Chapitre : APPLICATAIONS LINEAIRES

1. Définitions - Propriétés

Dans ce paragraphe E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Définition 1. Une application f de E dans F est une application linéaire si :
1. $\forall(x,y)\in E^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$
2. $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E$, $f(\lambda x)=\lambda f(x)$

Propriété 1. Soit f une application de E dans F. Alors, $f(0_E)=0_F$

Démonstration : A faire

- $1^{\text{ière}}$ méthode : Calculer $f(0_E)=f(0_E+0_E)$ et conclure
- $2^{\text{ième}}$ méthode : Soit $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{1\}$. Calculer $f(\lambda\times 0_E)$ et conclure

Propriété 2. Soit f une application de E dans F.
f est une application linéaire $\Leftrightarrow$ $\forall(\lambda,x,y)\in\mathbb{K}\times E\times E$, $f(x+\lambda y)=f(x)+\lambda f(y)$

Démonstration :

- On a évidemment l'implication $\Rightarrow$
- Supposons que $\forall(\lambda,x,y)\in\mathbb{K}\times E\times E$, $f(x+\lambda y)=f(x)+\lambda f(y)$
  - Alors pour $\lambda=1$, on a : $\forall(x,y)\in E^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$
  - Et pour $x=0_E$, on a : $\forall(\lambda,y)\in\mathbb{K}\times E$, $f(\lambda y)=\lambda f(y)$

Exemple 1. Dites, dans chacun des cas suivants, que les applications de E dans F sont linéaires ou non :

1. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}$ et $f(x,y)=xy$

Réponse:

Soient par exemple: $u=(1,1)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda=-\sqrt{2}$. Alors $f(\lambda u)=f\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=2$ et $\lambda f(u)=-\sqrt{2}$. D'où $f(\lambda u)\neq\lambda f(u)$: f n'est donc pas une application linéaire.

2. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}^3$ et $f(x,y)=\left(x^2,-2x+y,x\right)$

Réponse:

Soient par exemple: $u=(1,0)\in\mathbb{R}^2$ et $v=(0,1)\in\mathbb{R}^2$. Alors $f(u+v)=f(1,1)=(4,-2,1)$ et $f(u)+f(v)=(1,-2,1)+(0,1,0)=(1,-1,1)$. D'où $f(u+v)\neq f(u)+f(v)$: f n'est donc pas une application linéaire.

3. $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}$ et $f(x,y)=x+y$

Réponse: Soient: $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Alors $f(u+\lambda v)=f(x+\lambda a,y+\lambda b)=x+\lambda a+y+\lambda b=(x+y)+\lambda(a+b)=f(u)+\lambda f(v)$.

D'où $f(u+\lambda v)=f(u)+\lambda f(v)$: f est donc une application linéaire.

4. $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $f(M)=AM-MA$ où A est un élément fixé de E.

Réponse: Soient: $(M,N)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Alors $f(M+\lambda N)=A(M+\lambda N)-(M+\lambda N)A=(AM-MA)+\lambda(AN-NA)=f(M)+\lambda f(N)$.

D'où $f(M+\lambda N)=f(M)+\lambda f(N)$: f est donc une application linéaire.

5. $E=\mathbb{R}[X]$, $F=\mathbb{R}[X]$ et $f(P)=(X^2-1)P''+2XP'$

Réponse: Soient: $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Alors $f(P+\lambda Q)=(X^2-1)(P+\lambda Q)''+2X(P+\lambda Q)'=(X^2-1)(P''+\lambda Q'')+2X(P'+\lambda Q')$

$$=(X^2-1)P''+2XP'+\lambda\left((X^2-1)Q''+2XQ'\right)=f(P)+\lambda f(Q).$$

D'où $f(P+\lambda Q)=f(P)+\lambda f(Q)$: f est donc une application linéaire.

TD 1. Montrer que les applications $f\in\mathcal{F}(E,F)$ suivantes sont linéaires

1. Montr $E=\mathbb{R}^3$, $F=\mathbb{R}^2$ et $f(x,y,z)=(x-y+z,2x-z)$
2. $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F=\mathbb{R}$ et si $M=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ alors $f(M)=x+t-2$.
3. $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $F=\mathbb{R}$ et $f(u)=\int_a^b u(t)dt$
4. $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où n est un entier supérieur ou égal à 2, $F=\mathbb{R}$ et si $M=(a_{ij})$ alors $f(M)=Tr(M)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ ($Tr(M)$ est appelé la trace de la matrice M).

Définition 2. Soit f une application linéaire de E dans F.

1. On dit aussi que f un **morphisme** d'espaces vectoriels.
2. Si $E=F$ alors on dit que f est un **endomorphisme** de E.
3. Si $F=\mathbb{K}$ alors on dit que f est une **forme linéaire** sur E.
4. Si f est bijectif alors on dit que f un **isomorphisme** de E.
5. Si $E=F$ et si f est bijectif alors on dit que f un **automorphisme** de E.

Remarque 1. Notations

1. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
2. Si $E=F$ alors $\mathcal{L}(E,E)\overset{\text{noté}}{=}\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E.

Propriété 3. Soit f une application de E dans F. Alors, pour tout $(x_1, x_2 ..., x_n) \in E^n$ et tout $(\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a : $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

Démonstration : Par récurrence

- Pour $n=1$ on a par définition $f(\lambda_1 x_1) = \lambda_1 f(x_1)$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2 ..., x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$
- Montrons que pour $(x_1, x_2 ..., x_n, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ on a $f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$.

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \overset{\text{par définition}}{=} f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) + f(\lambda_{n+1} x_{n+1})$$

$$\overset{\text{hypothèse de récurrence}}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$$

Propriété 4. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ Alors :

1. $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$
2. Si f est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$

Démonstration : **A REFAIRE**

- Soient $(\lambda, x, x') \in \mathbb{K} \times E \times E$.

  On a $g \circ f(x + \lambda x') = g[f(x + \lambda x')] = g[f(x) + \lambda f(x')]$ car $f \in \mathcal{L}(E,F)$
  $= g[f(x)] + \lambda g[f(x')]$ car $g \in \mathcal{L}(F,G)$
  $= g \circ f(x) + \lambda g \circ f(x')$

- Soient $(\lambda, y, y') \in \mathbb{K} \times F \times F$. Il existe alors $(x, x') \in E^2$ tel que $f^{-1} \circ f(x) = ...$ $(y, y') = (f(x), f(x'))$.

  On a $f^{-1}(y) = ...$, $f^{-1}(y') = ...$ $\forall x \in E$, $f^{-1} \circ f(x) = ...$?
  Et $f^{-1}(y + \lambda y') = f^{-1}(f(x) + \lambda f(x')) = f^{-1} \circ f(x + \lambda x') = x + \lambda x'$
  $= f^{-1}(y) + \lambda f^{-1}(y')$

TD 2. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda x$.

Propriété 5. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, E_1 un sous-espace vectoriel de E et F_1 un sous espace vectoriel de F. Alors $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F et $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration : **A REFAIRE**

- . Comme $E_1 \subset E$ alors $f(E_1) \subset F$
  $f(E_1) \neq \varnothing$ car $f(0_E) = ...$ et donc $........ \in f(E_1)$

Soient $(y_1,y_2)\in f(E_1)^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

Il existe alors $(x_1,x_2)\in E_1^{\,2}$ tel que $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$.

D'où $y_1+\lambda y_2=f(x_1)+\lambda f(x_2)=f(x_1+\lambda x_2)$

Comme $x_1+\lambda x_2\in E_1$ alors $y_1+\lambda y_2\in f(E_1)$ et donc $f(E_1)$ est un sous-espace de F.

- Comme $F_1\subset F$ alors $f^{-1}(F_1)\subset E$

  $f^{-1}(F_1)\neq\varnothing$ car $f(0_E)=\ldots\ldots$ et donc $\ldots\ldots\in f^{-1}(F_1)$

  Soient $(x_1,x_2)\in f^{-1}(F_1)^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

  Il existe alors $(y_1,y_2)\in F_1^2$ tel que $x_1=f^{-1}(y_1)$ et $x_2=f^{-1}(y_2)$.

  D'où $x_1+\lambda x_2=f^{-1}(y_1)+\lambda f^{-1}(y_2)=f^{-1}(y_1+\lambda y_2)$

  Comme $y_1+\lambda y_2\in F_1$ alors $x_1+\lambda x_2\in f^{-1}(F_1)$ et donc $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace de E

Propriété 6. Soient $f\in\mathcal{L}(E,F)$, $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une famille de n vecteurs, $n\geq 1$, de E. Alors $f(\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\ldots,e_n))=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),\ldots,f(e_n))$.

Démonstration : Soit $x\in\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\ldots,e_n)$. Il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$.

D'où $f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(e_i)\in\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),\ldots,f(e_n))$.

Remarque 2. Cette propriété est très utile pour déterminer une famille génératrice, puis une base de l'image en dimension finie.

2. Noyau – Image, d'une application linéaire

Définition 3. Noyau

Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de l'application linéaire l'ensemble, noté $\ker f$, défini par :

$$\begin{aligned}\ker f&=f^{-1}(\{0_F\})\\&=\{x\in E/f(x)=0_F\}\end{aligned}$$

Corollaire 1. Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 2. Déterminer une base du noyau des applications linéaires suivantes:

1. $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$ tel que $u(x,y,z,t)=(x+y+2t,2x-y+4z,3x+2y+z+6t)$

Réponse: $\ker u=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/u(x,y,z,t)=0_{\mathbb{R}^3}\}$

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$

$(x,y,z,t)\in\ker u\Leftrightarrow u(x,y,z,t)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow(x+y+2t,2x-y+4z,3x+2y+z+6t)=(0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2t=0 \\ 2x-y+4z=0 \\ 3x+2y+z+6t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2t = 0 \\ -3y + 4z - 4t = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2t = 0 \\ -3y + 4z - 4t = 0 \\ -z + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6t \\ y=4t \\ z=4t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Conclusion: $\ker u = \{(-6t,4t,4t,t)/t\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ avec $\varepsilon_1 = (-6,4,4,1)\in\mathbb{R}^4$

2. $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R}^2)$ tel que $u(P)=(P(0),P'(0))$

Réponse: $\ker u = \{P\in\mathbb{R}_2[X]/u(P)=0_{\mathbb{R}^2}\}$

Soit $P\in\mathbb{R}_2[X]$. Posons $P=aX^2+bX+c$

$$P\in\ker u \Leftrightarrow u(P)=0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow (P(0),P'(0))=(0,0) \Leftrightarrow (c,b)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} P=aX^2 \\ a\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Conclusion: $\ker u = \{aX^2/a\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^2)$.

3. $u\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ tel que $u(M)=\mathrm{Tr}(A)$

Réponse: $\ker u = \{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/u(A)=0\}$

Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A\in\ker u \Leftrightarrow u(A)=0 \Leftrightarrow a+d=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Conclusion: $\ker u = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}/(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}(A_1,A_2,A_3)$, avec $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

TD 3. Déterminer une base du noyau des applications linéaires suivantes

1. $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$ tel que $u(x,y,z)=(2x-y+z,2x+t,y-z+t)$

2. $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ tel que et si $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ alors $u(M) = \begin{pmatrix} 2x+t & x+y+t \\ x+z+t & -2x-t \end{pmatrix}$

3. $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ tel que $u(M) = AM$.

4. $u \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ tel que $u(f) = f'' - 4f' + 4f$.

5. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u(1,0,0) = (-1,1,1)$, $u(0,1,0) = (0,1,0)$ et $u(0,0,1) = (-2,1,2)$

Propriété 7. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$

Démonstration : A REFAIRE

Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0_F \Leftrightarrow f(x-y) = 0_F$ car f est linéaire

$\Leftrightarrow x - y \in \ker f$

Donc f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$

Définition 4. Image

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle image de l'application linéaire l'ensemble, noté $\operatorname{Im} f$, défini par : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$

$= \{y \in F / \exists x \in E,\ f(x) = y\}$

Corollaire 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exemple 3. Déterminer une base du l'image des applications linéaires suivantes:

1. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ tel que $f(x,y,z,t) = (x+y+2t, 2x-y+4z, 3x+2y+z+6t)$

Réponse:

$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ avec $\varepsilon_1 = (1,0,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1,0)$ et $\varepsilon_4 = (0,0,0,4)$

$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^4) = f(\operatorname{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)) = \operatorname{Vect}(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3), f(\varepsilon_4))$ *(Voir propriété 6)*

Or $f(\varepsilon_1) = (1,2,3)$, $f(\varepsilon_2) = (1,-1,2)$, $f(\varepsilon_3) = (0,4,1)$ et $f(\varepsilon_2) = (2,0,6)$

D'où $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ où $u_k = f(\varepsilon_k)$ pour $k \in [\![1,4]\!]$.

Comme $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) \subset \mathbb{R}^3 \\ \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \end{array}\right\}$ alors $\dim(\operatorname{Im} f) \leq 3$ donc la famille est liée.

Or $\det\left(\mathrm{mat}(u_1,u_2,u_3),bc\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -6=1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=1$ donc la famille (u_1,u_2,u_3) est une famille libre de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\mathbb{R}^3$.

En conclusion : $\operatorname{Im} f=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ car u_4 peut s'écrire comme combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3. D'où une base de $\operatorname{Im} f$ est (u_1,u_2,u_3) et alors $\operatorname{Im} f=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)=\mathbb{R}^3$

2. $f\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R}^2\right)$ tel que $f(P)=\left(P(0),P'(0)\right)$

Réponse:

$\mathbb{R}_2[X]=\mathrm{Vect}(1,X,X^2)$

$\operatorname{Im} f=f(\mathbb{R}_2[X])=f\left(\mathrm{Vect}(1,X,X^2)\right)=\mathrm{Vect}\left(f(1),f(X),f(X^2)\right)$ *(Voir propriété 6)*

Or $f(1)=(1,0)$, $f(X)=(0,1)$ et $f(X^2)=(0,0)$

D'où $\operatorname{Im} f=\mathrm{Vect}\left((1,0),(0,1),(0,0)\right)=\mathrm{Vect}\left((1,0),(0,1)\right)=\mathbb{R}^2$

En conclusion : $\operatorname{Im} f=\mathrm{Vect}\left((1,0),(0,1)\right)$. D'où une base de $\operatorname{Im} f$ est $\left((1,0),(0,1)\right)$.

3. $f\in\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\mathbb{R}\right)$ tel que $u(M)=\mathrm{Tr}(A)$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=\mathrm{Vect}(A_1,A_2,A_3,A_4)$ avec $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $A_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\operatorname{Im} f=f\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)=f\left(\mathrm{Vect}(A_1,A_2,A_3,A_4)\right)=\mathrm{Vect}\left(f(A_1),f(A_2),f(A_3),f(A_4)\right)$ *(Voir propriété 6)*

Or $f(A_1)=1$, $f(A_2)=0$, $f(A_3)=0$ et $f(A_4)=1$

D'où $\operatorname{Im} f=\mathrm{Vect}(1,0,0,1)=\mathrm{Vect}(1,1)=\mathrm{Vect}(1)=\mathbb{R}$

En conclusion : $\operatorname{Im} f=\mathrm{Vect}(1)$. D'où une base de $\operatorname{Im} f$ est (1).

TD 4. Déterminer une base du l'image des applications linéaires suivantes

1. $u\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3\right)$ tel que $u(x,y,z)=(2x-y+z,2x+t,y-z+t)$
2. $u\in\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)$ tel que et si $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ alors $u(M)=\begin{pmatrix}2x+t & x+y+t\\ x+z+t & -2x-t\end{pmatrix}$
3. $u\in\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)$ et $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ tel que $u(M)=AM$.
4. $u\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que $u(1,0,0)=(-1,1,1)$, $u(0,1,0)=(0,1,0)$ et $u(0,0,1)=(-2,1,2)$

Propriété 8. Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f=F$

Démonstration : Exercice

Propriété 9. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e)=(e_1,e_2,...,e_n)$ une famille de n vecteurs, $n \geq 1$, de E . Alors :

1. Si (e) est liée alors la famille $(f(e_1),f(e_2),...,f(e_n))$ est une famille liée de F .
2. Si (e) est libre et si f est injective alors la famille $(f(e_1),f(e_2),...,f(e_n))$ est libre de F .

Démonstration : Exercice

3. Structure de $\mathcal{L}(E,F)$ et de $\mathcal{L}(E)$

Propriété 10.

1. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$.
2. L'ensemble $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau.

Démonstration : Exercice

4. Application linéaire en dimension finie – Théorème du rang

Dans ce paragraphe on suppose que les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E **et** F **sont de dimension finie.**

Définition 5. Rang d'une application linéaire
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle rang de l'application linéaire f , le nombre entier, noté $rg(f)$, défini par $rg(f)=\dim(\operatorname{Im} f)$.

Exemple 4. Déterminer le rang des applications linéaires suivantes:

1. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$ tel que $f(x,y,z,t)=(x+y+2t,2x-y+4z,3x+2y+z+6t)$

Réponse:
D'après l'exemple 3.1 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)=\mathbb{R}^3$ donc $\dim(\operatorname{Im} f)=rg(f)=3$

2. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R}^2)$ tel que $u(P)=(P(0),P'(0))$

Réponse:
D'après l'exemple 3.2 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,0),(0,1))=\mathbb{R}^2$ donc $\dim(\operatorname{Im} f)=rg(f)=2$

3. $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ tel que $u(M)=Tr(A)$

Réponse:
D'après l'exemple 3.3 $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(1)=\mathbb{R}$ donc $\dim(\operatorname{Im} f)=rg(f)=1$

TD 5. Déterminer le rang des applications linéaires suivante

1. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ tel que $u(x,y,z) = (2x - y + z, 2x + t, y - z + t)$

2. $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ tel que et si $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ alors $u(M) = \begin{pmatrix} 2x+t & x+y+t \\ x+z+t & -2x-t \end{pmatrix}$

3. $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ tel que $u(M) = AM$.

4. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u(1,0,0) = (-1,1,1)$, $u(0,1,0) = (0,1,0)$ et $u(0,0,1) = (-2,1,2)$

5. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_3[X]$ et $f(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$

Propriété 11. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si f est un isomorphisme alors $\dim E = \dim F$

Démonstration : Exercice

Propriété 12. Théorème du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\dim E = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f)$

Démonstration : Posons $n = \dim E$, $n \geq 1$, et $p = \dim(\ker f)$, $p \geq 0$.

Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une base de $\ker f$.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ par $n-p$ vecteurs u_{p+1}, u_{p+2}, …, u_n de E pour former une base de E.

Alors $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, ..., u_p, u_{p+1}, .., u_n)$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f &= \mathrm{Vect}(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_p), f(u_{p+1}), ..., f(u_n)) \\ &= \mathrm{Vect}(f(u_{p+1}), ..., f(u_n)) \qquad \text{car } f(u_1) = f(u_2) = ... = f(u_p) = 0_F \end{aligned}$$

La famille est-elle $(f(u_{p+1}), ..., f(u_n))$ libre ?

Supposons qu'il existe $(\lambda_{p+1}, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{n-p}}\}$ tel que $\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k f(u_k) = 0_F$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k f(u_k) = 0_F \quad &\Leftrightarrow \quad f\left(\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k u_k\right) = 0_F \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k u_k \in \ker f \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p / \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\} / \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k u_k - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\} / \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = 0_E \end{aligned}$$

Exemple 5.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. f peut-elle être injective ? surjective ?

Réponse: D'après le théorème du rang on a: $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f)$ ie $\dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f) = 2$

- Si f est injective alors $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et donc $\dim(\ker f) = 0$ d'où $\mathrm{rg}(f) = 2$: **C'est possible**
- Si f est surjective alors $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ et donc $\mathrm{rg}(f) = 3$ d'où $\dim(\ker f) = -1$: **Impossible**

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. u peut-elle être injective ? surjective ?

Réponse: D'après le théorème du rang on a: $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f)$ ie $\dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f) = 3$

- Si f est injective alors $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et donc $\dim(\ker f) = 0$ d'où $\mathrm{rg}(f) = 3$: **Impossible**
- Si f est surjective alors $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$ et donc $\mathrm{rg}(f) = 2$ d'où $\dim(\ker f) = 1$: **C'est possible**

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. u peut-elle être injective ? surjective ? Est-elle forcément bijective ?

Réponse: D'après le théorème du rang on a: $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f)$ ie $\dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f) = 3$

- Si f est injective alors $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et donc $\dim(\ker f) = 0$ d'où $\mathrm{rg}(f) = 3$: **C'est possible**
- Si f est surjective alors $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$ et donc $\mathrm{rg}(f) = 3$ d'où $\dim(\ker f) = 0$: **C'est possible**
- Non f n'est pas forcément bijective: on peut avoir $\dim(\ker f) = 1$ et $\mathrm{rg}(f) = 2$

Exemple 6. En utilisant le théorème du rang, déterminer une base de l'image de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$

Réponse: D'après le théorème du rang on a: $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f)$ ie $\dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f) = 4$

- Déterminons $\ker f$

$\ker f = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / f(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Posons $P = aX^3 + bX + cX + d$

$P \in \ker f \Leftrightarrow (X^2 - 1)P'' + 2XP' = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \Leftrightarrow (X^2 - 1)(6aX + 2b) + 2X(3aX^2 + 2bX + c) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$

$$\Leftrightarrow 12aX^3 + 6bX^2 - 2(3a - c)X - 2b = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $\ker f = \mathrm{Vect}(1)$ et donc $\dim(\ker f) = 1$ d'où $\mathrm{rg}(f) = 3$

- $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3)$

$\mathrm{Im} f = f(\mathbb{R}_3[X]) = f(\mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3)) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$ *(Voir propriété 6)*

Or $f(1)=0_{\mathbb{R}_3[X]}$, $f(X)=2X$, $f(X^2)=2X^2+4X-2$ et $f(X^3)=12X^3-6X$

D'où $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}\left(0_{\mathbb{R}_3[X]},2X,2X^2+4X-2,12X^36-X\right)=\operatorname{Vect}\left(2X,2X^2+4X-2,12X^36-X\right)$

Comme $\operatorname{rg}(f)=3$ et $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}\left(2X,2X^2+4X-2,12X^36-X\right)$ alors $\left(2X,2X^2+4X-2,12X^36-X\right)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

TD 6. En utilisant le théorème du rang, déterminer une base de l'image des applications linéaires suivantes:

1. $u\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3\right)$ tel que $u(x,y,z,t)=(x+y+2t,2x-y+4z,3x+2y+z+6t)$
2. $u\in\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)$ tel que et si $M=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}$ alors $u(M)=\begin{pmatrix} 2x+t & x+y+t \\ x+z+t & -2x-t\end{pmatrix}$

Corollaire 3. Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Si $\dim E=\dim F$ alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

1. f est injective
2. f surjective
3. f est bijective

Démonstration : A REFAIRE

- $1\Rightarrow 2$: f injective $\Rightarrow \ker f=\{0_E\}$
  $\Rightarrow \dim(\ker f)=0$
  $\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f)=n=\dim F$ (théorème du rang)
  $\Rightarrow \operatorname{Im} f=F$ car $\operatorname{Im} f\subset F$ et $\dim(\operatorname{Im} f)=\dim F$
  $\Rightarrow f$ est surjective
- $2\Rightarrow 3$: f surjective $\Rightarrow \operatorname{Im} f=F$
  $\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f)=\dim F=n$
  $\Rightarrow \dim(\ker f)=0$ (théorème du rang)
  $\Rightarrow \ker f=\{0_E\}$
  $\Rightarrow f$ est injective et donc bijective.
- $3\Rightarrow 1$: f bijective $\Leftrightarrow f$ injective et surjective. (définition)

5. Matrice d'une application linéaire

Dans ce paragraphe on suppose que les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont de dimension finie.

Supposons que $\dim E = p$ et $\dim F = n$ où n et p sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soient $(e) = (e_j)_{1\le i\le p}$ une base de E et $(\varepsilon) = (\varepsilon_i)_{1\le i\le n}$ une base de F.

Définition 6. Matrice d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle matrice de l'application linéaire f relativement aux bases (e) de E et (ε) de F, la matrice, notée $\mathrm{Mat}(f,(e),(\varepsilon))$, définie par :

$\mathrm{Mat}(f,(e),(\varepsilon)) = \mathrm{Mat}\Big(\big(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)\big), (\varepsilon)\Big)$.

Remarque 3.

1. Si $E = F$ et $(\varepsilon) = (e)$ alors $\mathrm{Mat}(f,(e),(e)) \overset{\text{notée}}{=} \mathrm{Mat}(f,(e))$
2. On peut avoir $E = F$ et $(\varepsilon) \neq (e)$.
3. Si $\begin{cases} f(e_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \dots + a_{i1}\varepsilon_i + \dots + a_{n1}\varepsilon_n \\ f(e_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \dots + a_{i2}\varepsilon_i + \dots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \dots\dots\dots \\ f(e_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + a_{2j}\varepsilon_2 + \dots + a_{ij}\varepsilon_i + \dots + a_{nj}\varepsilon_n \\ \dots\dots\dots \\ f(e_p) = a_{1p}\varepsilon_1 + a_{2p}\varepsilon_2 + \dots + a_{ip}\varepsilon_i + \dots + a_{np}\varepsilon_n \end{cases}$

Aloors

$$\begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{Mat}(f,(e),(\varepsilon)) = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \varepsilon_1 \\ \leftarrow \varepsilon_2 \\ \dots \\ \leftarrow \varepsilon_i \\ \dots \\ \leftarrow \varepsilon_n \end{array}$$

Exemple 7.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que, $\forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(u) = (x+y, 2x-z, 3x+y-z)$. On note $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   a. Déterminer l'image de (e) c'est à dire $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$.
   b. Déterminer la matrice A de f dans la base (e).

2. Soit $f\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2\right)$ tel que, $\forall u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, $f(u)=(x+y+z+t,x+2y+3z+4t)$. On note $bc_2=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $bc_4=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la matrice A de f dans les base bc_4 et bc_2.
3. Soient $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R}_3[X])$ tel que, $\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\forall x\in\mathbb{R}$, $f(P)(x)=\int_1^x P(t)dt$ et $g\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}_3[X],\mathbb{R}^2\right)$ tel que, $\forall P\in\mathbb{R}_3[X]$, $g(P)=(P'(0),2P(1))$. On note B_2 la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, B_3 la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $bc_2=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les matrices f et g dans les bases B_2,B_3 et bc_2.
4. Soient $f\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ tel que, $\forall M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M)=\dfrac{a+d}{2}I_2+\dfrac{b+c}{2}J$ où $J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. On note $B=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice A de f dans la base B.

Propriété 13. Soient $f\in\mathcal{L}(E,F)$, (e) une base de E et (ε) une base de F. Alors :
$\forall x\in E$, $\mathrm{Mat}(f(x),(\varepsilon))=\mathrm{Mat}(f,(e),(\varepsilon))\times\mathrm{Mat}(x,(e))$.

Démonstration

$$\begin{array}{ccc}
(E,(e)) & \overset{f}{\longrightarrow} & (F,(\varepsilon))\\
x & \mapsto & f(x)\\
\updownarrow & & \updownarrow\\
\mathrm{Mat}(x,(e)) & \mathrm{Mat}(f,(e),(\varepsilon)) & \mathrm{Mat}(f(x),(\varepsilon))
\end{array}$$

Posons $\begin{cases}f(e_1)=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\dots\dots+a_{i1}\varepsilon_i+\dots\dots+a_{n1}\varepsilon_n\\ f(e_2)=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\dots\dots+a_{i2}\varepsilon_i+\dots\dots+a_{n2}\varepsilon_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f(e_j)=a_{1j}\varepsilon_1+a_{2j}\varepsilon_2+\dots\dots+a_{ij}\varepsilon_i+\dots\dots+a_{nj}\varepsilon_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f(e_p)=a_{1p}\varepsilon_1+a_{2p}\varepsilon_2+\dots\dots+a_{ip}\varepsilon_i+\dots\dots+a_{np}\varepsilon_n\end{cases}$ et $x=\sum_{j=1}^{p}x_je_j$

On a alors $f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{p}x_je_j\right)=\sum_{j=1}^{p}x_jf(e_j)=\sum_{j=1}^{p}x_j\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\varepsilon_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}a_{ij}x_j\right)\varepsilon_i$

D'où $\mathrm{Mat}(f(x),(\varepsilon))=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{p}a_{1j}x_j\\ \sum_{j=1}^{p}a_{2j}x_j\\ \dots\\ \sum_{j=1}^{p}a_{ij}x_j\\ ..\\ \sum_{j=1}^{p}a_{nj}x_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_j\\ \dots\\ x_p\end{pmatrix}$

$=\mathrm{Mat}(f,(e),(\varepsilon))\times\mathrm{Mat}(x,(e))$

Remarque 4.

En posant $A=\mathrm{Mat}(f,(e),(\varepsilon))$, $X=\mathrm{Mat}(x,(e))$ et $Y=\mathrm{Mat}(f(x),(\varepsilon))$ on a $Y=AX$

Exemple 8.

1. Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$. On note $bc_2=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $bc_3=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A=\mathrm{Mat}(f,bc_2,bc_3)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

   a. Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{Mat}(f(u),bc_3)$

   b. Soit $v=(3,-2)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer $f(v)$

   c. Déterminer l'image de bc_2 c'est à dire $f(e_1)$ et $f(e_2)$.

2. Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. On note $bc_4=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et $A=\mathrm{Mat}(f,bc_4)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 7 & -5\end{pmatrix}$.

   a. Soit $v=(1,-1,0,2)\in\mathbb{R}^4$. Déterminer $f(v)$

   b. Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. Déterminer $f(u)$

   c. Déterminer l'image de bc_4 c'est à dire $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$et $f(e_4)$.

Corollaire 4. Soient (e) et (e') deux base de E.
$\forall x\in E$, $\mathrm{Mat}(Id_E(x),(e))=\mathrm{Mat}(Id_E,(e'),(e))\times\mathrm{Mat}(x,(e'))$

Remarque 5. Relation de changement de bases

En posant $P=\mathrm{Mat}\left(\mathrm{Id}_E,(e'),(e)\right)$, $X=\mathrm{Mat}\left(\mathrm{Id}_E(x),(e)\right)=\mathrm{Mat}\left(x,(e)\right)$ et $X'=\mathrm{Mat}\left(x,(e')\right)$ on a $X=PX'$ ou $X'=P^{-1}X'$ car $P=\mathrm{Mat}\left(\mathrm{Id}_E,(e'),(e)\right)=\mathrm{Mat}\left((e'),(e)\right)$ est inversible.

Propriété 14. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $(f,f_1,f_2)\in\mathcal{L}(E,F)^3$, $g\in\mathcal{L}(F,G)$, (e) une base de E, (ε) une base de F et (ω) une base de G . Alors on a :

1. $\mathrm{Mat}\left(g\circ f,(e),(\omega)\right)=\mathrm{Mat}\left(g,(\varepsilon),(\omega)\right)\times\mathrm{Mat}\left(f,(e),(\varepsilon)\right)$
2. Si est bijective alors $\mathrm{Mat}\left(f,(e),(\varepsilon)\right)$ est inversible et on a :
   $\mathrm{Mat}\left(f^{-1},(\varepsilon),(e)\right)=\mathrm{Mat}\left(f,(e),(\varepsilon)\right)^{-1}$
3. $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\mathrm{Mat}\left(f_1+\lambda f_2,(e),(\varepsilon)\right)=\mathrm{Mat}\left(f_1,(e),(\varepsilon)\right)+\lambda\mathrm{Mat}\left(f_2,(e),(\varepsilon)\right)$

Démonstration : Exercices

Exemple 9.

Soient $f\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right)$ tel que, $\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $f(u)=(2x-z,3x+y+2z)$ et

$g\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3\right)$ tel que, $\forall u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g(u)=(x+y,-y,2x-y)$.

On note $bc_2=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $bc_3=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les matrices A et B respectivement de f et de g dans les bases bc_2 et bc_3.
2. Pour tout $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ determiner $g\circ f(u)$
3. Déterminer la matrice C de $g\circ f$ dans la base bc_3 et la matrice D de $f\circ g$ dans la base bc_2.
4. Comparer C, D, AB et BA. Calculer $(AB)^2$.
5. Montrer que AB est inversible et determiner $(AB)^{-1}$.
6. Expliciter l'application $(f\circ g)^2$.

Propriété 15. Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}\left(f,(e),(\varepsilon)\right)$ est inversible.

Démonstration : Exercices

6. Matrice d'une application linéaire et changement de bases

Soient $(e)=(e_j)_{1\le i\le p}$ et $(e')=(e'_j)_{1\le i\le p}$ deux bases de E, $(\varepsilon)=(\varepsilon_i)_{1\le i\le n}$ et $(\varepsilon')=(\varepsilon'_i)_{1\le i\le n}$ deux bases de F,

$A=\mathrm{Mat}(f,(e),(\varepsilon))$, $A'=\mathrm{Mat}(f,(e'),(\varepsilon'))$, $P=\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E,(e'),(e))$ et $Q=\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_F,(\varepsilon'),(\varepsilon))$.

$$\begin{array}{ccc} (E,(e)) & \overset{f}{\underset{A}{\rightarrow}} & (F,(\varepsilon)) \\ \mathrm{Id}_E \downarrow P^{-1} & & \mathrm{Id}_F \uparrow Q \\ (E,(e')) & \overset{f}{\underset{A'}{\rightarrow}} & (F,(\varepsilon')) \end{array}$$

D'après la propriété **14.1** on a : $A=QA'P^{-1}$ ou $A'=Q^{-1}AP$.

Exemple 10.

On pose $P_0=X+1$, $P_1=(X+1)^2$, $P_2=(X+1)^3$, $P_3=(X+1)^4-X^4$ et $B'_3=(P_0,P_1,P_2,P_3)$. On note $B_3=(1,X,X^2,X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$

1. Montrer que B'_3 est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les matrices $P=\mathrm{Mat}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]},B'_3,B_3\right)$ et P^{-1}.
2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que : $u(P_0)=1+X$, $u(P_1)=X+X^2$, $u(P_2)=X^2+X^3$ et $u(P_3)=1+X^3$.
   Ecrire la matrice $A=\mathrm{Mat}(u,B'_3,B_3)$, puis exprimer en fonction de A, P et P^{-1} chacune des matrices $B=\mathrm{Mat}(u,B'_3)$, $C=\mathrm{Mat}(u,B_3)$ et $D=\mathrm{Mat}(u,B_3,B'_3)$.