VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES FINIES

1 - Loi d'un dé truqué

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

2

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X=0) = 0,1 \quad P(X=1) = 0,3 \quad P(X=2) = 0,4 \quad P(X=3) = 0,2.$$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Z sont indépendantes.
2. On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

3 - Recrutement

Une entreprise souhaite recrute un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. En dérivant la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
3. En déduire l'espérance de X.
4. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats?

4

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes?

VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES FINIES

5 - QCM

Un examen consiste en un QCM de 15 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. L'enseignant estime que les étudiants ayant préparé l'examen sont 70% et répondent à une question correctement avec probabilité 0,8. Les autres étudiants choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant, choisi au hasard, réussisse l'examen?
2. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen?

6 - Estimation...

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

2. Application : On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 1/100?

7 Fonction génératrice

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, on appelle fonction génératrice la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

où $p_k = P(X = k)$.

1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p; une loi binomiale de paramètres n et p.

2. Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

4. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. Quelle est la loi de $Z = X + Y$?