MRAC vstupno-výstupný

Obsah

V tejto časti odvodíme adaptívny algoritmus riadenia, ktorý sa zaraďuje do triedy priame adaptívne riadenie. Pripomeňme priame adaptívne riadenie:
Model sústavy je parametrizovaný pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia. Pretože tieto parametre sú neznáme, sú priebežne identifikované - adaptované. Výstupom zákona adaptácie sú priamo parametre zákona riadenia.

Pri odvodení zákona adaptácie sa v tejto časti bude využívať Ljapunovova priama metóda.

1 SPR prenosové funkcie, MKY lemma

1.1 Striktne pozitívne reálne prenosové funkcie

Pojem *Pozitívne reálna* (PR) a *Striktne pozitívne reálna* (SPR) prenosová funkcia zohráva dôležitú úlohu v analýze stability nie len adaptívnych systémov [1]. Je preto dôležité disponovať kritériom, ktoré umožní zistiť, či príslušná prenosová funkcia je SPR ([3] str. 164).

Podľa definície 3.5.1 a 3.5.2 v [1], str. 127, prenosová fukcia $G(s)$ komplexnej premennej s sa nazýva pozitívne reálna (PR) ak

1. $G(s)$ je reálna pre reálne s.
2. $\Re\{G(s)\} \geq 0$ pre všetky $\Re\{s\} > 0$.

Prenosová funkcia $G(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) ak existuje reálne kladné číslo ε také, že $G(s-\varepsilon)$ je PR.

Prakticky nie je jednoduché zistiť, či uvedené podmienky sú splnené. V nasledujúcom uvedieme ekvivalentné nutné a postačujúce podmienky pozitívnej reálnosti. Platnosť týchto podmienok sa dá ľahko overiť. Prenosová funkcia $G(s)$ je PR keď vyhovuje všetkým nasledujúcim podmienkam

1. $G(s)$ je reálna pre všetky reálne s.
2. Menovateľ $G(s)$ má korene v ľavej polrovine komplexnej roviny alebo má reálne korene na imaginárnej osi.
3. $\Re\{G(j\omega)\} \geq 0$ pre všetky reálne ω.

Pre vyjadrenie reálnej časti funkcie $G(j\omega)$ je výhodné využiť, že platí:

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$

1.2 Meyerova-Kalmanova-Yakubovichova Lemma

Pre danú stabilnú maticu A, vektory b, c a skalár $d \geq 0$, platí nasledujúce: Ak

$$G(s) = d + c^\mathsf{T}\left(sI - A\right)^{-1} b$$

je SPR, potom pre danú maticu $L = L^\mathsf{T} > 0$ existujú skalár $v > 0$, vektor q a matica $P = P^\mathsf{T} > 0$ také, že

$$A^\mathsf{T} P + PA = -qq^\mathsf{T} - vL$$
$$Pb - c = \pm q\sqrt{2d}$$

Tak znie veta, ktorá, ako sa ukáže, je veľmi užitočná pri návrhu MRAC využívajúceho len vstupno-výstupné informácie.

V tomto kurze ju využijeme v menej všeobecnom tvare: Nech je systém daný trojicou A_c, $\overline{B}_c$, C_c a A_c nech je stabilná matica. Ak $W_m(s) = C_c^\mathsf{T}\left(sI - A_c\right)^{-1}\overline{B}_c$ je SPR, potom platí, že

$$A_c^\mathsf{T} P + PA_c = -Q$$
$$P\overline{B}_c = C_c$$

kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$. A je to práve fakt, že ak je $W_m(s)$ SPR tak platí $P\overline{B}_c = C_c$, ktorý umožní zredukovať zákon adaptácie tak, že v ňom vystupuje len odchýlka výstupných veličín sústavy a referenčného modelu [2].

2 Adaptačná odchýlka

2.1 Model sústavy a referenčný model

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{1}$$

kde $Z_p(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$. Predpokladajme, že relatívny stupeň n^* sústavy je známy. Pre zjednodušenie tiež predpokladajme, že aj stupne n a m polynómov sú známe, pričom vo všeobecnosti známe nemusia byť. Koeficienty polynómov $Z_p(s)$ a $R_p(s)$ (parametre sústavy) sú neznáme. Hodnota a znamienko zosilnenia k_p nech je známe.

Sústava v tvare (1) môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{2a}$$
$$y = c^\mathsf{T} x \tag{2b}$$

kde x je vektor stavových veličín sústavy a A, b, c^{T} sú matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov pričom hodnoty ich prvkov sú neznáme.

Cieľom riadenia je: Nech všetky signály uzavretého regulačného obvodu sú ohraničené a výstupná veličina y sústavy nech sleduje výstupnú veličinu referenčného modelu, ktorý je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{3}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$. Všetky parametre (koeficienty polynómov a k_m) referenčného modelu sú známe, dané „projektantom“.

2.2 Zákon riadenia

Ako bolo ukázané v predchádzajúcich témach predmetu, zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{4}$$

zabezpečí, že priebeh výstupnej veličiny y sa zhoduje s priebehom výstupnej veličiny referenčného modelu y_m ak sú parametre zákona vypočítané z podmienok zhody

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{5a}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{5b}$$

$$R_p \left(\Lambda - \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \alpha(s)\right) - k_p Z_p \left(\Theta_2^{\star\mathsf{T}} \alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda\right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{5c}$$

Pretože parametre sústavy (1) sú neznáme, zákon riadenia (4) nemožno použiť. Použije sa zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3 y + \Theta_4 r \tag{6}$$

kde Θ_1, Θ_2, Θ_3 a Θ_4 sú odhadmi ideálnych parametrov $\Theta_1^\star$, $\Theta_2^\star$, $\Theta_3^\star$ a $\Theta_4^\star$ v každom čase t. Je potrebné nájsť zákon adaptácie, ktorý priebežne generuje (identifikuje) hodnoty $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, $\Theta_3(t)$ a $\Theta_4(t)$.

Pomocné filtre vystupujúce v zákone riadenia v stavovom priestore sú (viď predch. článok)

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + q u \tag{7a}$$

$$\dot{\nu}_2 = \Lambda \nu_2 + q c^{\mathsf{T}} x \tag{7b}$$

a uvažovaný zákon riadenia je

$$u = \Theta_c^{\mathsf{T}} D X + \Theta_4 r \tag{8}$$

kde $\Theta_c = \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & \Theta_1^{\mathsf{T}} & \Theta_2^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, Θ_4 sú parametre zákona riadenia a

$$D = \begin{bmatrix} c^{\mathsf{T}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

2.3 Rovnica adaptačnej odchýlky

Pridanie pomocných filtrov (7) k stavovému opisu sústavy (2) vedie k „doplnenej sústave“ (viď predch. časti predmetu) v tvare

$$\dot{X} = A_o X + B_c u \tag{9a}$$

$$y = C_c^{\mathsf{T}} X \tag{9b}$$

Parametrizácia doplnenej sústavy (9) pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia sa dosiahne pripočítaním a odpočítaním ideálneho vstupného výrazu $B_c u^\star = B_c {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} DX + B_c \Theta_4^\star r$

$$\dot{X} = A_o X + B_c u + B_c {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} DX + B_c \Theta_4^\star r - B_c {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} DX - B_c \Theta_4^\star r \tag{10a}$$

$$\dot{X} = \left(A_o + B_c {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} D\right) X + B_c \Theta_4^\star r + B_c \left(u - {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{10b}$$

Z predchádzajúcich častí vieme, že $A_c = A_o + B_c {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} D$, $\overline{B}_c = B_c \Theta_4^\star$ a tiež, že neminimálnu reprezentáciu referenčného modelu (3) možno (teoreticky) zapísať v tvare

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r \tag{11a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{11b}$$

Potom parametrizovaná doplnená sústava (10b) je

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{12a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{12b}$$

Definujme *adaptačnú odchýlku* v tvare

$$e = X - X_m \tag{13}$$

$$e_1 = y - y_m \tag{14}$$

potom:

$$\dot{X} - \dot{X}_m = A_c \left(X - X_m\right) + \overline{B}_c r - \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{15a}$$

$$y - y_m = C_c^\mathsf{T} \left(X - X_m\right) \tag{15b}$$

a teda

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{16a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{16b}$$

čo je základná rovnica opisujúca dynamiku adaptačnej odchýlky v stavovom priestore, ktorú možno vyjadriť v tvare prenosovej funkcie uvážením, že platí

$$W_m(s) = C_c^\mathsf{T} \left(sI - A_c\right)^{-1} \overline{B}_c \tag{17}$$

Potom (16) v tvare prenosovej funkcie je

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - {\Theta_c^\star}^\mathsf{T} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{18}$$

Odhadom odchýlky e_1 nech je $\hat{e}_1$, ktorá je závislá od odhadov $\Theta_c(t)$, $\Theta_4(t)$.

$$\hat{e}_1 = W_m(s) l \left(u - \Theta_c DX - \Theta_4 r\right) \tag{19}$$

kde l je odhadom hodnoty $\frac{1}{\Theta_4^\star}$. Pretože uvažujeme zákon riadenia $u = \Theta_c^\mathsf{T} DX + \Theta_4 r$, tak $\hat{e}_1 = 0; \quad \forall t$. To znamená, že rovnica (19) nie je potrebná pre identifikáciu neznámych parametrov $\Theta_c^\star$, $\Theta_4^\star$ a ako chybu odhadu týchto parametrov možno použiť priamo rovnicu adaptačnej odchýlky (18).

3 Zákon adaptácie pri $n^* = 1$

Uvažujme, že relatívny stupeň sústavy (1) je $n^* = 1$. Prenosová funkcia referenčného medelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy. Relatívny stupeň referenčného modelu $n_m^* = 1$ umožňuje aby prenosová funkcia $W_m(s)$ bola navrhnutá ako striktne pozitívne reálna (SPR).

Nech $W_m(s) = C_c^\mathsf{T} (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c$ je SPR. Potom podľa MKY lemmy v časti 1.2 existuje taká matica P, pre ktorú platí

$$A_c^\mathsf{T} P + P A_c = -Q \tag{20a}$$

$$P\overline{B}_c = C_c \tag{20b}$$

kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$. Táto skutočnosť sa v ďalšom využije pri voľbe kandidáta na Lyapunovovu funkciu.

Dosadením (8) za u do (18) máme

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta_c^\mathsf{T} DX + \theta_4 r \right) \tag{21}$$

kde $\theta_c = \Theta_c - \Theta_c^\star$ a $\theta_4 = \Theta_4 - \Theta_4^\star$. Zavedením vektora chyby nastavenia parametrov zákona riadenia $\theta = \begin{bmatrix} \theta_c^\mathsf{T} & \theta_4 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ a signálneho vektora $\omega = \begin{bmatrix} (DX)^\mathsf{T} & r \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ máme známy tvar adaptačnej odchýlky

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta^\mathsf{T} \omega \right) \tag{22}$$

alebo

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta^\mathsf{T} \omega \right) \tag{23a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{23b}$$

V tomto prípade rovnica (22) alebo (23) dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia Θ a adaptačnú odchýlku e_1 cez SPR prenosovú funkciu.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega) \tag{24}$$

teda aby zákon adaptácie bol funkciou len výstupnej adaptačnej odchýlky e_1 a nie aj jej derivácií e, pretože tieto nie sú dostupné, nakoľko nie sú dostupné stavové veličiny sústavy.

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = e^\mathsf{T} P e + \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \theta \tag{25}$$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovolná diagonálna matica, $\left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra $\Theta_4^\star$ a $P = P^\mathsf{T} > 0$ spĺňa rovnice (20), ktoré vyplývajú z MKY lemmy.

$$\dot{V} = \dot{e}^\mathsf{T} P e + e^\mathsf{T} P \dot{e} + \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \left(\dot{\theta}^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \theta + \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \right) \tag{26}$$

Poznáme (23) odkiaľ $\dot{e}^\mathsf{T} = e^\mathsf{T} A_c^\mathsf{T} + \omega^\mathsf{T} \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} \overline{B}_c^\mathsf{T}$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(e^\mathsf{T} A_c^\mathsf{T} + \omega^\mathsf{T} \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} \overline{B}_c^\mathsf{T} \right) P e + e^\mathsf{T} P \left(A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega \right) + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{27}$$

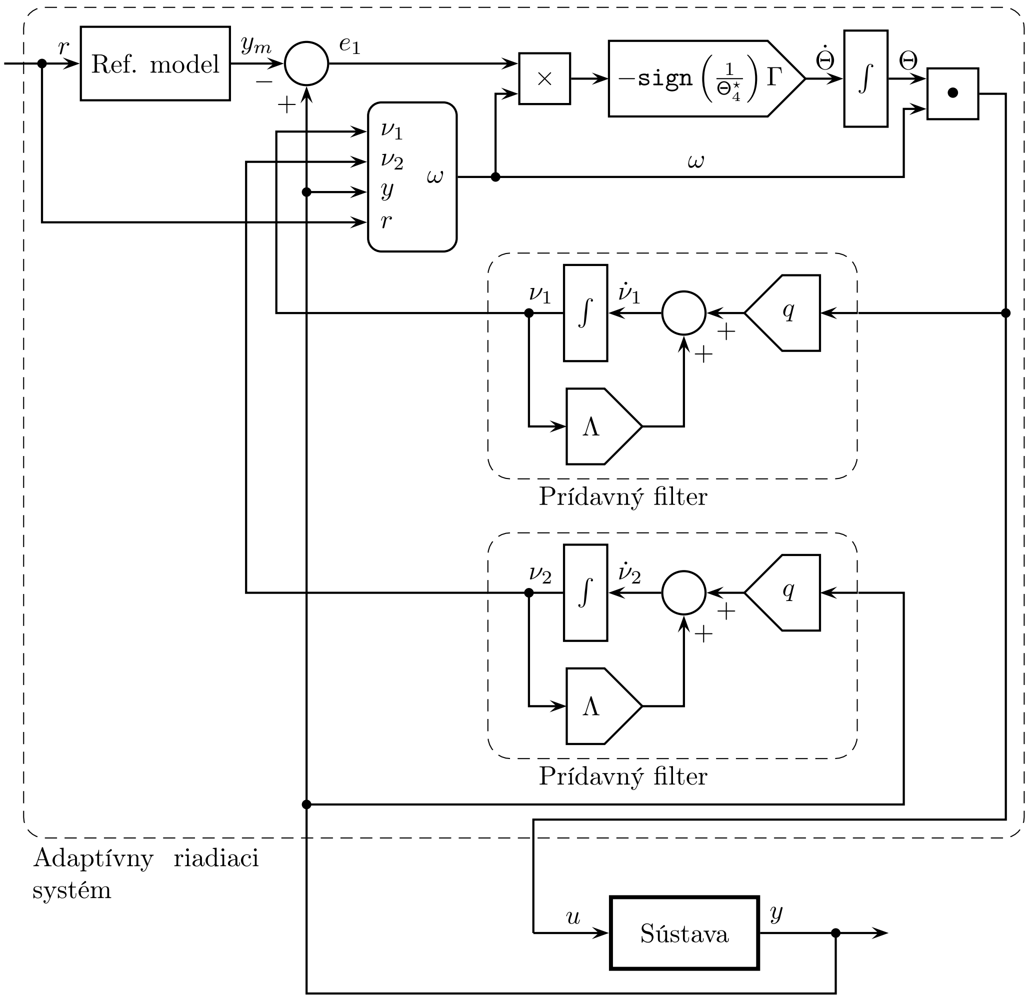
$$\dot{V} = e^\mathsf{T} \left(-Q \right) e + 2 e^\mathsf{T} P \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{28}$$

Pripomeňme, že platí $P\overline{B}_c = C_c$ (to vďaka tomu, že $W_m(s)$ je SPR), potom

$$\dot{V} = e^\mathsf{T} \left(-Q \right) e + 2 e^\mathsf{T} C_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{29}$$

Všimnime si, že $e^\mathsf{T} C_c = C_c^\mathsf{T} e = e_1$. Práve tento moment umožní aby zákon adaptácie $\dot{\theta} = f(e_1, \omega)$ bol funkciou e_1 a nie e. Časová derivácia $\dot{V}$

$$\dot{V} = e^\mathsf{T} \left(-Q \right) e + 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{30}$$



Obr. 1: Bloková schéma MRAC so vstupno-výstupnou štruktúrou riadenia pri $n^\star = 1$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{31a}$$

$$2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^\mathsf{T} G^{-1} \dot{\theta} = -2e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \Theta^\mathsf{T} \omega \tag{31b}$$

$$\left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -e_1 \, \mathtt{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^\star} \right) \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \omega \tag{31c}$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\mathtt{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^\star} \right) e_1 \omega \tag{31d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^\star} \right) e_1 \Gamma \omega \tag{31e}$$

Rovnako ako sme zaviedli vektor Θ, zavedieme aj vektor parametrov zákona riadenia v tvare
$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_c^\mathsf{T} & \Theta_4 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \Theta_3 & \Theta_1^\mathsf{T} & \Theta_2^\mathsf{T} & \Theta_4 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$ a vektor ω možno zapísať v tvare $\omega = \begin{bmatrix} y & \nu_1^\mathsf{T} & \nu_2^\mathsf{T} & r \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign} \left(\frac{1}{\Theta_4^\star} \right) \Gamma e_1 \omega \tag{32}$$

a uvažovaný zákon riadenia možno zapísať v tvare $u = \Theta^\mathsf{T} \omega$.

4 Zákon adaptácie pri $n^* = 2$

4.1 Priamočiary postup

Uvažujme relatívny stupeň sústavy (1) $n^* = 2$. Prenosová funkcia referenčného medelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy, teda $n_m^* = 2$. To ale znamená (bez dôkazu), že prenosová funkcia $W_m(s)$ nie je SPR. Preto nie je možné použiť predchádzajúci postup a je ho potrebné modifikovať.

Rovnica pre adaptačnú odchýlku (18)

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r \right) \tag{33}$$

je stále platná (pri jej odvodení nehral relatívny stupeň sústavy žiadnu úlohu).

Využime identitu $(s+\rho)(s+\rho)^{-1} = 1$ kde ρ je ľubovolná kladná konštanta a prepíšme rovnicu (18) do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho)(s+\rho)^{-1} \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r \right) \tag{34}$$

čo možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u_f - \Theta^{\star\mathsf{T}} \omega_f \right) \tag{35}$$

kde sme zaviedli $u_f = (s+\rho)^{-1} u$, $\omega_f = (s+\rho)^{-1} \omega$ a $\Theta^\star$ je rovnaký ako Θ avšak obsahuje ideálne parametre.

Nech prenosová funkcia $W_m(s)(s+\rho)$ je zvolená tak, že je to SPR prenosová funkcia. Potom rovnica

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta^\mathsf{T} \omega_f \right) \tag{36}$$

kde $\theta = \Theta - \Theta^\star$ dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia θ a adaptačnú udchýlku e_1 cez SPR prenosovú funkciu. Reprezentácia rovnice (36) v stavovom priestore je

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c (s+\rho) \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \tag{37a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{37b}$$

kde s teraz predstavuje operátor derivácie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, rovnako ako bodka „$\dot{}$“ nad e. V ďalšom sa tiež stretneme s takýmto významom symbolu s, pričom na to nebudeme zvlášť upozorňovať, konkrétny význam symbolu s vyplynie z kontextu. Preto

$$se = A_c e + s \left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \right) + \rho \left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \right) \tag{38a}$$

$$s \left(e - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \right) = A_c e + \rho \left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \right) \tag{38b}$$

Označme $e - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f = \overline{e}$, potom $e = \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f + \overline{e}$ a teda

$$s\overline{e} = A_c \left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f + \overline{e} \right) + \rho \left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \right) \tag{39a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e = C_c^\mathsf{T} \left(\overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f + \overline{e} \right) \tag{39b}$$

$$\dot{\overline{e}} = A_c \overline{e} + A_c \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f + \rho \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \tag{40a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} \overline{e} + C_c^\mathsf{T} \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \tag{40b}$$

Pretože $C_c^\mathsf{T} B_c = 0$ tak aj $C_c^\mathsf{T} \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f = 0$, potom

$$\dot{\overline{e}} = A_c \overline{e} + \left(A_c \overline{B}_c + \rho \overline{B}_c\right) \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \tag{41a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} \overline{e} \tag{41b}$$

Označme $A_c \overline{B}_c + \rho \overline{B}_c = B_1$, potom

$$\dot{\overline{e}} = A_c \overline{e} + B_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \tag{42a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} \overline{e} \tag{42b}$$

je stavová reprezentácia systému (36) daného prenosovou funkciou $W_m(s)(s+\rho)$, pričom $\overline{e}$ je vektor jeho stavových veličín.

Funkcia $W_m(s)(s+\rho) = C_c^\mathsf{T} \left(sI - A_c\right)^{-1} B_1$ je SPR. Potom podľa MKY lemmy v časti 1.2 existuje taká matica P, pre ktorú platí

$$A_c^\mathsf{T} P + P A_c = -Q \tag{43a}$$

$$P B_1 = C_c \tag{43b}$$

kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega_f) \tag{44}$$

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = \overline{e}^\mathsf{T} P \overline{e} + \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \theta \tag{45}$$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovolná diagonálna matica, $\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra $\Theta_4^\star$ a $P = P^\mathsf{T} > 0$ spĺňa rovnice (43), ktoré vyplývajú z MKY lemmy.

$$\dot{V} = \dot{\overline{e}}^\mathsf{T} P \overline{e} + \overline{e}^\mathsf{T} P \dot{\overline{e}} + \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \left(\dot{\theta}^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \theta + \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta}\right) \tag{46}$$

Poznáme (42) odkiaľ $\dot{\overline{e}}^\mathsf{T} = \overline{e}^\mathsf{T} A_c^\mathsf{T} + \omega_f^\mathsf{T} \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} B_1^\mathsf{T}$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(\overline{e}^\mathsf{T} A_c^\mathsf{T} + \omega_f^\mathsf{T} \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} B_1^\mathsf{T}\right) P \overline{e} + \overline{e}^\mathsf{T} P \left(A_c \overline{e} + B_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f\right) + 2 \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{47}$$

$$\dot{V} = \overline{e}^\mathsf{T} \left(-Q\right) \overline{e} + 2 \overline{e}^\mathsf{T} P B_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f + 2 \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{48}$$

Pripomeňme, že platí $P B_1 = C_c$, potom

$$\dot{V} = \overline{e}^\mathsf{T} \left(-Q\right) \overline{e} + 2 \overline{e}^\mathsf{T} C_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f + 2 \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{49}$$

Všimnime si, že $\overline{e}^\mathsf{T} C_c = C_c^\mathsf{T} \overline{e} = e_1$. Časová derivácia $\dot{V}$

$$\dot{V} = \overline{e}^\mathsf{T} \left(-Q\right) \overline{e} + 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f + 2 \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{50}$$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f + 2 \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{51a}$$

$$2 \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega_f \tag{51b}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -e_1 \, \mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right| \omega_f \tag{51c}$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) e_1 \omega_f \tag{51d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right) e_1 \Gamma \omega_f \tag{51e}$$

Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)\Gamma e_1 \omega_f \tag{52}$$

Signálny vektor ω_f má zložky $\omega_f = \begin{bmatrix} y_f & \nu_{1f}^\mathsf{T} & \nu_{2f}^\mathsf{T} & r_f \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Tieto signály získame jednoducho prechodom pôvodných signálov y, ν_1^T, ν_2^T a r cez filtre s prenosovou funkciou v tvare $\frac{1}{s+\rho}$.

Vstupom do sústavy je u. Pri odvodení zákona adaptácie sme ale uvažovali $u_f = (s+\rho)^{-1}u$ odkiaľ $u = (s+\rho)u_f$. Signál u_f možno zapísať aj v tvare $u_f = \Theta^\mathsf{T}\omega_f$. Teda $u = (s+\rho)\Theta^\mathsf{T}\omega_f$, z čoho vyplýva, že

$$u = \Theta^\mathsf{T}\omega + \dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f \tag{53}$$

Pre objasnenie (53) naznačíme, že:

$$\begin{aligned}
&(s+\rho)\Theta^\mathsf{T}\omega_f \\
&s\left(\Theta^\mathsf{T}\omega_f\right) + \rho\Theta^\mathsf{T}\omega_f \\
&s\left(\Theta^\mathsf{T}\right)\omega_f + \Theta^\mathsf{T}s\left(\omega_f\right) + \rho\Theta^\mathsf{T}\omega_f \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}s\left(\frac{1}{(s+\rho)}\omega\right) + \rho\Theta^\mathsf{T}\frac{1}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}\frac{s}{(s+\rho)}\omega + \Theta^\mathsf{T}\frac{\rho}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}\frac{s+\rho}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}\omega
\end{aligned}$$

4.2 Metóda doplnenej odchýlky

Vo všeobecnosti, zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je $u = \Theta^\mathsf{T}\omega$. Pri jeho dosadení do všeobecne platnej rovnice adaptačnej odchýlky (18) máme rovnicu adaptačnej odchýlky v tvare

$$e_1 = W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega \tag{54}$$

V rovnici (34) sme použili identitu $(s+\rho)(s+\rho)^{-1} = 1$, čo vo všeobecnosti je $L(s)L(s)^{-1} = 1$.

Rovnicu (54) sme v predchádzajúcom tvare doplnili do tvaru

$$e_1 = W_m(s)L(s)L(s)^{-1}\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega \tag{55}$$

a z rovnice (35) vyplíva, že (55) možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s)L(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}L(s)^{-1}\omega \tag{56}$$

Rovnica (56) može byť zapísaná aj v tvare

$$e_1 = W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{57}$$

kde sme vymenili pozície $\frac{1}{\Theta_4^\star}$ a $L(s)$, čo je možné, pretože $\frac{1}{\Theta_4^\star}$ je len konštanta a nie funkcia času, a táto rovnica dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia s adaptačnou odchýlkou. V stavovom priestore má rovnica „doplnenej“ adaptačnej odchýlky (57) tvar

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{58a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T}e \tag{58b}$$

Adaptačná odchýlka je definovaná ako $e = X - X_m$ a $e_1 = y - y_m$. Sú dve možnosti ako dosiahnúť aby výsledok odčítania rovníc parametrizovanej doplnenej sústavy, kde stavový vektor je X, a neminimálnej reprezentácie referenčného modelu, kde stavový vektor je X_m, bol v tvare doplnenej adaptačnej odchýlky (58).

4.2.1 Prvá možnosť

Výsledok je rovnaký ako v predchádzajúcej časti:

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (12) po dosadení za $u = \Theta^\mathsf{T}\omega$ možno zapísať v tvare

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega \tag{59a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{59b}$$

Zavedieme také pravidlo, že keď $W_m(s)$ nie je možné navrhnúť ako SPR, tak v rovnici (59) nahradíme Θ^T výrazom $\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}$, kde $L(s)$ je dané tým, že $W_m(s)L(s)$ je zvolená ako SPR prenosová funkcia. Teda

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{60a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{60b}$$

Pripomeňme

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r \tag{61a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{61b}$$

Odčítaním (61) od (60) získame rovnicu „doplnenej“ adaptačnej odchýlky (58), ktorá zabezpečuje (podrobne ukázané v predchádzajúcom), že chyba nastavenia parametrov zákona riadenia θ je vo vzťahu z adaptačnou odchýlkou e_1 cez SPR prenosovú funkciu.

Pretože rovnica parametrizovanej doplnenej sústavy je modifikovaná podľa zavedeného pravidla, tak aj zákon riadenia je modifikovaný do tvaru $u = \left(L(s)\Theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega$. V prípade, že $L(s) = (s+\rho)$ (ako v predchádzajúcom), tak výraz $L(s)\Theta^\mathsf{T} L(s)^{-1}$ je funkčne ekvivalentný výrazu

$$L(s)\Theta^\mathsf{T} L(s)^{-1} = \Theta^\mathsf{T} + \dot{\Theta}^\mathsf{T} L(s)^{-1} \tag{62}$$

a teda modifikovaný zákon riadenia má v tomto prípade tvar $u = \Theta^\mathsf{T}\omega + \dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f$.

4.2.2 Druhá možnosť

Výsledkom je algoritmus nazývaný *metóda doplnenej odchýlky*:

Namiesto nahradenia θ^T výrazom $\left(L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}$ v rovnici parametrizovanej doplnenej sústavy pridáme vstupný signál v tvare $\frac{1}{\theta_4^\star}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega$ do referenčného modelu nasledovne

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c \left(r + \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega\right) \tag{63a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{63b}$$

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{64a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{64b}$$

Rovnica parametrizovanej doplnenej sústavy sa teraz nemení (nemodifikuje)

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega \tag{65a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{65b}$$

Odčítaním (64) od (65) podľa definície adaptačnej odchýlky máme

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{66a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{66b}$$

Výraz

$$\left(\theta - L\theta L^{-1}\right) = L\left(L^{-1}\theta - \theta L^{-1}\right) \tag{67}$$

Potom

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L\left(L^{-1}\theta - \theta L^{-1}\right)\right)^\mathsf{T}\omega \tag{68a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{68b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L\left(L^{-1}\theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1}\right)\omega \tag{69a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{69b}$$

Rovnicu (69) je možné prepísať do požadovaného tvaru (58) nasledovne:

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L L^{-1}\theta^\mathsf{T}\omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L\theta^\mathsf{T} L^{-1}\omega \tag{70a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{70b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L\theta^\mathsf{T} L^{-1}\omega \tag{71a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{71b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{72a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{72b}$$

Rovnica (69) v tvare prenosovej funkcie je

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta^\mathsf{T}\omega - L\left(L^{-1}\theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1}\right)\omega\right) \tag{73}$$

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} L\left(L^{-1}\theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1}\right)\omega \tag{74}$$

Platí

$$\begin{aligned} L^{-1}\theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1} &= L^{-1}\left(\Theta - \Theta^\star\right)^\mathsf{T} - \left(\Theta - \Theta^\star\right)^\mathsf{T} L^{-1} = \\ &= \left(L^{-1}\Theta^\mathsf{T} - \Theta^\mathsf{T} L^{-1}\right) - \left(L^{-1}\Theta^{\star\mathsf{T}} - \Theta^{\star\mathsf{T}} L^{-1}\right) = \\ &= \left(L^{-1}\Theta^\mathsf{T} - \Theta^\mathsf{T} L^{-1}\right) \end{aligned} \tag{75}$$

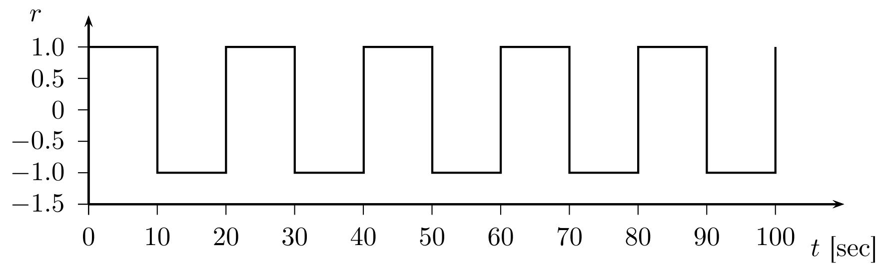
pretože $\Theta^\star$ nie je funkciou času a teda $L^{-1}\Theta^{\star\mathsf{T}} = \Theta^{\star\mathsf{T}} L^{-1}$. Potom

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - W_m L \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L^{-1}\Theta^\mathsf{T}\omega - \Theta^\mathsf{T} L^{-1}\omega\right) \tag{76}$$

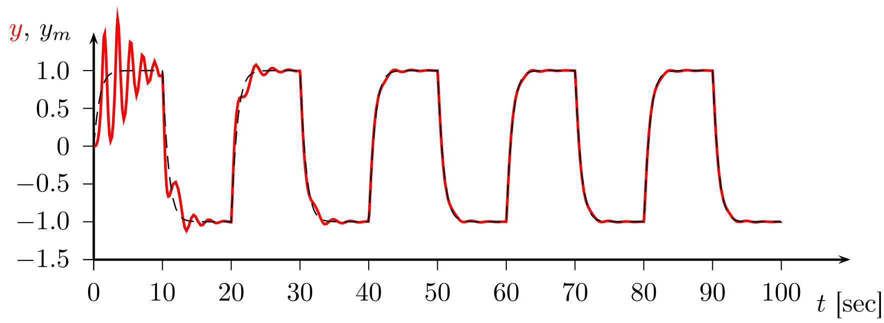
$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega - W_m L \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L^{-1}u - \Theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{77}$$

kde označíme: $e_m = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega$ je odchýlka medzi výstupom pôvodného nemodifikovaného referenčného modelu a signál $e_d = W_m L \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L^{-1}u - \Theta^\mathsf{T}\omega_f\right)$ sa pridá k tejto odchýlke, čím vznikne modifikovaný signál e_1 a tento sa použije v zákone adaptácie.

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (65) sme nezmenili, preto sa v tomto prípade nemení ani zákon riadenia $u = \Theta^\mathsf{T}\omega$.



Obr. 2: Referenčný sigál r



Obr. 3: Výsledok simulácie

5 Cvičenie ôsme

1. Uvažujme sústavu danú v dvoch hraničných pracovných bodoch:

$$G_{OP_1} = 0,1659 \frac{s + 22}{s^2 + 3,1423s + 2,6539} \tag{78}$$

$$G_{OP_2} = 0,1669 \frac{s + 20,7618}{s^2 + 2,3422s + 2,7293} \tag{79}$$

   - Určte *nominálnu* prenosovú funkciu sústavy tak, že jej koeficienty sú priemery hodnôt oboch prenosových funkcií (78) a (79).
   - Pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy určte polynómy Z_p, R_p a zosilnenie k_p pričom

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{80}$$

     kde $Z_p(s)$ je monický polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$.

2. Pre nominálnu prenosovú funkciu sústavy navrhnite adaptívne riadenie s referenčným modelom so vsupno-výstupnou štruktúrou zákona riadenia (merateľný je len výstup sústavy a samozrejme vstup sústavy). Pre odvodenie zákona adaptácie použite priamu Lyapunovou metódu. Nech referenčný model je v tvare

$$W_m(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3.5s + 3} \tag{81}$$

   - Určte zákon riadenia, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme.
   - Vypočítajte ideálne parametre zákona riadenia.
   - Zistite, či $W_m(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) prenosová funkcia.
   - Napíšte rovnicu výstupnej adaptačnej odchýlky e_1.

- Pre systém diferenciálnych rovníc ($\dot{e}$, $\dot{\theta}$), kde $\dot{\theta}$ sa najskôr uvažuje vo všeobecnom tvare (na začiatku odvodenia sa uvažuje len všeob. funkcia f) zvoľte kandidáta na Lyapunovovu funkciu a odvoďte (skonkretizujte) predpis (pravú stranu) pre $\dot{\theta}$.
- Určte zákon adaptácie, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme
- Zvoľte Γ (jednoducho, zvoľte všetky ľubovolne voliteľné prvky zákona/zákonov adaptácie).
- Začiatočné hodnoty adaptovaných parametrov zvoľte nulové.
- Zostavte adaptívny riadiaci systém (simulačnú schému) a pridajte ho k simulovanej sústave.
- Použite obdĺžnikový referenčný signál r ako na Obr. 2. Vzorové výsledky simulácie sú na Obr. 3.

6 Cvičenie deviate a desiate

6.1 Referát MRAC vstupno-výstupný pri ($n^* = 2$)

Riadny termín odovzdania: do(vrátane) ...

Odovzdanie po riadnom termíne sa pokutuje odčítaním bodov od výsledného hodnotenia. Za každý začatý deň po riadnom termíne sa odčítajú 3 body.
1. deň po riadnom termíne: $H - 3$ body,
2. deň po riadnom termíne: $H - 3$ body,
3. deň po riadnom termíne: $H - 3$ bodov,
4. deň po riadnom termíne: $H - 3$ bodov,
5. deň po riadnom termíne: $H - 3$ bodov,
kde H je počet bodov pridelených referátu – H ako hodnotenie. Päť a viac dní po riadnom termíne už nie je možné referát odovzdať a študent/študentka získa 0 bodov. Minimálny počet bodov za referát je 0 bodov. Maximálny počet bodov za referát je 15 bodov.

Pre prácu na zadaní a referáte sú vyhradené cvičenia v 9. a 10. týždni semestra.

6.2 Zadanie

Navrhnite adaptívny riadiaci systém pre riadenie kurzu nákladnej lode. Riadenou (výstupnou) veličinou je kurz (uhol otočenia) lode, pričom táto veličina je merateľná a akčným zásahom je výchylka (uhol) kormidla. Pri návrhu využite prístup, ktorého základom je Lyapunovova teória stability. Vypracujte referát o návrhu adaptívneho riadiaceho systému pre riadenie kurzu nákladnej lode.

Pohyb lode opisuje diferenciálna rovnica v tvare [4]

$$\dddot{\varphi}(t) + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}\right) \ddot{\varphi}(t) + \left(\frac{1}{\tau_1 \tau_2}\right) \dot{\varphi}(t) = \frac{K}{\tau_1 \tau_2} \left(\tau_3 \dot{\delta}(t) + \delta(t)\right) \tag{82}$$

kde φ je uhol natočenia lode v radiánoch (azimut, kurz lode), δ je uhol vychýlenia kormidla v radiánoch. Parametre v rovnici (82) sú definované nasledovne

$$K = K_0 \frac{v}{L} \tag{83}$$

$$\tau_i = \tau_{i0} \frac{L}{v} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{84}$$

kde v je rýchlosť lode v smere danom uhlom φ v metroch za sekundu, L je dĺžka lode v metroch a K_0, τ_{10}, τ_{20}, τ_{30} sú konštanty závislé na veľkom množstve faktorov (typ lode atď.).

Požiadavky na dynamiku kormidlovania nákladnej lode nech sú definované referenčným modelom v tvare prenosovej funkcie:

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{0,0025}{s^2 + 0,1s + 0,0025} \tag{85}$$

kde r je referenčný kurz a y_m je požadovaná reakcia lode. Cieľom riadenia je zabezpečiť aby sa reakcia lode na referenčný signál zhodovala s reakciou referenčného modelu.

Pri simulačnom overovaní navrhnutého riadiaceho systému použite periodický referenčný signál s amplitúdou 5°, s periódou z intervalu 500 až 1000 sekúnd a so sínusovým, obdĺžnikovým alebo pílovitým tvarom. Číselné hodnoty parametrov pre simulačný model lode sú:

$$\begin{aligned} L &= 161 \\ K_0 &= -3,86 \\ \tau_{10} &= 5,66 \\ \tau_{20} &= 0,38 \\ \tau_{30} &= 0,89 \\ v &= 5 \end{aligned}$$

7 Otázky a úlohy

Nasledujúce nepatrí k predchádzajúcej časti *6 Cvičenie deviate a desiate.*

1. Zistite či je prenosová funkcia $G(s)$ striktne pozitívne reálna (SPR).

$$G(s) = \frac{2\,s+1}{(3\,s+1)(s+1)}$$

2. Pre aké hodnoty a, b, c je prenosová funkcia $G(s) = \dfrac{as+1}{(bs+1)\,(cs+1)}$ striktne pozitívne reálna.

3. Schematicky znázornite MRAC vstupno-výstupný pri $n^\star = 1$

4. Schematicky znázornite MRAC vstupno-výstupný pri $n^\star = 2$

5. Čo je cieľom riadenia pri návrhu adaptívneho riadiaceho systému s referenčným modelom so zákonom adaptácie navrhnutým pomocou Lyapunovovej teórie stability?

6. Je daný model systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

kde $a_0, a_1, b_0 > 0$ sú neznáme parametre systému, $u(t)$ je vstup, $y(t)$ je výstup a $x_1(t)$, $x_2(t)$ sú stavové veličiny systému. Tiež je daný referenčný model v tvare

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1m}(t) \\ \dot{x}_{2m}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0m} & -a_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0m} \end{bmatrix} r(t) \\ y_m(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kde $a_{0m}, a_{1m}, b_{0m} > 0$ sú známe parametre referenčného modelu, $r(t)$ je referenčný signál, $y_m(t)$ je výstup a $x_{1m}(t)$, $x_{2m}(t)$ sú stavové veličiny referenčného modelu.

(a) Napíšte model systému v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

kde $Z_p(s)$ je monický, hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Napíšte referenčný model v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm $Z_m(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m.

(b) Ideálnym cieľom riadenia je $y = y_m$. Navrhnite ideálny zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^\mathsf{T}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star, \Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star, \Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

(c) Cieľom riadenia je $y \to y_m$ a stabilita celého riadiaceho systému. Navrhnite adaptívny riadiaci systém, pričom uvažujte model riadeného systému v tvare prenosovej funkcie a tiež referenčný model v tvare prenosovej funkcie z predchádzajúceho bodu 6a.

Literatúra

[1] P. Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial.* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA., 2006.

[2] R. Monopoli. Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(5):474 – 484, oct 1974.

[3] J. Murgaš and I. Hejda. *Adaptívne riadenie technologických procesov.* Slovenská technická univerzita v Bratislave, 1993.

[4] K. M. Passino and S. Yurkovich. *Fuzzy Control.* Addison Wesley Longman, Inc., 1998.