1. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim N(0, I)$ и матрица A представлена ниже. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' A \varepsilon)$ и распределение случайной величины $\varepsilon' A \varepsilon$.

(a) $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim N(0, I)$. Найдите $\mathbb{E}(\varepsilon' P \varepsilon)$ и распределение случайной величины $\varepsilon' P \varepsilon$, если $P = X(X'X)^{-1}X'$ и матрица X' представлена ниже.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель.

   (a) Сформулируйте теорему Гаусса-Маркова

   (b) Верно ли, что оценка $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ несмещённая?

   (c) В условиях теоремы Гаусса-Маркова найдите ковариационную матрицу $\hat{\beta}$

4. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель и $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1}X' + A)Y$ — несмещённая оценка вектора неизвестных параметров β. Верно ли, что $AX = 0$?

5. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$. Найдите коэффициент корреляции $corr(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.

6. Пусть $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Var(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $Var(Y)$ и $\mathbb{E}(Z)$, если

   (a) $Y = X - \mathbb{E}(X)$

   (b) $Y = Var(X)X$

   (c) $Y = Var(X)(X - \mathbb{E}(X))$

   (d) $Y = Var(X)^{-1}(X - \mathbb{E}(X))$

   (e) $Y = Var(X)^{-1/2}(X - \mathbb{E}(X))$

   (f) $Z = (X - \mathbb{E}(X))' Var(X)(X - \mathbb{E}(X))$

(g) $Z = (X - \mathbb{E}(X))' Var(X)^{-1}(X - \mathbb{E}(X))$

(h) $Z = X' Var(X) X$

(i) $Z = X' Var(X)^{-1} X$

7. Пусть $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Var(X) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $Var(Y)$ и $\mathbb{E}(Z)$, если

(a) $Y = X - \mathbb{E}(X)$

(b) $Y = Var(X) X$

(c) $Y = Var(X)(X - \mathbb{E}(X))$

(d) $Y = Var(X)^{-1}(X - \mathbb{E}(X))$

(e) $Y = Var(X)^{-1/2}(X - \mathbb{E}(X))$

(f) $Z = (X - \mathbb{E}(X))' Var(X)(X - \mathbb{E}(X))$

(g) $Z = (X - \mathbb{E}(X))' Var(X)^{-1}(X - \mathbb{E}(X))$

(h) $Z = X' Var(X) X$

(i) $Z = X' Var(X)^{-1} X$

8. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».

9. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».

10. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Пусть $Z = XD$, где $D =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрите «новую» регрессионную модель $y = Z\alpha + u$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Определите, как выражаются «новые» МНК-коэффициенты через «старые».

11. Пусть $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \sim N(0, \sigma^2 I)$, $i = (1, \ldots, 1)'$ — вектор из n единиц, $\pi = i(i'i)^{-1}i'$, X — матрица размера $n \times k$, $P = X(X'X)^{-1}X'$. Найдите

    (a) $\mathbb{E}(\varepsilon'(P - \pi)\varepsilon)$

    (b) $\mathbb{E}(\varepsilon'(I - \pi)\varepsilon)$

    (c) $\mathbb{E}(\varepsilon' P \varepsilon)$

    (d) $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2)$

12. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель. Верно ли, что $\hat{\varepsilon}'\hat{y} = 0$ и $\hat{y}'\hat{\varepsilon} = 0$?

13. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)' \sim N(0, 4I)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите

    (a) $\mathbb{E}(\varepsilon' A \varepsilon)$

    (b) $\mathbb{E}(\varepsilon'(I - A)\varepsilon)$

14. Для нормальной регрессии с 5-ю факторами (включая свободный член) известны границы симметричного по вероятности 80% доверительного интервала для дисперсии σ_ε^2: $A = 45$, $B = 87.942$.

    (a) Определите количество наблюдений в выборке

    (b) Вычислите $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$

    Решение

    (a) Поскольку $\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-k)}{\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2(n-k)$, где $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{RSS}{n-k}$, $k = 5$. $P(\chi_l^2 < \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2} < \chi_u^2) = 0.8$. Преобразовав, получим $P(\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-5)}{\chi_u^2} < \sigma_\varepsilon^2 < \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-5)}{\chi_l^2}) = 0.8$, где $\chi_u^2 = \chi_{n-5;0.1}^2$, $\chi_l^2 = \chi_{n-5;0.9}^2$ — соответствующие квантили. По условию $\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-5)}{\chi_l^2} = A = 45$, $\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-5)}{\chi_u^2} = B = 87.942$. Поделим B на A, отсюда следует $\frac{\chi_u^2}{\chi_l^2} = 1.95426$. Перебором квантилей в таблице для хи-квадрат распределения мы находим, что $\frac{\chi_{30;0.1}^2}{\chi_{30;0.9}^2} = \frac{40.256}{20.599} = 1.95426$. Значит, $n - 5 = 30$, отсюда следует, что $n = 35$.

(b) $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = 45\frac{\chi_u^2}{n-5} = 45\frac{40.256}{30} = 60.384$

15. Пусть $y = X\beta + \varepsilon$ — регрессионная модель, где $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon) = \sigma_{\varepsilon}^2 I$. Пусть A — матрица размера $k \times k, det(A) \neq 0, A = const$. Совершается преобразование регрессоров по правилу $Z = XA$. В преобразованных регрессорах уравнение выглядит так: $y = Z\gamma + u$, где $\mathbb{E}(u) = 0$, $\mathrm{Var}(u) = \sigma_u^2 I$.

    (a) Как связаны между собой МНК-оценки $\hat{\beta}$ и $\hat{\gamma}$?

    (b) Как связаны между собой векторы остатков регрессий?

    (c) Как связаны между собой прогнозные значения, полученные по двум регрессиям?

    Решение

    (a) $\hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'y = A^{-1}(X'X)^{-1}(A')^{-1}A'X'y = A^{-1}(X'X)^{-1}X'y = A^{-1}\hat{\beta}$

    (b) $\hat{u} = y - Z\hat{\gamma} = y - XAA^{-1}\hat{\beta} = y - X\hat{\beta} = \hat{\varepsilon}$

    (c) Пусть $z^0 = \begin{pmatrix} 1 & z_1^0 & \ldots & z_{k-1}^0 \end{pmatrix}$ — вектор размера $1 \times k$ и $x^0 = \begin{pmatrix} 1 & x_1^0 & \ldots & x_{k-1}^0 \end{pmatrix}$ — вектор размера $1 \times k$. Оба эти вектора представляют собой значения факторов. Тогда $z^0 = x^0 A$ и прогнозное значение для регрессии с преобразованными факторами равно $z^0\hat{\gamma} = x^0 AA^{-1}\hat{\beta} = x^0\hat{\beta}$ прогнозному значению для регрессии с исходными факторами.

16. Рассмотрим оценку вида $\tilde{\beta} = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y$ для вектора коэффициентов регрессионного уравнения $y = X\beta + \varepsilon$, удовлетворяющего условиям классической регрессионной модели. Найдите $\mathbb{E}(\tilde{\beta})$ и $Var(\tilde{\beta})$.

    Решение

    (a) $\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'\mathbb{E}(y) = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'X\beta = \beta + \gamma X'X\beta$

    (b) $Var(\tilde{\beta}) = Var(((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y) = Var(((X'X)^{-1} + \gamma I)X'\varepsilon) =$
    $= (((X'X)^{-1} + \gamma I)X')Var(\varepsilon)(((X'X)^{-1} + \gamma I)X')' =$
    $= (((X'X)^{-1} + \gamma I)X')\sigma_{\varepsilon}^2 I(((X'X)^{-1} + \gamma I)X')' = \sigma_{\varepsilon}^2((X'X)^{-1} + \gamma I)X'X((X'X)^{-1} + \gamma I) =$
    $= \sigma_{\varepsilon}^2((X'X)^{-1} + \gamma I)(I + \gamma X'X) = \sigma_{\varepsilon}^2((X'X)^{-1} + 2\gamma I + \gamma^2 X'X)$

17. Верно ли, что при невырожденном преобразовании факторов R^2 не меняется? А именно, пусть заданы две регрессионные модели: $y = X\beta + \varepsilon$ и $y = Z\alpha + u$, где y — вектор размера $n \times 1$, X и Z — матрицы размера $n \times k$, β и α — вектора рамзера $k \times 1$, ε и u — вектора размера $n \times 1$, а также $Z = XD$, $det(D) \neq 0$. Верно ли, что коэффициенты детерминации представленных выше моделей равны между собой?

18. Верно ли, что при невырожденном преобразовании факторов RSS не меняется. А именно, пусть заданы две регрессиионные модели: $y = X\beta + \varepsilon$ и $y = Z\alpha + u$, где y — вектор размера $n \times 1$, X и Z — матрицы размера $n \times k$, β и α — вектора рамзера $k \times 1$, ε и u — вектора размера $n \times 1$, а также $Z = XD$, $det(D) \neq 0$. Верно ли, что сумма квадратов остатков в представленных выше моделях равны между собой?

19. Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^5 y_i^2 = 55, \sum_{i=1}^5 X_i^2 = 3, \sum_{i=1}^5 X_i y_i = 12, \sum_{i=1}^5 y_i = 15, \sum_{i=1}^5 X_i = 3$. Используя их, найдите:

    (a) $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$

    (b) $corr(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$

    (c) TSS

    (d) ESS

    (e) RSS

    (f) R^2

    (g) $\hat{\sigma}^2$

    Проверьте следующие гипотезы:

    (a) $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 2 \\ H_1 : \beta_2 \neq 2 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 1 \end{cases}$

20. Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \ldots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^5 y_i^2 = 55, \sum_{i=1}^5 X_i^2 = 2, \sum_{i=1}^5 X_i y_i = 9, \sum_{i=1}^5 y_i = 15, \sum_{i=1}^5 X_i = 2$. Используя их, найдите:

    (a) $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$

    (b) $corr(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$

    (c) TSS

    (d) ESS

    (e) RSS

(f) R^2

(g) $\hat{\sigma}^2$

Проверьте следующие гипотезы:

(a) $\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 2 \\ H_1 : \beta_2 \neq 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 1 \end{cases}$