

Праздник 1. Вспомнить всё!

1. Найдите длины векторов  $a = (1, 1, 1, 1)$  и  $b = (1, 2, 3, 4)$  и косинус угла между ними. Найдите один любой вектор, перпендикулярный вектору  $a$ .
2. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах
3. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$$

- (a) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы
  - (b) Найдите  $\det(A)$ ,  $\operatorname{tr}(A)$
  - (c) Найдите обратную матрицу,  $A^{-1}$ , ее собственные векторы и собственные числа
4. Известно, что  $X$  — матрица размера  $n \times k$  и  $n > k$ , известно, что  $X'X$  обратима. Рассмотрим матрицу  $H = X(X'X)^{-1}X'$ . Укажите размер матрицы  $H$ , найдите  $H^{2015}$ ,  $\operatorname{tr}(H)$ ,  $\det(H)$ , собственные числа матрицы  $H$ .
  5. Для случайных величин  $X$  и  $Y$  заданы следующие значения:  $\mathbb{E}(X) = 1$ ,  $\mathbb{E}(Y) = 4$ ,  $\mathbb{E}(XY) = 8$ ,  $\mathbb{V}\operatorname{ar}(X) = \mathbb{V}\operatorname{ar}(Y) = 16$ . Для случайных величин  $U = X + Y$  и  $V = X - Y$  вычислите:
    - (a)  $\mathbb{E}(U)$ ,  $\mathbb{V}\operatorname{ar}(U)$ ,  $\mathbb{E}(V)$ ,  $\mathbb{V}\operatorname{ar}(V)$ ,  $\operatorname{Cov}(U, V)$
    - (b) Можно ли утверждать, что случайные величины  $U$  и  $V$  независимы?
  6. Вася ведёт блог. Обозначим  $X_i$  — количество слов в  $i$ -ой записи. После первого года он по 200 своим записям обнаружил, что  $\bar{X}_{200} = 95$  и выборочное стандартное отклонение равно 300 слов. На уровне значимости  $\alpha = 0.15$  проверьте гипотезу о том, что  $\mu = 100$  против альтернативной гипотезы  $\mu \neq 100$ . Постройте 85-ти процентный доверительный интервал для  $\mu$ .
  7. Саша правильно решит задачу с вероятностью 0.8, Маша, независимо от Саши (!), с вероятностью 0.7. Какова вероятность того, что Маша верно решила задачу, если задачу решил только кто-то один из них?

Праздник 1. Вспомнить всё!

1. Найдите длины векторов  $a = (1, 1, 1, 1)$  и  $b = (1, 2, 3, 4)$  и косинус угла между ними. Найдите один любой вектор, перпендикулярный вектору  $a$ .
2. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах
3. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$$

- (a) Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы
  - (b) Найдите  $\det(A)$ ,  $\operatorname{tr}(A)$
  - (c) Найдите обратную матрицу,  $A^{-1}$ , ее собственные векторы и собственные числа
4. Известно, что  $X$  — матрица размера  $n \times k$  и  $n > k$ , известно, что  $X'X$  обратима. Рассмотрим матрицу  $H = X(X'X)^{-1}X'$ . Укажите размер матрицы  $H$ , найдите  $H^{2015}$ ,  $\operatorname{tr}(H)$ ,  $\det(H)$ , собственные числа матрицы  $H$ .
  5. Для случайных величин  $X$  и  $Y$  заданы следующие значения:  $\mathbb{E}(X) = 1$ ,  $\mathbb{E}(Y) = 4$ ,  $\mathbb{E}(XY) = 8$ ,  $\mathbb{V}\operatorname{ar}(X) = \mathbb{V}\operatorname{ar}(Y) = 16$ . Для случайных величин  $U = X + Y$  и  $V = X - Y$  вычислите:
    - (a)  $\mathbb{E}(U)$ ,  $\mathbb{V}\operatorname{ar}(U)$ ,  $\mathbb{E}(V)$ ,  $\mathbb{V}\operatorname{ar}(V)$ ,  $\operatorname{Cov}(U, V)$
    - (b) Можно ли утверждать, что случайные величины  $U$  и  $V$  независимы?
  6. Вася ведёт блог. Обозначим  $X_i$  — количество слов в  $i$ -ой записи. После первого года он по 200 своим записям обнаружил, что  $\bar{X}_{200} = 95$  и выборочное стандартное отклонение равно 300 слов. На уровне значимости  $\alpha = 0.15$  проверьте гипотезу о том, что  $\mu = 100$  против альтернативной гипотезы  $\mu \neq 100$ . Постройте 85-ти процентный доверительный интервал для  $\mu$ .
  7. Саша правильно решит задачу с вероятностью 0.8, Маша, независимо от Саши (!), с вероятностью 0.7. Какова вероятность того, что Маша верно решила задачу, если задачу решил только кто-то один из них?