

TD Statistique inférentielle¹

Interro 3

Un enseignant de statistique inférentielle propose pour la promo de GIS2A3 une évaluation en 8 interros² chacune contient 3 exercices : 1 facile (sur 1,5 pt), un moyen (sur 1 pt) et un bonus (sur 0,5 pt).

Pour $1 < i < 15, 1 < j < 8$, on note

- $X_{i,j}$ la note de l'élève i dans l'EX1 de l'interro j .
- $Y_{i,j}$ la note de l'élève i dans l'EX2 de l'interro j .
- $Z_{i,j}$ la note de l'élève i dans l'EX3 de l'interro j .

N'ayant pas trop d'information sur les niveaux des étudiants. L'enseignant propose le modèles suivant.

- Toutes les variables présentées en haut sont indépendantes.
- $X_{i,j}$ vaut 1,5 avec probabilité $1 - d$ et 0 avec probabilité d (pour $1 < i < 15, 1 < j < 8$).
- $Y_{i,j}$ vaut 1 avec probabilité $1 - 3d$ et 0 avec probabilité $3d$ (pour $1 < i < 15, 1 < j < 8$).
- $Z_{i,j}$ vaut 0,5 avec probabilité $1 - 5d$ et 0 avec probabilité $5d$ (pour $1 < i < 15, 1 < j < 8$).

Ici $d \in [0; 0,2]$ représente la difficulté des exercices.

On note $I_{i,j} = X_{i,j} + Y_{i,j} + Z_{i,j}$ la note de l'étudiant i dans l'interro j et $N_i = \sum_{j=1}^8 I_{i,j}$ la note finale de l'étudiant i .

Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice 1 : (exercice élémentaire 1.5 pt)

Dans cet exercice, on approche la loi de N_i par $\mathcal{N}(\mathbf{E}(N_1), \mathbf{Var}(N_1))$.

- Montrez que $\mathbf{E}(N_1) = 24 - 56d$ et $\mathbf{Var}(N_1) = 52d - 140d^2$.
- En utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, calculer $p_1 = p_1(d)$ la probabilité que N_1 dépasse 20.
- En utilisant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, calculer $p_2 = p_2(d)$ la probabilité que la meilleure note de la classe dépasse 20. Application numérique : donnez une valeur approchée de $p_2(0,1)$.

Exercice 2 : (1 pt)

Calculez la fonction de masse ("densité" discrète) de $I_{1,1}$. Explicitez la lorsque $d = 0,1$, et calculez la médiane, les quartiles, ainsi que le 3^{ème} et le 97^{ème} centile de $I_{1,1}$ (en utilisant la définition statistique des quantiles).

Exercice 3 : (bonus 0.5 pt)

Le modèle de l'enseignant est trop simpliste (par exemple il ne tient pas compte de la différence de niveau entre les étudiants). Critiquez le modèle de cet enseignant et proposez lui des améliorations (on demande juste la partie modélisation pas les calculs³).

1. Mohamed-slim.kammoun@univ-lille.fr

2. Toute ressemblance avec la réalité est purement fortuite

3. On suppose que l'enseignant arrivera à faire les calculs ou, à la limite, il arrivera à simuler votre modèle sans problème.