1. Верно ли, что для любых векторов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ справедливы следующие неравенства?

   (a) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a}) = 0$

   (b) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a}) a_i$

   (c) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a}) b_i$

   (d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

2. Пусть $y_i = \mu + \varepsilon_i$, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. Найдите

   (a) $\mathbb{E}(\overline{y})$

   (b) $\mathrm{Var}(\overline{y})$

   (c) $\mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2\right]$

   (d) $\mathrm{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2\right]$

3. Рассматривается модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких значениях параметров c_i несмещённая оценка $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i}$ имеет наименьшую дисперсию?

4. Найдите каждую из следующих матриц в каждой из следующих степеней $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, -1, 100.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую (перпендикуляр) вектора u_1 на линейное подпространство $L = \mathcal{L}(u_2)$, порождённое вектором u_2, если

   (a) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

6. Найдите обратные матрицы ко всем матрицам, представленным ниже.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. Найдите ранг следующих матриц в зависимости от значений параметра λ.

   (a) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-2\lambda \\ 1+\lambda & 1+3\lambda \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$

8. Пусть $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц и $\pi = i(i'i)^{-1}i'$. Найдите

   (a) $\mathrm{tr}(\pi)$ и $\mathrm{rk}(\pi)$

   (b) $\mathrm{tr}(I-\pi)$ и $\mathrm{rk}(I-\pi)$

9. Пусть $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)' \sim N(0, I)$.

   (a) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon'\pi\varepsilon)$, $\mathbb{E}(\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon)$ и $\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon')$

   (b) Как распределены случайные величины $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$?

   (c) Запишите выражения $\varepsilon'\pi\varepsilon$ и $\varepsilon'(I-\pi)\varepsilon$, используя знак суммы

10. Пусть X — матрица размера $n \times k$, где n > k, и пусть $\text{rk}(X) = k$. Верно ли, что матрица $P = X(X'X)^{-1}X'$ симметрична и идемпотентна?

11. Пусть X — матрица размера $n \times k$, где n > k, и пусть $\text{rk}(X) = k$. Верно ли, что каждый столбец матрицы $P = X(X'X)^{-1}X'$ является собственным вектором матрицы P, отвечающим собственному значению 1?

12. Пусть X — матрица размера $n \times k$, где n > k, пусть $\text{rk}(X) = k$ и $P = X(X'X)^{-1}X'$. Верно ли, что каждый вектор-столбец u, такой что $X'u = 0$, является собственным вектором матрицы P, отвечающим собственному значению 0?

13. Верно ли, что для любых матриц A размера $m \times n$ и матриц B размера $n \times m$ выполняется равенство $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$?

14. Верно ли, что собственные значения симметричной и идемпотентной матрицы могут быть только нулями и единицами?

15. Пусть P — матрица размера $n \times n$, $P' = P$, $P^2 = P$. Верно ли, что $\text{rk}(P) = \text{tr}(P)$?

16. Верно ли, что для симметричной матрицы собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны?

17. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0,1)$.

    (a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon' P \varepsilon$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4)'$

    (b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' P \varepsilon)$

    (c) При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}\{\varepsilon' P \varepsilon > q\} = 0.1$

18. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0,1)$.

    (a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon' P \varepsilon$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4)'$

    (b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' P \varepsilon)$

(c) При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}\big\{\varepsilon' P \varepsilon > q\big\} = 0.1$

19. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = X(X'X)^{-1}X'$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ независимы и одинаково распределены $\sim N(0,1)$.

   (a) Найдите распределение случайной величины $\varepsilon' P \varepsilon$, где $\varepsilon = \Big((\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4)'\Big)$.

   (b) Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' P \varepsilon)$.

   (c) При помощи таблиц найдите такое число q, что $\mathbb{P}\big\{\varepsilon' P \varepsilon > q\big\} = 0.1$.

20. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $P = X(X'X)^{-1}X'$, если

   (a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   (b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

   (c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$