O samonastavujúcom sa regulátore, časť druhá

Obsah

Zákon riadenia (štruktúra riadenia) samonastavujúceho sa regulátora v uvažovanom konkrétnom príklade je v tvare

$$R(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})r(k) - S(z^{-1})y(k) \tag{1a}$$

$$u(k) = \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}r(k) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}y(k) \tag{1b}$$

kde R, S a T sú polynómy v tvare

$$R(z^{-1}) = 1 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \ldots + r_{n_r} z^{-n_r} \tag{2a}$$

$$S(z^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \ldots + s_{n_s} z^{-n_s} \tag{2b}$$

$$T(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \ldots + t_{n_t} z^{-n_t} \tag{2c}$$

Ako už bolo uvedené, koeficienty polynómov sú parametrami regulátora. Počet parametrov regulátora závisí od stupňa jednotlivých polynómov. Pre uvažovaný konkrétny príklad sú stupne polynómov nasledovné: $n_r = 1$, $n_s = 1$ a $n_t = 0$. Potom počet parametrov regulátora je $n_r + n_s + 1 + n_t + 1$. Teda $1+1+1+0+1 = 4$. Zákon riadenia je možné zapísať aj v tvare diferenčnej rovnice:

$$u(k) = -r_1 u(k-1) - s_0 y(k) - s_1 y(k-1) + t_0 r(k) \tag{3}$$

1 Metóda rozmiestňovania pólov

Uvažujme zákon riadenia v tvare (1), ktorého parametre budeme počítať pomocou metódy rozmiestňovania pólov. Najprv odvodíme rovnicu uzavretého obvodu (URO).

1.1 Rovnica URO

Model riadeného systému je

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \tag{4}$$

Dosadením (1) do (4) máme

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\left(\frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}r(k) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}y(k)\right) \tag{5}$$

Úpravou

$$Ay(k) = \frac{BT}{R}r(k) - \frac{BS}{R}y(k) \tag{6a}$$
$$RAy(k) = BTr(k) - BSy(k) \tag{6b}$$
$$(RA + BS)\,y(k) = BTr(k) \tag{6c}$$
$$y(k) = \frac{BT}{(AR + BS)}r(k) \tag{6d}$$
$$\frac{y(k)}{r(k)} = \frac{BT}{(AR + BS)} \tag{6e}$$

Charakteristický polynóm uzavretého regulačného obvodu je:

$$A(z^{-1})R(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1}) \tag{7}$$

Nech želaný polynóm je

$$P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots + p_{n_p} z^{-n_p} \tag{8}$$

potom diofantická rovnica, z ktorej sa vypočítajú koeficienty polynómov R a S je

$$A(z^{-1})R(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1}) = P(z^{-1}) \tag{9}$$

V tomto prípade máme

$$A = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \tag{10a}$$
$$B = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \tag{10b}$$
$$R = 1 + r_1 z^{-1} \tag{10c}$$
$$S = s_0 + s_1 z^{-1} \tag{10d}$$

a nech želaný polynóm pre tento prípad je

$$P = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} \tag{11}$$

Diofantická rovnica pre tento prípad

$$\begin{aligned}&\left(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\right)\left(1 + r_1 z^{-1}\right) + \left(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}\right)\left(s_0 + s_1 z^{-1}\right)\\ &= 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}\end{aligned} \tag{12}$$

Roznásobením

$$\begin{aligned}&1 + r_1 z^{-1} + a_1 z^{-1} + a_1 r_1 z^{-2} + a_2 z^{-2} + a_2 r_1 z^{-3}\\ &+ b_1 s_0 z^{-1} + b_1 s_1 z^{-2} + b_2 s_0 z^{-2} + b_2 s_1 z^{-3}\\ &= 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}\end{aligned} \tag{13}$$

Na ľavej strane ponecháme členy, v ktorých sa nachádzajú neznáme koeficienty polynómov zo zákona adaptácie a ostatné členy presunieme na pravú stranu

$$\begin{aligned}&r_1 z^{-1} + a_1 r_1 z^{-2} + a_2 r_1 z^{-3} + b_1 s_0 z^{-1} + b_1 s_1 z^{-2} + b_2 s_0 z^{-2} + b_2 s_1 z^{-3}\\ &= 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} - 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}\end{aligned} \tag{14}$$

Po úprave

$$\begin{aligned}&(r_1 + b_1 s_0)\, z^{-1} + (a_1 r_1 + b_1 s_1 + b_2 s_0)\, z^{-2} + (a_2 r_1 + b_2 s_1)\, z^{-3}\\ &= (p_1 - a_1)\, z^{-1} + (p_2 - a_2)\, z^{-2}\end{aligned} \tag{15}$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách získame rovnice

$$r_1 + b_1 s_0 = p_1 - a_1 \tag{16a}$$
$$a_1 r_1 + b_2 s_0 + b_1 s_1 = p_2 - a_2 \tag{16b}$$
$$a_2 r_1 + b_2 s_1 = 0 \tag{16c}$$

V maticovom zápise:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Maticový zápis vyplývajúci z diofantickej rovnice v prípade, keď stupne polynómov R, S a P sú všeobecné, je v tvare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_a} & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & b_{n_b} & \vdots & \vdots & \cdots & b_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \cdots & a_1 & 0 & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n_a} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n_r} \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Takáto sústava rovníc bude mať riešenie ak

$$n_r = n_b - 1 \tag{19a}$$

$$n_s = n_a - 1 \tag{19b}$$

1.2 Polynóm T

Zatiaľ sme vypočítali koeficienty polynómov R a S. Otázkou ostáva, ako určiť polynóm T. Je potrebné určiť jeho stupeň a vypočítať koeficienty. V úvode sme „zvolili“, že stupeň polynómu T je $n_t = 0$. Teda jediným koeficientom bude t_0. Ukážme teraz, že jednou z možností, ako určiť polynóm T, je žiadať nulovú regulačnú odchýlku v ustálenom stave. Dostaneme tak polynóm T práve nultého stupňa a aj výpočet koeficientu t_0.

Keďže charakteristická rovnica URO je rovnaká ako želaný polynóm P, je možné písať rovnicu uzavretého obvodu v tvare

$$y(k) = \frac{BT}{P} r(k) \tag{20}$$

Aby platilo

$$y(\infty) = r(\infty) \tag{21}$$

musí byť

$$BT = P \tag{22a}$$

$$T = \frac{P}{B} \tag{22b}$$

A keďže „donekonečna“ je v diskrétnej doméne „dojednotky“, teda $z = 1$, potom

$$T = \frac{P(1)}{B(1)} \tag{23}$$

čo v tomto prípade znamená

$$T(z^{-1}) = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} = t_0 \tag{24}$$

1.2.1 Alternatívy spôsob určenia polynómu T

Alternatíva 1

Ďalší spôsob ako určiť koeficienty polynómu T je nasledovný. Nájdeme obraz referenčného signálu tak, že jeho časovú formu pretransformujeme pomocou Z-transformácie. Totiž v mnohých prípadoch je možné dopredu určiť časový priebeh referenčného signálu a navyše sa referenčný signál skladá zo skokov, rámp a podobných, pomocou Z-transformácie, ľahko transformovateľných signálov. Obraz referenčného signálu je

$$\{r(t)\}_q = \frac{F\left(q^{-1}\right)}{G\left(q^{-1}\right)} \tag{25}$$

Tento obraz použijeme vo vzťahu pre regulačnú odchýlku:

$$e = r - y = r - \frac{BT}{P}r = \frac{F}{G} - \frac{BT}{P}\frac{F}{G} = \frac{F(P-BT)}{GP} = \frac{FN}{P} \tag{26}$$

kde sme označili

$$\frac{P-BT}{G} = N \tag{27}$$

Z tohto označenia môžeme písať diofantickú rovnicu, ktorá doplní (9), a vznikne tak sústava.

$$GN + BT = P \tag{28}$$

Z tejto rovnice sa dá určiť aj polynóm vyššieho ako nultého stupňa.

Alternatíva 2

Ďalší spôsob ako určiť koeficienty polynómu T je takýto: ak bude polynóm T obrátenou hodnotou polynómu B, teda $T = 1/B$, zaistí sa tak nie len nulová regulačná odchýlka v ustálenom stave, ale aj to, že polynóm B nebude mať žiadny vplyv na dynamiku URO. Dynamika URO bude daná len želaným charakteristickým polynómom P, takto:

$$y(t) = \frac{1}{P}r(t) \tag{29}$$

Zákon riadenia potom môžeme uvažovať v tvare

$$Ru(t) = \frac{1}{B}r(t) - Sy(t) \quad \Rightarrow \quad r = BRu + BSy \tag{30}$$

Ale ak $B = q^{-D}\tilde{B}$, tak aby sme mohli napísať predchádzajúcu rovnicu musíme dať q^{-D} na druhú stranu k r. Teda:

$$rq^D = \tilde{B}Ru + \tilde{B}Sy \tag{31}$$

Ak potom vyjadríme akčný zásah, je zrejmé, že bude závisieť od budúcich hodnôt referenčného signálu $u(t) = r(t+D) - \ldots$ Toto však nemusí byť prekážkou, pretože v mnohých prípadoch je referenčný signál dopredu známy.

1.3 Súhrn pre tento prípad

Zhrňme výpočty potrebné pre určenie parametrov regulátora pre tento prípad.

Hodnoty parametrov modelu a_1, a_2, b_1 a b_2 sú po identifikácii (v danej perióde vzorkovania) známe a prirodzene sú známe aj hodnoty koeficientov želaného polynómu P. Hodnoty parametrov regulátora získame riešením

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

a

$$t_0 = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} \tag{33}$$

2 Rýchlostný algoritmus metódy rozmiestňovania pólov

Keďže ide o rýchlostný algoritmus, je potrebné vyjadriť prírastok akčnej veličiny:

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1) = (1 - q^{-1})u(t) \tag{34}$$

$$u(t) = \frac{\Delta u(t)}{(1 - q^{-1})} \tag{35}$$

Riadený systém a jeho ARX model (s nulovým šumom):

$$Ay(t) = Bu(t) \tag{36}$$

do ktorého dosadíme $u(t)$ a upravíme...

$$Ay(t) = B\frac{\Delta u(t)}{(1 - q^{-1})} \tag{37a}$$

$$(1 - q^{-1})Ay(t) = B\Delta u(t) \tag{37b}$$

Zákon riadenia uvažujeme v tvare:

$$\Delta u(t) = \frac{S}{R}(r(t) - y(t)) \tag{38}$$

Rovnica URO potom bude mať tvar

$$(1 - q^{-1})Ay(t) = B\Delta u(t) \tag{39a}$$

$$(1 - q^{-1})Ay(t) = B\frac{S}{R}(r(t) - y(t)) \tag{39b}$$

$$(1 - q^{-1})ARy(t) = BS(r(t) - y(t)) \tag{39c}$$

$$(1 - q^{-1})ARy(t) = BSr(t) - BSy(t) \tag{39d}$$

$$((1 - q^{-1})AR + BS)y(t) = BSr(t) \tag{39e}$$

$$y(t) = \frac{BS}{(1 - q^{-1})AR + BS}r(t) \tag{39f}$$

Takže charakteristický polynóm je

$$P = \left(1 - q^{-1}\right)AR + BS \tag{40}$$

Ale veď potom

$$BS = P - \left(1 - q^{-1}\right)AR \tag{41}$$

a tak rovnica URO:

$$y(t) = \frac{P - (1 - q^{-1})AR}{P}r(t) \tag{42a}$$

$$y(t) = \left(\frac{P}{P} - \frac{(1 - q^{-1})AR}{P}\right)r(t) \tag{42b}$$

$$y(t) = r(t) - \frac{(1 - q^{-1})AR}{P}r(t) \tag{42c}$$

Ak sa teraz opýtame aká bude regulačná odchýlka v ustálenom stave t.j. $y(\infty)$, $r(\infty)$ a čo je najdôležitejšie $q = 1$ potom:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= r(\infty) - \frac{(1 - 1)AR}{P}r(\infty) \\ y(\infty) &= r(\infty) \end{aligned} \tag{43}$$

Teda regulačná odchýlka v ustálenom stave bude nulová (pretože sa zhodujú hodnoty referenčného signálu a výstupnej veličiny).

3 Cvičenie tretie

1. Zrealizujte (v simulačnom prostredí) samonastavujúci sa regulátor tak ako to predpokladá uvažovaný konkrétny príklad.

   Nech želaným charakteristickým polynómom (pre uvažovaný konkrétny príklad) je $P(z^{-1}) = 1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2}$ pričom $p_1 = -1,6$ a $p_2 = 0,64$, teda dvojnásobný koreň $z_{1,2} = 0,8$.

   Alternatívne, nech v želanom charakteristickom je $p_1 = -0,8$ a $p_2 = 0,16$, teda dvojnásobný koreň $z_{1,2} = 0,4$.

   Pozn: pre uvažovaný príklad sa odporúča perióda vzorkovania $T_{vz} = 0,1$ [s].

Otázky a úlohy

1. Modelom riadeného systému je ARX model. Zákon riadenia má tvar $R(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})r(k) - S(z^{-1})y(k)$. Nájdite charakteristický polynóm URO.

2. Modelom riadeného systému je ARX model. Zákon riadenia má tvar $u(k) = \Delta u(k)/(1 - z^{-1})$, kde

$$\Delta u(k) = \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}(r(k) - y(k))$$

   Nájdite charakteristický polynóm URO.

3. Stručne vysvetlite výpočet parametrov regulátora metódou pole-placement.

4. Vysvetlite podstatu metód návrhu polynómu $T(z^{-1})$ pri STR.