MRAC vstupno-výstupný

Obsah

V tejto časti odvodíme adaptívny algoritmus riadenia, ktorý sa zaraďuje do triedy priame adaptívne riadenie. Pripomeňme priame adaptívne riadenie:
Model sústavy je parametrizovaný pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia. Pretože tieto parametre sú neznáme, sú priebežne identifikované - adaptované. Výstupom zákona adaptácie sú priamo parametre zákona riadenia.

Pri odvodení zákona adaptácie sa v tejto časti bude využívať Ljapunovova priama metóda.

1 SPR prenosové funkcie, MKY lemma

1.1 Striktne pozitívne reálne prenosové funkcie

Pojem *Pozitívne reálna* (PR) a *Striktne pozitívne reálna* (SPR) prenosová funkcia zohráva dôležitú úlohu v analýze stability nie len adaptívnych systémov [1]. Je preto dôležité disponovať kritériom, ktoré umožní zistiť, či príslušná prenosová funkcia je SPR ([3] str. 164).

Podľa definície 3.5.1 a 3.5.2 v [1], str. 127, prenosová fukcia $G(s)$ komplexnej premennej s sa nazýva pozitívne reálna (PR) ak

1. $G(s)$ je reálna pre reálne s.

2. $\Re\{G(s)\} \geq 0$ pre všetky $\Re\{s\} > 0$.

Prenosová funkcia $G(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) ak existuje reálne kladné číslo ε také, že $G(s-\varepsilon)$ je PR.

Prakticky nie je jednoduché zistiť, či uvedené podmienky sú splnené. V nasledujúcom uvedieme ekvivalentné nutné a postačujúce podmienky pozitívnej reálnosti. Platnosť týchto podmienok sa dá ľahko overiť. Prenosová funkcia $G(s)$ je PR keď vyhovuje všetkým nasledujúcim podmienkam

1. $G(s)$ je reálna pre všetky reálne s.
2. Menovateľ $G(s)$ má korene v ľavej polrovine komplexnej roviny alebo má reálne korene na imaginárnej osi.
3. $\Re\{G(j\omega)\} \geq 0$ pre všetky reálne ω.

Pre vyjadrenie reálnej časti funkcie $G(j\omega)$ je výhodné využiť, že platí:

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$

1.2 Meyerova-Kalmanova-Yakubovichova Lemma

Pre danú stabilnú maticu A, vektory b, c a skalár $d \geq 0$, platí nasledujúce: Ak

$$G(s) = d + c^{\mathsf{T}} (sI - A)^{-1} b$$

je SPR, potom pre danú maticu $L = L^{\mathsf{T}} > 0$ existujú skalár $v > 0$, vektor q a matica $P = P^{\mathsf{T}} > 0$ také, že

$$\begin{aligned} A^{\mathsf{T}}P + PA &= -qq^{\mathsf{T}} - vL \\ Pb - c &= \pm q\sqrt{2d} \end{aligned}$$

Tak znie veta, ktorá, ako sa ukáže, je veľmi užitočná pri návrhu MRAC využívajúceho len vstupno-výstupné informácie.

V tomto kurze ju využijeme v menej všeobecnom tvare: Nech je systém daný trojicou A_c, $\overline{B}_c$, C_c a A_c nech je stabilná matica. Ak $W_m(s) = C_c^{\mathsf{T}} (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c$ je SPR, potom platí, že

$$\begin{aligned} A_c^{\mathsf{T}}P + PA_c &= -Q \\ P\overline{B}_c &= C_c \end{aligned}$$

kde $Q = Q^{\mathsf{T}} > 0$. A je to práve fakt, že ak je $W_m(s)$ SPR tak platí $P\overline{B}_c = C_c$, ktorý umožní zredukovať zákon adaptácie tak, že v ňom vystupuje len odchýlka výstupných veličín sústavy a referenčného modelu [2].

2 Adaptačná odchýlka

2.1 Model sústavy a referenčný model

Uvažujme sústavu opísanú prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{1}$$

kde $Z_p(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Relatívny stupeň* sústavy je $n^* = n - m$. Predpokladajme, že relatívny stupeň n^* sústavy je známy. Pre zjednodušenie tiež predpokladajme, že aj stupne n a m polynómov sú známe, pričom vo všeobecnosti známe nemusia byť. Koeficienty polynómov $Z_p(s)$ a $R_p(s)$ (parametre sústavy) sú neznáme. Hodnota a znamienko zosilnenia k_p nech je známe.

Sústava v tvare (1) môže byť reprezentovaná opisom v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{2a}$$

$$y = c^{\mathsf{T}} x \tag{2b}$$

kde x je vektor stavových veličín sústavy a A, b, c^{T} sú matice (vektory) zodpovedajúcich rozmerov pričom hodnoty ich prvkov sú neznáme.

Cieľom riadenia je: Nech všetky signály uzavretého regulačného obvodu sú ohraničené a výstupná veličina y sústavy nech sleduje výstupnú veličinu referenčného modelu, ktorý je daný prenosovou funkciou v tvare

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \tag{3}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie, $Z_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m, pričom relatívny stupeň $n_m^* = n_m - m_m = n^*$. Všetky parametre (koeficienty polynómov a k_m) referenčného modelu sú známe, dané „projektantom“.

2.2 Zákon riadenia

Ako bolo ukázané v predchádzajúcich témach predmetu, zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r \tag{4}$$

zabezpečí, že priebeh výstupnej veličiny y sa zhoduje s priebehom výstupnej veličiny referenčného modelu y_m ak sú parametre zákona vypočítané z podmienok zhody

$$\Theta_4^\star = \frac{k_m}{k_p} \tag{5a}$$

$$\Lambda = \Lambda_0 Z_m \tag{5b}$$

$$R_p \left(\Lambda - \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \alpha(s) \right) - k_p Z_p \left(\Theta_2^{\star\mathsf{T}} \alpha(s) + \Theta_3^\star \Lambda \right) = Z_p \Lambda_0 R_m \tag{5c}$$

Pretože parametre sústavy (1) sú neznáme, zákon riadenia (4) nemožno použiť. Použije sa zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3 y + \Theta_4 r \tag{6}$$

kde Θ_1, Θ_2, Θ_3 a Θ_4 sú odhadmi ideálnych parametrov $\Theta_1^\star$, $\Theta_2^\star$, $\Theta_3^\star$ a $\Theta_4^\star$ v každom čase t. Je potrebné nájsť zákon adaptácie, ktorý priebežne generuje (identifikuje) hodnoty $\Theta_1(t)$, $\Theta_2(t)$, $\Theta_3(t)$ a $\Theta_4(t)$.

Pomocné filtre vystupujúce v zákone riadenia v stavovom priestore sú (viď predch. článok)

$$\dot{\nu}_1 = \Lambda \nu_1 + qu \tag{7a}$$

$$\dot{\nu}_2 = \Lambda \nu_2 + qc^{\mathsf{T}} x \tag{7b}$$

a uvažovaný zákon riadenia je

$$u = \Theta_c^{\mathsf{T}} D X + \Theta_4 r \tag{8}$$

kde $\Theta_c = \begin{bmatrix} \Theta_3^\star & \Theta_1^{\mathsf{T}} & \Theta_2^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, Θ_4 sú parametre zákona riadenia a

$$D = \begin{bmatrix} c^{\mathsf{T}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

2.3 Rovnica adaptačnej odchýlky

Pridanie pomocných filtrov (7) k stavovému opisu sústavy (2) vedie k „doplnenej sústave“ (viď predch. časti predmetu) v tvare

$$\dot{X} = A_o X + B_c u \tag{9a}$$

$$y = C_c^{\mathsf{T}} X \tag{9b}$$

Parametrizácia doplnenej sústavy (9) pomocou ideálnych parametrov zákona riadenia sa dosiahne pripočítaním a odpočítaním ideálneho vstupného výrazu $B_c u^\star = B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX + B_c \Theta_4^\star r$

$$\dot{X} = A_o X + B_c u + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX + B_c \Theta_4^\star r - B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - B_c \Theta_4^\star r \tag{10a}$$

$$\dot{X} = \left(A_o + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D\right) X + B_c \Theta_4^\star r + B_c \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{10b}$$

Z predchádzajúcich častí vieme, že $A_c = A_o + B_c \Theta_c^{\star\mathsf{T}} D$, $\overline{B}_c = B_c \Theta_4^\star$ a tiež, že neminimálnu reprezentáciu referenčného modelu (3) možno (teoreticky) zapísať v tvare

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r \tag{11a}$$

$$y_m = C_c^{\mathsf{T}} X_m \tag{11b}$$

Potom parametrizovaná doplnená sústava (10b) je

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{12a}$$

$$y = C_c^{\mathsf{T}} X \tag{12b}$$

Definujme *adaptačnú odchýlku* v tvare

$$e = X - X_m \tag{13}$$

$$e_1 = y - y_m \tag{14}$$

potom:

$$\dot{X} - \dot{X}_m = A_c \left(X - X_m\right) + \overline{B}_c r - \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{15a}$$

$$y - y_m = C_c^{\mathsf{T}} \left(X - X_m\right) \tag{15b}$$

a teda

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{16a}$$

$$e_1 = C_c^{\mathsf{T}} e \tag{16b}$$

čo je základná rovnica opisujúca dynamiku adaptačnej odchýlky v stavovom priestore, ktorú možno vyjadriť v tvare prenosovej funkcie uvážením, že platí

$$W_m(s) = C_c^{\mathsf{T}} \left(sI - A_c\right)^{-1} \overline{B}_c \tag{17}$$

Potom (16) v tvare prenosovej funkcie je

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{18}$$

Odhadom odchýlky e_1 nech je $\hat{e}_1$, ktorá je závislá od odhadov $\Theta_c(t)$, $\Theta_4(t)$.

$$\hat{e}_1 = W_m(s) l \left(u - \Theta_c DX - \Theta_4 r\right) \tag{19}$$

kde l je odhadom hodnoty $\frac{1}{\Theta_4^\star}$. Pretože uvažujeme zákon riadenia $u = \Theta_c^{\mathsf{T}} DX + \Theta_4 r$, tak $\hat{e}_1 = 0$; $\forall t$. To znamená, že rovnica (19) nie je potrebná pre identifikáciu neznámych parametrov $\Theta_c^\star$, $\Theta_4^\star$ a ako chybu odhadu týchto parametrov možno použiť priamo rovnicu adaptačnej odchýlky (18).

3 Zákon adaptácie pri $n^* = 1$

Uvažujme, že relatívny stupeň sústavy (1) je $n^* = 1$. Prenosová funkcia referenčného medelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy. Relatívny stupeň referenčného modelu $n_m^* = 1$ umožňuje aby prenosová funkcia $W_m(s)$ bola navrhnutá ako striktne pozitívne reálna (SPR).

Nech $W_m(s) = C_c^{\mathsf{T}} (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c$ je SPR. Potom podľa MKY lemmy v časti 1.2 existuje taká matica P, pre ktorú platí

$$A_c^{\mathsf{T}} P + P A_c = -Q \tag{20a}$$

$$P\overline{B}_c = C_c \tag{20b}$$

kde $Q = Q^{\mathsf{T}} > 0$. Táto skutočnosť sa v ďalšom využije pri voľbe kandidáta na Lyapunovovu funkciu.

Dosadením (8) za u do (18) máme

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta_c^{\mathsf{T}} D X + \theta_4 r \right) \tag{21}$$

kde $\theta_c = \Theta_c - \Theta_c^\star$ a $\theta_4 = \Theta_4 - \Theta_4^\star$. Zavedením vektora chyby nastavenia parametrov zákona riadenia $\theta = \begin{bmatrix} \theta_c^{\mathsf{T}} & \theta_4 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ a signálneho vektora $\omega = \begin{bmatrix} (DX)^{\mathsf{T}} & r \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ máme známy tvar adaptačnej odchýlky

$$e_1 = W_m(s) \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta^{\mathsf{T}} \omega \right) \tag{22}$$

alebo

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta^{\mathsf{T}} \omega \right) \tag{23a}$$

$$e_1 = C_c^{\mathsf{T}} e \tag{23b}$$

V tomto prípade rovnica (22) alebo (23) dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia Θ a adaptačnú odchýlku e_1 cez SPR prenosovú funkciu.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega) \tag{24}$$

teda aby zákon adaptácie bol funkciou len výstupnej adaptačnej odchýlky e_1 a nie aj jej derivácií e, pretože tieto nie sú dostupné, nakoľko nie sú dostupné stavové veličiny sústavy.

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = e^{\mathsf{T}} P e + \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \theta \tag{25}$$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovolná diagonálna matica, $\left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra $\Theta_4^\star$ a $P = P^{\mathsf{T}} > 0$ spĺňa rovnice (20), ktoré vyplývajú z MKY lemmy.

$$\dot{V} = \dot{e}^{\mathsf{T}} P e + e^{\mathsf{T}} P \dot{e} + \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \left(\dot{\theta}^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \theta + \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \right) \tag{26}$$

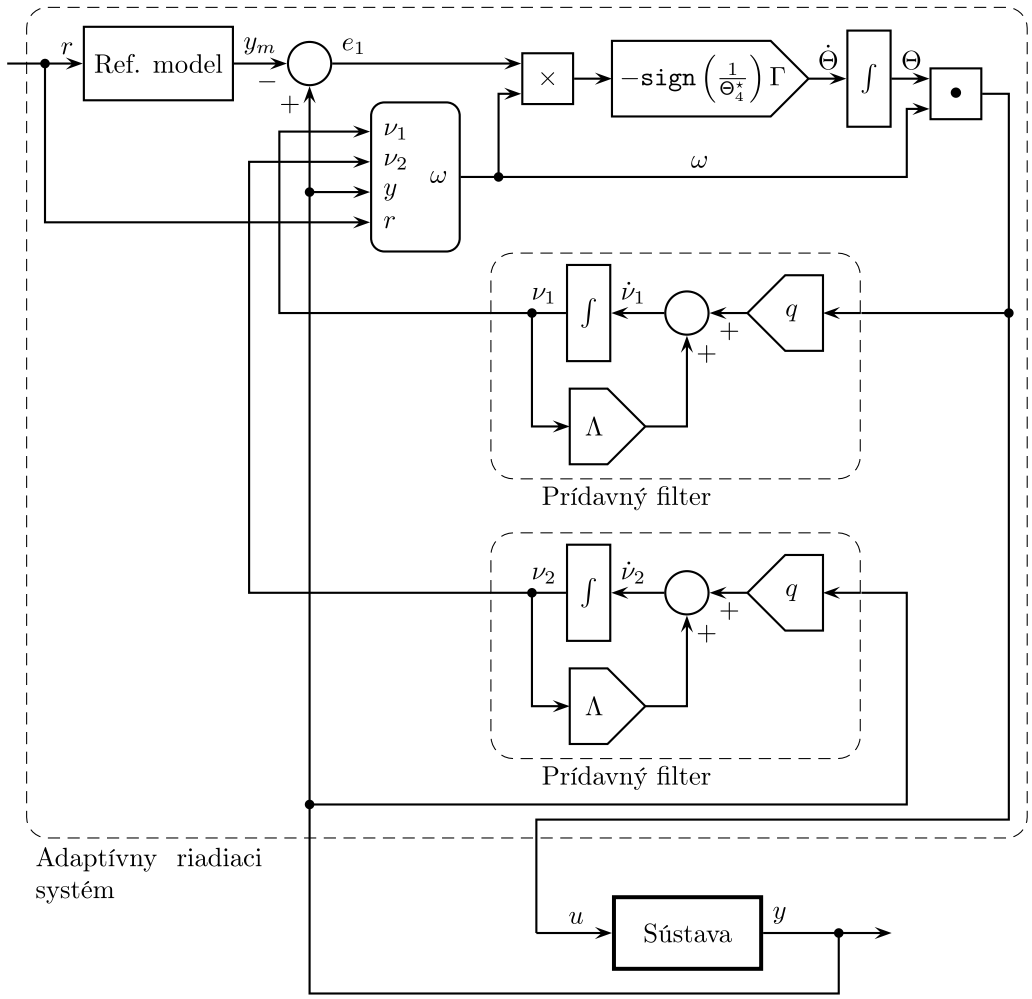
Poznáme (23) odkiaľ $\dot{e}^{\mathsf{T}} = e^{\mathsf{T}} A_c^{\mathsf{T}} + \omega^{\mathsf{T}} \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} \overline{B}_c^{\mathsf{T}}$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(e^{\mathsf{T}} A_c^{\mathsf{T}} + \omega^{\mathsf{T}} \theta \frac{1}{\Theta_4^\star} \overline{B}_c^{\mathsf{T}} \right) P e + e^{\mathsf{T}} P \left(A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega \right) + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{27}$$

$$\dot{V} = e^{\mathsf{T}} (-Q) e + 2 e^{\mathsf{T}} P \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{28}$$

Pripomeňme, že platí $P\overline{B}_c = C_c$ (to vďaka tomu, že $W_m(s)$ je SPR), potom

$$\dot{V} = e^{\mathsf{T}} (-Q) e + 2 e^{\mathsf{T}} C_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^{\mathsf{T}} \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^{\mathsf{T}} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{29}$$



Obr. 1: Bloková schéma MRAC so vstupno-výstupnou štruktúrou riadenia pri $n^\star = 1$

Všimnime si, že $e^\mathsf{T} C_c = C_c^\mathsf{T} e = e_1$. Práve tento moment umožní aby zákon adaptácie $\dot{\theta} = f(e_1, \omega)$ bol funkciou e_1 a nie e. Časová derivácia $\dot{V}$

$$\dot{V} = e^\mathsf{T} \left(-Q\right) e + 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{30}$$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega + 2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^\mathsf{T} \Gamma^{-1} \dot{\theta} \tag{31a}$$

$$2 \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \theta^\mathsf{T} G^{-1} \dot{\theta} = -2 e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star} \Theta^\mathsf{T} \omega \tag{31b}$$

$$\left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \Gamma^{-1} \dot{\theta} = -e_1 \,\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star} \right) \left| \frac{1}{\Theta_4^\star} \right| \omega \tag{31c}$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star} \right) e_1 \omega \tag{31d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star} \right) e_1 \Gamma \omega \tag{31e}$$

Rovnako ako sme zaviedli vektor Θ, zavedieme aj vektor parametrov zákona riadenia v tvare

$\Theta = \begin{bmatrix}\Theta_c^\mathsf{T} & \Theta_4\end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}\Theta_3 & \Theta_1^\mathsf{T} & \Theta_2^\mathsf{T} & \Theta_4\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ a vektor ω možno zapísať v tvare $\omega = \begin{bmatrix}y & \nu_1^\mathsf{T} & \nu_2^\mathsf{T} & r\end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)\Gamma e_1 \omega \tag{32}$$

a uvažovaný zákon riadenia možno zapísať v tvare $u = \Theta^\mathsf{T}\omega$.

4 Zákon adaptácie pri $n^* = 2$

4.1 Priamočiary postup

Uvažujme relatívny stupeň sústavy (1) $n^* = 2$. Prenosová funkcia referenčného medelu $W_m(s)$ sa volí tak, aby jej relatívny stupeň bol zhodný s relatívnym stupňom sústavy, teda $n_m^* = 2$. To ale znamená (bez dôkazu), že prenosová funkcia $W_m(s)$ nie je SPR. Preto nie je možné použiť predchádzajúci postup a je ho potrebné modifikovať.

Rovnica pre adaptačnú odchýlku (18)

$$e_1 = W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{33}$$

je stále platná (pri jej odvodení nehral relatívny stupeň sústavy žiadnu úlohu).

Využime identitu $(s+\rho)(s+\rho)^{-1} = 1$ kde ρ je ľubovolná kladná konštanta a prepíšme rovnicu (18) do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho)(s+\rho)^{-1}\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(u - \Theta_c^{\star\mathsf{T}} DX - \Theta_4^\star r\right) \tag{34}$$

čo možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(u_f - \Theta^{\star\mathsf{T}}\omega_f\right) \tag{35}$$

kde sme zaviedli $u_f = (s+\rho)^{-1}u$, $\omega_f = (s+\rho)^{-1}\omega$ a $\Theta^\star$ je rovnaký ako Θ avšak obsahuje ideálne parametre.

Nech prenosová funkcia $W_m(s)(s+\rho)$ je zvolená tak, že je to SPR prenosová funkcia. Potom rovnica

$$e_1 = W_m(s)(s+\rho)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{36}$$

kde $\theta = \Theta - \Theta^\star$ dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia θ a adaptačnú udchýlku e_1 cez SPR prenosovú funkciu. Reprezentácia rovnice (36) v stavovom priestore je

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c(s+\rho)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{37a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{37b}$$

kde s teraz predstavuje operátor derivácie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, rovnako ako bodka „$\dot{}$" nad e. V ďalšom sa tiež stretneme s takýmto významom symbolu s, pričom na to nebudeme zvlášť upozorňovať, konkrétny význam symbolu s vyplynie z kontextu. Preto

$$se = A_c e + s\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) + \rho\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{38a}$$

$$s\left(e - \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) = A_c e + \rho\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{38b}$$

Označme $e - \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f = \overline{e}$, potom $e = \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \overline{e}$ a teda

$$s\overline{e} = A_c\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \overline{e}\right) + \rho\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) \tag{39a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e = C_c^\mathsf{T}\left(\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \overline{e}\right) \tag{39b}$$

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + A_c\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + \rho\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{40a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T}\overline{e} + C_c^\mathsf{T}\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{40b}$$

Pretože $C_c^\mathsf{T}B_c = 0$ tak aj $C_c^\mathsf{T}\overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f = 0$, potom

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + \left(A_c\overline{B}_c + \rho\overline{B}_c\right)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{41a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T}\overline{e} \tag{41b}$$

Označme $A_c\overline{B}_c + \rho\overline{B}_c = B_1$, potom

$$\dot{\overline{e}} = A_c\overline{e} + B_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{42a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T}\overline{e} \tag{42b}$$

je stavová reprezentácia systému (36) daného prenosovou funkciou $W_m(s)(s+\rho)$, pričom $\overline{e}$ je vektor jeho stavových veličín.

Funkcia $W_m(s)(s+\rho) = C_c^\mathsf{T}\left(sI - A_c\right)^{-1}B_1$ je SPR. Potom podľa MKY lemmy v časti 1.2 existuje taká matica P, pre ktorú platí

$$A_c^\mathsf{T}P + PA_c = -Q \tag{43a}$$

$$PB_1 = C_c \tag{43b}$$

kde $Q = Q^\mathsf{T} > 0$.

Predpokladajme, že štruktúra zákona adaptácie je daná diferenciálnou rovnicou všeobecne zapísanou v tvare

$$\dot{\theta} = f(e_1, \omega_f) \tag{44}$$

Zvoľme kandidáta na Ljapunovovu funkciu v tvare

$$V = \overline{e}^\mathsf{T}P\overline{e} + \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\theta \tag{45}$$

kde $\Gamma > 0$ je ľubovolná diagonálna matica, $\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|$ je absolútna hodnota prevrátenej hodnoty parametra $\Theta_4^\star$ a $P = P^\mathsf{T} > 0$ spĺňa rovnice (43), ktoré vyplývajú z MKY lemmy.

$$\dot{V} = \dot{\overline{e}}^\mathsf{T}P\overline{e} + \overline{e}^\mathsf{T}P\dot{\overline{e}} + \left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\left(\dot{\theta}^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\theta + \theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta}\right) \tag{46}$$

Poznáme (42) odkiaľ $\dot{\overline{e}}^\mathsf{T} = \overline{e}^\mathsf{T}A_c^\mathsf{T} + \omega_f^\mathsf{T}\theta\frac{1}{\Theta_4^\star}B_1^\mathsf{T}$, po dosadení týchto výrazov:

$$\dot{V} = \left(\overline{e}^\mathsf{T}A_c^\mathsf{T} + \omega_f^\mathsf{T}\theta\frac{1}{\Theta_4^\star}B_1^\mathsf{T}\right)P\overline{e} + \overline{e}^\mathsf{T}P\left(A_c\overline{e} + B_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f\right) + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{47}$$

$$\dot{V} = \overline{e}^\mathsf{T}\left(-Q\right)\overline{e} + 2\overline{e}^\mathsf{T}PB_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{48}$$

Pripomeňme, že platí $PB_1 = C_c$, potom

$$\dot{V} = \overline{e}^\mathsf{T}\left(-Q\right)\overline{e} + 2\overline{e}^\mathsf{T}C_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{49}$$

Všimnime si, že $\overline{e}^\mathsf{T}C_c = C_c^\mathsf{T}\overline{e} = e_1$. Časová derivácia $\dot{V}$

$$\dot{V} = \overline{e}^\mathsf{T}\left(-Q\right)\overline{e} + 2e_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{50}$$

bude záporne definitná ak

$$0 = 2e_1 \frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f + 2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} \tag{51a}$$

$$2\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\theta^\mathsf{T}\Gamma^{-1}\dot{\theta} = -2e_1\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega_f \tag{51b}$$

$$\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\Gamma^{-1}\dot{\theta} = -e_1\,\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)\left|\frac{1}{\Theta_4^\star}\right|\omega_f \tag{51c}$$

$$\Gamma^{-1}\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)e_1\omega_f \tag{51d}$$

$$\dot{\theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)e_1\Gamma\omega_f \tag{51e}$$

Potom zákon adaptácie je

$$\dot{\Theta} = -\mathtt{sign}\left(\frac{1}{\Theta_4^\star}\right)\Gamma e_1\omega_f \tag{52}$$

Signálny vektor ω_f má zložky $\omega_f = \begin{bmatrix} y_f & \nu_{1f}^\mathsf{T} & \nu_{2f}^\mathsf{T} & r_f \end{bmatrix}^\mathsf{T}$. Tieto signály získame jednoducho prechodom pôvodných signálov y, ν_1^T, ν_2^T a r cez filtre s prenosovou funkciou v tvare $\frac{1}{s+\rho}$.

Vstupom do sústavy je u. Pri odvodení zákona adaptácie sme ale uvažovali $u_f = (s+\rho)^{-1}u$ odkiaľ $u = (s+\rho)u_f$. Signál u_f možno zapísať aj v tvare $u_f = \Theta^\mathsf{T}\omega_f$. Teda $u = (s+\rho)\Theta^\mathsf{T}\omega_f$, z čoho vyplýva, že

$$u = \Theta^\mathsf{T}\omega + \dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f \tag{53}$$

Pre objasnenie (53) naznačíme, že:

$$\begin{aligned}
&(s+\rho)\Theta^\mathsf{T}\omega_f \\
&s\left(\Theta^\mathsf{T}\omega_f\right) + \rho\Theta^\mathsf{T}\omega_f \\
&s\left(\Theta^\mathsf{T}\right)\omega_f + \Theta^\mathsf{T}s\left(\omega_f\right) + \rho\Theta^\mathsf{T}\omega_f \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}s\left(\frac{1}{(s+\rho)}\omega\right) + \rho\Theta^\mathsf{T}\frac{1}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}\frac{s}{(s+\rho)}\omega + \Theta^\mathsf{T}\frac{\rho}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}\frac{s+\rho}{(s+\rho)}\omega \\
&\dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f + \Theta^\mathsf{T}\omega
\end{aligned}$$

4.2 Metóda doplnenej odchýlky

Vo všeobecnosti, zákon riadenia, ktorý rieši MRC problém je $u = \Theta^\mathsf{T}\omega$. Pri jeho dosadení do všeobecne platnej rovnice adaptačnej odchýlky (18) máme rovnicu adaptačnej odchýlky v tvare

$$e_1 = W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega \tag{54}$$

V rovnici (34) sme použili identitu $(s+\rho)(s+\rho)^{-1} = 1$, čo vo všeobecnosti je $L(s)L(s)^{-1} = 1$.

Rovnicu (54) sme v predchádzajúcom tvare doplnili do tvaru

$$e_1 = W_m(s)L(s)L(s)^{-1}\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega \tag{55}$$

a z rovnice (35) vyplíva, že (55) možno prepísať do tvaru

$$e_1 = W_m(s)L(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}L(s)^{-1}\omega \tag{56}$$

Rovnica (56) može byť zapísaná aj v tvare

$$e_1 = W_m(s)\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{57}$$

kde sme vymenili pozície $\frac{1}{\Theta_4^\star}$ a $L(s)$, čo je možné, pretože $\frac{1}{\Theta_4^\star}$ je len konštanta a nie funkcia času, a táto rovnica dáva do vzťahu chybu nastavenia parametrov zákona riadenia s adaptačnou odchýlkou. V stavovom priestore má rovnica „doplnenej“ adaptačnej odchýlky (57) tvar

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{58a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{58b}$$

Adaptačná odchýlka je definovaná ako $e = X - X_m$ a $e_1 = y - y_m$. Sú dve možnosti ako dosiahnuť aby výsledok odčítania rovníc parametrizovanej doplnenej sústavy, kde stavový vektor je X, a neminimálnej reprezentácie referenčného modelu, kde stavový vektor je X_m, bol v tvare doplnenej adaptačnej odchýlky (58).

4.2.1 Prvá možnosť

Výsledok je rovnaký ako v predchádzajúcej časti:

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (12) po dosadení za $u = \Theta^\mathsf{T}\omega$ možno zapísať v tvare

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\theta^\mathsf{T}\omega \tag{59a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{59b}$$

Zavedieme také pravidlo, že keď $W_m(s)$ nie je možné navrhnúť ako SPR, tak v rovnici (59) nahradíme Θ^T výrazom $\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}$, kde $L(s)$ je dané tým, že $W_m(s)L(s)$ je zvolená ako SPR prenosová funkcia. Teda

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c\frac{1}{\Theta_4^\star}\left(L(s)\theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega \tag{60a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{60b}$$

Pripomeňme

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r \tag{61a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{61b}$$

Odčítaním (61) od (60) získame rovnicu „doplnenej“ adaptačnej odchýlky (58), ktorá zabezpečuje (podrobne ukázané v predchádzajúcom), že chyba nastavenia parametrov zákona riadenia θ je vo vzťahu z adaptačnou odchýlkou e_1 cez SPR prenosovú funkciu.

Pretože rovnica parametrizovanej doplnenej sústavy je modifikovaná podľa zavedeného pravidla, tak aj zákon riadenia je modifikovaný do tvaru $u = \left(L(s)\Theta L(s)^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega$. V prípade, že $L(s) = (s+\rho)$ (ako v predchádzajúcom), tak výraz $L(s)\Theta^\mathsf{T} L(s)^{-1}$ je funkčne ekvivalentný výrazu

$$L(s)\Theta^\mathsf{T} L(s)^{-1} = \Theta^\mathsf{T} + \dot{\Theta}^\mathsf{T} L(s)^{-1} \tag{62}$$

a teda modifikovaný zákon riadenia má v tomto prípade tvar $u = \Theta^\mathsf{T}\omega + \dot{\Theta}^\mathsf{T}\omega_f$.

4.2.2 Druhá možnosť

Výsledkom je algoritmus nazývaný *metóda doplnenej odchýlky*:

Namiesto nahradenia θ^T výrazom $\left(L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}$ v rovnici parametrizovanej doplnenej sústavy pridáme vstupný signál v tvare $\frac{1}{\theta_4^\star}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega$ do referenčného modelu nasledovne

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c\left(r + \frac{1}{\Theta_4^\star}\left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T}\omega\right) \tag{63a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{63b}$$

$$\dot{X}_m = A_c X_m + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T} \omega \tag{64a}$$

$$y_m = C_c^\mathsf{T} X_m \tag{64b}$$

Rovnica parametrizovanej doplnenej sústavy sa teraz nemení (nemodifikuje)

$$\dot{X} = A_c X + \overline{B}_c r + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega \tag{65a}$$

$$y = C_c^\mathsf{T} X \tag{65b}$$

Odčítaním (64) od (65) podľa definície adaptačnej odchýlky máme

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta - L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T} \omega \tag{66a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{66b}$$

Výraz

$$\left(\theta - L\theta L^{-1}\right) = L\left(L^{-1}\theta - \theta L^{-1}\right) \tag{67}$$

Potom

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(L\left(L^{-1}\theta - \theta L^{-1}\right)\right)^\mathsf{T} \omega \tag{68a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{68b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L\left(L^{-1}\theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1}\right) \omega \tag{69a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{69b}$$

Rovnicu (69) je možné prepísať do požadovaného tvaru (58) nasledovne:

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L L^{-1} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L \theta^\mathsf{T} L^{-1} \omega \tag{70a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{70b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} L \theta^\mathsf{T} L^{-1} \omega \tag{71a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{71b}$$

$$\dot{e} = A_c e + \overline{B}_c \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(L\theta L^{-1}\right)^\mathsf{T} \omega \tag{72a}$$

$$e_1 = C_c^\mathsf{T} e \tag{72b}$$

Rovnica (69) v tvare prenosovej funkcie je

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(\theta^\mathsf{T} \omega - L\left(L^{-1}\theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1}\right) \omega\right) \tag{73}$$

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} L\left(L^{-1}\theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1}\right) \omega \tag{74}$$

Platí

$$\begin{aligned} L^{-1}\theta^\mathsf{T} - \theta^\mathsf{T} L^{-1} &= L^{-1}\left(\Theta - \Theta^\star\right)^\mathsf{T} - \left(\Theta - \Theta^\star\right)^\mathsf{T} L^{-1} \\ &= \left(L^{-1}\Theta^\mathsf{T} - \Theta^\mathsf{T} L^{-1}\right) - \left(L^{-1}\Theta^{\star\mathsf{T}} - \Theta^{\star\mathsf{T}} L^{-1}\right) \\ &= \left(L^{-1}\Theta^\mathsf{T} - \Theta^\mathsf{T} L^{-1}\right) \end{aligned} \tag{75}$$

pretože $\Theta^\star$ nie je funkciou času a teda $L^{-1}\Theta^{\star\mathsf{T}} = \Theta^{\star\mathsf{T}} L^{-1}$. Potom

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - W_m L \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(L^{-1} \Theta^\mathsf{T} \omega - \Theta^\mathsf{T} L^{-1} \omega \right) \tag{76}$$

$$e_1 = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega - W_m L \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(L^{-1} u - \Theta^\mathsf{T} \omega_f \right) \tag{77}$$

kde označíme: $e_m = W_m \frac{1}{\Theta_4^\star} \theta^\mathsf{T} \omega$ je odchýlka medzi výstupom pôvodného nemodifikovaného referenčného modelu a signál $e_d = W_m L \frac{1}{\Theta_4^\star} \left(L^{-1} u - \Theta^\mathsf{T} \omega_f \right)$ sa pridá k tejto odchýlke, čím vznikne modifikovaný signál e_1 a tento sa použije v zákone adaptácie.

Rovnicu parametrizovanej doplnenej sústavy (65) sme nezmenili, preto sa v tomto prípade nemení ani zákon riadenia $u = \Theta^\mathsf{T} \omega$.

5 Cvičenie ôsme

1. Uvažujme riadený systém rovnako ako na cvičení siedmom, teda:

$$G_{OP_1} = 0,1659 \frac{s + 22}{s^2 + 3,1423s + 2,6539} \tag{78}$$

$$G_{OP_2} = 0,1669 \frac{s + 20,7618}{s^2 + 2,3422s + 2,7293} \tag{79}$$

   pričom riadený systém pracuje v pásme danom dvomi pracovnými bodmi, ktorým zodpovedajú uvedené prenosové funkcie. Nominálna prenosová funkcia riadeného systému je daná tak, že jej koeficienty sú priemery hodnôt oboch prenosových funkcií

   - Pre nominálnu prenosovú funkciu riadeného systému určte polynómy Z_p, R_p a zosilnenie k_p pričom

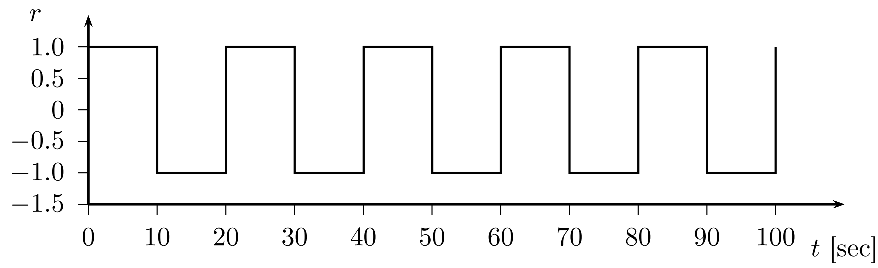
$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \tag{80}$$

     kde $Z_p(s)$ je monický polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je tzv. *vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Relatívny stupeň* riadeného systému je $n^* = n - m$.

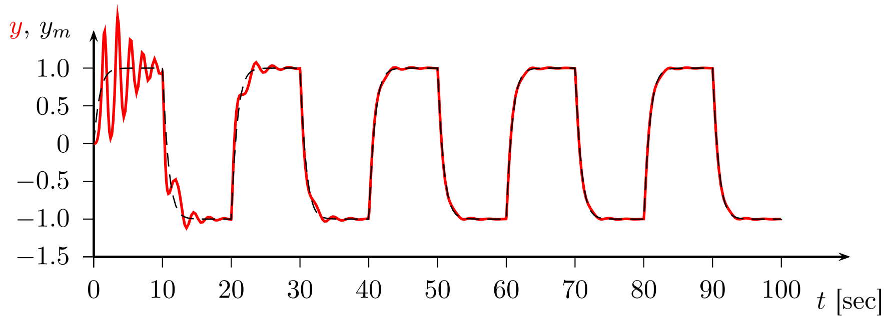
2. Pre nominálnu prenosovú funkciu riadeného systému navrhnite adaptívne riadenie s referenčným modelom so vstupno-výstupnou štruktúrou zákona riadenia (merateľný je len výstup riadenégho systému a samozrejme vstup). Pre odvodenie zákona adaptácie použite priamu Lyapunovou metódu. Nech referenčný model je v tvare

$$W_m(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3.5s + 3} \tag{81}$$

   - Určte zákon riadenia, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme.
   - Vypočítajte ideálne parametre zákona riadenia.
   - Zistite, či $W_m(s)$ je striktne pozitívne reálna (SPR) prenosová funkcia.
   - Napíšte rovnicu výstupnej adaptačnej odchýlky e_1.
   - Pre systém diferenciálnych rovníc $(\dot{e}, \dot{\theta})$, kde $\dot{\theta}$ sa najskôr uvažuje vo všeobecnom tvare (na začiatku odvodenia sa uvažuje len všeob. funkcia f) zvoľte kandidáta na Lyapunovovu funkciu a odvoďte (skonkretizujte) predpis (pravú stranu) pre $\dot{\theta}$.
   - Určte zákon adaptácie, ktorý sa bude používať v adaptívnom riadiacom systéme



Obr. 2: Referenčný sigál r



Obr. 3: Výsledok simulácie

- Zvoľte Γ (jednoducho, zvoľte všetky ľubovolne voliteľné prvky zákona/zákonov adaptácie).
- Začiatočné hodnoty adaptovaných parametrov zvoľte nulové.
- Zostavte adaptívny riadiaci systém (simulačnú schému) a pridajte ho k simulovanej sústave.
- Použite obdĺžnikový referenčný signál r ako na Obr. 2. Vzorové výsledky simulácie sú na Obr. 3.

6 Cvičenie deviate

Pripravuje sa[1].

7 Cvičenie desiate a jedenáste

7.1 Referát MRAC vstupno-výstupný pri $(n^* = 2)$

Riadny termín odovzdania: do (vrátane) **01.05.2019**

Odovzdanie po riadnom termíne sa pokutuje odčítaním bodov od výsledného hodnotenia. Za každý začatý deň po riadnom termíne sa odčítajú 3 body.

1. deň po riadnom termíne: $H - 3$ body,
2. deň po riadnom termíne: $H - 6$ body,
3. deň po riadnom termíne: $H - 9$ bodov,
4. deň po riadnom termíne: $H - 12$ bodov,
5. deň po riadnom termíne: $H - 15$ bodov,

kde H je počet bodov pridelených referátu, H ako hodnotenie[2]. Päť a viac dní po riadnom termíne už nie je možné referát odovzdať a študent/študentka získa 0 bodov. Minimálny počet bodov za referát je 0 bodov. Maximálny počet bodov za referát je 15 bodov.

Pre prácu na zadaní a referáte sú vyhradené cvičenia v 10. a 11. týždni semestra.

[1] No to určite...

[2] Vonkoncom to nie je Hesseho matica! Čo nám pripomína, že ospravedlnenie patrí J. H. Bol to M. Ž. Mimochodom, prečo vôbec čítate poznámky pod čiarou?

7.2 Zadanie

Navrhnite adaptívny riadiaci systém pre riadenie kurzu nákladnej lode. Riadenou (výstupnou) veličinou je kurz (uhol otočenia) lode, pričom táto veličina je merateľná a akčným zásahom je výchylka (uhol) kormidla. Pri návrhu využite prístup, ktorého základom je Lyapunovova teória stability. Vypracujte referát o návrhu adaptívneho riadiaceho systému pre riadenie kurzu nákladnej lode.

Pohyb lode opisuje diferenciálna rovnica v tvare [4]

$$\dddot{\varphi}(t) + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}\right) \ddot{\varphi}(t) + \left(\frac{1}{\tau_1 \tau_2}\right) \dot{\varphi}(t) = \frac{K}{\tau_1 \tau_2} \left(\tau_3 \dot{\delta}(t) + \delta(t)\right) \tag{82}$$

kde φ je uhol natočenia lode v radiánoch (azimut, kurz lode), δ je uhol vychýlenia kormidla v radiánoch. Parametre v rovnici (82) sú definované nasledovne

$$K = K_0 \frac{v}{L} \tag{83}$$

$$\tau_i = \tau_{i0} \frac{L}{v} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{84}$$

kde v je rýchlosť lode v smere danom uhlom φ v metroch za sekundu, L je dĺžka lode v metroch a K_0, τ_{10}, τ_{20}, τ_{30} sú konštanty závislé na veľkom množstve faktorov (typ lode atď.).

Požiadavky na dynamiku kormidlovania nákladnej lode nech sú definované referenčným modelom v tvare prenosovej funkcie:

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{0,0025}{s^2 + 0,1s + 0,0025} \tag{85}$$

kde r je referenčný kurz a y_m je požadovaná reakcia lode. Cieľom riadenia je zabezpečiť aby sa reakcia lode na referenčný signál zhodovala s reakciou referenčného modelu.

Pri simulačnom overovaní navrhnutého riadiaceho systému použite periodický referenčný signál s amplitúdou 5°, s periódou z intervalu 500 až 1000 sekúnd a so sínusovým, obdĺžnikovým alebo pílovitým tvarom. Číselné hodnoty parametrov pre simulačný model lode sú:

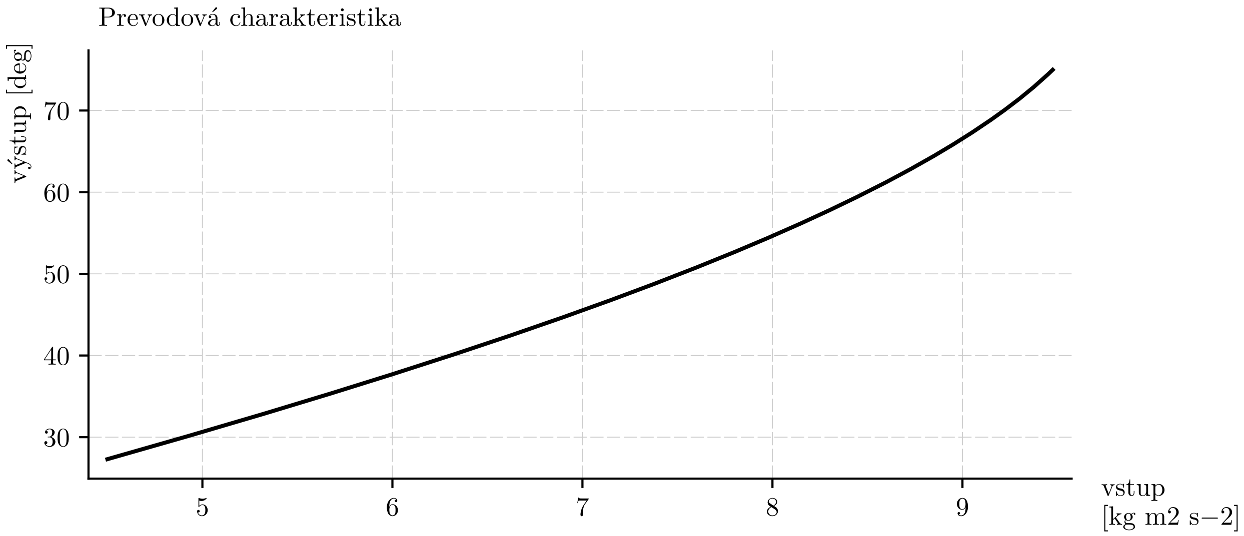
$$\begin{aligned} L &= 161 \\ K_0 &= -3,86 \\ \tau_{10} &= 5,66 \\ \tau_{20} &= 0,38 \\ \tau_{30} &= 0,89 \\ v &= 5 \end{aligned}$$

8 Cvičenie dvanáste

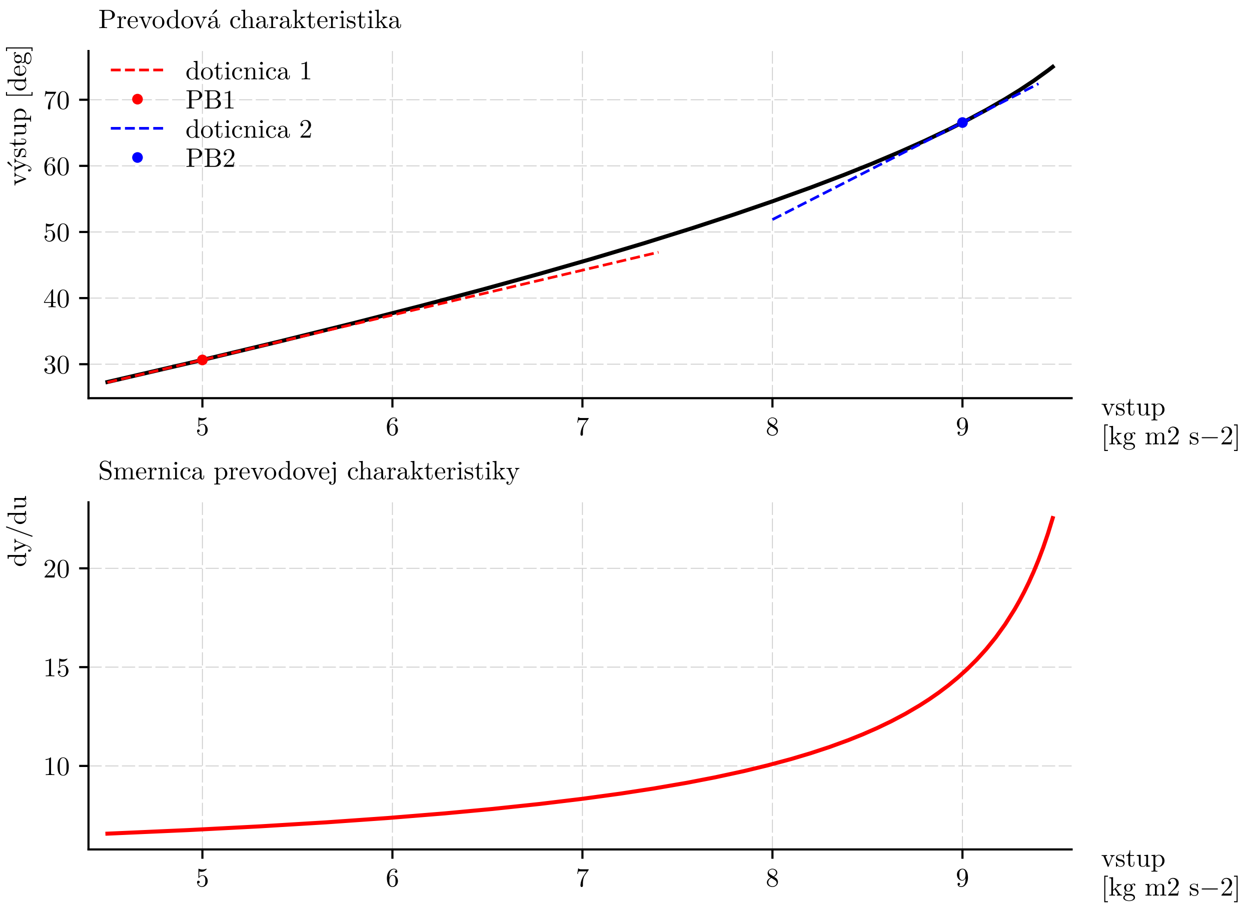
Nech riadeným systémom je kyvadlo a nech riadenou veličinou je poloha (uhol) kyvadla. K tomu majme rovnicu opisujúcu dynamiku rotačného pohybu kyvadla. Rovnica je v tvare

$$ml^2 \ddot{\varphi}(t) + \beta \dot{\varphi}(t) + mgl \sin \varphi(t) = u(t) \tag{86}$$

Pre úplnosť: hmotný bod s hmotnosťou m [kg] pripevnený na ramene so zanedbateľnou hmotnosťou a dĺžkou l [m] kmitá, o označuje os otáčania kolmú na rovinu, v ktorej kyvadlo kmitá. Kmity sú tlmené viskóznym trením s koeficientom β [kg m^2 s^{-1}]. Uhol medzi zvislicou a ramenom kyvadla je označený φ [rad] a gravitačné zrýchlenie g [m s^{-2}]. Signál $u(t)$ [kg m^2 s^{-2}] je externý moment sily pôsobiaci na rameno kyvadla, $\dot{\varphi}(t)$ [rad s^{-1}] je uhlová rýchlosť a $\ddot{\varphi}(t)$ [rad s^{-2}] je uhlové zrýchlenie



Obr. 4: Prevodová charakteristika kyvadla



Obr. 5: Prevodová charakteristika a smernica prevodovej charakteristiky

ramena kyvadla. Číselné hodnoty parametrov kyvadla sú nasledovné:

$$m = 1$$
$$l = 1$$
$$g = 9,81$$
$$\beta = 2 \cdot 0,6 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Viac o kyvadle nájsť možno v dokumente *AR99_oStabilite.pdf*.

Cieľom je riadiť polohu kyvadla v okolí rôznych pracovných bodov. Uvažujme však, že pracovné body sú z intervalu polôh kyvadla 0 až 90 stupňov. Konkrétna voľba pracovných bodov ako aj voľba ich okolia sa ponechávajú na čitateľa. Menovateľ aj tak nechodí na cvičenia.

Všimnime si však, že prevodová charakteristika kyvadla na danom intervale polôh kyvadla, je len pramálo aproximovateľná priamkou. Teda zosilnenie kyvadla sa mení vzhľadom na pracovný bod. To znamená, že jeden regulátor zrejme nedokáže zabezpečiť danú kvalitu riadenia v celom uvažovanom intervale výstupnej veličiny riadeného systému. Preto nech je použitý adaptívny regulátor, konkrétne MRAC v zmysle tohto predmetu.

Kvalita riadenia, presnejšie, vlastnosti URO nech sú dané systémom druhého rádu s pólmi $p_1 = -\frac{1}{0.5}$ a $p_2 = -\frac{1}{0.4}$.

Tiež zobrazme, pre ilustráciu, prevodovú charakteristiku riadeného systému vzhľadom na uvažovanú úlohu, avšak len pre užší interval 30 až 70 stupňov - viď obr. 4.

Nakreslime aj dotyčnice k prevodovej charakteristike napr. pre pracovné body dané vstupnými hodnotami $u_{PB1} = 5$ a $u_{PB1} = 9$. Viď obr. 5. Je tak zrejmé, že zosilnenie systému je rôzne v týchto dvoch pracovných bodoch. Celkom presne určuje zmenu statického zosilnenia smernica prevodovej charakteristiky taktiež zobrazená na obr. 5.

Mimochodom, je veľmi jednoduché nájsť analytické vyjadrenie prevodovej charakteristiky na základe modelu riadeného systému. V tomto prípade

$$y_{PB} = \arcsin\left(\frac{1}{mgl} u_{PB}\right) \tag{87}$$

kde y_{PB} je výstupná veličina a u_{PB} je vstupná veličina.

Týmto sme chceli len ilustrovať, že zrejme naozaj by bolo potrebné použiť iné parametre regulátora v pracovnom bode $u_{PB1} = 5$ ako v pracovnom bode $u_{PB1} = 9$.

Prezentujte Vašu ochotu navrhnúť MRAC schopné riadiť systém aj pri zmenách pracovného bodu. Veľa šťastia.

Otázky a úlohy

1. Zistite či je prenosová funkcia $G(s)$ striktne pozitívne reálna (SPR).

$$G(s) = \frac{2\,s + 1}{(3\,s + 1)(s + 1)}$$

2. Pre aké hodnoty a, b, c je prenosová funkcia $G(s) = \dfrac{as + 1}{(bs + 1)\,(cs + 1)}$ striktne pozitívne reálna.

3. Schematicky znázornite MRAC vstupno-výstupný pri $n^\star = 1$

4. Schematicky znázornite MRAC vstupno-výstupný pri $n^\star = 2$

5. Čo je cieľom riadenia pri návrhu adaptívneho riadiaceho systému s referenčným modelom so zákonom adaptácie navrhnutým pomocou Lyapunovovej teórie stability?

6. Je daný model systému

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}$$

kde $a_0, a_1, b_0 > 0$ sú neznáme parametre systému, $u(t)$ je vstup, $y(t)$ je výstup a $x_1(t)$, $x_2(t)$ sú stavové veličiny systému. Tiež je daný referenčný model v tvare

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{1m}(t)\\ \dot{x}_{2m}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_{0m} & -a_{1m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1m}(t)\\ x_{2m}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ b_{0m}\end{bmatrix} r(t)$$
$$y_m(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1m}(t)\\ x_{2m}(t)\end{bmatrix}$$

kde $a_{0m}, a_{1m}, b_{0m} > 0$ sú známe parametre referenčného modelu, $r(t)$ je referenčný signál, $y_m(t)$ je výstup a $x_{1m}(t)$, $x_{2m}(t)$ sú stavové veličiny referenčného modelu.

(a) Napíšte model systému v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y(s)}{u(s)} = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}$$

kde $Z_p(s)$ je monický, hurwitzov polynóm stupňa m, $R_p(s)$ je monický polynóm stupňa n a k_p je vysokofrekvenčné zosilnenie sústavy. Napíšte referenčný model v tvare prenosovej funkcie

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}$$

kde k_m je vysokofrekvenčné zosilnenie referenčného modelu, polynóm $Z_m(s)$ je monický Hurwitzov polynóm stupňa m_m, $R_m(s)$ monický Hurwitzov polynóm stupňa n_m.

(b) Ideálnym cieľom riadenia je $y = y_m$. Navrhnite ideálny zákon riadenia v tvare

$$u = \Theta_1^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + \Theta_2^{\star\mathsf{T}} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \Theta_3^\star y + \Theta_4^\star r$$

kde $\alpha(s)$ je vektor obsahujúci mocniny s, $\alpha(s) = \left[s^{n-2}, \ldots, s, 1\right]^\mathsf{T}$ ak $n \geq 2$, inak $\alpha(s) = 0$. Vektory $\Theta_1^\star, \Theta_2^\star \in \mathbb{R}^{n-1}$ a skaláry $\Theta_3^\star, \Theta_4^\star \in \mathbb{R}^1$ sú konštantné parametre zákona riadenia, ktorých hodnoty hľadáme. $\Lambda(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm stupňa $n-1$ obsahujúci $Z_m(s)$ ako faktor

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) Z_m(s)$$

a teda aj $\Lambda_0(s)$ je ľubovolný monický Hurwitzov polynóm zodpovedajúceho stupňa.

(c) Cieľom riadenia je $y \to y_m$ a stabilita celého riadiaceho systému. Navrhnite adaptívny riadiaci systém, pričom uvažujte model riadeného systému v tvare prenosovej funkcie a tiež referenčný model v tvare prenosovej funkcie z predchádzajúceho bodu 6a.

Literatúra

[1] P. Ioannou and B. Fidan. *Adaptive Control Tutorial.* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA., 2006.

[2] R. Monopoli. Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(5):474 – 484, oct 1974.

[3] J. Murgaš and I. Hejda. *Adaptívne riadenie technologických procesov.* Slovenská technická univerzita v Bratislave, 1993.

[4] K. M. Passino and S. Yurkovich. *Fuzzy Control.* Addison Wesley Longman, Inc., 1998.