 99%-ый доверительный интервал для коэффициента при переменной Catholic

	Оценка	Ст. ошибка	t-статистика
(Intercept)		8.72	9.44
Examination	-1.94		-5.08
Catholic	0.01	0.07	

	Model 1	Model 2
(Intercept)	91.06^{***}	80.52^{***}
	(6.95)	(3.31)
Agriculture	-0.22^{**}	
	(0.07)	
Education	-0.96^{***}	
	(0.19)	
Examination	-0.26	
	(0.27)	
Catholic	0.12^{**}	0.07^{*}
	(0.04)	(0.03)
I(Education + Examination)		-0.48^{***}
		(0.08)
R^2	0.65	0.55
Adj. R^2	0.62	0.53
Num. obs.	47	47

$^{***}p < 0.001$, $^{**}p < 0.01$, $^{*}p < 0.05$

Таблица 1: Statistical models

Набор данных доступен в пакете R:

```
h <- swiss
```

Задача 3.37.

Оценивается зависимость уровня фертильности всё тех же швейцарских кантонов в 1888 году от ряда показателей. В таблице представлены результаты оценивания двух моделей.

Модель 1: $Fertility_i = \beta_1 + \beta_2 Agriculture_i + \beta_3 Education_i + \beta_4 Examination_i + \beta_5 Catholic_i + \varepsilon_i$

Модель 2: $Fertility_i = \gamma_1 + \gamma_2(Education_i + Examination_i) + \gamma_3 Catholic_i + u_i$

```
m1 <- lm(Fertility~Agriculture+Education+Examination+Catholic,data=h)
m2 <- lm(Fertility~I(Education+Examination)+Catholic,data=h)
```

```
texreg(list(m1,m2))
```

Набор данных доступен в пакете R:

```
h <- swiss
```

1. Проверьте гипотезу о том, что коэффициент при $Education$ в модели 1 равен -0.5.
2. На 5% уровне значимости проверьте гипотезу о том, что переменные $Education$ и $Examination$ оказывают одинаковое влияние на $Fertility$.

Задача 3.38.

По 2040 наблюдениям оценена модель зависимости стоимости квартиры в Москве (в 1000$) от общего метража и метража жилой площади.

```
model1 <- lm(price~totsp+livesp,data=flats)
report <- summary(model1)
coef.table <- report$coefficients
rownames(coef.table) <- c("Константа","Общая площадь", "Жилая площадь")
```

```
xtable(coef.table)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
Константа	-88.81	4.37	-20.34	0.00
Общая площадь	1.70	0.10	17.78	0.00
Жилая площадь	1.99	0.18	10.89	0.00

Оценка ковариационной матрицы $\widehat{Var}(\hat{\beta})$ имеет вид

```
var.hat <- vcov(model1)
xtable(var.hat)
```

	(Intercept)	totsp	livesp
(Intercept)	19.07	0.03	-0.45
totsp	0.03	0.01	-0.02
livesp	-0.45	-0.02	0.03

1. Проверьте H_0: $\beta_{totsp} = \beta_{livesp}$. В чём содержательный смысл этой гипотезы?
2. Постройте доверительный интервал дли $\beta_{totsp} - \beta_{livesp}$. В чём содержательный смысл этого доверительного интервала?

Задача 3.39.

По 2040 наблюдениям оценена модель зависимости стоимости квартиры в Москве (в 1000$) от общего метража и метража жилой площади.

```
model1 <- lm(price~totsp+livesp,data=flats)
report <- summary(model1)
coef.table <- report$coefficients
rownames(coef.table) <- c("Константа","Общая площадь", "Жилая площадь")
xtable(coef.table)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
Константа	-88.81	4.37	-20.34	0.00
Общая площадь	1.70	0.10	17.78	0.00
Жилая площадь	1.99	0.18	10.89	0.00

Оценка ковариационной матрицы $\widehat{Var}(\hat{\beta})$ имеет вид

```
xtable(vcov(model1))
```

1. Постройте 95%-ый доверительный интервал для ожидаемой стоимости квартиры с жилой площадью 30 м^2 и общей площадью 60 м^2.
2. Постройте 95%-ый прогнозный интервал для фактической стоимости квартиры с жилой площадью 30 м^2 и общей площадью 60 м^2.

Задача 3.40.

По 2040 наблюдениям оценена модель зависимости стоимости квартиры в Москве (в 1000$) от общего метража, метража жилой площади и дамми-переменной, равной 1 для кирпичных домов.

```
model1 <- lm(price~totsp+livesp+brick+brick:totsp+brick:livesp,data=flats)
report <- summary(model1)
coef.table <- report$coefficients
# rownames(coef.table) <- c("Константа","Общая площадь", "Жилая площадь")
xtable(coef.table)
```

1. Выпишите отдельно уравнения регрессии для кирпичных домов и для некирпичных домов

	(Intercept)	totsp	livesp
(Intercept)	19.07	0.03	-0.45
totsp	0.03	0.01	-0.02
livesp	-0.45	-0.02	0.03

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	-66.03	6.07	-10.89	0.00
totsp	1.77	0.12	14.98	0.00
livesp	1.27	0.25	5.05	0.00
brick	-19.59	9.01	-2.17	0.03
totsp:brick	0.42	0.20	2.10	0.04
livesp:brick	0.09	0.38	0.23	0.82

2. Проинтерпретируйте коэффициент при $brick_i \cdot totsp_i$

Задача 3.41.
По 20 наблюдениям оценивается линейная регрессия $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, причём истинная зависимость имеет вид $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$. Случайная ошибка ε_i имеет нормальное распределение $N(0, 1)$.

1. Найдите вероятность $\mathbb{P}(\hat{\beta}_3 > se(\hat{\beta}_3))$
2. Найдите вероятность $\mathbb{P}(\hat{\beta}_3 > \sigma_{\hat{\beta}_3})$

Задача 3.42.
К эконометристу Вовочке в распоряжение попали данные с результатами контрольной работы студентов по эконометрике. В данных есть результаты по каждой задаче, переменные p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5, и суммарный результат за контрольную, переменная kr. Чему будут равны оценки коэффициентов, их стандартные ошибки, t-статистики, P-значения, R^2, RSS, если

1. Вовочка построит регрессию kr на константу, p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5
2. Вовочка построит регрессию kr на p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5 без константы

Задача 3.43.
Сгенерируйте данные так, чтобы при оценке линейной регрессионной модели оказалось, что скорректированный коэффициент детерминации, R^2_{adj}, отрицательный.

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}$$

Следовательно, при R^2 близком к 0 и большом количестве регрессоров k может оказаться, что $R^2_{adj} < 0$.
Например,

```
set.seed(42)
y <- rnorm(200,sd=15)
X <- matrix(rnorm(2000),nrow=200)
model <- lm(y~X)
report <- summary(model)
report$adj.r.squared
## [1] -0.02745
```

Задача 3.44.
Для коэффициентов регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 w_i + \varepsilon_i$ даны 95%-ые доверительные интервалы: $\beta_2 \in (0.16; 0.66)$, $\beta_3 \in (-0.33; 0.93)$ и $\beta_4 \in (-1.01; 0.54)$.

1. Найдите $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, $\hat{\beta}_4$
2. Определите, какие из переменных в регрессии значимы на уровне значимости 5%.

Задача 3.45.

Для коэффициентов регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \beta_4 w_i + \varepsilon_i$ даны 95%-ые доверительные интервалы: $\beta_2 \in (-0.15; 1.65)$, $\beta_3 \in (0.32; 0.93)$ и $\beta_4 \in (0.14; 1.55)$.

1. Найдите $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, $\hat{\beta}_4$
2. Определите, какие из переменных в регрессии значимы на уровне значимости 5%.

Задача 3.46.

Эконометрэсса Мырли очень суеверна и поэтому оценила три модели:

M1 $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 w_i + \varepsilon_i$ по всем наблюдениям.

M2 $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 w_i + \beta_4 d_i + \varepsilon_i$ по всем наблюдениям, где d_i — дамми-переменная равная 1 для 13-го наблюдения и нулю иначе.

M3 $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 w_i + \varepsilon_i$ по всем наблюдениям, кроме 13-го.

1. Сравните между собой RSS во всех трёх моделях
2. Есть ли совпадающие оценки коэффициентов в этих трёх моделях? Если есть, то какие?
3. Может ли Мырли не выполняя вычислений узнать ошибку прогноза для 13-го наблюдения при использовании третьей модели? Если да, то как?

Задача 3.47.

Рассмотрим модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 w_i + \beta_4 z_i + \varepsilon_i$. При оценке модели по 24 наблюдениям оказалось, что $RSS = 15$, $\sum (y_i - \bar{y} - w_i + \bar{w})^2 = 20$. На уровне значимости 1% протестируйте гипотезу

$$H_0 : \begin{cases} \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 1 \\ \beta_4 = 0 \end{cases}$$

Задача 3.48.

Модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и нормальны $N(0; \sigma^2)$, оценивается по 13 наблюдениям. Найдите $\mathbb{E}(RSS)$, $\operatorname{Var}(RSS)$, $\mathbb{P}(5\sigma^2 < RSS < 10\sigma^2)$, $\mathbb{P}(5\hat{\sigma}^2 < RSS < 10\hat{\sigma}^2)$

Задача 3.49.

Рассмотрим модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и имеют нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$. Известно, что выборка в $n = 30$ наблюдений была разбита на три непересекающиеся подвыборки, содержащие $n_1 = 13$, $n_2 = 4$ и $n_3 = 13$ наблюдений. Пусть $\hat{s}_j^2$ — это оценка дисперсии случайных ошибок для регрессии, оцененной по j-ой подвыборке. Найдите

1. $\mathbb{P}(\hat{s}_3^2 > \hat{s}_1^2)$, $\mathbb{P}(\hat{s}_1^2 > 2\hat{s}_2^2)$
2. $\mathbb{E}(\hat{s}_2^2/\hat{s}_1^2)$, $\operatorname{Var}(\hat{s}_2^2/\hat{s}_1^2)$

Задача 3.50.

Рассмотрим модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и имеют нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$. Для $n = 13$ наблюдения найдите уровень доверия следующих доверительных интервалов для неизвестного параметра σ^2:

1. $(0; RSS/4.865)$
2. $(RSS/18.307; RSS/3.940)$
3. $(RSS/15.987; \infty)$

Задача 3.51.

Пусть $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ — МНК-оценки коэффициентов в регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, оцененной по наблюдениям $i = 1, \ldots, m$, а $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, $\hat{\gamma}$ и $\hat{\delta}$ — МНК-коэффициенты в регрессии $y_i = \mu + \nu x_i + \gamma d_i + \delta x_i d_i + \varepsilon_i$, оцененной по наблюдениям $i = 1, \ldots, n$, где фиктивная переменная d определяется следующим образом

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in \{1, \ldots, m\} \\ 0 & \text{при } i \in \{m+1, \ldots, n\} \end{cases}$$

Покажите, что $\hat{\beta}_1 = \hat{\mu} + \hat{\gamma}$ и $\hat{\beta}_2 = \hat{\nu} + \hat{\delta}$.

Задача 3.52.

Верно ли, что $R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}$ распределен по $F(n-k, n-1)$? Если да, то объясните, почему, если нет, то тоже объясните, почему.

Задача 3.53.

Сгенерируйте набор данных, обладающий следующим свойством. Если попытаться сразу выкинуть регрессоры x и z, то гипотеза о их совместной незначимости отвергается. Если вместо этого попытаться выкинуть отдельно x, или отдельно z, то гипотеза о незначимости не отвергается.

Задача 3.54.

Сгенерируйте набор данных, обладающий следующим свойством. Если попытаться сразу выкинуть регрессоры x и z, то гипотеза о их совместной незначимости отвергается. Если вместо сначала выкинуть отдельно x, то гипотеза о незначимости не отвергается. Если затем выкинуть z, то гипотезы о незначимости тоже не отвергается.

Задача 3.55.

Напишите свою функцию, которая бы оценивала регрессию методом наименьших квадратов. На вход функции должны подаваться вектор зависимых переменных y и матрица регрессоров X. На выходе функция должна выдавать список из $\hat{\beta}$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta})$, $\hat{y}$, $\hat{\varepsilon}$, ESS, RSS и TSS. По возможности функция должна проверять корректность аргументов, например, что в y и X одинаковое число наблюдений и т.д. Использовать `lm` или `glm` запрещается.

Задача 3.56.

Сгенерируйте данные так, чтобы при оценке модели $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$ оказывалось, что $\hat{\beta}_2 > 0$, а при оценке модели $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$ оказывалось, что $\hat{\beta}_2 < 0$.

Задача 3.57.

Предложите способ, как построить доверительный интервал для вершины параболы.

Задача 3.58.

вставить ссылки на файл

Скачайте результаты двух контрольных работ по теории вероятностей, с описанием данных, . Наша задача попытаться предсказать результат второй контрольной работы зная позадачный результат первой контрольной, пол и группу студента.

1. Какая задача из первой контрольной работы наиболее существенно влияет на результат второй контрольной?
2. Влияет ли пол на результат второй контрольной?
3. Что можно сказать про влияние группы, в которой учится студент?

Задача 3.59.

Сформулируйте теорему Гаусса-Маркова

Задача 3.60.

Эконометресса Эвридика хочет оценить модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$. К сожалению, она измеряет зависимую переменную с ошибкой. Т.е. вместо y_i она знает значение $y_i^* = y_i + u_i$ и использует его в качестве зависимой переменной при оценке регрессии. Ошибки измерения u_i некоррелированы между собой и с ε_i.

1. Будут ли оценки Эвридики несмещенными?
2. Могут ли дисперсии оценок Эвридики быть ниже чем дисперсии МНК оценок при использовании настоящего y_i?
3. Могут ли оценки дисперсий оценок Эвридики быть ниже чем оценок дисперсий МНК оценок при использовании настоящего y_i?

Задача 3.61.

Эконометресса Ефросинья исследует зависимость удоев от возраста и породы коровы. Она оценила модель

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 age_i + \hat{\beta}_3 d_{1i} + \hat{\beta}_4 d_{2i}$$

Эконометресса Глафира исследует ту же зависимость:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}'_1 + \hat{\beta}'_2 age_i + \hat{\beta}'_3 d'_{1i} + \hat{\beta}'_4 d'_{2i}$$

но вводит дамми-переменные вводит по-другому:

Порода коровы	d_1	d_2	d'_1	d'_2
Колмогорская	0	0	1	1
•	1	0	0	1
•	0	1	1	0

Выразите оценки коэффициентов Глафиры через оценки коэффициентов Ефросиньи.

Задача 3.62.

предпосылки JB

Для проверки гипотезы о нормальности ошибок регрессии используют в частности статистику Харке-Бера (Jarque-Bera):

$$JB = \frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24},$$

где $S = \sum_i^n \hat{\varepsilon}_i^3 / \hat{\sigma}_{ML}^3$ Строго говоря статистика Харке-Бера проверяет гипотезу о том, что скошенность равна нулю, а эксцесс равен 3, т.е. $H_0 : \mathbb{E}(\varepsilon_i^3) = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i^4) = 3\sigma^4$. Асимптотически при верной H_0 статистика имеет хи-квадрат распределение с двумя степенями свободы.

По аналогии со статистикой Харке-Бера придумайте асимптотические статистики, которые бы проверяли гипотезы:

1. $H_0 : \mathbb{E}(\varepsilon_i^3) = 0$
2. $H_0 : \mathbb{E}(\varepsilon_i^4) = 3\sigma^4$
3. $H_0 : \mathbb{E}(\varepsilon_i^5) = 0$

Какое асимптотическое распределение при верной H_0 будут иметь придуманные статистики?

4 МНК с матрицами и вероятностями

Задача 4.1.

Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель.

1. Сформулируйте теорему Гаусса-Маркова
2. Верно ли, что оценка $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ несмещённая?
3. В условиях теоремы Гаусса-Маркова найдите ковариационную матрицу $\hat{\beta}$

Задача 4.2.

Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель и $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1}X' + A)y$ — несмещённая оценка вектора неизвестных параметров β. Верно ли, что $AX = 0$?

Задача 4.3.

Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Найдите коэффициент корреляции $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.

Задача 4.4.

Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».

Задача 4.5.

Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».

Задача 4.6.

Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».

Задача 4.7.

Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель. Верно ли, что $\hat{\varepsilon}'\hat{y} = 0$ и $\hat{y}'\hat{\varepsilon} = 0$?

Задача 4.8.

Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 I$. Пусть A — неслучайная матрица размера $k \times k$, $\det(A) \neq 0$. Совершается преобразование регрессоров по правилу $Z = XA$. В преобразованных регрессорах уравнение выглядит так: $y = Z\gamma + u$, где $\mathbb{E}(u) = 0$, $\mathrm{Var}(u) = \sigma_u^2 I$.

1. Как связаны между собой МНК-оценки $\hat{\beta}$ и $\hat{\gamma}$?
2. Как связаны между собой векторы остатков регрессий?
3. Как связаны между собой прогнозные значения, полученные по двум регрессиям?

Задача 4.9.

Рассмотрим оценку вида $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y$ для вектора коэффициентов регрессионного уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, удовлетворяющего условиям классической регрессионной модели. Найдите $\mathbb{E}(\tilde{\beta})$ и $\mathrm{Var}(\tilde{\beta})$.

Задача 4.10.

Верно ли, что при невырожденном преобразовании факторов R^2 не меняется? А именно, пусть заданы две регрессионные модели: $y = X\beta + \varepsilon$ и $y = Z\alpha + u$, где y — вектор размера $n \times 1$, X и Z — матрицы размера $n \times k$, β и α — вектора рамзера $k \times 1$, ε и u — вектора размера $n \times 1$, а также $Z = XD$, $\det(D) \neq 0$. Верно ли, что коэффициенты детерминации представленных выше моделей равны между собой?

Задача 4.11.

Верно ли, что при невырожденном преобразовании факторов RSS не меняется. А именно, пусть заданы две регрессииoнные модели: $y = X\beta + \varepsilon$ и $y = Z\alpha + u$, где y — вектор размера $n \times 1$, X и Z — матрицы размера $n \times k$, β и α — вектора рамзера $k \times 1$, ε и u — вектора размера $n \times 1$, а также $Z = XD$, $\det(D) \neq 0$. Верно ли, что сумма квадратов остатков в представленных выше моделях равны между собой?

Задача 4.12.

Пусть регрессионная модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}^T$. Известно, что $\mathbb{E}\varepsilon = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon) = 4 \cdot I$. Известно также, что:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$.

Найдите:

1. $\mathrm{Var}(\varepsilon_1)$
2. $\mathrm{Var}(\beta_1)$
3. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)$
4. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)$
5. $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1^2) - \beta_1^2$
6. $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$
7. $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$
8. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$
9. $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$
10. $\mathrm{Var}(\beta_2 - \beta_3)$
11. $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$
12. $\widehat{\mathrm{Corr}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$
13. $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2)$
14. $\hat{\sigma}^2$

Задача 4.13.

Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{1i} + \beta_3 x_{2i} + \varepsilon_i$ — регрессионная модель, где $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$, ошибки ε_i независимы и нормально распределены с $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Для удобства расчётов даны матрицы: $X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3333 & -0.3333 & 0.0000 \\ -0.3333 & 1.3333 & -1.0000 \\ 0.0000 & -1.0000 & 2.0000 \end{pmatrix}$

1. Укажите число наблюдений
2. Укажите число регрессоров в модели, учитывая свободный член
3. Найдите $TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$
4. Найдите $RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$
5. Методом МНК найдите оценку для вектора неизвестных коэффициентов
6. Чему равен R^2 в модели? Прокомментируйте полученное значение с точки зрения качества оценённого уравнения регрессии
7. Сформулируйте основную и альтернативную гипотезы, которые соответствуют тесту на значимость переменной x_1 в уравнении регрессии
8. Протестируйте на значимость переменную x_1 в уравнении регрессии на уровне значимости 10%:
   (a) Приведите формулу для тестовой статистики
   (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0
   (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

(d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

(e) Сделайте статистический вывод о значимости переменной x_1

9. Найдите $P-$значение, соответствующее наблюдаемому значению тестовой статистики (T_{obs}) из предыдущего пункта. На основе полученного $P-$значения сделайте вывод о значимости переменной x_1
10. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_1 \neq 1$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

    (e) Сделайте статистический вывод

11. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_1 > 1$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

    (e) Сделайте статистический вывод

12. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 = 1$ против альтернативной $H_a : \beta_1 < 1$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

    (e) Сделайте статистический вывод

13. Сформулируйте основную гипотезу, которая соответствует тесту на значимость регрессии «в целом»
14. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о значимости регрессии «в целом»:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

    (e) Сделайте статистический вывод

15. Найдите $P-$значение, соответствующее наблюдаемому значению тестовой статистики (T_{obs}) из предыдущего пункта. На основе полученного $P-$значения сделайте вывод о значимости регрессии «в целом»
16. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 2$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0

(c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

(d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

(e) Сделайте статистический вывод

17. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_1 + \beta_2 > 2$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

    (e) Сделайте статистический вывод

18. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_1 + \beta_2 < 2$:

    (a) Приведите формулу для тестовой статистики

    (b) Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0

    (c) Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики

    (d) Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается

    (e) Сделайте статистический вывод

Задача 4.14.

Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$,
$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$.

На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 2$ против альтернативной $H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 2$:

1. Приведите формулу для тестовой статистики
2. Укажите распределение тестовой статистики при верной H_0
3. Вычислите наблюдаемое значение тестовой статистики
4. Укажите границы области, где основная гипотеза не отвергается
5. Сделайте статистический вывод

Задача 4.15.

По 13 наблюдениям Вася оценил модель со свободным членом, пятью количественными регрессорами и двумя качественными. Качественные регрессоры Вася правильно закодировал с помощью дамми-переменных. Одна качественная переменная принимала четыре значения, другая — пять.

1. Найдите SSR, R^2
2. Как выглядит матрица $X(X'X)^{-1}X'$?
3. Почему 13 — несчастливое число?

Задача 4.16.

В рамках классической линейной модели найдите все математические ожидания и все ковариационные матрицы всех пар случайных векторов: ε, y, $\hat{y}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\beta}$. Т.е. найдите $\mathbb{E}(\varepsilon)$, $\mathbb{E}(y)$, … и $\mathrm{Cov}(\varepsilon, y)$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon, \hat{y})$, …

Задача 4.17.

Найдите $\mathbb{E}(\sum(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2)$, $\mathbb{E}(RSS)$

Задача 4.18.

Используя матрицы $P = X(X'X)^{-1}X'$ и $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$ запишите RSS, TSS и ESS в матричной форме

Задача 4.19.

Найдите $\mathbb{E}(TSS)$, $\mathbb{E}(ESS)$. Надо быть морально готовым к тому, что они выйдут громоздкие

Задача 4.20.

Вася строит регрессию y на некий набор объясняющих переменных и константу. А на самом деле $y_i = \beta_1 + \varepsilon_i$. Чему равно $\mathbb{E}(TSS)$, $\mathbb{E}(RSS)$, $\mathbb{E}(ESS)$ в этом случае?

Задача 4.21.

Рассмотрим классическую линейную модель. Являются ли векторы $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{y}$ перпендикулярными? Найдите $\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}, \hat{y})$

Задача 4.22.

Чему в классической модели регрессии равны $\mathbb{E}(\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\hat{\varepsilon})$? Верно ли что $\sum \varepsilon_i$ равна 0? Верно ли что $\sum \hat{\varepsilon}_i$ равна 0?

Задача 4.23.

Найдите на Картинке все перпендикулярные векторы. Найдите на Картинке все прямоугольные треугольники. Сформулируйте для них теоремы Пифагора.

Задача 4.24.

Покажите на Картинке TSS, ESS, RSS, R^2, $\mathrm{sCov}(\hat{y}, y)$

Задача 4.25.

Предложите аналог R^2 для случая, когда константа среди регрессоров отсутствует. Аналог должен быть всегда в диапазоне $[0; 1]$, совпадать с обычным R^2, когда среди регрессоров есть константа, равняться единице в случае нулевого $\hat{\varepsilon}$.

Задача 4.26.

Вася оценил регрессию y на константу, x и z. А затем, делать ему нечего, регрессию y на константу и полученный $\hat{y}$. Какие оценки коэффициентов у него получатся? Чему будет равна оценка дисперсии коэффицента при $\hat{y}$? Почему оценка коэффициента неслучайна, а оценка её дисперсии положительна?

Задача 4.27.

При каких условиях $TSS = ESS + RSS$?

Задача 4.28.

Истинная модель имеет вид $y = X\beta + \varepsilon$. Вася оценивает модель $\hat{y} = X\hat{\beta}$ по первой части выборки, получает $\hat{\beta}_a$, по второй части выборки — получает $\hat{\beta}_b$ и по всей выборке — $\hat{\beta}_{tot}$. Как связаны между собой $\hat{\beta}_a$, $\hat{\beta}_b$, $\hat{\beta}_{tot}$? Как связаны между собой ковариационные матрицы $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_a)$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_b)$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{tot})$?

Задача 4.29.

Модель линейной регрессии имеет вид $y_i = \beta_1 x_{i,1} + \beta_2 x_{i,2} + u_i$. Сумма квадратов остатков имеет вид $Q\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) = \sum_{i=1}^n (y_1 - \hat{\beta}_1 x_{i,1} - \hat{\beta}_2 x_{i,2})^2$.

1. Выпишите необходимые условия минимума суммы квадратов остатков
2. Найдите матрицу $X'X$ и вектор $X'y$ если матрица X имеет вид $X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} \end{pmatrix}$, а вектор y имеет вид $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
3. Докажите, что необходимые условия равносильны матричному уравнению $X'X\hat{\beta} = X'y$, где $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$
4. Предполагая, что матрица $X'X$ обратима, найдите $\hat{\beta}$

Задача 4.30.
Вася оценил исходную модель:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$$

Для надежности Вася стандартизировал переменные, т.е. перешёл к $y_i^* = (y_i - \bar{y})/s_y$ и $x_i^* = (x_i - \bar{x})/s_x$. Затем Вася оценил ещё две модели:

$$y_i^* = \beta_1' + \beta_2' x_i^* + u_i'$$

и

$$y_i^* = \beta_2'' x_i^* + u_i''$$

В решении можно считать s_x и s_y известными.

1. Найдите $\hat{\beta}_1'$
2. Как связаны между собой $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_2'$ и $\hat{\beta}_2''$?
3. Как связаны между собой $\hat{u}_i$, $\hat{u}_i'$ и $\hat{u}_i''$?
4. Как связаны между собой $\widehat{\mathrm{Var}}\left(\hat{\beta}_2\right)$, $\widehat{\mathrm{Var}}\left(\hat{\beta}_2'\right)$ и $\widehat{\mathrm{Var}}\left(\hat{\beta}_2''\right)$?
5. Как выглядит матрица $\widehat{\mathrm{Var}}\left(\hat{\beta}'\right)$?
6. Как связаны между собой t-статистики $t_{\hat{\beta}_2}$, $t_{\hat{\beta}_2'}$ и $t_{\hat{\beta}_2''}$?
7. Как связаны между собой R^2, $R^{2\prime}$ и $R^{2\prime\prime}$?
8. В нескольких предложениях прокомментируйте последствия перехода к стандартизированным переменным

Задача 4.31.
Регрессионная модель задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$. Известно, что $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot I$. Известно также, что

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства расчетов приведены матрицы

$$X'X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X'X)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Укажите число наблюдений.
2. Укажите число регрессоров с учетом свободного члена.
3. Запишите модель в скалярном виде
4. Рассчитайте $TSS = \sum(y_i - \bar{y})^2$, $RSS = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$ и $ESS = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$.
5. Рассчитайте при помощи метода наименьших квадратов $\hat{\beta}$, оценку для вектора неизвестных коэффициентов.
6. Чему равен $\hat{\varepsilon}_5$, МНК-остаток регрессии, соответствующий 5-ому наблюдению?
7. Чему равен R^2 в модели? Прокомментируйте полученное значение с точки зрения качества оцененного уравнения регрессии.
8. Используя приведенные выше данные, рассчитайте несмещенную оценку для неизвестного параметра σ^2 регрессионной модели.
9. Рассчитайте $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta})$, оценку для ковариационной матрицы вектора МНК-коэффициентов $\hat{\beta}$.
10. Найдите $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)$, несмещенную оценку дисперсии МНК-коэффициента $\hat{\beta}_1$.
11. Найдите $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)$, несмещенную оценку дисперсии МНК-коэффициента $\hat{\beta}_2$.
12. Найдите $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, несмещенную оценку ковариации МНК-коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.
13. Найдите $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 2\hat{\beta}_3)$

14. Найдите $\widehat{\text{Corr}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, оценку коэффициента корреляции МНК-коэффициентов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$.
15. Найдите $s_{\hat{\beta}_1}$, стандартную ошибку МНК-коэффициента $\hat{\beta}_1$.
16. Рассчитайте выборочную ковариацию y и $\hat{y}$.
17. Найдите выборочную дисперсию y, выборочную дисперсию $\hat{y}$.

Задача 4.32.

Теорема Фриша-Вау. Регрессоры разбиты на две группы: матрицу X_1 размера $n \times k_1$ и матрицу X_2 размера $n \times k_2$. Рассмотрим две процедуры:

M1. Строим регрессия вектора y на все регрессоры, т.е. оцениваем модель:

$$y = X\beta + \varepsilon = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$$

M2. Процедура из двух шагов:

(a) Строим регрессию вектора y на все регрессоры первой группы и получаем вектор остатков $M_1 y$, где $M_1 = I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'$. Строим регрессию каждого регрессора из второй группы на все регрессоры первой группы и получаем в каждом случае вектор остатков. Эти остатки можно записать матрицей M_1X_2.

(b) Строим регрессию вектора $M_1 y$ на остатки M_1X_2.

Другими словами мы оцениваем модель:

$$M_1 y = M_1 X_2 \gamma_2 + u$$

1. Верно ли, что МНК оценки коэффициентов $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\gamma}_2$ совпадают?
2. Верно ли, что остатки в обеих регрессиях совпадают?

Задача 4.33.

Всего имеется 100 наблюдений. Для первых 50-ти наблюдений $X'X = \begin{pmatrix} 50 & 300 \\ 300 & 2100 \end{pmatrix}$, $X'y = \begin{pmatrix} 300 & 2000 \end{pmatrix}'$, $y'y = 2100$. По последним 50-ти наблюдениям: $X'X = \begin{pmatrix} 50 & 300 \\ 300 & 2100 \end{pmatrix}$, $X'y = \begin{pmatrix} 300 & 2200 \end{pmatrix}'$, $y'y = 2500$. По первым 50-ти наблюдениям оценивается модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, по последним 50-ти наблюдениям оценивается модель $y_i = \gamma_1 + \gamma_2 x_i + \varepsilon_i$. Предположеним, что во всех 100 наблюдениях ε_i независимы и нормальны $N(0;\sigma^2)$. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу $H_0 : \beta = \gamma$.

Задача 4.34.

Докажите, что МНК-оценки $\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$ являются несмещенными и линейными по переменной y.

Задача 4.35.

Являются ли МНК-оценки линейными по переменной X?

Задача 4.36.

Приведите пример несмещенной и линейной по переменной y оценки, отличной от МНК.

Задача 4.37.

Если для регрессии $y = X\beta + \varepsilon$ не выполняется условие $Pi = i$, где i — единичный столбец, а $P \equiv X(X^TX)^{-1}X^T$, $\pi \equiv \frac{ii^T}{i^Ti}$, то будут неверны равенства:

(1) $P\pi = \pi$

(2) $P^2 = P$

(3) $\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i = 0$

(4) $\overline{Y} = \overline{\hat{Y}}$

Задача 4.38.

Необходимыми условиями теоремы Гаусса-Маркова являются

1. Правильная специфицикация модели: $y = X\beta + \varepsilon$,
2. Полный ранг матрицы X,
3. Невырожденность матрицы X^TX
4. Нормальность распределения случайной составляющей

5. Скалярность (пропорциональность единичной матрице) ковариационной матрицы случайной составляющей,
6. Наличие в матрице X единичного столбца

Задача 4.39.

Для регрессии $y = X\beta + \varepsilon$ с $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$ найдите математическое ожидание квадратичной формы $\varepsilon^T \pi \varepsilon$.

Задача 4.40.

Рассмотрим регрессию, для которой выполнены условия теоремы Гаусса-Маркова. Уравнение регрессии имеет вид $\hat{y} = \hat{\beta}_1 i + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 + \hat{\beta}_4 x_4$. Известны следующие данные:

$X^T X = \begin{bmatrix} 100 & 123 & 96 & 109 \\ & 252 & 125 & 189 \\ & & 167 & 146 \\ & & & 168 \end{bmatrix}$; $(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.03767 & & & \\ -0.06263 & 1.129 & & \\ -0.06247 & 1.107 & 1.110 & \\ 0.1003 & -2.192 & -2.170 & 4.292 \end{bmatrix}$; $X^T y = \begin{bmatrix} 460 \\ 810 \\ 615 \\ 712 \end{bmatrix}$;

$y^T y = 3924$

1. Найти $\widehat{\mathrm{Corr}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ (1 балл)
2. Найти $\widehat{\mathrm{Corr}}(x_2, x_3)$ (1 балл)
3. Проверить гипотезу $H_0 : \beta_2 = 0$ (1 балл)

Задача 4.41.

По данным для 15 фирм ($n = 15$) была оценена производственная функция Кобба-Дугласа: $\ln Q_i = \beta_1 + \beta_2 \ln L_i + \beta_3 \ln K_i + \varepsilon_i$. Полученные оценки:

$$\underset{s.e.}{\widehat{\ln Q}} = \underset{(4.48)}{0.5} + \underset{(0.7)}{0.76} \ln L + \underset{(0.138)}{0.19} \ln K$$

где Q — выпуск, L — трудозатраты, K — капиталовложения. Матрица обратная к матрице регрессоров имеет вид:

$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 121573 & -19186 & 3718 \\ -19186 & 3030 & -589 \\ 3718 & -589 & 116 \end{bmatrix}$

Требуется:

1. Написать формулу для несмещенной оценки ковариации $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ и вычислить её по имеющимся данным (если это возможно);
2. Проверить $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$ при помощи t-статистики (обязательно требуется указать формулу для статистики, а также указать число степеней свободы);
3. Построить 95% доверительный интервал для величины $\beta_2 + \beta_3$.

Задача 4.42.

Напишите формулу для оценок коэффициентов в множественной регрессии с матрицами. Напишите формулу для ковариационной матрицы оценок.

Задача 4.43.

```r
model <- lm(dist~speed,data=cars)
model.sum <- summary(model)
hat.sigma <- model.sum$sigma
```

Исследователь оценил зависимость длины тормозного пути в футах от скорости автомобиля в милях в час по данным 1920-х годов. При построении парной регрессии у него получилась $\hat{\sigma} = 15.3796$ и оценка ковариационной матрицы

```
xtable(vcov(model))
```

	(Intercept)	speed
(Intercept)	45.68	-2.66
speed	-2.66	0.17

1. Определите количество наблюдений
2. Найдите среднюю скорость автомобиля в милях в час

5 Метод максимального правдоподобия — общая теория

Пусть
$X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка
$x = (x_1, \dots, x_n)$ — реализация данной случайной выборки
$f_{X_i}(x_i, \theta)$ — плотность распределения случайной величины X_i, $i = 1, \dots, n$
$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ — вектор неизвестных параметров
$\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров
$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, \theta)$ — функция правдоподобия
$l(\theta) := \ln \mathrm{L}(\theta)$ — логарифмическая функция правдоподобия
Пусть требуется протестировать систему (нелинейных) ограничений относительно вектора неизвестных параметров

$$H_0 : \begin{cases} g_1(\theta) = 0 \\ g_2(\theta) = 0 \\ \dots \\ g_r(\theta) = 0 \end{cases}$$

где $g_i(\theta)$ — функция, которая задаёт i-ое ограничение на вектор параметров θ, $i = 1, \dots, r$.

$$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = \begin{bmatrix} \partial g_1/\partial \theta' \\ \partial g_2/\partial \theta' \\ \vdots \\ \partial g_r/\partial \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g'}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1'}{\partial \theta} & \frac{\partial g_2'}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial g_r'}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{bmatrix}$$

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \theta \partial \theta'}\right) = -\mathbb{E}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_2 \partial \theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 l}{\partial \theta_k \partial \theta_k} \end{bmatrix}$$ — информационная матрица Фишера

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial l}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial l}{\partial \theta_k} \end{bmatrix}$$

$\Theta_{UR} := \Theta$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров без учёта ограничений
$\Theta_R := \{\theta \in \Theta : g(\theta) = 0\}$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров с учётом ограничений
$\hat{\theta}_{UR} \in \Theta_{UR}$ — точка максимума функции l на множестве Θ_{UR}
$\hat{\theta}_R \in \Theta_R$ — точка максимума функции l на множестве Θ_R
Тогда для тестирования гипотезыH_0 можно воспользоваться одной из следующих ниже статистик.
$LR := -2(l(\hat{\theta}_R) - l) \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика отношения правдоподобия
$W := g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика Вальда
$LM := \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] \overset{a}{\sim} \chi^2_r$ — статистика множителей Лагранжа
Задача 5.1.
Эта задача дублирована дальше. Строка для сохранения нумерации.
Задача 5.2.
Дядя Вова (Владимир Николаевич) и Скрипач (Гедеван) зарабатывают на Плюке чатлы, чтобы купить гравицапу. Число заработанных за i-ый день чатлов имеет пуассоновское распределение, заработки за разные дни независимы. За прошедшие 100 дней они заработали 250 чатлов.

1. Оцените параметр λ пуассоновского распределения методом максимального правдоподобия
2. Сколько дней им нужно давать концерты, чтобы оценка вероятности купить гравицапу составила 0.99? Гравицапа стоит пол кц или 2200 чатлов.
3. Постройте 95% доверительный интервал для λ
4. Проверьте гипотезу о том, что средний дневной заработок равен 2 чатла с помощью теста отношения правдоподобия, теста Вальда, теста множителей Лагранжа

Задача 5.3.
Инопланетянин Капп совершил вынужденную посадку на Землю. Каждый день он выходит на связь со своей далёкой планетой. Продолжительность каждого сеанса связи имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Прошедшие 100 сеансов связи в сумме длились 11 часов.

1. Оцените параметр λ экспоненциального распределения методом максимального правдоподобия
2. Постройте 95% доверительный интервал для λ
3. Проверьте гипотезу о том, что средняя продолжительность сеанса связи равна 5 минутам с помощью теста отношения правдоподобия, теста Вальда, теста множителей Лагранжа

Задача 5.4.
[R] По ссылке `http://people.reed.edu/~jones/141/Coal.html` скачайте данные о количестве крупных аварий на английских угольных шахтах.

1. Методом максимального правдоподобия оцените две модели:
   (a) Пуассоновская модель: количества аварий независимы и имеют Пуассоновское распределение с параметром λ.
   (b) Модель с раздутым нулём «zero inflated poisson model»: количества аварий независимы, с вероятностью p аварий не происходит вообще, с вероятностью $(1-p)$ количество аварий имеет Пуассоновское распределение с параметром λ. Смысл этой модели в том, что по сравнению с Пуассоновским распределением у события $\{X_i = 0\}$ вероятность выше, а пропорции вероятностей положительных количеств аварий сохраняются. В модели с раздутым нулём дисперсия и среднее количества аварий отличаются. Чему в модели с раздутым нулём равна $\mathbb{P}(X_i = 0)$?
2. С помощью тестов множителей Лагранжа, Вальда и отношения правдоподобия проверьте гипотезу H_0: верна пуассоновская модель против H_a: верна модель с раздутым нулём

3. Постройте доверительные интервалы для оценённых параметров в обоих моделях
4. Постройте доверительный интервал для вероятности полного отсутствия аварий по обеим моделям

Задача 5.5.
Совместное распределение величин X и Y задано функцией

$$f(x,y) = \frac{\theta(\beta y)^x e^{-(\theta+\beta)y}}{x!}$$

Величина X принимает целые неотрицательные значения, а величина Y — действительные неотрицательные. Имеется случайная выборка $(X_1, Y_1), \ldots (X_n, Y_n)$.

1. С помощью метода максимального правдоподобия оцените θ и β
2. С помощью метода максимального правдоподобия оцените $a = \theta/(\beta+\theta)$

Задача 5.6.
Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией ν; $\mu \in \mathbb{R}$ и $\nu > 0$ — неизвестные параметры. Реализация случайной выборки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ приведена ниже:

-2.80	-1.12	-2.27	-1.31	-0.98	-2.15	-1.52	-2.82	-1.19	0.87

При помощи теста отношения правдоподобия, теста Вальда и теста множителей Лагранжа протестируйте гипотезу:

$$H_0 : \begin{cases} \mu = 0 \\ \nu = 1 \end{cases}$$

на уровне значимости 5%.

Задача 5.7.
Пусть p — неизвестная вероятность выпадения орла при бросании монеты. Из 100 испытаний 42 раза выпал «Орел» и 58 — «Решка». Протестируйте на 5%-ом уровне значимости гипотезу о том, что монетка — «правильная» с помощью:

1. теста отношения правдоподобия
2. теста Вальда
3. теста множителей Лагранжа

Задача 5.8.
Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — реализация случайной выборки из распределения Пуассона с неизвестным параметром $\lambda > 0$. Известно, что выборочное среднее $\overline{x}$ по 80 наблюдениям равно 1.7. Протестируйте на 5%-ом уровне значимости гипотезу $H_0 : \lambda = 2$ с помощью

1. теста отношения правдоподобия
2. теста Вальда
3. теста множителей Лагранжа

Задача 5.9.
Выпишите в явном виде функцию максимального правдоподобия для модели $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$, если $\varepsilon \sim N(0, A)$. Матрица A устроена по принципу: $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$, и $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 x_i^2$.

Задача 5.10.
Выпишите в явном виде функцию максимального правдоподобия для модели $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$, если $\varepsilon \sim N(0, A)$. Матрица A устроена по принципу: $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$, и $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 |x_i|$.

Задача 5.11.
Предположим, что в классической линейной модели ошибки имеют нормальное распределение, т.е.

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2,i} + \ldots + \beta_k x_{k,i} + \varepsilon_i$$

где ε_i нормальны $N(0, \sigma^2)$ и независимы

1. Найдите оценки для β и σ^2 методом максимального правдоподобия.
2. Являются ли полученные оценки $\hat{\beta}_{ML}$ и $\hat{s}^2_{ML}$ несмещенными?
3. Выведите формулу LR-статистики у теста отношения правдоподобия для тестирования гипотезы об адекватности регрессии H_0: $\beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_k = 0$.

Задача 5.12.
Наблюдения $X_1, \ldots, X_n$ независимы и нормальны $N(\mu, 1)$. По 100 наблюдениям оказалось, что $\sum x_i = 200$, $\sum x_i^2 = 900$.

1. Оцените μ методом максимального правдоподобия
2. Постройте 95% доверительный интервал для μ
3. Проверьте гипотезу о том, что $\mu = 3$ против альтернативной $\mu \neq 3$ с помощью тестов Вальда, множителей Лагранжа и отношения правдоподобия
4. Постройте 95% доверительный интервал для неизвестной величины $\mathbb{P}(X_i > 2.5)$

Наблюдения $X_1, \ldots, X_n$ независимы и нормальны $N(\mu, 1)$. По 100 наблюдениям оказалось, что $\sum x_i = 200$, $\sum x_i^2 = 900$.

1. Оцените μ методом максимального правдоподобия
2. Постройте 95% доверительный интервал для μ
3. Проверьте гипотезу о том, что $\mu = 3$ против альтернативной $\mu \neq 3$ с помощью тестов Вальда, множителей Лагранжа и отношения правдоподобия
4. Постройте 95% доверительный интервал для неизвестной величины $\mathbb{P}(X_i > 2.5)$

Задача 5.13.
Наблюдения $X_1, \ldots, X_n$ независимы и нормальны $N(0, \sigma^2)$. По 100 наблюдениям оказалось, что $\sum x_i = 200$, $\sum x_i^2 = 900$.

1. Оцените σ^2 методом максимального правдоподобия
2. Постройте 95% доверительный интервал для σ^2
3. Проверьте гипотезу о том, что $\sigma^2 = 4$ против альтернативной $\sigma^2 \neq 4$ с помощью тестов Вальда, множителей Лагранжа и отношения правдоподобия
4. Постройте 95% доверительный интервал для неизвестной величины $\mathbb{P}(X_i > 2.5)$

Задача 5.14.
Наблюдения $X_1, \ldots, X_n$ независимы и нормальны $N(\mu, \sigma^2)$. По 100 наблюдениям оказалось, что $\sum x_i = 200$, $\sum x_i^2 = 900$.

1. Оцените μ и σ^2 методом максимального правдоподобия
2. Постройте 95% доверительный интервал для μ, σ^2
3. [R] Проверьте гипотезу о том, что $\sigma^2 = 4$ против альтернативной $\sigma^2 \neq 4$ с помощью тестов Вальда, множителей Лагранжа и отношения правдоподобия
4. [R] Проверьте гипотезу о том, что $\mu = 3$ против альтернативной $\mu \neq 3$ с помощью тестов Вальда, множителей Лагранжа и отношения правдоподобия
5. [R] Постройте 95% доверительный интервал для неизвестной величины $\mathbb{P}(X_i > 2.5)$
6. [R] На графике постройте двумерную 95% доверительную область для вектора (μ, σ^2)

6 Логит и пробит

Задача 6.1.
Случайная величина X имеет логистическое распределение, если её функция плотности имеет вид $f(x) = e^{-x}/(1 + e^{-x})^2$.

1. Является ли $f(x)$ чётной?
2. Постройте график $f(x)$
3. Найдите функцию распределения, $F(x)$
4. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$
5. На какое известный закон распределения похож логистический?

Задача 6.2.
Логит модель часто формулируют в таком виде:

$$y_i^* = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

где ε_i имеет логистическое распределение, и

$$y_i = \begin{cases} 1, \ y_i^* \geqslant 0 \\ 0, \ y_i^* < 0 \end{cases}$$

1. Выразите $\mathbb{P}(y_i = 1)$ с помощью логистической функции распределения
2. Найдите $\ln\left(\frac{\mathbb{P}(y_i=1)}{\mathbb{P}(y_i=0)}\right)$

Задача 6.3.
[R] Сравните на одном графике

1. Функции плотности логистической и нормальной $N(0, \pi^2/3)$ случайных величин
2. Функции распределения логистической и нормальной $N(0, \pi^2/3)$ случайных величин

Задача 6.4.
Как известно, Фрекен Бок любит пить коньяк по утрам. За прошедшие 4 дня она записала, сколько рюмочек коньяка выпила утром, x_i, и видела ли она в этот день привидение, y_i,

y_i	1	0	1	0
x_i	2	1	3	0

Зависимость между y_i и x_i описывается логит-моделью,

$$\ln\left(\frac{\mathbb{P}(y_i = 1)}{\mathbb{P}(y_i = 0)}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_i$$

1. Выпишите в явном виде логарифмическую функцию максимального правдоподобия
2. [R] Найдите оценки параметров β_1 и β_2

Задача 6.5.
При оценке логит модели

$$\mathbb{P}(y_i = 1) = \Lambda(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

оказалось, что $\hat{\beta}_1 = 0.7$ и $\hat{\beta}_2 = 3$. Найдите максимальный предельный эффект роста x_i на вероятность $\mathbb{P}(y_i = 1)$.

Задача 6.6.
Винни-Пух знает, что мёд бывает правильный, $honey_i = 1$, и неправильный, $honey_i = 0$. Пчёлы также бывают правильные, $bee_i = 1$, и неправильные, $bee_i = 0$. По 100 своим попыткам добыть мёд Винни-Пух составил таблицу сопряженности:

	$honey_i = 1$	$honey_i = 0$
$bee_i = 1$	12	36
$bee_i = 0$	32	20

Используя метод максимального правдоподобия Винни-Пух хочет оценить логит-модель для прогнозирования правильности мёда с помощью правильности пчёл:

$$\ln\left(\frac{\mathbb{P}(honey_i = 1)}{\mathbb{P}(honey_i = 0)}\right) = \beta_1 + \beta_2 bee_i$$

1. Выпишите функцию правдоподобия для оценки параметров β_1 и β_2
2. Оцените неизвестные параметры
3. С помощью теста отношения правдоподобия проверьте гипотезу о том, правильность пчёл не связана с правильностью мёда на уровне значимости 5%.

4. Держась в небе за воздушный шарик, Винни-Пух неожиданно понял, что перед ним неправильные пчёлы. Помогите ему оценить вероятность того, что они делают неправильный мёд.

7 Мультиколлинеарность

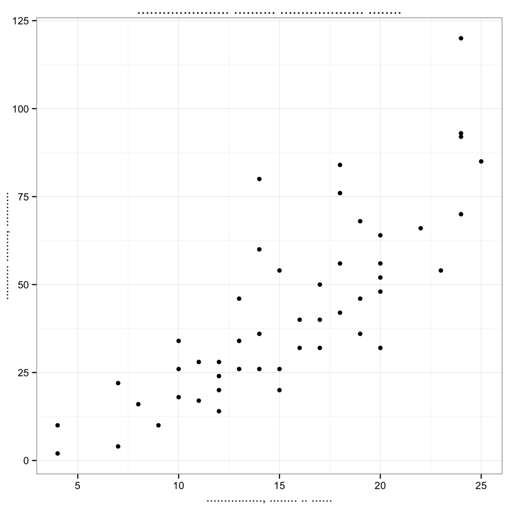
Задача 7.1.
Сгенерируйте данные так, чтобы при оценке модели $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$ оказывалось, что по отдельности оценки коэффициентов $\hat{\beta}_2$ и $\hat{\beta}_3$ незначимы, но модель в целом — значима.

Задача 7.2.
В этом задании нужно сгенерировать зависимую переменную y и два регрессора x и z.

1. Сгенерируйте данные так, чтобы корреляция между регрессорами x и z была больше 0.9, и проблема мультиколлинеарности есть, т.е. по отдельности регрессоры не значимы, но регрессия в целом — значима.
2. А теперь сгенерируйте данные так, чтобы корреляция между регрессорами была по-прежнему больше 0.9, но проблемы мультиколлинеарности бы не было, т.е. все коэффициенты были бы значимы.
3. Есть несколько способов, как изменить генерации случайных величин, чтобы перейти от ситуации «a» к ситуации «b». Назовите хотя бы два.

Задача 7.3.
Исследуем зависимость длины тормозного пути автомобиля от скорости по историческим данным 1920-х годов.

```
h <- cars
ggplot(h,aes(x=speed,y=dist))+geom_point()+
    labs(title="Зависимость длины тормозного пути",
    x="Скорость, миль в час",y="Длина пути, футов")
```




```
speed.mean <- mean(h$speed)
```

Построим результаты оценивания нецентрированной регрессии:

```
cars.model <- lm(dist~speed+I(speed^2)+I(speed^3),data=h)
cars.table <- as.table(coeftest(cars.model))
rownames(cars.table) <-c("Константа","speed","speed^2","speed^3")
```

с тремя переменными руками громоздко делать, а с двумя вроде не видно мультик.

```r
xtable(cars.table)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
Константа	-19.51	28.41	-0.69	0.50
speed	6.80	6.80	1.00	0.32
speed^2	-0.35	0.50	-0.70	0.49
speed^3	0.01	0.01	0.91	0.37

Ковариационная матрица коэффициентов имеет вид:

```r
cars.vcov <- vcov(cars.model)
rownames(cars.vcov) <-c("Константа","speed","speed^2","speed^3")
colnames(cars.vcov) <-c("Константа","speed","speed^2","speed^3")
xtable(cars.vcov)
```

	Константа	speed	speed^2	speed^3
Константа	806.86	-186.20	12.88	-0.27
speed	-186.20	46.26	-3.35	0.07
speed^2	12.88	-3.35	0.25	-0.01
speed^3	-0.27	0.07	-0.01	0.00

1. Проверьте значимость всех коэффициентов и регрессии в целом
2. Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\mathbb{E}(dist)$ при $speed = 10$
3. Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\mathbb{E}(ddist/dspeed)$ при $speed = 10$
4. Как выглядит уравнение регрессии, если вместо *speed* использовать центрированную скорость? Известно, что средняя скорость равна 15.4
5. С помощью регрессии с центрированной скоростью ответьте на предыдущие вопросы.

Задача 7.4.

Пионеры, Крокодил Гена и Чебурашка собирали металлолом несколько дней подряд. В распоряжение иностранной шпионки, гражданки Шапокляк, попали ежедневные данные по количеству собранного металлолома: вектор g — для Крокодила Гены, вектор h — для Чебурашки и вектор x — для Пионеров. Гена и Чебурашка собирали вместе, поэтому выборочная корреляция $\mathrm{sCorr}(g, h) = -0.9$. Гена и Чебурашка собирали независимо от Пионеров, поэтому выборочные корреляции $\mathrm{sCorr}(g, x) = 0$, $\mathrm{sCorr}(h, x) = 0$. Если регрессоры g, h и x центрировать и нормировать, то получится матрица $\tilde{X}$.

1. Найдите параметр обусловленности матрицы $(\tilde{X}'\tilde{X})$
2. Вычислите одну или две главные компоненты (выразите их через вектор-столбцы матрицы $\tilde{X}$), объясняющие не менее 70% общей выборочной дисперсии регрессоров
3. Шпионка Шапокляк пытается смоделировать ежедневный выпуск танков, y. Выразите коэффициенты регрессии $y = \beta_1 + \beta_2 g + \beta_3 h + \beta_4 x + \varepsilon$ через коэффициенты регрессии на главные компоненты, объясняющие не менее 70% общей выборочной дисперсии.

Задача 7.5.

Для модели $y_i = \beta x_i + \varepsilon$ рассмотрите модель Ridge regression с коэффициентом λ.

1. Выведите формулу для $\hat{\beta}_{RR}$
2. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta}_{RR})$, смещение оценки $\hat{\beta}_{RR}$,
3. Найдите $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{RR})$, $MSE(\hat{\beta}_{RR})$
4. Всегда ли оценка $\hat{\beta}_{RR}$ смещена?
5. Всегда ли оценка $\hat{\beta}_{RR}$ имеет меньшую дисперсию, чем $\hat{\beta}_{ols}$?
6. Найдите такое λ, что $MSE(\hat{\beta}_{RR}) < MSE(\hat{\beta}_{ols})$

Задача 7.6.

Известно, что в модели $y = X\beta + \varepsilon$ все регрессоры ортогональны.

1. Как выглядит матрица $X'X$ в случае ортогональных регрессоров?
2. Выведите $\hat{\beta}_{rr}$ в явном виде
3. Как связаны между собой $\hat{\beta}_{rr}$ и $\hat{\beta}_{ols}$?

Задача 7.7.

Для модели $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ выведите в явном виде $\hat{\beta}_{lasso}$.

Задача 7.8.

Предположим, что для модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$ выборочная корреляционная матрица регрессоров x_2, x_3, x_4 имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & r & r \\ r & 1 & r \\ r & r & 1 \end{pmatrix}$$

1. Найдите такое значение $r^* \in (-1; 1)$ коэффициента корреляции, при котором $\det C = 0$.
2. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы C при корреляции равной найденному r^*.
3. Найдите число обусловленности матрицы C при корреляции равной найденному r^*.
4. Сделайте вывод о наличии мультиколлинеарности в модели при корреляции равной найденному r^*.

Задача 7.9.

Предположим, что для модели $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i5} + \varepsilon_i$ выборочная корреляционная матрица регрессоров x_2, x_3, x_4 и x_5 имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & r & r & r \\ r & 1 & r & r \\ r & r & 1 & r \\ r & r & r & 1 \end{pmatrix}$$

1. Найдите такое значение $r^* \in (-1; 1)$ коэффициента корреляции, при котором $\det C = 0$.
2. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы C при корреляции равной найденному r^*.
3. Найдите число обусловленности матрицы C при корреляции равной найденному r^*.
4. Сделайте вывод о наличии мультиколлинеарности в модели при корреляции равной найденному r^*.

8 Гетероскедастичность

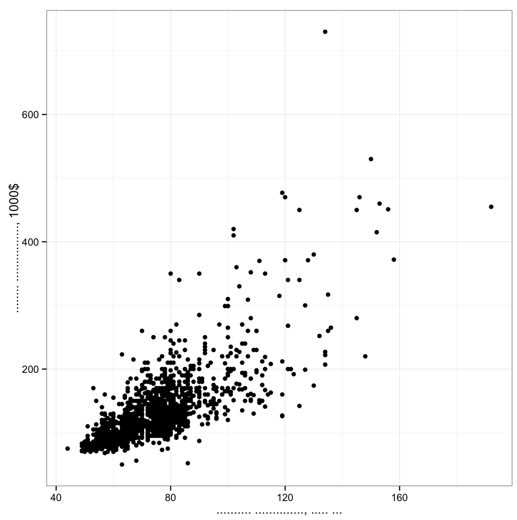
Задача 8.1.

Что такое гетероскедастичность? Гомоскедастичность?

Задача 8.2.

Диаграмма рассеяния стоимости квартиры в Москве (в 1000$) и общей площади квартиры имеет вид:

```
ggplot(flats,aes(x=totsp,y=price))+geom_point()+
    labs(x="Общая площадь, кв. м.",y="Цена квартиры, 1000$")
```



Какие подходы к оцениванию зависимости имеет смысл посоветовать исходя из данного графика?

Задача 8.3.

По наблюдениям $x = (1, 2, 3)'$, $y = (2, -1, 3)'$ оценивается модель $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$. Ошибки ε гетероскедастичны и известно, что $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \cdot x_i^2$.

1. Найдите оценки $\hat{\beta}_{ols}$ с помощью МНК и их ковариационную матрицу
2. Найдите оценки $\hat{\beta}_{gls}$ с помощью обобщенного МНК и их ковариационную матрицу

Задача 8.4.

В модели $y = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \varepsilon$ присутствует гетероскедастичность вида $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 x_i^2$. Как надо преобразовать исходные регрессоры и зависимую переменную, чтобы устранить гетероскедастичность?

Задача 8.5.

В модели $y = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \varepsilon$ присутствует гетероскедастичность вида $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \lambda |x_i|$. Как надо преобразовать исходные регрессоры и зависимую переменную, чтобы устранить гетероскедастичность?

Задача 8.6.

Известно, что после деления каждого уравнения регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ на x_i^2 гетероскедастичность ошибок была устранена. Какой вид имела дисперсия ошибок, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i)$?

Задача 8.7.

Известно, что после деления каждого уравнения регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ на $\sqrt{x_i}$ гетероскедастичность ошибок была устранена. Какой вид имела дисперсия ошибок, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i)$?

Задача 8.8.

Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x. Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \ldots, 30$	1.21	1.89	2.74	48.69
$i = 1, \ldots, 11$	1.39	2.27	2.36	10.28
$i = 12, \ldots, 19$	0.75	2.23	3.19	5.31
$i = 20, \ldots, 30$	1.56	1.06	2.29	14.51

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.

Задача 8.9.

Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x. Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \ldots, 50$	1.16	1.99	2.97	174.69
$i = 1, \ldots, 21$	0.76	2.25	3.18	20.41
$i = 22, \ldots, 29$	0.85	1.81	3.32	3.95
$i = 30, \ldots, 50$	1.72	1.41	2.49	130.74

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 1%.

Задача 8.10.

Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x. Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \ldots, 30$	0.96	2.25	3.44	52.70
$i = 1, \ldots, 11$	1.07	2.46	2.40	5.55
$i = 12, \ldots, 19$	1.32	1.01	2.88	11.69
$i = 20, \ldots, 30$	1.04	2.56	4.12	16.00

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.

Задача 8.11.

Для линейной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$ была выполнена сортировка наблюдений по возрастанию переменной x. Исходная модель оценивалась по разным частям выборки:

Выборка	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	RSS
$i = 1, \ldots, 50$	0.93	2.02	3.38	145.85
$i = 1, \ldots, 21$	1.12	2.01	3.32	19.88
$i = 22, \ldots, 29$	0.29	2.07	2.24	1.94
$i = 30, \ldots, 50$	0.87	1.84	3.66	117.46

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.

Задача 8.12.

Рассмотрим линейную регрессию $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$. При оценивании с помощью МНК были получены результаты: $\hat{\beta}_1 = 1.21$, $\hat{\beta}_2 = 1.11$, $\hat{\beta}_3 = 3.15$, $R^2 = 0.72$.

Оценена также вспомогательная регрессия: $\hat{\varepsilon}_i = \delta_1 + \delta_2 x_i + \delta_3 z_i + \delta_4 x_i^2 + \delta_5 z_i^2 + \delta_6 x_i z_i + u_i$. Результаты оценивания следующие: $\hat{\delta}_1 = 1.50$, $\hat{\delta}_2 = -2.18$, $\hat{\delta}_3 = 0.23$, $\hat{\delta}_4 = 1.87$, $\hat{\delta}_5 = -0.56$, $\hat{\delta}_6 = -0.09$, $R^2_{aux} = 0.36$

Известно, что ошибки в модели являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Протестируйте ошибки на гетероскедастичность на уровне значимости 5%.

Задача 8.13.

Объясните, с какой целью используются стандартные ошибки в форме Уайта. Приведите развернутый ответ. Верно ли, что стандартные ошибки в форме Уайта позволяют

1. устранить гетероскедастичность?
2. корректно тестировать гипотезы относительно коэффициентов регрессии в условиях гетероскедастичности?

Задача 8.14.

Объясните, с какой целью используются стандартные ошибки в форме Невье–Веста. Приведите развернутый ответ. Верно ли, что стандартные ошибки в форме Невье–Веста позволяют

1. устранить гетероскедастичность?
2. корректно тестировать гипотезы относительно коэффициентов регрессии в условиях гетероскедастичности?

Задача 8.15.
Рассматривается модель $y_t = \beta_1 + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t — независимые случайные величины с $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = t$. Найдите наиболее эффективную оценку неизвестного параметра β_1 в классе линейных по y и несмещенных оценок.
Задача 8.16.
Рассматривается модель $y_t = \beta_1 + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t — независимые случайные величины с $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = t^2$. Найдите наиболее эффективную оценку неизвестного параметра β_1 в классе линейных по y и несмещенных оценок.
Задача 8.17.
Рассматривается модель $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t — независимые случайные величины с $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = t$. Найдите наиболее эффективную оценку неизвестного параметра β_1 в классе линейных по y и несмещенных оценок.
Задача 8.18.
Рассматривается модель $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t — независимые случайные величины с $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = t^2$. Найдите наиболее эффективную оценку неизвестного параметра β_1 в классе линейных по y и несмещенных оценок.
Задача 8.19.
Докажите, что в условиях гетероскедастичности МНК- оценки остаются несмещенными.
Задача 8.20.
Оценка коэффициентов обобщенного МНК имеет вид $\hat{\beta}_{GLS} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$, где $V = \mathrm{Var}(\varepsilon)$. Совпадает ли оценка $\hat{\beta}_{GLS}$ с оценкой обычным МНК в условиях гомоскедастичности?
Задача 8.21.
Модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ оценивается по трём наблюдениям, $y = (9, 3, 6)$, $x = (1, 2, 4)$. Имеется гетероскедастичность вида $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 x_i^2$, ошибки ε_i нормально распределены.

1. Оцените $\hat{\beta}$ с помощью МНК проигнорировав гетероскедастичность. Постройте 95% доверительный интервал для каждого коэффициента, проигнорировав гетероскедастичность
2. Оцените $\hat{\beta}$ с помощью обобщенного МНК учтя гетероскедастичность. Постройте 95% доверительный интервал для каждого коэффициента с учётом гетероскедастичности

Задача 8.22.
Рассмотрим модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, где ошибки ε_i некоррелированы, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$. Предлагается два способа оценить коэффициенты модели:

WLS. Взвешенный метод наименьших квадратов. Поделим каждое уравнение $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ на σ_i. Затем обычным методом наименьших квадратов в преобразованной модели $y_i/\sigma_i = \beta_1 \cdot 1/\sigma_i + \beta_2 x_i/\sigma_i + \varepsilon_i/\sigma_i$ найдем оценки $\hat{\beta}_{WLS}$.

GLS. Обобщенный метод наименьших квадратов. Оценки $\hat{\beta}_{GLS}$ находим по формуле $\hat{\beta}_{GLS} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$, где

$$V = \mathrm{Var}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

1. Докажите, что в матричном виде преобразование взвешенного МНК записывается как $V^{-1/2}y = V^{-1/2}X\beta + V^{-1/2}\varepsilon$.
2. Верно ли, что $\hat{\beta}_{WLS} = \hat{\beta}_{GLS}$?
3. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta}_{WLS})$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{WLGS})$
4. В явном виде выпишите $\hat{\beta}_{2,WLS}$

Задача 8.23.
Рассмотрим модель регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$, в которой ошибки ε_i независимы и имеют нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$. Для $n = 200$ наблюдений найдите

1. вероятность того, что статистика Уайта окажется больше 10,
2. ожидаемое значение статистики Уайта,
3. дисперсию статистики Уайта.

Задача 8.24.
Найдите число коэффициентов во вспомогательной регрессии, необходимой для выполнения теста Уайта, если число коэффициентов в исходной регрессии равно k, включая свободный член.
Задача 8.25.
(Кирилл Фурманов) По 35 наблюдениям сотрудники НИИ оценили уравнение регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и рассчитали остатки ε_i. После того они приступили к диагностике возможных недостатков модели, обнаружили гетероскедастичность и решили её побороть.

(a) Самый младший научный сотрудник выдвинул предположение, что стандартное отклонение случайной составляющей может быть выражено так: $\sigma_{\varepsilon,i} = a x_i$, где a — неизвестный коэффициент. Каким образом нужно преобразовать исходное уравнение регрессии, чтобы избавиться от гетероскедастичности?

(b) Профессор решил перепроверить результаты и оценил регрессию:

$$\hat{e}_i^2 = -0.3 + 0.08 x_i - 0.01 x_i^2, R^2 = 0.15$$

Свидетельствует ли полученный профессором результат о наличии гетероскедастичности?

Задача 8.26.
Пусть $y_t = \beta x_t + \varepsilon$ где $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ и известно, что оценки для параметров $\tilde{\beta} = \left(\sum_{t=1}^n y_t\right) / \left(\sum_{t=1}^n x_t\right)$ являются наилучшими (в смысле минимума дисперсии) среди линейных несмещенных оценок параметра β. Чему равна в этом случае матрица ковариаций вектора ε с точностью до пропорциональности?
Задача 8.27.
Для регрессии $y = X\beta + \varepsilon$ с $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \Sigma \neq \sigma^2 I$, оцененной с помощью обобщённого метода наименьших квадратов, найдите ковариационную матрицу $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_{GLS}, \varepsilon)$
Задача 8.28.
Найдите наиболее эффективную оценку коэффициента β_1 для модели $y_i = \beta_1 + \varepsilon$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 / x_i$, $x_i > 0$ в классе линейных несмещенных оценок
Задача 8.29.
Фурманов Кирилл. Исследователь оценил регрессионную модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$ и провёл диагностику различных проблемных явлений. Результаты его стараний приведены ниже:

Также $VIF_2 = 1.06$, $VIF_3 = 1.07$, $VIF_4 = 1.02$

(a) Определите, какие проблемные явления обнаружил исследователь. Обоснуйте свой ответ.

(b) Найдите коэффициент детерминации для регрессии: $x_{i2} = \gamma_1 + \gamma_2 x_{i3} + \gamma_3 x_{i4} + u_i$

9 Ошибки спецификации

Задача 9.1.
По 25 наблюдениям при помощи метода наименьших квадратов оценена модель $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, для которой $RSS = 73$. При помощи вспомогательной регрессии $\hat{\hat{y}} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x + \hat{\gamma}_3 z + \hat{\gamma}_4 \hat{y}^2$, для которой $RSS = 70$, выполните тест Рамсея на уровне значимости 5%.
Задача 9.2.
По 20 наблюдениям при помощи метода наименьших квадратов оценена модель $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 z$, для которой $R^2 = 0.7$. При помощи вспомогательной регрессии $\hat{\hat{y}} = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 x + \hat{\gamma}_3 z + \hat{\gamma}_4 \hat{y}^2$, для которой $R^2 = 0.75$, выполните тест Рамсея на уровне значимости 5%.
Задача 9.3.

По 30 наблюдениям при помощи метода наименьших квадратов оценена модель $\hat{y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x+\hat{\beta}_3z$, для которой $RSS=150$. При помощи вспомогательной регрессии $\hat{\hat{y}}=\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2x+\hat{\gamma}_3z+\hat{\gamma}_4\hat{y}^2+\hat{\gamma}_5\hat{y}^3$, для которой $RSS=120$, выполните тест Рамсея на уровне значимости 5%.
Задача 9.4.
По 35 наблюдениям при помощи метода наименьших квадратов оценена модель $\hat{y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x+\hat{\beta}_3z$, для которой $R^2=0.7$. При помощи вспомогательной регрессии $\hat{\hat{y}}=\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2x+\hat{\gamma}_3z+\hat{\gamma}_4\hat{y}^2+\hat{\gamma}_5\hat{y}^3$, для которой $R^2=0.8$, выполните тест Рамсея на уровне значимости 5%.
Задача 9.5.
Используя 80 наблюдений, исследователь оценил две конкурирующие модели: $\hat{y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x+\hat{\beta}_3z$, в которой $RSS_1=36875$ и $\widehat{\ln y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x+\hat{\beta}_3z$, в которой $RSS_2=122$.
Выполнив преобразование $y_i^*=y_i/\sqrt[n]{\prod y_i}$, исследователь также оценил две вспомогательные регрессии: $\hat{y}^*=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x+\hat{\beta}_3z$, в которой $RSS_1^*=239$ и $\widehat{\ln y^*}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x+\hat{\beta}_3z$, в которой $RSS_2^*=121$.
Завершите тест Бокса-Кокса на уровне значимости 5%.
Задача 9.6.
Используя 40 наблюдений, исследователь оценил две конкурирующие модели: $\hat{y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x+\hat{\beta}_3z$, в которой $RSS_1=250$ и $\widehat{\ln y}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x+\hat{\beta}_3z$, в которой $RSS_2=12$.
Выполнив преобразование $y_i^*=y_i/\sqrt[n]{\prod y_i}$, исследователь также оценил две вспомогательные регрессии: $\hat{y}^*=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x+\hat{\beta}_3z$, в которой $RSS_1^*=20$ и $\widehat{\ln y^*}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2x+\hat{\beta}_3z$, в которой $RSS_2^*=25$.
Завершите тест Бокса-Кокса на уровне значимости 5%.
Задача 9.7.
Почему при реализации теста Бокса-Кокса на компьютере предпочтительнее использовать формулу $y_i^*=\exp(\ln y_i-\sum\ln y_i/n)$, а не формулу $y_i^*=y_i/\sqrt[n]{\prod y_i}$?
Задача 9.8.
Обследовав выборку из 27 домохозяйств, исследователь оценил уравнение регрессии:

$$\frac{\widehat{Exp_i}}{Size_i}=926+235\frac{1}{Size_i}+0.3\frac{Income_i}{Size_i}$$

где Exp_i — месячные затраты i-го домохозяйства на питание в рублях, $Income_i$ — месячный доход домохозяйства (также в рублях), $Size_i$ — число членов домохозяйства. Известен коэффициент детерминации, $R^2=0.3$.

1. Каково, согласно оценённой модели, ожидаемое различие в затратах на питание между двумя домохозяйствами с одинаковым доходом, первое из которых больше второго на одного человека?
2. Известно, что нормировка переменных модели на размер семьи $Size_i$ была проведена с целью устранения гетероскедастичности в модели $Exp_i=\beta_1+\beta_2Size_i+\beta_3Income_i+\varepsilon_i$. Какое предположение сделал исследователь о виде гетероскедастичности?
3. Для проверки правильности выбранной спецификации было оценено ещё одно уравнение:

$$\frac{\widehat{\widehat{Exp_i}}}{Size_i}=513+1499\frac{1}{Size_i}+0.5\frac{Income_i}{Size_i}-0.001\left(\frac{\widehat{Exp_i}}{Size_i}\right)^2$$

   Известно, что $R^2=0.4$. Даёт ли эта проверка основание считать модель исследователя неверно специфицированной? Используйте уровень значимости 1%

Задача 9.9.
Мартовский Заяц и Безумный Шляпник почти всё время пьют чай. Известно, что количество выпитого за день чая (в чашках) зависит от количества пирожных (в штуках) и печенья (в штуках). Алиса, гостившая у героев в течение 25 дней, заметила, что если оценить зависимость выпитого чая от закуски для Мартовского Зайца и Шляпника, то получится регрессия с

$RSS = 11.5$:
$$\widehat{Tea}_i = 6 + 0.5Biscuit_i + 1.5Cake_i$$
Чтобы понять, удачную ли модель она построила, Алиса оценила ещё одну регрессию с $RSS = 9.5$:
$$\widehat{\widehat{Tea}}_i = 12.7 + 0.65Biscuit_i - 0.8Cake_i - 0.59\widehat{Tea}_i^2 + 0.03\widehat{Tea}_i^3$$
Помогите Алисе понять, верную ли спецификацию модели она выбрала

1. Проведите подходящий тест
2. Сформулируйте основную и альтернативную гипотезы
3. Алиса решила проверить первоначальную короткую модель на наличие гетероскедастичности с помощью теста Уайта. Выпишите уравнение регрессии, которое она должна оценить.

10 Случайные регрессоры

Экзогенность, $\mathbb{E}(\varepsilon \mid x) = 0$
Предопределённость, $\mathbb{E}(\varepsilon_t \mid x_t) = 0$ для всех t
Задача 10.1.
Настоящая зависимость между y_i и x_i имеет вид $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, где ε_i независимы и равновероятно принимают значения -1 и $+1$. Эконометресса Аврора оценивает коэффициент β по двум наблюдениям. Аврора не знает чему равны настоящие x_i, вместо них она наблюдает значения $x_i^* = x_i + u_i$, где u_i — ошибки измерения, поэтому она строит регрессию y_i на x_i^*. Ошибки измерения регрессора, u_i, независимы и равновероятно принимают значения -1 и $+1$. Величины u_i и ε_j независимы.

1. Выведите явную формулу для оценки $\hat{\beta}$
2. Чему равно u_i^2? Чему равно ε_i^2?
3. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta})$, если $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$
4. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta})$, если $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$
5. Интуитивно объясните, как меняется смещение с ростом расстояния между x_1 и x_2

Задача 10.2.
Известна совместная функция плотности пары величин X_i, Y_i
$$f(x, y) =$$
Найдите

1. $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathbb{E}(Y_i)$, $\mathrm{Var}(X_i)$, $\mathrm{Var}(Y_i)$, $\mathrm{Cov}(X_i, Y_i)$
2. $\mathbb{E}(Y_i \mid X_i)$, $\mathbb{E}(X_i \mid Y_i)$
3. Вася оценивает модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i$ по огромному количеству наблюдений, $n >> 0$. Чему примерно у него окажутся равны $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{s}^2$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)$? Чему равно $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$? (или оно не будет браться???)
4. Петя оцениваем модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_2 x_i^2 + \epsilon_i$. Найдите $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1)$, $\mathbb{E}(\hat{\beta}_2)$, $\mathbb{E}(\hat{\beta}_3)$, $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$ (?)

Задача 10.3.
Табличка 2 на 2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\varepsilon \mid x)$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon, x)$.
Задача 10.4.
Приведите примеры дискретных случайных величин ε и x, таких, что

1. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon \mid x) = 0$, но величины зависимы. Чему в этом случае равно $\mathrm{Cov}(\varepsilon, x)$?
2. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon, x) = 0$, но $\mathbb{E}(\varepsilon \mid x) \neq 0$. Зависимы ли эти случайные величины?

11 Временные ряды

Задача 11.1.

Что такое автокорреляция?

Задача 11.2.

На графике представлены данные по уровню озера Гурóн в футах в 1875-1972 годах:

```
ggplot(df,aes(x=obs,y=level))+geom_line()+
    labs(x="Год",ylab="Уровень озера (футы)")
```

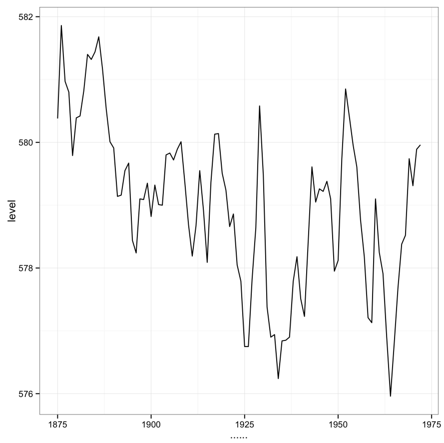
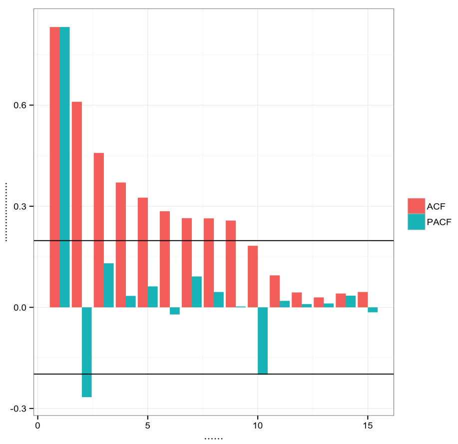


График автокорреляционной и частной автокорреляционной функций:

```
ggplot(acfs.df,aes(x=lag,y=acf,fill=acf.type))+
    geom_histogram(position="dodge",stat="identity")+
  xlab("Лаг")+ylab("Корреляция") +
  guides(fill=guide_legend(title=NULL))+
  geom_hline(yintercept=1.96/sqrt(nrow(df)))+
  geom_hline(yintercept=-1.96/sqrt(nrow(df)))
```



1. Судя по графикам, какие модели класса ARMA или ARIMA имеет смысл оценить?
2. По результатам оценки некоей модели ARMA с двумя параметрами, исследователь посчитал оценки автокорреляционной функции для остатков модели. Известно, что для остатков модели первые три выборочные автокорреляции равны соответственно 0.0047, -0.0129 и -0.063. С помощью подходящей статистики проверьте гипотезу о том, что первые три корреляции ошибок модели равны нулю.

Задача 11.3.

Винни-Пух пытается выявить закономерность в количестве придумываемых им каждый день ворчалок. Винни-Пух решил разобраться, является ли оно стационарным процессом, для этого он оценил регрессию

$$\Delta\hat{y}_t = \underset{(0.5)}{4.5} - \underset{(0.1)}{0.4}y_{t-1} + \underset{(0.5)}{0.7}\Delta y_{t-1}$$

Из-за опилок в голове Винни-Пух забыл, какой тест ему нужно провести, то ли Доктора Ватсона, то ли Дикого Фуллера.

1. Аккуратно сформулируйте основную и альтернативную гипотезы
2. Проведите подходящий тест на уровне значимости 5%
3. Сделайте вывод о стационарности ряда
4. Почему Сова не советовала Винни-Пуху пользоваться широко применяемым в Лесу t-распределением?

Задача 11.4.

Рассматривается модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$. Ошибки ε_t гомоскедастичны, но в них возможно присутствует автокорреляция первого порядка, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$. При известном числе наблюдений T на уровне значимости 5% сделайте статистический вывод о наличии автокорреляции.

1. $T = 25$, $k = 2$, $DW = 0.8$
2. $T = 30$, $k = 3$, $DW = 1.6$
3. $T = 50$, $k = 4$, $DW = 1.8$
4. $T = 100$, $k = 5$, $DW = 1.1$

Задача 11.5.

По 100 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$. Оказалось, что $RSS = 120$, $\hat{\varepsilon}_1 = -1$, $\hat{\varepsilon}_{100} = 2$, $\sum_{t=2}^{100} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1} = -50$. Найдите DW и ρ.

Задача 11.6.

Применяется ли статистика Дарбина-Уотсона для выявления автокорреляции в следующих моделях

1. $y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$
2. $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
3. $y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$
4. $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$
5. $y_t = \beta_1 t + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$
6. $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 x_t + \beta_4 x_{t-1} + \varepsilon_t$

Задача 11.7.

По 21 наблюдению была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(0.3)}{1.2} + \underset{(0.18)}{0.9} \cdot y_{t-1} + \underset{(0.01)}{0.1} \cdot t$, $R^2 = 0.6$, $DW = 1.21$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

Задача 11.8.

По 24 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(0.01)}{0.5} + \underset{(0.02)}{2} \cdot t$, $R^2 = 0.9$, $DW = 1.3$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

Задача 11.9.

По 32 наблюдениям была оценена модель линейной регрессии $\underset{(se)}{\hat{y}} = \underset{(2.5)}{10} + \underset{(0.5)}{2.5} \cdot t - \underset{(0.01)}{0.1} \cdot t^2$, $R^2 = 0.75$, $DW = 1.75$. Протестируйте гипотезу об отсутствии автокорреляции ошибок на уровне значимости 5%.

Задача 11.10.

Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$, где ε_t подчиняются автокорреляционной схеме первого порядка, т.е.

1. $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$, $-1 < \rho < 1$
2. $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = const$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = const$
3. $\mathrm{Var}(u_t) = \sigma^2$, $\mathbb{E}(u_t) = 0$
4. Величины u_t независимы между собой
5. Величины u_t и ε_s независимы, если $t \geqslant s$

Найдите:

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t)$, $\text{Var}(\varepsilon_t)$
2. $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$
3. $\text{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$

Задача 11.11.
Ошибки в модели $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ являются автокоррелированными первого порядка, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$. Шаман-эконометрист Ойуун выполняет два камлания-преобразования. Поясните смысл камланий:

1. Камлание А, при $t \geqslant 2$, Ойуун преобразует уравнение к виду $y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$
2. Камлание Б, при $t = 1$, Ойуун преобразует уравнение к виду $\sqrt{1-\rho^2}y_1 = \sqrt{1-\rho^2}\beta_1 + \sqrt{1-\rho^2}\beta_2 x_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_1$.

Задача 11.12.
Пусть y_t — стационарный процесс. Верно ли, что стационарны:

1. $z_t = 2y_t$
2. $z_t = y_t + 1$
3. $z_t = \Delta y_t$
4. $z_t = 2y_t + 3y_{t-1}$

Задача 11.13.
Известно, что временной ряд y_t порожден стационарным процессом, задаваемым соотношением $y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$. Имеется 1000 наблюдений. Вася построил регрессию y_t на константу и y_{t-1}. Петя построил регрессию на константу и y_{t+1}. Какие примерно оценки коэффициентов они получат?

Задача 11.14.
Рассмотрим следующий AR(1)-ARCH(1) процесс, $y_t = 1 + 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t = \nu_t \cdot \sigma_t$
ν_t независимые $N(0;1)$ величины.
$\sigma_t^2 = 1 + 0.8\varepsilon_{t-1}^2$
Также известно, что $y_{100} = 2$, $y_{99} = 1.7$

1. Найдите $\mathbb{E}_{100}(\varepsilon_{101}^2)$, $\mathbb{E}_{100}(\varepsilon_{102}^2)$, $\mathbb{E}_{100}(\varepsilon_{103}^2)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$
2. $\text{Var}(y_t)$, $\text{Var}(y_t|\mathcal{F}_{t-1})$
3. Постройте доверительный интервал для y_{101}:
   (a) проигнорировав условную гетероскедастичность
   (b) учтя условную гетерескедастичность

Задача 11.15.
Пусть x_t, $t = 0, 1, 2, ...$ - случайный процесс и $y_t = (1 + \text{L})^t x_t$. Выразите x_t с помощью y_t и оператора лага L.

Задача 11.16.
Пусть F_n - последовательность чисел Фибоначчи. Упростите величину

$$F_1 + C_5^1 F_2 + C_5^2 F_3 + C_5^3 F_4 + C_5^4 F_5 + C_5^5 F_6$$

Задача 11.17.
Пусть y_t, $t = ... - 2, -1, 0, 1, 2, ...$ - случайный процесс. И $y_t = x_{-t}$. Являются ли верными рассуждения?

1. $\text{L}y_t = \text{L}x_{-t} = x_{-t-1}$
2. $\text{L}y_t = y_{t-1} = x_{-t+1}$

Задача 11.18.
Представьте процесс AR(1), $y_t = 0.9y_{t-1} - 0.2y_{t-2} + \varepsilon_t$, ε ~WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

а) Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$

б) Выбрав в качестве состояний вектор $\begin{pmatrix} y_t \\ \hat{y}_{t,1} \end{pmatrix}$

Найдите дисперсии ошибок состояний

Задача 11.19.

Представьте процесс MA(1), $y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon \sim$WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

a) $\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} \\ 0.5\varepsilon_t \end{pmatrix}$

Задача 11.20.

Представьте процесс ARMA(1,1), $y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon \sim$WN(0;1) в виде модели состояние-наблюдение.

Вектор состояний имеет вид x_t, x_{t-1}, где $x_t = \frac{1}{1-0.5L}\varepsilon_t$

Задача 11.21.

Рекурсивные коэффициенты

1. Оцените модель вида $y_t = a + b_t x_t + \varepsilon_t$, где $b_t = b_{t-1}$.
2. Сравните графики filtered state и smoothed state.
3. Сравните финальное состояние b_T с коэффициентом в обычной модели линейной регрессии, $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$.

Задача 11.22.

Пусть u_t — независимые нормальные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Известно, что $\varepsilon_1 = u_1$, $\varepsilon_t = u_1 + u_2 + \ldots + u_t$. Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$.

1. Найдите $\mathrm{Var}(\varepsilon_t)$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s)$, $\mathrm{Var}(\varepsilon)$
2. Являются ли ошибки ε_t гетероскедастичными?
3. Являются ли ошибки ε_t автокоррелированными?
4. Предложите более эффективную оценку вектора коэффициентов регрессии по сравнению МНК-оценкой.
5. Результаты предыдущего пункта подтвердите симуляциями Монте-Карло на компьютере.

Задача 11.23.

Найдите безусловную дисперсию GARCH-процессов

1. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.1 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$
2. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.4 + 0.7\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$
3. $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.2 + 0.8\sigma_{t-1}^2 + 0.1\varepsilon_{t-1}^2$

Задача 11.24.

Являются ли верными следующие утверждения?

1. GARCH-процесс является процессом белого шума, условная дисперсия которого изменяется во времени
2. Модель GARCH(1,1) предназначена для прогнозирования меры изменчивости цены финансового инструмента, а не для прогнозирования самой цены инструмента
3. При помощи GARCH-процесса можно устранять гетероскедастичность
4. Безусловная дисперсия GARCH-процесса изменяется во времени
5. Модель GARCH(1,1) может быть использована для прогнозирования волатильности финансовых инструментов на несколько торговых недель вперёд

Задача 11.25.

Рассмотрим GARCH-процесс $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = k + g_1\sigma_{t-1}^2 + a_1\varepsilon_{t-1}^2$. Найдите

1. $\mathbb{E}(z_t)$, $\mathbb{E}(z_t^2)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$
2. $\mathrm{Var}(z_t)$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_t)$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$
3. $\mathbb{E}(\varepsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{E}(\sigma_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})$
4. $\mathbb{E}(z_t z_{t-1})$, $\mathbb{E}(z_t^2 z_{t-1}^2)$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2)$

5. $\lim_{h\to\infty} \mathbb{E}(\sigma^2_{t+h} \mid \mathcal{F}_t)$

Задача 11.26.

Используя 500 наблюдений дневных логарифмических доходностей y_t , была оценена GARCH(1,1)-модель: $\hat{y}_t = -0.000708 + \hat{\varepsilon}_t$, $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot z_t$, $\sigma_t^2 = 0.000455 + 0.6424\sigma^2_{t-1} + 0.2509\varepsilon^2_{t-1}$. Также известно, что $\hat{\sigma}^2_{499} = 0.002568$, $\hat{\varepsilon}^2_{499} = 0.000014$, $\hat{\varepsilon}^2_{500} = 0.002178$. Найдите

1. $\hat{\sigma}^2_{500}$, $\hat{\sigma}^2_{501}$, $\hat{\sigma}^2_{502}$
2. Волатильность в годовом выражении в процентах, соответствующую наблюдению с номером $t = 500$

Задача 11.27.

Докажите, что в условиях автокорреляции МНК- оценки остаются несмещенными.

Задача 11.28.

Продавец мороженного оценил динамическую модель объёмов продаж:

$$\ln \hat{Q}_t = 26.7 + 0.2 \ln \hat{Q}_{t-1} - 0.6 \ln P_t$$

Здесь Q_t — число проданных в день t вафельных стаканчиков, а P_t — цена одного стаканчика в рублях. Продавец также рассчитал остатки $\hat{e}_t$.

1. Чему, согласно полученным оценкам, равна долгосрочная эластичность объёма продаж по цене?
2. Предположим, что продавец решил проверить наличие автокорреляции первого порядка с помощью теста Бройша-Годфри. Выпишите уравнение регрессии, которое он должен оценить.

Задача 11.29.

Рассматривается модель $y_t = \mu + \varepsilon_t$, $t = 1, \ldots, T$, где $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$, случайные величины $\varepsilon_0, u_1, \ldots, u_T$ независимы, причем $\varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2/(1-\rho^2))$, $u_t \sim N(0, \sigma^2)$. Имеются наблюдения $y' = (1, 2, 0, 0, 1)$.

1. Выпишите функцию правдоподобия $\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1})$.
2. Максимизируя условную функцию правдоподобия $\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2|Y_1 = y_1) = \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1})$, найдите оценки неизвестных параметров модели.

Задача 11.30.

Была оценена AR(2) модель

$$\hat{y}_t = 2.3 + 0.8y_{t-1} - 0.2y_{t-2}$$

Дополнительно известно, что $se(\hat{\beta}_{y_{t-1}}) = 0.3$ и $\hat{\rho}_1 = 0.7$. Найдите $se(\hat{\beta}_{y_{t-2}})$ и $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_{y_{t-2}}, \hat{\beta}_{y_{t-1}})$.

Задача 11.31.

Рассмотрите следующие два утверждения:

(a) GARCH-процесс является слабо стационарным процессом,

(b) GARCH-процесс является процессом с изменяющейся во времени условной дисперсией.

Поясните смысл каждого из них. Объясните, почему между ними нет противоречия.

Задача 11.32.

Предложите способ, при помощи которого из моделей GARCH(1,1) и GARCH(2,1) можно выбрать лучшую.

Задача 11.33.

Опишите тест, при помощи которого можно выявить необходимость использовать GARCH-модель.

Задача 11.34.

Рассматривается GARCH(1,1)-процесс $\sigma_t^2 = 1 + 0.8 \cdot \sigma^2_{t-1} + 0.1 \cdot \varepsilon^2_{t-1}$. Известно, что $\sigma_T^2 = 9$, $\varepsilon_T = -2$. Найдите

(a) $\mathbb{E}[\sigma^2_{T+1}|\mathcal{F}_T]$,

(b) $\mathbb{E}[\sigma^2_{T+2}|\mathcal{F}_T]$,

(c) $\mathbb{E}[\sigma^2_{T+3}|\mathcal{F}_T]$.

Задача 11.35.
Рассмотрите два ряда цен интересующих вас финансовых инструментов, действующих в одной отрасли. Примером могут выступать цены обыкновенных акций Сбербанка и ВТБ. По данным для выбранных инструментов, содержащим не менее 250 наблюдений (за одни и тот же промежуток времени), рассчитайте при помощи GARCH-модели историческую волатильность в годовом выражении в процентах.

(a) В одних координатных осях постройте графики полученных волатильностей.
(b) На основании графика, построенного в пункте (a), сделайте качественный вывод относительно риска каждого финансового инструмента.
(c) Для каждого из выбранных инструментов постройте прогноз волатильности (в годовом выражении в процентах) на три торговых дня вперед.

12 Метод опорных векторов

Задача 12.1.
Имеются три наблюдения A, B и C:

	x	y
A	1	-2
B	2	1
C	3	0

1. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC
2. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC в расширенном пространстве с помощью гауссовского ядра с $\sigma = 1$.
3. Найдите расстояние AB и косинус угла ABC в расширенном пространстве с помощью полиномиального ядра второй степени

Задача 12.2.
Переход из двумерного пространства в расширяющее задан функцией

$$f : (x_1, x_2) \to (1, x_1, x_2, 3x_1x2, 2x_1^2, 4x_2^2)$$

Найдите соответствующую ядерную функцию
Задача 12.3.
Ядерная функция имеет вид

$$K(x, y) = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2$$

Как может выглядеть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ переводящие исходные векторы в расширенное пространство?
Задача 12.4.
Дана плоскость. На ней точки. Симметрично ох. Найдите разделяющую гиперплоскость при разных C.

13 Деревья и Random Forest

Задача 13.1.
Для случайных величин X и Y найдите индекс Джини и энтропию

X	0	1
$\mathbb{P}()$	0.2	0.8

,

Y	0	1	5
$\mathbb{P}()$	0.2	0.3	0.5

Задача 13.2.

Случайная величина X принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1-p$.

1. Постройте график зависимости индекса Джини и энтропии от p
2. При каком p энтропия и индекс Джини будут максимальны?

Задача 13.3.
табличка с тремя признаками...

1. Какой фактор нужно использовать при прогнозировании y, чтобы минимизировать энтропию?
2. Какой фактор нужно использовать при прогнозировании y, чтобы минимизировать индекс Джини?

14 Линейная алгебра

Задача 14.1.
Найдите каждую из следующих матриц в каждой из следующих степеней $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, -1, 100.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Задача 14.2.
Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую (перпендикуляр) вектора u_1 на линейное подпространство $L = \mathcal{L}(u_2)$, порождённое вектором u_2, если

1. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Задача 14.3.
Найдите обратные матрицы ко всем матрицам, представленным ниже.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 14.4.
Найдите ранг следующих матриц в зависимости от значений параметра λ.

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-2\lambda \\ 1+\lambda & 1+3\lambda \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$

Задача 14.5.
Пусть $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц и $\pi = i(i'i)^{-1}i'$. Найдите:

1. $\mathrm{tr}(\pi)$ и $\mathrm{rk}(\pi)$
2. $\mathrm{tr}(I - \pi)$ и $\mathrm{rk}(I - \pi)$

Задача 14.6.
Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, и пусть $\mathrm{rk}(X) = k$. Верно ли, что матрица $P = X(X'X)^{-1}X'$ симметрична и идемпотентна?

Задача 14.7.
Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, и пусть $\mathrm{rk}(X) = k$. Верно ли, что каждый столбец матрицы $P = X(X'X)^{-1}X'$ является собственным вектором матрицы P, отвечающим собственному значению 1?

Задача 14.8.
Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, пусть $\mathrm{rk}(X) = k$ и $P = X(X'X)^{-1}X'$. Верно ли, что каждый вектор-столбец u, такой что $X'u = 0$, является собственным вектором матрицы P, отвечающим собственному значению 0?

Задача 14.9.
Верно ли, что для любых матриц A размера $m \times n$ и матриц B размера $n \times m$ выполняется равенство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$?

Задача 14.10.
Верно ли, что собственные значения симметричной и идемпотентной матрицы могут быть только нулями и единицами?

Задача 14.11.
Пусть P — матрица размера $n \times n$, $P' = P$, $P^2 = P$. Верно ли, что $\mathrm{rk}(P) = \mathrm{tr}(P)$?

Задача 14.12.
Верно ли, что для симметричной матрицы собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны?

Задача 14.13.
Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $P = X(X'X)^{-1}X'$, если

1. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
2. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
3. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 14.14.
Приведите пример таких A и B, что $\det(AB) \neq \det(BA)$.

Задача 14.15.

Для матриц-проекторов $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$ и $P = X(X'X)^{-1}X'$ найдите $\operatorname{tr}(\pi)$, $\operatorname{tr}(P)$, $\operatorname{tr}(I-\pi)$, $\operatorname{tr}(I-P)$.

Задача 14.16.

Выпишите в явном виде матрицы $X'X$, $(X'X)^{-1}$ и $X'y$, если

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ и $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$

Задача 14.17.

Выпишите в явном виде матрицы π, πy, $\pi\varepsilon$, $I-\pi$, если $\pi = \vec{1}(\vec{1}'\vec{1})^{-1}\vec{1}'$.

Задача 14.18.

Формула Фробениуса. Матрицу A размера $(n+m)\times(n+m)$ разрезали на 4 части: $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Кусок A_{11} имеет размер $n\times n$ и обратим, кусок A_{22} имеет размер $m\times m$. Известно, что A — обратима и $A^{-1} = B$. На аналогичные по размеру и расположению части разрезали матрицу $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$.

1. Каковы размеры кусков A_{12} и A_{21}?
2. Чему равно $B_{22}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$?

Задача 14.19.

Спектральное разложение. Симметричная матрица A размера $n\times n$ имеет n собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с собственными векторами $u_1, \ldots, u_n$. Докажите, что A можно представить в виде $A = \sum \lambda_i u_i u_i'$.

Задача 14.20.

Найдите определитель, след, собственные значения, собственные векторы и число обусловленности матрицы A. Также найдите A^{-1}, $A^{-1/2}$ и $A^{1/2}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Задача 14.21.

В этом упражнении исследуется связь определителя, следа и собственных значений. Везде имеются ввиду действительные собственные значения с учетом кратности.

1. Приведите пример матрицы для которой след равен сумме собственных значений.
2. Приведите пример матрицы для которой след не равен сумме собственных значений.
3. Верно ли, что для симметричной матрицы след всегда равен сумме собственных значений?
4. Приведите пример матрицы для которой определитель равен произведению собственных значений.
5. Приведите пример матрицы для которой определитель не равен произведению собственных значений.
6. Верно ли, что для симметричной матрицы определитель всегда равен произведению собственных значений?

15 Случайные векторы

Задача 15.1.
Пусть $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)'$ — случайный вектор доходностей пяти ценных бумаг. Известно, что $\mathbb{E}(y') = (5, 10, 20, 30, 40)$, $\mathrm{Var}(y_1) = 0$, $\mathrm{Var}(y_2) = 10$, $\mathrm{Var}(y_3) = 20$, $\mathrm{Var}(y_4) = 40$, $\mathrm{Var}(y_5) = 40$ и

$$\mathrm{Corr}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.3 & -0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 1 & 0.3 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & -0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

С помощью компьютера найдите ответы на вопросы:

1. Какая ценная бумага является безрисковой?
2. Найдите ковариационную матрицу $\mathrm{Var}(y)$
3. Найдите ожидаемую доходность и дисперсию доходности портфеля, доли ценных бумаг в котором равны соответственно:
   (a) $\alpha = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)'$
   (b) $\alpha = (0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4)'$
   (c) $\alpha = (0.0, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1)'$
4. Составьте из данных бумаг пять некоррелированных портфелей

Задача 15.2.
Пусть $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)' \sim N(0, I)$.

1. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'\pi\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon)$ и $\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')$
2. Как распределены случайные величины $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon$?
3. Запишите выражения $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon$, используя знак суммы

Задача 15.3.
Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$

Задача 15.4.

Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0,1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon' P \varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' P \varepsilon)$
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon' P \varepsilon > q) = 0.1$

Задача 15.5.

Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0,1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon' P \varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$.
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' P \varepsilon)$.
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon' P \varepsilon > q) = 0.1$.

Задача 15.6.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Var}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(y)$, $\operatorname{Var}(y)$ и $\mathbb{E}(z)$, если

1. $y = x - \mathbb{E}(x)$
2. $y = \operatorname{Var}(x) x$
3. $y = \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$
4. $y = \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$
5. $y = \operatorname{Var}(x)^{-1/2}(x - \mathbb{E}(x))$
6. $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$
7. $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$
8. $z = x' \operatorname{Var}(x) x$
9. $z = x' \operatorname{Var}(x)^{-1} x$

Задача 15.7.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Var}(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(y)$, $\operatorname{Var}(y)$ и $\mathbb{E}(z)$, если

1. $y = x - \mathbb{E}(x)$
2. $y = \operatorname{Var}(x) x$
3. $y = \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$
4. $y = \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$
5. $y = \operatorname{Var}(x)^{-1/2}(x - \mathbb{E}(x))$
6. $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$
7. $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$
8. $z = x' \operatorname{Var}(x) x$
9. $z = x' \operatorname{Var}(x)^{-1} x$

Задача 15.8.

Известно, что случайные величины x_1, x_2 и x_3 имеют следующие характеристики:

1. $\mathbb{E}(x_1) = 5$, $\mathbb{E}(x_2) = 10$, $\mathbb{E}(x_3) = 8$
2. $\operatorname{Var}(x_1) = 6$, $\operatorname{Var}(x_2) = 14$, $\operatorname{Var}(x_3) = 1$
3. $\operatorname{Cov}(x_1, x_2) = 3$, $\operatorname{Cov}(x_1, x_3) = 1$, $\operatorname{Cov}(x_2, x_3) = 0$

Пусть случайные величины y_1, y_2 и y_3, представляют собой линейные комбинации случайных величин X_1, X_2 и X_3:

$$y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

$$y_2 = 7x_1 - 4x_2 + x_3$$

$$y_3 = -2x_1 - x_2 + 4x_3$$

1. Выпишите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$
2. Напишите матрицу A, которая позволяет перейти от случайного вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ к случайному вектору $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^T$
3. С помощью матрицы A найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^T$

Задача 15.9.

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — случайные величины, такие что $\mathrm{Var}(\xi_1) = 2$, $\mathrm{Var}(\xi_2) = 3$, $\mathrm{Var}(\xi_3) = 4$, $\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 1$, $\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_3) = -1$, $\mathrm{Cov}(\xi_2, \xi_3) = 0$. Пусть $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}^T$. Найдите $\mathrm{Var}(\xi)$ и $\mathrm{Var}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$.

Задача 15.10.

Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $z_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(z_1)$ и $\mathrm{Var}(z_1)$.

Задача 15.11.

Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $z_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(z_2)$ и $\mathrm{Var}(z_2)$

Задача 15.12.

Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $z_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(z_3)$ и $\mathrm{Var}(z_3)$

Задача 15.13.

Пусть r_1, r_2 и r_3 — годовые доходности трёх рисковых финансовых инструментов. Пусть α_1, α_2 и α_3 — доли, с которыми данные инструменты входят в портфель инвестора. Считаем, что $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ и $\alpha_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, 2, 3$. Пусть $r = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}^T$, $\mathbb{E}(r) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^T$, $\mathrm{Var}(r) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$. Параметры $\{a_i\}$ и $\{c_i\}$ известны.

1. Найдите годовую доходность портфеля П инвестора
2. Докажите, что дисперсия доходности портфеля П равна $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_i c_{ij} \alpha_j$
3. Для случая $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha 3 = 0.4$, $\mathbb{E}(r) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.06 & 0.05 \end{pmatrix}^T$, $\mathrm{Var}(r) = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & -0.005 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ -0.005 & 0 & 0.0025 \end{pmatrix}$ найдите $\mathbb{E}(\Pi)$ и $\mathrm{Var}(\Pi)$

Задача 15.14.

Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $z_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}$; $z_4 = \mathrm{Var}(h)^{-1/2} z_3$. Найдите $\mathbb{E}(z_4)$ и $\mathrm{Var}(z_4)$

Задача 15.15.

Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $z_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}$; $z_4 = \mathrm{Var}(h)^{-1/2} z_3$. Найдите $\mathbb{E}(z_4)$ и $\mathrm{Var}(z_4)$

Задача 15.16.

Случайные величины w_1 и w_2 независимы с нулевым ожиданием и единичной дисперсией. Из них составлено два вектора, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ и $z = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$

1. Являются ли векторы w и z перпендикулярными?
2. Найдите $\mathbb{E}(w)$, $\mathbb{E}(z)$

3. Найдите $\operatorname{Var}(w)$, $\operatorname{Var}(z)$, $\operatorname{Cov}(w, z)$

Задача 15.17.

Есть случайный вектор $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)'$.

1. Возможно ли, что $E(w) = 0$ и $\sum w_i = 0$?
2. Возможно ли, что $E(w) \neq 0$ и $\sum w_i = 0$?
3. Возможно ли, что $E(w) = 0$ и $\sum w_i \neq 0$?
4. Возможно ли, что $E(w) \neq 0$ и $\sum w_i \neq 0$?

Задача 15.18.

Известна ковариационная матрица вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,

$$\operatorname{Var}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Найдите четыре различных матрицы A, таких что вектор $v = A\varepsilon$ имеет некоррелированные компоненты с единичной дисперсией, то есть $\operatorname{Var}(A\varepsilon) = I$.

16 Многомерное нормальное распределение и квадратичные формы

Задача 16.1.

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim N(0, I)$ и матрица A представлена ниже. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' A \varepsilon)$ и распределение случайной величины $\varepsilon' A \varepsilon$.

1. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 16.2.

Пусть $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)' \sim N(0, I)$.

1. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'\pi\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon)$ и $\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')$
2. Как распределены случайные величины $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$?
3. Запишите выражения $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$, используя знак суммы

Задача 16.3.

Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$

Задача 16.4.

Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$

Задача 16.5.

Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.

1. Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$.
2. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$.
3. При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$.

Задача 16.6.

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim N(0, I)$. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$ и распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, если $P = X(X'X)^{-1}X'$ и матрица X' представлена ниже.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 16.7.

Пусть $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \sim N(0, \sigma^2 I)$, $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$, X — матрица размера $n \times k$, $P = X(X'X)^{-1}X'$. Найдите:

1. $\mathbb{E}(\varepsilon'(P - \pi)\varepsilon)$
2. $\mathbb{E}(\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon)$
3. $\mathbb{E}(\varepsilon' P \varepsilon)$
4. $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2)$

Задача 16.8.

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim N(0, 4I)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите:

1. $\mathbb{E}(\varepsilon' A \varepsilon)$
2. $\mathbb{E}(\varepsilon'(I - A)\varepsilon)$

Задача 16.9.

Пусть $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ — случайный вектор, имеющий двумерное нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Найдите Σ^{-1}
2. Найдите $\Sigma^{-1/2}$
3. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $y = \Sigma^{-1/2} \cdot (x - \mu)$
4. Какое распределение имеет вектор y из предыдущего пункта?
5. Найдите распределение случайной величины $q = (x - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu)$

Задача 16.10.

Пусть $z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}^T \sim N(0, I_{3x3})$, $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$,
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

1. Найдите $\mathbb{E}x$ и $\operatorname{Var}(x)$ случайного вектора $x = A \cdot z + b$
2. Найдите распределение случайного вектора x
3. Найдите $\mathbb{E}q$ случайной величины $q = z^T \cdot K \cdot z$
4. Найдите распределение случайной величины q

Задача 16.11.

Известно, что $\varepsilon \sim N(0, I)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)'$. Матрица $A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

1. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' A \varepsilon)$
2. Как распределена случайная величина $\varepsilon' A \varepsilon$?

Задача 16.12.

Известно, что $\varepsilon \sim N(0, A)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$. Матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, матрица $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Как распределен вектор $h = B\varepsilon$?
2. Найдите $A^{-1/2}$
3. Как распределен вектор $u = A^{-1/2}\varepsilon$?

17 Задачи по программированию

Все наборы данных доступны по ссылке https://github.com/bdemeshev/em301/wiki/Datasets.

Задача 17.1.

Начиная с какого знака в числе $\pi = 3.1415\ldots$ можно обнаружить твой номер телефона? Первый 10 миллионов знаков числа π можно найти на сайте http://code.google.com/p/pc2012-grupo-18-turma-b/downloads/list. Если не хватает, то миллиард знаков, файл размера примерно в 1 гигабайт, доступен по ссылке http://stuff.mit.edu/afs/sipb/contrib/pi/. Настоящие челябинцы рассчитывают π самостоятельно. Краткая история о том, как маньяки считали π до 10 миллиардов знаков и потеряли полгода из-за сбоев компьютерного железа, http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-10t/details.html.

Задача 17.2.

Отряд Иосифа Флавия из 40 воинов, защищающий город Йодфат, блокирован в пещере превосходящими силам римлян. Чтобы не сдаться врагу, воины стали по кругу и договорились, что сами будут убивать каждого третьего, пока не погибнут все. При этом двое воинов, оставшихся последними в живых, должны были убить друг друга. Хитренький Иосиф Флавий, командующий этим отрядом, хочет определить, где нужно встать ему и его товарищу, чтобы остаться последними. Не для того, чтобы убить друг друга, а чтобы сдать крепость римлянам. Напишите программу, которая для n воинов вставших в круг определяет, какие двое останутся последними, если будут убивать каждого k-го.

Задача 17.3.

Напишите программу, которая печатает сама себя.

Задача 17.4.

Задача Макар-Лиманова. У торговца 55 пустых стаканчиков, разложенных в несколько стопок. Пока нет покупателей он развлекается: берет верхний стаканчик из каждой стопки и формирует из них новую стопку. Потом снова берет верхний стаканчик из каждой стопки и формирует из них новую стопку и т.д.

1. Напишите функцию `makar_step`. На вход функции подаётся вектор количества стаканчиков в каждой стопке до перекладывания. На выходе функция возвращает количества стаканчиков в каждой стопке после одного перекладывания.
2. Изначально стаканчики были разложены в две стопки, из 25 и 30 стаканчиков. Как разложатся стаканчики если покупателей не будет достаточно долго?

Задача 17.5.

Напишите программу, которая находит сумму элементов побочной диагонали квадратной матрицы.

Задача 17.6.

Напишите функцию, которая по матрице X и вектору y для модели $Y = X\beta + \varepsilon$ вычисляет значение статистики Дарбина-Уотсона.

Задача 17.7.

Напишите функцию, которая по матрице X и вектору y для модели $Y = X\beta + \varepsilon$ вычисляет оценки дисперсии коэффициентов, скорректированные на гетероскедастичность по формуле Уайта

$$\widehat{\mathrm{Var}}_{White}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 \hat{u}_{ij}^2}{RSS_j},$$

где $\hat{u}_{ij}$ — остатки в линейной регрессии фактора x_j на остальные регрессоры, а RSS_j — сумма квадратов остатков в этой регрессионной модели.

Задача 17.8.

Напишите функцию, которая по матрице X и вектору y для модели $Y = X\beta + \varepsilon$ вычисляет оценки ковариационной матрицы коэффициентов, скорректированную на гетероскедастичность по формуле Уайта:

$$\widehat{\mathrm{Var}}_{White}(\hat{\beta}_{OLS}) = (X'X)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 X_{i\cdot}' X_{i\cdot} \right) (X'X)^{-1},$$

где $X_{i\cdot}$ — i-ая строка матрицы X.

Задача 17.9.

Напишите программу, которая по заданной матрице регрессоров X возвращает матрицу Z , столбцами которой являются все столбцы матрицы X , «квадраты» столбцов матрицы X, а также перекрестные «произведения» столбцов матрицы X.

Задача 17.10.

Напишите функцию, которая по матрице X и вектору y возвращает значение статистики Уайта.

Задача 17.11.

Напишите функцию, которая по матрице X, вектору y и уровню значимости реализует тест Уайта.

Задача 17.12.

Напишите функцию, которая по матрице X, вектору y и количеству лагов L находит оценку ковариационной матрицу коэффициентов, скорректированную на гетероскедастичность и автокорреляцию по формуле Невье-Веста:

$$\widehat{\mathrm{Var}}_{NW}(\hat{\beta}_{OLS}) = (X'X)^{-1}\hat{S}(X'X)^{-1},$$

где

$$\hat{S} = \sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2 X_{t\cdot}' X_{t\cdot} + \sum_{j=1}^{L} w_j \left(\sum_{t=j+1}^{n} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-j} (X_{t\cdot}' X_{t-j\cdot} + X_{t-j\cdot}' X_{t\cdot}) \right),$$

где ε_t — остатки в регрессии $y = X\beta + \varepsilon$, а $X_{t\cdot}$ — строка номер t матрицы X. Напишите две версии данной функции, для разных способов рассчета весов w_j:

1. $w_j = 1 - j/L$
2. $$w_j = \begin{cases} 1 - \frac{6j^2}{(1+L)^2} + \frac{6j^3}{(1+L)^3}, \text{ если } j \leqslant (1+L)/2 \\ 2\left(1 - \frac{j}{1+L}\right)^2, \text{ если } j > (1+L)/2 \end{cases}$$

18 Устав проверки гипотез

1. Условия применимости теста
2. Формулировка H_0, H_a и уровня значимости α
3. Формула расчета и наблюдаемое значения статистики, S_{obs}
4. Закон распределения S_{obs} при верной H_0
5. Область в которой H_0 не отвергается
6. Точное P-значение
7. Статистический вывод о том, отвергается ли H_0 или нет.

В качестве статистического вывода допускается только одна из двух фраз:

- Гипотеза H_0 отвергается
- Гипотеза H_0 не отвергается

Остальные фразы считаются неуставными

19 Решения

1.1. да, да, да, нет
1.2.
1.3.
1.4.
1.5. $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 0$ и $\hat{\beta} + \hat{\delta} = 1$
1.6.
1.7.
1.8. $\hat{\beta} = \sum x_i y_i / \sum x_i^2$
1.9. $\hat{\beta} = \bar{y}$
1.10. $\hat{\beta}_2 = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum (x_i - \bar{x})^2$, $\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}$
1.11. $\hat{\beta} = \sum x_i (y_i - 1) / \sum x_i^2$
1.12. $(300 - \hat{\beta}_1)^2 + (200 - \hat{\beta}_2)^2 + (400 - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)^2 \to \min$
1.13. $2 \cdot (10 - \hat{\beta})^2 + (3 - \hat{\beta})^2 \to \min$
1.14.
1.15. да, возможно. Два вытянутых облачка точек. Первое облачко даёт первую регрессию, второе — вторую. Прямая, соединяющая центры облачков, — общую.
1.16. Нет. Коэффициенты можно интерпретировать только «при прочих равных», т.е. при равных x. Из-за разных x может оказаться, что у мужчин $\bar{y}$ меньше, чем $\bar{y}$ для женщин.
1.17.
1.18.
1.19. Оценки МНК линейны по объясняемой переменной. Если сложить объясняемые переменные в этих двух моделях, то получится вектор из единичек. Если строить регрессию вектора из единичек на константу и r, то получатся оценки коэффициентов 1 и 0. Значит, $\hat{\beta}_1 + \hat{\gamma}_1 = 1$, $\hat{\beta}_2 + \hat{\gamma}_2 = 0$
1.20. Увеличатся в 100 раз
1.21. да
1.22. $R^2 = 0$
1.23. $TSS_1 = TSS_2$, $R_2^2 \geqslant R_2^1$, $ESS_2 \geqslant ESS_1$, $RSS_2 \leqslant RSS_1$
1.24.
1.25. $y_i^* = 7 + 3(y_i - \bar{y})/s_y$
2.1.
2.2.
2.3. $c_i = c \cdot x_i$, где $c \neq 0$
2.4.
2.5.
2.6.
2.7.
2.8.
2.9.
2.10.
2.11.
2.12.
2.13. Через теорему Гаусса–Маркова или через условную минимизацию, $c_i = 1/n$
2.14.
2.15.
2.16.

1. $\hat{\beta} = \frac{\sum y_t t}{\sum t^2}$
2. $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T} t^2}$

3. Да, состоятельна

2.17. несостоятельна

2.18.

2.19. Вроде бы равносильно переносу начала координат и применению результата для регрессии без свободного члена. Должна остаться несмещенность.

2.20.

2.21. Не прав. Ковариация $\mathrm{Cov}(y_i, \hat{y}_i)$ зависит от i, это не одно неизвестное число, для которого можно предложить одну оценку.

2.22. формула $\sum (y_i - \bar{y})^2/(n-1)$ неприменима так как $\mathbb{E}(y_i)$ не является константой

2.23. R^2 — это отношение выборочных дисперсий $\hat{y}$ и y.

2.24. Как отсутствие систематической ошибки.

2.25. нет, нет, нет

2.26. $RSS/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-k}$, $\mathbb{E}(RSS) = (n-k)\sigma^2$, $\mathrm{Var}(RSS) = 2(n-k)\sigma^4$, $\mathbb{P}(10\sigma^2 < RSS < 30\sigma^2) \approx 0.898$

2.27.

2.28.

2.29.

2.30. Можно взять четыре наблюдения равноотстоящих по вертикали от данной прямой. Подбирая остатки, добиваемся нужного R^2.

2.31. $\hat{\beta}_1 = -4890$ и $\hat{\beta}_2 = 2.5$

$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \dots & \dots \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$ — матрица исходных регрессоров; $\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1+1994 \\ 1 & 2+1994 \\ \dots & \dots \\ 1 & 12+1994 \end{bmatrix}$ — матрица новых регрессоров.

$\tilde{X} = X \cdot D$, где $D = \begin{bmatrix} 1 & 1994 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Итак, уравнение регрессии с новыми регрессорами имеет вид $y = \tilde{X}\beta + \varepsilon$ и МНК-оценки коэффициентов равны

$$\hat{\beta} = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T y = \left([XD]^T[XD]\right)^{-1}[XD]^T y = D^{-1}(X^TX)^{-1}(D^T)^{-1}D^TX^Ty = D^{-1}(X^TX)^{-1}X^Ty$$

$$\hat{\beta} = D^{-1}\hat{\beta}_{old} = \begin{bmatrix} 1 & -1994 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 95 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4890 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

2.32. Мы можем существенно упростить решение, воспользовавшись матричным представлением:

$$\tilde{\beta}_2^a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix} y$$

$$\mathbb{E}\tilde{\beta}_2^a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}y_i}{x_i} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{E}y_1 \\ \mathbb{E}y_2 \\ \vdots \\ \mathbb{E}y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 x_1 \\ \beta_1 + \beta_2 x_2 \\ \vdots \\ \beta_1 + \beta_2 x_n \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}\left[\beta_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right] = \frac{\beta_1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} + \beta_2$$

Значит, смещение для первой оценки равно $\frac{\beta_1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$.

$\mathrm{Var}(\tilde\beta_2^a) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix} y) = \frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\mathrm{Var}(y)\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}^T = \frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\mathrm{Var}(\varepsilon)\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}^T = \frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\sigma_\varepsilon^2 I\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}^T = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n^2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2}$

Перейдём ко второй оценке.

$\tilde\beta_2^b = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \frac{1}{\overline{x}}\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix} y$

$\mathbb{E}\tilde\beta_2^b = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \frac{1}{\overline{x}}\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\mathbb{E}y = \frac{1}{\overline{x}}\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1+\beta_2x_1\\ \beta_1+\beta_2x_2\\ \vdots\\ \beta_1+\beta_2x_n\end{bmatrix} =$

$\frac{1}{\overline{x}}\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\left[\beta_1\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} + \beta_2\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}\right] = \frac{1}{n}\frac{\beta_1 n}{\overline{x}} + \frac{1}{n}\frac{\beta_2\sum x_i}{\overline{x}} = \frac{\beta_1}{\overline{x}} + \beta_2$

Значит, смещение равно $\frac{\beta_1}{\overline{x}}$.

$\mathrm{Var}(\tilde\beta_2^b) = \frac{1}{\overline{x}^2}\frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\mathrm{Var}(y)\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\overline{x}^2}\frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\mathrm{Var}(\varepsilon)\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\overline{x}^2 n}$

2.33. Известно, что для парной регрессии $t_{\hat\beta_2}^2 = \frac{R^2}{(1-R^2)/(n-2)}$. Поэтому из выражения $t_{\hat\beta_2}^2 = \frac{0.05^2}{(1-0.05^2)/(n-2)} = \frac{0.05^2(n-2)}{1-0.05^2}$ становится очевидным, что при надлежащем выборе числа наблюдений можно сделать величину $t_{\hat\beta_2}$ сколь угодно большой.

2.34. Пусть $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда $Y_i = \hat\beta_1 + \hat\beta_2 X_i + \hat\varepsilon_i$

$Y_i - \overline{Y} + \overline{Y} = \hat\beta_1 + \hat\beta_2(X_i - \overline{X} + \overline{X}) + \hat\varepsilon_i$

$Y_i - \overline{Y} = \underbrace{\hat\beta_1 - \overline{Y} + \hat\beta_2\overline{X}}_{=0} + \hat\beta_2(X_i - \overline{X}) + \hat\varepsilon_i$

$Y_i - \overline{Y} = \hat\beta_2(X_i - \overline{X}) + \hat\varepsilon_i$

$y_i \equiv Y_i - \overline{Y}$, $i = 1, \dots, n$

$x_i \equiv X_i - \overline{X}$, $i = 1, \dots, n$

$y_i = \hat\beta_2 x_i + \hat\varepsilon_i$

$\mathbf{y} = \hat\beta_2\mathbf{x} + \hat\varepsilon$, где $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}y_1 & \dots & y_n\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1 & \dots & x_n\end{bmatrix}^T$, $\varepsilon = \begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_n\end{bmatrix}^T$

$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \hat\beta_2\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{x}^T\hat\varepsilon}_{=0}$

$$\hat\beta_2 = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \tag{5}$$

Аналогично получаем, что в обратной регрессии $X_i = \beta_3 + \beta_4 Y_i + \xi_i$, $i = 1, \dots, n$

$$\hat\beta_4 = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}} \tag{6}$$

$ESS = (\hat Y - \overline{Y}_i)^T(\hat Y - \overline{Y}_i)$

Заметим, что $\hat Y - \overline{Y}_i = (I - \pi)(\hat Y - \overline{Y}_i)$.

Действительно, $(I-\pi)(P-\pi) = P - \pi$, следовательно,

$\hat Y - \overline{Y}_i = (P-\pi)Y = (I-\pi)(P-\pi)Y = (I-\pi)(\hat Y - \overline{Y}_i)$.

Далее, $\hat Y - \overline{Y}_i = (I-\pi)(\hat Y - \overline{Y}_i) = (I-\pi)(\hat\beta_1 + \hat\beta_2 X - \overline{Y}_i) = \hat\beta_2\mathbf{x}$

Значит, $ESS = \hat\beta_2^2\mathbf{x}^T\mathbf{x}$.

Получаем:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}_2^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x}^{(2)}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}^{(2)}}{(\mathbf{x}^T \mathbf{x})(\mathbf{y}^T \mathbf{y})} = \mathrm{Corr}^2(X, Y) \tag{7}$$

Заметим также, что из формул (5), (6) и (7) следует, что $R^2 = \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_4$.
Если $\mathrm{Corr}^2(X,Y) = 1$, то $R^2 = \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_4 = 1$.
Отметим также, что из $R^2 = 1$ следует, что $\hat{\varepsilon}_1 = \ldots = \hat{\varepsilon}_n = 0$ и $\hat{\xi}_1 = \ldots = \hat{\xi}_n = 0$.
Тогда $Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \underbrace{\hat{\varepsilon}_i}_{=0}$ и $X_i = \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 Y_i + \underbrace{\hat{\xi}_i}_{=0}$, $i = 1, \ldots, n$.
$X_i = \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 Y_i = (\overline{X} - \hat{\beta}_4 \overline{Y}) + \hat{\beta}_4 Y_i = \left(\overline{X} - \frac{1}{\hat{\beta}_2}\overline{Y}\right) + \frac{1}{\hat{\beta}_2} Y_i$
$\hat{\beta}_2 X_i = (\hat{\beta}_2 \overline{X} - \overline{Y}) + Y_i$
$Y_i = (\overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}) + \hat{\beta}_2 X_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$
Следовательно, в случае когда $\mathrm{Corr}^2(X,Y) = 1$, линия парной регрессии Y на X совпадает с линией парной регрессии X на Y.
2.35. Да, если строить регрессию функции от y на функцию от x. А если строить регрессию просто y на x, то оценка наклона будет распределена симметрично около нуля.
2.36. Да, является. Любые, кроме констант. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{2,IV}) = \sigma^2 \sum (z_i - \bar{z})^2 / \left(\sum (z_i - \bar{z}) x_i\right)^2$.
2.37.
2.38. Вспомните про t, χ^2, F распределения
3.1. t-статистики
3.2.

1. Поскольку $\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-k)}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2(n-k)$, где $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{RSS}{n-k}$, $k = 5$. $P(\chi_l^2 < \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2} < \chi_u^2) = 0.8$. Преобразовав, получим $P(\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-5)}{\chi_u^2} < \sigma_\varepsilon^2 < \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-5)}{\chi_l^2}) = 0.8$, где $\chi_u^2 = \chi_{n-5;0.1}^2$, $\chi_l^2 = \chi_{n-5;0.9}^2$ — соответствующие квантили. По условию $\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-5)}{\chi_l^2} = A = 45$, $\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-5)}{\chi_u^2} = B = 87.942$. Поделим B на A, отсюда следует $\frac{\chi_u^2}{\chi_l^2} = 1.95426$. Перебором квантилей в таблице для хи-квадрат распределения мы находим, что $\frac{\chi_{30;0.1}^2}{\chi_{30;0.9}^2} = \frac{40.256}{20.599} = 1.95426$. Значит, $n - 5 = 30$, отсюда следует, что $n = 35$.
2. $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 45 \frac{\chi_u^2}{n-5} = 45 \frac{40.256}{30} = 60.384$

Решение в R:

```
df <- 1:200
a <- qchisq(0.1,df)
b <- qchisq(0.9,df)
c <- b/a
d <- 87.942/45
penalty <- (c-d)^2
df.ans <- df[which(penalty==min(penalty))]
```

Количество степеней свободы $n - 5$ должно быть равно `df.ans` $= 30$.
3.3.
Упорядочим нашу выборку таким образом, чтобы наблюдения с номерами с 1 по 35 относились к мужчинам, а наблюдения с номерами с 36 по 58 относились к женщинам. Тогда уравнение

$$\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 Edu_i + \beta_3 Exp_i + \beta_4 Exp_i^2 + \beta_5 Fedu_i + \beta_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 35$$

соответствует регрессии, построенной для подвыборки из мужчин, а уравнение

$$\ln W_i = \gamma_1 + \gamma_2 Edu_i + \gamma_3 Exp_i + \gamma_4 Exp_i^2 + \gamma_5 Fedu_i + \gamma_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 36, ..., 58$$

соответствует регрессии, построенной для подвыборки из женщин. Введем следующие переменные:

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{–ое наблюдение соответствует мужчине,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$dum_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{–ое наблюдение соответствует женщине,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим следующее уравнение регрессии:

$$\ln W_i = \beta_1 d_i + \gamma_1 dum_i + \beta_2 Edu_i d_i + \gamma_2 Edu_i dum_i + \beta_3 Exp_i d_i + \gamma_3 Exp_i dum_i + \beta_4 Exp_i^2 d_i +$$

$$+\gamma_4 Exp_i^2 dum_i + \beta_5 Fedu_i d_i + \gamma_5 Fedu_i dum_i + \beta_6 Medu_i d_i + \gamma_6 Medu_i dum_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 58$$

Гипотеза, которую требуется проверить в данной задаче, имеет вид

$$H_0 : \begin{cases} \beta_1 = \gamma_1, \\ \beta_2 = \gamma_2, \\ \dots \\ \beta_6 = \gamma_6 \end{cases} \quad H_1 : |\beta_1 - \gamma_1| + |\beta_2 - \gamma_2| + \dots + |\beta_6 - \gamma_6| > 0.$$

Тогда регрессия

$$\ln W_i = \beta_1 d_i + \gamma_1 dum_i + \beta_2 Edu_i d_i + \gamma_2 Edu_i dum_i + \beta_3 Exp_i d_i + \gamma_3 Exp_i dum_i + \beta_4 Exp_i^2 d_i +$$

$$+\gamma_4 Exp_i^2 dum_i + \beta_5 Fedu_i d_i + \gamma_5 Fedu_i dum_i + \beta_6 Medu_i d_i + \gamma_6 Medu_i dum_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 58$$

по отношению к основной гипотезе H_0 является регрессией без ограничений, а регрессия

$$\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 Edu_i + \beta_3 Exp_i + \beta_4 Exp_i^2 + \beta_5 Fedu_i + \beta_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 58$$

является регрессией с ограничениями.
Кроме того, для решения задачи должен быть известен следующий факт:
$RSS_{UR} = RSS_1 + RSS_2$, где RSS_{UR} — это сумма квадратов остатков в модели:

$$\ln W_i = \beta_1 d_i + \gamma_1 dum_i + \beta_2 Edu_i d_i + \gamma_2 Edu_i dum_i + \beta_3 Exp_i d_i + \gamma_3 Exp_i dum_i + \beta_4 Exp_i^2 d_i +$$

$$+\gamma_4 Exp_i^2 dum_i + \beta_5 Fedu_i d_i + \gamma_5 Fedu_i dum_i + \beta_6 Medu_i d_i + \gamma_6 Medu_i dum_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 58$$

RSS_1 — это сумма квадратов остатков в модели:

$$\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 Edu_i + \beta_3 Exp_i + \beta_4 Exp_i^2 + \beta_5 Fedu_i + \beta_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 35$$

RSS_2 — это сумма квадратов остатков в модели:

$$\ln W_i = \gamma_1 + \gamma_2 Edu_i + \gamma_3 Exp_i + \gamma_4 Exp_i^2 + \gamma_5 Fedu_i + \gamma_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 36, ..., 58$$

1. Тестовая статистика:

$$T = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-m)},$$

   где RSS_R – сумма квадратов остатков в модели с ограничениями;
   RSS_{UR} – сумма квадратов остатков в модели без ограничений;
   q – число линейно независимых уравнений в основной гипотезе H_0;
   n – общее число наблюдений;
   m – число коэффициентов в модели без ограничений

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0:

$$T \sim F(q, n-m)$$

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики:

$$T_{obs} = \frac{(70.3 - (34.4 + 23.4))/6}{(34.4 + 23.4)/(58 - 12)} = 1.66$$

4. Область, в которой H_0 не отвергается:

$$[0; T_{cr}] = [0; 2.3]$$

5. Статистический вывод:
Поскольку $T_{obs} \in [0; T_{cr}]$, то на основе имеющихся данных мы не можем отвергнуть гипотезу H_0 в пользу альтернативной H_1. Следовательно, имеющиеся данные не противоречат гипотезе об отсутствии дискриминации на рынке труда между мужчинами и женщинами.

3.4.
3.5.
3.6.
3.7.
3.8.
3.9.
3.10.
3.11.
3.12.
3.13.
3.14.
3.15.
3.16.
3.17.
3.18.
3.19. значим
3.20. не значим
3.21. $\alpha > 0.09$
3.22.
3.23.
3.24.
Ограниченная модель (Restricted model):

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \varepsilon_i$$

Неограниченная модель (Unrestricted model):

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \beta_{Fedu} Fedu_i + \beta_{Medu} Medu_i + \varepsilon_i$$

По условию $ESS_R = 90.3$, $RSS_R = 60.4$, $TSS = ESS_R + RSS_R = 90.3 + 60.4 = 150.7$. Также сказано, что $ESS_{UR} = 110.3$. Значит, $RSS_{UR} = TSS - ESS_{UR} = 150.7 - 110.3 = 40.4$

1. Спецификация:

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \beta_{Fedu} Fedu_i + \beta_{Medu} Medu_i + \varepsilon_i$$

2. Проверка гипотезы

(a) $H_0 : \begin{cases} \beta_{Fedu} = 0 \\ \beta_{Medu} = 0 \end{cases} \quad H_a : |\beta_{Fedu}| + |\beta_{Medu}| > 0$

(b) $T = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k)}$, где $q = 2$ — число линейно независимых уравнений в основной гипотезе H_0, $n = 25$ — число наблюдений, $k = 6$ — число коэффициентов в модели без ограничения

(c) $T \sim F(q; n-k)$

(d) $T_{obs} = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k)} = \frac{(60.4-40.4)/2}{40.4/(25-6)} = 4.70$

(e) Нижняя граница $= 0$, верхняя граница $= 3.52$

(f) Поскольку $T_{obs} = 4.70$, что не принадлежит промежутку от 0 до 3.52, то на основе имеющихся данных можно отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%. Таким образом, образование родителей существенно влияет на заработную плату.

3.25.
3.26.
3.27.
3.28.
3.29.
3.30.
3.31. $0.25\hat{\beta}_1 + 0.75\hat{\beta}'_1$, $0.25\hat{\beta}_2 + 0.75\hat{\beta}'_2$ и $0.25\hat{\beta}_3 + 0.75\hat{\beta}'_3$

3.32. Сами оценки коэффициентов никак детерминистически не связаны, но при большом размере подвыборок примерно равны. А дисперсии связаны соотношением $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_a)^{-1} + \mathrm{Var}(\hat{\beta}_b)^{-1} = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_{tot})^{-1}$

3.33.
3.34.
3.35.
3.36.
3.37.
3.38.

Из оценки ковариационной матрицы находим, что $se(\hat{\beta}_{totsp} = \hat{\beta}_{livesp}) = 0.2696$.
Исходя из $Z_{crit} = 1.96$ получаем доверительный интервал, $[-0.8221; 0.2348]$.
Вывод: при уровне значимости 5% гипотеза о равенстве коэффициентов не отвергается.

3.39.
3.40.
3.41.

1. $\mathbb{P}(\hat{\beta}_3 > se(\hat{\beta}_3)) = \mathbb{P}(t_{17} > 1) = 0.1657$
2. $\mathbb{P}(\hat{\beta}_3 > \sigma_{\hat{\beta}_3}) = \mathbb{P}(N(0,1) > 1) = 0.1587$

3.42.
3.43.
3.44. $\hat{\beta}_2 = 0.41$, $\hat{\beta}_3 = 0.3$, $\hat{\beta}_4 = -0.235$, переменная x значима

3.45. $\hat{\beta}_2 = 0.75$, $\hat{\beta}_3 = 0.625$, $\hat{\beta}_4 = 0.845$, переменные z и w значимы

3.46. $RSS_1 > RSS_2 = RSS_3$, в моделях два и три, ошибка прогноза равна $\hat{\beta}_4$

3.47.
3.48. $RSS/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-k}$, $\mathbb{E}(RSS) = (n-k)\sigma^2$, $\mathrm{Var}(RSS) = 2(n-k)\sigma^4$, $\mathbb{P}(5\sigma^2 < RSS < 10\sigma^2) \approx 0.451$

3.49. $\mathbb{P}(\hat{s}_3^2 > \hat{s}_1^2) = 0.5$, $\mathbb{P}(\hat{s}_1^2 > 2\hat{s}_2^2) = 0.5044$, $\mathbb{E}(\hat{s}_2^2/\hat{s}_1^2) = 1.25$, $\mathrm{Var}(\hat{s}_2^2/\hat{s}_1^2) = 4.6875$

3.50. 90% во всех пунктах

3.51. Поскольку $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, $\hat{\gamma}$ и $\hat{\delta}$ являются МНК-коэффициентами в регрессии $y_i = \mu + \nu x_i + \gamma d_i + \delta x_i d_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, то для любых μ, ν, γ и δ имеет место

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\mu} - \hat{\nu}x_i - \hat{\gamma}d_i - \hat{\delta}x_i d_i - \varepsilon_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu - \nu x_i - \gamma d_i - \delta x_i d_i - \varepsilon_i)^2 \tag{8}$$

Перепишем неравенство (8) в виде

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-(\hat{\mu}+\hat{\gamma})-(\hat{\nu}+\hat{\delta})x_i)^2+\sum_{i=m+1}^{n}(y_i-\hat{\mu}-\hat{\nu}x_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}(y_i-(\mu+\gamma)-(\nu+\delta)x_i)^2+\sum_{i=m+1}^{n}(y_i-\mu-\nu x_i)^2 \quad (9)$$

Учитывая, что неравенство (9) справедливо для всех μ, ν, γ и δ, то оно останется верным для $\mu=\hat{\mu}$, $\nu=\hat{\nu}$ и произвольных γ и δ. Имеем

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-(\hat{\mu}+\hat{\gamma})-(\hat{\nu}+\hat{\delta})x_i)^2+\sum_{i=m+1}^{n}(y_i-\hat{\mu}-\hat{\nu}x_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}(y_i-(\hat{\mu}+\gamma)-(\hat{\nu}+\delta)x_i)^2+\sum_{i=m+1}^{n}(y_i-\hat{\mu}-\hat{\nu}x_i)^2$$

Следовательно

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-(\hat{\mu}+\hat{\gamma})-(\hat{\nu}+\hat{\delta})x_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}(y_i-(\hat{\mu}+\gamma)-(\hat{\nu}+\delta)x_i)^2 \quad (10)$$

Обозначим $\tilde{\beta}_1:=\hat{m u}+\gamma$ и $\tilde{\beta}_2:=\hat{\nu}+\delta$. В силу произвольности γ и δ коэффициенты $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$ также произвольны. тогда для любых $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$ выполнено неравенство:

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-(\hat{\mu}+\hat{\gamma})-(\hat{\nu}+\hat{\delta})x_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}(y_i-\tilde{\beta}_1-\tilde{\beta}_2x_i)^2$$

которое означает, что $\hat{\mu}+\hat{\gamma}$ и $\hat{\nu}+\hat{\delta}$ являются МНК-оценками коэффициентов β_1 и β_2 в регрессии $y_i=\beta_1+\beta_2x_i+\varepsilon_i$, оцененной по наблюдениям $i=1,\ldots,m$, то есть $\hat{\beta}_1=\hat{\mu}+\hat{\gamma}$ и $\hat{\beta}_2=\hat{\nu}+\hat{\delta}$.
3.52. не верно, поскольку R^2_{adj} может принимать отрицательные значения, а $F(n-k,n-1)$ — не может.
3.53. Сгенерировать сильно коррелированные x и z
3.54.
3.55.
3.56.
3.57. bootstrap, дельта-метод.
3.58.
3.59.
3.60. При наличии ошибок в измерении зависимой переменной оценки остаются несмещенными, их дисперсия растет. Однако оценка дисперсии может случайно оказаться меньше. Например, могло случиться, что ошибки u_i случайно компенсировали ε_i.
3.61.
3.62.
4.1.
4.2.
4.3.
4.4.
4.5.
4.6.
4.7. да, да
4.8.

1. $\hat{\gamma}=(Z'Z)^{-1}Z'y=A^{-1}(X'X)^{-1}(A')^{-1}A'X'y=A^{-1}(X'X)^{-1}X'y=A^{-1}\hat{\beta}$
2. $\hat{u}=y-Z\hat{\gamma}=y-XAA^{-1}\hat{\beta}=y-X\hat{\beta}=\hat{\varepsilon}$
3. Пусть $z^0=\begin{pmatrix}1 & z_1^0 & \ldots & z_{k-1}^0\end{pmatrix}$ — вектор размера $1\times k$ и $x^0=\begin{pmatrix}1 & x_1^0 & \ldots & x_{k-1}^0\end{pmatrix}$ — вектор размера $1\times k$. Оба эти вектора представляют собой значения факторов. Тогда $z^0=x^0A$ и

прогнозное значение для регрессии с преобразованными факторами равно $z^0\hat{\gamma} = x^0AA^{-1}\hat{\beta} = x^0\hat{\beta}$ прогнозному значению для регрессии с исходными факторами.

4.9.

1. $\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'\mathbb{E}(y) = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'X\beta = \beta + \gamma X'X\beta$
2. $\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) = \mathrm{Var}(((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y) = \mathrm{Var}(((X'X)^{-1} + \gamma I)X'\varepsilon) =$
$= (((X'X)^{-1} + \gamma I)X')\,\mathrm{Var}(\varepsilon)(((X'X)^{-1} + \gamma I)X')' =$
$= (((X'X)^{-1} + \gamma I)X')\sigma_\varepsilon^2 I(((X'X)^{-1} + \gamma I)X')' = \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + \gamma I)X'X((X'X)^{-1} + \gamma I) =$
$= \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + \gamma I)(I + \gamma X'X) = \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + 2\gamma I + \gamma^2 X'X)$

4.10.

4.11.

4.12.

4.13.

1. $n = 5$
2. $k = 3$
3. $TSS = 10$
4. $RSS = 2$
5. $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
6. $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 0.8$. R^2 высокий, построенная эконометрическая модель «хорошо» описывает данные
7. Основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = 0$, альтернативная гипотеза — $H_a : \beta_1 \neq 0$
8. Проверка гипотезы
   (a) $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$
   (b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$
   (c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-0}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 1.7321$
   (d) Нижняя граница $= -2.920$, верхняя граница $= 2.920$
   (e) Поскольку $T_{obs} = 1.7321$, что принадлежит промежутку от -2.920 до 2.920, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%
9. $p - value(T_{obs}) = \mathbb{P}(|T| > |T_{obs}|) = 2F_T(|T_{obs}|)$, где $F_T(|T_{obs}|)$ — функция распределения $t-$распределения с $n - k = 5 - 3 = 2$ степенями свободы в точке $|T_{obs}|$. $p - value(T_{obs}) = 2tcdf(-|T_{obs}|, n-k) = 2tcdf(-1.7321, 2) = 0.2253$. Поскольку $P-$значение превосходит уровень значимости 10%, то основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = 0$ не может быть отвергнута
10. Проверка гипотезы
    (a) $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$
    (b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$
    (c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 0.8660$
    (d) Нижняя граница $= -2.920$, верхняя граница $= 2.920$
    (e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -2.920 до 2.920, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%
11. Проверка гипотезы
    (a) $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$
    (b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -\infty$, верхняя граница $= 1.8856$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от $-\infty$ до 1.8856, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

12. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -1.8856$, верхняя граница $= +\infty$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -1.8856 до $+\infty$, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

13. Основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$, альтернативная гипотеза — $H_a : |\beta_1| + |\beta_2| > 0$

14. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k}; n = 5; k = 3$

(b) $T \sim F(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $T_{obs} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k} = \frac{0.8}{1-0.8} \cdot \frac{5-3}{2} = 4$

(d) Нижняя граница $= 0$, верхняя граница $= 19$

(e) Поскольку $T_{obs} = 4$, что принадлежит промежутку от 0 до 19, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%. Следовательно, регрессия в целом незначима. Напомним, что $R^2 = 0.8$, то есть он высокий. Но при этом регрессия «в целом» незначима. Такой эффект может возникать при малом объёме выборки, например, таком, как в данной задаче

15. $p - value(T_{obs}) = \mathbb{P}(|T| > |T_{obs}|) = 2F_T(|T_{obs}|)$, где $F_T(|T_{obs}|)$ — функция распределения $F-$распределения с $k = 3$ и $n-k = 5-3 = 2$ степенями свободы в точке T_{obs}. $p-value(T_{obs}) = 1 - fcdf(-|T_{obs}|, n-k) = 1 - fcdf(4, 2) = 0.2$. Поскольку $P-$значение превосходит уровень значимости 10%, то основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ не может быть отвергнута. Таким образом, регрессия «в целом» незначима

16. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - (\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1; \hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{22} + 2\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{23} + \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333 + 2(-1.0000) + 2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 - 2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -4.3027$, верхняя граница $= 4.3027$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -4.3027 до 4.3027, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

17. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat\beta_1+\hat\beta_2-(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_1;\hat\beta_2) = \hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{22} + 2\hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{23} + \hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22}+2[(X'X)^{-1}]_{23}+[(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333+2(-1.0000)+2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat\beta_1+\hat\beta_2-2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -\infty$, верхняя граница $= 2.9200$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от $-\infty$ до 2.9200, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

18. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat\beta_1+\hat\beta_2-(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_1;\hat\beta_2) = \hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{22} + 2\hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{23} + \hat\sigma^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22}+2[(X'X)^{-1}]_{23}+[(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333+2(-1.0000)+2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat\beta_1+\hat\beta_2-2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_1+\hat\beta_2)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -2.9200$, верхняя граница $= +\infty$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -2.9200 до $+\infty$, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

4.14.

4.15.

4.16. $\mathrm{Var}(\hat\beta) = \sigma^2(X'X)^{-1}$

4.17. $(n-1)\sigma^2$, $(n-k)\sigma^2$

4.18. $TSS = y'(I-\pi)y$, $RSS = y'(I-P)y$, $ESS = y'(P-\pi)y$

4.19. $\mathbb{E}(TSS) = (n-1)\sigma^2 + \beta'X'(I-\pi)X\beta$

4.20. $(n-1)\sigma^2$, $(n-k)\sigma^2$, $(k-1)\sigma^2$

4.21.

4.22. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathbb{E}(\hat\varepsilon) = 0$, $\sum\varepsilon_i$ может оказаться равной нулю только случайно, в нормальной модели это происходит с вероятностью 0, $\sum\hat\varepsilon_i = 0$ в модели со свободным членом

4.23. $\sum y_i^2 = \sum\hat y_i^2 + \sum\hat\varepsilon_i^2$, $TSS = ESS + RSS$,

4.24.

4.25. Спроецируем единичный столбец на «плоскость», обозначим его $1'$. Делаем проекцию y на «плоскость» и на $1'$. Далее аналогично.

4.26. Проекция y на $\hat y$ это $\hat y$, поэтому оценки коэффициентов будут 0 и 1. Оценка дисперсии $\frac{RSS}{(n-2)ESS}$. Нарушены предпосылки теоремы Гаусса-Маркова, например, ошибки новой модели в сумме дают 0, значит коррелированы.

4.27. Либо в регрессию включена константа, либо единичный столбец (тут была опечатка, столбей) можно получить как линейную комбинацию регрессоров, например, включены дамми-переменные для каждого возможного значения качественной переменной.

4.28. Сами оценки коэффициентов никак детерминистически не связаны, но при большом размере подвыборок примерно равны. А ковариационные матрицы связаны соотношением

$\text{Var}(\hat{\beta}_a)^{-1} + \text{Var}(\hat{\beta}_b)^{-1} = \text{Var}(\hat{\beta}_{tot})^{-1}$
4.29.
4.30.
4.31.
4.32. да, да
4.33.
4.34. Докажем несмещенность МНК-оценок.

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \mathbb{E}\left((X^TX)^{-1}X^Ty\right) = (X^TX)^{-1}X^T\mathbb{E}(y) =$$

$$= (X^TX)^{-1}X^T\mathbb{E}(X\beta + \varepsilon) = (X^TX)^{-1}X^TX\beta = \beta$$

Обозначим $\varphi(X, y) = (X^TX)^{-1}X^Ty$. Тогда $\hat{\beta} = \varphi(X, y)$. Покажем, что функция φ линейна по переменной y.

1. $\varphi(X, \lambda \cdot y) = (X^TX)^{-1}X^T(\lambda \cdot y) = \lambda(X^TX)^{-1}X^Ty = \lambda \cdot \varphi(X, y)$
2. $\varphi(X, y + z) = (X^TX)^{-1}X^T(y + z) = (X^TX)^{-1}X^Ty + (X^TX)^{-1}X^Tz = \varphi(X, y) + \varphi(X, z)$

Что и требовалось доказать.
4.35. Нет, так как для функции $\varphi(X, y) = (X^TX)^{-1}X^Ty$ не выполнено, например, свойство однородности по переменной X. Действительно,

$$\varphi(X, \lambda \cdot y) = ((\lambda \cdot X)^T(\lambda \cdot X))^{-1}(\lambda \cdot X)^Ty = \frac{1}{\lambda} \cdot (X^TX)^{-1}X^Ty = \frac{1}{\lambda}\varphi(X, y)$$

.
4.36. $\tilde{\beta} = (X^TCX)^{-1}X^TCy$, где

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

4.37. $Pi = i \Leftrightarrow P\pi = \pi$ поскольку, если матрицу π записать по столбцам $\pi = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} i & i & \ldots & i \end{bmatrix}$, то можно записать следующую цепочку равенств $P\pi = P\frac{1}{n}\begin{bmatrix} i & i & \ldots & i \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} Pi & Pi & \ldots & Pi \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} i & i & \ldots & i \end{bmatrix} \Leftrightarrow Pi = i$.
Свойство $P^2 = P$ имеет место независимо от выполнимости условия $Pi = i$. Действительно, $P^2 = X(X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1}X^T = X(X^TX)^{-1}X^T = P$.
Рассмотрите пример $y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Постройте регрессию $y = \beta x + \varepsilon$ без свободного члена. Убедитесь, что $\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i = 0$ и $\overline{Y} = \overline{\hat{Y}} = 0$, но $Pi \neq i$.
Ответ: $P\pi = \pi$
4.38. (1), (2) $\Leftrightarrow$ (3), (5)
4.39. $\mathbb{E}(\varepsilon^T\pi\varepsilon) = \mathbb{E}(tr[\varepsilon^T\pi\varepsilon]) = \mathbb{E}(tr[\pi\varepsilon\varepsilon^T]) = tr[\pi\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon^T)] = tr[\pi\,\text{Var}(\varepsilon)] =$
$$= tr\left[\frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}\right] = \frac{1}{n}tr\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_n^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$
4.40.

1. $RSS = \hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}y^T(I - P)y = y^Ty - y^TPy = y^Ty - y^TX(X^TX)^{-1}X^Ty =$
$$3924 - \begin{bmatrix} 460 & 810 & 615 & 712 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.03767 & -0.06263 & -0.06247 & 0.1003 \\ -0.06263 & 1.129 & 1.107 & -2.192 \\ -0.06247 & 1.107 & 1.110 & -2.170 \\ 0.1003 & -2.192 & -2.170 & 4.292 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 460 \\ 810 \\ 615 \\ 712 \end{bmatrix} = 3924 -$$
$3051.2 = 872.8$

$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{RSS}{n-k} = \frac{872.8}{100-4} = 9.0917$
$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2_\varepsilon (X^T X)^{-1} \Rightarrow \widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -0.56939$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = 0.34251$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = 10.269$
$\widehat{\mathrm{Corr}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)}} = -0.30361$

2. (указание) $\widehat{\mathrm{Corr}}(x_2, x_3) = \frac{\sum(x_{i2}-\overline{x}_2)(x_{i3}-\overline{x}_3)}{\sqrt{\sum(x_{i2}-\overline{x}_2)}\sqrt{\sum(x_{i3}-\overline{x}_3)}}$. Все необходимые величины можно извлечь из матрицы $X^T X$ — это величины $\sum x_{i2}$ и $\sum x_{i3}$, а остальное – из матрицы $X^T(I-\pi)X = X^T X - X^T \pi X = X^T X - (\pi X)^T \pi X$. При этом имейте в виду, что $\pi X = \begin{bmatrix} 1 & \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 \end{bmatrix}$ и $\overline{x}_1 = 1.23$, $\overline{x}_2 = 0.96$, $\overline{x}_3 = 1.09$

3. $$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\beta}_4 \\ \hat{\beta}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03767 & -0.06263 & -0.06247 & 0.1003 \\ -0.06263 & 1.129 & 1.107 & -2.192 \\ -0.06247 & 1.107 & 1.110 & -2.170 \\ 0.1003 & -2.192 & -2.170 & 4.292 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 460 \\ 810 \\ 615 \\ 712 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.40221 \\ 6.1234 \\ 5.9097 \\ -7.5256 \end{bmatrix}$$
$t = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)}} \sim t_{100-4}$
$t = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{6.1234}{\sqrt{10.269}} = 1.9109 \Rightarrow \hat{\beta}_2$ — не значим.

4.41.

1. $\widehat{\mathrm{Cov}} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \hat{\sigma}^2_\varepsilon (X^T X)^{-1}$ — несмещённая оценка для ковариационной матрицы МНК-коэффициентов. Действительно, $\mathbb{E}\widehat{\mathrm{Cov}} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \mathbb{E}\hat{\sigma}^2_\varepsilon (X^T X)^{-1} = \sigma^2_\varepsilon (X^T X)^{-1} = \mathrm{Cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix}$. Поэтому искомая оценка $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \hat{\sigma}^2_\varepsilon \left[(X^T X)^{-1}\right]_{23}$, где $\left[(X^T X)^{-1}\right]_{23}$ — элемент матрицы $(X^T X)^{-1}$, расположенный во второй строке, 3-м столбце.
Заметим, что $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_2} = \hat{\sigma}^2_\varepsilon \left[(X^T X)^{-1}\right]_{22} \Rightarrow 0.7^2 = \hat{\sigma}^2_\varepsilon \cdot (3030) \Rightarrow \hat{\sigma}^2_\varepsilon = 0.00016172$
Значит, $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 0.00016172 \cdot (-589) = -0.095253$.

2. $t = \frac{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - \beta_2 - \beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}} \sim t_{n-k}$
Требуется проверить $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$.
$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) + \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_3) + 2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 0.7^2 + 0.138^2 + 2 \cdot 0.095253 = 0.319044$
$t = \frac{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - \beta_2 - \beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}} = \frac{0.76 + 0.19 - 1}{\sqrt{0.319044}} = -0.088520674$
Значит, гипотеза не отвергается на любом «разумном» уровне значимости.

3. Мы знаем, что $\frac{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - \beta_2 - \beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}} \sim t_{n-k} = t_{15-3}$, поэтому построить доверительный интервал для $\beta_2 + \beta_3$ не составляет труда. $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - \beta_2 - \beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}}\right| < t^*\right) = 0.95$
$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - \beta_2 - \beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}}\right| < t^*\right) = \mathbb{P}\left(-t^*\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)} < \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - \beta_2 - \beta_3 < t^*\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}\right) =$
$\mathbb{P}\left(-t^*\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)} - (\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) < -\beta_2 - \beta_3 < -(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) + t^*\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}\right) =$
$\mathbb{P}\left((\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) + t^*\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)} > \beta_2 + \beta_3 > (\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) - t^*\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3)}\right) =$
$\mathbb{P}\left((0.76 + 0.19) + 2.16 \cdot 0.319044 > \beta_2 + \beta_3 > (0.76 + 0.19) - 2.16 \cdot 0.319044\right) =$
$\mathbb{P}(1.639 > \beta_2 + \beta_3 > 0.26)$

4.42.
4.43. Находим $X'X$, её элементы и есть то, что нужно.
5.1.
5.2.
5.3.
5.4. $\hat{\theta} = 1/\bar{Y}$, $\hat{\beta} = \bar{X}/\bar{Y}$, $\hat{a} = 1/(1+\bar{X})$
5.5. В данном примере мы имеем
$\theta = \begin{bmatrix}\mu & \nu\end{bmatrix}'$ — вектор неизвестных параметров
$\Theta = \mathbb{R} \times (0; +\infty)$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров
Функция правдоподобия имеет вид:

$$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\nu}\right\} = (2\pi)^{-n/2} \cdot \nu^{-n/2} \cdot \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\nu}\right\}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l(\theta) := \ln \mathrm{L}(\theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\nu - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\nu}$$

$\Theta_{UR} = \Theta$
$\Theta_R = \{(0, 1)\}$
Из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\nu} = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \nu} = -\frac{n}{2\nu} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\nu^2} = 0 \end{cases}$$

находим
$\hat{\theta}_{UR} = (\hat{\mu}_{UR}, \hat{\nu}_{UR})$, где $\hat{\mu}_{UR} = \overline{x} = -1.5290$, $\hat{\nu}_{UR} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 1.0603$
$\hat{\theta}_R = (\hat{\mu}_R, \hat{\nu}_R) = (0, 1)$
По имеющимся данным находим
$l(\hat{\theta}_R) = -\frac{10}{2}\ln(2\pi) - \frac{10}{2}\ln 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-0)^2}{2\cdot 1} = -26.1804$
$l = -\frac{10}{2}\ln(2\pi) - \frac{10}{2}\ln(1.0603) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+1.5290)^2}{2\cdot 1.0603} = -14.4824$
$LR_{\text{набл}} = -2(l(\hat{\theta}_R) - l) = -2\cdot(-26.1804 + 14.4824) = 23.3959$
Критическое значение χ^2 распределения с двумя степенями свободы, отвечающее уровню значимости 5%, равно 5.9915. Следовательно, тест отношения правдоподобия говорит о том, что гипотеза H_0 должна быть отвергнута.
Для выполнения тестов Вальда и множителей Лагранжа нам понадобится информационная матрица Фишера
$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{v}$, $\frac{\partial^2 l}{\partial \nu \partial \mu} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\nu^2}$, $\frac{\partial^2 l}{\partial \nu^2} = \frac{n}{2\nu^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\nu^3}$
$\mathbb{E}\frac{\partial^2 l}{\partial \nu \partial \mu} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(x_i-\mu)}{\nu^2} = 0$, $\mathbb{E}\frac{\partial^2 l}{\partial \nu^2} = \frac{n}{2\nu^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(x_i-\mu)^2}{\nu^3} = \frac{n}{2\nu^2} - \frac{n\nu}{nu^3} = -\frac{n}{2\nu^2}$

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \nu \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \nu \partial \mu} & \frac{\partial^2 l}{\partial \nu^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{\nu} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\nu^2} \end{bmatrix}$$

$$I(\hat{\theta}_{UR}) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\hat{\nu}_{UR}} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\cdot\hat{\nu}_{UR}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{1.0603} & 0 \\ 0 & \frac{10}{2\cdot 1.0603^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4307 & 0 \\ 0 & 4.4469 \end{bmatrix}$$

$$g(\hat{\theta}_{UR}) = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{UR} - 0 \\ \hat{\nu}_{UR} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5290 - 0 \\ 1.0603 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5290 \\ 0.0603 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial \mu} & \frac{\partial c_1}{\partial \nu} \\ \frac{\partial c_2}{\partial \mu} & \frac{\partial c_2}{\partial \nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g'}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial \mu} & \frac{\partial c_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial c_1}{\partial \nu} & \frac{\partial c_2}{\partial \nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$W_{\text{набл}} = g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) =$

$\begin{bmatrix} -1.5290 & 0.0603 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9.4307 & 0 \\ 0 & 4.4469 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1.5290 \\ 0.0603 \end{bmatrix} = 22.0635$

Тест Вальда также говорит о том, что на основании имеющихся наблюдений гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

$I(\hat{\theta}_R) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\hat{\nu}_R} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\cdot\hat{\nu}_R^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{1} & 0 \\ 0 & \frac{10}{2\cdot 1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_R)}{\hat{\nu}_R} \\ -\frac{n}{2\cdot\hat{\nu}_R} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu}_R)^2}{2\cdot\hat{\nu}_R^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 0)}{1} \\ -\frac{10}{2\cdot 1} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-0)^2}{2\cdot 1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.29 \\ 11.9910 \end{bmatrix}$

$LM_{\text{набл}} = \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] = \begin{bmatrix} -15.29 & 11.9910 \end{bmatrix} = \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -15.29 \\ 11.9910 \end{bmatrix} = 52.1354$

Тест множителей Лагранжа также указывает на то, что гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

5.6. В данной задаче мы имеем:

$\theta = p$ — вектор неизвестных параметров

$\Theta = (0, 1)$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров

Функция правдоподобия имеет вид:

$$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l(\theta) := ln\mathrm{L}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot \ln(1-p)$$

$\Theta_{UR} = \Theta$

$\Theta_R = \{0.5\}$

Решая уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0$$

получаем

$\hat{\theta}_{UR} = \hat{p}_{UR}$, где $\hat{p}_{UR} = \overline{x} = 0.42$

$\hat{\theta}_R = \hat{p}_R = 0.5$

По имеющимся данным находим

$l(\hat{\theta}_R) = 42 \cdot \ln(0.5) + (100 - 42) \cdot \ln(1 - 0.5) = -69.3147$

$l(\hat{\theta}_{UR} = 42 \cdot \ln(0.42) + (100 - 42) \cdot \ln(1 - 0.42) = -68.0292$

$LR_{\text{набл}} = -2(l(\hat{\theta}_R) - l) = -2 \cdot (-69.3147 + 68.0292) = 2.5710$

Критическое значение χ^2 распределения с одной степенью свободы, отвечающее за 5% уровень значимости, равно 3.8414. Следовательно, тест отношения правдоподобия говорит о том, что на основании имеющихся данных, основная гипотеза $H_0 : p = 0.5$ не может быть отвергнута.

Для выполнения тестов Вальда и множителей Лагранжа нам понадобится информационная матрица Фишера

$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{(1-p)^2}$

$I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 l}{\partial p^2}\right] = -\mathbb{E}\left[-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{(1-p)^2}\right] = -\left(-\frac{np}{p^2} - \frac{n-np}{(1-p)^2}\right) = \frac{n}{p(1-p)}$

$I(\hat{\theta}_{UR}) = \frac{n}{\hat{p}_{UR}(1-\hat{p}_{UR})} = \frac{100}{0.42\times(1-0.42)} = 172.4138$

$g(\hat{\theta}_{UR}) = \hat{\theta}_{UR} - 0.5 = 0.42 - 0.5 = -0.08$

$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = 1'$, $\frac{\partial g'}{\partial \theta} = 1$

$W_{\text{набл}} = g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) = [-0.08]' \cdot [1' \cdot 172.4138^{-1} \cdot 1]^{-1} \cdot [-0.08] =$ 2.6272

Тест Вальда также говорит о том, что гипотеза H_0 не отвергается.

$I(\hat{\theta}_R) = \frac{n}{\hat{p}_R(1-\hat{p}_R)} = \frac{100}{0.5\times(1-0.5)} = 400$

$\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{p}_R} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{1-\hat{p}_R} = \frac{42}{0.5} - \frac{100-42}{1-0.5} = -32$

$LM_{\text{набл}} = \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] = [-32]' \cdot [400]^{-1} \cdot [-32] = 2.56$

Согласно тесту множителей Лагранжа, основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута.

5.7. В данной задаче мы имеем

$\theta = \lambda$ — вектор неизвестных параметров

$\Theta = (0, +\infty)$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров

Функция правдоподобия имеет вид:

$$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \dots x_n!}e^{-\lambda n}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l(\theta) := ln\mathrm{L}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot \ln\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - \lambda n$$

$\Theta_{UR} = \Theta$

$\Theta_R = \{2\}$

Решая уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n = 0$$

получаем

$\hat{\theta}_{UR} = \hat{\lambda}_{UR}$, где $\hat{\lambda}_{UR} = \overline{x} = 1.7$

$\hat{\theta}_R = \hat{p}_R = 2$

По имеющимся данным находим

$l(\hat{\theta}_R) = (80 \cdot 1.7) \cdot \ln(2) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - 2 \cdot 80 = -65.7319$

$l(\hat{\theta}_{UR} = (80 \cdot 1.7) \cdot \ln(1.7) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - 1.7 \cdot 80 = -63.8345$

$LR_{\text{набл}} = -2(l(\hat{\theta}_R) - l) = -2 \cdot (-65.7319 + 63.8345) = 3.7948$

Критическое значение χ^2 распределения с одной степенью свободы, отвечающее за 5% уровень значимости, равно 3.8414. Следовательно, тест отношения правдоподобия говорит о том, что на основании имеющихся данных, основная гипотеза $H_0 : \lambda = 2$ не может быть отвергнута.

Для выполнения тестов Вальда и множителей Лагранжа нам понадобится информационная матрица Фишера

$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2}$

$I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 l}{\partial p^2}\right] = -\mathbb{E}\left[-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2}\right] = -\left(-\frac{n\lambda}{\lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda}$

$I(\hat{\theta}_{UR}) = \frac{n}{\hat{\lambda}_{UR}} = \frac{80}{1.7} = 47.0588$

$g(\hat{\theta}_{UR}) = \hat{\theta}_{UR} - 2 = 1.7 - 2 = -0.3$

$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = 1'$, $\frac{\partial g'}{\partial \theta} = 1$

$W_{\text{набл}} = g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) = [-0.3]' \cdot [1' \cdot 47.0588^{-1} \cdot 1]^{-1} \cdot [-0.3] =$ 4.2352

Поскольку наблюдаемое значение статистики Вальда превосходит критическое значение 3.8414, то гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

$I(\hat{\theta}_R) = \frac{n}{\hat{\lambda}_R} = \frac{80}{2} = 40$

$\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{\lambda}_R} - n = \frac{80\cdot 1.7}{2} - 80 = -12$

$LM_{\text{набл}} = \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] = [-12]' \cdot [40]^{-1} \cdot [-12] = 3.6$

Согласно тесту множителей Лагранжа, основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута.

5.8.

5.9.

5.10.

5.11.

5.12.

5.13.

6.1. $f(x)$ чётная, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\text{Var}(X) = \pi^2/3$, логистическое похоже на $N(0, \pi^2/3)$

6.2. $\ln\left(\frac{\mathbb{P}(y_i=1)}{\mathbb{P}(y_i=0)}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_i$.

6.3.

6.4.

6.5.

6.6. Для краткости введем следующие обозначения: $y_i = honey_i$, $d_i = bee_i$[1].

1. Функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$\mathrm{L}(\beta_1, \beta_2) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{\beta_1,\beta_2}(\{Y_i = y_i\}) = \prod_{i:y_i=0} \mathbb{P}_{\beta_1,\beta_2}(\{Y_i = 1\}) \cdot \prod_{i:y_i=1} \mathbb{P}_{\beta_1,\beta_2}(\{Y_i = 0\}) =$$

$$\prod_{i:y_i=1} \Lambda(\beta_1 + \beta_2 d_i) \cdot \prod_{i:y_i=0} [1 - \Lambda(\beta_1 + \beta_2 d_i)] =$$

$$\prod_{i:y_i=1,d_i=1} \Lambda(\beta_1 + \beta_2) \cdot \prod_{i:y_i=1,d_i=0} \Lambda(\beta_1) \cdot \prod_{i:y_i=0,d_i=1} [1 - \Lambda(\beta_1 + \beta_2)] \cdot \prod_{i:y_i=0,d_i=0} [1 - \Lambda(\beta_1)] =$$

$$\Lambda(\beta_1 + \beta_2)^{\#\{i:y_i=1,d_i=1\}} \cdot \Lambda(\beta_1)^{\#\{i:y_i=1,d_i=0\}} \cdot [1 - \Lambda(\beta_1 + \beta_2)]^{\#\{i:y_i=0,d_i=1\}} \cdot [1 - \Lambda(\beta_1)]^{\#\{i:y_i=0,d_i=0\}}$$

   где

$$\Lambda(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \tag{11}$$

   логистическая функция распределения, $\#A$ означает число элементов множества A.

2. Введём следующие обозначения:

$$a := \Lambda(\beta_1) \tag{12}$$

$$b := \Lambda(\beta_1 + \beta_2) \tag{13}$$

   Тогда с учетом имеющихся наблюдений функция правдоподобия принимает вид:

$$\mathrm{L}(a, b) = b^{12} \cdot a^{32} \cdot [1 - b]^{36} \cdot [1 - a]^{20}$$

   Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l(a, b) = \ln \mathrm{L}(a, b) = 12 \ln b + 32 \ln a + 36 \ln[1 - b] + 20 \ln[1 - a]$$

   Решая систему уравнений правдоподобия

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial a} = \frac{32}{a} - \frac{20}{1-a} = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial b} = \frac{12}{b} - \frac{36}{1-b} = 0 \end{cases}$$

[1] Y_i — случайный Мёд, y_i — реализация случайного Мёда (наблюдаемый Мёд)

получаем $\hat{a} = \frac{8}{13}$, $\hat{b} = \frac{1}{4}$. Из формул (11) и (12), находим $\hat{\beta}_{1,UR} = \ln\left(\frac{\hat{a}}{1-\hat{a}}\right) = \ln\left(\frac{8}{5}\right) = 0.47$. Далее, из (11) и (13) имеем $\hat{\beta}_{1,UR} + \hat{\beta}_{2,UR} = \ln\left(\frac{\hat{b}}{1-\hat{b}}\right)$. Следовательно, $\hat{\beta}_{2,UR} = \ln\left(\frac{\hat{b}}{1-\hat{b}}\right) - \hat{\beta}_{1,UR} = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{8}{5}\right) = -1.57$.

3. Гипотеза, состоящая в том, что «правильность Мёда не связана с правильностью пчёл» формализуется как $H_0 : \beta_2 = 0$. Протестируем данную гипотезу при помощи теста отношения правдоподобия. Положим в функции правдоподобия $\mathrm{L}(\beta_1, \beta_2)$ $\beta_2 = 0$. Тогда с учетом (12) и (13) получим

$$\mathrm{L}(a, b = a) = a^{32+12} \cdot [1-a]^{20+36}$$

В этом случае логарифмическая функция правдоподобия имеет вид:

$$l(a, b = a) := \mathrm{L}(a, b = a) = 44 \ln a + 56 \ln[1-a]$$

Решаем уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{44}{a} - \frac{56}{1-a} = 0$$

и получаем $\hat{a} = \frac{11}{25}$. Следовательно, согласно (11) и (12), $\hat{\beta}_{1,R} = -0.24$ и $\hat{\beta}_{2,R} = 0$.

Статистика отношения правдоподобия имеет вид:

$$LR = -2(l(\hat{\beta}_{1,R}, \hat{\beta}_{2,R}) - l(\hat{\beta}_{1,UR}, \hat{\beta}_{2,UR}))$$

и имеет асимптотическое χ^2 распределение с числом степеней свободы, равным числу ограничений, составляющих гипотезу H_0, т.е. в данном случае $LR \overset{a}{\sim} \chi^2_1$.

Находим наблюдаемое значение статистики отношения правдоподобия:

$$l(\hat{\beta}_{1,R}, \hat{\beta}_{2,R}) = l(\hat{a}_R, \hat{b}_R = \hat{a}_R) = 44 \ln \hat{a}_R + 56 \ln[1-\hat{a}_R] = 44 \ln\left[\frac{11}{25}\right] + 56 \ln\left[1 - \frac{11}{25}\right] = -68.59$$

$$l(\hat{\beta}_{1,UR}, \hat{\beta}_{2,UR}) = l(\hat{a}_{UR}, \hat{b}_{UR}) = 12 \ln \hat{b}_{UR} + 32 \ln \hat{a}_{UR} + 36 \ln[1-\hat{b}_{UR}] + 20 \ln[1-\hat{a}_{UR}] =$$
$$12 \ln\left[\frac{1}{4}\right] + 32 \ln\left[\frac{8}{13}\right] + 36 \ln\left[1-\frac{1}{4}\right] + 20 \ln\left[1 - \frac{8}{13}\right] = -61.63$$

Следовательно, $LR_{\text{набл}} = -2(-68.59 + 61.63) = 13.92$, при этом критическое значение χ^2 распределения с одной степенью свободы для 5% уровня значимости равна 3.84. Значит, на основании теста отношения правдоподобия гипотеза $H_0 : \beta_2 = 0$ должна быть отвергнута. Таким образом, данные показывают, что, в действительности, правильность мёда связана с правильностью пчёл.

4.

$$\hat{\mathbb{P}}\{honey = 0 | bee = 0\} = 1 - \hat{\mathbb{P}}\{honey = 1 | bee = 0\} = 1 - \frac{\exp\{\hat{\beta}_{1,UR} + \hat{\beta}_{2,UR} \cdot 0\}}{1 + \exp\{\hat{\beta}_{1,UR} + \hat{\beta}_{2,UR} \cdot 0\}} =$$

$$1 - \frac{\exp\{\ln\left(\frac{8}{5}\right)\}}{1 + \exp\{\ln\left(\frac{8}{5}\right)\}} = 1 - 0.62 = 0.38$$

7.1.
7.2. увеличить количество наблюдений, уменьшить дисперсию случайной ошибки
7.3.
7.4.
7.5.
7.6.
7.7.
7.8. $r^* = -1/2$
7.9. $r^* = -1/3$
8.1.
8.2. По графику видно, что с увеличением общей площади увеличивается разброс цены. Поэтому разумно, например, рассмотреть следующие подходы:

1. Перейти к логарифмам, т.е. оценивать модель $\ln price_i = \beta_1 + \beta_2 \ln totsp_i + \varepsilon_i$
2. Оценивать квантильную регрессию. В ней угловые коэффициенты линейной зависимости будут отличаться для разных квантилей переменной $price$.
3. Обычную модель линейной регрессии с гетероскедастичностью вида $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 totsp_i^2$

8.3.
8.4. Поделить зависимую переменную и каждый регрессор, включая единичный столбец, на $|x_i|$.
8.5. Поделить зависимую переменную и каждый регрессор, включая единичный столбец, на $\sqrt{|x_i|}$.
8.6. $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = cx_i^4$
8.7. $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = cx_i$
8.8. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 11$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 11$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.
2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k,n_1-k}$
3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 1.41$
4. Область в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 3.44]$
5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \in [0; 3.44]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта не выявил гетероскедастичность.

8.9. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 21$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 21$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.
2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k,n_1-k}$
3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 6.49$
4. Область в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 3.12]$
5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \notin [0; 3.12]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 1% основная гипотеза H_0 отвергается. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта выявил гетероскедастичность.

8.10. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 11$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 11$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.
2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k,n_1-k}$

3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 2.88$
4. Область в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 3.44]$
5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \in [0; 3.44]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта не выявил гетероскедастичность.

8.11. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 21$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 21$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.
2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k,n_1-k}$
3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 5.91$
4. Область в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 2.21]$
5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \notin [0; 2.21]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 отвергается. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта выявил гетероскедастичность.

8.12. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Уайта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \delta_1 + \delta_2 x_i + \delta_3 z_i + \delta_4 x_i^2 + \delta_5 z_i^2 + \delta_6 x_i z_i$.

1. Тестовая статистика $W = n \cdot R^2_{aux}$, где n — число наблюдений, R^2_{aux} — коэффициент детерминации для вспомогательной регрессии.
2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $W \sim \chi^2_{k_{aux}-1}$, где $k_{aux} = 6$ — число регрессоров во вспомогательной регрессии, считая константу.
3. Наблюдаемое значение тестовой статистики: $W_{obs} = 18$
4. Область в которой H_0 не отвергается: $W \in [0; W_{crit}] = [0; 11.07]$
5. Статистический вывод: поскольку $W_{obs} \notin [0; 11.07]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 отвергается. Таким образом, тест Уайта выявил гетероскедастичность.

8.13.
8.14.
8.15.
8.16.
8.17.
8.18.
8.19.
8.20.
8.21.
8.22.
8.23. 0.0752, 5, 10
8.24. $k(k+1)/2$
8.25.
8.26. Известно, что оценки параметров, получаемые по обобщённому методу наименьших квадратов, являются наилучшими, поэтому: $\delta^2 \begin{bmatrix} x_1 & 0\dots0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0\dots0 & x_n \end{bmatrix}$

8.27. $\mathrm{Cov}(\hat\beta_{GLS}, \varepsilon) = \mathrm{Cov}\left((X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T\Sigma^{-1}y, \varepsilon\right) = \mathrm{Cov}\left((X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T\Sigma^{-1}\varepsilon, \varepsilon\right) =$
$= (X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T\Sigma^{-1}\,\mathrm{Cov}(\varepsilon, \varepsilon) = (X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T\Sigma^{-1}\Sigma = (X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T$

8.28. Для нахождения эффективной оценки воспользуемся взвешенным методом наименьших квадратов. Разделим каждое из уравнений $y_i = \beta_1 + \varepsilon$ на корень из дисперсии ε_i с тем, чтобы ошибки в полученных уравнениях имели равные дисперсии (в этом случае можно будет сослаться на т. Гаусса-Маркова). Итак, после деления i-го уравнения на величину $\sqrt{x_i}/\sigma_\varepsilon$, мы получаем:

$$\begin{bmatrix} y_1\sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon \\ y_2\sqrt{x_2}/\sigma_\varepsilon \\ \ldots \\ y_n\sqrt{x_n}/\sigma_\varepsilon \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} \sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon \\ \sqrt{x_2}/\sigma_\varepsilon \\ \ldots \\ \sqrt{x_n}/\sigma_\varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1\sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon \\ \varepsilon_2\sqrt{x_2}/\sigma_\varepsilon \\ \ldots \\ \varepsilon_n\sqrt{x_n}/\sigma_\varepsilon \end{bmatrix}$$

Поскольку условия т. Гаусса-Маркова для последней модели выполнены, то МНК-оценка для последней модели будет наиболее эффективной. Поэтому

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i\sqrt{x_i}/\sigma_\varepsilon)(\sqrt{x_i}/\sigma_\varepsilon)}{\sum_{i=1}^n (\sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon)} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

8.29.
9.1.
9.2.
9.3.
9.4.
9.5.
9.6.
9.7. чтобы избежать переполнения при подсчете произведения всех y_i
9.8.
9.9.
10.1. $u_i^2 = \varepsilon_i^2 = 1$, $\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid x_1 = 0, x_2 = 1) = 0.2\beta$, $\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid x_1 = 0, x_2 = 2) = 0.8\beta$. Интуитивно объясняем: рисуем прямую по двум точкам. Мы знаем абсциссы точек с точностью ± 1. Если точки близки, то это может сильно менять оценку наклона, если точки далеки, то случайность слабо влияет на наклон.
10.2.
10.3.
10.4.
11.1.
11.2.

1. Процесс $AR(2)$, т.к. две первые частные корреляции значимо отличаются от нуля, а гипотезы о том, что каждая последующая равна нулю не отвергаются.
2. Можно использовать одну из двух статистик

$$\text{Ljung-Box} = n(n+2)\sum_{k=1}^{3} \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} = 0.4289$$

$$\text{Box-Pierce} = n\sum_{k=1}^{3} \hat{\rho}_k^2 = 0.4076$$

Критическое значение хи-квадрат распределения с 3-мя степенями свободы для $\alpha = 0.05$ равно $\chi^2_{3,crit} = 7.8147$. Вывод: гипотеза H_0 об отсутствии корреляции ошибок модели не отвергается.

11.3.

1. H_0: ряд содержит единичный корень, $\beta = 0$; H_0: ряд не содержит единичного корня, $\beta < 0$
2. $ADF = -0.4/0.1 = -4$, $ADF_{crit} = -2.89$, H_0 отвергается
3. Ряд стационарен

4. При верной H_0 ряд не стационарен, и t-статистика имеет не t-распределение, а распределение Дики-Фуллера.

11.4.

11.5.

11.6.

11.7.

11.8.

11.9.

11.10.

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2/(1-\rho^2)$
2. $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h \cdot \sigma^2/(1-\rho^2)$
3. $\mathrm{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h$

11.11.

11.12. все линейные комбинации стационарны

11.13. Они будут примерно одинаковы. Оценка наклона определяется автоковариационной функцией.

11.14.

11.15. $x_t = (1-\mathrm{L})^t y_t$

11.16. $F_n = \mathrm{L}(1+\mathrm{L})F_n$, значит $F_n = \mathrm{L}^k(1+\mathrm{L})^k F_n$ или $F_{n+k} = (1+\mathrm{L})^k F_n$

11.17. а - неверно, б - верно.

11.18.

11.19.

11.20.

11.21.

11.22.

11.23. 1, 2, 2

11.24.

11.25.

11.26.

11.27.

11.28.

11.29. 1. Поскольку имеют место соотношения $\varepsilon_1 = \rho\varepsilon_0 + u_1$ и $Y_1 = \mu + \varepsilon_1$, то из условия задачи получаем, что $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2/(1-\rho^2))$ и $Y_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1-\rho^2))$. Поэтому

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y_1-\mu)^2}{2\sigma^2/(1-\rho^2)}\right).$$

Далее, найдем $f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1)$. Учитывая, что $Y_2 = \rho Y_1 + (1-\rho)\mu + u_2$, получаем $Y_2|\{Y_1 = y_1\} \sim N(\rho y_1 + (1-\rho)\mu, \sigma^2)$. Значит,

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_2 - \rho y_1 - (1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Действуя аналогично, получаем, что для всех $t \geqslant 2$ справедлива формула

$$f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, находим функцию правдоподобия

$$\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_T,\ldots,Y_1}(y_T, \ldots, y_1) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}),$$

где $f_{Y_1}(y_1)$ и $f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1})$ получены выше.

2. Для нахождения неизвестных параметров модели запишем логарифмическую условную функцию правдоподобия:

$$l(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1) = \sum_{t=2}^{T} \log f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}) =$$

$$= -\frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2.$$

Найдем производные функции $l(\mu, \rho, \sigma^2 | Y_1 = y_1)$ по неизвестным параметрам:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T} 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)\cdot(\rho - 1),$$

$$\frac{\partial l}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T} 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)\cdot(\mu - y_{t-1}),$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{T-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2.$$

Оценки неизвестных параметров модели могут быть получены как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial \mu} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial \rho} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$$\sum_{t=2}^{T} y_t - \hat{\rho}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1} = (T-1)(1-\hat{\rho})\hat{\mu},$$

откуда

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^{T} y_t - \hat{\rho}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}}{(T-1)(1-\hat{\rho})} = \frac{3 - \hat{\rho}\cdot 3}{4\cdot(1-\hat{\rho})} = \frac{3}{4}.$$

Далее, если второе уравнение системы переписать в виде

$$\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\mu} - \hat{\rho}(y_{t-1} - \hat{\mu}))(y_{t-1} - \hat{\mu}) = 0,$$

то легко видеть, что

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\mu})(y_{t-1} - \hat{\mu})}{\sum_{t=2}^{T}(y_{t-1} - \hat{\mu})^2}.$$

Следовательно, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$.

Наконец, из третьего уравнения системы

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \hat{\rho}y_{t-1} - (1-\hat{\rho})\hat{\mu})^2.$$

Значит, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$. Ответы: $\hat{\mu} = 3/4 = 0.75$, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$.

11.30. Рассмотрим модель без константы. Тогда ковариационная матрица коэффициентов пропорциональна матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & -\hat{\rho}_1 \\ -\hat{\rho}_1 & 1 \end{pmatrix}$$

11.31.
11.32.
11.33.
11.34.
11.35.
12.1.
12.2.
12.3. $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2)$
12.4.
13.1.
13.2.
13.3.
14.1.
14.2.
14.3.
14.4.
14.5.
14.6.
14.7.
14.8.
14.9.
14.10.
14.11.
14.12.
14.13.
14.14. Например, $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, 1)'$
14.15. $\mathrm{tr}(I) = n$, $\mathrm{tr}(\pi) = 1$, $\mathrm{tr}(P) = k$
14.16.
14.17.
14.18. $n \times m$, $m \times n$, I
14.19.
14.20.
14.21.
15.1.
15.2.
15.3.
15.4.
15.5.
15.6.
15.7.
15.8.
15.9. По определению ковариационной матрицы:

$$\mathrm{Var}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(\xi_1) & \mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) & \mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_3) \\ \mathrm{Cov}(\xi_2, \xi_1) & \mathrm{Var}(\xi_2) & \mathrm{Cov}(\xi_2, \xi_3) \\ \mathrm{Cov}(\xi_3, \xi_1) & \mathrm{Cov}(\xi_3, \xi_2) & \mathrm{Var}(\xi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Var}(\xi_1+\xi_2+\xi_3) = \mathrm{Var}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \mathrm{Var}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} =$
9

15.10. $\mathbb{E}(z_1) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mathbb{E}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$

$\mathrm{Var}(z_1) = \mathrm{Var}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mathrm{Var}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^T =$
$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

15.11. $\mathbb{E}(z_2) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mathbb{E}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$

Поскольку $z_2 = z_1 + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, где z_1 — случайный вектор из предыдущей задачи, то $\mathrm{Var}(z_2) = \mathrm{Var}(z_1)$. Сдвиг случайного вектора на вектор-константу не меняет его ковариационную матрицу.

15.12. *В данном примере проиллюстрирована процедура центрирования случайного вектора — процедура вычитания из случайного вектора его математического ожидания.*

$\mathbb{E}(z_3) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix}\right) = \mathbb{E}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} - \mathbb{E}\begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

Заметим, что вектор z_3 отличается от вектора z_1 (из задачи 15) сдвигом на вектор-константу $\begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix}$, поэтому $\mathrm{Var}(z_3) = \mathrm{Var}(z_1)$.

15.13.

15.14.

15.15.

15.16.

15.17. Каждый из вариантов возможен

15.18.

16.1.

16.2.

16.3.

16.4.

16.5.

16.6.

16.7.

16.8.

16.9.

16.10.

16.11. по χ^2-распределению

16.12. $u \sim N(0, I)$

Все наборы данных доступны по ссылке https://github.com/bdemeshev/em301/wiki/Datasets.
17.1.
17.2.
17.3.
17.4.
17.5.
17.6.
17.7.
17.8.
17.9.
17.10.
17.11.
17.12.