Chapitre 5 : Calculs matriciels-Systèmes linéaires-Déterminants

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le *corps* des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le *corps* des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Matrices

1.1. Définitions et propriétés

Définition 1. Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$, $I=[\![1,n]\!]$ et $J=[\![1,p]\!]$.

1. On appelle matrice (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute application

$$A:\ I\times J\to\mathbb{K}$$
$$(i,j)\mapsto A(i,j)\overset{\text{noté}}{=}a_{ij}$$

que l'on note sous forme d'un tableau à double entrée de n lignes et p colonnes: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}$ ou $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$.

2. Les nombres a_{ij} sont appelés les coeffients de la matrice A.
3. Le coefficient a_{ij} se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de j-ème colonne.
4. L'ensemble des matrices (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Remarque 1.

1. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note $L_i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{ip})$ la i-ème ligne de la matrice A.
2. Pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, on note $C_j=\begin{pmatrix} a_{j1}\\ a_{j2}\\ \vdots\\ a_{jn}\end{pmatrix}$ la j-ème colonne de la matrice A.
3. On note 0_{np} la matrice (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont tous les coefficients sont nuls.
4. On utilise d'habitude i pour indice de ligne et j pour indice de colonne.

Exemple 1.

1. Ecrire la matrice $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij}=(-1)^{i+j}2^i j$
2. Ecrire les matrices $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{ij})\in\in\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ telles que $a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{si } i=j\\ 2j & \text{si } i<j\\ i+j & \text{si } i>j\end{cases}$ et $b_{ij}=3(i-1)+j$

3. Ecrire les matrices $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{3,3}\left(\mathbb{R}\right)$ et $B=\left(b_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{2,4}\left(\mathbb{R}\right)$ telle que $a_{ij}=i^2-j^2+1$ et
$b_{ij}=\begin{cases}3i-j+2\\ i+2j-1\end{cases}$

Définition 2. Matrice carrée
Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$. On dit qu'une matrice (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un matrice carrée lorsque $n=p$. On dit alors que A est une matrice carrée d'ordre n
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 2.

1. La famille $(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$ est appelée la diagonale de la matrice A notée $\operatorname{diag}(A)=(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$.
2. On note 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 3. Matrices particulières
Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$ et A une matrice (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. On dit que:
   a. A est une matrice ligne si $n=1$
   b. A est une matrice colonne si $p=1$
2. On suppose que $n=p$ (ie A est une matrice carrée d'ordre n). On dit que:
   a. A est une matrice triangulaire supérieure si: $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \left(i>j\Rightarrow a_{ij}=0\right)$
   b. A est une matrice triangulaire inférieure si: $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \left(i<j\Rightarrow a_{ij}=0\right)$
   c. A est une matrice diagonale si: $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \left(i\neq j\Rightarrow a_{ij}=0\right)$
   d. A est la matrice unité d'ordre n, note I_n, si A est une matrice diagonale et $\forall i\in[\![1,n]\!],\ a_{ii}=1$.
   e. A est la matrice scalaire d'ordre n si A est de laforme $A=\lambda I_n$ où $\lambda\in\mathbb{K}$.

Remarque 3.

1. Si on note : $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ alors $I_n=\left(\delta_{ij}\right)$
2. $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, etc…

1.2. Opérations sur les matrices

Définition 4. Combinaison linéaire (*somme et multiplication par un scalaire*)
Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$, $A=\left(a_{ij}\right)$ et $B=\left(b_{ij}\right)$ deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$.
On définit la combinaison linéaire des matrices A et B par: $\lambda A+\mu B=\left(\lambda a_{ij}+\mu b_{ij}\right)$

Exemple 2. On pose $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2&0\\7&-4\end{pmatrix}$

1. Calculer $A+B$, $2A-B$ et $3(A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$
2. Résoudre, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A-3X=2B$.

Définition 5. Produit de 2 matrices

Soient $(n,q)\in\mathbb{N}^{*2}$, $(m,p)\in\mathbb{N}^{*2}$ $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$.

1. Si $q=m$ alors on définit la matrice C, produit de la matrice A par la matrice B par $C=AB=(c_{ij})\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle que: $\forall(i,j)[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $c_{ij}=\sum_{k=1}^{q}a_{ik}b_{kj}$.
2. Si $q\neq m$ alors le produit de A par B **N'EST PAS DEFINI**

Remarque 4.

1. **Le produit AB n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal nombre de lignes de B**
2. Une matrice (n,q) $\times$ une matrice (q,p) = une matrice (n,p)
3. Posons $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq}\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & \cdots & a_{qp}\end{pmatrix}$.

   Alors $AB=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & \cdots & b_{qp}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{q}a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{q}a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{q}a_{nk}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{q}a_{nk}b_{kp}\end{pmatrix}$
4. Il est possible que le produit de deux matrices non nulles soit nul.

Exemple 3. Calculons les produits AB et BA lorsque c'est possible.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
3. $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Exemple 4. On pose $B=\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5\end{pmatrix}$. Résoudre, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2=B$.

TD 1. On donne les matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&2&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&-1\\0&1\\1&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1&-1&2\end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}.\ J=\begin{pmatrix}1&-2&-7&-3\\-1&5&16&6\\2&3&7&1\end{pmatrix};\ K=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\\0&0&1\\1&3&2\end{pmatrix}$$

Calculer, lorsqu'ils existent, les produits : A^2, AB, BA, CA, CB, CD, C^2, FE, JK, KJ et CJ

TD 2. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB=0_3$
2. Déterminer les matrices $C\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC=CA=0_3$

Définition 6. Tansposée d'une matrice

Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$ et $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

1. On appelle transpose de la matrice A, la matrice notée ${}^tA\in\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, définie par : ${}^tA=(a_{ji})_{\substack{1\le j\le p\\1\le i\le n}}$.
2. On suppose $n=p$:
   a. On dit que la matrice carrée A est symétrique si ${}^tA=A$
   b. On dit que la matrice carrée A est antisymétrique si ${}^tA=-A$

Exemple 5.

- Si $A=\begin{pmatrix}2&0&-1&1\\1&-1&0&1\\0&0&-2&3\end{pmatrix}$ alors ${}^tA=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\-1&0&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$
- Si $A=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ alors ${}^tA=\begin{pmatrix}4&-2&1\end{pmatrix}$

Propriété 1. Règles de calculs

Soient A, B et C trois matrices telles que les opérations ci-dessous soient possibles.
Alors :

1. $(AB)C=A(BC)$
2. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $(\alpha A+\beta B)C=\alpha AC+\beta BC$ et $A(\alpha B+\beta C)=\alpha AB+\beta AC$

3. Si $A \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})$ alors $I_n A = A I_p = A$
4. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, ${}^t(\alpha A+\beta B)=\alpha\,{}^tA+\beta\,{}^tB$
5. ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

Propriété 2. Soient $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB=BA$ (on dit que A et B commutent)

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{n-k}B^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$ (*Formule du binôme de Newton*)

Démonstration : Exercice

Propriété 3.

1 Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$.

Alors $D^p=\begin{pmatrix}(\lambda_1)^p & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (\lambda_2)^p & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_n)^p\end{pmatrix}$.

Démonstration : Exercice

Remarque 5.

1. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par convention $A^0=I_n$
2. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(I_n)^k=I_n$

TD 3. Soient $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

1. Caluculer J^2. En déduire J^k pour tout $k\geq 2$.
2. En remarquant que $A=I_3+J$, calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$ en fonction de n.

TD 4.

1. Calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, dans les cas suivants:

$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

2. Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

a. Calculer A^2 et A^3

b. On admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$, A^n peut sécrire $A^n=\begin{pmatrix}1&a_n&b_n\\0&1&a_n\\0&0&1\end{pmatrix}$. Déterminer une relation de récurrence entre les suites a_{n+1}, a_n, b_n et b_{n+1}, puis en déduire une expression de A^n en fonction de n.

c. On pose $B=A-I_3$. Calculer B^k pour $k\in\mathbb{N}^*$. En déduire une autre méthode de calcul de A^n.

3. Soit $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. On pose $B=A-I_3$.

Calculer B^k pour $k\in\mathbb{N}^*$. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, A^n.

4. Soit $A=\begin{pmatrix}5&-4\\4&-3\end{pmatrix}$ On pose $J=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ et $B=A-I$

Calculer J^k pour $k\in\mathbb{N}^*$. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, A^n.

5. Soit $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$ On pose $B=A-2I$

Calculer B^k pour $k\in\mathbb{N}^*$. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, A^n.

6. Soient $C=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}-1&0&2\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}-3&0&6\\2&0&-4\\-1&0&2\end{pmatrix}$. Calculer LC et CL, puis en déduire A^k pour $k\in\mathbb{N}^*$.

TD 5. On considère les matrices $I=I_3$ et $J=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2, J^3 puis J^n, pour tout $n\geq 3$.
2. On pose $T=2I+J$. Donner l'expression de T^n, en fonction de n, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Soient $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$ et $(c_n)_{n\geq1}$ les suites définies , pour tout $n\geq 2$, par:

$$\begin{cases}a_n = 2a_{n-1}\\ b_n = 2a_{n-1}+2b_{n-1}\\ c_n = b_{n-1}+2c_{n-1}\end{cases}$$

En utlisant les résultats qui precedents, determiner les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_1, b_1, c_1 et n.

TD 6. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 1 \text{ et } u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$ et on définit les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $Q = P^{-1}$.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n, puis A^n en fonction de n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   a. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$
   b. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

TD 7. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n peut s'écrire sous forme $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ sont suites de $\mathbb{N}$ vérifiant: $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer, $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n (*on pourra écire* A *sous forme* $A = B + I_2$) en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente . Précisez le cas échéant sa limite.

Définition 7. Trace d'une matrice carrée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On appelle trace de A le nombre noté $\mathrm{Tr}(A)$, défini par : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exemple 6. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ -6 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 1 - 5 + 2 - 4 = -6$

Propriété 4. Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$	2. $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$
1. $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{Tr}(A) + \beta \mathrm{Tr}(B)$	3. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Démonstration : Exercice

2. Systèmes linéaires

Définition 8. Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$, $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$ et $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^p$

- On appelle système linéaire de n équations à p inconnues x_1, x_2, …, x_p, tout système (S) d'équations de la forme $(S):\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2\\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n\end{cases}$.

  que l'on peut écrire sous la forme matricielle (S) : $AX=B$.
- Le système (S) est dit homogène lorsque $B=0_{n1}$.
- Une solution du système (S) est un p-uplet $(u_1,u_2,\dots,u_p)\in\mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations du système (S).

Propriété 5. Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$, $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathbb{K}^n$.
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système (S) : $AX=B$ d'inconnue $X\in\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions du système homogène $AX=0_{n1}$. Alors:

- Soit $\mathcal{S}=\varnothing$
- Soit $\mathcal{S}\neq\varnothing$. Dans ce cas $\mathcal{S}=\mathcal{S}_H+X_{part}$ où X_{part} est une solution particulière de (S).

Démonstration : Exercice

Exemple 7. Soit le système (S) : $\begin{cases} x+2y+3z=1\\ 4x+5y+6z=4\end{cases}$

- On peut remarquer qu'une solution particulière de S est $X_{part}=(1,0,0)$
- Le système homogène associé est (S_H) : $\begin{cases} x+2y+3z=0 & L_1\\ 4x+5y+6z=0 & L_2\end{cases}$

$$(S_H) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 & L_1\\ \quad\ -3y - 6z = 0 & L_2\leftarrow L_2-4L_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z\\ y=-2z\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_H=\{(z,-2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}=\{z(1,-2,1),\ z\in\mathbb{R}\}$$

$$\overset{\text{noté}}{=} \mathrm{Vect}((1,-2,1)) = \text{ensemble des triplets multiples de } (1,-2,1).$$

- Conclusion : $\mathcal{S}=\mathcal{S}_H+X_{part}=\{(z,-2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}+(1,0,0)=\{(z+1,-2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}$

Définition 9. Systèmes équivalents

On dit que deux systèmes linéaires (S) et (S') sont équivalents s'ils admettent le même ensemble de solutions.

Propriété 6. Soit le système linéaire suivant

$$(S):\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ip}x_p & = & b_i & L_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & + & \cdots & + & a_{jp}x_p & = & b_j & L_j \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n & L_n \end{cases}$$

1. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on obtient un système équivalent au système (S) en permutant les lignes L_i et L_j
2. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et tout $\lambda\in\mathbb{K}$, on obtient un système équivalent au système (S) en remplaçant la ligne L_i par λL_i
3. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on obtient un système équivalent au système (S) en remplaçant la ligne L_i par $L_i+\lambda L_j$

Propriété 7. Algorithme du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires.

L'objectif de l'algorithme de Gauss est transformer un système linéaire (S) en système linéaire ***échelonné*** *(ie chaque équation contient moins d'inconnues que le précédent)* ***équivalent en utilisant les opérations élémentaires ci-dessous***

Opérations élémentaires	***Codages***
Echange des lignes L_i et L_j	$L_i \leftrightarrow L_j$ (permutation)
Multiplication de la ligne L_i par λ $(\lambda\neq 0)$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$ (dilatation)
Addition à la ligne L_i d'un multiple de la ligne L_j $(i\neq j)$	$L_i \leftarrow L_i+\lambda L_j$ (transvection)

Méthode : Il s'agit, par étapes successives, de transformer le système linéaire ci-dessous

$$(S):\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ip}x_p & = & b_i & L_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & + & \cdots & + & a_{jp}x_p & = & b_j & L_j \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n & L_n \end{cases}$$

en un système linéaire échelonné équivalent.

- On place par permutation en L_1 une ligne dont le coefficient de x_1 est non nul.

Ce coefficient est appelé pivot (*il est souhaitable qu'il soit égal à 1*).

- On élimine x_1 dans L_i, $i \in [\![2,n]\!]$, par transvection de L_i et L_1.
- S'il existe parmi L_2, L_3, …, L_n une ligne où le coefficient de x_2 est non nul, on la place en L_2 et on utilise ce coefficient comme nouveau pivot (*il est souhaitable qu'il soit égal à 1*).
- On élimine x_2 dans L_i, $i \in [\![3,n]\!]$, par transvection de L_i et L_2.
- On réitère le procédé jusqu'à obtenir un système échelonné

Exemple 8.

1.

$$\begin{cases} x-2y+z=5 & L_1 \\ 2x+y-3z=-5 & L_2 \\ x+4y+2z=1 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=5 & L_1 \\ 5y-5z=-15 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ 6y+z=-4 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=5 & L_1 \\ 5y-5z=-15 & L_2 \\ 35z=70 & L_3 \leftarrow 5L_3-6L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

Conclusion: l'ensemble des solutions du système est $\mathscr{S}=\{(1,-1,2)\}$

2.

$$\begin{cases} x-2y+z=5 & L_1 \\ 2x+y-3z=-5 & L_2 \\ x+4y-5z=1 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=5 & L_1 \\ 5y-5z=-15 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ 6y-6z=-4 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=5 & L_1 \\ 5y-5z=-15 & L_2 \\ 0=70 & L_3 \leftarrow 5L_3-6L_2 \end{cases}$$

Conclusion: l'ensemble des solutions du système est $\mathscr{S}=\varnothing$

3.

$$\begin{cases} x-2y+z=5 & L_1 \\ 2x+y-3z=-5 & L_2 \\ x+y-2z=-4 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=5 & L_1 \\ 5y-5z=-15 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ 3y-3z=-9 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=5 & L_1 \\ 5y-5z=-15 & L_2 \\ 0=0 & L_3 \leftarrow 5L_3\text{-}3L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z-1 \\ y=z-3 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Conclusion: l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=\{(z-1,z-3,z),\ z\in\mathbb{R}\}=\{(t-1,t-3,t),\ t\in\mathbb{R}\}$

TD 8. Résoudre les systems linéaires suivants:

1. $(S_1):\begin{cases}-x+4y-3z=-6\\2x-3y+5z=3\\3x+y+2z=-1\end{cases}$

   Réponse : $\mathscr{S}=\{(1,-2,-1)\}$

2. $(S_2):\begin{cases}2x+3y+z=-4\\5x+4y+7z=5\\-6x-2y+9z=3\end{cases}$

   Réponse : $\mathscr{S}=\{(2,-3,1)\}$

3. $(S_3):\begin{cases}x+y+3z=1\\-x-2y+2z=3\\2x+3y+z=-5\end{cases}$

   Réponse : $\mathscr{S}=\{\ \}=\varnothing$

4. $(S_4):\begin{cases}-x-2y+2z=3\\2x+3y+z=-5\\2x+2y+6z=-5\end{cases}$

   Réponse : $\mathscr{S}=\{\ \}=\varnothing$

5. $(S_5):\begin{cases}x+2y+3z-2t=6\\2x-y-2z-3t=8\\3x+2y-z+2t=4\\2x-3y+2z+t=-8\end{cases}$

6. $(S_6):\begin{cases}x+y=a\\-x+2y+z=b\\2x+4y+z=c\end{cases}$

7. $(S_7):\begin{cases}2x+y-z=a\\2y+z=b\\5x+2y-3z=c\end{cases}$

8. $(S_8):\begin{cases}x+2y-z-t=-18\\x+y+z+t=0\\x+y-7z+13t=-40\end{cases}$

9. $(S_9):\begin{cases}x+z=0\\2y+3z=0\\-2x+2y+z=0\end{cases}$

Réponse $\mathscr{S}=\left\{\left(x,\frac{3}{2}x,-x\right),x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\left(1,\frac{3}{2},-1\right),x\in\mathbb{R}\right\}$

$\overset{\text{noté}}{=}\ \mathrm{Vect}\left(\left(1,\frac{3}{2},-1\right)\right)$

= c'est l'ensemble des triplets (x,y,z)

qui sont multiples du triplet $\left(1,\frac{3}{2},-1\right)$

10. $(S_8):\begin{cases}2x+y+z=3\\x-y+3z=8\\x+2y+2z=-3\\x+y+2z=a\end{cases}$ où $a\in\mathbb{R}$

TD 9.

1. Étant donnée la matrice $A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$, déterminer l'ensemble des matrices-colonnes $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ telles que:

   a. $AX=X$ b. $AX=-X$ c. $AX=2X$

2. Étant donnée la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$, déterminer l'ensemble des matrices-colonnes $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ telles que:

   a. $AX=3X$ b. $AX=-3X$.

TD 10.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

   On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Déterminer les réels a , b ,c et d pour que :
   - $A(-2,-7)\in\mathcal{C}_f$
   - $B(1,2)\in\mathcal{C}_f$
   - $C(4,-25)\in\mathcal{C}_f$
   - f admet un minimum au point d'abscisse $x=-3$
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.

   On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   Déterminer les réels a , b ,c et d pour que :
   - $A(-1,0)\in\mathcal{C}_f$
   - $B(2,0)\in\mathcal{C}_f$
   - $C(3,0)\in\mathcal{C}_f$
   - $\mathcal{C}_f$ admet un minimum au point C une tangent parallèle à la droite Δ d'équation $y=4x+3$.

3. Matrices inversibles

Définition 10. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$, et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A est dite inversible s'il existe une matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB=BA=I_n$.

Si la matrice B existe, elle est unique. Elle est appellée inverse de A et est notée A^{-1}

Démonstration de l'unicité: Exercice

Exemple 9. Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tels $AB=A+I_n$.

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} et en déduire $AB=BA$

TD 11.

1. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 2\\ 6 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
   a. Calculer $M=A^3-4A^2+5A-2I_3$
   b. Déterminer, en fonction de A^2 , A et I_3, une matrice B telle que $AB=BA=I_3$
   c. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A^2 , A et I_3

2. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

   a. Calculer $M=A^2-4A+3I_3$
   b. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A et I_3

3. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

   a. Calculer A^2.
   b. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de A.

Propriété 8. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$, et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si pour tout $Y\in\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ l'équation $AX=Y$ admet une solution unique.
Dans ce cas on a: $(\forall Y\in\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))\ (AX=Y \iff X=A^{-1}Y)$

Démonstration : Exercice

Exemple 10. Cette propriété nous fournit un algorithme pour savoir si une matrice carrée est inversible et déterminer son inverse dans le cas échéant en suivant la méthode suivante :

1. On prend un Y quelconque dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
2. On résout le système $AX=Y$ (inconnue X)
3. Si le système admet une solution unique X alors on l'exprime sous la forme $X=A^{-1}B$
4. Sinon la matrice n'est pas inversible

Exemple 11.

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et donner sa matrice inverse.

   Soit $Y=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$. Posons $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$

$$AX=Y \iff \begin{cases}2x+y=a\\ 3x+2y=b\end{cases} \iff \begin{cases}x=2a-b\\ y=-3a+2b\end{cases} \iff \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \iff X=A^{-1}B \text{ avec } A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et donner sa matrice inverse.

   Soit $Y=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$. Posons $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$

$$AX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=a & L_1 \\ 2x+y+3z=b & L_2 \\ x+4y+2z=c & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=a & L_1 \\ 5y+z=-2a+b & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ 6y+z=-a+c & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=a & L_1 \\ 5y+z=-2a+b & L_2 \\ -z=7a-6b+5c & L_3 \leftarrow 5L_3-6L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10a-8b+7c \\ y=a-b+c \\ z=-7a+6b-5c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & 6 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow X=A^{-1}B \quad \text{avec } A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. A est-elle inversible ? Si oui, donner sa matrice inverse.

Soit $Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$. Posons $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$AX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=a & L_1 \\ 5x+2y+6z=b & L_2 \\ -2x-y-3z=c & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=a & L_1 \\ -3y-9z=-5a+b & L_2 \leftarrow L_2-5L_1 \\ y+3z=2a+c & L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=a & L_1 \\ -3y-9z=-5a+b & L_2 \\ 0=a+b+3c & L_3 \leftarrow 3L_3+L_2 \end{cases}.$$

La dernière égalité n'est pas toujours vraie. Donc l'équation $AX=Y$, soit admet une infinite de solutions, soit n'admet pas de solution. La matrice A n'est pas inversible.

TD 12. Etudier l'inversibilité des matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **Rep. :** $A^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ **Rep. : non inversible**

$C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **Rep. :** $C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$D=\begin{pmatrix}6&5&1\\4&3&-1\\1&2&6\end{pmatrix}$$

Rep. : non inversible

$$E=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&5\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Rep. : $E^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&2&5\\0&2&5\\0&0&-3\end{pmatrix}$

TD 13. Calculer l'inverse des matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\2&4&1\end{pmatrix}$$

Rep. : $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\3&1&-1\\-8&-2&3\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}2&4&3\\0&1&1\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

Rep. : $B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-10&-1\\-2&8&2\\2&-4&-2\end{pmatrix}$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$$

Rep. : $C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&2&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-2\\3&-3&0\end{pmatrix}$$

Rep. : $D^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&9&3\\6&9&2\\3&3&1\end{pmatrix}$

TD 14.

1. Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&-1&1\\2&-4&5\end{pmatrix}$ es t inversible et determiner A^{-1}
2. Déduisez-en les solutions des systemes:

$$(S_1):\begin{cases}3x+2y-z=5\\x-y+z=1\\2x-4y+5z=-3\end{cases}\quad \text{et}\quad (S_2):\begin{cases}3x+2y-z=-1\\x-y+z=3\\2x-4y+5z=2\end{cases}$$

Propriété 9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

1. Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. Si A est inversible alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est inversible et $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$
4. Si A est inversible alors ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$

Démonstration : Exercice

4. Déterminant d'une matrice carrée

Définition 11. Déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $n = 1$ ou $n = 2$

1. Soit $A = (a_{11}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. Le déterminant de la matrice A par le nombre noté $\det(A)$ et défini par : $\det(A) = a_{11}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Le déterminant de la matrice A par le nombre noté $\det(A)$ et défini par : $\det(A) \overset{\text{noté}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{définition}}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Exemple 12. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - 3\times 1 = 1$

Définition 12. Mineurs d'ue matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$

Soit $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle matrice mineure A_{ij}, la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de la matrice A par suppression de la ligne i et de la colonne j. *Il y a n^2 matrice mineures pour une matrice carrées d'ordre n.*

Définition 13. Déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), n \geq 2$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de la matrice A par le nombre noté $\det(A)$ et défini par :

- Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$, c'est le développement suivant la ligne i
- Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$, c'est le développement suivant la colonne j

Remarque 6. A partir de cette définition on a intérêt à développer un déterminant suivant une ligne ou une colonne contenant beaucoup de 0 pour avoir peu de calculs à faire.

Exemple 13. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ alors:

- $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & -2 & 1\end{vmatrix}=2(-1)^3\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}+3(-1)^4\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}+2(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=0+15+20=35$

Ou

- $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & -2 & 1\end{vmatrix}=-1(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}+2(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}+1(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=16+20-1=35$

Ou

- $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & -2 & 1\end{vmatrix}=4(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}-2(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+1(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=28+8-1=35$

Ou …

Propriété 10. Soient $\lambda\in\mathbb{K}$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

Alors on a :

1. $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$
2. $\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots & \lambda a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\lambda\det(A)$
3. $\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \lambda a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=\lambda\det(A)$

Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes dans les calculs de determinants *L'objectif de ces opérations est de faire apparaître des zéros sur des lignes et/ou colonnes pour réduire les calculs à faire.*	
Opérations sur les lignes	***Codages***
Addition à la ligne L_i d'une combinaison linéaire des autres lignes L_j $(i \neq j)$	$L_i \leftarrow L_i + \sum_{\substack{j=I \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j L_j$
Opérations sur les colonnes	***Codages***
Addition à la ligne C_i d'une combinaison linéaire des autres lignes C_j $(i \neq j)$	$C_i \leftarrow C_i + \sum_{\substack{j=I \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j C_j$

Exemple 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

- $$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -10 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} = 35$$

- $$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ C_1 \quad C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \quad C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & -10 & 5 \end{vmatrix} \\ C_1 \quad C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \quad C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{array} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} = 35$$

Exemple 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & -1 \\ -1 & 2-m & 1 \\ -1 & 1 & 2-m \end{pmatrix}$

- $$\det(A) = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & -1 \\ -1 & 2-m & 1 \\ -1 & 1 & 2-m \end{vmatrix} \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$$
$$= \begin{vmatrix} 3-m & 0 & -3+m \\ -1 & 2-m & 1 \\ -1 & 1 & 2-m \end{vmatrix} = (3-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2-m & 1 \\ -1 & 1 & 2-m \end{vmatrix}$$

$$= (3-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 0 & 1 & 1-m \end{vmatrix} \begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 = (3-m)\begin{vmatrix} 2-m & 0 \\ 1 & 1-m \end{vmatrix} = -m\left((3-m)^2 - 4\right) = (3-m)(2-m)(1-m \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

Exemple 16. Soit $A=\begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{pmatrix}$ où $(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^6$. Calculer $\det(A)$

TD 15. Calculer les determinants suivants et mettre les résultats sous forme factorisée

$$D_1=\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \qquad D_4=\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a+3 \\ a+2 & a+3 & a+4 \end{vmatrix}$$

$$D_5=\begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a-x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a-x \end{vmatrix} \qquad D_6=\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$D_7=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \qquad D_8=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_9=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \qquad D_{10}=\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$D_{11}=\begin{vmatrix} a & 1 & 3a+2 \\ b & 2 & 3b+4 \\ c & 3 & 3c+6 \end{vmatrix} \qquad D_{12}=\begin{vmatrix} 1-m & 1 & 3 \\ 5 & 2-m & 6 \\ -2 & -1 & -3m \end{vmatrix}$$

Propriété 11. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$, et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$

Démonstration : Admise

Exemple 17. Soit le système $(S_m):\begin{cases} mx + 2y + 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m-1 \end{cases}$ où m est un reel.

Déterminons les valeurs de m pour lesquels (S_m) admet une solution unique.

Réponse : $(S_m)\Leftrightarrow A_mX=B_m$ avec $A_m=\begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ m-1 & m & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$ et $B_m=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ m-1 \end{pmatrix}$.

(S_m) admet une solution unique $\Leftrightarrow A_m$ inversible $\Leftrightarrow \det(A_m) \neq 0$

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ m-1 & m & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ m-1 & m & 1 \\ 2m & 2m & m \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ m-1 & m & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} m-6 & -4 & 3 \\ m-3 & m-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} m-6 & -4 \\ m-3 & m-2 \end{vmatrix} = m\left(m^2-4m\right) = m^2(m-4)$$

Conclusion: (S_m) admet une solution unique $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$.

TD 16.

3. Déterminer, suivant les valeurs de a **le nombre de solutions** du système linéaire de $\mathbb{R}^3$ suivant et préciser l'ensemble des solutions lorsqu'il y en a une infinité :

$$(S) : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + (a+3)y + 3z = 2 \\ x + (3-a)y + (a-2)z = 3 \end{cases}$$

4. Déterminer, suivant les valeurs de λ **le nombre de solutions** du système linéaire de $\mathbb{R}^3$ suivant et préciser l'ensemble des solutions lorsqu'il y en a une infinité :

$$(S) : \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = \lambda+2 \\ (1+\lambda)x - y + 2z = 0 \\ 2x - \lambda y + 3z = \lambda+2 \end{cases}$$

5. Déterminer, suivant les valeurs de m **le nombre de solutions** du système linéaire de $\mathbb{R}^3$ suivant et préciser l'ensemble des solutions lorsqu'il y en a une infinité :

$$(S) : \begin{cases} mx + 2y + 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m-1 \end{cases}$$

Propriété 12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. $\det({}^tA) = \det(A)$
3. Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
4. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$

5. Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ alors $\det(A)=\prod_{k=1}^{n} a_{kk}$

6. Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ alors $\det(A)=\prod_{k=1}^{n} a_{kk}$