Эконометрика

с Монте-Карло и эконометрессами

в задачах и упражнениях

Дмитрий Борзых, Борис Демешев

2 ноября 2013 г.

Содержание

Todo list

1 МНК без матриц и вероятностей

1. Верно ли, что для любых векторов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ справедливы следующие неравенства?
   (a) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a}) = 0$
   (b) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})a_i$
   (c) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})b_i$
   (d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

   да, да, да, нет

2. При помощи метода наименьших квадратов найдите оценку неизвестного параметра θ в следующих моделях:
   (a) $y_i = \theta + \theta x_i + \varepsilon_i$
   (b) $y_i = \theta - \theta x_i + \varepsilon_i$
   (c) $\ln y_i = \theta + \ln x_i + \varepsilon_i$

(d) $y_i = \theta + x_i + \varepsilon_i$

(e) $y_i = 1 + \theta x_i + \varepsilon_i$

(f) $y_i = \theta / x_i + \varepsilon_i$

(g) $y_i = \theta x_{i1} + (1-\theta) x_{i2} + \varepsilon_i$

3. Покажите, что для моделей $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, $z_i = \gamma + \delta x_i + \upsilon_i$ и $y_i + z_i = \mu + \lambda x_i + \xi_i$ МНК-оценки связаны соотношениями $\hat{\mu} = \hat{\alpha} + \hat{\gamma}$ и $\hat{\lambda} = \hat{\beta} + \hat{\delta}$.
4. Найдите МНК-оценки параметров α и β в модели $y_i = \alpha + \beta y_i + \varepsilon_i$.
5. Рассмотрите модели $y_i = \alpha + \beta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$, $z_i = \gamma + \delta(y_i + z_i) + \varepsilon_i$.

   (a) Как связаны между собой $al\hat{p}ha$ и $ga\hat{m}ma$?

   (b) Как связаны между собой $b\hat{e}ta$ и $de\hat{l}ta$?

   $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 0$ и $\hat{\beta} + \hat{\delta} = 1$
6. Как связаны МНК-оценки параметров α, β и γ, δ в моделях $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ и $z_i = \gamma + \delta x_i + \upsilon_i$, если $z_i = 2y_i$.
7. Для модели $y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$ решите условную задачу о наименьших квадратах: $Q(\beta_1, \beta_2) := \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})^2 \to \min\limits_{\beta_1 + \beta_2 = 1}$

2 Парный МНК без матриц

1. Рассмотрим модель $y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot t + \varepsilon_t$, где ошибки ε_t независимы и равномерны на $[-1; 1]$. С помощью симуляций на компьютере оцените и постройте график функции плотности для $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{s}^2$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)$ и $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.
2. Пусть $y_i = \mu + \varepsilon_i$, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. Найдите:

   (a) $\mathbb{E}(\overline{y})$

   (b) $\mathrm{Var}(\overline{y})$

   (c) $\mathbb{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2)$

   (d) $\mathrm{Var}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2)$, если дополнительно известно, что ε_i нормально распределены
3. Рассматривается модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких значениях параметров c_i несмещённая оценка $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i y_i}{\sum_{i=1}^n c_i x_i}$ имеет наименьшую дисперсию?

   $c_i = c \cdot x_i$, где $c \neq 0$
4. Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^5 y_i^2 = 55, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 3, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 12, \sum_{i=1}^5 y_i = 15, \sum_{i=1}^5 x_i = 3$. Используя их, найдите:

   (a) $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$

   (b) $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$

   (c) TSS

   (d) ESS

   (e) RSS

   (f) R^2

   (g) $\hat{\sigma}^2$

   Проверьте следующие гипотезы:

   (a) $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 2 \\ H_a : \beta_2 \neq 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 1 \end{cases}$

5. Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^5 y_i^2 = 55, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 2, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 9, \sum_{i=1}^5 y_i = 15, \sum_{i=1}^5 x_i = 2$. Используя их, найдите:

   (a) $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$

   (b) $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$

   (c) TSS

   (d) ESS

   (e) RSS

   (f) R^2

   (g) $\hat{\sigma}^2$

   Проверьте следующие гипотезы:

   (a) $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 2 \\ H_a : \beta_2 \neq 2 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ H_a : \beta_1 + \beta_2 \neq 1 \end{cases}$

6. Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Найдите $\mathbb{E}\hat{\beta}$. Какие из следующих оценок параметра β являются несмещенными:

   (a) $\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$

   (b) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{x_n}$

   (c) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}$

   (d) $\hat{\beta} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$

   (e) $\hat{\beta} = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$

   (f) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

   (g) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{n}\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

   (h) $\hat{\beta} = \frac{1}{n-1}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} + \ldots + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

   (i) $\hat{\beta} = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

   (j) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} + \frac{1}{2n}\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}$

   (k) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} + \frac{1}{2}\frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

   (l) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x^2})^2}$

   (m) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(\overline{y} - y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x^2})^2}$

   (n) $\hat{\beta} = \frac{y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n}{x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n}$

   (o) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n i(x_i - \overline{x})}$

   (p) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$

(q) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i-\overline{y}}{x_i-\overline{x}}$

7. Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Найдите $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$.
   (a) $\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$
   (b) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{x_n}$
   (c) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}$
   (d) $\hat{\beta} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$
   (e) $\hat{\beta} = \frac{y_n-y_1}{x_n-x_1}$
   (f) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$
   (g) $\hat{\beta} = \frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{x_1^2+\ldots+x_n^2}$
   (h) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x^2})^2}$
   (i) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})(\overline{y}-y_i)}{\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x^2})^2}$
   (j) $\hat{\beta} = \frac{y_1+2y_2+\ldots+ny_n}{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}$
   (k) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^n i(x_i-\overline{x})}$
   (l) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$
   (m) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i-\overline{y}}{x_i-\overline{x}}$

8. Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta \cdot i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$. Какая из оценок $\hat{\beta}$ и $\tilde{\beta}$ является более эффективной?
   (a) $\hat{\beta} = y_1$ и $\tilde{\beta} = y_2/2$
   (b) $\hat{\beta} = y_1$ и $\tilde{\beta} = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}\frac{y_2}{2}$
   (c) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\frac{y_1}{1} + \ldots + \frac{y_n}{n}$ и $\tilde{\beta} = \frac{1\cdot y_1+\ldots+n\cdot y_n}{1^2+\ldots+n^2}$

3 Многомерный МНК без матриц

1. Эконометрэсса Ширли зашла в пустую аудиторию, где царил приятный полумрак, и увидела на доске до боли знакомую надпись:

$$\hat{y} = \underset{(2.37)}{1.1} - \underset{(-0.4)}{0.7} \cdot x_2 + \underset{(3.15)}{0.9} \cdot x_3 - \underset{(-0.67)}{19} \cdot x_4$$

   Помогите эконометрэссе Ширли определить, что находится в скобках
   (a) P-значения
   (b) t-статистики
   (c) стандартные ошибки коэффициентов
   (d) R^2 скорректированный на номер коэффициента
   (e) показатели VIF для каждого коэффициента

   t-статистики

2. Для нормальной регрессии с 5-ю факторами (включая свободный член) известны границы симметричного по вероятности 80% доверительного интервала для дисперсии σ_ε^2: $A = 45$, $B = 87.942$.

(a) Определите количество наблюдений в выборке

(b) Вычислите $\hat{\sigma}^2_\varepsilon$

(a) Поскольку $\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon(n-k)}{\sigma^2_\varepsilon} \sim \chi^2(n-k)$, где $\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{RSS}{n-k}$, $k=5$. $P(\chi^2_l < \frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\sigma^2_\varepsilon} < \chi^2_u) = 0.8$. Преобразовав, получим $P(\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon(n-5)}{\chi^2_u} < \sigma^2_\varepsilon < \frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon(n-5)}{\chi^2_l}) = 0.8$, где $\chi^2_u = \chi^2_{n-5;0.1}$, $\chi^2_l = \chi^2_{n-5;0.9}$ — соответствующие квантили. По условию $\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon(n-5)}{\chi^2_l} = A = 45$, $\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon(n-5)}{\chi^2_u} = B = 87.942$. Поделим B на A, отсюда следует $\frac{\chi^2_u}{\chi^2_l} = 1.95426$. Перебором квантилей в таблице для хи-квадрат распределения мы находим, что $\frac{\chi^2_{30;0.1}}{\chi^2_{30;0.9}} = \frac{40.256}{20.599} = 1.95426$. Значит, $n-5=30$, отсюда следует, что $n=35$.

(b) $\hat{\sigma}^2_\varepsilon = 45\frac{\chi^2_u}{n-5} = 45\frac{40.256}{30} = 60.384$

4 МНК с матрицами и вероятностями

1. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель.
   (a) Сформулируйте теорему Гаусса-Маркова
   (b) Верно ли, что оценка $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ несмещённая?
   (c) В условиях теоремы Гаусса-Маркова найдите ковариационную матрицу $\hat{\beta}$
2. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель и $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1}X' + A)y$ — несмещённая оценка вектора неизвестных параметров β. Верно ли, что $AX = 0$?
3. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Найдите коэффициент корреляции $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.
4. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».
5. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».
6. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».
7. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель. Верно ли, что $\hat{\varepsilon}'\hat{y} = 0$ и $\hat{y}'\hat{\varepsilon} = 0$? да, да
8. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma^2_\varepsilon I$. Пусть A — неслучайная матрица размера $k \times k$, $\det(A) \neq 0$. Совершается преобразование регрессоров по правилу $Z = XA$. В преобразованных регрессорах уравнение выглядит так: $y = Z\gamma + u$, где $\mathbb{E}(u) = 0$, $\mathrm{Var}(u) = \sigma^2_u I$.
   (a) Как связаны между собой МНК-оценки $\hat{\beta}$ и $\hat{\gamma}$?

(b) Как связаны между собой векторы остатков регрессий?

(c) Как связаны между собой прогнозные значения, полученные по двум регрессиям?

(a) $\hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'y = A^{-1}(X'X)^{-1}(A')^{-1}A'X'y = A^{-1}(X'X)^{-1}X'y = A^{-1}\hat{\beta}$

(b) $\hat{u} = y - Z\hat{\gamma} = y - XAA^{-1}\hat{\beta} = y - X\hat{\beta} = \hat{\varepsilon}$

(c) Пусть $z^0 = \begin{pmatrix} 1 & z_1^0 & \ldots & z_{k-1}^0 \end{pmatrix}$ — вектор размера $1 \times k$ и $x^0 = \begin{pmatrix} 1 & x_1^0 & \ldots & x_{k-1}^0 \end{pmatrix}$ — вектор размера $1 \times k$. Оба эти вектора представляют собой значения факторов. Тогда $z^0 = x^0 A$ и прогнозное значение для регрессии с преобразованными факторами равно $z^0\hat{\gamma} = x^0 AA^{-1}\hat{\beta} = x^0\hat{\beta}$ прогнозному значению для регрессии с исходными факторами.

9. Рассмотрим оценку вида $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y$ для вектора коэффициентов регрессионного уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, удовлетворяющего условиям классической регрессионной модели. Найдите $\mathbb{E}(\tilde{\beta})$ и $\mathrm{Var}(\tilde{\beta})$.

(a) $\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'\mathbb{E}(y) = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'X\beta = \beta + \gamma X'X\beta$

(b) $\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) = \mathrm{Var}(((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y) = \mathrm{Var}(((X'X)^{-1} + \gamma I)X'\varepsilon) =$
$= (((X'X)^{-1} + \gamma I)X')\,\mathrm{Var}(\varepsilon)(((X'X)^{-1} + \gamma I)X')' =$
$= (((X'X)^{-1} + \gamma I)X')\sigma_\varepsilon^2 I(((X'X)^{-1} + \gamma I)X')' = \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + \gamma I)X'X((X'X)^{-1} + \gamma I) =$
$= \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + \gamma I)(I + \gamma X'X) = \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + 2\gamma I + \gamma^2 X'X)$

10. Верно ли, что при невырожденном преобразовании факторов R^2 не меняется? А именно, пусть заданы две регрессионные модели: $y = X\beta + \varepsilon$ и $y = Z\alpha + u$, где y — вектор размера $n \times 1$, X и Z — матрицы размера $n \times k$, β и α — вектора рамзера $k \times 1$, ε и u — вектора размера $n \times 1$, а также $Z = XD$, $\det(D) \neq 0$. Верно ли, что коэффициенты детерминации представленных выше моделей равны между собой?

11. Верно ли, что при невырожденном преобразовании факторов RSS не меняется. А именно, пусть заданы две регрессиионные модели: $y = X\beta + \varepsilon$ и $y = Z\alpha + u$, где y — вектор размера $n \times 1$, X и Z — матрицы размера $n \times k$, β и α — вектора рамзера $k \times 1$, ε и u — вектора размера $n \times 1$, а также $Z = XD$, $\det(D) \neq 0$. Верно ли, что сумма квадратов остатков в представленных выше моделях равны между собой?

12. Пусть регрессионная модель $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, задана в матричном виде при помощи уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}^T$. Известно, что $\mathbb{E}\varepsilon = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon) = 4 \cdot I$. Известно также, что:

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

(a) $\mathrm{Var}(\varepsilon_1)$

(b) $\mathrm{Var}(\beta_1)$

(c) $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)$

(d) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)$

(e) $\mathbb{E}(\hat{\beta}_1^2) - \beta_1^2$

(f) $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$

(g) $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$

(h) $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$

(i) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)$

(j) $\mathrm{Var}(\beta_2 - \beta_3)$

(k) $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$

(l) $\widehat{\mathrm{Corr}}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$

(m) $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2)$

(n) $\hat{\sigma}^2$

5 Линейная алгебра

1. Найдите каждую из следующих матриц в каждой из следующих степеней $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, -1, 100.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую (перпендикуляр) вектора u_1 на линейное подпространство $L = \mathcal{L}(u_2)$, порождённое вектором u_2, если

   (a) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

3. Найдите обратные матрицы ко всем матрицам, представленным ниже.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Найдите ранг следующих матриц в зависимости от значений параметра λ.

   (a) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-2\lambda \\ 1+\lambda & 1+3\lambda \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$

5. Пусть $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц и $\pi = i(i'i)^{-1}i'$. Найдите:
   (a) $\mathrm{tr}(\pi)$ и $\mathrm{rk}(\pi)$
   (b) $\mathrm{tr}(I - \pi)$ и $\mathrm{rk}(I - \pi)$
6. Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, и пусть $\mathrm{rk}(X) = k$. Верно ли, что матрица $P = X(X'X)^{-1}X'$ симметрична и идемпотентна?
7. Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, и пусть $\mathrm{rk}(X) = k$. Верно ли, что каждый столбец матрицы $P = X(X'X)^{-1}X'$ является собственным вектором матрицы P, отвечающим собственному значению 1?
8. Пусть X — матрица размера $n \times k$, где $n > k$, пусть $\mathrm{rk}(X) = k$ и $P = X(X'X)^{-1}X'$. Верно ли, что каждый вектор-столбец u, такой что $X'u = 0$, является собственным вектором матрицы P, отвечающим собственному значению 0?
9. Верно ли, что для любых матриц A размера $m \times n$ и матриц B размера $n \times m$ выполняется равенство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$?
10. Верно ли, что собственные значения симметричной и идемпотентной матрицы могут быть только нулями и единицами?
11. Пусть P — матрица размера $n \times n$, $P' = P$, $P^2 = P$. Верно ли, что $\mathrm{rk}(P) = \mathrm{tr}(P)$?
12. Верно ли, что для симметричной матрицы собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны?
13. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $P = X(X'X)^{-1}X'$, если
   (a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
   (b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
   (c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6 Случайные вектора

1. Пусть $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)'$ — случайный вектор доходностей пяти ценных бумаг. Известно, что $\mathbb{E}(y') = (5, 10, 20, 30, 40)$, $\mathrm{Var}(y_1) = 0$, $\mathrm{Var}(y_2) = 10$, $\mathrm{Var}(y_3) = 20$, $\mathrm{Var}(y_4) = 40$, $\mathrm{Var}(y_5) = 40$ и
$$\mathrm{Corr}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.3 & -0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 1 & 0.3 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$
   С помощью компьютера найдите ответы на вопросы:
   (a) Какая ценная бумага является безрисковой?

(b) Найдите ковариационную матрицу $\mathrm{Var}(y)$

(c) Найдите ожидаемую доходность и дисперсию доходности портфеля, доли ценных бумаг в котором равны соответственно:

i. $\alpha = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)'$

ii. $\alpha = (0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4)'$

iii. $\alpha = (0.0, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1)'$

(d) Составьте из данных бумаг пять некоррелированных портфелей

2. Пусть $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)' \sim N(0, I)$.

(a) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'\pi\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon)$ и $\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')$

(b) Как распределены случайные величины $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$?

(c) Запишите выражения $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$, используя знак суммы

3. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.

(a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$

(b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$

(c) При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$

4. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.

(a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$

(b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$

(c) При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$

5. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.

(a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$.

(b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$.

(c) При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$.

6. Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Var}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(y)$, $\mathrm{Var}(y)$ и $\mathbb{E}(z)$, если

(a) $y = x - \mathbb{E}(x)$

(b) $y = \mathrm{Var}(x)x$

(c) $y = \mathrm{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$

(d) $y = \mathrm{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$

(e) $y = \mathrm{Var}(x)^{-1/2}(x - \mathbb{E}(x))$

(f) $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$

(g) $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$

(h) $z = x' \operatorname{Var}(x) x$

(i) $z = x' \operatorname{Var}(x)^{-1} x$

7. Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Var}(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(y)$, $\operatorname{Var}(y)$ и $\mathbb{E}(z)$, если

   (a) $y = x - \mathbb{E}(x)$

   (b) $y = \operatorname{Var}(x) x$

   (c) $y = \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$

   (d) $y = \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$

   (e) $y = \operatorname{Var}(x)^{-1/2}(x - \mathbb{E}(x))$

   (f) $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)(x - \mathbb{E}(x))$

   (g) $z = (x - \mathbb{E}(x))' \operatorname{Var}(x)^{-1}(x - \mathbb{E}(x))$

   (h) $z = x' \operatorname{Var}(x) x$

   (i) $z = x' \operatorname{Var}(x)^{-1} x$

8. Известно, что случайные величины x_1, x_2 и x_3 имеют следующие характеристики:

   (a) $\mathbb{E}(x_1) = 5$, $\mathbb{E}(x_2) = 10$, $\mathbb{E}(x_3) = 8$

   (b) $\operatorname{Var}(x_1) = 6$, $\operatorname{Var}(x_2) = 14$, $\operatorname{Var}(x_3) = 1$

   (c) $\operatorname{Cov}(x_1, x_2) = 3$, $\operatorname{Cov}(x_1, x_3) = 1$, $\operatorname{Cov}(x_2, x_3) = 0$

   Пусть случайные величины y_1, y_2 и y_3, представляют собой линейные комбинации случайных величин X_1, X_2 и X_3:

$$y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

$$y_2 = 7x_1 - 4x_2 + x_3$$

$$y_3 = -2x_1 - x_2 + 4x_3$$

   (a) Выпишите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$

   (b) Напишите матрицу A, которая позволяет перейти от случайного вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$ к случайному вектору $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^T$

   (c) С помощью матрицы A найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^T$

9. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — случайные величины, такие что $\operatorname{Var}(\xi_1) = 2$, $\operatorname{Var}(\xi_2) = 3$, $\operatorname{Var}(\xi_3) = 4$, $\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 1$, $\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_3) = -1$, $\operatorname{Cov}(\xi_2, \xi_3) = 0$. Пусть $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}^T$. Найдите $\operatorname{Var}(\xi)$ и $\operatorname{Var}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$.

   По определению ковариационной матрицы:

$$\operatorname{Var}(\xi) = \begin{pmatrix} \operatorname{Var}(\xi_1) & \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) & \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_3) \\ \operatorname{Cov}(\xi_2, \xi_1) & \operatorname{Var}(\xi_2) & \operatorname{Cov}(\xi_2, \xi_3) \\ \operatorname{Cov}(\xi_3, \xi_1) & \operatorname{Cov}(\xi_3, \xi_2) & \operatorname{Var}(\xi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = \operatorname{Var}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Var}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

10. Пусть $h = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Var}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $z_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(z_1)$ и $\operatorname{Var}(z_1)$.

$$\mathbb{E}(z_1) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{E}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var}(z_1) = \operatorname{Var}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Var}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Пусть $h = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $z_2 = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(z_2)$ и $\mathrm{Var}(z_2)$

$\mathbb{E}(z_2) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathbb{E}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$

Поскольку $z_2 = z_1 + \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, где z_1 — случайный вектор из предыдущей задачи, то $\mathrm{Var}(z_2) = \mathrm{Var}(z_1)$. Сдвиг случайного вектора на вектор-константу не меняет его ковариационную матрицу.

12. Пусть $h = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $z_3 = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(z_3)$ и $\mathrm{Var}(z_3)$

В данном примере проиллюстрирована процедура центрирования случайного вектора — процедура вычитания из случайного вектора его математического ожидания.

$\mathbb{E}(z_3) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix}\right) = \mathbb{E}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} - \mathbb{E}\begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

Заметим, что вектор z_3 отличается от вектора z_1 (из задачи 15) сдвигом на вектор-константу $\begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix}$, поэтому $\mathrm{Var}(z_3) = \mathrm{Var}(z_1)$.

13. Пусть r_1, r_2 и r_3 — годовые доходности трёх рисковых финансовых инструментов. Пусть α_1, α_2 и α_3 — доли, с которыми данные инструменты входят в портфель инвестора. Считаем, что $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i = 1$ и $\alpha_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, 2, 3$. Пусть $r = \begin{pmatrix}r_1 & r_2 & r_3\end{pmatrix}^T$, $\mathbb{E}(r) = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}^T$, $\mathrm{Var}(r) = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}$. Параметры $\{a_i\}$ и $\{c_i\}$ известны.

    (a) Найдите годовую доходность портфеля П инвестора

    (b) Докажите, что дисперсия доходности портфеля П равна $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_i c_{ij}\alpha_j$

    (c) Для случая $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha 3 = 0.4$, $\mathbb{E}(r) = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0.10 & 0.06 & 0.05\end{pmatrix}^T$, $\mathrm{Var}(r) = \begin{pmatrix}0.04 & 0 & -0.005\\ 0 & 0.01 & 0\\ -0.005 & 0 & 0.0025\end{pmatrix}$ найдите $\mathbb{E}(\Pi)$ и $\mathrm{Var}(\Pi)$

14. Пусть $h = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $z_3 = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix}$; $z_4 = \mathrm{Var}(h)^{-1/2}z_3$. Найдите $\mathbb{E}(z_4)$ и $\mathrm{Var}(z_4)$

15. Пусть $h = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(h) = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$; $\mathrm{Var}(h) = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; $z_3 = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix}$; $z_4 = \mathrm{Var}(h)^{-1/2}z_3$. Найдите $\mathbb{E}(z_4)$ и $\mathrm{Var}(z_4)$

7 Многомерное нормальное и квадратичные формы

1. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim N(0, I)$ и матрица A представлена ниже. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' A\varepsilon)$ и распределение случайной величины $\varepsilon' A\varepsilon$.

    (a) $\begin{pmatrix}2/3 & -1/3 & 1/3\\ -1/3 & 2/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix}2/3 & -1/3 & -1/3\\ -1/3 & 2/3 & -1/3\\ -1/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}$

    (c) $\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & -1/3\\ 1/3 & 1/3 & -1/3\\ -1/3 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}$

    (d) $\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Пусть $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)' \sim N(0, I)$.
   (a) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'\pi\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon)$ и $\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')$
   (b) Как распределены случайные величины $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$?
   (c) Запишите выражения $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$, используя знак суммы

3. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.
   (a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$
   (b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$
   (c) При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$

4. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.
   (a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$
   (b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'P\varepsilon)$
   (c) При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon'P\varepsilon > q) = 0.1$

5. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, случайные величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0, 1)$.
   (a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon'P\varepsilon$, где $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}'$.

(b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' P\varepsilon)$.

(c) При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}(\varepsilon' P\varepsilon > q) = 0.1$.

6. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim N(0, I)$. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' P\varepsilon)$ и распределение случайной величины $\varepsilon' P\varepsilon$, если $P = X(X'X)^{-1}X'$ и матрица X' представлена ниже.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Пусть $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \sim N(0, \sigma^2 I)$, $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$, X — матрица размера $n \times k$, $P = X(X'X)^{-1}X'$. Найдите:

   (a) $\mathbb{E}(\varepsilon'(P - \pi)\varepsilon)$

   (b) $\mathbb{E}(\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon)$

   (c) $\mathbb{E}(\varepsilon' P\varepsilon)$

   (d) $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2)$

8. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim N(0, 4I)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите:

   (a) $\mathbb{E}(\varepsilon' A\varepsilon)$

   (b) $\mathbb{E}(\varepsilon'(I - A)\varepsilon)$

9. Пусть $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ — случайный вектор, имеющий двумерное нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Найдите Σ^{-1}

   (b) Найдите $\Sigma^{-1/2}$

   (c) Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $y = \Sigma^{-1/2} \cdot (x - \mu)$

   (d) Какое распределение имеет вектор y из предыдущего пункта?

   (e) Найдите распределение случайной величины $q = (x - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu)$

10. Пусть $z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}^T \sim N(0, I_{3x3})$, $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$,
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

   (a) Найдите $\mathbb{E}x$ и $\mathrm{Var}(x)$ случайного вектора $x = A \cdot z + b$

   (b) Найдите распределение случайного вектора x

   (c) Найдите $\mathbb{E}q$ случайной величины $q = z^T \cdot K \cdot z$

   (d) Найдите распределение случайной величины q

8 Задачи по программированию

1. Начиная с какого знака в числе $\pi = 3.1415\ldots$ можно обнаружить твой номер телефона? Первый 10 миллионов знаков числа π можно найти на сайте http://code.google.com/p/pc2012-grupo-18-turma-b/downloads/list. Если не хватает, то миллиард знаков, файл размера примерно в 1 гигабайт, доступен по ссылке http://stuff.mit.edu/afs/sipb/contrib/pi/. Настоящие челябинцы рассчитывают π самостоятельно. Краткая история о том, как маньяки считали π до 10 миллиардов знаков и потеряли полгода из-за сбоев компьютерного железа, http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-10t/details.html.