

1. Верно ли, что для любых векторов  $a = (a_1, \dots, a_n)$  и  $b = (b_1, \dots, b_n)$  справедливы следующие неравенства?

- (a)  $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) = 0$
- (b)  $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})a_i$
- (c)  $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})b_i$
- (d)  $\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

2. Пусть  $y_i = \mu + \varepsilon_i$ , где  $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ ,  $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ ,  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Найдите

- (a)  $\mathbb{E}(\bar{y})$
- (b)  $\text{Var}(\bar{y})$
- (c)  $\mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right]$
- (d)  $\text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right]$

3. Рассматривается модель  $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ ,  $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ ,  $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ ,  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  при  $i \neq j$ . При каких значениях параметров  $c_i$  несмещённая оценка  $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i y_i}{\sum_{i=1}^n c_i x_i}$  имеет наименьшую дисперсию?

4. Найдите каждую из следующих матриц в каждой из следующих степеней  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $-1$ ,  $100$ .

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- (b)  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую (перпендикуляр) вектора  $u_1$  на линейное подпространство  $L = \mathcal{L}(u_2)$ , порождённое вектором  $u_2$ , если

- (a)  $u_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1), u_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$
- (b)  $u_1 = (2 \ 2 \ 2 \ 2), u_2 = (1 \ 0 \ 0 \ 1)$
- (c)  $u_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1), u_2 = (7 \ 0 \ 0 \ 7)$

6. Найдите обратные матрицы ко всем матрицам, представленным ниже.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Найдите ранг следующих матриц в зависимости от значений параметра  $\lambda$ .

$$(a) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 - 2\lambda \\ 1 + \lambda & 1 + 3\lambda \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

8. Пусть  $i = (1, \dots, 1)'$  — вектор из  $n$  единиц и  $\pi = i(i'i)^{-1}i'$ . Найдите

$$(a) \operatorname{tr}(\pi) \text{ и } \operatorname{rk}(\pi)$$

$$(b) \operatorname{tr}(I - \pi) \text{ и } \operatorname{rk}(I - \pi)$$

9. Пусть  $i = (1, \dots, 1)'$  — вектор из  $n$  единиц,  $\pi = i(i'i)^{-1}i'$  и  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)' \sim N(0, I)$ .

$$(a) \text{ Найдите } \mathbb{E}(\varepsilon'\pi\varepsilon), \mathbb{E}(\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon) \text{ и } \mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')$$

(b) Как распределены случайные величины  $\varepsilon' \pi \varepsilon$  и  $\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon$ ?

(c) Запишите выражения  $\varepsilon' \pi \varepsilon$  и  $\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon$ , используя знак суммы

10. Пусть  $X$  — матрица размера  $n \times k$ , где  $n > k$ , и пусть  $\text{rk}(X) = k$ . Верно ли, что матрица  $P = X(X'X)^{-1}X'$  симметрична и идемпотентна?
11. Пусть  $X$  — матрица размера  $n \times k$ , где  $n > k$ , и пусть  $\text{rk}(X) = k$ . Верно ли, что каждый столбец матрицы  $P = X(X'X)^{-1}X'$  является собственным вектором матрицы  $P$ , отвечающим собственному значению 1?
12. Пусть  $X$  — матрица размера  $n \times k$ , где  $n > k$ , пусть  $\text{rk}(X) = k$  и  $P = X(X'X)^{-1}X'$ . Верно ли, что каждый вектор-столбец  $u$ , такой что  $X'u = 0$ , является собственным вектором матрицы  $P$ , отвечающим собственному значению 0?
13. Верно ли, что для любых матриц  $A$  размера  $m \times n$  и матриц  $B$  размера  $n \times m$  выполняется равенство  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ?
14. Верно ли, что собственные значения симметричной и идемпотентной матрицы могут быть только нулями и единицами?
15. Пусть  $P$  — матрица размера  $n \times n$ ,  $P' = P$ ,  $P^2 = P$ . Верно ли, что  $\text{rk}(P) = \text{tr}(P)$ ?
16. Верно ли, что для симметричной матрицы собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны?

17. Пусть  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $P = X(X'X)^{-1}X'$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  независимы и одинаково распределены  $\sim N(0, 1)$ .

(a) Найдите распределение случайной величины  $\varepsilon' P \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$

(b) Найдите  $\mathbb{E}(\varepsilon' P \varepsilon)$

(c) При помощи таблиц найдите такое число  $q$ , что  $\mathbb{P}\{\varepsilon' P \varepsilon > q\} = 0.1$

18. Пусть  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $P = X(X'X)^{-1}X'$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  независимы и одинаково распределены  $\sim N(0, 1)$ .

(a) Найдите распределение случайной величины  $\varepsilon'P\varepsilon$ , где  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$

(b) Найдите  $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$

(c) При помощи таблиц найдите такое число  $q$ , что  $\mathbb{P}\{\varepsilon'P\varepsilon > q\} = 0.1$

19. Пусть  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P = X(X'X)^{-1}X'$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  независимы и одинаково распределены  $\sim N(0, 1)$ .

(a) Найдите распределение случайной величины  $\varepsilon'P\varepsilon$ , где  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$ .

(b) Найдите  $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$ .

(c) При помощи таблиц найдите такое число  $q$ , что  $\mathbb{P}\{\varepsilon'P\varepsilon > q\} = 0.1$ .

20. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы  $P = X(X'X)^{-1}X'$ , если

(a)  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b)  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c)  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d)  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$