

MRAC vstupno-výstupný

Obsah

1	SPR prenosové funkcie, MKY lemma	1
1.1	Striktne pozitívne reálne prenosové funkcie	1
1.2	Meyerova-Kalmanova-Yakubovichova Lemma	2
2	Adaptačná odchýlka	2
2.1	Model sústavy a referenčný model	2
2.2	Zákon riadenia	3
2.3	Rovnica adaptačnej odchýlky	3
3	Zákon adaptácie pri $n^* = 1$	4
4	Zákon adaptácie pri $n^* = 2$	7
4.1	Priamočiary postup	7
4.2	Metóda doplnenej odchýlky	9
4.2.1	Prvá možnosť	10
4.2.2	Druhá možnosť	10
5	Cvičenie ôsme	12
6	Cvičenie deviate a desiate	13
6.1	Referát MRAC vstupno-výstupný pri ($n^* = 2$)	13
6.2	Zadanie	13
7	Otázky a úlohy	14

V tejto časti odvodíme adaptívny algoritmus riadenia, ktorý sa zaraďuje do triedy priame adaptívne riadenie. Pripomeňme priame adaptívne riadenie: Model sústavy je parametrizovaný pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia. Pretože tieto parametre sú neznáme, sú priebežne identifikované - adaptované. Výstupom zákona adaptácie sú priamo parametre zákona riadenia.

Pri odvodení zákona adaptácie sa v tejto časti bude využívať Ljapunovova priama metóda.

1 SPR prenosové funkcie, MKY lemma

1.1 Striktne pozitívne reálne prenosové funkcie

Pojem *Pozitívne reálna* (PR) a *Striktne pozitívne reálna* (SPR) prenosová funkcia zohráva dôležitú úlohu v analýze stability nie len adaptívnych systémov [1]. Je preto dôležité disponovať kritériom, ktoré umožní zistiť, či príslušná prenosová funkcia je SPR ([3] str. 164).

Podľa definície 3.5.1 a 3.5.2 v [1], str. 127, prenosová funkcia $G(s)$ komplexnej premennej s sa nazýva pozitívne reálna (PR) ak

1. $G(s)$ je reálna pre reálne s .
2. $\Re\{G(s)\} \geq 0$ pre všetky $\Re\{s\} > 0$.

Prenosová funkcia $G(s)$ je striktnie pozitívne reálna (SPR) ak existuje reálne kladné číslo ε také, že $G(s - \varepsilon)$ je PR.

Prakticky nie je jednoduché zistiť, či uvedené podmienky sú splnené. V nasledujúcom uvedieme ekvivalentné nutné a postačujúce podmienky pozitívnej reálnosti. Platnosť týchto podmienok sa dá ľahko overiť. Prenosová funkcia $G(s)$ je PR keď vyhovuje všetkým nasledujúcim podmienkam

1. $G(s)$ je reálna pre všetky reálne s .
2. Menovateľ $G(s)$ má korene v ľavej polrovine komplexnej roviny alebo má reálne korene na imaginárnej osi.
3. $\Re\{G(j\omega)\} \geq 0$ pre všetky reálne ω .

Pre vyjadrenie reálnej časti funkcie $G(j\omega)$ je výhodné využiť, že platí:

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{c^2 + d^2}$$

1.2 Meyerova-Kalmanova-Yakubovichova Lemma

Pre danú stabilnú maticu A , vektory b , c a skalár $d \geq 0$, platí nasledujúce: Ak

$$G(s) = d + c^T (sI - A)^{-1} b$$

je SPR, potom pre danú maticu $L = L^T > 0$ existujú skalár $v > 0$, vektor q a matica $P = P^T > 0$ také, že

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -qq^T - vL \\ Pb - c &= \pm q\sqrt{2d} \end{aligned}$$

Tak znie veta, ktorá, ako sa ukáže, je veľmi užitočná pri návrhu MRAC využívajúceho len vstupno-výstupné informácie.

V tomto kurze ju využijeme v menej všeobecnom tvare: Nech je systém daný trojicou A_c , \bar{B}_c , C_c a A_c nech je stabilná matica. Ak $W_m(s) = C_c^T (sI - A_c)^{-1} \bar{B}_c$ je SPR, potom platí, že

$$\begin{aligned} A_c^T P + PA_c &= -Q \\ P\bar{B}_c &= C_c \end{aligned}$$

kde $Q = Q^T > 0$. A je to práve fakt, že ak je $W_m(s)$ SPR tak platí $P\bar{B}_c = C_c$, ktorý umožní zredukovať zákon adaptácie tak, že v ňom vystupuje len odchýlka výstupných veličín sústavy a referenčného modelu [2].

2 Adaptačná odchýlka

2.1 Model sústavy a referenčný model

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (1)$$

kde $Z_p(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m , $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$. Predpokladajme, že relatívny stupeň n^* sústavy je známy. Pre zjednodušenie tiež predpokladajme, že aj stupne n a m polynómov sú známe, pričom vo všeobecnosti známe nemusia byť. Koeficienty polynómov $Z_p(s)$ a $R_p(s)$ (parametre sústavy) sú neznáme. Hodnota a znamienko zosilnenia k_p nech je známe.

Sústava v tvare (1) môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2a)$$

$$y = c^T x \quad (2b)$$

kde x je vektor stavových veličín sústavy a A , b , c^T sú matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov pričom hodnoty ich prvkov sú neznáme.

Cieľom riadenia je: Nech všetky signály uzavretého regulačného obvodu sú ohraničené a výstupná veličina y sústavy nech sleduje výstupnú veličinu referenčného modelu, ktorý je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (3)$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m , $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m , pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$. Všetky parametre (koeficienty polynómov a k_m) referenčného modelu sú známe, dané „projektantom“.

2.2 Zákon riadenia

Ako bolo ukázané v predchádzajúcich témach predmetu, zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r \quad (4)$$

zabezpečí, že priebeh výstupnej veličiny y sa zhoduje s priebehom výstupnej veličiny referenčného modelu y_m ak sú parametre zákona vypočítané z podmienok zhody

$$\Theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \quad (5a)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \quad (5b)$$

$$R_p \left(\Lambda - \Theta_1^{*T} \alpha(s) \right) - k_p Z_p \left(\Theta_2^{*T} \alpha(s) + \Theta_3^* \Lambda \right) = Z_p \Lambda_0 R_m \quad (5c)$$

Pretože parametre sústavy (1) sú neznáme, zákon riadenia (4) nemožno použiť. Použije sa zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3 y + \Theta_4 r \quad (6)$$

kde Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 a Θ_4 sú odhadmi ideálnych parametrov Θ_1^* , Θ_2^* , Θ_3^* a Θ_4^* v každom čase t . Je potrebné nájsť zákon adaptácie, ktorý priebežne generuje (identifikuje) hodnoty $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, $\Theta_3(t)$ a $\Theta_4(t)$.

Pomocné filtre vystupujúce v zákone riadenia v stavovom priestore sú (viď predch. článok)

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + q u \quad (7a)$$

$$\dot{\nu}_2 = \Lambda \nu_2 + q c^T x \quad (7b)$$

a uvažovaný zákon riadenia je

$$u = \Theta_c^T D X + \Theta_4 r \quad (8)$$

kde $\Theta_c = [\Theta_3^* \quad \Theta_1^T \quad \Theta_2^T]^T$, Θ_4 sú parametre zákona riadenia a

$$D = \begin{bmatrix} c^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

2.3 Rovnica adaptačnej odchýlky

Pridanie pomocných filtrov (7) k stavovému opisu sústavy (2) vedie k „doplnenej sústave“ (viď predch. časti predmetu) v tvare

$$\dot{X} = A_o X + B_c u \quad (9a)$$

$$y = C_c^T X \quad (9b)$$

Parametrizácia doplnenej sústavy (9) pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia sa dosiahne pripočítaním a odpočítaním ideálneho vstupného výrazu $B_c u^* = B_c \Theta_c^{*\top} DX + B_c \Theta_4^* r$

$$\dot{X} = A_o X + B_c u + B_c \Theta_c^{*\top} DX + B_c \Theta_4^* r - B_c \Theta_c^{*\top} DX - B_c \Theta_4^* r \quad (10a)$$

$$\dot{X} = \left(A_o + B_c \Theta_c^{*\top} D \right) X + B_c \Theta_4^* r + B_c \left(u - \Theta_c^{*\top} DX - \Theta_4^* r \right) \quad (10b)$$

Z predchádzajúcich častí vieme, že $A_c = A_o + B_c \Theta_c^{*\top} D$, $\bar{B}_c = B_c \Theta_4^*$ a tiež, že neminimálnu reprezentáciu referenčného modelu (3) možno (teoreticky) zapísať v tvare

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \bar{B}_c r \quad (11a)$$

$$y_m = C_c^\top X_m \quad (11b)$$

Potom parametrizovaná doplnená sústava (10b) je

$$\dot{X} = A_c X + \bar{B}_c r + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \left(u - \Theta_c^{*\top} DX - \Theta_4^* r \right) \quad (12a)$$

$$y = C_c^\top X \quad (12b)$$

Definujeme *adaptačnú odchýlku* v tvare

$$e = X - X_m \quad (13)$$

$$e_1 = y - y_m \quad (14)$$

potom:

$$\dot{X} - \dot{X}_m = A_c (X - X_m) + \bar{B}_c r - \bar{B}_c r + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \left(u - \Theta_c^{*\top} DX - \Theta_4^* r \right) \quad (15a)$$

$$y - y_m = C_c^\top (X - X_m) \quad (15b)$$

a teda

$$\dot{e} = A_c e + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \left(u - \Theta_c^{*\top} DX - \Theta_4^* r \right) \quad (16a)$$

$$e_1 = C_c^\top e \quad (16b)$$

čo je základná rovnica opisujúca dynamiku adaptačnej odchýlky v stavovom priestore, ktorú možno vyjadriť v tvare prenosovej funkcie uvažujúc, že platí

$$W_m(s) = C_c^\top (sI - A_c)^{-1} \bar{B}_c \quad (17)$$

Potom (16) v tvare prenosovej funkcie je

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*} \left(u - \Theta_c^{*\top} DX - \Theta_4^* r \right) \quad (18)$$

Odhadom odchýlky e_1 nech je \hat{e}_1 , ktorá je závislá od odhadov $\Theta_c(t)$, $\Theta_4(t)$.

$$\hat{e}_1 = W_m(s) l (u - \Theta_c DX - \Theta_4 r) \quad (19)$$

kde l je odhadom hodnoty $\frac{1}{\Theta_4^*}$. Pretože uvažujeme zákon riadenia $u = \Theta_c^\top DX + \Theta_4 r$, tak $\hat{e}_1 = 0$; $\forall t$. To znamená, že rovnica (19) nie je potrebná pre identifikáciu neznámych parametrov Θ_c^* , Θ_4^* a ako chybu odhadu týchto parametrov možno použiť priamo rovnicu adaptačnej odchýlky (18).

3 Zákon adaptácie pri $n^* = 1$

Uvažujme, že relatívny stupeň sústavy (1) je $n^* = 1$. Prenosová funkcia referenčného modelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom

sústavy. Relatívny stupeň referenčného modelu $n_m^* = 1$ umožňuje aby prenosová funkcia $W_m(s)$ bola navrhnutá ako striktnie pozitívne reálna (SPR).

Nech $W_m(s) = C_c^\top (sI - A_c)^{-1} \bar{B}_c$ je SPR. Potom podľa MKY lemy v časti 1.2 existuje taká matica P , pre ktorú platí

$$A_c^\top P + P A_c = -Q \quad (20a)$$

$$P \bar{B}_c = C_c \quad (20b)$$

kde $Q = Q^\top > 0$. Táto skutočnosť sa v ďalšom využije pri voľbe kandidáta na Lyapunovovu funkciu.

Dosadením (8) za u do (18) máme

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*} (\theta_c^\top DX + \theta_4 r) \quad (21)$$

kde $\theta_c = \Theta_c - \Theta_c^*$ a $\theta_4 = \Theta_4 - \Theta_4^*$. Zavedením vektora chyby nastavenia parametrov zákona riadenia $\theta = [\theta_c^\top \ \theta_4]^\top$ a signálneho vektora $\omega = [(DX)^\top \ r]^\top$ máme známy tvar adaptačnej odchýlky

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*} (\theta^\top \omega) \quad (22)$$

alebo

$$\dot{e} = A_c e + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} (\theta^\top \omega) \quad (23a)$$

$$e_1 = C_c^\top e \quad (23b)$$

V tomto prípade rovnica (22) alebo (23) dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia Θ a adaptačnú odchýlku e_1 cez SPR prenosovú funkciu.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega) \quad (24)$$

teda aby zákon adaptácie bol funkciou len výstupnej adaptačnej odchýlky e_1 a nie aj jej derivácií e , pretože tieto nie sú dostupné, nakoľko nie sú dostupné stavové veličiny sústavy.

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = e^\top P e + \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \theta \quad (25)$$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovoľná diagonálna matica, $\left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra Θ_4^* a $P = P^\top > 0$ spĺňa rovnice (20), ktoré vyplývajú z MKY lemy.

$$\dot{V} = \dot{e}^\top P e + e^\top P \dot{e} + \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| (\dot{\theta}^\top \Gamma^{-1} \theta + \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta}) \quad (26)$$

Poznáme (23) odkiaľ $\dot{e}^\top = e^\top A_c^\top + \omega^\top \theta \frac{1}{\Theta_4^*} \bar{B}_c^\top$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(e^\top A_c^\top + \omega^\top \theta \frac{1}{\Theta_4^*} \bar{B}_c^\top \right) P e + e^\top P \left(A_c e + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega \right) + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \quad (27)$$

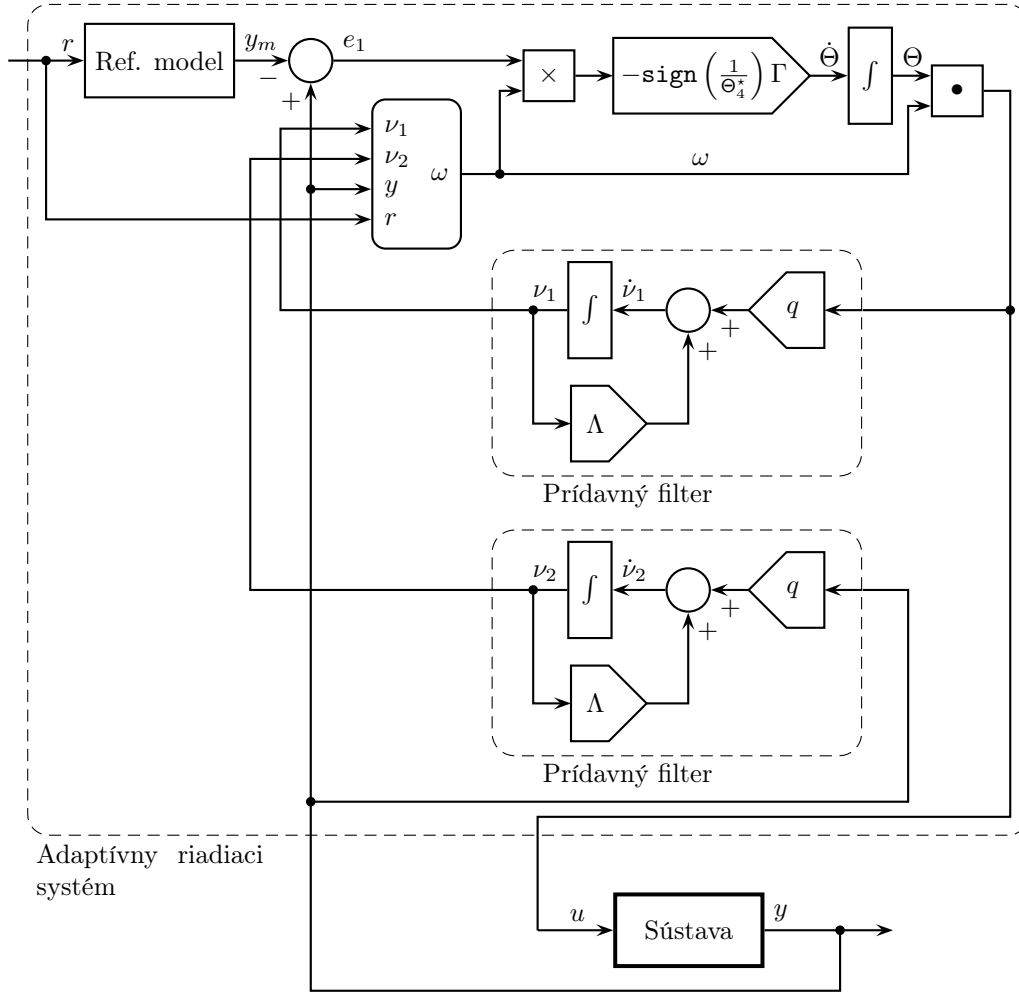
$$\dot{V} = e^\top (-Q) e + 2e^\top P \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \quad (28)$$

Pripomeňme, že platí $P \bar{B}_c = C_c$ (to vďaka tomu, že $W_m(s)$ je SPR), potom

$$\dot{V} = e^\top (-Q) e + 2e^\top C_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \quad (29)$$

Všimnime si, že $e^\top C_c = C_c^\top e = e_1$. Práve tento moment umožní aby zákon adaptácie $\dot{\theta} = f(e_1, \omega)$ bol funkciou e_1 a nie e . Časová derivácia \dot{V}

$$\dot{V} = e^\top (-Q) e + 2e_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \quad (30)$$



Obr. 1: Bloková schéma MRAC so vstupno-výstupnou štruktúrou riadenia pri $n^* = 1$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2e_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^T \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \quad (31a)$$

$$2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^T G^{-1} \dot{\theta} = -2e_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \Theta^T \omega \quad (31b)$$

$$\left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -e_1 \text{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^*} \right) \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \omega \quad (31c)$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\text{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^*} \right) e_1 \omega \quad (31d)$$

$$\dot{\theta} = -\text{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^*} \right) e_1 \Gamma \omega \quad (31e)$$

Rovnako ako sme zaviedli vektor Θ , zavedieme aj vektor parametrov zákona riadenia v tvare

$\Theta = [\Theta_c^T \ \Theta_4]^T = [\Theta_3 \ \Theta_1^T \ \Theta_2^T \ \Theta_4]^T$ a vektor ω možno zapísať v tvare $\omega = [y \ \nu_1^T \ \nu_2^T \ r]^T$. Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\text{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^*} \right) \Gamma e_1 \omega \quad (32)$$

a uvažovaný zákon riadenia možno zapísať v tvare $u = \Theta^T \omega$.

4 Zákon adaptácie pri $n^* = 2$

4.1 Priamočiary postup

Uvažujme relatívny stupeň sústavy (1) $n^* = 2$. Prenosová funkcia referenčného medelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy, teda $n_m^* = 2$. To ale znamená (bez dôkazu), že prenosová funkcia $W_m(s)$ nie je SPR. Preto nie je možné použiť predchádzajúci postup a je ho potrebné modifikovať.

Rovnica pre adaptačnú odchýlku (18)

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*} \left(u - \Theta_c^{*\top} DX - \Theta_4^* r \right) \quad (33)$$

je stále platná (pri jej odvodení nehral relatívny stupeň sústavy žiadnu úlohu).

Využime identitu $(s + \rho)(s + \rho)^{-1} = 1$ kde ρ je ľubovoľná kladná konštanta a prepíšme rovnicu (18) do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s + \rho)(s + \rho)^{-1} \frac{1}{\Theta_4^*} \left(u - \Theta_c^{*\top} DX - \Theta_4^* r \right) \quad (34)$$

čo možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s + \rho) \frac{1}{\Theta_4^*} \left(u_f - \Theta^{*\top} \omega_f \right) \quad (35)$$

kde sme zaviedli $u_f = (s + \rho)^{-1}u$, $\omega_f = (s + \rho)^{-1}\omega$ a Θ^* je rovnaký ako Θ avšak obsahuje ideálne parametre.

Nech prenosová funkcia $W_m(s)(s + \rho)$ je zvolená tak, že je to SPR prenosová funkcia. Potom rovnica

$$e_1 = W_m(s)(s + \rho) \frac{1}{\Theta_4^*} (\theta^\top \omega_f) \quad (36)$$

kde $\theta = \Theta - \Theta^*$ dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia θ a adaptačnú odchýlku e_1 cez SPR prenosovú funkciu. Reprezentácia rovnice (36) v stavovom priestore je

$$\dot{e} = A_c e + \bar{B}_c(s + \rho) \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \quad (37a)$$

$$e_1 = C_c^\top e \quad (37b)$$

kde s teraz predstavuje operátor derivácie $\frac{d}{dt}$, rovnako ako bodka „ $\dot{\cdot}$ “ nad e . V ďalšom sa tiež stretneme s takýmto významom symbolu s , pričom na to nebudeme zvlášť upozorňovať, konkrétny význam symbolu s vyplynie z kontextu. Preto

$$s e = A_c e + s \left(\bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \right) + \rho \left(\bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \right) \quad (38a)$$

$$s \left(e - \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \right) = A_c e + \rho \left(\bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \right) \quad (38b)$$

Označme $e - \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f = \bar{e}$, potom $e = \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f + \bar{e}$ a teda

$$s \bar{e} = A_c \bar{e} + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f + \rho \left(\bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \right) \quad (39a)$$

$$e_1 = C_c^\top e = C_c^\top \left(\bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f + \bar{e} \right) \quad (39b)$$

$$\dot{\bar{e}} = A_c \bar{e} + A_c \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f + \rho \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \quad (40a)$$

$$e_1 = C_c^\top \bar{e} + C_c^\top \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \quad (40b)$$

Pretože $C_c^\top B_c = 0$ tak aj $C_c^\top \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f = 0$, potom

$$\dot{\bar{e}} = A_c \bar{e} + (A_c \bar{B}_c + \rho \bar{B}_c) \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \quad (41a)$$

$$e_1 = C_c^\top \bar{e} \quad (41b)$$

Označme $A_c \bar{B}_c + \rho \bar{B}_c = B_1$, potom

$$\dot{\bar{e}} = A_c \bar{e} + B_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \quad (42a)$$

$$e_1 = C_c^\top \bar{e} \quad (42b)$$

je stavová reprezentácia systému (36) daného prenosovou funkciou $W_m(s)(s + \rho)$, pričom \bar{e} je vektor jeho stavových veličín.

Funkcia $W_m(s)(s + \rho) = C_c^\top (sI - A_c)^{-1} B_1$ je SPR. Potom podľa MKY lemy v časti 1.2 existuje taká matica P , pre ktorú platí

$$A_c^\top P + P A_c = -Q \quad (43a)$$

$$P B_1 = C_c \quad (43b)$$

kde $Q = Q^\top > 0$.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega_f) \quad (44)$$

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = \bar{e}^\top P \bar{e} + \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \theta \quad (45)$$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovoľná diagonálna matica, $\left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra Θ_4^* a $P = P^\top > 0$ spĺňa rovnice (43), ktoré vyplývajú z MKY lemy.

$$\dot{V} = \dot{\bar{e}}^\top P \bar{e} + \bar{e}^\top P \dot{\bar{e}} + \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| (\dot{\theta}^\top \Gamma^{-1} \theta + \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta}) \quad (46)$$

Poznáme (42) odkiaľ $\dot{\bar{e}}^\top = \bar{e}^\top A_c^\top + \omega_f^\top \theta \frac{1}{\Theta_4^*} B_1^\top$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(\bar{e}^\top A_c^\top + \omega_f^\top \theta \frac{1}{\Theta_4^*} B_1^\top \right) P \bar{e} + \bar{e}^\top P \left(A_c \bar{e} + B_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \right) + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \quad (47)$$

$$\dot{V} = \bar{e}^\top (-Q) \bar{e} + 2 \bar{e}^\top P B_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \quad (48)$$

Pripomeňme, že platí $P B_1 = C_c$, potom

$$\dot{V} = \bar{e}^\top (-Q) \bar{e} + 2 \bar{e}^\top C_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \quad (49)$$

Všimnime si, že $\bar{e}^\top C_c = C_c^\top \bar{e} = e_1$. Časová derivácia \dot{V}

$$\dot{V} = \bar{e}^\top (-Q) \bar{e} + 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \quad (50)$$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} \quad (51a)$$

$$2 \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \theta^\top \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega_f \quad (51b)$$

$$\left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -e_1 \operatorname{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^*} \right) \left| \frac{1}{\Theta_4^*} \right| \omega_f \quad (51c)$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\operatorname{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^*} \right) e_1 \omega_f \quad (51d)$$

$$\dot{\theta} = -\operatorname{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^*} \right) e_1 \Gamma \omega_f \quad (51e)$$

Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\text{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^*}\right) \Gamma e_1 \omega_f \quad (52)$$

Signálny vektor ω_f má zložky $\omega_f = [y_f \quad \nu_1^T \quad \nu_2^T \quad r_f]^T$. Tieto signály získame jednoducho prechodom pôvodných signálov y , ν_1^T , ν_2^T a r cez filtre s prenosovou funkciou v tvare $\frac{1}{s+\rho}$.

Vstupom do sústavy je u . Pri odvodení zákona adaptácie sme ale uvažovali $u_f = (s+\rho)^{-1}u$ odkiaľ $u = (s+\rho)u_f$. Signál u_f možno zapísať aj v tvare $u_f = \Theta^T \omega_f$. Teda $u = (s+\rho)\Theta^T \omega_f$, z čoho vyplýva, že

$$u = \Theta^T \omega + \dot{\Theta}^T \omega_f \quad (53)$$

Pre objasnenie (53) naznačíme, že:

$$\begin{aligned} & (s+\rho)\Theta^T \omega_f \\ & s(\Theta^T \omega_f) + \rho\Theta^T \omega_f \\ & s(\Theta^T) \omega_f + \Theta^T s(\omega_f) + \rho\Theta^T \omega_f \\ & \dot{\Theta}^T \omega_f + \Theta^T s\left(\frac{1}{(s+\rho)}\omega\right) + \rho\Theta^T \frac{1}{(s+\rho)}\omega \\ & \dot{\Theta}^T \omega_f + \Theta^T \frac{s}{(s+\rho)}\omega + \Theta^T \frac{\rho}{(s+\rho)}\omega \\ & \dot{\Theta}^T \omega_f + \Theta^T \frac{s+\rho}{(s+\rho)}\omega \\ & \dot{\Theta}^T \omega_f + \Theta^T \omega \end{aligned}$$

4.2 Metóda doplnenej odchýlky

Vo všeobecnosti, zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je $u = \Theta^T \omega$. Pri jeho dosadení do všeobecne platnej rovnice adaptačnej odchýlky (18) máme rovnicu adaptačnej odchýlky v tvare

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^T \omega \quad (54)$$

V rovnici (34) sme použili identitu $(s+\rho)(s+\rho)^{-1} = 1$, čo vo všeobecnosti je $L(s)L(s)^{-1} = 1$.

Rovnicu (54) sme v predchádzajúcom tvare doplnili do tvaru

$$e_1 = W_m(s) L(s) L(s)^{-1} \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^T \omega \quad (55)$$

a z rovnice (35) vyplýva, že (55) možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s) L(s) \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^T L(s)^{-1} \omega \quad (56)$$

Rovnica (56) môže byť zapísaná aj v tvare

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^*} (L(s) \theta L(s)^{-1})^T \omega \quad (57)$$

kde sme vymenili pozície $\frac{1}{\Theta_4^*}$ a $L(s)$, čo je možné, pretože $\frac{1}{\Theta_4^*}$ je len konštanta a nie funkcia času, a táto rovnica dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia s adaptačnou odchýlkou. V stavovom priestore má rovnica „doplnenej“ adaptačnej odchýlky (57) tvar

$$\dot{e} = A_c e + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} (L(s) \theta L(s)^{-1})^T \omega \quad (58a)$$

$$e_1 = C_c^T e \quad (58b)$$

Adaptačná odchýlka je definovaná ako $e = X - X_m$ a $e_1 = y - y_m$. Sú dve možnosti ako dosiahnuť aby výsledok odčítania rovníc parametrizovanej doplnenej sústavy, kde stavový vektor je X , a neminimálnej reprezentácie referenčného modelu, kde stavový vektor je X_m , bol v tvare doplnenej adaptačnej odchýlky (58).

4.2.1 Prvá možnosť

Výsledok je rovnaký ako v predchádzajúcej časti:

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (12) po dosadení za $u = \Theta^\top \omega$ možno zapísať v tvare

$$\dot{X} = A_c X + \bar{B}_c r + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega \quad (59a)$$

$$y = C_c^\top X \quad (59b)$$

Zavedieme také pravidlo, že keď $W_m(s)$ nie je možné navrhnuť ako SPR, tak v rovnici (59) nahradíme Θ^\top výrazom $(L(s)\theta L(s)^{-1})^\top$, kde $L(s)$ je dané tým, že $W_m(s)L(s)$ je zvolená ako SPR prenosová funkcia. Teda

$$\dot{X} = A_c X + \bar{B}_c r + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} (L(s)\theta L(s)^{-1})^\top \omega \quad (60a)$$

$$y = C_c^\top X \quad (60b)$$

Pripomeňme

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \bar{B}_c r \quad (61a)$$

$$y_m = C_c^\top X_m \quad (61b)$$

Odčítaním (61) od (60) získame rovnicu „doplnenej“ adaptačnej odchýlky (58), ktorá zabezpečuje (podrobne ukázané v predchádzajúcom), že chyba nastavenia parametrov zákona riadenia θ je vo vzťahu z adaptačnou odchýlkou e_1 cez SPR prenosovú funkciu.

Pretože rovnica parametrizovanej doplnenej sústavy je modifikovaná podľa zavedeného pravidla, tak aj zákon riadenia je modifikovaný do tvaru $u = (L(s)\Theta L(s)^{-1})^\top \omega$. V prípade, že $L(s) = (s + \rho)$ (ako v predchádzajúcom), tak výraz $L(s)\Theta^\top L(s)^{-1}$ je funkčne ekvivalentný výrazu

$$L(s)\Theta^\top L(s)^{-1} = \Theta^\top + \dot{\Theta}^\top L(s)^{-1} \quad (62)$$

a teda modifikovaný zákon riadenia má v tomto prípade tvar $u = \Theta^\top \omega + \dot{\Theta}^\top \omega_f$.

4.2.2 Druhá možnosť

Výsledkom je algoritmus nazývaný *metóda doplnenej odchýlky*:

Namiesto nahradenia θ^\top výrazom $(L\theta L^{-1})^\top$ v rovnici parametrizovanej doplnenej sústavy pridáme vstupný signál v tvare $\frac{1}{\theta_4^*} (\theta - L\theta L^{-1})^\top \omega$ do referenčného modelu nasledovne

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \bar{B}_c \left(r + \frac{1}{\Theta_4^*} (\theta - L\theta L^{-1})^\top \omega \right) \quad (63a)$$

$$y_m = C_c^\top X_m \quad (63b)$$

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \bar{B}_c r + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} (\theta - L\theta L^{-1})^\top \omega \quad (64a)$$

$$y_m = C_c^\top X_m \quad (64b)$$

Rovnica parametrizovanej doplnenej sústavy sa teraz nemení (nemodifikuje)

$$\dot{X} = A_c X + \bar{B}_c r + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega \quad (65a)$$

$$y = C_c^\top X \quad (65b)$$

Odčítaním (64) od (65) podľa definície adaptačnej odchýlky máme

$$\dot{e} = A_c e + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} (\theta - L\theta L^{-1})^\top \omega \quad (66a)$$

$$e_1 = C_c^\top e \quad (66b)$$

Výraz

$$(\theta - L\theta L^{-1}) = L(L^{-1}\theta - \theta L^{-1}) \quad (67)$$

Potom

$$\dot{e} = A_c e + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} (L(L^{-1}\theta - \theta L^{-1}))^\top \omega \quad (68a)$$

$$e_1 = C_c^\top e \quad (68b)$$

$$\dot{e} = A_c e + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} L(L^{-1}\theta^\top - \theta^\top L^{-1}) \omega \quad (69a)$$

$$e_1 = C_c^\top e \quad (69b)$$

Rovnicu (69) je možné prepísať do požadovaného tvaru (58) nasledovne:

$$\dot{e} = A_c e + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} L L^{-1} \theta^\top \omega - \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} L \theta^\top L^{-1} \omega \quad (70a)$$

$$e_1 = C_c^\top e \quad (70b)$$

$$\dot{e} = A_c e + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} L \theta^\top L^{-1} \omega \quad (71a)$$

$$e_1 = C_c^\top e \quad (71b)$$

$$\dot{e} = A_c e + \bar{B}_c \frac{1}{\Theta_4^*} (L\theta L^{-1})^\top \omega \quad (72a)$$

$$e_1 = C_c^\top e \quad (72b)$$

Rovnica (69) v tvare prenosovej funkcie je

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^*} (\theta^\top \omega - L(L^{-1}\theta^\top - \theta^\top L^{-1}) \omega) \quad (73)$$

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - W_m \frac{1}{\Theta_4^*} L(L^{-1}\theta^\top - \theta^\top L^{-1}) \omega \quad (74)$$

Platí

$$\begin{aligned} L^{-1}\theta^\top - \theta^\top L^{-1} &= L^{-1}(\Theta - \Theta^*)^\top - (\Theta - \Theta^*)^\top L^{-1} = \\ &= (L^{-1}\Theta^\top - \Theta^\top L^{-1}) - (L^{-1}\Theta^{*\top} - \Theta^{*\top} L^{-1}) = \\ &= (L^{-1}\Theta^\top - \Theta^\top L^{-1}) \end{aligned} \quad (75)$$

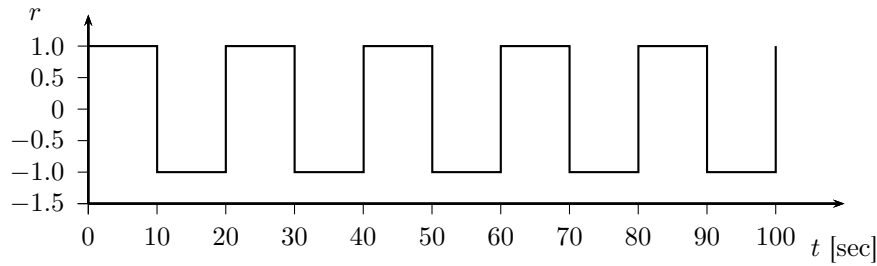
pretože Θ^* nie je funkciou času a teda $L^{-1}\Theta^{*\top} = \Theta^{*\top} L^{-1}$. Potom

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - W_m L \frac{1}{\Theta_4^*} (L^{-1}\Theta^\top \omega - \Theta^\top L^{-1} \omega) \quad (76)$$

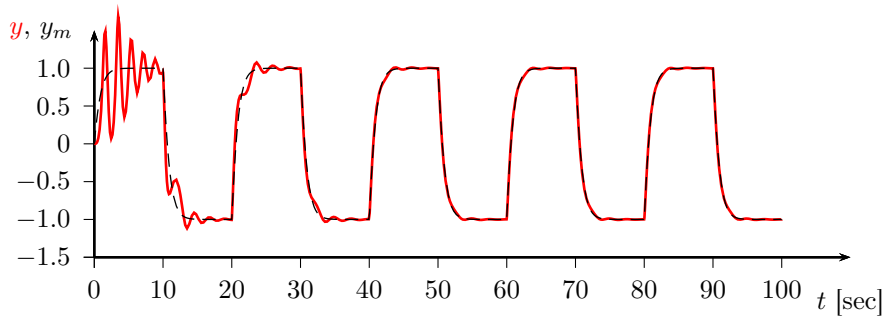
$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega - W_m L \frac{1}{\Theta_4^*} (L^{-1}u - \Theta^\top \omega_f) \quad (77)$$

kde označíme: $e_m = W_m \frac{1}{\Theta_4^*} \theta^\top \omega$ je odchýlka medzi výstupom pôvodného nemodifikovaného referenčného modelu a signál $e_d = W_m L \frac{1}{\Theta_4^*} (L^{-1}u - \Theta^\top \omega_f)$ sa pridá k tejto odchýlke, čím vznikne modifikovaný signál e_1 a tento sa použije v zákone adaptácie.

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (65) sme nezmenili, preto sa v tomto prípade nemení ani zákon riadenia $u = \Theta^\top \omega$.



Obr. 2: Referenčný sigál r



Obr. 3: Výsledok simulácie

5 Cvičenie ôsme

1. Uvažujme sústavu danú v dvoch hraničných pracovných bodoch:

$$G_{OP_1} = 0,1659 \frac{s + 22}{s^2 + 3,1423s + 2,6539} \quad (78)$$

$$G_{OP_2} = 0,1669 \frac{s + 20,7618}{s^2 + 2,3422s + 2,7293} \quad (79)$$

- Určte *nominálnu* prenosovú funkciu sústavy tak, že jej koeficienty sú priemery hodnôt oboch prenosových funkcií (78) a (79).
- Pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy určte polynómy Z_p , R_p a zosilnenie k_p pričom

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (80)$$

kde $Z_p(s)$ je monický polynóm stupňa m , $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy*. *Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.

2. Pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy navrhnete adaptívne riadenie s referenčným modelom so vstupno-výstupnou štruktúrou zákona riadenia (merateľný je len výstup sústavy a samozrejme vstup sústavy). Pre odvodenie zákona adaptácie použite priamu Lyapunovovu metódu. Nech referenčný model je v tvare

$$W_m(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3.5s + 3} \quad (81)$$

- Určte zákon riadenia, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme.
- Vypočítajte ideálne parametre zákona riadenia.
- Zistite, či $W_m(s)$ je striktnie pozitívne reálna (SPR) prenosová funkcia.
- Napište rovnicu výstupnej adaptačnej odchýlky e_1 .

- Pre systém diferenciálnych rovníc $(\dot{e}, \dot{\theta})$, kde $\dot{\theta}$ sa najskôr uvažuje vo všeobecnom tvare (na začiatku odvodu sa uvažuje len všeob. funkcia f) zvolte kandidáta na Lyapunovovu funkciu a odvodte (skonkretizujte) predpis (pravú stranu) pre $\dot{\theta}$.
- Určte zákon adaptácie, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme
- Zvolte Γ (jednoducho, zvolte všetky ľubovoľne voliteľné prvky zákona/zákonov adaptácie).
- Začiatkové hodnoty adaptovaných parametrov zvolte nulové.
- Zostavte adaptívny riadiaci systém (simulačnú schému) a pridajte ho k simulovanej sústave.
- Použite obdĺžnikový referenčný signál r ako na Obr. 2. Vzorové výsledky simulácie sú na Obr. 3.

6 Cvičenie deviate a desiate

6.1 Referát MRAC vstupno-výstupný pri $(n^* = 2)$

Riadny termín odovzdania: do(vrátane) ...

Odovzdanie po riadnom termíne sa pokutuje odčítaním bodov od výsledného hodnotenia. Za každý začatý deň po riadnom termíne sa odčítajú 3 body.

1. deň po riadnom termíne: $H - 3$ body,
2. deň po riadnom termíne: $H - 6$ body,
3. deň po riadnom termíne: $H - 9$ bodov,
4. deň po riadnom termíne: $H - 12$ bodov,
5. deň po riadnom termíne: $H - 15$ bodov,

kde H je počet bodov pridelených referátu – H ako hodnotenie. Päť a viac dní po riadnom termíne už nie je možné referát odovzdať a študent/študentka získa 0 bodov. Minimálny počet bodov za referát je 0 bodov. Maximálny počet bodov za referát je 15 bodov.

Pre prácu na zadaní a referáte sú vyhradené cvičenia v 9. a 10. týždni semestra.

6.2 Zadanie

Navrhnete adaptívny riadiaci systém pre riadenie kurzu nákladnej lode. Riadenou (výstupnou) veličinou je kurz (uhol otočenia) lode, pričom táto veličina je merateľná a akčným zásahom je výchylka (uhol) kormidla. Pri návrhu využite prístup, ktorého základom je Lyapunovova teória stability. Vypracujte referát o návrhu adaptívneho riadiaceho systému pre riadenie kurzu nákladnej lode.

Pohyb lode opisuje diferenciálna rovnica v tvare [4]

$$\ddot{\varphi}(t) + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \right) \dot{\varphi}(t) + \left(\frac{1}{\tau_1 \tau_2} \right) \varphi(t) = \frac{K}{\tau_1 \tau_2} (\tau_3 \dot{\delta}(t) + \delta(t)) \quad (82)$$

kde φ je uhol natočenia lode v radiánoch (azimut, kurz lode), δ je uhol vychýlenia kormidla v radiánoch. Parametre v rovnici (82) sú definované nasledovne

$$K = K_0 \frac{v}{L} \quad (83)$$

$$\tau_i = \tau_{i0} \frac{L}{v} \quad i = 1, 2, 3 \quad (84)$$

kde v je rýchlosť lode v smere danom uhlom φ v metroch za sekundu, L je dĺžka lode v metroch a K_0 , τ_{10} , τ_{20} , τ_{30} sú konštanty závislé na veľkom množstve faktorov (typ lode atď.).

Požiadavky na dynamiku kormidlovania nákladnej lode nech sú definované referenčným modelom v tvare prenosovej funkcie:

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{0,0025}{s^2 + 0,1s + 0,0025} \quad (85)$$

kde r je referenčný kurz a y_m je požadovaná reakcia lode. Cieľom riadenia je zabezpečiť aby sa reakcia lode na referenčný signál zhodovala s reakciou referenčného modelu.

Pri simulačnom overovaní navrhnutého riadiaceho systému použite periodický referenčný signál s amplitúdou 5° , s periódou z intervalu 500 až 1000 sekúnd a so sínusovým, obdĺžnikovým alebo pílovitým tvarom. Číselné hodnoty parametrov pre simulačný model lode sú:

$$\begin{aligned} L &= 161 \\ K_0 &= -3,86 \\ \tau_{10} &= 5,66 \\ \tau_{20} &= 0,38 \\ \tau_{30} &= 0,89 \\ v &= 5 \end{aligned}$$

7 Otázky a úlohy

Nasledujúce nepatrí k predchádzajúcej časti 6 *Cvičenie deviate a desiate*.

1. Zistite či je prenosová funkcia $G(s)$ striktné pozitívne reálna (SPR).

$$G(s) = \frac{2s + 1}{(3s + 1)(s + 1)}$$

2. Pre aké hodnoty a, b, c je prenosová funkcia $G(s) = \frac{as + 1}{(bs + 1)(cs + 1)}$ striktné pozitívne reálna.
3. Schematicky znázornite MRAC vstupno-výstupný pri $n^* = 1$
4. Schematicky znázornite MRAC vstupno-výstupný pri $n^* = 2$
5. Čo je cieľom riadenia pri návrhu adaptívneho riadiaceho systému s referenčným modelom so zákonom adaptácie navrhnutým pomocou Lyapunovovej teórie stability?
6. Je daný model systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_1x_2(t) - a_0x_1(t) + b_0u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

kde $a_0, a_1, b_0 > 0$ sú neznáme parametre systému, $u(t)$ je vstup, $y(t)$ je výstup a $x_1(t), x_2(t)$ sú stavové veličiny systému. Tiež je daný referenčný model v tvare

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1m}(t) \\ \dot{x}_{2m}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0m} & -a_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0m} \end{bmatrix} r(t) \\ y_m(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kde $a_{0m}, a_{1m}, b_{0m} > 0$ sú známe parametre referenčného modelu, $r(t)$ je referenčný signál, $y_m(t)$ je výstup a $x_{1m}(t), x_{2m}(t)$ sú stavové veličiny referenčného modelu.

- (a) Napíšte model systému v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

kde $Z_p(s)$ je monický, hurwitzov polynóm stupňa m , $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Napíšte referenčný model v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm $Z_m(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m , $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m .

- (b) Ideálnym cieľom riadenia je $y = y_m$. Navrhните ideálny zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^* \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^* y + \Theta_4^* r$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s , $\alpha(s) = [s^{n-2}, \dots, s, 1]^T$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^*, \Theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^*, \Theta_4^* \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n - 1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovoľný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

- (c) Cieľom riadenia je $y \rightarrow y_m$ a stabilita celého riadiaceho systému. Navrhните adaptívny riadiaci systém, pričom uvažujte model riadeného systému v tvare prenosovej funkcie a tiež referenčný model v tvare prenosovej funkcie z predchádzajúceho bodu 6a.

Literatúra

- [1] P. Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA., 2006.
- [2] R. Monopoli. Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(5):474 – 484, oct 1974.
- [3] J. Murgaš and I. Hejda. *Adaptívne riadenie technologických procesov*. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 1993.
- [4] K. M. Passino and S. Yurkovich. *Fuzzy Control*. Addison Wesley Longman, Inc., 1998.