

O samonastavujúcom sa regulátore, časť druhá

Obsah

1	Metóda rozmiestňovania pólov	1
1.1	Rovnica URO	1
1.2	Polynóm T	3
1.2.1	Alternatívny spôsob určenia polynómu T	4
1.3	Súhrn pre tento prípad	4
2	Rýchlostný algoritmus metódy rozmiestňovania pólov	5
3	Cvičenie tretie	6
	Otázky a úlohy	6

Zákon riadenia (štruktúra riadenia) samonastavujúceho sa regulátora v uvažovanom konkrétnom prípade je v tvare

$$R(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})r(k) - S(z^{-1})y(k) \quad (1a)$$

$$u(k) = \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}r(k) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}y(k) \quad (1b)$$

kde R , S a T sú polynómy v tvare

$$R(z^{-1}) = 1 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2} + \dots + r_{n_r}z^{-n_r} \quad (2a)$$

$$S(z^{-1}) = s_0 + s_1z^{-1} + s_2z^{-2} + \dots + s_{n_s}z^{-n_s} \quad (2b)$$

$$T(z^{-1}) = t_0 + t_1z^{-1} + t_2z^{-2} + \dots + t_{n_t}z^{-n_t} \quad (2c)$$

Ako už bolo uvedené, koeficienty polynómov sú parametrami regulátora. Počet parametrov regulátora závisí od stupňa jednotlivých polynómov. Pre uvažovaný konkrétny príklad sú stupne polynómov nasledovné: $n_r = 1$, $n_s = 1$ a $n_t = 0$. Potom počet parametrov regulátora je $n_r + n_s + 1 + n_t + 1$. Teda $1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4$. Zákon riadenia je možné zapísať aj v tvare diferenčnej rovnice:

$$u(k) = -r_1u(k-1) - s_0y(k) - s_1y(k-1) + t_0r(k) \quad (3)$$

1 Metóda rozmiestňovania pólov

Uvažujme zákon riadenia v tvare (1), ktorého parametre budeme počítať pomocou metódy rozmiestňovania pólov. Najprv odvodíme rovnicu uzavretého obvodu (URO).

1.1 Rovnica URO

Model riadeného systému je

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (4)$$

Dosadením (1) do (4) máme

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1}) \left(\frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}r(k) - \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}y(k) \right) \quad (5)$$

Úpravou

$$Ay(k) = \frac{BT}{R}r(k) - \frac{BS}{R}y(k) \quad (6a)$$

$$RAy(k) = BTr(k) - BSy(k) \quad (6b)$$

$$(RA + BS)y(k) = BTr(k) \quad (6c)$$

$$y(k) = \frac{BT}{(AR + BS)}r(k) \quad (6d)$$

$$\frac{y(k)}{r(k)} = \frac{BT}{(AR + BS)} \quad (6e)$$

Charakteristický polynóm uzavretého regulačného obvodu je:

$$A(z^{-1})R(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1}) \quad (7)$$

Nech želaný polynóm je

$$P(z^{-1}) = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_{n_p}z^{-n_p} \quad (8)$$

potom diofantická rovnica, z ktorej sa vypočítajú koeficienty polynómov R a S je

$$A(z^{-1})R(z^{-1}) + B(z^{-1})S(z^{-1}) = P(z^{-1}) \quad (9)$$

V tomto prípade máme

$$A = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} \quad (10a)$$

$$B = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} \quad (10b)$$

$$R = 1 + r_1z^{-1} \quad (10c)$$

$$S = s_0 + s_1z^{-1} \quad (10d)$$

a nech želaný polynóm pre tento prípad je

$$P = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} \quad (11)$$

Diofantická rovnica pre tento prípad

$$\begin{aligned} & (1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})(1 + r_1z^{-1}) + (b_1z^{-1} + b_2z^{-2})(s_0 + s_1z^{-1}) \\ & = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} \end{aligned} \quad (12)$$

Roznásobením

$$\begin{aligned} & 1 + r_1z^{-1} + a_1z^{-1} + a_1r_1z^{-2} + a_2z^{-2} + a_2r_1z^{-3} \\ & + b_1s_0z^{-1} + b_1s_1z^{-2} + b_2s_0z^{-2} + b_2s_1z^{-3} \\ & = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} \end{aligned} \quad (13)$$

Na ľavej strane ponecháme členy, v ktorých sa nachádzajú neznáme koeficienty polynómov zo zákona adaptácie a ostatné členy presunieme na pravú stranu

$$\begin{aligned} & r_1z^{-1} + a_1r_1z^{-2} + a_2r_1z^{-3} + b_1s_0z^{-1} + b_1s_1z^{-2} + b_2s_0z^{-2} + b_2s_1z^{-3} \\ & = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} - 1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2} \end{aligned} \quad (14)$$

Po úprave

$$\begin{aligned} & (r_1 + b_1s_0)z^{-1} + (a_1r_1 + b_1s_1 + b_2s_0)z^{-2} + (a_2r_1 + b_2s_1)z^{-3} \\ & = (p_1 - a_1)z^{-1} + (p_2 - a_2)z^{-2} \end{aligned} \quad (15)$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách získame rovnice

$$r_1 + b_1s_0 = p_1 - a_1 \quad (16a)$$

$$a_1r_1 + b_2s_0 + b_1s_1 = p_2 - a_2 \quad (16b)$$

$$a_2r_1 + b_2s_1 = 0 \quad (16c)$$

V maticovom zápise:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Maticový zápis vyplývajúci z diofantického rovnice v prípade, keď stupne polynómov R , S a P sú všeobecné, je v tvare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_a} & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & b_{n_b} & \vdots & \vdots & \cdots & b_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \cdots & a_1 & 0 & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n_a} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n_r} \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Takáto sústava rovníc bude mať riešenie ak

$$n_r = n_b - 1 \quad (19a)$$

$$n_s = n_a - 1 \quad (19b)$$

1.2 Polynóm T

Zatiaľ sme vypočítali koeficienty polynómov R a S . Otázkou ostáva, ako určiť polynóm T . Je potrebné určiť jeho stupeň a vypočítať koeficienty. V úvode sme „zvolili“, že stupeň polynómu T je $n_t = 0$. Teda jediným koeficientom bude t_0 . Ukážme teraz, že jednou z možností, ako určiť polynóm T , je žiadať nulovú regulačnú odchýlku v ustálenom stave. Dostaneme tak polynóm T práve nultého stupňa a aj výpočet koeficientu t_0 .

Keďže charakteristická rovnica URO je rovnaká ako želaný polynóm P , je možné písať rovnicu uzavretého obvodu v tvare

$$y(k) = \frac{BT}{P} r(k) \quad (20)$$

Aby platilo

$$y(\infty) = r(\infty) \quad (21)$$

musí byť

$$BT = P \quad (22a)$$

$$T = \frac{P}{B} \quad (22b)$$

A keďže „donekonečna“ je v diskkrétnej doméne „dojednotky“, teda $z = 1$, potom

$$T = \frac{P(1)}{B(1)} \quad (23)$$

čo v tomto prípade znamená

$$T(z^{-1}) = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} = t_0 \quad (24)$$

1.2.1 Alternatívny spôsob určenia polynómu T

Alternatíva 1

Ďalší spôsob ako určiť koeficienty polynómu T je nasledovný. Nájdeme obraz referenčného signálu tak, že jeho časovú formu pretransformujeme pomocou Z-transformácie. Totiž v mnohých prípadoch je možné dopredu určiť časový priebeh referenčného signálu a navyše sa referenčný signál skladá zo skokov, rámp a podobných, pomocou Z-transformácie, ľahko transformovateľných signálov. Obraz referenčného signálu je

$$\{r(t)\}_q = \frac{F(q^{-1})}{G(q^{-1})} \quad (25)$$

Tento obraz použijeme vo vzťahu pre regulačnú odchýlku:

$$e = r - y = r - \frac{BT}{P}r = \frac{F}{G} - \frac{BT}{P} \frac{F}{G} = \frac{F(P - BT)}{GP} = \frac{FN}{P} \quad (26)$$

kde sme označili

$$\frac{P - BT}{G} = N \quad (27)$$

Z tohto označenia môžeme písať diofantickú rovnicu, ktorá doplní (9), a vznikne tak sústava.

$$GN + BT = P \quad (28)$$

Z tejto rovnice sa dá určiť aj polynóm vyššieho ako nultého stupňa.

Alternatíva 2

Ďalší spôsob ako určiť koeficienty polynómu T je takýto: ak bude polynóm T obrátenou hodnotou polynómu B , teda $T = 1/B$, zaistí sa tak nie len nulová regulačná odchýlka v ustálenom stave, ale aj to, že polynóm B nebude mať žiadny vplyv na dynamiku URO. Dynamika URO bude daná len želaným charakteristickým polynómom P , takto:

$$y(t) = \frac{1}{P}r(t) \quad (29)$$

Zákon riadenia potom môžeme uvažovať v tvare

$$Ru(t) = \frac{1}{B}r(t) - Sy(t) \Rightarrow r = BRu + BSy \quad (30)$$

Ale ak $B = q^{-D}\tilde{B}$, tak aby sme mohli napísať predchádzajúcu rovnicu musíme dať q^{-D} na druhú stranu k r . Teda:

$$rq^D = \tilde{B}Ru + \tilde{B}Sy \quad (31)$$

Ak potom vyjadríme akčný zásah, je zrejmé, že bude závisieť od budúcich hodnôt referenčného signálu $u(t) = r(t + D) - \dots$. Toto však nemusí byť prekážkou, pretože v mnohých prípadoch je referenčný signál dopredu známy.

1.3 Súhrn pre tento prípad

Zhrňme výpočty potrebné pre určenie parametrov regulátora pre tento prípad.

Hodnoty parametrov modelu a_1 , a_2 , b_1 a b_2 sú po identifikácii (v danej perióde vzorkovania) známe a prirodzene sú známe aj hodnoty koeficientov želaného polynómu P . Hodnoty parametrov regulátora získame riešením

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

a

$$t_0 = \frac{1 + p_1 + p_2}{b_1 + b_2} \quad (33)$$

2 Rýchlostný algoritmus metódy rozmiestňovania pólov

Keďže ide o rýchlostný algoritmus, je potrebné vyjadriť prírastok akčnej veličiny:

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1) = (1 - q^{-1})u(t) \quad (34)$$

$$u(t) = \frac{\Delta u(t)}{(1 - q^{-1})} \quad (35)$$

Riadený systém a jeho ARX model (s nulovým šumom):

$$Ay(t) = Bu(t) \quad (36)$$

do ktorého dosadíme $u(t)$ a upravíme...

$$Ay(t) = B \frac{\Delta u(t)}{(1 - q^{-1})} \quad (37a)$$

$$(1 - q^{-1})Ay(t) = B\Delta u(t) \quad (37b)$$

Zákon riadenia uvažujeme v tvare:

$$\Delta u(t) = \frac{S}{R}(r(t) - y(t)) \quad (38)$$

Rovnica URO potom bude mať tvar

$$(1 - q^{-1})Ay(t) = B\Delta u(t) \quad (39a)$$

$$(1 - q^{-1})Ay(t) = B \frac{S}{R}(r(t) - y(t)) \quad (39b)$$

$$(1 - q^{-1})ARy(t) = BS(r(t) - y(t)) \quad (39c)$$

$$(1 - q^{-1})ARy(t) = BSr(t) - BSy(t) \quad (39d)$$

$$((1 - q^{-1})AR + BS)y(t) = BSr(t) \quad (39e)$$

$$y(t) = \frac{BS}{(1 - q^{-1})AR + BS}r(t) \quad (39f)$$

Takže charakteristický polynóm je

$$P = (1 - q^{-1})AR + BS \quad (40)$$

Ale veď potom

$$BS = P - (1 - q^{-1})AR \quad (41)$$

a tak rovnica URO:

$$y(t) = \frac{P - (1 - q^{-1})AR}{P}r(t) \quad (42a)$$

$$y(t) = \left(\frac{P}{P} - \frac{(1 - q^{-1})AR}{P} \right) r(t) \quad (42b)$$

$$y(t) = r(t) - \frac{(1 - q^{-1})AR}{P}r(t) \quad (42c)$$

Ak sa teraz opýtame aká bude regulačná odchýlka v ustálenom stave t.j. $y(\infty)$, $r(\infty)$ a čo je najdôležitejšie $q = 1$ potom:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= r(\infty) - \frac{(1 - 1)AR}{P}r(\infty) \\ y(\infty) &= r(\infty) \end{aligned} \quad (43)$$

Teda regulačná odchýlka v ustálenom stave bude nulová (pretože sa zhodujú hodnoty referenčného signálu a výstupnej veličiny).

3 Cvičenie tretie

1. Zrealizujte (v simulačnom prostredí) samonastavujúci sa regulátor tak ako to predpokladá uvažovaný konkrétny príklad.

Nech želaným charakteristickým polynómom (pre uvažovaný konkrétny príklad) je $P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$ pričom $p_1 = -1,6$ a $p_2 = 0,64$, teda dvojnásobný koreň $z_{1,2} = 0,8$.

Alternatívne, nech v želanom charakteristickom je $p_1 = -0,8$ a $p_2 = 0,16$, teda dvojnásobný koreň $z_{1,2} = 0,4$.

Pozn: pre uvažovaný príklad sa odporúča perióda vzorkovania $T_{vz} = 0,1$ [s].

Otázky a úlohy

1. Modelom riadeného systému je ARX model. Zákon riadenia má tvar $R(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})r(k) - S(z^{-1})y(k)$. Nájdite charakteristický polynóm URO.
2. Modelom riadeného systému je ARX model. Zákon riadenia má tvar $u(k) = \Delta u(k)/(1 - z^{-1})$, kde

$$\Delta u(k) = \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}(r(k) - y(k))$$

Nájdite charakteristický polynóm URO.

3. Stručne vysvetlite výpočet parametrov regulátora metódou pole-placement.
4. Vysvetlite podstatu metód návrhu polynómu $T(z^{-1})$ pri STR.