Задача 1. При помощи метода наименьших квадратов найдите оценку неизвестного параметра θ в следующих моделях:

(a) $Y_i = \theta + \theta x_i + \varepsilon_i$

(b) $Y_i = \theta - \theta x_i + \varepsilon_i$

(c) $\ln Y_i = \theta + ln x_i + \varepsilon_i$

(d) $Y_i = \theta + x_i + \varepsilon_i$

(e) $Y_i = 1 + \theta x_i + \varepsilon_i$

(f) $Y_i = \theta / x_i + \varepsilon_i$

(g) $Y_i = \theta x_{i1} + (1-\theta) x_{i2} + \varepsilon_i$

Задача 2. Покажите, что для моделей $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, $Z_i = \gamma + \delta x_i + \upsilon_i$ и $Y_i + Z_i = \mu + \lambda x_i + \xi_i$ МНК-оценки связаны соотношениями $\hat{\mu} = \hat{\alpha} + \hat{\gamma}$ и $\hat{\lambda} = \hat{\beta} + \hat{\delta}$.

Задача 3. Найдите МНК-оценки параметров α и β в модели $Y_i = \alpha + \beta Y_i + \varepsilon_i$.

Задача 4. Рассмотрите модели $Y_i = \alpha + \beta(Y_i + Z_i) + \varepsilon_i$, $Z_i = \gamma + \delta(Y_i + Z_i) + \varepsilon_i$ и покажите, что $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 0$ и $\hat{\beta} + \hat{\delta} = 1$.

Задача 5. Как связаны МНК-оценки параметров α, β и γ, δ в моделях $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ и $Z_i = \gamma + \delta x_i + \upsilon_i$, если $Z_i = 2Y_i$.

Задача 6. Для модели $Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$ решите условную задачу о наименьших квадратах: $Q(\beta_1, \beta_2) := \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})^2 \to \min\limits_{\beta_1 + \beta_2 = 1}$

Задача 7. Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Найдите $\mathbb{E}\hat{\beta}$. Какие из следующих оценок параметра β являются несмещенными:

(a) $\hat{\beta} = \frac{Y_1}{x_1}$

(b) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{Y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{Y_n}{x_n}$

(c) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{Y_1}{x_1} + \ldots + \frac{Y_n}{x_n}\right)$

(d) $\hat{\beta} = \frac{\overline{Y}}{\overline{x}}$

(e) $\hat{\beta} = \frac{Y_n - Y_1}{x_n - x_1}$

(f) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}\frac{Y_n - Y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

(g) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{n}\frac{Y_3 - Y_2}{x_3 - x_2} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{Y_n - Y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

(h) $\hat{\beta} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} + \frac{Y_3 - Y_2}{x_3 - x_2} + \ldots + \frac{Y_n - Y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right)$

(i) $\hat{\beta} = \frac{x_1 Y_1 + \ldots + x_n Y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

(j) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{Y_n - Y_1}{x_n - x_1} + \frac{1}{2n}\left(\frac{Y_1}{x_1} + \ldots + \frac{Y_n}{x_n}\right)$

(k) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{Y_n - Y_1}{x_n - x_1} + \frac{1}{2}\frac{x_1 Y_1 + \ldots + x_n Y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

(l) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x^2})^2}$

(m) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(\overline{Y}-Y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x^2})^2}$

(n) $\hat{\beta} = \frac{Y_1+2Y_2+\ldots+nY_n}{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}$

(o) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} i(x_i-\overline{x})}$

(p) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}$

(q) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i-\overline{Y}}{x_i-\overline{x}}$

Задача 8. Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Найдите $\mathrm{var}(\hat{\beta})$. *НЕТ ВОПРОСА!*

(a) $\hat{\beta} = \frac{Y_1}{x_1}$

(b) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{Y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{Y_n}{x_n}$

(c) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{Y_1}{x_1} + \ldots + \frac{Y_n}{x_n}\right)$

(d) $\hat{\beta} = \frac{\overline{Y}}{\overline{x}}$

(e) $\hat{\beta} = \frac{Y_n-Y_1}{x_n-x_1}$

(f) $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{Y_2-Y_1}{x_2-x_1} + \frac{1}{2}\frac{Y_n-Y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$

(g) $\hat{\beta} = \frac{x_1Y_1+\ldots+x_nY_n}{x_1^2+\ldots+x_n^2}$

(h) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x^2})^2}$

(i) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(\overline{Y}-Y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x^2})^2}$

(j) $\hat{\beta} = \frac{Y_1+2Y_2+\ldots+nY_n}{x_1+2x_2+\ldots+nx_n}$

(k) $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} i(x_i-\overline{x})}$

(l) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}$

(m) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i-\overline{Y}}{x_i-\overline{x}}$

Задача 9. Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $Y_i = \beta \cdot i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$. Какая из оценок $\hat{\beta}$ и $\tilde{\beta}$ является более эффективной?

(a) $\hat{\beta} = Y_1$ и $\tilde{\beta} = Y_2/2$

(b) $\hat{\beta} = Y_1$ и $\tilde{\beta} = \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}\frac{Y_2}{2}$

(c) $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{Y_1}{1} + \ldots + \frac{Y_n}{n}\right)$ и $\tilde{\beta} = \frac{1\cdot Y_1+\ldots+n\cdot Y_n}{1^2+\ldots+n^2}$

Задача 10. Известно, что случайные величины X_1, X_2 и X_3 имеют следующие характеристики:

1. $\mathbb{E}(X_1) = 5$, $\mathbb{E}(X_2) = 10$, $\mathbb{E}(X_3) = 8$
2. $\operatorname{var}(X_1) = 6$, $\operatorname{var}(X_2) = 14$, $\operatorname{var}(X_3) = 1$
3. $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 3$, $\operatorname{cov}(X_1, X_3) = 1$, $\operatorname{cov}(X_2, X_3) = 0$

Пусть случайные величины Y_1, Y_2 и Y_3, представляют собой линейные комбинации случайных величин X_1, X_2 и X_3:

$$Y_1 = X_1 + 3X_2 - 2X_3$$
$$Y_1 = 7X_1 - 4X_2 + X_3$$
$$Y_1 = -2X_1 - X_2 + 4X_3$$

(a) Выпишите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}^T$

(b) Напишите матрицу A, которая позволяет перейти от случайного вектора $X = (X_1 X_2 X_3)^T$ к случайному вектору $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix}^T$

(c) С помощью матрицы A найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix}^T$

Задача 11. Пусть $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}^T$ — случайный вектор, имеющий двумерное нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Найдите Σ^{-1}

(b) Найдите $\Sigma^{-1/2}$

(c) Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу случайного вектора $Y = \Sigma^{-1/2} \cdot (X - \mu)$

(d) Какое распределение имеет вектор Y из предыдущего пункта?

(e) Найдите распределение случайной величины $Q = (X - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (X - \mu)$

Задача 12. Пусть $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}^T \sim N(0, I_{3x3})$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$,
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(a) Найдите $\mathbb{E}X$ и $\operatorname{var}(X)$ случайного вектора $X = A \cdot Z + b$

(b) Найдите распределение случайного вектора X

(c) Найдите $\mathbb{E}Q$ случайной величины $Q = Z^T \cdot K \cdot Z$

(d) Найдите распределение случайной величины Q

Задача 13. Пусть регрессионная модель $Y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, задана в матричном виде при помощи уравнения $Y = X\beta + \varepsilon$, где $\beta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}^T$. Известно, что $\mathbb{E}\varepsilon = 0$ и $\mathrm{var}(\varepsilon) = 4 \cdot I$. Известно также, что:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для удобства расчётов ниже приведены матрицы:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

(a) $\mathrm{var}(\varepsilon_1)$

(b) $\mathrm{var}(\alpha)$

(c) $\mathrm{var}(\hat{\alpha})$

(d) $\widehat{\mathrm{var}}(\hat{\alpha})$

(e) $\mathbb{E}(\hat{\alpha}^2) - \alpha^2$

(f) $\mathrm{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$

(g) $\widehat{\mathrm{cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$

(h) $\mathrm{var}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)$

(i) $\widehat{\mathrm{var}}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)$

(j) $\mathrm{var}(\beta_1 - \beta_2)$

(k) $\mathrm{corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$

(l) $\widehat{\mathrm{corr}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$

(m) $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2)$

(n) $\hat{\sigma}^2$

Задача 14. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — случайные величины, такие что $\mathrm{var}(\xi_1) = 2$, $\mathrm{var}(\xi_2) = 3$, $\mathrm{var}(\xi_3) = 4$, $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = 1$, $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_3) = -1$, $\mathrm{cov}(\xi_2, \xi_3) = 0$. Пусть $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}^T$. Найдите $\mathrm{V}(\xi)$ и $\mathrm{var}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$.

Решение. По определению ковариационной матрицы:

$$\mathrm{V}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(\xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) & \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_3) \\ \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_1) & \mathrm{var}(\xi_2) & \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_3) \\ \mathrm{cov}(\xi_3, \xi_1) & \mathrm{cov}(\xi_3, \xi_2) & \mathrm{var}(\xi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{var}(\xi_1+\xi_2+\xi_3) = \mathrm{V}(\xi_1+\xi_2+\xi_3) = \mathrm{V}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{V} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

Задача 15. Пусть $H = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{V}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $Z_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(Z_1)$ и $\mathrm{V}(Z_1)$.

Решение. $\mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{E} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{V}(Z_1) = \mathrm{V}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{V} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задача 16. Пусть $H = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{V}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $Z_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(Z_2)$ и $\mathrm{V}(Z_2)$

Решение. $\mathbb{E}(Z_2) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{E} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Поскольку $Z_2 = Z_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где Z_1 — случайный вектор из предыдущей задачи, то $\mathrm{V}(Z_2) = \mathrm{V}(Z_1)$ *(сдвиг случайного вектора на вектор-константу не меняет его ковариационную матрицу).*

Задача 17. Пусть $H = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{V}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $Z_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(Z_3)$ и $\mathrm{V}(Z_3)$

Решение. *В данном примере проиллюстрирована процедура центрирования случайного вектора — процедура вычитания из случайного вектора его математического ожидания.*

$\mathbb{E}(Z_3) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{E} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \mathbb{E} \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Заметим, что вектор Z_3 отличается от вектора Z_1 (из задачи 15) сдвигом на вектор-константу $\begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}$, поэтому $\mathrm{V}(Z_3) = \mathrm{V}(Z_1)$.

Задача 18. Пусть r_1, r_2 и r_3 — годовые доходности трёх рисковых финансовых инструментов. Пусть α_1, α_2 и α_3 — доли, с которыми данные инструменты входят в портфель инвестора. Считаем, что $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ и $\alpha_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, 2, 3$. Пусть $r = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}^T$, $\mathbb{E}(r) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^T$, $\mathrm{V}(r) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$. Параметры $\{a_i\}$ и $\{c_i\}$ известны.

(a) Найдите годовую доходность портфеля Π инвестора

(b) Докажите, что дисперсия доходности портфеля Π равна $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_i c_{ij} \alpha_j$

(c) Для случая $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha 3 = 0.4$, $\mathbb{E}(r) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.06 & 0.05 \end{pmatrix}^T$, $\mathrm{V}(r) = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & -0.005 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ -0.005 & 0 & 0.0025 \end{pmatrix}$ найдите $\mathbb{E}(\Pi)$ и $\mathrm{var}(\Pi)$

Задача 19. Пусть $H = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{V}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $Z_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}$; $Z_4 = \mathrm{V}(H)^{-1/2} Z_3$. Найдите $\mathbb{E}(Z_4)$ и $\mathrm{V}(Z_4)$

Задача 20. Пусть $H = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{V}(H) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $Z_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}$; $Z_4 = \mathrm{V}(H)^{-1/2} Z_3$. Найдите $\mathbb{E}(Z_4)$ и $\mathrm{V}(Z_4)$