Оглавление


```
require(knitr)
opts_chunk$set(cache=FALSE,
               dev="png",dpi=300,
               warning=FALSE,
               tidy=FALSE,
               echo=TRUE,
               out.height="7cm",out.width="7cm")

require(ggplot2)
require(Hmisc)
require(lmtest)
require(apsrtable)
require(xtable)
require(MASS)
require(car)
require(texreg)

require(econru)

theme_set(theme_bw())
```

```
load('pset_data.Rdata')
```

Глава 1

Решения и ответы к избранным задачам

1.1. да, да, да, нет
1.2.
1.3.
1.4.
1.5. $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 0$ и $\hat{\beta} + \hat{\delta} = 1$
1.6.
1.7.
1.8. $\hat{\beta} = \sum x_i y_i / \sum x_i^2$
1.9. $\hat{\beta} = \bar{y}$
1.10. $\hat{\beta}_2 = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sum (x_i - \bar{x})^2$, $\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}$
1.11. $\hat{\beta} = \sum x_i (y_i - 1) / \sum x_i^2$
1.12. $(300 - \hat{\beta}_1)^2 + (200 - \hat{\beta}_2)^2 + (400 - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)^2 \to \min$
1.13. $2 \cdot (10 - \hat{\beta})^2 + (3 - \hat{\beta})^2 \to \min$
1.14.
1.15. да, возможно. Два вытянутых облачка точек. Первое облачко даёт первую регрессию, второе — вторую. Прямая, соединяющая центры облачков, — общую.
1.16. Нет. Коэффициенты можно интерпретировать только «при прочих равных», т.е. при равных x. Из-за разных x может оказаться, что у мужчин $\bar{y}$ меньше, чем $\bar{y}$ для женщин.
1.17.

1.18.
1.19. Оценки МНК линейны по объясняемой переменной. Если сложить объясняемые переменные в этих двух моделях, то получится вектор из единичек. Если строить регрессию вектора из единичек на константу и r, то получатся оценки коэффициентов 1 и 0. Значит, $\hat{\beta}_1 + \hat{\gamma}_1 = 1$, $\hat{\beta}_2 + \hat{\gamma}_2 = 0$
1.20. Увеличатся в 100 раз
1.21. да
1.22. $R^2 = 0$
1.23. $TSS_1 = TSS_2$, $R_2^2 \geqslant R_2^1$, $ESS_2 \geqslant ESS_1$, $RSS_2 \leqslant RSS_1$
1.24.
1.25. $y_i^* = 7 + 3(y_i - \bar{y})/s_y$
2.1.
2.2.
2.3. $c_i = c \cdot x_i$, где $c \neq 0$
2.4.
2.5.
2.6.
2.7.
2.8.
2.9.
2.10.
2.11.
2.12.
2.13. Через теорему Гаусса–Маркова или через условную минимизацию, $c_i = 1/n$
2.14.
2.15.
2.16.

1. $\hat{\beta} = \frac{\sum y_t t}{\sum t^2}$
2. $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta$ и $\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T} t^2}$
3. Да, состоятельна

2.17. несостоятельна

2.18.

2.19. Вроде бы равносильно переносу начала координат и применению результата для регрессии без свободного члена. Должна остаться несмещенность.

2.20.

2.21. Не прав. Ковариация $\mathrm{Cov}(y_i, \hat{y}_i)$ зависит от i, это не одно неизвестное число, для которого можно предложить одну оценку.

2.22. формула $\sum(y_i - \bar{y})^2/(n-1)$ неприменима так как $\mathbb{E}(y_i)$ не является константой

2.23. R^2 — это отношение выборочных дисперсий $\hat{y}$ и y.

2.24. Как отсутствие систематической ошибки.

2.25. нет, нет, нет

2.26. $RSS/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-k}$, $\mathbb{E}(RSS) = (n-k)\sigma^2$, $\mathrm{Var}(RSS) = 2(n-k)\sigma^4$, $\mathbb{P}(10\sigma^2 < RSS < 30\sigma^2) \approx 0.898$

2.27.

2.28.

2.29.

2.30. Можно взять четыре наблюдения равноотстоящих по вертикали от данной прямой. Подбирая остатки, добиваемся нужного R^2.

2.31. $\hat{\beta}_1 = -4890$ и $\hat{\beta}_2 = 2.5$

$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \dots & \dots \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$ — матрица исходных регрессоров; $\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1+1994 \\ 1 & 2+1994 \\ \dots & \dots \\ 1 & 12+1994 \end{bmatrix}$ — матрица новых регрессоров.

$\tilde{X} = X \cdot D$, где $D = \begin{bmatrix} 1 & 1994 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Итак, уравнение регрессии с новыми регрессорами имеет вид $y = \tilde{X}\beta + \varepsilon$ и МНК-оценки коэффициентов равны:

$$\hat{\beta} = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T y = \left([XD]^T[XD]\right)^{-1}[XD]^T y = D^{-1}(X^TX)^{-1}(D^T)^{-1}D^TX^Ty = D^{-1}(X^TX)^{-1}X^Ty \quad (1.1)$$

$$\hat{\beta} = D^{-1}\hat{\beta}_{old} = \begin{bmatrix} 1 & -1994 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 95 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4890 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

2.32. Мы можем существенно упростить решение, воспользовавшись матричным представлением:

$$\tilde{\beta}_2^a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \cdots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \cdots & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix} y \quad (1.2)$$

$$\mathbb{E}\tilde{\beta}_2^a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}y_i}{x_i} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{E}y_1\\ \mathbb{E}y_2\\ \vdots\\ \mathbb{E}y_n\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{n}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1+\beta_2 x_1\\ \beta_1+\beta_2 x_2\\ \vdots\\ \beta_1+\beta_2 x_n\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{n}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\left[\beta_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} + \beta_2\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right] = \frac{\beta_1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} + \beta_2 \quad (1.3)$$

Значит, смещение для первой оценки равно $\frac{\beta_1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\tilde{\beta}_2^a) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix} y\right) = \\ \frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\operatorname{Var}(y)\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}^T = \\ \frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\operatorname{Var}(\varepsilon)\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}^T = \\ \frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}\sigma_\varepsilon^2 I\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \dots & \frac{1}{x_n}\end{bmatrix}^T = \\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2}\end{aligned} \quad (1.4)$$

Перейдём ко второй оценке.

$\tilde{\beta}_2^b = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \frac{1}{\overline{x}}\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix} y$

$$\mathbb{E}\tilde{\beta}_2^b = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \frac{1}{\overline{x}}\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\mathbb{E}y = \frac{1}{\overline{x}}\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1+\beta_2x_1\\ \beta_1+\beta_2x_2\\ \vdots\\ \beta_1+\beta_2x_n\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\overline{x}}\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\left[\beta_1\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} + \beta_2\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}\right] =$$

$$\frac{1}{n}\frac{\beta_1 n}{\overline{x}} + \frac{1}{n}\frac{\beta_2\sum x_i}{\overline{x}} = \frac{\beta_1}{\overline{x}} + \beta_2 \quad (1.5)$$

Значит, смещение равно $\frac{\beta_1}{\overline{x}}$.

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_2^b) = \frac{1}{\overline{x}^2}\frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\mathrm{Var}(y)\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\overline{x}^2}\frac{1}{n^2}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}\mathrm{Var}(\varepsilon)\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\overline{x}^2 n} \quad (1.6)$$

2.33. Известно, что для парной регрессии $t_{\hat{\beta}_2}^2 = \frac{R^2}{(1-R^2)/(n-2)}$. Поэтому из выражения $t_{\hat{\beta}_2}^2 = \frac{0.05^2}{(1-0.05^2)/(n-2)} = \frac{0.05^2(n-2)}{1-0.05^2}$ становится очевидным, что при надлежащем выборе числа наблюдений можно сделать величину $t_{\hat{\beta}_2}$ сколь угодно большой.

2.34. Пусть $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда $Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{\varepsilon}_i$

$Y_i - \overline{Y} + \overline{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2(X_i - \overline{X} + \overline{X}) + \hat{\varepsilon}_i$

$Y_i - \overline{Y} = \underbrace{\hat{\beta}_1 - \overline{Y} + \hat{\beta}_2\overline{X}}_{=0} + \hat{\beta}_2(X_i - \overline{X}) + \hat{\varepsilon}_i$
$Y_i - \overline{Y} = \hat{\beta}_2(X_i - \overline{X}) + \hat{\varepsilon}_i$
$y_i \equiv Y_i - \overline{Y}$, $i = 1, \ldots, n$
$x_i \equiv X_i - \overline{X}$, $i = 1, \ldots, n$
$y_i = \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\varepsilon}_i$
$\mathbf{y} = \hat{\beta}_2\mathbf{x} + \hat{\varepsilon}$, где $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$, $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_n \end{bmatrix}^T$
$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \hat{\beta}_2\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{x}^T\hat{\varepsilon}}_{=0}$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} \tag{1.7}$$

Аналогично получаем, что в обратной регрессии $X_i = \beta_3 + \beta_4 Y_i + \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$

$$\hat{\beta}_4 = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}} \tag{1.8}$$

$ESS = (\hat{Y} - \overline{Y}_i)^T(\hat{Y} - \overline{Y}_i)$
Заметим, что $\hat{Y} - \overline{Y}_i = (I - \pi)(\hat{Y} - \overline{Y}_i)$.
Действительно, $(I - \pi)(P - \pi) = P - \pi$, следовательно,
$\hat{Y} - \overline{Y}_i = (P - \pi)Y = (I - \pi)(P - \pi)Y = (I - \pi)(\hat{Y} - \overline{Y}_i)$.
Далее, $\hat{Y} - \overline{Y}_i = (I - \pi)(\hat{Y} - \overline{Y}_i) = (I - \pi)(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X - \overline{Y}_i) = \hat{\beta}_2\mathbf{x}$
Значит, $ESS = \hat{\beta}_2^2\mathbf{x}^T\mathbf{x}$.
Получаем:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}_2^2\mathbf{x}^T\mathbf{x}^{(2)}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}^{(2)}}{(\mathbf{x}^T\mathbf{x})(\mathbf{y}^T\mathbf{y})} = \mathrm{Corr}^2(X, Y) \tag{1.9}$$

Заметим также, что из формул (1.7), (1.8) и (1.9) следует, что $R^2 = \hat{\beta}_2\hat{\beta}_4$.
Если $\mathrm{Corr}^2(X, Y) = 1$, то $R^2 = \hat{\beta}_2\hat{\beta}_4 = 1$.
Отметим также, что из $R^2 = 1$ следует, что $\hat{\varepsilon}_1 = \ldots = \hat{\varepsilon}_n = 0$ и $\hat{\xi}_1 = \ldots = \hat{\xi}_n = 0$.
Тогда $Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \underbrace{\hat{\varepsilon}_i}_{=0}$ и $X_i = \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 Y_i + \underbrace{\hat{\xi}_i}_{=0}$, $i = 1, \ldots, n$.

$X_i = \hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 Y_i = (\overline{X} - \hat{\beta}_4 \overline{Y}) + \hat{\beta}_4 Y_i = \left(\overline{X} - \frac{1}{\hat{\beta}_2}\overline{Y}\right) + \frac{1}{\hat{\beta}_2} Y_i$
$\hat{\beta}_2 X_i = (\hat{\beta}_2 \overline{X} - \overline{Y}) + Y_i$
$Y_i = (\overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}) + \hat{\beta}_2 X_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$
Следовательно, в случае когда $\mathrm{Corr}^2(X, Y) = 1$, линия парной регрессии Y на X совпадает с линией парной регрессии X на Y.
2.35. Да, если строить регрессию функции от y на функцию от x. А если строить регрессию просто y на x, то оценка наклона будет распределена симметрично около нуля.
2.36. Да, является. Любые, кроме констант. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{2,IV}) = \sigma^2 \sum(z_i - \bar{z})^2 / \left(\sum(z_i - \bar{z})x_i\right)^2$.
2.37.
2.38. Вспомните про t, χ^2, F распределения
3.1. t-статистики
3.2.

1. Поскольку $\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon (n-k)}{\sigma^2_\varepsilon} \sim \chi^2(n-k)$, где $\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{RSS}{n-k}$, $k = 5$. $P(\chi^2_l < \frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\sigma^2_\varepsilon} < \chi^2_u) = 0.8$. Преобразовав, получим $P(\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon (n-5)}{\chi^2_u} < \sigma^2_\varepsilon < \frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon (n-5)}{\chi^2_l}) = 0.8$, где $\chi^2_u = \chi^2_{n-5;0.1}$, $\chi^2_l = \chi^2_{n-5;0.9}$ — соответствующие квантили. По условию $\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon (n-5)}{\chi^2_l} = A = 45$, $\frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon (n-5)}{\chi^2_u} = B = 87.942$. Поделим B на A, отсюда следует $\frac{\chi^2_u}{\chi^2_l} = 1.95426$. Перебором квантилей в таблице для хи-квадрат распределения мы находим, что $\frac{\chi^2_{30;0.1}}{\chi^2_{30;0.9}} = \frac{40.256}{20.599} = 1.95426$. Значит, $n - 5 = 30$, отсюда следует, что $n = 35$.
2. $\hat{\sigma}^2_\varepsilon = 45 \frac{\chi^2_u}{n-5} = 45 \frac{40.256}{30} = 60.384$

Решение в R:

```
df <- 1:200
a <- qchisq(0.1,df)
b <- qchisq(0.9,df)
c <- b/a
d <- 87.942/45
penalty <- (c-d)^2
df.ans <- df[which(penalty==min(penalty))]
```

Количество степеней свободы $n-5$ должно быть равно `df.ans` $=$ 30.

3.3.

Упорядочим нашу выборку таким образом, чтобы наблюдения с номерами с 1 по 35 относились к мужчинам, а наблюдения с номерами с 36 по 58 относились к женщинам. Тогда уравнение

$$\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 Edu_i + \beta_3 Exp_i + \beta_4 Exp_i^2 + \beta_5 Fedu_i + \beta_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 35 \quad (1.10)$$

соответствует регрессии, построенной для подвыборки из мужчин, а уравнение

$$\ln W_i = \gamma_1 + \gamma_2 Edu_i + \gamma_3 Exp_i + \gamma_4 Exp_i^2 + \gamma_5 Fedu_i + \gamma_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 36, ..., 58 \quad (1.11)$$

соответствует регрессии, построенной для подвыборки из женщин. Введем следующие переменные:

$$d_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{–ое наблюдение соответствует мужчине,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$dum_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{–ое наблюдение соответствует женщине,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим следующее уравнение регрессии:

$$\ln W_i = \beta_1 d_i + \gamma_1 dum_i + \beta_2 Edu_i d_i + \gamma_2 Edu_i dum_i + \beta_3 Exp_i d_i + \gamma_3 Exp_i dum_i + \beta_4 Exp_i^2 d_i + \gamma_4 Exp_i^2 dum_i + \beta_5 Fedu_i d_i + \gamma_5 Fedu_i dum_i + \beta_6 Medu_i d_i + \gamma_6 Medu_i dum_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 58 \quad (1.12)$$

Гипотеза, которую требуется проверить в данной задаче, имеет вид

$$H_0 : \begin{cases} \beta_1 = \gamma_1, \\ \beta_2 = \gamma_2, \\ \dots \\ \beta_6 = \gamma_6 \end{cases} \quad H_1 : |\beta_1 - \gamma_1| + |\beta_2 - \gamma_2| + \dots + |\beta_6 - \gamma_6| > 0.$$

Тогда регрессия

$$\begin{gathered} \ln W_i = \beta_1 d_i + \gamma_1 dum_i + \beta_2 Edu_i d_i + \gamma_2 Edu_i dum_i + \beta_3 Exp_i d_i + \\ \gamma_3 Exp_i dum_i + \beta_4 Exp_i^2 d_i + \gamma_4 Exp_i^2 dum_i + \beta_5 Fedu_i d_i + \\ \gamma_5 Fedu_i dum_i + \beta_6 Medu_i d_i + \gamma_6 Medu_i dum_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 58 \end{gathered} \tag{1.13}$$

по отношению к основной гипотезе H_0 является регрессией без ограничений, а регрессия

$$\begin{split} \ln W_i = \beta_1 + \beta_2 Edu_i + \beta_3 Exp_i + \beta_4 Exp_i^2 + \\ \beta_5 Fedu_i + \beta_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 58 \end{split} \tag{1.14}$$

является регрессией с ограничениями.

Кроме того, для решения задачи должен быть известен следующий факт:

$RSS_{UR} = RSS_1 + RSS_2$, где RSS_{UR} — это сумма квадратов остатков в модели:

$$\begin{gathered} \ln W_i = \beta_1 d_i + \gamma_1 dum_i + \beta_2 Edu_i d_i + \gamma_2 Edu_i dum_i + \beta_3 Exp_i d_i + \\ \gamma_3 Exp_i dum_i + \beta_4 Exp_i^2 d_i + \gamma_4 Exp_i^2 dum_i + \beta_5 Fedu_i d_i + \\ \gamma_5 Fedu_i dum_i + \beta_6 Medu_i d_i + \gamma_6 Medu_i dum_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 58 \end{gathered} \tag{1.15}$$

RSS_1 — это сумма квадратов остатков в модели:

$$\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 Edu_i + \beta_3 Exp_i + \beta_4 Exp_i^2 + \\ \beta_5 Fedu_i + \beta_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., 35 \quad (1.16)$$

RSS_2 — это сумма квадратов остатков в модели:

$$\ln W_i = \gamma_1 + \gamma_2 Edu_i + \gamma_3 Exp_i + \gamma_4 Exp_i^2 + \\ \gamma_5 Fedu_i + \gamma_6 Medu_i + \varepsilon_i, i = 36, ..., 58 \quad (1.17)$$

1. Тестовая статистика:

$$T = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-m)},$$

   где RSS_R – сумма квадратов остатков в модели с ограничениями;

   RSS_{UR} – сумма квадратов остатков в модели без ограничений;

   q – число линейно независимых уравнений в основной гипотезе H_0;

   n – общее число наблюдений;

   m – число коэффициентов в модели без ограничений

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0:

$$T \sim F(q, n-m)$$

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики:

$$T_{obs} = \frac{(70.3 - (34.4 + 23.4))/6}{(34.4 + 23.4)/(58 - 12)} = 1.66$$

4. Область, в которой H_0 не отвергается:

$$[0; T_{cr}] = [0; 2.3]$$

5. Статистический вывод:

   Поскольку $T_{obs} \in [0; T_{cr}]$, то на основе имеющихся данных мы не можем отвергнуть гипотезу H_0 в пользу альтернативной H_1. Следовательно, имеющиеся данные не противоречат гипотезе об отсутствии дискриминации на рынке труда между мужчинами и женщинами.

3.4.
3.5.
3.6.
3.7.
3.8.
3.9.
3.10.
3.11.
3.12.
3.13.
3.14.
3.15.
3.16.
3.17.
3.18.
3.19. значим
3.20. не значим
3.21. $\alpha > 0.09$
3.22.
3.23.
3.24.
Ограниченная модель (Restricted model):

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \varepsilon_i$$

Неограниченная модель (Unrestricted model):

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \beta_{Fedu} Fedu_i + \beta_{Medu} Medu_i + \varepsilon_i \quad (1.18)$$

По условию $ESS_R = 90.3$, $RSS_R = 60.4$, $TSS = ESS_R + RSS_R = 90.3 + 60.4 = 150.7$. Также сказано, что $ESS_{UR} = 110.3$. Значит, $RSS_{UR} = TSS - ESS_{UR} = 150.7 - 110.3 = 40.4$

1. Спецификация:

$$\ln W_i = \beta + \beta_{Edu} Edu_i + \beta_{Age} Age_i + \beta_{Age^2} Age_i^2 + \beta_{Fedu} Fedu_i + \beta_{Medu} Medu_i + \varepsilon_i \quad (1.19)$$

2. Проверка гипотезы

   (a) $H_0 : \begin{cases} \beta_{Fedu} = 0 \\ \beta_{Medu} = 0 \end{cases} \quad H_a : |\beta_{Fedu}| + |\beta_{Medu}| > 0$

   (b) $T = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k)}$, где $q = 2$ — число линейно независимых уравнений в основной гипотезе H_0, $n = 25$ — число наблюдений, $k = 6$ — число коэффициентов в модели без ограничения

   (c) $T \sim F(q; n-k)$

   (d) $T_{obs} = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k)} = \frac{(60.4 - 40.4)/2}{40.4/(25-6)} = 4.70$

   (e) Нижняя граница $= 0$, верхняя граница $= 3.52$

   (f) Поскольку $T_{obs} = 4.70$, что не принадлежит промежутку от 0 до 3.52, то на основе имеющихся данных можно отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%. Таким образом, образование родителей существенно влияет на заработную плату.

3.25.
3.26.
3.27.
3.28.
3.29.
3.30.
3.31. $0.25\hat{\beta}_1 + 0.75\hat{\beta}'_1$, $0.25\hat{\beta}_2 + 0.75\hat{\beta}'_2$ и $0.25\hat{\beta}_3 + 0.75\hat{\beta}'_3$
3.32. Сами оценки коэффициентов никак детерминистически не связаны, но при большом размере подвыборок примерно рав-

ны. А дисперсии связаны соотношением $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_a)^{-1} + \mathrm{Var}(\hat{\beta}_b)^{-1} = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_{tot})^{-1}$
3.33.
3.34.
3.35.
3.36.
3.37.
3.38.
Из оценки ковариационной матрицы находим, что $se(\hat{\beta}_{totsp} = \hat{\beta}_{livesp}) = 0.2696$.
Исходя из $Z_{crit} = 1.96$ получаем доверительный интервал, $[-0.8221; 0.2348]$.
Вывод: при уровне значимости 5% гипотеза о равенстве коэффициентов не отвергается.
3.39.
3.40.
3.41.

1. $\mathbb{P}(\hat{\beta}_3 > se(\hat{\beta}_3)) = \mathbb{P}(t_{17} > 1) = 0.1657$
2. $\mathbb{P}(\hat{\beta}_3 > \sigma_{\hat{\beta}_3}) = \mathbb{P}(N(0,1) > 1) = 0.1587$

3.42.
3.43.
3.44. $\hat{\beta}_2 = 0.41$, $\hat{\beta}_3 = 0.3$, $\hat{\beta}_4 = -0.235$, переменная x значима
3.45. $\hat{\beta}_2 = 0.75$, $\hat{\beta}_3 = 0.625$, $\hat{\beta}_4 = 0.845$, переменные z и w значимы
3.46. $RSS_1 > RSS_2 = RSS_3$, в моделях два и три, ошибка прогноза равна $\hat{\beta}_4$
3.47.
3.48. $RSS/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-k}$, $\mathbb{E}(RSS) = (n-k)\sigma^2$, $\mathrm{Var}(RSS) = 2(n-k)\sigma^4$, $\mathbb{P}(5\sigma^2 < RSS < 10\sigma^2) \approx 0.451$
3.49. $\mathbb{P}(\hat{s}_3^2 > \hat{s}_1^2) = 0.5$, $\mathbb{P}(\hat{s}_1^2 > 2\hat{s}_2^2) = 0.5044$, $\mathbb{E}(\hat{s}_2^2/\hat{s}_1^2) = 1.25$, $\mathrm{Var}(\hat{s}_2^2/\hat{s}_1^2) = 4.6875$
3.50. 90% во всех пунктах
3.51. Поскольку $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, $\hat{\gamma}$ и $\hat{\delta}$ являются МНК-коэффициентами в регрессии $y_i = \mu + \nu x_i + \gamma d_i + \delta x_i d_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, то для любых

μ, ν, γ и δ имеет место

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat\mu - \hat\nu x_i - \hat\gamma d_i - \hat\delta x_i d_i - \varepsilon_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu - \nu x_i - \gamma d_i - \delta x_i d_i - \varepsilon_i)^2 \quad (1.20)$$

Перепишем неравенство (1.20) в виде

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat\mu + \hat\gamma) - (\hat\nu + \hat\delta)x_i)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(y_i - \hat\mu - \hat\nu x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(y_i - (\mu + \gamma) - (\nu + \delta)x_i)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(y_i - \mu - \nu x_i)^2 \quad (1.21)$$

Учитывая, что неравенство (1.21) справедливо для всех μ, ν, γ и δ, то оно останется верным для $\mu = \hat\mu$, $\nu = \hat\nu$ и произвольных γ и δ. Имеем

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat\mu + \hat\gamma) - (\hat\nu + \hat\delta)x_i)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(y_i - \hat\mu - \hat\nu x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat\mu + \gamma) - (\hat\nu + \delta)x_i)^2 + \sum_{i=m+1}^{n}(y_i - \hat\mu - \hat\nu x_i)^2 \quad (1.22)$$

Следовательно

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat\mu + \hat\gamma) - (\hat\nu + \hat\delta)x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat\mu + \gamma) - (\hat\nu + \delta)x_i)^2 \quad (1.23)$$

Обозначим $\tilde\beta_1 := \hat{mu} + \gamma$ и $\tilde\beta_2 := \hat\nu + \delta$. В силу произвольности γ и δ коэффициенты $\tilde\beta_1$ и $\tilde\beta_2$ также произвольны. тогда для любых

$\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$ выполнено неравенство:

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - (\hat{\mu}+\hat{\gamma}) - (\hat{\nu}+\hat{\delta})x_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(y_i - \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 x_i)^2$$

которое означает, что $\hat{\mu}+\hat{\gamma}$ и $\hat{\nu}+\hat{\delta}$ являются МНК-оценками коэффициентов β_1 и β_2 в регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$, оцененной по наблюдениям $i = 1, \ldots, m$, то есть $\hat{\beta}_1 = \hat{\mu}+\hat{\gamma}$ и $\hat{\beta}_2 = \hat{\nu}+\hat{\delta}$.
3.52. не верно, поскольку R^2_{adj} может принимать отрицательные значения, а $F(n-k, n-1)$ — не может.
3.53. Сгенерировать сильно коррелированные x и z
3.54.
3.55.
3.56.
3.57. bootstrap, дельта-метод.
3.58.
3.59.
3.60. При наличии ошибок в измерении зависимой переменной оценки остаются несмещенными, их дисперсия растет. Однако оценка дисперсии может случайно оказаться меньше. Например, могло случиться, что ошибки u_i случайно компенсировали ε_i.
3.61.
3.62.
4.1.
4.2.
4.3.
4.4.
4.5.
4.6.
4.7. да, да
4.8.

1.

$$\hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'y = A^{-1}(X'X)^{-1}(A')^{-1}A'X'y = A^{-1}(X'X)^{-1}X'y = A^{-1}\hat{\beta} \quad (1.24)$$

2. $\hat{u} = y - Z\hat{\gamma} = y - XAA^{-1}\hat{\beta} = y - X\hat{\beta} = \hat{\varepsilon}$

3. Пусть $z^0 = \begin{pmatrix} 1 & z_1^0 & \ldots & z_{k-1}^0 \end{pmatrix}$ — вектор размера $1 \times k$ и $x^0 = \begin{pmatrix} 1 & x_1^0 & \ldots & x_{k-1}^0 \end{pmatrix}$ — вектор размера $1 \times k$. Оба эти вектора представляют собой значения факторов. Тогда $z^0 = x^0 A$ и прогнозное значение для регрессии с преобразованными факторами равно $z^0\hat{\gamma} = x^0 AA^{-1}\hat{\beta} = x^0\hat{\beta}$ прогнозному значению для регрессии с исходными факторами.

4.9.

1.

$$\mathbb{E}(\tilde{\beta}) = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'\mathbb{E}(y) = ((X'X)^{-1} + \gamma I)X'X\beta = \beta + \gamma X'X\beta \quad (1.25)$$

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\tilde{\beta}) = \operatorname{Var}(((X'X)^{-1} + \gamma I)X'y) = \\ \operatorname{Var}(((X'X)^{-1} + \gamma I)X'\varepsilon) = \\ (((X'X)^{-1} + \gamma I)X')\operatorname{Var}(\varepsilon)(((X'X)^{-1} + \gamma I)X')' = \\ (((X'X)^{-1} + \gamma I)X')\sigma_\varepsilon^2 I(((X'X)^{-1} + \gamma I)X')' = \\ \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + \gamma I)X'X((X'X)^{-1} + \gamma I) = \\ \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + \gamma I)(I + \gamma X'X) = \\ \sigma_\varepsilon^2((X'X)^{-1} + 2\gamma I + \gamma^2 X'X) \quad (1.26)\end{aligned}$$

4.10.
4.11.
4.12.
4.13.

1. $n = 5$

2. $k = 3$

3. $TSS = 10$

4. $RSS = 2$

5. $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 0.8$. R^2 высокий, построенная эконометрическая модель «хорошо» описывает данные

7. Основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = 0$, альтернативная гипотеза — $H_a : \beta_1 \neq 0$

8. Проверка гипотезы

   (a) $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

   (b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

   (c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-0}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} = 1.7321$

   (d) Нижняя граница $= -2.920$, верхняя граница $= 2.920$

   (e) Поскольку $T_{obs} = 1.7321$, что принадлежит промежутку от -2.920 до 2.920, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

9. $p - value(T_{obs}) = \mathbb{P}(|T| > |T_{obs}|) = 2F_T(|T_{obs}|)$, где $F_T(|T_{obs}|)$ — функция распределения $t-$распределения с $n - k = 5 - 3 = 2$ степенями свободы в точке $|T_{obs}|$. $p - value(T_{obs}) = 2tcdf(-|T_{obs}|, n-k) = 2tcdf(-1.7321, 2) = 0.2253$. Поскольку $P-$значение превосходит уровень значимости 10%, то основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = 0$ не может быть отвергнута

10. Проверка гипотезы

   (a) $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

   (b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} =$ 0.8660

(d) Нижняя граница $= -2.920$, верхняя граница $= 2.920$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -2.920 до 2.920, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

11. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} =$ 0.8660

(d) Нижняя граница $= -\infty$, верхняя граница $= 1.8856$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от $-\infty$ до 1.8856, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

12. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}}; n = 5; k = 3$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\frac{RSS}{n-k}[(X'X)^{-1}]_{22}}} = \frac{2-1}{\sqrt{\frac{2}{5-3}1.3333}} =$ 0.8660

(d) Нижняя граница $= -1.8856$, верхняя граница $= +\infty$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -1.8856 до $+\infty$, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 10%

13. Основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$, альтернативная гипотеза — $H_a : |\beta_1| + |\beta_2| > 0$

14. Проверка гипотезы

    (a) $T = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k}; n = 5; k = 3$
    (b) $T \sim F(n-k); n = 5; k = 3$
    (c) $T_{obs} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k} = \frac{0.8}{1-0.8} \cdot \frac{5-3}{2} = 4$
    (d) Нижняя граница $= 0$, верхняя граница $= 19$
    (e) Поскольку $T_{obs} = 4$, что принадлежит промежутку от 0 до 19, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%. Следовательно, регрессия в целом незначима. Напомним, что $R^2 = 0.8$, то есть он высокий. Но при этом регрессия «в целом» незначима. Такой эффект может возникать при малом объёме выборки, например, таком, как в данной задаче

15. $p-value(T_{obs}) = \mathbb{P}(|T| > |T_{obs}|) = 2F_T(|T_{obs}|)$, где $F_T(|T_{obs}|)$ — функция распределения $F-$распределения с $k = 3$ и $n-k = 5-3 = 2$ степенями свободы в точке T_{obs}. $p-value(T_{obs}) = 1 - fcdf(-|T_{obs}|, n-k) = 1 - fcdf(4, 2) = 0.2$. Поскольку $P-$значение превосходит уровень значимости 10%, то основная гипотеза — $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ не может быть отвергнута. Таким образом, регрессия «в целом» незначима

16. Проверка гипотезы

    (a) $T = \frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)+\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)+2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1;\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{22} + 2\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{23} + \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$
    (b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$
    (c) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333 + 2(-1.0000) + 2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -4.3027$, верхняя граница $= 4.3027$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -4.3027 до 4.3027, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

17. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)+\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)+2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1;\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{22} + 2\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{23} + \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333 + 2(-1.0000) + 2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -\infty$, верхняя граница $= 2.9200$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от $-\infty$ до 2.9200, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

18. Проверка гипотезы

(a) $T = \frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-(\beta_1+\beta_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}}$, где $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2) = \widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)+\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)+2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1;\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{22} + 2\hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{23} + \hat{\sigma}^2[(X'X)^{-1}]_{33} = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33})$

(b) $T \sim t(n-k); n = 5; k = 3$

(c) $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) = \frac{RSS}{n-k}([(X'X)^{-1}]_{22} + 2[(X'X)^{-1}]_{23} + [(X'X)^{-1}]_{33}) = \frac{2}{5-3}(1.3333 + 2(-1.0000) + 2.0000) = 1.3333$. Тогда $T_{obs} = \frac{\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2)}} = \frac{2+1-2}{\sqrt{1.3333}} = 0.8660$

(d) Нижняя граница $= -2.9200$, верхняя граница $= +\infty$

(e) Поскольку $T_{obs} = 0.8660$, что принадлежит промежутку от -2.9200 до $+\infty$, то на основе имеющихся данных нельзя отвергнуть основную гипотезу на уровне значимости 5%

4.14.

4.15.

4.16. $\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$

4.17. $(n-1)\sigma^2$, $(n-k)\sigma^2$

4.18. $TSS = y'(I-\pi)y$, $RSS = y'(I-P)y$, $ESS = y'(P-\pi)y$

4.19. $\mathbb{E}(TSS) = (n-1)\sigma^2 + \beta'X'(I-\pi)X\beta$

4.20. $(n-1)\sigma^2$, $(n-k)\sigma^2$, $(k-1)\sigma^2$

4.21.

4.22. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\mathbb{E}(\hat{\varepsilon}) = 0$, $\sum \varepsilon_i$ может оказаться равной нулю только случайно, в нормальной модели это происходит с вероятностью 0, $\sum \hat{\varepsilon}_i = 0$ в модели со свободным членом

4.23. $\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum \hat{\varepsilon}_i^2$, $TSS = ESS + RSS$,

4.24.

4.25. Спроецируем единичный столбец на «плоскость», обозначим его $1'$. Делаем проекцию y на «плоскость» и на $1'$. Далее аналогично.

4.26. Проекция y на $\hat{y}$ это $\hat{y}$, поэтому оценки коэффициентов будут 0 и 1. Оценка дисперсии $\frac{RSS}{(n-2)ESS}$. Нарушены предпосылки теоремы Гаусса-Маркова, например, ошибки новой модели в сумме дают 0, значит коррелированы.

4.27. Либо в регрессию включена константа, либо единичный столбец (тут была опечатка, столбей) можно получить как линейную комбинацию регрессоров, например, включены даммипеременные для каждого возможного значения качественной переменной.

4.28. Сами оценки коэффициентов никак детерминистически не связаны, но при большом размере подвыборок примерно равны.

А ковариационные матрицы связаны соотношением $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_a)^{-1} + \mathrm{Var}(\hat{\beta}_b)^{-1} = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_{tot})^{-1}$

4.29.

4.30.

4.31.

4.32. да, да

4.33.

4.34. Докажем несмещенность МНК-оценок.

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \mathbb{E}\left((X^TX)^{-1}X^Ty\right) = (X^TX)^{-1}X^T\mathbb{E}(y) =$$

$$= (X^TX)^{-1}X^T\mathbb{E}(X\beta + \varepsilon) = (X^TX)^{-1}X^TX\beta = \beta$$

Обозначим $\varphi(X, y) = (X^TX)^{-1}X^Ty$. Тогда $\hat{\beta} = \varphi(X, y)$. Покажем, что функция φ линейна по переменной y.

1. $\varphi(X, \lambda \cdot y) = (X^TX)^{-1}X^T(\lambda \cdot y) = \lambda(X^TX)^{-1}X^Ty = \lambda \cdot \varphi(X, y)$

2. $\varphi(X, y + z) = (X^TX)^{-1}X^T(y + z) = (X^TX)^{-1}X^Ty + (X^TX)^{-1}X^Tz = \varphi(X, y) + \varphi(X, z)$

Что и требовалось доказать.

4.35. Нет, так как для функции $\varphi(X, y) = (X^TX)^{-1}X^Ty$ не выполнено, например, свойство однородности по переменной X. Действительно,

$$\varphi(X, \lambda \cdot y) = ((\lambda \cdot X)^T(\lambda \cdot X))^{-1}(\lambda \cdot X)^Ty = \frac{1}{\lambda} \cdot (X^TX)^{-1}X^Ty = \frac{1}{\lambda}\varphi(X, y)$$

.

4.36. $\tilde{\beta} = (X^TCX)^{-1}X^TCy$, где

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

4.37. $Pi = i \Leftrightarrow P\pi = \pi$ поскольку, если матрицу π записать по столбцам $\pi = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} i & i & \dots & i\end{bmatrix}$, то можно записать следующую цепочку равенств $P\pi = P\frac{1}{n}\begin{bmatrix} i & i & \dots & i\end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} Pi & Pi & \dots & Pi\end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} i & i & \dots & i\end{bmatrix} \Leftrightarrow Pi = i$.

Свойство $P^2 = P$ имеет место независимо от выполнимости условия $Pi = i$. Действительно, $P^2 = X(X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1}X^T = X(X^TX)^{-1}X^T = P$.

Рассмотрите пример $y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T$, $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$. Постройте регрессию $y = \beta x + \varepsilon$ без свободного члена. Убедитесь, что $\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i = 0$ и $\overline{Y} = \overline{\hat{Y}} = 0$, но $Pi \neq i$.

Ответ: $P\pi = \pi$

4.38. (1), (2) $\Leftrightarrow$ (3), (5)

4.39.

$$\mathbb{E}(\varepsilon^T\pi\varepsilon) = \mathbb{E}(\mathrm{tr}[\varepsilon^T\pi\varepsilon]) = \mathbb{E}(\mathrm{tr}[\pi\varepsilon\varepsilon^T]) = \mathrm{tr}[\pi\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon^T)] =$$
$$\mathrm{tr}[\pi\,\mathrm{Var}(\varepsilon)] = \mathrm{tr}\left[\frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n^2\end{bmatrix}\right] =$$
$$\frac{1}{n}tr\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_n^2\\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_n^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_n^2\end{bmatrix} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (1.27)$$

4.40.

1.

$$RSS = \hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}y^T(I-P)y = y^Ty - y^TPy = y^Ty - y^TX(X^TX)^{-1}X^Ty; \quad (1.28)$$

При этом $y^Ty = 3924$, а

$$y^TX(X^TX)^{-1}X^Ty =$$

$$\begin{bmatrix}460 & 810 & 615 & 712\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.038 & -0.063 & -0.063 & 0.100\\ -0.063 & 1.129 & 1.107 & -2.192\\ -0.063 & 1.107 & 1.110 & -2.170\\ 0.100 & -2.192 & -2.170 & 4.292\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}460\\810\\615\\712\end{bmatrix} = 3051.2 \quad (1.29)$$

Итого, $RSS = 3924 - 3051.2 = 872.8$

$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{RSS}{n-k} = \frac{872.8}{100-4} = 9.0917$

$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2_\varepsilon(X^TX)^{-1} \Rightarrow \widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -0.56939$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = 0.34251$, $\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = 10.269$

$\widehat{\mathrm{Corr}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)}} = -0.30361$

2. (указание) $\widehat{\mathrm{Corr}}(x_2, x_3) = \frac{\sum(x_{i2}-\overline{x}_2)(x_{i3}-\overline{x}_3)}{\sqrt{\sum(x_{i2}-\overline{x}_2)}\sqrt{\sum(x_{i3}-\overline{x}_3)}}$. Все необходимые величины можно извлечь из матрицы X^TX — это величины $\sum x_{i2}$ и $\sum x_{i3}$, а остальное – из матрицы $X^T(I-\pi)X = X^TX - X^T\pi X = X^TX - (\pi X)^T\pi X$. При этом имейте в виду, что $\pi X = \begin{bmatrix}1 & \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3\end{bmatrix}$ и $\overline{x}_1 = 1.23$, $\overline{x}_2 = 0.96$, $\overline{x}_3 = 1.09$

3. $\begin{bmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\\ \hat\beta_3\\ \hat\beta_4\\ \hat\beta_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03767 & -0.06263 & -0.06247 & 0.1003 \\ -0.06263 & 1.129 & 1.107 & -2.192 \\ -0.06247 & 1.107 & 1.110 & -2.170 \\ 0.1003 & -2.192 & -2.170 & 4.292 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}460\\810\\615\\712\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.40221\\ 6.1234\\ 5.9097\\ -7.5256\end{bmatrix}$

   $t = \frac{\hat\beta_2}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat\beta_2)}} \sim t_{100-4}$

   $t = \frac{\hat\beta_2}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat\beta_2)}} = \frac{6.1234}{\sqrt{10.269}} = 1.9109 \Rightarrow \hat\beta_2$ — не значим.

4.41.

1. $\widehat{\mathrm{Cov}}\begin{bmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\\ \hat\beta_3\end{bmatrix} = \hat\sigma^2_\varepsilon(X^TX)^{-1}$ — несмещённая оценка для ковариационной матрицы

   МНК-коэффициентов. Действительно, $\mathbb{E}\widehat{\mathrm{Cov}}\begin{bmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\\ \hat\beta_3\end{bmatrix} =$

   $\mathbb{E}\hat\sigma^2_\varepsilon(X^TX)^{-1} = \sigma^2_\varepsilon(X^TX)^{-1} = \mathrm{Cov}\begin{bmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\\ \hat\beta_3\end{bmatrix}$. Поэтому искомая оценка $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) = \hat\sigma^2_\varepsilon\left[(X^TX)^{-1}\right]_{23}$, где $\left[(X^TX)^{-1}\right]_{23}$ — элемент матрицы $(X^TX)^{-1}$, расположенный во второй строке, 3-м столбце.

   Заметим, что $\hat\sigma^2_{\hat\beta_2} = \hat\sigma^2_\varepsilon\left[(X^TX)^{-1}\right]_{22} \Rightarrow 0.7^2 = \hat\sigma^2_\varepsilon \cdot (3030) \Rightarrow \hat\sigma^2_\varepsilon = 0.00016172$

   Значит, $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_2, \hat\beta_3) = 0.00016172 \cdot (-589) = -0.095253$.

2. $t = \frac{\hat\beta_2 + \hat\beta_3 - \beta_2 - \beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2 + \hat\beta_3)}} \sim t_{n-k}$

   Требуется проверить $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$.

$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3)=\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2)+\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_3)+2\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat\beta_2,\hat\beta_3)=0.7^2+0.138^2+2\cdot 0.095253=0.319044$

$t=\frac{\hat\beta_2+\hat\beta_3-\beta_2-\beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3)}}=\frac{0.76+0.19-1}{\sqrt{0.319044}}=-0.088520674$

Значит, гипотеза не отвергается на любом «разумном» уровне значимости.

3. Мы знаем, что $\frac{\hat\beta_2+\hat\beta_3-\beta_2-\beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3)}}\sim t_{n-k}=t_{15-3}$, поэтому построить доверительный интервал для $\beta_2+\beta_3$ не составляет труда. $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\hat\beta_2+\hat\beta_3-\beta_2-\beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3)}}\right|<t^*\right)=0.95$

   Обозначим $se=\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3)}$, тогда:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left|\frac{\hat\beta_2+\hat\beta_3-\beta_2-\beta_3}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat\beta_2+\hat\beta_3)}}\right|<t^*\right)= \\
&\mathbb{P}\left(-t^*se<\hat\beta_2+\hat\beta_3-\beta_2-\beta_3<t^*se\right)= \\
&\mathbb{P}\left(-t^*se-(\hat\beta_2+\hat\beta_3)<-\beta_2-\beta_3<-(\hat\beta_2+\hat\beta_3)+t^*se\right)= \\
&\mathbb{P}\left((\hat\beta_2+\hat\beta_3)+t^*se>\beta_2+\beta_3>(\hat\beta_2+\hat\beta_3)-t^*se\right)
\end{aligned} \tag{1.30}$$

   Отсюда получаем доверительный интервал

$$\beta_2+\beta_3\in [(0.76+0.19)-2.16\cdot 0.319;(0.76+0.19)+2.16\cdot 0.319] \tag{1.31}$$

   Или $0.26<\beta_2+\beta_3<1.639$

4.42.
4.43. Находим $X'X$, её элементы и есть то, что нужно.
5.1.
5.2.
5.3.
5.4. $\hat{\theta} = 1/\bar{Y}$, $\hat{\beta} = \bar{X}/\bar{Y}$, $\hat{a} = 1/(1+\bar{X})$
5.5. В данном примере мы имеем
$\theta = \begin{bmatrix}\mu & \nu\end{bmatrix}'$ — вектор неизвестных параметров
$\Theta = \mathbb{R} \times (0; +\infty)$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров
Функция правдоподобия имеет вид:

$$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\nu}\right\} = (2\pi)^{-n/2} \cdot \nu^{-n/2} \cdot \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\nu}\right\} \quad (1.32)$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l(\theta) := \ln \mathrm{L}(\theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\nu - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\nu}$$

$\Theta_{UR} = \Theta$
$\Theta_R = \{(0,1)\}$
Из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\nu} = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \nu} = -\frac{n}{2\nu} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\nu^2} = 0 \end{cases}$$

находим
$\hat{\theta}_{UR} = (\hat{\mu}_{UR}, \hat{\nu}_{UR})$, где $\hat{\mu}_{UR} = \overline{x} = -1.5290$, $\hat{\nu}_{UR} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 1.0603$
$\hat{\theta}_R = (\hat{\mu}_R, \hat{\nu}_R) = (0,1)$
По имеющимся данным находим
$l(\hat{\theta}_R) = -\frac{10}{2}\ln(2\pi) - \frac{10}{2}\ln 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-0)^2}{2\cdot 1} = -26.1804$
$l = -\frac{10}{2}\ln(2\pi) - \frac{10}{2}\ln(1.0603) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+1.5290)^2}{2\cdot 1.0603} = -14.4824$

$LR_{\text{набл}} = -2(l(\hat{\theta}_R) - l) = -2 \cdot (-26.1804 + 14.4824) = 23.3959$

Критическое значение χ^2 распределения с двумя степенями свободы, отвечающее уровню значимости 5%, равно 5.9915. Следовательно, тест отношения правдоподобия говорит о том, что гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

Для выполнения тестов Вальда и множителей Лагранжа нам понадобится информационная матрица Фишера

$\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{v}$, $\frac{\partial^2 l}{\partial \nu \partial \mu} = -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\nu^2}$, $\frac{\partial^2 l}{\partial \nu^2} = \frac{n}{2\nu^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{\nu^3}$

$\mathbb{E}\frac{\partial^2 l}{\partial \nu \partial \mu} = -\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(x_i-\mu)}{\nu^2} = 0$, $\mathbb{E}\frac{\partial^2 l}{\partial \nu^2} = \frac{n}{2\nu^2} - \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(x_i-\mu)^2}{\nu^3} = \frac{n}{2\nu^2} - \frac{n\nu}{nu^3} = -\frac{n}{2\nu^2}$

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \nu \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \nu \partial \mu} & \frac{\partial^2 l}{\partial \nu^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{\nu} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\nu^2} \end{bmatrix}$$

$$I(\hat{\theta}_{UR}) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\hat{\nu}_{UR}} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\cdot\hat{\nu}_{UR}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{1.0603} & 0 \\ 0 & \frac{10}{2\cdot 1.0603^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4307 & 0 \\ 0 & 4.4469 \end{bmatrix}$$

$$g(\hat{\theta}_{UR}) = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{UR} - 0 \\ \hat{\nu}_{UR} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5290 - 0 \\ 1.0603 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5290 \\ 0.0603 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial \mu} & \frac{\partial c_1}{\partial \nu} \\ \frac{\partial c_2}{\partial \mu} & \frac{\partial c_2}{\partial \nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \frac{\partial g'}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial \mu} & \frac{\partial c_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial c_1}{\partial \nu} & \frac{\partial c_2}{\partial \nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{\text{набл}} = g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) =$$
$$\begin{bmatrix} -1.5290 & 0.0603 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9.4307 & 0 \\ 0 & 4.4469 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1.5290 \\ 0.0603 \end{bmatrix} = 22.0635$$

Тест Вальда также говорит о том, что на основании имеющихся наблюдений гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

$$I(\hat{\theta}_R) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\hat{\nu}_R} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\cdot\hat{\nu}_R^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{1} & 0 \\ 0 & \frac{10}{2\cdot 1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_R)}{\hat{\nu}_R} \\ -\frac{n}{2\cdot\hat{\nu}_R} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu}_R)^2}{2\cdot\hat{\nu}_R^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 0)}{1} \\ -\frac{10}{2\cdot 1} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-0)^2}{2\cdot 1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.29 \\ 11.9910 \end{bmatrix}$$

$LM_{\text{набл}} = \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] = \begin{bmatrix} -15.29 & 11.9910 \end{bmatrix} =$
$\cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -15.29 \\ 11.9910 \end{bmatrix} = 52.1354$

Тест множителей Лагранжа также указывает на то, что гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

5.6. В данной задаче мы имеем:

$\theta = p$ — вектор неизвестных параметров

$\Theta = (0, 1)$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров

Функция правдоподобия имеет вид:

$$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\theta}(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l(\theta) := ln\mathrm{L}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \ln(1-p)$$

$\Theta_{UR} = \Theta$

$\Theta_R = \{0.5\}$

Решая уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0$$

получаем

$\hat{\theta}_{UR} = \hat{p}_{UR}$, где $\hat{p}_{UR} = \overline{x} = 0.42$

$\hat{\theta}_R = \hat{p}_R = 0.5$

По имеющимся данным находим

$l(\hat{\theta}_R) = 42 \cdot \ln(0.5) + (100 - 42) \cdot \ln(1 - 0.5) = -69.3147$

$l(\hat{\theta}_{UR} = 42 \cdot \ln(0.42) + (100 - 42) \cdot \ln(1 - 0.42) = -68.0292$

$LR_{\text{набл}} = -2(l(\hat{\theta}_R) - l) = -2 \cdot (-69.3147 + 68.0292) = 2.5710$

Критическое значение χ^2 распределения с одной степенью свободы, отвечающее за 5% уровень значимости, равно 3.8414. Следовательно, тест отношения правдоподобия говорит о том, что на основании имеющихся данных, основная гипотеза $H_0 : p = 0.5$ не может быть отвергнута.

Для выполнения тестов Вальда и множителей Лагранжа нам понадобится информационная матрица Фишера

$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{(1-p)^2}$

$I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 l}{\partial p^2}\right] = -\mathbb{E}\left[-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{(1-p)^2}\right] = -\left(-\frac{np}{p^2} - \frac{n-np}{(1-p)^2}\right) = \frac{n}{p(1-p)}$

$I(\hat{\theta}_{UR}) = \frac{n}{\hat{p}_{UR}(1-\hat{p}_{UR})} = \frac{100}{0.42\times(1-0.42)} = 172.4138$

$g(\hat{\theta}_{UR}) = \hat{\theta}_{UR} - 0.5 = 0.42 - 0.5 = -0.08$

$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = 1'$, $\frac{\partial g'}{\partial \theta} = 1$

$W_{\text{набл}} = g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) = [-0.08]' \cdot [1' \cdot 172.4138^{-1} \cdot 1]^{-1} \cdot [-0.08] = 2.6272$

Тест Вальда также говорит о том, что гипотеза H_0 не отвергается.

$I(\hat{\theta}_R) = \frac{n}{\hat{p}_R(1-\hat{p}_R)} = \frac{100}{0.5\times(1-0.5)} = 400$

$\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{p}_R} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{1-\hat{p}_R} = \frac{42}{0.5} - \frac{100-42}{1-0.5} = -32$

$LM_{\text{набл}} = \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] = [-32]' \cdot [400]^{-1} \cdot [-32] = 2.56$

Согласно тесту множителей Лагранжа, основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута.

5.7. В данной задаче мы имеем

$\theta = \lambda$ — вектор неизвестных параметров

$\Theta = (0, +\infty)$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров

Функция правдоподобия имеет вид:

$$\mathrm{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\theta(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \dots x_n!}e^{-\lambda n}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l(\theta) := ln\mathrm{L}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot \ln\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - \lambda n$$

$\Theta_{UR} = \Theta$
$\Theta_R = \{2\}$
Решая уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} - n = 0$$

получаем
$\hat{\theta}_{UR} = \hat{\lambda}_{UR}$, где $\hat{\lambda}_{UR} = \overline{x} = 1.7$
$\hat{\theta}_R = \hat{p}_R = 2$
По имеющимся данным находим
$l(\hat{\theta}_R) = (80 \cdot 1.7) \cdot \ln(2) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) - 2 \cdot 80 = -65.7319$
$l(\hat{\theta}_{UR} = (80 \cdot 1.7) \cdot \ln(1.7) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!) - 1.7 \cdot 80 = -63.8345$
$LR_{\text{набл}} = -2(l(\hat{\theta}_R) - l) = -2 \cdot (-65.7319 + 63.8345) = 3.7948$
Критическое значение χ^2 распределения с одной степенью свободы, отвечающее за 5% уровень значимости, равно 3.8414. Следовательно, тест отношения правдоподобия говорит о том, что на основании имеющихся данных, основная гипотеза $H_0 : \lambda = 2$ не может быть отвергнута.
Для выполнения тестов Вальда и множителей Лагранжа нам понадобится информационная матрица Фишера
$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2}$
$I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 l}{\partial p^2}\right] = -\mathbb{E}\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2}\right] = -\left(-\frac{n\lambda}{\lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda}$
$I(\hat{\theta}_{UR}) = \frac{n}{\hat{\lambda}_{UR}} = \frac{80}{1.7} = 47.0588$
$g(\hat{\theta}_{UR}) = \hat{\theta}_{UR} - 2 = 1.7 - 2 = -0.3$
$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = 1'$, $\frac{\partial g'}{\partial \theta} = 1$
$W_{\text{набл}} = g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR})\right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) = [-0.3]' \cdot [1' \cdot 47.0588^{-1} \cdot 1]^{-1} \cdot [-0.3] = 4.2352$
Поскольку наблюдаемое значение статистики Вальда превосходит критическое значение 3.8414, то гипотеза H_0 должна быть отвергнута.
$I(\hat{\theta}_R) = \frac{n}{\hat{\lambda}_R} = \frac{80}{2} = 40$
$\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\lambda}_R} - n = \frac{80 \cdot 1.7}{2} - 80 = -12$
$LM_{\text{набл}} = \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial l}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R)\right] = [-12]' \cdot [40]^{-1} \cdot [-12] = 3.6$

Согласно тесту множителей Лагранжа, основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута.

5.8.

5.9.

5.10.

5.11.

5.12.

5.13.

5.14. $\hat{p}_1 = X_1/n$, $\hat{p}_2 = X_2/n$.

6.1. $f(x)$ чётная, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = \pi^2/3$, логистическое похоже на $N(0, \pi^2/3)$

6.2. $\ln\left(\frac{\mathbb{P}(y_i=1)}{\mathbb{P}(y_i=0)}\right) = \beta_1 + \beta_2 x_i$.

6.3.

6.4.

6.5.

6.6. Для краткости введем следующие обозначения: $y_i = honey_i$, $d_i = bee_i$[1].

1. Функция правдоподобия имеет следующий вид:

[1] Y_i — случайный Мёд, y_i — реализация случайного Мёда (наблюдаемый Мёд)

$$\mathrm{L}(\beta_1, \beta_2) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\beta_1,\beta_2}(\{Y_i = y_i\}) =$$
$$\prod_{i:y_i=0} \mathbb{P}_{\beta_1,\beta_2}(\{Y_i = 1\}) \cdot \prod_{i:y_i=1} \mathbb{P}_{\beta_1,\beta_2}(\{Y_i = 0\}) =$$
$$\prod_{i:y_i=1} \Lambda(\beta_1 + \beta_2 d_i) \cdot \prod_{i:y_i=0} [1 - \Lambda(\beta_1 + \beta_2 d_i)] =$$
$$\prod_{i:y_i=1,d_i=1} \Lambda(\beta_1+\beta_2) \cdot \prod_{i:y_i=1,d_i=0} \Lambda(\beta_1) \cdot \prod_{i:y_i=0,d_i=1} [1-\Lambda(\beta_1+\beta_2)] \cdot$$
$$\cdot \prod_{i:y_i=0,d_i=0} [1 - \Lambda(\beta_1)] =$$
$$\Lambda(\beta_1+\beta_2)^{\#\{i:y_i=1,d_i=1\}} \cdot \Lambda(\beta_1)^{\#\{i:y_i=1,d_i=0\}} \cdot [1-\Lambda(\beta_1+\beta_2)]^{\#\{i:y_i=0,d_i=1\}} \cdot$$
$$\cdot [1 - \Lambda(\beta_1)]^{\#\{i:y_i=0,d_i=0\}} \quad (1.33)$$

где

$$\Lambda(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \quad (1.34)$$

логистическая функция распределения, $\#A$ означает число элементов множества A.

2. Введём следующие обозначения:

$$a := \Lambda(\beta_1) \quad (1.35)$$

$$b := \Lambda(\beta_1 + \beta_2) \quad (1.36)$$

Тогда с учетом имеющихся наблюдений функция правдоподобия принимает вид:

$$\mathrm{L}(a, b) = b^{12} \cdot a^{32} \cdot [1 - b]^{36} \cdot [1 - a]^{20}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l(a,b)=\ln \mathrm{L}(a,b)=12\ln b+32\ln a+36\ln[1-b]+20\ln[1-a]$$

Решая систему уравнений правдоподобия

$$\begin{cases}\frac{\partial l}{\partial a}=\frac{32}{a}-\frac{20}{1-a}=0\\ \frac{\partial l}{\partial b}=\frac{12}{b}-\frac{36}{1-b}=0\end{cases}$$

получаем $\hat{a}=\frac{8}{13}$, $\hat{b}=\frac{1}{4}$. Из формул (1.34) и (1.35), находим $\hat{\beta}_{1,UR}=\ln\left(\frac{\hat{a}}{1-\hat{a}}\right)=\ln\left(\frac{8}{5}\right)=0.47$. Далее, из (1.34) и (1.36) имеем $\hat{\beta}_{1,UR}+\hat{\beta}_{2,UR}=\ln\left(\frac{\hat{b}}{1-\hat{b}}\right)$. Следовательно, $\hat{\beta}_{2,UR}=\ln\left(\frac{\hat{b}}{1-\hat{b}}\right)-\hat{\beta}_{1,UR}=\ln\left(\frac{1}{3}\right)-\ln\left(\frac{8}{5}\right)=-1.57$.

3. Гипотеза, состоящая в том, что «правильность Мёда не связана с правильностью пчёл» формализуется как $H_0:\beta_2=0$. Протестируем данную гипотезу при помощи теста отношения правдоподобия. Положим в функции правдоподобия $\mathrm{L}(\beta_1,\beta_2)$ $\beta_2=0$. Тогда с учетом (1.35) и (1.36) получим

$$\mathrm{L}(a,b=a)=a^{32+12}\cdot[1-a]^{20+36}$$

В этом случае логарифмическая функция правдоподобия имеет вид:

$$l(a,b=a):=\mathrm{L}(a,b=a)=44\ln a+56\ln[1-a]$$

Решаем уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial l}{\partial a}=\frac{44}{a}-\frac{56}{1-a}=0$$

и получаем $\hat{a}=\frac{11}{25}$. Следовательно, согласно (1.34) и (1.35), $\hat{\beta}_{1,R}=-0.24$ и $\hat{\beta}_{2,R}=0$.

Статистика отношения правдоподобия имеет вид:

$$LR = -2(l(\hat{\beta}_{1,R}, \hat{\beta}_{2,R}) - l(\hat{\beta}_{1,UR}, \hat{\beta}_{2,UR}))$$

и имеет асимптотическое χ^2 распределение с числом степеней свободы, равным числу ограничений, составляющих гипотезу H_0, т.е. в данном случае $LR \overset{a}{\sim} \chi^2_1$.

Находим наблюдаемое значение статистики отношения правдоподобия:

$$l(\hat{\beta}_{1,R}, \hat{\beta}_{2,R}) = l(\hat{a}_R, \hat{b}_R = \hat{a}_R) = 44 \ln \hat{a}_R + 56 \ln[1 - \hat{a}_R] = \\ 44 \ln \left[\frac{11}{25}\right] + 56 \ln \left[1 - \frac{11}{25}\right] = -68.59 \quad (1.37)$$

$$l(\hat{\beta}_{1,UR}, \hat{\beta}_{2,UR}) = l(\hat{a}_{UR}, \hat{b}_{UR}) = \\ 12 \ln \hat{b}_{UR} + 32 \ln \hat{a}_{UR} + 36 \ln[1 - \hat{b}_{UR}] + 20 \ln[1 - \hat{a}_{UR}] = \\ 12 \ln \left[\frac{1}{4}\right] + 32 \ln \left[\frac{8}{13}\right] + 36 \ln \left[1 - \frac{1}{4}\right] + 20 \ln \left[1 - \frac{8}{13}\right] = -61.63 \quad (1.38)$$

Следовательно, $LR_{\text{набл}} = -2(-68.59 + 61.63) = 13.92$, при этом критическое значение χ^2 распределения с одной степенью свободы для 5% уровня значимости равна 3.84. Значит, на основании теста отношения правдоподобия гипотеза $H_0 : \beta_2 = 0$ должна быть отвергнута. Таким образом, данные показывают, что, в действительности, правильность мёда связана с правильностью пчёл.

4.

$$\hat{\mathbb{P}}\{honey = 0|bee = 0\} = 1 - \hat{\mathbb{P}}\{honey = 1|bee = 0\} =$$
$$1 - \frac{\exp\{\hat{\beta}_{1,UR} + \hat{\beta}_{2,UR} \cdot 0\}}{1 + \exp\{\hat{\beta}_{1,UR} + \hat{\beta}_{2,UR} \cdot 0\}} =$$
$$1 - \frac{\exp\{\ln\left(\frac{8}{5}\right)\}}{1 + \exp\{\ln\left(\frac{8}{5}\right)\}} = 1 - 0.62 = 0.38 \quad (1.39)$$

7.1.
7.2. увеличить количество наблюдений, уменьшить дисперсию случайной ошибки
7.3.
7.4.
7.5.
7.6.
7.7.
7.8. $r^* = -1/2$
7.9. $r^* = -1/3$
8.1.
8.2. Поделить зависимую переменную и каждый регрессор, включая единичный столбец, на $|x_i|$.
8.3. Поделить зависимую переменную и каждый регрессор, включая единичный столбец, на $\sqrt{|x_i|}$.
8.4. $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = cx_i^4$
8.5. $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = cx_i$
8.6. По графику видно, что с увеличением общей площади увеличивается разброс цены. Поэтому разумно, например, рассмотреть следующие подходы:

1. Перейти к логарифмам, т.е. оценивать модель $\ln price_i = \beta_1 + \beta_2 \ln totsp_i + \varepsilon_i$

2. Оценивать квантильную регрессию. В ней угловые коэффициенты линейной зависимости будут отличаться для разных квантилей переменной $price$.

3. Обычную модель линейной регрессии с гетероскедастичностью вида $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 totsp_i^2$

8.7.

8.8. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. H_0 : $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, H_a : $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 11$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 11$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k,n_1-k}$

3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 1.41$

4. Область в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 3.44]$

5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \in [0; 3.44]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта не выявил гетероскедастичность.

8.9. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. H_0 : $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, H_a : $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 21$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 21$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k,n_1-k}$

3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 6.49$

4. Область в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 3.12]$

5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \notin [0; 3.12]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 1% основная гипотеза H_0 отвергается. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта выявил гетероскедастичность.

8.10. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 11$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 11$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k,n_1-k}$

3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 2.88$

4. Область в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 3.44]$

5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \in [0; 3.44]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 не может быть отвергнута. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта не выявил гетероскедастичность.

8.11. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Голдфельда- Квандта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = f(x_i)$

1. Тестовая статистика $GQ = \frac{RSS_3/(n_3-k)}{RSS_1/(n_1-k)}$, где $n_1 = 21$ — число наблюдений в первой подгруппе, $n_3 = 21$ — число наблюдений в последней подгруппе, $k = 3$ — число факторов в модели, считая единичный столбец.

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $GQ \sim F_{n_3-k,n_1-k}$

3. Наблюдаемое значение $GQ_{obs} = 5.91$

4. Область в которой H_0 не отвергается: $GQ \in [0; 2.21]$

5. Статистический вывод: поскольку $GQ_{obs} \notin [0; 2.21]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 отвергается. Таким образом, тест Голдфельда-Квандта выявил гетероскедастичность.

8.12. Протестируем гетероскедастичность ошибок при помощи теста Уайта. $H_0 : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $H_a : \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \delta_1 + \delta_2 x_i + \delta_3 z_i + \delta_4 x_i^2 + \delta_5 z_i^2 + \delta_6 x_i z_i$.

1. Тестовая статистика $W = n \cdot R^2_{aux}$, где n — число наблюдений, R^2_{aux} — коэффициент детерминации для вспомогательной регрессии.

2. Распределение тестовой статистики при верной H_0: $W \sim \chi^2_{k_{aux}-1}$, где $k_{aux} = 6$ — число регрессоров во вспомогательной регрессии, считая константу.

3. Наблюдаемое значение тестовой статистики: $W_{obs} = 18$

4. Область в которой H_0 не отвергается: $W \in [0; W_{crit}] = [0; 11.07]$

5. Статистический вывод: поскольку $W_{obs} \notin [0; 11.07]$, то на основании имеющихся наблюдений на уровне значимости 5% основная гипотеза H_0 отвергается. Таким образом, тест Уайта выявил гетероскедастичность.

8.13.

8.14.

8.15.

8.16.

8.17.

8.18.

8.19.

8.20.

8.21.

8.22.

8.23. 0.0752, 5, 10

8.24. $k(k+1)/2$

8.25.

8.26. Известно, что оценки параметров, получаемые по обобщённому методу наименьших квадратов, являются наилучшими, поэтому: $\delta^2 \begin{bmatrix} x_1 & 0\ldots0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & & 0 \\ 0 & 0\ldots0 & x_n \end{bmatrix}$

8.27.

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(\hat{\beta}_{GLS},\varepsilon) = \operatorname{Cov}\left((X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T\Sigma^{-1}y,\varepsilon\right) = \\ \operatorname{Cov}\left((X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T\Sigma^{-1}\varepsilon,\varepsilon\right) = \\ = (X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T\Sigma^{-1}\operatorname{Cov}(\varepsilon,\varepsilon) = \\ (X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T\Sigma^{-1}\Sigma = (X^T\Sigma^{-1}X)^{-1}X^T \end{aligned} \tag{1.40}$$

8.28. Для нахождения эффективной оценки воспользуемся взвешенным методом наименьших квадратов. Разделим каждое из уравнений $y_i = \beta_1 + \varepsilon$ на корень из дисперсии ε_i с тем, чтобы ошибки в полученных уравнениях имели равные дисперсии (в этом случае можно будет сослаться на т. Гаусса-Маркова). Итак, после деления i-го уравнения на величину $\sqrt{x_i}/\sigma_\varepsilon$, мы получаем:

$$\begin{bmatrix} y_1\sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon \\ y_2\sqrt{x_2}/\sigma_\varepsilon \\ \ldots \\ y_n\sqrt{x_n}/\sigma_\varepsilon \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} \sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon \\ \sqrt{x_2}/\sigma_\varepsilon \\ \ldots \\ \sqrt{x_n}/\sigma_\varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1\sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon \\ \varepsilon_2\sqrt{x_2}/\sigma_\varepsilon \\ \ldots \\ \varepsilon_n\sqrt{x_n}/\sigma_\varepsilon \end{bmatrix}$$

Поскольку условия т. Гаусса-Маркова для последней модели выполнены, то МНК-оценка для последней модели будет наиболее эффективной. Поэтому

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i\sqrt{x_i}/\sigma_\varepsilon)(\sqrt{x_i}/\sigma_\varepsilon)}{\sum_{i=1}^n (\sqrt{x_1}/\sigma_\varepsilon)} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

8.29.
9.1.
9.2.
9.3.
9.4.
9.5.
9.6.
9.7. чтобы избежать переполнения при подсчете произведения всех y_i
9.8.
9.9.
10.1. $u_i^2 = \varepsilon_i^2 = 1$, $\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid x_1 = 0, x_2 = 1) = 0.2\beta$, $\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid x_1 = 0, x_2 = 2) = 0.8\beta$. Интуитивно объясняем: рисуем прямую по двум точкам. Мы знаем абсциссы точек с точностью ± 1. Если точки близки, то это может сильно менять оценку наклона, если точки далеки, то случайность слабо влияет на наклон.
10.2.
10.3.
10.4.
11.1.
11.2.

1. Процесс $AR(2)$, т.к. две первые частные корреляции значимо отличаются от нуля, а гипотезы о том, что каждая последующая равна нулю не отвергаются.

2. Можно использовать одну из двух статистик

$$\text{Ljung-Box} = n(n+2)\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} = 0.4289$$

$$\text{Box-Pierce} = n\sum_{k=1}^{3}\hat{\rho}_k^2 = 0.4076$$

Критическое значение хи-квадрат распределения с 3-мя степенями свободы для $\alpha = 0.05$ равно $\chi^2_{3,crit} = 7.8147$. Вывод: гипотеза H_0 об отсутствии корреляции ошибок модели не отвергается.

11.3.

1. H_0: ряд содержит единичный корень, $\beta = 0$; H_0: ряд не содержит единичного корня, $\beta < 0$

2. $ADF = -0.4/0.1 = -4$, $ADF_{crit} = -2.89$, H_0 отвергается

3. Ряд стационарен

4. При верной H_0 ряд не стационарен, и t-статистика имеет не t-распределение, а распределение Дики-Фуллера.

11.4.
11.5.
11.6.
11.7.
11.8.
11.9.
11.10.

1. $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2/(1-\rho^2)$

2. $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h \cdot \sigma^2/(1-\rho^2)$

3. $\mathrm{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \rho^h$

11.11.
11.12. все линейные комбинации стационарны
11.13. Они будут примерно одинаковы. Оценка наклона определяется автоковариационной функцией.
11.14.
11.15. $x_t = (1-\mathrm{L})^t y_t$
11.16. $F_n = \mathrm{L}(1+\mathrm{L})F_n$, значит $F_n = \mathrm{L}^k(1+\mathrm{L})^k F_n$ или $F_{n+k} = (1+\mathrm{L})^k F_n$
11.17. а - неверно, б - верно.
11.18.
11.19.
11.20.
11.21.
11.22.
11.23. 1, 2, 2
11.24.
11.25.
11.26.
11.27.
11.28.
11.29. 1. Поскольку имеют место соотношения $\varepsilon_1 = \rho\varepsilon_0 + u_1$ и $Y_1 = \mu + \varepsilon_1$, то из условия задачи получаем, что $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma^2/(1-\rho^2))$ и $Y_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1-\rho^2))$. Поэтому

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(y_1-\mu)^2}{2\sigma^2/(1-\rho^2)}\right).$$

Далее, найдем $f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1)$. Учитывая, что $Y_2 = \rho Y_1 + (1-\rho)\mu + u_2$, получаем $Y_2|\{Y_1 = y_1\} \sim N(\rho y_1 + (1-\rho)\mu, \sigma^2)$. Значит,

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_2 - \rho y_1 - (1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Действуя аналогично, получаем, что для всех $t \geqslant 2$ справедлива формула

$$f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Таким образом, находим функцию правдоподобия

$$\mathrm{L}(\mu, \rho, \sigma^2) = f_{Y_T,\ldots,Y_1}(y_T, \ldots, y_1) = f_{Y_1}(y_1) \prod_{t=2}^{T} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}),$$

где $f_{Y_1}(y_1)$ и $f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1})$ получены выше.

2. Для нахождения неизвестных параметров модели запишем логарифмическую условную функцию правдоподобия:

$$l(\mu, \rho, \sigma^2|Y_1 = y_1) = \sum_{t=2}^{T} \log f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t|y_{t-1}) =$$

$$= -\frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2.$$

Найдем производные функции $l(\mu, \rho, \sigma^2|Y_1 = y_1)$ по неизвестным параметрам:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T} 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)\cdot(\rho - 1),$$

$$\frac{\partial l}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{T} 2(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)\cdot(\mu - y_{t-1}),$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{T-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=2}^{T}(y_t - \rho y_{t-1} - (1-\rho)\mu)^2.$$

Оценки неизвестных параметров модели могут быть получены как решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial \mu} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial \rho} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$$\sum_{t=2}^{T} y_t - \hat{\rho} \sum_{t=2}^{T} y_{t-1} = (T-1)(1-\hat{\rho})\hat{\mu},$$

откуда

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^{T} y_t - \hat{\rho} \sum_{t=2}^{T} y_{t-1}}{(T-1)(1-\hat{\rho})} = \frac{3 - \hat{\rho} \cdot 3}{4 \cdot (1-\hat{\rho})} = \frac{3}{4}.$$

Далее, если второе уравнение системы переписать в виде

$$\sum_{t=2}^{T} (y_t - \hat{\mu} - \hat{\rho}(y_{t-1} - \hat{\mu}))(y_{t-1} - \hat{\mu}) = 0,$$

то легко видеть, что

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} (y_t - \hat{\mu})(y_{t-1} - \hat{\mu})}{\sum_{t=2}^{T} (y_{t-1} - \hat{\mu})^2}.$$

Следовательно, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$.

Наконец, из третьего уравнения системы

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^{T} (y_t - \hat{\rho} y_{t-1} - (1-\hat{\rho})\hat{\mu})^2.$$

Значит, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$. Ответы: $\hat{\mu} = 3/4 = 0.75$, $\hat{\rho} = -1/11 = -0.0909$, $\hat{\sigma}^2 = 165/242 = 0.6818$.

11.30. Рассмотрим модель без константы. Тогда ковариационная матрица коэффициентов пропорциональна матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & -\hat{\rho}_1 \\ -\hat{\rho}_1 & 1 \end{pmatrix}$$

11.31.
11.32.
11.33.
11.34.
11.35.
12.1.
12.2.
12.3. $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2)$
12.4.
12.5.
13.1.
13.2.
13.3.
14.1.
14.2.
14.3.
14.4.
14.5.
14.6.
14.7.
14.8.
14.9.
14.10.
14.11.
14.12.
14.13.
14.14. Например, $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, 1)'$
14.15. $\mathrm{tr}(I) = n$, $\mathrm{tr}(\pi) = 1$, $\mathrm{tr}(P) = k$
14.16.
14.17.
14.18. $n \times m$, $m \times n$, I
14.19.
14.20.
14.21.
15.1.

15.2.

15.3.

15.4.

15.5.

15.6.

15.7.

15.8.

15.9. По определению ковариационной матрицы:

$$\operatorname{Var}(\xi) = \begin{pmatrix} \operatorname{Var}(\xi_1) & \operatorname{Cov}(\xi_1,\xi_2) & \operatorname{Cov}(\xi_1,\xi_3) \\ \operatorname{Cov}(\xi_2,\xi_1) & \operatorname{Var}(\xi_2) & \operatorname{Cov}(\xi_2,\xi_3) \\ \operatorname{Cov}(\xi_3,\xi_1) & \operatorname{Cov}(\xi_3,\xi_2) & \operatorname{Var}(\xi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var}(\xi_1+\xi_2+\xi_3) = \operatorname{Var}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Var}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \quad (1.41)$$

15.10.

$$\mathbb{E}(z_1) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{E}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

$\operatorname{Var}(z_1) = \operatorname{Var}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Var}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

15.11. $\mathbb{E}(z_2) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{E}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Поскольку $z_2 = z_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где z_1 — случайный вектор из предыдущей задачи, то $\operatorname{Var}(z_2) = \operatorname{Var}(z_1)$. Сдвиг случайного вектора на вектор-константу не меняет его ковариационную матрицу.

15.12. *В данном примере проиллюстрирована процедура центрирования случайного вектора — процедура вычитания из случайного вектора его математического ожидания.*

$\mathbb{E}(z_3) = \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{E}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - \mathbb{E}\begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} -$
$\begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Заметим, что вектор z_3 отличается от вектора z_1 (из задачи 15) сдвигом на вектор-константу $\begin{pmatrix}\mathbb{E}\xi_1\\ \mathbb{E}\xi_2\end{pmatrix}$, поэтому $\mathrm{Var}(z_3) = \mathrm{Var}(z_1)$.

15.13.

15.14.

15.15.

15.16.

15.17. Каждый из вариантов возможен

15.18.

16.1.

16.2.

16.3.

16.4.

16.5.

16.6.

16.7.

16.8.

16.9.

16.10.

16.11. по χ^2-распределению

16.12. $u \sim N(0, I)$

17.1.

17.2.

17.3.

17.4.

17.5.

17.6.

17.7.

17.8.

17.9.

17.10.

17.11.

17.12.

Глава 2

Таблицы

Таблицы с разрешения автора взяты со страницы
http://www.york.ac.uk/depts/maths/tables/sources.htm

Нормальное распределение

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Хи-квадрат распределение

ν	0.1%	0.5%	1.0%	2.5%	5.0%	10.0%	12.5%	20.0%	25.0%	33.3%	50.0%
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.025	0.064	0.102	0.186	0.455
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.267	0.446	0.575	0.811	1.386
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	0.692	1.005	1.213	1.568	2.366
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.219	1.649	1.923	2.378	3.357
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	1.808	2.343	2.675	3.216	4.351
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	2.441	3.070	3.455	4.074	5.348
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	3.106	3.822	4.255	4.945	6.346
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	3.797	4.594	5.071	5.826	7.344
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	4.507	5.380	5.899	6.716	8.343
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	5.234	6.179	6.737	7.612	9.342
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	5.975	6.989	7.584	8.514	10.341
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	6.729	7.807	8.438	9.420	11.340
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	7.493	8.634	9.299	10.331	12.340
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	8.266	9.467	10.165	11.245	13.339
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	9.048	10.307	11.037	12.163	14.339
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	9.837	11.152	11.912	13.083	15.338
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	10.633	12.002	12.792	14.006	16.338
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	11.435	12.857	13.675	14.931	17.338
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	12.242	13.716	14.562	15.859	18.338
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	13.055	14.578	15.452	16.788	19.337
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	13.873	15.445	16.344	17.720	20.337
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	14.695	16.314	17.240	18.653	21.337
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	15.521	17.187	18.137	19.587	22.337
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	16.351	18.062	19.037	20.523	23.337
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	17.184	18.940	19.939	21.461	24.337
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	18.021	19.820	20.843	22.399	25.336
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	18.861	20.703	21.749	23.339	26.336
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	19.704	21.588	22.657	24.280	27.336
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	20.550	22.475	23.567	25.222	28.336
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	21.399	23.364	24.478	26.165	29.336
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	25.678	27.836	29.054	30.894	34.336
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	30.008	32.345	33.660	35.643	39.335
45	21.251	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	34.379	36.884	38.291	40.407	44.335
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	38.785	41.449	42.942	45.184	49.335
55	28.173	31.735	33.570	36.398	38.958	42.060	43.220	46.036	47.610	49.972	54.335
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	47.680	50.641	52.294	54.770	59.335

Хи-квадрат распределение

ν	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	21.991	23.201	24.935	26.171	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	23.031	24.268	26.039	27.301	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	24.069	25.333	27.141	28.429	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	25.106	26.397	28.241	29.553	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	26.143	27.459	29.339	30.675	33.247	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	27.179	28.520	30.435	31.795	34.410	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	28.214	29.580	31.528	32.912	35.570	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	29.249	30.639	32.620	34.027	36.727	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	30.283	31.697	33.711	35.139	37.881	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	31.316	32.754	34.800	36.250	39.033	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
35	36.475	38.024	40.223	41.778	44.753	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
40	41.622	43.275	45.616	47.269	50.424	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402
45	46.761	48.510	50.985	52.729	56.052	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166	80.077
50	51.892	53.733	56.334	58.164	61.647	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.661
55	57.016	58.945	61.665	63.577	67.211	68.796	73.311	77.380	82.292	85.749	93.168
60	62.135	64.147	66.981	68.972	72.751	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.607

Распределение Стьюдента, t

ν	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.255	0.434	0.681	0.851	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.255	0.434	0.680	0.850	1.165	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.255	0.433	0.679	0.849	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
55	0.255	0.433	0.679	0.848	1.163	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
60	0.254	0.433	0.679	0.848	1.162	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
∞	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
1	0.500	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.04	2.07	2.09	2.12	2.15	2.17	2.20
	0.600	2.63	2.93	3.09	3.20	3.27	3.32	3.36	3.41	3.45	3.48	3.52	3.56	3.59	3.64
	0.667	4.00	4.42	4.64	4.78	4.88	4.95	5.00	5.08	5.13	5.18	5.24	5.29	5.33	5.39
	0.750	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.32	9.41	9.50	9.58	9.67	9.74	9.85
	0.800	12.0	13.1	13.6	14.0	14.3	14.4	14.6	14.8	14.9	15.0	15.2	15.3	15.4	15.6
2	0.500	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.35	1.36	1.38	1.39	1.41	1.42	1.44
	0.600	1.50	1.64	1.72	1.76	1.80	1.82	1.84	1.86	1.88	1.89	1.91	1.92	1.94	1.96
	0.667	2.00	2.15	2.22	2.27	2.30	2.33	2.34	2.37	2.38	2.40	2.42	2.43	2.45	2.47
	0.750	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.38	3.39	3.41	3.43	3.44	3.46	3.48
	0.800	4.00	4.16	4.24	4.28	4.32	4.34	4.36	4.38	4.40	4.42	4.43	4.45	4.47	4.48
3	0.500	0.88	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.18	1.20	1.21	1.23	1.24	1.25	1.27
	0.600	1.26	1.37	1.43	1.47	1.49	1.51	1.52	1.54	1.55	1.56	1.57	1.58	1.59	1.60
	0.667	1.62	1.72	1.77	1.80	1.82	1.83	1.84	1.86	1.87	1.88	1.89	1.90	1.90	1.91
	0.750	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.45	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47
	0.800	2.89	2.94	2.96	2.97	2.97	2.97	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98	2.98
4	0.500	0.83	0.94	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.18	1.19
	0.600	1.16	1.26	1.31	1.34	1.36	1.37	1.38	1.40	1.41	1.42	1.43	1.43	1.44	1.45
	0.667	1.46	1.55	1.58	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65	1.65	1.66	1.67	1.67	1.68	1.68
	0.750	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	0.800	2.47	2.48	2.48	2.48	2.47	2.47	2.47	2.46	2.46	2.45	2.44	2.44	2.43	2.43
5	0.500	0.80	0.91	0.96	1.00	1.02	1.04	1.05	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13	1.15
	0.600	1.11	1.20	1.24	1.27	1.29	1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.34	1.35	1.36	1.37
	0.667	1.38	1.45	1.48	1.50	1.51	1.52	1.53	1.53	1.54	1.54	1.54	1.55	1.55	1.55
	0.750	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.87
	0.800	2.26	2.25	2.24	2.23	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.18	2.17	2.16	2.15	2.13
6	0.500	0.78	0.89	0.94	0.98	1.00	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07	1.08	1.10	1.11	1.12
	0.600	1.07	1.16	1.20	1.22	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.30	1.31	1.31
	0.667	1.33	1.39	1.42	1.44	1.44	1.45	1.45	1.46	1.46	1.47	1.47	1.47	1.47	1.47
	0.750	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.74
	0.800	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.00	1.98	1.97	1.95
7	0.500	0.77	0.87	0.93	0.96	0.98	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05	1.07	1.08	1.09	1.10
	0.600	1.05	1.13	1.17	1.19	1.21	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25	1.26	1.26	1.27	1.27
	0.667	1.29	1.35	1.38	1.39	1.40	1.40	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.42	1.42	1.42
	0.750	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.68	1.68	1.67	1.66	1.66	1.65
	0.800	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.83
8	0.500	0.76	0.86	0.91	0.95	0.97	0.99	1.00	1.02	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.09
	0.600	1.03	1.11	1.15	1.17	1.19	1.20	1.20	1.21	1.22	1.22	1.23	1.24	1.24	1.25
	0.667	1.26	1.32	1.35	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37	1.37	1.38	1.38	1.38	1.37	1.37
	0.750	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58
	0.800	1.98	1.95	1.92	1.90	1.88	1.87	1.86	1.84	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.74

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
9	0.500	0.75	0.85	0.91	0.94	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.08
	0.600	1.02	1.10	1.13	1.15	1.17	1.18	1.18	1.19	1.20	1.21	1.21	1.22	1.22	1.22
	0.667	1.24	1.30	1.32	1.33	1.34	1.34	1.34	1.34	1.35	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34
	0.750	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53
	0.800	1.93	1.90	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.75	1.73	1.71	1.70	1.67
10	0.500	0.74	0.85	0.90	0.93	0.95	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05	1.06	1.07
	0.600	1.01	1.08	1.12	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.21
	0.667	1.23	1.28	1.30	1.31	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.31
	0.750	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.48
	0.800	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.62
11	0.500	0.74	0.84	0.89	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
	0.600	1.00	1.07	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.17	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19
	0.667	1.22	1.27	1.29	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.29
	0.750	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45
	0.800	1.87	1.83	1.80	1.77	1.75	1.73	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.57
12	0.500	0.73	0.84	0.89	0.92	0.94	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.06
	0.600	0.99	1.07	1.10	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.17	1.17	1.17	1.18	1.18
	0.667	1.21	1.26	1.27	1.28	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27
	0.750	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42
	0.800	1.85	1.80	1.77	1.74	1.72	1.70	1.69	1.66	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.54
13	0.500	0.73	0.83	0.88	0.92	0.94	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
	0.600	0.98	1.06	1.09	1.11	1.13	1.13	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16	1.17	1.17
	0.667	1.20	1.25	1.26	1.27	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.28	1.27	1.27	1.27	1.26
	0.750	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40
	0.800	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.54	1.51
14	0.500	0.73	0.83	0.88	0.91	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03	1.04	1.05
	0.600	0.98	1.05	1.09	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.16	1.16	1.16
	0.667	1.19	1.24	1.26	1.26	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.26	1.26	1.26	1.25	1.24
	0.750	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38
	0.800	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.53	1.51	1.48
15	0.500	0.73	0.83	0.88	0.91	0.93	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.05
	0.600	0.97	1.05	1.08	1.10	1.11	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	1.15
	0.667	1.18	1.23	1.25	1.25	1.26	1.26	1.26	1.26	1.26	1.25	1.25	1.25	1.24	1.23
	0.750	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.36
	0.800	1.80	1.75	1.71	1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.54	1.51	1.49	1.46
16	0.500	0.72	0.82	0.88	0.91	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
	0.600	0.97	1.04	1.08	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14
	0.667	1.18	1.22	1.24	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.24	1.24	1.23	1.22
	0.750	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.34
	0.800	1.78	1.74	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.56	1.54	1.52	1.49	1.47	1.43
17	0.500	0.72	0.82	0.87	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01	1.02	1.03	1.04
	0.600	0.97	1.04	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14
	0.667	1.17	1.22	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.23	1.23	1.22	1.21
	0.750	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.33
	0.800	1.77	1.72	1.68	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.46	1.42

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
18	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.93	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.02	1.02	1.04
	0.600	0.96	1.04	1.07	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13
	0.667	1.17	1.21	1.23	1.24	1.24	1.24	1.24	1.24	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.21
	0.750	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32
	0.800	1.76	1.71	1.67	1.64	1.62	1.60	1.58	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.40
19	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.04
	0.600	0.96	1.03	1.07	1.09	1.10	1.10	1.11	1.12	1.12	1.12	1.13	1.13	1.13	1.13
	0.667	1.16	1.21	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.21	1.20
	0.750	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.33	1.30
	0.800	1.75	1.70	1.66	1.63	1.61	1.58	1.57	1.54	1.52	1.50	1.48	1.45	1.43	1.39
20	0.500	0.72	0.82	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.21	1.22	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.22	1.22	1.22	1.21	1.20	1.19
	0.750	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.29
	0.800	1.75	1.70	1.65	1.62	1.60	1.58	1.56	1.53	1.51	1.49	1.47	1.44	1.41	1.37
21	0.500	0.72	0.81	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.20	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.20	1.20	1.19
	0.750	1.48	1.48	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.28
	0.800	1.74	1.69	1.65	1.61	1.59	1.57	1.55	1.52	1.50	1.48	1.46	1.43	1.40	1.36
22	0.500	0.72	0.81	0.87	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.96	1.03	1.06	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12
	0.667	1.16	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.21	1.21	1.20	1.19	1.18
	0.750	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.32	1.31	1.28
	0.800	1.73	1.68	1.64	1.61	1.58	1.56	1.54	1.51	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.35
23	0.500	0.71	0.81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	1.00	1.01	1.02	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.06	1.07	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.20	1.21	1.22	1.22	1.22	1.22	1.21	1.21	1.21	1.20	1.19	1.19	1.17
	0.750	1.47	1.47	1.45	1.43	1.42	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.27
	0.800	1.73	1.68	1.63	1.60	1.57	1.55	1.53	1.51	1.49	1.46	1.44	1.41	1.38	1.34
24	0.500	0.71	0.81	0.86	0.90	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19	1.18	1.17
	0.750	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	1.26
	0.800	1.72	1.67	1.63	1.59	1.57	1.55	1.53	1.50	1.48	1.46	1.43	1.40	1.38	1.33
25	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.11	1.11
	0.667	1.15	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.16
	0.750	1.47	1.46	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.36	1.34	1.33	1.31	1.29	1.25
	0.800	1.72	1.66	1.62	1.59	1.56	1.54	1.52	1.49	1.47	1.45	1.42	1.39	1.37	1.32
26	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.11	1.11	1.10
	0.667	1.15	1.19	1.20	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.19	1.18	1.18	1.16
	0.750	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.25
	0.800	1.71	1.66	1.62	1.58	1.56	1.53	1.52	1.49	1.47	1.44	1.42	1.39	1.36	1.31

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
27	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.ga	0.99	1.00	1.01	1.03
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.08	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.19	1.20	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.16
	0.750	1.46	1.45	1.43	1.42	1.40	1.39	1.38	1.36	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.24
	0.800	1.71	1.66	1.61	1.58	1.55	1.53	1.51	1.48	1.46	1.44	1.41	1.3a	1.35	1.30
28	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.18	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.15
	0.750	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.34	1.33	1.31	1.29	1.27	1.24
	0.800	1.71	1.65	1.61	1.57	1.55	1.52	1.51	1.48	1.46	1.43	1.41	1.37	1.35	1.30
29	0.500	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.95	1.02	1.05	1.06	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
	0.667	1.14	1.18	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.18	1.17	1.17	1.15
	0.750	1.45	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.31	1.29	1.27	1.23
	0.800	1.70	1.65	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47	1.45	1.43	1.40	1.37	1.34	1.29
30	0.500	0.71	0.al	0.86	0.89	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
	0.600	0.94	1.01	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.09
	0.667	1.14	1.18	1.19	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19	1.19	1.18	1.17	1.16	1.15
	0.750	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.35	1.34	1.32	1.30	1.28	1.26	1.23
	0.800	1.70	1.64	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47	1.45	1.42	1.39	1.36	1.34	1.28
60	0.500	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.92	0.93	0.94	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00	1.01
	0.600	0.93	1.00	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.06
	0.667	1.12	1.16	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10
	0.750	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.29	1.27	1.25	1.22	1.20	1.15
	0.800	1.65	1.59	1.55	1.51	1.48	1.46	1.44	1.41	1.38	1.35	1.32	1.29	1.25	1.18
80	0.500	0.70	0.80	0.85	0.88	0.90	0.91	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.99	1.00	1.01
	0.600	0.93	0.99	1.02	1.04	1.05	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.06	1.06	1.05
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.17	1.17	1.16	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.11	1.08
	0.750	1.41	1.40	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.27	1.26	1.23	1.21	1.18	1.12
	0.800	1.64	1.58	1.53	1.50	1.47	1.44	1.42	1.39	1.37	1.34	1.31	1.27	1.23	1.16
100	0.500	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	0.600	0.92	0.99	1.02	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.04
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.12	1.10	1.07
	0.750	1.41	1.39	1.37	1.35	1.33	1.32	1.30	1.28	1.27	1.25	1.23	1.20	1.17	1.11
	0.800	1.64	1.58	1.53	1.49	1.46	1.43	1.41	1.38	1.36	1.33	1.30	1.26	1.22	1.14
120	0.500	0.70	0.79	0.84	0.88	0.90	0.91	0.92	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.01
	0.600	0.92	0.99	1.02	1.04	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.05	1.04
	0.667	1.11	1.15	1.16	1.16	1.16	1.16	1.15	1.15	1.14	1.13	1.13	1.11	1.10	1.06
	0.750	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.28	1.26	1.24	1.22	1.19	1.16	1.10
	0.800	1.63	1.57	1.52	1.48	1.45	1.43	1.41	1.37	1.35	1.32	1.29	1.25	1.21	1.12
∞	0.500	0.69	0.79	0.84	0.87	0.89	0.91	0.92	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.00
	0.600	0.92	0.98	1.01	1.03	1.04	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05	1.04	1.04	1.00
	0.667	1.10	1.13	1.14	1.15	1.14	1.14	1.14	1.13	1.13	1.12	1.11	1.09	1.07	1.00
	0.750	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.25	1.24	1.22	1.19	1.16	1.13	1.00
	0.800	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.40	1.38	1.34	1.32	1.29	1.25	1.21	1.16	1.00

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
1	0.900	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	59.1	59.7	60.5	61.0	61.5	62.0	62.6	63.0	63.3
	0.950	199.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	242.	244.	246.	248.	250.	252.	254.
	0.975	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	969.	977.	985.	993.			
	0.990														
	0.999														
2	0.900	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.39	9.41	9.43	9.44	9.46	9.47	9.49
	0.950	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
	0.975	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5
	0.990	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	99.5
	0.999	999.	999.												
3	0.900	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.13
	0.950	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.58	8.53
	0.975	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.0	13.9
	0.990	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.4	26.1
	0.999	149.	141.	137.	135.	133.	132.	131.	129.	128.	127.	126.	125.	125.	123.
4	0.900	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.92	3.90	3.87	3.84	3.82	3.79	3.76
	0.950	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.70	5.63
	0.975	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.84	8.75	8.66	8.56	8.46	8.38	8.26
	0.990	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.5	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.5
	0.999	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.0	47.4	46.8	46.1	45.4	44.9	44.1
5	0.900	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.15	3.10
	0.950	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.44	4.36
	0.975	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.62	6.52	6.43	6.33	6.23	6.14	6.02
	0.990	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.24	9.02
	0.999	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	26.9	26.4	25.9	25.4	24.9	24.4	23.8
6	0.900	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.94	2.90	2.87	2.84	2.80	2.77	2.72
	0.950	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.75	3.67
	0.975	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.46	5.37	5.27	5.17	5.07	4.98	4.85
	0.990	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.09	6.88
	0.999	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.4	18.0	17.6	17.1	16.7	16.3	15.7
7	0.900	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.70	2.67	2.63	2.59	2.56	2.52	2.47
	0.950	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.32	3.23
	0.975	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.76	4.67	4.57	4.47	4.36	4.28	4.14
	0.990	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.86	5.65
	0.999	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.1	13.7	13.3	12.9	12.5	12.2	11.7
8	0.900	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.54	2.50	2.46	2.42	2.38	2.35	2.29
	0.950	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.02	2.93
	0.975	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.29	4.20	4.10	4.00	3.89	3.81	3.67
	0.990	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.07	4.86
	0.999	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.5	11.2	10.8	10.5	10.1	9.80	9.33

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
9	0.900	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.22	2.16
	0.950	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.80	2.71
	0.975	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	3.96	3.87	3.77	3.67	3.56	3.47	3.33
	0.990	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.52	4.31
	0.999	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	9.89	9.57	9.24	8.90	8.55	8.26	7.81
10	0.900	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20	2.16	2.12	2.06
	0.950	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.98	2.91	2.84	2.77	2.70	2.64	2.54
	0.975	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.72	3.62	3.52	3.42	3.31	3.22	3.08
	0.990	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.11	3.91
	0.999	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.75	8.45	8.13	7.80	7.47	7.19	6.76
11	0.900	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.25	2.21	2.17	2.12	2.08	2.04	1.97
	0.950	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.85	2.79	2.72	2.65	2.57	2.51	2.40
	0.975	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.53	3.43	3.33	3.23	3.12	3.03	2.88
	0.990	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.54	4.40	4.25	4.10	3.94	3.81	3.60
	0.999	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	7.92	7.63	7.32	7.01	6.68	6.42	6.00
12	0.900	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.97	1.90
	0.950	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.40	2.30
	0.975	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.37	3.28	3.18	3.07	2.96	2.87	2.72
	0.990	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.57	3.36
	0.999	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.29	7.00	6.71	6.40	6.09	5.83	5.42
13	0.900	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.14	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.85
	0.950	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.67	2.60	2.53	2.46	2.38	2.31	2.21
	0.975	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.25	3.15	3.05	2.95	2.84	2.74	2.60
	0.990	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	3.96	3.82	3.66	3.51	3.37	3.17
	0.999	12.3	10.2	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.80	6.52	6.23	5.93	5.63	5.37	4.97
14	0.900	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.10	2.05	2.01	1.96	1.91	1.87	1.80
	0.950	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.60	2.53	2.46	2.39	2.31	2.24	2.13
	0.975	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.64	2.49
	0.990	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.94	3.80	3.66	3.51	3.35	3.22	3.00
	0.999	11.8	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.40	6.13	5.85	5.56	5.25	5.00	4.60
15	0.900	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.06	2.02	1.97	1.92	1.87	1.83	1.76
	0.950	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.18	2.07
	0.975	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.06	2.96	2.86	2.76	2.64	2.55	2.40
	0.990	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.80	3.67	3.52	3.37	3.21	3.08	2.87
	0.999	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.08	5.81	5.53	5.25	4.95	4.70	4.31
16	0.900	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.03	1.99	1.94	1.89	1.84	1.79	1.72
	0.950	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.49	2.42	2.35	2.28	2.19	2.12	2.01
	0.975	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	2.99	2.89	2.79	2.68	2.57	2.47	2.32
	0.990	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.69	3.55	3.41	3.26	3.10	2.97	2.75
	0.999	11.0	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.81	5.55	5.27	4.99	4.70	4.45	4.06
17	0.900	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.69
	0.950	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.45	2.38	2.31	2.23	2.15	2.08	1.96
	0.975	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.92	2.82	2.72	2.62	2.50	2.41	2.25
	0.990	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.59	3.46	3.31	3.16	3.00	2.87	2.65
	0.999	10.7	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.58	5.32	5.05	4.77	4.48	4.24	3.85

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
18	0.900	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	1.98	1.93	1.89	1.84	1.78	1.74	1.66
	0.950	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.41	2.34	2.27	2.19	2.11	2.04	1.92
	0.975	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.87	2.77	2.67	2.56	2.44	2.35	2.19
	0.990	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.51	3.37	3.23	3.08	2.92	2.78	2.57
	0.999	10.4	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.39	5.13	4.87	4.59	4.30	4.06	3.67
19	0.900	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	1.71	1.63
	0.950	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.38	2.31	2.23	2.16	2.07	2.00	1.88
	0.975	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.82	2.72	2.62	2.51	2.39	2.30	2.13
	0.990	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.43	3.30	3.15	3.00	2.84	2.71	2.49
	0.999	10.2	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.22	4.97	4.70	4.43	4.14	3.90	3.51
20	0.900	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.94	1.89	1.84	1.79	1.74	1.69	1.61
	0.950	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.97	1.84
	0.975	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.77	2.68	2.57	2.46	2.35	2.25	2.09
	0.990	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.64	2.42
	0.999	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.08	4.82	4.56	4.29	4.00	3.76	3.38
21	0.900	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.92	1.87	1.83	1.78	1.72	1.67	1.59
	0.950	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.32	2.25	2.18	2.10	2.01	1.94	1.81
	0.975	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.73	2.64	2.53	2.42	2.31	2.21	2.04
	0.990	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.31	3.17	3.03	2.88	2.72	2.58	2.36
	0.999	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	4.95	4.70	4.44	4.17	3.88	3.64	3.26
22	0.900	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.90	1.86	1.81	1.76	1.70	1.65	1.57
	0.950	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.30	2.23	2.15	2.07	1.98	1.91	1.78
	0.975	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.70	2.60	2.50	2.39	2.27	2.17	2.00
	0.990	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.26	3.12	2.98	2.83	2.67	2.53	2.31
	0.999	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.83	4.58	4.33	4.06	3.78	3.54	3.15
23	0.900	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.69	1.64	1.55
	0.950	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.27	2.20	2.13	2.05	1.96	1.88	1.76
	0.975	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.67	2.57	2.47	2.36	2.24	2.14	1.97
	0.990	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.21	3.07	2.93	2.78	2.62	2.48	2.26
	0.999	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.73	4.48	4.23	3.96	3.68	3.44	3.05
24	0.900	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.88	1.83	1.78	1.73	1.67	1.62	1.53
	0.950	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.25	2.18	2.11	2.03	1.94	1.86	1.73
	0.975	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.64	2.54	2.44	2.33	2.21	2.11	1.94
	0.990	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.17	3.03	2.89	2.74	2.58	2.44	2.21
	0.999	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.64	4.39	4.14	3.87	3.59	3.36	2.97
25	0.900	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.87	1.82	1.77	1.72	1.66	1.61	1.52
	0.950	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.24	2.16	2.09	2.01	1.92	1.84	1.71
	0.975	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.61	2.51	2.41	2.30	2.18	2.08	1.91
	0.990	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.13	2.99	2.85	2.70	2.54	2.40	2.17
	0.999	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.56	4.31	4.06	3.79	3.52	3.28	2.89
26	0.900	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.86	1.81	1.76	1.71	1.65	1.59	1.50
	0.950	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.22	2.15	2.07	1.99	1.90	1.82	1.69
	0.975	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.59	2.49	2.39	2.28	2.16	2.05	1.88
	0.990	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.09	2.96	2.81	2.66	2.50	2.36	2.13
	0.999	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.48	4.24	3.99	3.72	3.44	3.21	2.82

Распределение Фишера, F

$\nu_2 \backslash \nu_l$	q	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	50	∞
27	0.900	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.85	1.80	1.75	1.70	1.64	1.58	1.49
	0.950	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.20	2.13	2.06	1.97	1.88	1.81	1.67
	0.975	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.57	2.47	2.36	2.25	2.13	2.03	1.85
	0.990	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.06	2.93	2.78	2.63	2.47	2.33	2.10
	0.999	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.41	4.17	3.92	3.66	3.38	3.14	2.75
28	0.900	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.63	1.57	1.48
	0.950	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.19	2.12	2.04	1.96	1.87	1.79	1.65
	0.975	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.55	2.45	2.34	2.23	2.11	2.01	1.83
	0.990	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.03	2.90	2.75	2.60	2.44	2.30	2.06
	0.999	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.35	4.11	3.86	3.60	3.32	3.09	2.69
29	0.900	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.83	1.78	1.73	1.68	1.62	1.56	1.47
	0.950	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.18	2.10	2.03	1.94	1.85	1.77	1.64
	0.975	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.53	2.43	2.32	2.21	2.09	1.99	1.81
	0.990	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.00	2.87	2.73	2.57	2.41	2.27	2.03
	0.999	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.29	4.05	3.80	3.54	3.27	3.03	2.64
30	0.900	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.82	1.77	1.72	1.67	1.61	1.55	1.46
	0.950	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.76	1.62
	0.975	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.51	2.41	2.31	2.20	2.07	1.97	1.79
	0.990	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.25	2.01
	0.999	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.24	4.00	3.75	3.49	3.22	2.98	2.59
60	0.900	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.71	1.66	1.60	1.54	1.48	1.41	1.29
	0.950	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.56	1.39
	0.975	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.27	2.17	2.06	1.94	1.82	1.70	1.48
	0.990	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.63	2.50	2.35	2.20	2.03	1.88	1.60
	0.999	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.54	3.32	3.08	2.83	2.55	2.32	1.89
80	0.900	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.44	1.38	1.24
	0.950	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	1.95	1.88	1.79	1.70	1.60	1.51	1.32
	0.975	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.21	2.11	2.00	1.88	1.75	1.63	1.40
	0.990	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.55	2.42	2.27	2.12	1.94	1.79	1.49
	0.999	7.54	5.97	5.12	4.58	4.20	3.92	3.70	3.39	3.16	2.93	2.68	2.41	2.16	1.72
100	0.900	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.66	1.61	1.56	1.49	1.42	1.35	1.21
	0.950	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.93	1.85	1.77	1.68	1.57	1.48	1.28
	0.975	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.18	2.08	1.97	1.85	1.71	1.59	1.35
	0.990	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.50	2.37	2.22	2.07	1.89	1.74	1.43
	0.999	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.30	3.07	2.84	2.59	2.32	2.08	1.62
120	0.900	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.65	1.60	1.54	1.48	1.41	1.34	1.19
	0.950	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.91	1.83	1.75	1.66	1.55	1.46	1.25
	0.975	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.16	2.05	1.94	1.82	1.69	1.56	1.31
	0.990	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.47	2.34	2.19	2.03	1.86	1.70	1.38
	0.999	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.24	3.02	2.78	2.53	2.26	2.02	1.54
∞	0.900	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.60	1.55	1.49	1.42	1.34	1.26	1.00
	0.950	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.35	1.00
	0.975	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.05	1.94	1.83	1.71	1.57	1.43	1.00
	0.990	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.52	1.00
	0.999	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	2.96	2.74	2.51	2.27	1.99	1.73	1.00