PROBABILITÉS 2 GIS2A3

Partie 1 : Intégration multiple

Exercice 1 :

Etudier l'existence (ou non-existence) de l'intégrale multiple des fonctions suivantes :

1. f est la fonction définie par $f(0,0) = 0$ et, pour tout $(x, y) \in (0, 1]^2$, par
$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$
2. g est la fonction définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par
$$g(x, y) = \frac{1}{x + y} \mathbb{1}_D(x, y),$$
où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x,\ 1 \leq y,\ x + y \leq 4\}$.
3. h est la fonction définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par
$$h(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} \mathbb{1}_D(x, y),$$
où $D = \{(x, y) \in (0, +\infty)^2 :\ x^2 + y^2 < 1\}$ et α est un réel strictement positif.
4. k est la fonction définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par
$$k(x, y) = xy\mathbb{1}_D,$$
où $D = \{(x, y) \in (0, +\infty)^2 :\ x^2 \leq y,\ y^2 \leq x\}$.
5. ℓ est la fonction définie, pour tout $(x, y, z) \in (0, 1)^3$, par
$$\ell(x, y, z) = \frac{1}{1 - xyz}.$$

Exercice 2 :

Soient a, b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

1. Calculer $\int_a^b e^{-xy} dy$. En déduire la valeur l'intégrale I suivante
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$
2. Par une méthode analogue, calculer l'intégrale J suivante
$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx.$$

Exercice 3 :

Soit $a > 0$ et $D_a = (0, a) \times (0, +\infty)$.

1. Soit f la fonction définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, par
$$f(x,y) = \frac{\sin(x)}{x} e^{-y}.$$
Discuter l'existence de l'intégrale multiple de f sur l'ensemble D_a.
2. Montrer que l'application T définie par $T(x, y) = (x, xy)$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de D_a sur lui-même.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = e^{-xy}\sin(x)$. Montrer que l'intégrale multiple de g sur D_a existe et comparer son intégrale à celle de f.
4. Exprimer $\int_0^a \frac{\sin(u)}{u} du$ en fonction des intégrales suivantes
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ay}}{1+y^2} dy, \quad \int_0^{+\infty} \frac{ye^{-ay}}{1+y^2} dy.$$
Indication : On admettra le résultat suivant
$$\int_0^a \sin(x)e^{-xy}dx = \frac{1}{1+y^2}\left(1 - e^{-ay}\left(y\sin(a) + \cos(a)\right)\right)$$
5. En déduire "heuristiquement" la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.

Partie 2 : Vecteurs aléatoires

Exercice 4 :

On forme au hasard 100 couples à partir d'un groupe initialement composé de 100 hommes et 100 femmes. On numérote les hommes de 1 à 100, puis on pose $X_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ homme est associé à une femme et $X_i = 0$ sinon. Soit $X = X_1 + \cdots + X_{100}$.

1. Calculer $\mathbf{E}(X_i)$ et $\mathbf{E}(X_iX_j)$ (faire attention aux deux cas possibles : $i = j$ et $i \neq j$).
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$.
3. Donner une borne supérieure pour la probabilité qu'au plus 30% des couples formés soient mixtes.

Exercice 5 :

On sait qu'il y a 2 transistors défectueux dans un emballage en contenant 5. Les transistors sont testés, l'un après l'autre, jusqu'à ce que les 2 éléments défectueux aient été identifiés. Soit N_1 le nombre de tests pour identifier le premier transistor défectueux, et N_2 le nombre de tests supplémentaires pour identifier le second. Écrire un tableau décrivant la loi de probabilité jointe du couple (N_1, N_2). Calculer $\mathbf{E}\, N_1$ et $\mathbf{E}\, N_2$.

Exercice 6 :

On considère le vecteur aléatoire (X_1, X_2) distribué selon la loi uniforme dans le disque $D(R)$ centré en l'origine et de rayon R. La densité du vecteur (X_1, X_2) est donnée par :
$$f(x_1, x_2) = c\,\mathbb{1}_{D(R)}(x_1, x_2),$$
où c est une constante positive.

1. Déterminer la constante c.
2. Déterminer les lois marginales de X_1 et de X_2.
3. Soit L la distance séparant le point (X_1, X_2) de l'origine. Calculer $\mathbb{P}(L \leq a)$ pour tout réel a.
4. En déduire la loi de L, ainsi que son espérance.

Exercice 7 :

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}.\mathbb{P})$. On suppose que la loi de ce vecteur est continue à densité, notée f et donnée, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, par

$$f(x, y) = \frac{1}{y} \mathbb{1}_D(x, y),$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 1 \quad 0 \leq x \leq y\}$.

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les densités marginales des variables aléatoires X et Y.
3. Calculer le vecteur moyenne et la matrice de covariance du vecteur (X, Y).

Exercice 8 :

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}.\mathbb{P})$. On suppose que la loi de ce vecteur est continue à densité, notée f et donnée, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, par

$$f(x, y) = \exp(-y) \mathbb{1}_D(x, y),$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq y\}$.

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les densités marginales des variables aléatoires X et Y.
3. Calculer le vecteur moyenne et la matrice de covariance du vecteur (X, Y).

Exercice 9 :

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}.\mathbb{P})$. On suppose que la loi de ce vecteur est continue à densité, notée f et donnée, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, par

$$f(x, y) = \exp(-(x + y)) \mathbb{1}_{(0,+\infty)^2}(x, y),$$

Calculer la densité de la variable aléatoire X/Y.

Partie 3 : Indépendance de variables aléatoires réelles

Exercice 10 :

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. Montrer que $X + Y$ et $|X - Y|$ sont des variables aléatoires non-corrélées mais dépendantes.

Exercice 11 :

Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Notons $Y = X^2$.

1. Montrer que $\mathbf{E}(XY) = 0$. En déduire que $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X > 1/2, Y > 1/4)$ et $\mathbb{P}(X > 1/2)\mathbb{P}(Y > 1/4)$, puis conclure.

Exercice 12 :

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Déterminer et tracer la densité de $U + V$.
2. Déterminer la loi de $T = \min(U, V)$ et celle de $Z = \max(U, V)$.
3. Déterminer la covariance du couple (Z, T).
4. Déterminer la loi du couple (Z, T).

Exercice 13 :

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On considère les variables aléatoires réelles définies par

$$X = \sqrt{-2 \log U} \cos(2\pi V), \quad Y = \sqrt{-2 \log U} \sin(2\pi V).$$

Montrer que X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
On considère maintenant deux suites indépendantes $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Soit $N = \inf\{n \geq 1,\ 0 < U_n^2 + V_n^2 < 1\}$ et

$$X = U_N \sqrt{\frac{-2 \log\left(U_N^2 + V_N^2\right)}{U_N^2 + V_N^2}} \quad Y = V_N \sqrt{\frac{-2 \log\left(U_N^2 + V_N^2\right)}{U_N^2 + V_N^2}}$$

1. Quelle est la loi de N ?
2. Montrer que X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Exercice 14 :

Soient $X_1, ..., X_n$ des va i.i.d. d'espérance μ et de variance σ^2. Notons :

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

1. La variable aléatoire $\overline{X}_n$ est appelée *moyenne empirique* de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$. Montrer que $\mathbf{E}(\overline{X}_n) = \mu$.
2. La variable aléatoire S_n^2 est appelée *variance empirique* de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$. Montrer que $\mathbf{E}(S_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

Partie 4 : Fonction génératrice des moments

Exercice 15 :

Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que sa fonction génératrice des moments vaut

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Calculer la fonction génératrice des moments de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
3. Quelle est la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$?

Exercice 16 :

Soit $d \geq 1$ et soient $X_1, \ldots, X_d$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, X_i suit une loi gamma de paramètres $(\alpha_i, 1)$ avec $\alpha_i > 0$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de X_1.
2. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, calculer la fonction génératrice des moments de X_i.
3. En déduire une formule pour la fonction génératrice des moments de $X_1 + \cdots + X_d$.
4. Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_d$?
5. Soient $Z_1, \ldots, Z_d$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distributées suivant une loi normale centrée réduite. Quelle est la loi de $Z = Z_1^2 + \cdots + Z_d^2$?

Exercice 17 :

Soit X une v.a. de loi géométrique de paramètre p. Montrer que sa fonction génératrice des moments vaut

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p).$$

Exercice 18 :

En utilisant les fonctions génératrices des moments, (re)trouver le fait qu'une loi de Poisson de paramètre λ peut être approchée par une loi binomiale de paramètres n et p_n avec n grand, p_n petit, et $np_n \approx \lambda$.

Exercice 19 :

Les fonctions génératrices des moments des v.a. X et Y sont données par

$$M_X(t) = e^{2(e^t-1)} \quad \text{et} \quad M_Y(t) = \left(\frac{3e^t+1}{4}\right)^{10}.$$

Si X et Y sont indépendantes, que valent $\mathbb{P}(X+Y=2)$ et $\mathbf{E}(XY)$?

Partie 5 : Suites et Séries de fonctions

Exercice 20 :

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, par

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction f à préciser.
2. Cette convergence est-elle uniforme ?

Exercice 21 :

Etudier la convergence simple et uniforme sur $(0, +\infty)$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies, pour tout $x \in (0, +\infty)$ et pour tout $n \geq 0$, par

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{n+x}{1+nx}\right).$$

Exercice 22 :

Pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n(x)$.
2. Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 2} f_n$ sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.
3. En déduire que la fonction f est continue sur $(0, +\infty)$.

Exercice 23 :

Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 + x^2};$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 :

Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f_n(x) = xe^{-nx^2}\left((n+1)e^{-x^2} - n\right).$$

1. Déterminer la somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.
2. Calculer les deux quantités suivantes

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)dx, \qquad \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(x)dx.$$

3. Que peut-on en conclure ?

Partie 6 : Convergence de suites de variables aléatoires réelles et théorèmes limites

Exercice 25 :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \mathbb{P}\left(X_n = n\right) = \frac{1}{n^2}.$$

Cette suite converge-t-elle en probabilité ? Et en moyenne quadratique ?

Exercice 26 :
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $c := \sup_{i\geq 1}\mathbb{E}|X_i|^2 < +\infty$ et telle que $\mathbb{E}[X_iX_j] = 0$ pour $i \neq j$. Montrer que la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$ tend vers 0 en moyenne quadratique et en probabilité.

Exercice 27 :
La durée de vie d'une ampoule électrique peut être modélisée par une v.a. X de loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec un paramètre inconnu $\theta > 0$. Afin d'optimiser l'agenda du réparateur, on cherche à estimer θ à l'aide de n v.a. indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de même loi que X. On propose d'utiliser

$$\widehat{\theta}_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k \quad \text{ou} \quad \widetilde{\theta}_n = \frac{2}{n}\,(X_1 + \cdots + X_n).$$

1. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ converge en probabilité vers θ, c'est-à-dire que pour tout $\delta > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\widehat{\theta}_n - \theta\right| > \delta\right) = 0.$$

2. Montrer que $\widetilde{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \widetilde{\theta}_n = \theta\right) = 1.$$

Exercice 28 :
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$, $(\theta \in \mathbb{R})$. Le paramètre θ est inconnu et on va donc construire dans cet exercice un estimateur de ce paramètre possèdant de bonnes propriétés.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$?
2. Montrer que quelle que soit la valeur de θ on a

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p.s.} \theta \quad \mathbb{E}\left|\overline{X}_n - \theta\right|^2 \longrightarrow 0.$$

3. Construire un intervalle de la forme $[a_1(X_1), b_1(X_1)]$ tel que $\mathbb{P}\left(\theta \in [a_1(X_1), b_1(X_1)]\right) = 95\%$.
4. Construire un intervalle de la forme $[a_n(X_1, \ldots, X_n), b_n(X_1, \ldots, X_n)]$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\theta \in [a_n(X_1, \ldots, X_n), b_n(X_1, \ldots, X_n)]\right) = 95\%.$$

Exercice 29 :
On considère le carré $C = [0, 1]^2$, le disque D de centre $(1/2, 1/2)$ et de rayon $1/2$ et une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ (de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$) i.i.d. de loi uniforme dans le carré C. On souhaite approcher π en utilisant le nombre de points Y_n, $n \geq 1$, tombant dans le disque D.

1. Préciser cette méthode d'approximation de π.

2. En utilisant le théorème centrale limite, calculer le nombre minimum de tirages N que l'on doit effectuer pour que la probabilité de s'écarter de π de plus de $0{,}01$ soit inférieure à $0{,}1\%$.

Exercice 30 :

Un joueur participe au jeu suivant : à chaque étape du jeu, on peut doubler ou diviser son portefeuille avec une probabilité de $(1-\varepsilon)/2$ ou tout perdre avec probabilité ε, pour $\varepsilon \in (0,1)$. Le portefeuille de départ du joueur contient 1 euro. On note par G_n l'état du portefeuille après n étapes.

1. Calculer $\mathbb{P}(G_n = 0)$ ainsi que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(G_n = 0)$
2. Quelles valeurs peut prendre G_n ? Donner la loi de G_n
3. Calculer $\mathbb{E}[G_n]$ ainsi que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[G_n]$

Partie 7 : Espérance et distributions conditionnelles

Exercice 31 :

Soient X et Y deux v.a. dont la loi jointe est donnée par

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0,2	0,3	0,1
1	0,1	0,1	0,2

Déterminer la distribution conditionnelle, l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle de Y sachant que $X = 0$. Refaire la même chose sachant que $X = 1$.

Exercice 32 :

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la distribution jointe est donnée par

$X\backslash Y$	2	4	6
0	0,1	0,2	0,1
1	0,1	0,1	0,1
2	0,1	0,1	0
3	0,05	0	0,05

1. Calculer $\mathbf{E}\,Y$ et $\mathbf{Var}(Y)$.
2. Calculer $\mathbf{E}(Y \mid X)$ et $\mathbf{Var}(Y \mid X)$.
3. Préciser les lois des v.a. $\mathbf{E}(Y \mid X)$ et $\mathbf{Var}(Y \mid X)$.
4. Vérifier enfin la formule de la variance conditionnelle

$$\mathbf{Var}(Y) = \mathbf{E}\big(\mathbf{Var}(Y \mid X)\big) + \mathbf{Var}\big(\mathbf{E}(Y \mid X)\big).$$

Exercice 33 :

Considérons deux v.a. X et Y indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi conditionnelle de X sous la condition $X + Y = n$.

Exercice 34 :

Soient X et Y deux v.a. dont la loi jointe est donnée par la densité

$$f(x,y) = \frac{e^{-x/y}\, e^{-y}}{y}\, \mathbb{1}_{]0,\infty[^2}(x,y).$$

1. Déterminer la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x\,|\,y)$ de X sachant $Y = y$ (pour tout $y > 0$). Calculer $\mathbf{E}(X\,|\,Y = y)$.

2. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X > 1\,|\,Y = y)$.

Exercice 35 :

Soit le disque $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ centré en origine et de rayon 1, et soit (X,Y) un vecteur aléatoire distribué selon la loi uniforme sur ce disque.

1. Donner la densité jointe du couple (X,Y).

2. Calculer la densité marginale de X.

3. Calculer la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x\,|\,y)$ de X sachant $Y = y$ $\big($pour tout $y \in [-1,1]\big)$. En déduire une méthode de simulation de la loi uniforme sur le disque D à partir de lois unidimensionnelles (en supposant qu'on sait les simuler).

Exercice 36 :

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\{0,1\}$. On suppose que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. On suppose de plus que pour tout $n \geq 1$ on a $\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = p$ et $\mathbb{P}\left(Y_n = 1\right) = q$ où $p, q \in]0,1[$. Finalement, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k$$

et $N = \inf\{n \geq 0\, T_{n+1} = 1\}$.

1. Quelles sont les lois de S_n et T_n ?
2. Quelle est la loi de N ?
3. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$\mathbb{P}\left(X_k = 1 | N = n\right) = \mathbb{P}\left(X_k = 1 | X_k Y_k = 0\right) = \frac{p(1-q)}{1-pq}.$$

4. Montrer que, pour tout $x_1, \ldots x_n \in \{0,1\}$,

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^{n}\{X_i = x_i\} | N = n\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i = x_i | N = n\right).$$

5. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}\left(S_N = k | N = n\right)$, $\mathbb{E}[S_N | N = n]$ et $\mathbb{E}[S_N]$.