VARIABLES ALEATOIRES REELLES

Exercice 5 - Loi de Laplace

On considère une variable aléatoire X dont la densité est donnée par

$$f(x) = ce^{-|x|}.$$

1. Calculer c.
2. Démontrer que X admet des moments de tout ordre. Les calculer.

Exercice 6 - Étude d'une densité et d'une fonction de variable aléatoire

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et 0 sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = 2X + 1$.
   - 4.1. Déterminer la fonction de répartition de Y.
   - 4.2. Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité de Y.
   - 4.3. Reprendre les mêmes questions avec $Y = X^2$.

Exercice 7 · Exponentiel des deux côtés!

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} a.3^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a.3^{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition de X. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et la calculer.
3. On pose $Y = 3^X$. Déterminer la fonction de répartition de Y. Y admet-elle une espérance?

Exercice 8 Loi log-normale

Soient m, σ deux réels. On dit que X suit une loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On supposera dans la suite $m = 0$ et $\sigma = 1$.

1. Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition ϕ de la loi normale centrée réduite.
2. Calculer sa densité.
3. Démontrer que $E(X) = \sqrt{e}$.

Exercice 9 - Étude d'une densité

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité.
2. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Etudier les variations de φ. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$, et déterminer sa bijection réciproque.
3. On définit une variable aléatoire Y par :

$$Y = \varphi(X) = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}.$$

Déterminer la fonction de répartition et une densité de Y.

Exercice 10 - Un moyen de simuler la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Déterminer la loi de $T = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$, où $\lambda > 0$. En déduire un algorithme permettant de simuler la loi exponentielle de paramètre 5.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

1. Démontrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X. On note F sa fonction de répartition (qu'on ne demande pas de calculer).
2. On considère la variable aléatoire $Y = \ln(1+|X|)$ et on note G sa fonction de répartition. Exprimer G en fonction de F.
3. En déduire que Y admet une densité que l'on calculera.
4. Reconnaitre la loi de Y.

Exercice 12 Entropie

Si X est une variable aléatoire admettant une densité f, on appelle entropie de X la quantité suivante (si elle existe)

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln f(x)dx.$$

1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
2. Calculer l'entropie d'une variable aléatoire uniforme.
3. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Démontrer que

$$h(X) = \frac{1}{2}\left(1 + \ln(2\pi\sigma^2)\right).$$