Exercice 1 /TD “Gauss Pivot”

Résoudre le système linéaire AX = b suivant , donné sous forme d’un système d’équations, par la méthode de Gaus avec une stratégie de pivotage total, avec 3 chiffres significatifs

$$2.0\, x_1 + x_2 + 4.0\, x_4 = 2.0$$

$$-4.0\, x_1 - 2.0\, x_2 + 3.0\, x_3 - 5.0\, x_4 = -9.0$$

$$4.0\, x_1 + x_2 - 2.0\, x_3 + 3.0\, x_4 = 2.0$$

$$-3.0\, x_2 - 12.0\, x_3 - x_4 = 2.0$$

R1:

$$A^0\, x = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12.0 & -1.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

Q1 : Donnez toutes les matrice A^k intermédiaires

[1,2,3,4]

Q2 : Quel est l’ordre des éléments de x calculés ainsi?

[3,2,1,4]

Q3 : Recalculez la valeur du déterminant de A

$$P_1 A^0\, x = \begin{pmatrix} 0.0 & -3 & -12 & -1 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 A^0 Q_1 Q_1^{-1}\, x = \begin{pmatrix} -12.0 & -3.0 & 0.0 & -1.0 \\ 3.0 & -2.0 & -4.0 & -5.0 \\ -2.0 & 1.0 & 4.0 & 3.0 \\ 0.0 & 1.0 & 2.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

[3,2,1,4]

$$P_1 A^0 Q_1 Q_1^{-1}\, x = \begin{pmatrix} -12.0 & -3.0 & 0.0 & -1.0 \\ 3.0 & -2.0 & -4.0 & -5.0 \\ -2.0 & 1.0 & 4.0 & 3.0 \\ 0.0 & 1.0 & 2.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

i=2, j=2 : 2- (-3)(3)/(-12) = -2 -9/12 = -2 – ¾ = -11/4
i=3, j=2 : 1 – (-2)(-3)/(-12) = 1 + ½ =1;5
i=2, j=4 : -5 -3(-1)/(-12) = -5 - ¼ = -21/4
i=3,j-4 : 3 – (-2)(-1)/(-12) = 3 + 1/6 = 19/6
b2 = -9 – (3)(2)/(-12) = -9 + ½ = -8,5
b3 = 2 – (-2)(2)/(-12) = 2 – 1/3 = 5/3

[3,2,1,4]

$$E_1 P_1 A^0 Q_1 Q_1^{-1}\, x = \begin{pmatrix} -12. & -3.0 & 0\ .0 & -1.0 \\ 0.0 & -2{,}75 & -4.0 & -5{,}25 \\ 0.0 & 1{,}5 & 4.0 & 3{,}17 \\ 0.0 & 1.0 & 2.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \\ x4 \end{pmatrix}$$

Remarque : si nous avions un stratégie de pivotage “partiel, nous aurions choisi -2,75 et n’aurions, dans cet exemple, pas eu de permutation

$$P_2 E_1 P_1 A^0 Q_1 Q_2 Q_2^{-1} Q_1^{-1}\, x = \begin{pmatrix} -12. & -3.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & -5{,}25 & -4.0 & -2{,}75 \\ 0.0 & 3{,}17 & 4.0 & 1{,}5 \\ 0.0 & 4.0 & 2.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8{,}5 \\ 1{,}67 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

$$E_2 P_2 E_1 P_1 A^0 Q_1 Q_2 Q_2^{-1} Q_1^{-1}\, x = \begin{pmatrix} -12. & -3.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & -5{,}25 & -4.0 & -2{,}75 \\ 0.0 & 0.0 & ? & ? \\ 0.0 & 0.0 & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8{,}5 \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

Et nous continuons ….laissé en “homework”

$$P_2E_1P_1A^0Q_1Q_2Q_2^{-1}Q_1^{-1}\,x = \begin{pmatrix} -12. & -3.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & -5{,}25 & -4.0 & -2.75 \\ 0.0 & 3{,}17 & 4.0 & 1.5 \\ 0.0 & 4.0 & 2.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8{,}5 \\ 1{,}67 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

i=3, j=3 : 4.0 - (-4.0)(3.17)/(-5.25) = 4 – 2.42 = 1.58
i=3, j=4 : 1.5 - (-2.75)(3.17)/(-5.25) = 1.5 – 1.66 = -0.16
i=4, j=3 : 2.0 – (4.0)(-4.0)/(-5.25) = 2.0 – 3.05 = -1.05
i=4; j=4 : 1.0 – (-2.75)(4.0)/(-5.25) = 1.0 – 2.10 = - 1.10

second membre :
i=4 : 2.0 – (4.0)(-8.5)/(-5.25) = 2.0 – 6.48 = - 4.48
i=3 : 1.67 – (3.17)(-8.5)/(-5.25) = 1.67 – 5.13 = -3.56

$$E_2P_2E_1P_1A^0Q_1Q_2Q_2^{-1}Q_1^{-1}\,x = \begin{pmatrix} -12. & -3.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & -5{,}25 & -4.0 & -2{,}75 \\ 0.0 & 0.0 & 1.58 & -0.16 \\ 0.0 & 0.0 & -1.05 & -1.10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8{,}5 \\ -3.56 \\ -4.48 \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

Pas besoin de pivotage

$$E_3P_3E_2P_2E_1P_1A^0Q_1Q_2Q_2^{-1}Q_1^{-1}\,x = \begin{pmatrix} -12. & -3.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & -5{,}25 & -4.0 & -2{,}75 \\ 0.0 & 0.0 & 1.58 & -0.16 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8{,}5 \\ -3.56 \\ -6.85 \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

Matrice : i=4, j=4 : -1.10 – (-0.16)(-1.05)/(1.58) = -1.10 – 0.11 = -1.21
Second membre : -4.48 – (-3.56)(-1.05)/(1.58) = -4.48 – 2.37 = -6.85

$$
\begin{pmatrix} -12. & -3.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & -5,25 & -4.0 & -2,75 \\ 0.0 & 0.0 & 1.58 & -0.16 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8,5 \\ -3.56 \\ -6.85 \end{pmatrix}
$$

[3,4,1,2]

Remontée du système triangulaire :

i = 4 : $-1.21\ x_2 = -6.85 \Leftrightarrow x2 = 6.85/1.21 = 5.66$

C'est x_2 qui est calculer en premier

on le sait car nous avons gardé la trace des permurations

i=3 : x1 = (-3.56 – (-0.16 x 5.66))/1/58

etc….

Exercice/TD “LU”

U stockée dans la partie triangulaire supérieure du tableau A, y compris la diagonale, et L stockée dans la partie triangulaire strictement inférieure du tableau A

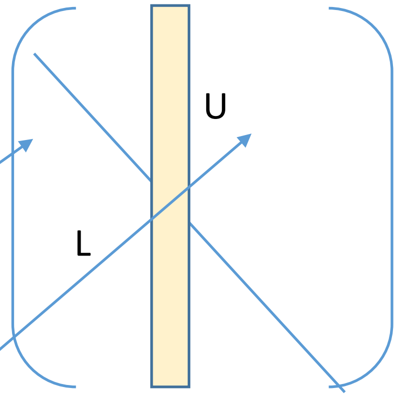
Q1 : Donnez l’algorithme pour calculer la factorisation LU d’une matrice A, sans permutations de lignes ou colonnes.

Un seul tableau pour stocker L et U ; dans le tableau qui stockait A au début. A est détruite;

ex ti

R1 :

```
pour k =1,n-1 faire
    pour i=k+1,n faire
        a(i,k) = a(i,k)/ a(k,k)
        pour j=k+1,n faire
            a(i,j)= a(i,j)–a(i,k)*a(k,j)
        fait
    fait
fait
```



$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ x & 1 & & \\ x & x & 1 & \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

La diagonale de “1” de L n’est pas stockée

Q2 : Calculez L et U tq A =LU

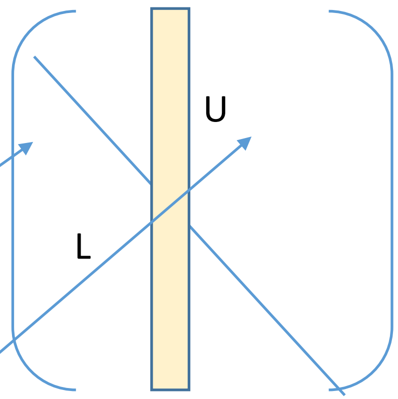
det $\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ -4.0 & -2.0 \end{pmatrix}$ = 0, donc LU n'est pas possible pour la **matrice utilisée auparavant pour Gauss**, sans permutation préalables (cf. exercice sur Gauss)

det = 2 (6-3) -(8 -12) = 6 – (-4) = 10 ≠ 0

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -3.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

det(A) ≠ 0 puisque A est inversible, par hypothèse

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ x & 1 & & \\ x & x & 1 & \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$



ex ti

R1 :

```
Pour k =1,n-1
    Pour i=k+1,n
        a(i,k) = a(i,k)/ a(k,k)
        Pour j=k+1,n
        a(i,j)= a(i,j)–a(i,k)*a(k,j)
```

L(i,k) stocké dans a(i,k)

La diagonale de "1" de L n'est pas stockée

Exercice/TD “LU”

Par exemple :

$U(2,2) = -3.0 - (-4.0)(1.0)/(2.0) = -3.0 - (1.0)\ L(2,1)$

$L(2,1) = -4/2$

La matrice A d’origine :

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -3.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a^{k}_{i,j} = a^{k-1}_{i,j} - a^{k-1}_{i,k} a^{k-1}_{k,j} \, / \, a^{k-1}_{k,k}}$$

```
Pour k =1,n-1
   Pour i=k+1,n
      a(i,k) = a(i,k)/ a(k,k)
         Pour j=k+1,n
         a(i,j)= a(i,j)–a(i,k)*a(k,j)
```

ti = a(i,k) = l(i,k)

Après la première étape de la factorisation LU

$$\begin{pmatrix} 1.0 & & & \\ -2.0 & 1.0 & & 0 \\ 2.0 & x & 1.0 & \\ 0.0 & x & x & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ 0.0 & -1.0 & 3.0 & 3.0 \\ 0.0 & -1.0 & -2.0 & -5.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12. & -1.0 \end{pmatrix}$$

U est calculée comme lors de la méthode de Gauss sauf que les calculs $\mathbf{a^{k-1}_{i,k} / a^{k-1}_{k,k}}$ **sont calculés dès que possible**

Ensuite on ne considère que la sous-matrice [k+1:n,k+1:n] pour mettre à jour U et la colonne k de L

Ces éléments sous-diagonaux seront calculés lors des étapes suivantes : à l’étape k, nous calculons la sous-colonne k de L

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ 0.0 & -1.0 & 3.0 & 3.0 \\ 0.0 & -1.0 & -2.0 & -5.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12. & -1.0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1.0 & & & 0 \\ -2.0 & 1.0 & & \\ 2.0 & 1.0 & 1.0 & \\ 0.0 & 3.0 & X & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ 0.0 & -1.0 & 3.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.0 & -8.0 \\ 0.0 & 0.0 & -21. & -10. \end{pmatrix}$$

```
Pour k =1,n-1
   Pour i=k+1,n
      a(i,k) = a(i,k)/ a(k,k)
         Pour j=k+1,n
         a(i,j)= a(i,j)–a(i,k)*a(k,j)
```

ti = a(i,k) = l(i,k)

Ne pas confondre a(i,j), élément du tableau avec $a^k_{i,j}$

Puis $\begin{pmatrix} \mathbf{1.0} & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & \mathbf{1.0} & 0.0 & 0.0 \\ 2.0 & 1.0 & \mathbf{1.0} & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4.2 & \mathbf{1.0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ 0.0 & -1.0 & 3.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.0 & -8.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 23.6 \end{pmatrix} = A$

L(4,3) = 21/5 = 4,2

U(4,4) = -10 – (4,2)(-8) = 23,6

Stockage “informatique” :

2.0	**1.0**	**0.0**	**4.0**
-2.0	**-1.0**	**3.0**	**3.0**
2.0	**1.0**	**-5.0**	**-8.0**
0.0	**3.0**	**4.2**	**23,6**

Et la diagonale « virtuelle » de L composée de **“1”**

Vérification

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 2.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4{,}2 & 1.0 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ 0.0 & -1.0 & 3.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.0 & -8.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 23{,}6 \end{pmatrix}}_{U} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -3.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12 & -1.0 \end{pmatrix}}_{A}$$

Soit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Résoudre Ax = b ⇔ Lux = b ⇔

Descente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 2.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 4{,}2 & 1.0 \end{pmatrix}}_{L} \; z = b$$

$Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

puis

Remontée

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ 0.0 & -1.0 & 3.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.0 & -8.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 23{,}6 \end{pmatrix}}_{U} \; x = z$$

X = Z

Exercice/TD “LU”, suite et fin

Q3 : Comment peut-on résoudre la séquence de systèmes linéaires Ax=b, Ay=c, Az=d?

A l’aide d’une factorisation A = LU. Nombre d’opérations identique à Gauss, $cx(n) = (2/3)n^3 + O(n^2)$

Nous calculons donc en séquence

- LUx=b : descente + une remontée : $2\ n^2$
- puis LUy=c : descente + une remontée : $2\ n^2$
- puis LUz=d : descente + une remontée : $2\ n^2$

Donc $cx(n) = (2/3)n^3 + O(n^2)$

Avec 3 Gauss en séquence, nous aurions eu $3\ (2/3)\ n^3 + O(n^2) = n^3 + O(n^2)$

Q4 : Comment peut-on résoudre le système linéaire multi-second-membres W(u,v,w)=(e,f,g)?

Par la méthode de Gauss en ayant 3 seconds membres : donc avec 1 élimination + 3 remontées

$CX(n) = (2/3)\ (2/3)\ n^3 + O(n^2)$

Mais il faut connaître les vecteurs e,f et g avant la phase d’élimination de Gauss, contrairement à une résolution en séquence.

Exercice /TD Cholesky

Exercice 1 :

Q1 : écrivez un algorithme implémentant la factorisation de Cholesky d'une matrice de taille n

Exercice 2 :

Soit la matrice : $C = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}0 & 1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & -5.0 \\ 1.0 & 0.0 & -4.0 \end{pmatrix}$

Et le vecteur $b = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -1.0 \\ 4.0 \end{bmatrix}$

Q1: Calculez $A = C^T C$

Q2: Que peut-on dire de A?

Q3: Résoudre avec le moins d'opérations possibles Ax=b

$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ A est

Exercice 1 :

Q1 : écrivez un algorithme implémentant la factorisation de Cholesky d'une matrice de taille n

+ contrôle des divisions pour avoir un algorithme/code robuste

```
--- première colonne de L ---

L(1,1) = sqrt(a(1,1))
do i=2,n
    L(i,1) = a(i,1)/L(1,1)
end do

--- colonne 2 à n de L ---

do j=2,n
    s = a(j,j)
   do k=1,j-1
       s = s - L(j,k)
    end do
   L(j,j) = sqrt(s)
   if (n > 2) do i=j+1,n
      s = a(i,j)
      do k=1,j-1
          s = s – L(i,k) * L(j,k)
      end do
      L(i,j) = s/L(j,j)
end do
```

and therefore the following formulas for the entries of **L**:

$$L_{j,j} = (\pm)\sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2},$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}}\left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k}L_{j,k}\right) \quad \text{for } i > j.$$

If we write out the equation

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & \text{(symmetric)} \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix},$$

we obtain the following:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{A_{11}} & 0 & 0 \\ A_{21}/L_{11} & \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} & 0 \\ A_{31}/L_{11} & (A_{32} - L_{31}L_{21})/L_{22} & \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} \end{pmatrix}$$

R1: $A = C^TC$

Exercice 2 :

$$A = C^TC = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 3.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & -5.0 & -4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 1.0 \\ 0.5 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & -5.0 \\ 1.0 & 0.0 & -4.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,25 & -0.5 & -3.0 \\ -0.5 & 10. & -15. \\ -3.0 & -15. & 42. \end{pmatrix}$$

R2 : Symétrique définie positive
Remarque : non diagonale dominante

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{A_{11}} & 0 & 0 \\ A_{21}/L_{11} & \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} & 0 \\ A_{31}/L_{11} & (A_{32} - L_{31}L_{21})/L_{22} & \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} \end{pmatrix}$$

R3 : factorisation

$$\begin{pmatrix} 2,25 & -0.5 & -3.0 \\ -0.5 & 10. & -15. \\ -3.0 & -15. & 42. \end{pmatrix}$$

L(1,1) = sqrt(2.25) = 1.5 (la valeur positive)
L(1,2) = -0.5/1.5 = -1/3 = - 0.333
L(1,3) = -3.0/1.5 = -2.0

L(2,2) = sqrt(10. - (-0.333)(-O.333))= sqrt(9,89)=3.14
L(3,2) = [-15 –(-0.333)(-2.0)]/3.14 = -4.99

L(3,3) = sqrt(42.-(-2.)(-2.)-(-4.99)(-4.99))=sqrt(13.1)=3.62

and therefore the following formulas for the entries of **L**:

$$L_{j,j} = (\pm)\sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2},$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}}\left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k}L_{j,k}\right) \quad \text{for } i > j.$$

4 + (4.99)(4.99) + (3.62)(3.62) =
4 + 24.9 + 13.1= 42

(-0.33)((-2.0)+(3.14)(-4.99)

L

$$A\,x = \begin{pmatrix} 1.50 & 0.00 & 0.00 \\ -0.333 & 3.14 & 0.00 \\ -2.00 & -4.99 & 3.62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.50 & -0.333 & -2.00 \\ 0.00 & 3.14 & -4.99 \\ 0.00 & -0.00 & 3.62 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -1.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

Avec $LL^T = \begin{pmatrix} 2,25 & -0.50 & -3.00 \\ -0.50 & 10.0 & -15.0 \\ -3.00 & -15.0 & 42.0 \end{pmatrix}$ = A , arrondis aux 3 chiffres significatifs

9;9989

$$A\,x= \begin{pmatrix} 1.50 & 0.00 & 0.00 \\ -0.333 & 3.14 & 0.00 \\ -2.00 & -4.99 & 3.62 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1.50 & -0.333 & -2.00 \\ 0.00 & 3.14 & -4.99 \\ 0.00 & -\,0.00 & 3.62 \end{pmatrix} x}_{Z} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -1.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

$A\,x = LL^T\,x = b$

$Lz=b$

$L^Tx = z$

$$\begin{pmatrix} 1.50 & 0.00 & 0.00 \\ -0.333 & 3.14 & 0.00 \\ -2.00 & -4.99 & 3.62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -1.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}$$

Descente : calcul des éléments de z :

z est alors connu

$$\begin{pmatrix} 1.50 & -0.333 & -2.00 \\ 0.00 & 3.14 & -4.99 \\ 0.00 & -\,0.00 & 3.62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} =$$

Remontée : Calcul des éléments de x :

Exercice 2, TD "Householder"

Soit u = $\begin{pmatrix} 1.0 \\ -1.0 \\ 0.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$

Q1 : Calculez H(v)u tq uniquement la première composante de ce vecteur soit nul

Q2 :Calculez alors H(v)b, avec b = $(1,0,-2,3)^T$

Q3 : Calculez explicitement la matrice de Householder correspondante (*quasiment jamais fait dans la pratique. Ce calcul est juste « pédagogique »)*

Exercice 3, TD "Householder"

Résoudre le système linéaire suivant par la méthode de Householder

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12.0 & -1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2, TD ”Householder”

Soit u = $\begin{pmatrix} 1.0 \\ -1.0 \\ 0.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$

Q1 : Calculez H(v)u tq uniquement la première composante de ce vecteur soit nul

Q2 :Calculez alors H(v)b, avec b = $(2.0,-1.0,-2.0,3.0)^T$

Q3 : Calculez explicitement la matrice de Householder correspondante (*quasiment jamais fait dans la pratique. Ce calcul est juste « pédagogique »)*

R1 :

$$V = \begin{pmatrix} 1.0 + \mathrm{sqrt}(6) \\ -1.0 \\ 0.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.45 \\ -1.0 \\ 0.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} \qquad H(v)u = \begin{pmatrix} -2.45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

= u + ou – $\mathrm{Norm}_2(u)\, e_1$

Avec $v^Tv/2 = \mathrm{norme}_2(u)(\mathrm{norme}^2(u) -+ u_1) = 2.45(2.45+1) = 8.45 = 0.845\ 10$

R2: $H(v)\begin{pmatrix} 2.0 \\ -1.0 \\ -2.0 \\ 3.0 \end{pmatrix} = b - \dfrac{(v^Tb)}{\frac{(v^T v)}{2}}\, v$

13.9
= 2 x 3.45 + -1 x -1 + 6
=6.90 +1 + 6 = 13.90

13.9/8.45 = 1.64

R2: $H(v)\begin{pmatrix} 2.0 \\ -1.0 \\ -2.0 \\ 3.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -1.0 \\ -2.0 \\ 3.0 \end{pmatrix} - 1.64 \begin{pmatrix} 3.45 \\ -1.0 \\ 0.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$

Exercice 2, TD ”Householder”

Soit $u = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$

Q1 : Calculez H(v)u tq uniquement la première composante de ce vecteur soit nul

Q2 :Calculez alors H(v)b, avec $b = (2.0,-1.0,-2.0,3.0)^T$

Q3 : Calculez explicitement la matrice de Householder correspondante (*quasiment jamais fait dans la pratique. Ce calcul est juste « pédagogique »*)

$\text{norme}_2(u)$ = sqrt(4.0+16.+16.)=sqrt(36.)=6.0

v = u + 6, car u(1) > 0 donc $v = \begin{pmatrix} 2.0+6.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$, et $H(v)u = \begin{pmatrix} -6.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$, $v^Tb = (16.+4.0 - 8.0) = 12.$,

$\dfrac{v^Tv}{2} = 6\,(6+2) = 48$

et $v^Tb/\underline{(v^Tv/2) = 12/48 = 1/4 = 0.25}$

$$H(v)b = b - (-0.25)\, v = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ -2.0 \\ 3.0 \end{pmatrix} -0.25 \begin{pmatrix} -4.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 1.0 \\ -3.0 \\ 3.0 \end{pmatrix}$$

Dans la pratique pour calculer H(v)b, avec v = a + ou - $\text{norme}_2(a)\, e_1$:

- Calcul de $\text{norme}_2(a)$
- Calcul de v = a + ou - $\text{norme}_2(a)\, e_1$
- Calcul de $v^Tv/2 = \text{norme}_2(a)\,(\text{norme}_2(a)$ + ou - $a_1)$)
- Calcul de $H(v)b = b - (2/v^Tv)(v^T b)\, v$

CX(n) = 2n-1 + 1 + 1 + 2 + 2n – 1 +1 + n + n = 6n + 3 : premier H(v)b

CX(n) = 2n – 1 + 1 + n + n = 4 n : H(v)c suivants, c différent de a et b

Exercice 2, TD "Householder"

Soit u = $\begin{pmatrix} 2.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$

Q1 : Calculez H(v)u tq uniquement la première composante de ce vecteur soit nul

Q2 :Calculez alors H(v)b, avec b = $(2.0,-1.0,-2.0,3.0)^T$

Q3 : Calculez explicitement la matrice de Householder correspondante (*quasiment jamais fait dans la pratique. Ce calcul est juste « pédagogique »*)

$$\frac{v^Tv}{2} = 48 \text{ et } v= \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & (\ 8.0\ \ -4.0\ \ 4.0\ \ 0.0\ ) \\ \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 64. & -32. & 32. & 0.0 \\ -32 & 32 & -16. & 0.0 \\ 32. & -16. & 16. & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$H(v) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.0 & & & \\ & 1.0 & & \\ & & 1.0 & \\ & & & 1.0 \end{pmatrix}}_{I} \underbrace{-}_{-} \underbrace{\frac{1}{48}\begin{pmatrix} 64. & -32. & 32. & 0.0 \\ -32 & 32 & -16. & 0.0 \\ 32. & -16. & 16. & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}}_{\frac{vv^T}{\frac{v^Tv}{2}}} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Exercice 3, TD "Householder", 1

Résoudre le système linéaire suivant par la méthode de Householder (même système linéaire et matrice que pour la méthode de Gauss)

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12.0 & -1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

a

Dans la pratique pour calculer H(v)b, avec v = a + ou - $norme_2$(a) e_1:

- Calcul de $norme_2$(a)
- Calcul de v = a + ou - $norme_2$(a) e_1
- Calcul de $v^Tv/2$ = $norme_2$(a) ($norme_2$(a) + ou - a_1))
- Calcul de H(v)b = b - $(2/v^Tv)(v^T b)$ v

CX(n) = 2n-1 + 1 + 1 + 2 + 2n – 1 +1 + n + n = 6n + 3 : premier H(v)b
CX(n) = 2n – 1 + 1 + n + n = 4 n : H(v)c suivants, c différent de a et b

$norme_2$(a) = 6

$$v = \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \; H(v)a = \begin{pmatrix} -6.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$v^Tv/2$ = 6.0 (6.0 + 2.0) = 48

$$V^T \begin{pmatrix} 1.0 \\ -2.0 \\ 1.0 \\ -3.0 \end{pmatrix} = 20. \;;\quad H(v) \begin{pmatrix} 1.0 \\ -2.0 \\ 1.0 \\ -3.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -2.0 \\ 1.0 \\ -3.0 \end{pmatrix} - 20/48 \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.33 \\ -0.333 \\ -0.667 \\ -3.0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6.0 & \mathbf{-2.33} & & \\ 0.0 & \mathbf{-0.333} & & \\ 0.0 & \mathbf{-0.667} & & \\ 0.0 & \mathbf{-3.00} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Exercice 3, TD "Householder",2

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12. & -1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

a

$\text{norme}_2(a) = 6$

$$v = \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \; H(v)a = \begin{pmatrix} -6.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$v^T v/2 \quad = 6.0\ (\ 6.0 + 2.0\ ) = 48$

$$H(v) \begin{pmatrix} 0.0 \\ 3.0 \\ -2.0 \\ -12. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 3.0 \\ -2.0 \\ -12. \end{pmatrix} + 20/48 \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.33 \\ 1.33 \\ -0333 \\ -12. \end{pmatrix}$$

$$V^T \begin{pmatrix} 0.0 \\ 3\ .0 \\ -2.0 \\ -12.0 \end{pmatrix} = -20.$$

$$\begin{pmatrix} -6.0 & -2.33 & \mathbf{3.33} \\ 0.0 & -0.333 & \mathbf{1.33} \\ 0.0 & -0.667 & \mathbf{-0.333} \\ 0.0 & -3.00 & \mathbf{-12.} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Exercice 3, TD "Householder", 3

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12. & -1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

a

$\text{norme}_2(a) = 6$

$$v = \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \; H(v)a = \begin{pmatrix} -6.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$v^T v/2 \quad = 6.0\ (\ 6.0 + 2.0\ ) = 48$

$$H(v) \begin{pmatrix} 4.0 \\ -5.0 \\ 3.0 \\ -1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.0 \\ -5.0 \\ 3.0 \\ -1.0 \end{pmatrix} - 64/48 \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$V^T \begin{pmatrix} 4.0 \\ -5.0 \\ 3.0 \\ -1.0 \end{pmatrix} = 64.$$

$$\begin{pmatrix} -6.00 & -2.33 & 3.33 & \mathbf{-6.67} \\ 0.00 & -0.333 & 1.33 & \mathbf{0.333} \\ 0.00 & -0.667 & -0.333 & \mathbf{-2.33} \\ 0.00 & -3.00 & -12.0 & \mathbf{-1.00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Exercice 3, TD "Householder", 3

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12. & -1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

a

$\text{norme}_2(a) = 6$

$$v = \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}, \quad H(v)a = \begin{pmatrix} -6.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$v^T v/2 \quad = 6.0\ (\ 6.0 + 2.0\ ) = 48$

$$H(v) \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} - 60/48 \begin{pmatrix} 8.0 \\ -4.0 \\ 4.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.00 \\ -4.00 \\ -3.00 \\ 2.00 \end{pmatrix}$$

$$V^T \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix} = 60.$$

$$\begin{pmatrix} -6.00 & -2.33 & 3.33 & -6.67 \\ 0.00 & -0.333 & 1.33 & 0.333 \\ 0.00 & -0.667 & -0.333 & -2.33 \\ 0.00 & -3.00 & -12.0 & -1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-8.00} \\ \mathbf{-4.00} \\ \mathbf{-3.00} \\ \mathbf{2.00} \end{pmatrix}$$

Exercice 3, TD "Householder", 4

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12. & -1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} -6.00 & -2.33 & 3.33 & -6.67 \\ 0.00 & -0.333 & 1.33 & 0.333 \\ 0.00 & -0.666 & -0.333 & -2.33 \\ 0.00 & -3.00 & -12.0 & -1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.00 \\ -4.00 \\ -3.00 \\ 2.00 \end{pmatrix}$$

α

norme$_2(\alpha)$ = 3.09

$$v_2 = \begin{pmatrix} -3.42 \\ -0.667 \\ -3.00 \end{pmatrix}, \quad H(v)a = \begin{pmatrix} 3.09 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$$v_2^T v_2/2 = 3.09\,(3.09 + 0.333) = 10.6$$

$$\begin{pmatrix} -6.00 & -2.33 & 3.33 & -6.67 \\ 0.00 & 3.09 & w_3 & w_4 \\ 0.00 & 0.0 & & \\ 0.00 & 0.0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.00 \\ w5 \\ \\ \end{pmatrix}$$

Nous calculons ensuite $H(v_2)\, w_i$

Après la troisième étape, la matrice est triangulaire supérieure et il suffit de faire une "descente" pour calculer la solution "x"

La méthode

$$R\,x = Q^T b$$

1 – Calculez R et Q

2 – Calculez $Q^T b = c$

3 – Résoudre R x = c

Nous pouvons calculer au fur et à mesure lors de la factorisation QR

$CX(n) = (4/3)\,qn^2 + O(n^2)$

Exercice “Moindres carrés”

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -2.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 6.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 2.0 & -3.0 & -12.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 6.0 & 0.0 \\ 4.0 & -5.0 & -3.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ -1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Q1 : Résoudre en utilisant la méthode de Cholesky

Q2 : Résoudre en utilisant une factorisation QR

Q3 : Ecrire un programme pour cette méthode (*homework*)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 6.0 & 2.0 & 0.0 & 4.0 \\ 1.0 & -2.0 & 1.0 & -3.0 & 1.0 & -5.0 \\ 0.0 & 3.0 & -2.0 & -12. & 6.0 & -3.0 \\ 4.0 & -5.0 & 3.0 & -1.0 & 0.0 & -2.0 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -2.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 6.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 2.0 & -3.0 & -12.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 6.0 & 0.0 \\ 4.0 & -5.0 & -3.0 & -2.0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 64.0 & -14.0 & -54.0 & 26.0 \\ -14.0 & 41.0 & 49.0 & 30.0 \\ -54.0 & 49.0 & 202. & -3.00 \\ 26.0 & 30.0 & -3.00 & 55.0 \end{pmatrix}}_{A^TA}$$

Nous savons que A^TA est symétrique définie positive

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 6.0 & 2.0 & 0.0 & 4.0 \\ 1.0 & -2.0 & 1.0 & -3.0 & 1.0 & -5.0 \\ 0.0 & 3.0 & -2.0 & -12. & 6.0 & -3.0 \\ 4.0 & -5.0 & 3.0 & -1.0 & 0.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ -1.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}}_{A^Tb} = \begin{pmatrix} 40 \\ 12.5 \\ -62.5 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 64.0 & -14.0 & -54.0 & 26.0 \\ -14.0 & 41.0 & 49.0 & 30.0 \\ -54.0 & 49.0 & 202. & -3.00 \\ 26.0 & 30.0 & -3.00 & 55.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 12.5 \\ -62.5 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$A^TA\, x = A^Tb$$

$$\begin{pmatrix} 64.0 & -14.0 & -54.0 & 26.0 \\ -14.0 & 41.0 & 49.0 & 30.0 \\ -54.0 & 49.0 & 202. & -3.00 \\ 26.0 & 30.0 & -3.00 & 55.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 12.5 \\ -62.5 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Résoudre alors ce système symétrique définie positif par la méthode de Cholesky

$$A^T A \, x = A^T b$$

$$L = \begin{pmatrix} X & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ X & X & 0.0 & 0.0 \\ X & X & X & 0.0 \\ X & X & X & X \end{pmatrix}$$