

VARIABLES ALEATOIRES REELLES



Exercice 1 - Densité ou non?

Parmi les fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} , déterminer lesquelles sont la densité d'une variable aléatoire à densité. Calculer le cas échéant leur fonction de répartition et préciser si elles admettent une espérance.

$$1. f_1(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$2. f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$3. f_3(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$4. f_4(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$5. f_5(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$6. f_6(x) = \sin x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 Loi de Cauchy

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$. Déterminer a pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X . Déterminer la fonction de répartition de X . X admet-elle une espérance?

Exercice 3 Une densité

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{a}{x\sqrt{x}}$ si $x \geq 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X .
2. Déterminer la fonction de répartition associée à X .
3. X admet-elle une espérance? Si oui, la déterminer.

Exercice 4 La station-service

Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité $f(x) = c(1-x)^4 \mathbf{1}_{[0,1]}$.

1. Déterminer c .
2. La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à 10^{-5} ?