KIROUCHENASSAMY
Badmavasan
IS2A3
DM Probabilité

Exercice 1

// Pour cet exercice on pose ln = log

1> D'après l'exercice $\alpha > 1$. on cherche à montrer que l'intégrale généralisée $I_{\alpha,\beta}$ est convergente.

$$I_{\alpha,\beta} = \int_{47}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(\log(t))^{\beta}}$$

on pose α' un réel tel que $\alpha > \alpha' > 1$:

$$\frac{1}{t^{\alpha}(\log(t))^{\beta}} = \frac{1}{t^{\alpha'}} \frac{1}{t^{\alpha-\alpha'}(\ln x)^{\beta}}$$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} t^{\alpha-\alpha'} \ln(t)^{\beta} = +\infty$ d'où pour t assez grand, on a donc :

$$\frac{1}{t^{\alpha-\alpha'}(\ln t)^{\beta}} \leq 1$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}} \leq \frac{1}{t^{\alpha'}}$$

D'après la conservation d'inégalité d'intégrale, on a :

$$\int_{47}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln(t))^{\beta}} dt \leq \int_{47}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha'}} dt$$

l'intégrale $\int_{47}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha'}} dt$ converge d'après l'intégrale de Riemann car $\alpha' > 1$.
Donc converge.

Par comparaison l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$ converge pour $\alpha > 1$

2> D'après l'exercice, on pose $\alpha = 1$ et on cherche à calculer l'intégrale : $I_{1,\beta,R} = \int_{47}^{R} \frac{dt}{t\,(\log(t))^{\beta}}$

Pour $\beta \neq 1$

on effectue un changement de variable.

$$u = \ln(t)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \qquad dt = t\,du.$$

$$I_{1,\beta,R} = \int \frac{t\,du}{t\,u^{\beta}} = \int \frac{1}{u^{\beta}}\,du = \left[\frac{1}{1-\beta}\,u^{1-\beta}\right]$$

on refait le changement de variable

$$u = \ln(t)$$

$$I_{1,\beta,R} = \left[\frac{1}{1-\beta}\,\ln(t)^{1-\beta}\right]_{47}^{R}$$

$$I_{1,\beta,R} = \frac{1}{1-\beta}\left[\ln(R)^{1-\beta} - \ln(47)^{1-\beta}\right]$$

Pour $\beta = 1$, alors on a $I_{1,\beta,R} = \int_{47}^{R} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt.$

on effectue un changement de variable

$$u = \ln(t) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$dt = t\,du.$$

$$\int_{47}^{R} \frac{1}{t\ln(t)} = \int \frac{1}{u}\,du = \left[\ln(u)\right]$$

or $u = \ln(t)$, on a donc

$$\int_{47}^{R} \frac{1}{t\ln(t)} = \left[\ln(\ln(t))\right]_{47}^{R} = \ln(\ln(R)) - \ln(\ln(47))$$

Finalement, on a donc :

$$\int_{47}^{+\infty} \frac{dx}{t\ln(t)^{\beta}} = \begin{cases} \left[\dfrac{\ln(t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_{47}^{R} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \left[\ln(\ln(t))\right]_{47}^{R} & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

3) Si $\beta = 1$, on a $I_{1,1,R} = \ln(\ln(R)) - \ln(\ln(47))$

quand $R \to +\infty$

$I_{1,1,R} \longrightarrow +\infty$

Donc pour $\beta = 1$, $I_{1,1,R}$ diverge.

Si $\beta \neq 1$, on a $I_{1,\beta,R} = \left[\underbrace{\frac{1}{1-\beta}}_{\text{Constante}} \left(\underbrace{\ln(R)^{1-\beta}}_{\substack{\text{quand } R \to +\infty \\ \text{converge si } \beta > 1 \\ \text{diverge si } \beta < 1}} - \underbrace{\ln(47)^{1-\beta}}_{\text{Constante}} \right) \right]$

Donc pour $\alpha = 1$, $I_{1,\beta,R}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

4) D'après l'énoncé, $\alpha < 1$, d'où on a :

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t} \frac{t^{1-\alpha}}{\ln(t)^\beta}$$

or $\frac{t^{1-\alpha}}{\ln(t)^\beta} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ [critère de comparaison]

Pour t assez grand, on a donc :

$$\frac{t^{1-\alpha}}{\ln(t)^\beta} \geqslant 1$$

$$\frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \geqslant \frac{1}{t}$$

D'après la conservation d'inégalité d'intégrale, on a

$$\int_{47}^{R} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} dt \geqslant \int_{47}^{R} \frac{1}{t} dt$$

l'intégrale $\int_{47}^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge $\left(\ln(R) - \ln(47) \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \right)$

Par critère de comparaison l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$ diverge $\forall \beta \in \mathbb{R}$ pour $\alpha < 1$.

En conclusion :

L'intégrale $\int_{47}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si

$\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

Exercice 2

1) On dit qu'une variable aléatoire A suit la loi géométrique de paramètre p si $- X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$- P(X=k) = p q^{k-1}$ où $q = p-1$

~~(si ces critères sont vérifié)~~

On cherche à montrer que Y suit une loi géomètrique.

Y est la partie entière d'une variable aléatoire X et il prend donc ses valeurs dans les entiers positives. Donc la première condition est vérifié. (Y est dans $\mathbb{N}$)

Loi exponentielle : $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ (D'après l'énoncé $\lambda = 1$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$Y = n \iff Y = \lceil X \rceil$ (Partie entière par excès)

$Y = n \iff Y = \lceil X \rceil$, c'est à dire $n-1 < X \leq n$

car Y est la partie entière de X, d'où $\lceil 2,1 \rceil = 3$ Donc pour $Y = 3$ X prend les valeurs strictement supérieur à 2 et inférieur ou égal à 3.

$$P(Y=n) = P(n-1 < X \leq n) = F_X(n) - F_X(n-1).$$
$$= -e^{-n} + e^{-(n-1)}$$
$$= e^{-(n-1)}(1 - e^{-1})$$

On pose $p = 1 - e^{-1}$

alors $q = 1 - 1 + e^{-1} = e^{-1}$

d'où $q^{n-1} = (e^{-1})^{n-1} = e^{-1(n-1)} = e^{-(n-1)}$

Donc la condition 2 est vérifiée.

Ainsi, on en conclut que Y suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-1}$

2> On a $Z = Y - X$ qui corresspond à la partie fractionnaire d'un réel. Donc d'après la définition de la partie fractionnaire. On en déduit que $Z(\Omega) = [0,1[$ c'est à dire Z prend des valeurs entre 0 et 1 (inférieur à 1).

Démonstration :

$n-1 < X \leq n \qquad Y = n$

$-n+1 > -X \geq -n$

$n-n+1 > Y-X \geq -n+n$

$1 > Y-X \geq 0$

$1 > Z \geq 0 \qquad Z \in [0,1[$

3> on cherche à démontrer l'égalité suivante :
$$\{Z \leq t\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n - t \leq X \leq n\}$$

$$\{Z \leq t\} = \{0 \leq Z \leq t\} \Longleftrightarrow \exists n = [X] \text{ tel que } n-t \leq X \leq n$$

Démonstration : $0 \leq Z \leq t$

$0 \leq Y - X \leq t$

$-Y \leq -X \leq t - Y$

$Y \geq X \geq Y - t \qquad$ or $Y = n$

Donc $n - t \leq X \leq n$

l'existence d'un entier n se traduit par une réunion des événement d'où

$$\{Z \leq t\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n-t \leq X \leq n\}$$

4) on cherche la fonction de répartition de Z.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = P(Z \leq t)$

Si $t < 0$, l'événement $\{Z \leq t\}$ est impossible car la partie fractionnaire est supérieur ou égal à 0 $Z(\Omega) = [0,1[$

Donc $F_Z(t) = 0$

si $t \geq 1$, l'événement $\{Z \leq t\}$ est certain car $Z(\Omega) = [0,1[$ et $\forall t \geq 1$ t est supérieur ou égal à la variable Z.

Donc $F_Z(t) = 1$

Si $t \in [0,1[$

$$F_Z(t) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n-t \leq X \leq n\}\right)$$

$$F_Z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{n-t \leq X \leq n\})$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} F_X(n) - F_X(n-t)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \cancel{1} - e^{-\lambda n} - \cancel{1} + e^{-\lambda(n-t)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} - e^{-\lambda n} + e^{-\lambda(n-t)}$$

$m = n - 1$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} - e^{-\lambda(m+1)} + e^{-\lambda(m+1-t)}$$

$$F_Z(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} -e^{-\lambda m - \lambda} + e^{-\lambda m - \lambda + \lambda t}$$

$$F_Z(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\lambda m - \lambda} \left(-1 + e^{\lambda t}\right)$$

$$F_Z(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\lambda m} \left(-e^{-\lambda} + e^{\lambda t - \lambda}\right)$$

$$F_Z(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} (e^{-\lambda})^m \left(-e^{-\lambda} + e^{\lambda t - \lambda}\right)$$

On remarque que $F_Z(t)$ est une série géométrique de raison $(e^{-\lambda})$ et de premier terme $(e^{\lambda t - \lambda} - e^{-\lambda})$

or $$\sum_{k=0}^{+\infty} a q^k = \frac{a}{1-q}$$ | a = premier terme, q = raison

Donc,

$$F_Z(t) = \frac{e^{\lambda t - \lambda} - e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

or X suit une loi exponentielle de paramètre 1

donc $\lambda = 1$

$$F_Z(t) = \frac{e^{t-1} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

Finalement,

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{e^{t-1} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

On sait que la densité de probabilité de Z s'obtient en dérivant la fonction de répartition :

$$f_Z(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{t-1}}{1 - e^{-1}} & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3

1) la fonction f est une densité de probabilité si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et égal à 1 et f positive.

$$f(x) = \frac{ce^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$ où c est une constante reel strictement positive.

on sait que la fonction exponentielle est strictement positive sur tout $\mathbb{R}$. Donc par composition $(1+e^{-x})^2$ et quotient $\frac{ce^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, on en déduit que f est positive.

Maintenant, on passe à la vérification de l'autre critère

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ce^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx = c\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx\right]$$

Pour calculer l'intégrale, on effectue un changement de variable.

on pose $u = e^{-x}+1$ $\quad \frac{du}{dx} = -e^{-x} \Leftrightarrow dx = \frac{1}{-e^{-x}}du$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ce^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx = c\left[\int \frac{\cancel{e^{-x}}}{u^2} \times \frac{1}{\cancel{-e^{-x}}}du\right]$$

$$= c\left[\int -\frac{1}{u^2}du\right]$$

J'ai pas mis les bornes parceque je vais refaire un changement de variable pour garder les valeurs des bornes.

$$= c\left[\frac{1}{u}\right] \quad \text{or } u = e^{-x}+1$$

on a donc,

$$= c\left[\frac{1}{e^{-x}+1}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ce^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \underbrace{\frac{c}{e^{-R_1}+1}}_{\xrightarrow{R_1 \to +\infty} 0} - \boxed{\frac{c}{e^{-R_2}+1}}_{\xrightarrow{R_2 \to -\infty} 0}$$

Par somme,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ce^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = c$$

Donc f est une densité de probabilité si et seulement si $c = 1$ et donc $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

on sait que la fonction de répartition vaut :

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \left[\frac{1}{e^{-x}+1}\right]_{-\infty}^{t}$$

on remplace $-\infty$ par R.

$$= \left[\frac{1}{e^{-x}+1}\right]_{R}^{t} = \frac{1}{e^{-t}+1} - \underbrace{\frac{1}{e^{-R}+1}}_{\xrightarrow{R \to -\infty} 0}$$

$$F_X(t) = \frac{1}{e^{-t}+1}$$

2) on souhaite montrer que la fonction $g(x) = \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ définie sur $\mathbb{R} \longrightarrow]-1;1[$ est bijective.

Il y a deux méthodes pour atteindre l'objectif.

1 - Soit on utilise la définition d'une fonction bijective

2 - soit on étudie le comportement de la fonction.

Méthode 1 :

- g est injective. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = g(y)$

$$g(x) = g(y) \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$$

$$(e^x - 1)(e^y + 1) = (e^y - 1)(e^x + 1)$$

$$\cancel{e^{x+y}} + e^x - e^y \cancel{-1} = \cancel{e^{y+x}} + e^y - e^x \cancel{-1}$$

$$e^x - e^y = e^y - e^x$$

$$2e^x = 2e^y$$

$$e^x = e^y$$

On utilise la fonction logarithmique $x \mapsto \ln(x)$ est une fonction Strictement croissant

$$x = y$$

Donc g est injective

- g est surjective : Soit $y \in]-1, 1[$, on cherche un élément $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$$ye^x + y = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow e^x(y - 1) + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{-y - 1}{y - 1}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1 + y}{1 - y}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

On a un x qui convient, donc g est surjective.

Comme la fonction g est injective et surjective, g est bijective.

Méthode 2 : La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable et $g'(x) = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$ (on remarque que $g'(x) > 0$)

$$g(x) = \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}-1}{(e^x+1)^2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$$

$$g(x) = \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$$

Par ailleurs, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$:

Par conséquent, g réalise une bijection strictement croissant de $\mathbb{R}$. sur $]-1;1[$

Pour calculer g^{-1}, il faut résoudre l'équation suivante :

$$y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

D'après la deuxième partie de la <u>méthode 1</u>, on en déduit que $x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ donc $g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1;1[$

3) Y prend ses valeurs dans $]-1;1[$, et pour tout x de $]-1;1[$

$$P(Y\leq x) = P(g(X)\leq x) = P(X\leq g^{-1}(x))$$

$$= P\left(X \leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$$

$$= F_X\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1+e^{-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}}$$

$$P(Y\leq x) = F_Y(x) = \frac{1}{1+e^{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{1+\cancel{x}}} = \frac{1+x}{2}$$

$$F_Y(x) = \frac{1+x}{2}$$ Donc $Y \to \mathcal{U}(]-1;1[)$

variable aléatoire

Densité de la variable aléatoire Y

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in]-1;1[.$$