

TD n°1 - Automates, Grammaires

Exercice 1. Soit l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Déterminer une expression régulière et un automate déterministe reconnaissant chacun des langages suivants :

- Q 1. $\mathcal{L}_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ représente un nombre pair en base 2}\}$
 Q 2. $\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contient un nombre impair d'occurrences de 1}\}$

Exercice 2. Soit l'expression régulière $a(a \mid b)$.

- Q 1. Quel est le langage \mathcal{L} dénoté par cette expression régulière.
 Q 2. Construire un automate qui reconnaît \mathcal{L} .
 Q 3. Construire un automate qui reconnaît \mathcal{L}^* .

Exercice 3. Construire un automate qui reconnaisse le langage dénoté par l'expression régulière :

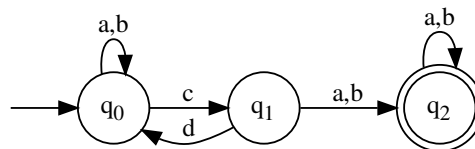
$$(ab + b^*a)^*$$

Exercice 4. Soit $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, \{0, 1\}, \delta, a, \{b, d\})$ l'automate défini par la table de transition suivante :

	0	1
a	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$
b	$\{d\}$	\emptyset
c	\emptyset	$\{d\}$
d	$\{d\}$	$\{d\}$

- Q 1. Dessiner le graphe de \mathcal{A} .
 Q 2. Montrer que les mots 00 et 1111 sont reconnus par \mathcal{A} .
 Q 3. Utiliser l'algorithme de détermination pour construire un automate déterministe équivalent à l'automate \mathcal{A} .

Exercice 5. Soit l'automate \mathcal{A} défini par le graphe suivant :



- Q 1. L'automate \mathcal{A} est-il déterministe ? Justifiez votre réponse le plus précisément possible.
 Q 2. Exprimez le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ sous la forme d'une expression régulière.

Exercice 6. Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Construire un automate déterministe pour chacune des expressions régulières suivantes :

- Q 1. $(b(a+b) + (a+c) a (a+b+c))^*$
 Q 2. $(ab + ba) (c(ab + ba) + abc)^*$



Exercice 7. Soit l'automate $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{a, b\}, \delta, s_0, \{s_0\})$ défini par la table de transition δ suivante :

	a	b
s_0	$\{s_1\}$	$\{s_2\}$
s_1	$\{s_1\}$	$\{s_0, s_2\}$
s_2	$\{s_2\}$	$\{s_0\}$

Q 1. Dessinez le graphe de l'automate \mathcal{A} .

Q 2. Montrez que les mots $abbaab$ et $bbaabaab$ sont reconnus par l'automate \mathcal{A} .

Q 3. Construisez et dessinez, en utilisant la méthode vue en cours, un automate déterministe \mathcal{A}' équivalent à l'automate \mathcal{A} .

Exercice 8. Soit G la grammaire définie par les productions ci-dessous et $w = \mathbf{a} + \mathbf{a} * \mathbf{a}$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SAS \mid (S) \mid (-S) \mid \mathbf{a} \\ A &\rightarrow + \mid * \end{aligned}$$

Q 1. Donner en partant de S une dérivation gauche pour w .

Q 2. Donner en partant de S une dérivation droite pour w .

Q 3. Montrer que G est ambiguë.

Q 4. Montrer que le mot $((-\mathbf{a}) + (\mathbf{a} * \mathbf{a}))$ est une phrase de la grammaire G .

Exercice 9. Déterminer les langages engendrés par les grammaires dont les productions sont les suivantes :

Q 1. $S \rightarrow \varepsilon \mid \mathbf{aaa}S$

Q 2. $S \rightarrow \mathbf{bSa} \mid R \quad R \rightarrow \mathbf{aRb} \mid \varepsilon$

Exercice 10. Construire une grammaire pour chacun des langages suivants :

Q 1. $\mathcal{L} = \{w \text{ miroir}(w) \mid w \text{ appartient à } \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*\}$

Remarque : Soit w un mot. Si $w = e_1 e_2 \dots e_{n-1} e_n$ alors $\text{miroir}(w) = e_n e_{n-1} \dots e_2 e_1$.

Q 2. $\mathcal{L}((\mathbf{ab})^* \mathbf{a}^*)$

Q 3. $\mathcal{L}(\mathbf{a} \mid \mathbf{ba}^* \mathbf{b})^*$

Exercice 11. Soit la grammaire $\mathcal{G} = \langle \{S, A, B, C, D\}, \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}, P, S \rangle$ avec P l'ensemble des productions suivantes :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid CD \\ A &\rightarrow \mathbf{aAb} \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow \mathbf{cB} \mid \varepsilon \\ C &\rightarrow \mathbf{aC} \mid \varepsilon \\ D &\rightarrow \mathbf{bDc} \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Montrez que la grammaire \mathcal{G} est ambiguë.

Exercice 12. Déterminez sous forme d'expression régulière le langage engendré par la grammaire $\mathcal{G} = \langle V, T, P, S \rangle$ avec $V = \{S, X, Y, Z\}$, $T = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ et P l'ensemble des productions suivantes :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathbf{aX} \mid \mathbf{aY} \\ X &\rightarrow \mathbf{bX} \mid Z \\ Y &\rightarrow \mathbf{cY} \mid Z \\ Z &\rightarrow \mathbf{aZ} \mid \mathbf{a} \end{aligned}$$

Exercice 13. Construire une grammaire pour chacun des langages suivants :

Q 1. $\mathcal{L} = \{w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } w = \mathbf{a}^n \mathbf{cb}^{2n} \mathbf{c}\}$.

Q 2. $\mathcal{L} = \{w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } w = \mathbf{a}^{n+1} \mathbf{cb}^{n+1} \mathbf{c}\}$.