Université de Lille 1 Sciences et Technologies

POLYTECH LILLE

Structures Mathématiques

GIS 2A 3

Septembre 2016

Table des matières

Chapitre 1

Les Développements Limités

Dans ce chapitre, nous utiliserons l'abréviation DL pour "développement limité".

1.1 Introduction

À partir de l'identité

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) ,$$

on déduit la limite suivante, valable pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + \ldots + x^n) . \tag{1.1}$$

Posons

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ et } P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n .$$

Il faut voir (1.1) comme un résultat d'approximation ; cette limite permet d'évaluer de manière relativement précise la valeur prise par la fonction f, en calculant le polynôme P_n. Plus n est grand, meilleure est l'approximation pour un x donné. Dans ce cas particulier, il est facile de calculer l'erreur commise lorsqu'on remplace $f(x)$ par $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) - P_n(x) &= \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \ldots + x^n) \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{x^{n+1}}{1-x} . \end{aligned}$$

Pour $x = 0,1$ et $n = 5$, l'erreur $f(0,1) - P_5(0,1) = (0,9)^{-1} \times (0,1)^6$ est de l'ordre du millionième, i.e. 10^{-6}.

L'idée à retenir est la suivante. Faire un DL d'une fonction (pouvant être difficilement calculable) c'est l'approximer localement par un polynôme (donc facilement calculable). L'objectif de ce cours est de donner des méthodes de calculs de DL.

1.2 Généralités

Dans le but de quantifier l'erreur d'approximation entre une fonction et le polynôme qui l'approxime, on introduit la notation "$\varepsilon(x)$". On appelle voisinage de 0 tout intervalle ouvert contenant 0.

Définition 1.2.1. *Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f est un $\varepsilon(x)$ lorsque x tend vers 0 si*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \, .$$

Un $\varepsilon(x)$ est simplement une quantité dépendant de x, qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Par exemple, les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^{10}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ou encore $x \mapsto x\ln(x)$ sont des $\varepsilon(x)$ lorsque x tend vers 0.
Lorsque f est un $\varepsilon(x)$, on écrit parfois $f(x) = \varepsilon(x)$. Mais attention ! Cette écriture est parfois source de confusion. En effet, si f et g sont des $\varepsilon(x)$ alors, par définition, il en est de même pour la différence $f - g$, ce qui se traduit par $\varepsilon(x) - \varepsilon(x) = \varepsilon(x)$!

Définition 1.2.2. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0. On dit que f est négligeable devant g lorsque x tend vers 0 si*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \, .$$

On écrit dans ce cas $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

Supposons que f et g tendent toutes deux vers 0 lorsque x tend vers 0. Alors, le fait que f soit négligeable devant g signifie que f tend plus vite que g vers 0. Par exemple, les monômes $x \mapsto x^n$, pour $n > 4$ sont négligeables devant $x \mapsto x^4$ lorsque x tend vers 0.

Il est temps de définir précisément la notion de DL.

Définition 1.2.3. *Soient f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet un DL d'ordre n en 0 (que l'on abrège en DL$_n(0)$) s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \, , \tag{1.2}$$

lorsque x tend vers 0.

L'identité (1.2) signifie que f est approximée localement (au voisinage de 0) par le polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ et que l'erreur d'approximation

$$f(x) - P(x) = x^n \varepsilon(x)$$

est négligeable devant x^n. L'ordre du DL donne la précision de l'approximation ; plus l'ordre est élevé et plus l'approximation est fine. Il faut absolument noter le caractère local d'un DL : (1.2) est une limite et n'est valable que lorsque x est très proche du point 0.
Enfin, la définition de DL s'étend à tout réel x_0. On dit que f admet un DL$_n(x_0)$ s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0) \, ,$$

lorsque x tend vers x_0 (où $\varepsilon(x - x_0)$ est une quantité qui tend vers 0 quand x tend vers x_0). Pour alléger la présentation, tout ce qui suit concerne le cas particulier $x_0 = 0$ mais est valable pour tout réel.

Un DL quand il existe, est unique.

Proposition 1.2.4. *Supposons qu'une fonction f admette deux DL$_n(x_0)$:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \ \ et \ \ f(x) = a'_0 + a'_1 x + \ldots + a'_n x^n + x^n \varepsilon(x) \ ,$$

lorsque x tend vers 0. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$, les coefficients a_i et a'_i sont égaux.

Le prochain résultat donne une condition assurant l'existence de DL : plus la fonction est régulière (i.e. plus elle est dérivable) et plus il est possible de l'approximer finement par un polynôme. La Proposition 1.2.5 donne également (et surtout !) un moyen simple d'obtenir des DL.

Proposition 1.2.5. *Soit f une fonction $n \geq 1$ fois dérivable en 0. Alors f admet un DL$_n(0)$ qui est donné par :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x) \ , \tag{1.3}$$

lorsque x tend vers 0 (où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n^e de f).

La réciproque est fausse : la fonction f définie par

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, admet un DL$_2(0)$ et pourtant $f''(0)$ n'existe pas.
La Proposition 1.2.5 permet d'obtenir à grands coups de dérivation des DL à tout ordre, à condition que les fonctions considérées soient suffisamment dérivables (ce qui sera notre cas).

Démonstration Éxaminons le cas $n = 1$. Supposons que f est dérivable en 0. Alors par définition :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \ .$$

Autrement dit, la différence

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0)$$

est un $\varepsilon(x)$, lorsque x tend vers 0. Ceci se réécrit comme suit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) \ .$$

On obtient ainsi un DL$_1(0)$ de f avec les bons coefficients. Pour la démonstration générale, il suffit de procéder par récurrence sur n. ■

Voici une liste de DL en 0 de fonctions classiques, obtenus d'après la Proposition 1.2.5 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6 \varepsilon(x)$$

et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x) \ .$$

La puissance de x devant le terme $\varepsilon(x)$ indique l'ordre du DL. Par exemple, le DL ci-dessus de cos est à l'ordre $2n+1$.

1.3 Opérations sur les DL

Les opérations décrites dans cette section sont autant de nouvelles méthodes pour calculer des DL.

Proposition 1.3.1. ***(Opérations algébriques)*** *Soient f et g deux fonctions admettant des DL$_n(0)$.*

- *La somme $f+g$ admet un DL$_n(0)$ qui est la somme de ceux de f et g.*
- *Le produit fg admet un DL$_n(0)$ qui est obtenu à partir du produit de ceux de f et g.*
- *Si de plus $g(0) \neq 0$ alors le rapport $\frac{f}{g}$ admet un DL$_n(0)$.*

On cherche un DL$_4(0)$ de $f(x) = e^x \cos(x)$. Les fonctions e et cos étant indéfiniment dérivables, elles admettent des DL$_4(0)$. Donc leur produit aussi d'après le résultat précédent. Calculons-le :

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right) .$$

Il s'agit maintenant de développer l'expression ci-dessus. Cependant, tous les termes négligeables devant x^4 (i.e. les x^n avec $n > 4$) seront "rangés" dans le reste $x^4\varepsilon(x)$. Plus précisément, tous les termes du produit

$$1 \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right)$$

sont à conserver. Ce n'est pas le cas du produit

$$-\frac{x^2}{2!} \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right)$$

qui se réécrit, après "rangement" dans le reste $x^4\varepsilon(x)$:

$$-\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{(2!)^2} + x^4\varepsilon(x) .$$

La contribution du produit

$$\frac{x^4}{4!} \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right)$$

est limitée :

$$\frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) .$$

Enfin le dernier produit

$$x^4\varepsilon(x) \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)\right)$$

n'est autre qu'un $x^4\varepsilon(x)$. Après addition et simplification de ces expressions, il vient :

$$e^x \cos(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x) .$$

Proposition 1.3.2. ***(Composition)*** *Si g admet un DL$_n(0)$ et f admet un DL$_n(g(0))$ alors $f \circ g$ admet un DL$_n(0)$ qui s'obtient par composition des DL de f et g.*

On cherche un $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$. Avec $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$, il vient $e^{x^2} = f \circ g(x)$. Les fonctions f et g sont indéfiniment dérivables donc admettent des $\mathrm{DL}_4(0)$ (ici $g(0) = 0$). D'après la Proposition 1.3.2, $x \mapsto e^{x^2}$ admet également un $\mathrm{DL}_4(0)$. Reste désormais à le calculer. La fonction g est un polynôme, son DL est donc gratuit ! Un $\mathrm{DL}_4(0)$ de f est suffisant pour obtenir un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f \circ g$. Cependant, dans ce cas précis, on peut se contenter d'un $\mathrm{DL}_2(0)$ de f. En effet, le terme de plus petit degré dans le DL de g est x^2. Allons-y :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x) \ ,$$

lorsque x tend vers 0, et

$$\begin{aligned} e^{x^2} = f \circ g(x) &= 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2!} + (x^2)^2\varepsilon(x) \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + x^4\varepsilon(x) \ , \end{aligned}$$

lorsque x tend vers 0.

Le prochain résultat affirme que le DL de la primitive d'une fonction est égal à la primitive de son DL.

Proposition 1.3.3. ***(Intégration)*** *Considérons une fonction f dont la dérivée f' admet le $\mathrm{DL}_n(0)$ suivant :*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n\varepsilon(x) \ ,$$

lorsque x tend vers 0. Alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ donné par :

$$f(x) = f(0) + a_0 x + a_1\frac{x^2}{2} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x) \ ,$$

lorsque x tend vers 0.

Un $\mathrm{DL}_5(0)$ de $f(x) = \ln(1+x)$ peut s'obtenir, en utilisant la Proposition 1.3.3., à partir d'un $\mathrm{DL}_4(0)$ de f' :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x) \ ,$$

lorsque x tend vers 0. Il s'agit donc d'intégrer terme à terme :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x) \ ,$$

lorsque x tend vers 0.

Le prochain résultat est l'opération inverse du résultat d'intégration. Il affirme que le DL de la dérivée d'une fonction est égal à la dérivée de son DL.

Proposition 1.3.4. ***(Dérivation)*** *Considérons une fonction f qui soit $n \geq 2$ fois dérivable en 0 et qui admet le $\mathrm{DL}_n(0)$ suivant :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n\varepsilon(x) \ ,$$

lorsque x tend vers 0. Alors sa dérivée f' admet un $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ donné par :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x) \ ,$$

lorsque x tend vers 0.

1.4 Calculs de limites

L'intérêt principal des DL est d'obtenir des vitesses de convergence, ce qui permet parfois de lever l'*indétermination* dans un calcul de limites. Voici un exemple :

$$f(x) = \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} ,$$

définie pour tout $x \neq 0$. Son numérateur et son dénominateur tendent vers 0 lorsque x tend vers 0. Au lycée, cette limite était paresseusement appelée *forme indéterminée*, et l'étude s'arrêtait là. Les DL vont nous permettre de déterminer les vitesses auxquelles le numérateur et le dénominateur de f tendent vers 0, afin de les comparer. Il vient :

$$\tan(x) - x = \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) ,$$

$$\sin(x) - x = -\frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) ,$$

lorque x tend vers 0. Après simplification par x^3 :

$$f(x) = \frac{\frac{1}{3} + \varepsilon(x)}{-\frac{1}{6} + \varepsilon(x)}$$

qui tend vers -2 lorque x tend vers 0.

1.5 Exercices

Exercice 1
Soit $P(x) = x^2$. Déterminer les DL en 0 de P à l'ordre $n = 1, 2, 3, 4$ et 5.

Exercice 2
Retrouver par la dérivation les développements limités à l'ordre 3 et en 0 des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ et } g(x) = \cos(x) \; .$$

Exercice 3
Démontrer, lorsque $x \to 0$, les résultats suivants :

$$\cos(x)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x) \; .$$

$$\frac{1}{1-\sin(x)} = 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + x^4\varepsilon(x) \; .$$

$$\ln(1 + x^2\sin(x)) = x^3 - \frac{x^5}{6} - \frac{x^6}{2} + x^6\varepsilon(x) \; .$$

$$e^{\sqrt{1+x}} = e + \frac{ex}{2} + \frac{ex^3}{48} + x^3\varepsilon(x) \; .$$

Exercice 4
1. Démontrer, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, la relation $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
2. En déduire une nouvelle méthode permettant de retrouver le DL à l'ordre 3 de la fonction $\tan$.

Exercice 5
Dans les limites ci-dessous, lever l'indétermination après l'avoir identifiée.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \; a \in \mathbb{R} \; .$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2} \; .$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^3} = 0 \; .$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\tan^2(x)} = \frac{1}{2} \; .$$

Exercice 6
Donner la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de l'expression

$$\left[e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{1/x} \; .$$

Chapitre 2

L'intégrale de Riemann

En 1854, Riemann développa la théorie de l'intégration. Il définit son intégrale à l'aide de ses fameuses "sommes de Riemann". Dans ce chapitre, nous expliquerons brièvement les idées de Riemann mais l'accent sera surtout mis sur les méthodes de calculs des intégrales.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont à valeurs réelles.

2.1 Idée de la construction

Le but de cette section n'est pas de définir précisément l'intégration au sens de Riemann mais plutôt d'en donner une idée.

Soit $a < b$ des réels et f une fonction définie sur le segment $[a, b]$. Vous avez appris au lycée que la quantité $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire de la région comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses, comptée positivement quand cette région est au dessus de l'axe des abscisses et négativement quand elle est en dessous. Pour donner un sens rigoureux à cet objet, Riemann a introduit les "sommes de Riemann".

Définition 2.1.1. *Une subdivision Δ du segment $[a, b]$ est un ensemble fini de réels $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tels que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Le pas de la subdivision est :*

$$h(\Delta) = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} .$$

Le pas de la subdivision Δ est la longueur du plus grand sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

Définition 2.1.2. *Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ et $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, choisissons un réel ε_i dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. La somme*

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\varepsilon_i)$$

est appelée somme de Riemann de f associée à la subdivision Δ.

On pressent alors qu'à condition que f soit assez régulière, la somme $S(f, \Delta)$ tend vers l'aire de la région comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses, lorsque la subdivision Δ devient de plus en plus fine (i.e. lorsque le pas $h(\Delta)$ tend vers 0). La définition suivante rend compte de cette idée :

Définition 2.1.3. *On dit qu'une fonction f définie sur $[a, b]$ est Riemann intégrable ou intégrable au sens de Riemann si la limite suivante existe (indépendamment de la suite des subdivisions) :*

$$\lim_{h(\Delta)\to 0} S(f, \Delta) . \tag{2.1}$$

Quand c'est le cas, on la note $\int_a^b f(x)dx$.

Lorsque le pas de la subdivision est très petit, chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ est vu comme un accroissement infinitésimal (entre $x_{i-1} = x$ et $x_i = x + dx$) de longueur dx. Ainsi, la quantité $f(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1})$ représentant l'aire d'un rectangle devenu très fin, est approximé par le produit $f(x)dx$. La somme de Riemann $S(f, \Delta)$ est alors proche de

$$\sum_{x=a}^{b} f(x)\,dx\ .$$

En passant du discret au continu (i.e. en passant à la limite $h(\Delta) \to 0$), le symbole somme Σ se transforme en $\int$. On récupère alors la notation habituelle $\int_a^b f(x)dx$.

Voici une première conséquence de la définition de l'intégrale de Riemann : l'intégrale de la fonction constante égale à 1 sur $[a; b]$ correspond à l'aire du rectangle de hauteur 1 et de longueur $b - a$:

$$\int_a^b 1\,dx = b - a\ .$$

Déterminer si la limite (2.1) existe ou non peut s'avérer difficile. Comme cela a été dit précédemment, ce n'est pas l'objectif de ce cours. En effet, toutes les fonctions que nous rencontrerons seront Riemann intégrables. Voici cependant une condition suffisante rassurante.

Théorème 2.1.4. *Toute fonction bornée sur $[a, b]$ et n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité est Riemann intégrable.*

Il existe des fonctions qui ne sont pas Riemann intégrables. Citons par exemple la fonction indicatrice des rationnels du segment $[0, 1]$.

2.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Toutes les fonctions de cette section sont Riemann intégrables sur les intervalles sur lesquels elles sont considérées.

Proposition 2.2.1. ***(Linéarité)*** *Soient f, g deux fonctions définies sur un segment $[a, b]$ et α, β des réels. Alors :*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

La Proposition 2.2.1 sera souvent utilisée, soit pour mettre en facteur une constante devant l'intégrale, soit pour séparer le calcul en deux intégrales plus simples. Par exemple :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx\ .$$

Proposition 2.2.2. ***(Monotonie)*** *Soient f, g deux fonctions définies sur un segment $[a, b]$ vérifiant $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

La Proposition 2.2.2. admet les deux corollaires suivants.

Corollaire 2.2.3. *Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ vérifiant $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\ .$$

Démonstration Il suffit d'appliquer la Proposition (monotonie) à f et à la fonction nulle, et de remarquer que l'intégrale de Riemann de la fonction nulle vaut zéro. ∎

Corollaire 2.2.4. *Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. Il vient :*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \; .$$

Démonstration Il suffit d'appliquer la Proposition (monotonie) aux inégalités $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. ∎

La célèbre relation de Chasles permet de découper les intégrales à sa guise !

Proposition 2.2.5. ***(Relation de Chasles)*** *Soient f une fonction définie sur un segment $[a, c]$ et b un autre réel vérifiant $a < b < c$. Alors :*

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx \; .$$

En ajoutant les conventions $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, la relation de Chasles devient vraie quel que soit l'ordre des réels a, b et c.

2.3 Calcul de primitives

Le résultat suivant est connu sous le nom de Théorème Fondamental de l'Analyse. Cette appelation pompeuse est méritée car il fait apparaître l'intégration comme l'opération inverse de la dérivation.

Théorème 2.3.1. ***(Théorème Fondamental de l'Analyse)*** *Toute application continue f sur $[a, b]$ admet au moins une primitive et, pour toute primitive F de f, on a :*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \; . \tag{2.2}$$

Démonstration Introduisons la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(t) = \int_a^t f(x)dx$, pour $t > a$, et $F(a) = 0$. Comme f est continue, l'intégrale $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$ se comporte comme $hf(x_0)$ lorsque h tend vers 0. Ainsi, le taux d'accroissement

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx$$

tend vers $f(x_0)$, ce qui signifie que F est une primitive de f. De plus, la fonction F vérifie l'identité (2.2). Et il en va de même pour toute autre primitive de f. En effet, deux primitives F et G de f ne diffèrent que d'une constante ; les différences $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$ sont donc égales. ∎

Signalons au passage que la notation suivante est couramment utilisée :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) := [F]_a^b \; .$$

L'identité (2.2) fournit ainsi un premier moyen de calculer des intégrales. Il suffit pour cela de connaître une primitive de la fonction à intégrer. Voici donc un tableau récapitulatif des primitives classiques.

Fonction	**Une primitive**
x^a $(a \in \mathbb{R}, a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x-b}$	$\ln\|x-b\|$
$e^{\lambda x}$ $(\lambda \neq 0)$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$
$\cos(\lambda x)$ $(\lambda \neq 0)$	$\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)$
$\sin(\lambda x)$ $(\lambda \neq 0)$	$-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda x)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$

Voici un exemple. On se ramène dans un premier temps au type de fonctions $\frac{1}{x-b}$ (2e ligne du tableau), pour ensuite l'intégrer :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1}\,dx = -\Big[\ln|x-1|\Big]_0^{\frac{1}{2}} .$$

La quantité $x-1$ est négative sur l'intervalle d'intégration :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx = -\Big[\ln(1-x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \ln(2) .$$

À partir de la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions, à savoir $(f \circ g(x))' = g'(x)f'(g(x))$, nous pouvons compléter le tableau :

Fonction	**Une primitive**
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\|$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$au'(x)(u(x))^{a-1}$ $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$	$(u(x))^a$

Dans l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos^2(x)\,dx ,$$

nous reconnaissons une fonction du type $u'(x)(u(x))^2$ (à une constante multiplicative près) où $u(x) = \cos(x)$ et $u'(x) = -\sin(x)$. D'après le tableau ci-dessus :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos^2(x)\,dx = \Big[-\frac{\cos^3(x)}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) .$$

2.4 Deux outils fondamentaux

Il s'agit de l'intégration par parties (en abrégé IPP) et du changement de variables.

Proposition 2.4.1. ***(Intégration Par Parties)*** *Considérons u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors :*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx\ .$$

Démonstration La formule de l'IPP découle directement de la formule de dérivation d'un produit :

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\ .$$

En intégrant entre a et b chaque membre de l'équation ci-dessus, on obtient le résultat. ■

Le calcul du terme $[u(x)v(x)]_a^b$ ne posant pas de problème, faire une IPP revient donc à échanger l'intégrale $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ contre $\int_a^b u(x)v'(x)dx$. Une fois l'IPP réalisée, il faut donc se demander si l'échange nous a été avantageux. Par exemple, calculons par une IPP l'intégrale

$$\int_1^X x\ln x\,dx$$

où $X > 1$. Puisque nous ne connaissons pas de primitive de $\ln$ (pour l'instant !), nous n'avons pas d'autre choix que de poser $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$. Il vient $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$, puis

$$\int_1^X x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^X - \int_1^X \frac{x}{2}\,dx\ .$$

Le calcul de l'intégrale $\int_1^X \frac{x}{2}dx$ est trivial : l'IPP a donc servi. Poursuivons l'intégration :

$$\int_1^X x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^X\ ,$$

ce qui fournit une primitive de la fonction $x \mapsto x\ln x$: $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$.

Proposition 2.4.2. ***(Changement de Variables)*** *Soient f une fonction continue sur un intervalle I et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (i.e. dérivable et dont la dérivée est continue) sur un segment $[a, b]$ dont l'image $\varphi([a, b])$ est incluse dans I. Alors :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\ . \tag{2.3}$$

La formule (2.3) est trompeuse car lorsque le changement de variable (i.e. la fonction φ) est bien choisi, la fonction $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ est plus simple à primitiver que $f(x)$.

Démonstration Puisque f est une fonction continue, elle admet une primitive (par le Théorème 2.3.1), disons F. La composée $F \circ \varphi$ est dérivable par hypothèse, de dérivée $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\,dt \\
&= \Big[F\circ\varphi\Big]_a^b \\
&= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\ .
\end{aligned}$$

■

Il est fortement déconseillé de retenir la formule (2.3) par cœur. Un changement de variables doit se penser comme suit :

1. Je souhaite remplacer x par $\varphi(t)$ (qui doit être de classe $\mathcal{C}^1$).
2. J'exprime dx en fonction de t et dt ; $dx = \varphi'(t)dt$.
3. J'ajuste les bornes de l'intervalle d'intégration ; elles doivent s'écrire comme $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ pour des réels a et b à déterminer.
4. Je remplace x et dx par leurs valeurs en fonction de t et dt.

Considérons l'intégrale
$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(x))}{2x}\,dx\ .$$
Le terme $\ln(x)$ dans le sinus est particulièrement désagréable : nous souhaitons nous en débarasser. L'idée naturelle est de poser $t = \ln(x)$, ou encore $x = \varphi(t) = e^t$. La fonction à intégrer
$$\frac{\sin(\ln(x))}{2x} \text{ devient } \frac{\sin(t)}{2e^t}\ .$$
Avec $dx = \varphi'(t)dt = e^t dt$, une simplification s'opère :
$$\frac{\sin(\ln(x))}{2x}\,dx \text{ devient } \frac{\sin(t)}{2}\,dt\ .$$
Il ne reste plus qu'à changer les bornes de l'intervalle d'intégration : $1 = \varphi(0)$ et $e^\pi = \varphi(\pi)$. Le changement de variables $x = \varphi(t) = e^t$ donne finalement :
$$\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln(x))}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(t)\,dt\ .$$

2.5 Exercices

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (2x+1)^3\,dx\ ,\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\,dx\ ,\ \int_0^\pi \sin(3\theta+1)\,d\theta\ ,\ \int_0^{\pi/4} \frac{5}{\cos^2(x)}\,dx\ \text{ et }\ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+x^2}\,dx\ .$$

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 4xe^{-x^2}\,dx\ ,\ \int_0^{\pi/2} \frac{x}{1+x^2}\,dx\ \text{ et }\ \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan(x)\,dx\ .$$

Exercice 3
Éffectuer une intégration par parties dans l'intégrale

$$\int_0^\pi x\cos(x)\,dx$$

en posant d'une part $u'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = x$, et d'autre part $u'(x) = x$ et $v(x) = \cos(x)$. Que remarquez-vous ?

Exercice 4
Par intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e \ln(x)\,dx\ ,\ \int_1^e \ln^2(x)\,dx\ ,\ \int_0^1 xe^{-2x}\,dx\ \text{ et }\ \int_0^1 x^2e^{-2x}\,dx\ .$$

Exercice 5
Par changements de variables, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^2 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx\ ,\ \int_1^{10} \frac{1}{\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+\frac{5}{4}}\,dx\ \text{ et }\ \int_4^9 \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx\ .$$

Pour la 2e intégrale, penser à écrire le dénominateur comme $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1$. Pour la 3e intégrale, rappelez-vous que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$.

Exercice 6

1. Soit f une fonction paire, i.e. $f(-x) = f(x)$ pour tout x. Montrer que, pour $X > 0$,

$$\int_{-X}^X f(x)\,dx = 2\int_0^X f(x)\,dx\ .$$

2. Soit f une fonction impaire, i.e. $f(-x) = -f(x)$ pour tout x. Montrer que, pour $X > 0$,

$$\int_{-X}^X f(x)\,dx = 0\ .$$

Exercice 7
Définissons pour tout entier positif n

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx\ .$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Obtenir par une intégration par parties une relation entre I_n et I_{n-2}.
3. En déduire la valeur de I_n pour tout n.

Chapitre 3

Intégrales généralisées

Introduction

L'intégrale au sens de Riemann a été définie pour des fonctions f bornées sur un segment $[a, b]$. Notre but dans ce chapitre est de généraliser cette notion à des fonctions f sur des intervalles non fermés ou non bornés. On parle alors d'intégrale généralisée de f sur un intervalle de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Ainsi on va rencontrer du calcul intégral

1. de fonctions sur un intervalle non borné : $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ voire $]-\infty, +\infty[$.
2. de fonctions non bornées au voisinage de a ou b.
3. un mélange des deux.

Exemples.

- L'intervalle $[1, +\infty[$ n'est pas borné. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(x)\mathrm{d}x$ est une intégrale généralisée.
- La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ n'est pas définie en 0 et n'est pas bornée au voisinage de 0, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x$ est une intégrale généralisée.
- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ n'est pas définie ni en 1 et n'est pas bornée au voisinage de 1, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}\mathrm{d}x$ est une intégrale généralisée (problème en 1 et $+\infty$).

3.1 Définitions et propriétés

On dira qu'une fonction est intégrable sur un intervalle I si elle est intégrable sur I au sens de Riemann. Et on dira qu'elle est localement intégrable sur I si elle est intégrable sur chaque intervalle fermé et borné $[\alpha, \beta] \subset I$.

Proposition 3.1.1.

1. *Toute fonction continue sur un intervalle I est localement intégrable sur I.*
2. *Toute fonction réelle et monotone sur un intervalle I est localement intégrable sur cet intervalle.*

Définition 3.1.2. *Etudier la nature d'une intégrale généralisée c'est déterminer si elle est convergente ou divergente au sens suivant.*

1. *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ où $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge et on pose*
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$
2. *Soit f une fonction localement intégrable sur $]a, b]$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge et on pose*
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$
3. *Soit f une fonction localement intégrable sur $]a, b[$ où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge si pour un $c \in]a, b[$ les intégrales $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ convergent. Dans ce cas, on pose*
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Une intégrale généralisée qui n'est pas convergente est dite divergente ou qu'elle diverge.

Théorème 3.1.3 (Fausses intégrales généralisées).

1. *Si f est continue sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ et possède une limite finie en b, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale généralisée coïncide avec son intégrale de Riemann.*
2. *Si f est bornée sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale généralisée coïncide avec son intégrale de Riemann.*

On peut écrire des versions analogues de 1. et 2. en échangeant les rôles de a et b.

Démonstration.

1. Si f possède une limite finie en b, alors f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}$ en b et
$$\forall t \in [a, b[, \quad \int_a^t f(x)\mathrm{d}x = \int_a^t \tilde{f}(x)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \tilde{f}(x)\mathrm{d}x \text{ existe.}$$
La quantité $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur $[a, b]$.

2. Si f est bornée sur $[a, b[$, il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in [a, b[,\ m \leq f(x) \leq M \quad \Rightarrow \quad \int_a^t (f(x) - m)\,\mathrm{d}x \leq (M - m)(b - a).$$

La fonction $t \mapsto \displaystyle\int_a^t (f(x) - m)\,\mathrm{d}x$ est croissante majorée, donc admet une limite ℓ en b. Ainsi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x = \ell + m(b - a) \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Les "vraies" intégrales généralisées sont celles pour lesquelles se pose le problème de convergence : elles sont caractérisées par le fait qu'une borne est $-\infty$ ou $+\infty$, ou que les bornes sont finies mais f n'est pas bornée au voisinage de a ou b.

Exemples.

1. Etude de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$. Cette intégrale présente un problème en 0 et un problème en $+\infty$. On écrit
$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}.$$
Pour $0 < t \leq 1$, on a :
$$\int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_t^1 = 2 - 2\sqrt{t} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to 0} \int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2.$$
Pour $1 \leq t$, on a :
$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_1^t = 2\sqrt{t} - 2 \quad \Rightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = +\infty.$$
En conclusion, I diverge.
2. Etude de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$. Pour $0 < t$, on a :
$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \arctan t \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}.$$
Donc I converge et $I = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Etude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $[0, +\infty[$. Mais
$$\int_0^t \sin x\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^t = 1 - \cos t$$
n'admet pas de limite lorsque t tend vers $+\infty$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$ diverge.

4. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)\mathrm{d}x$ sont de fausses intégrales généralisées car on a des prolongements continus en 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ pour la première et $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ pour la seconde.
5. Etude de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$. On calcule $F(t) = \displaystyle\int_t^1 \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$ puis on étudie $\displaystyle\lim_{t\to 0} F(t)$. On a

$$F(t) = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_t^1 = -\frac{\ln^2 t}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to 0} F(t) = -\infty.$$

L'intégrale I diverge.

Proposition 3.1.4. *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ où $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $c \in]a, b[$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ sont de même nature.*

A titre d'exemples, les intégrales généralisées

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\ , \quad \int_{-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad \text{et} \quad \int_{10}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

sont toutes les trois convergentes. Remarquons cependant qu'elles ne sont pas égales. De même,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{0,5} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$$

sont toutes les deux divergentes.

Proposition 3.1.5 (Condition nécessaire en $\pm\infty$). *Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe alors cette limite est nulle. Par contraposée, si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et si cette limite est non nulle, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverge. On dispose d'un résultat analogue en $-\infty$.*

Exemple. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}} = +\infty$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}$ diverge.

3.2 Calcul des intégrales généralisées

Quand on connait une primitive F de la fonction à intégrer f, l'étude de la nature de l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ se ramène à un calcul de limite :

$$\int_a^t f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^t = F(t) - F(a).$$

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $F(t)$ admet une limite lorsque t tend vers b. Les intégrales de Riemann sont un exemple fondamental.

Proposition 3.2.1 (Intégrales de Riemann). *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Alors*

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

Démonstration. Pour $1 < t$, on a :

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln t & \text{si } \alpha = 1 \\ \dfrac{t^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ existe si et seulement si $\alpha > 1$. On vérifie, de façon analogue, l'autre point.

Pour calculer une primitive, on a recours aux mêmes techniques que pour le calcul intégral habituel.

Proposition 3.2.2 (Linéarité). *Soient* f *et* g *deux fonctions localement intégrables sur un intervalle d'extrémités* $a < b$ *avec* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. *Si* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *et* $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *convergent alors pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x$ *converge et on a*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ diverge et $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ converge alors $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$ diverge.

Proposition 3.2.3 (Chasles). *si* f *est localement intégrable sur* $]a, c[$ *et sur* $]c, b[$, *et si les intégrales* $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ *convergent, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *converge et on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

On posera, par convention, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$. On notera aussi que la formule classique de changement de variables dans un intégrale s'applique aux intégrales généralisées.

Proposition 3.2.4 (Changement de variables). *Soit* $u\ :]a, b[\to]\alpha, \beta[$ *une bijection de classe* $\mathscr{C}^1$ *où* $a, b, , \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. *Si* f *est localement intégrable sur* $]\alpha, \beta[$ *alors* $(f \circ u)u'$ *est localement intégrable sur* $]a, b[$ *et les intégrales* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$ *sont de même nature. Si l'une converge, alors*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple. On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$. En effet, l'application $t \mapsto x = \dfrac{1}{t}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$. Donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{\ln \frac{1}{t}}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\frac{-\mathrm{d}t}{t^2} = \int_1^0 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Proposition 3.2.5 (Intégration par parties). *Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$ et si le produit fg possède des limites finies en a et en b,*

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \ell_1 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to b}(fg)(x) = \ell_2,$$

alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. Si l'une des deux converge, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \ell_2 - \ell_1 - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

3.3 Intégrales généralisées de fonctions positives

L'étude des intégrales généralisées de fonctions dont le signe est constant au voisinage du point b se ramène, quitte à réduire l'intervalle d'intégration et à remplacer f par $-f$, à l'étude des intégrales généralisées de fonctions positives.

Remarquer que si f est positive, alors la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ est croissante sur $[a,b[$. Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge si et seulement si la fonction F est majorée sur $[a,b[$.

Théorème 3.3.1 (Théorème de comparaison). *Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a,b[$. On suppose qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\forall x \in [c,b[, \quad 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

1. *Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge.*
2. *Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ diverge.*

Démonstration. Prouvons ce résultat lorsque $a = c$. Puisque $f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b[$, on a

$$\forall t > a, \quad \int_a^t f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^t g(x)\mathrm{d}x.$$

Le résultat s'en déduit par passage à la limite.

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}\mathrm{d}x$ est convergente. En effet, pour $x \geq 0$,

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x} \leq \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1.$$

Ce théorème permet d'établir le résultat fondamental suivant.

Théorème 3.3.2 (Théorème d'équivalence). *Soit f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a, b[$.*

1. *Si $\displaystyle\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ sont de même nature.*
2. *Si $\displaystyle\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge.*
3. *Si $\displaystyle\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ diverge.*

Dans la pratique, on considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, en combinant les résultats sur les intégrales de Riemann avec le théorème d'équivalence, on obtient les règles suivantes dites de Riemann.

Corollaire 3.3.3 (Règle de Riemann en <u>$+\infty$</u>). *Soit f une fonction positive et localement intégrable sur $[a, +\infty[$.*

1. *Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \ell \neq 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
2. *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.*
3. *S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverge.*

Corollaire 3.3.4 (Règle de Riemann en <u>b finie</u>). *Soit f une fonction positive et localement intégrable sur $[a, b[$.*

1. *Si $\displaystyle\lim_{x\to b} (b-x)^\alpha f(x) = \ell \neq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.*
2. *S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to b} (b-x)^\alpha f(x) = 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ converge.*
3. *S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to b} (b-x)^\alpha f(x) = +\infty$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ diverge.*

Exemples.

1. Etude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)-\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Avec $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{\sqrt{x}} \geq 0$, on a :
$$\ln(x+1)-\ln x = \ln\frac{x+1}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$
D'après la règle de Riemann (en $+\infty$), avec $\ell = 1$ et $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

2. Etude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. Avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on a :
$$0 \leq f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}.\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}.$$
D'après la règle de Riemann (en $b=1$), avec $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge.

3.4 Convergence absolue

Définition 3.4.1. *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$.*

1. *On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.*
2. *On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est semi-convergente si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est divergente.*

On retiendra que les notions de convergence et de convergence absolue coïncident quand la fonction est positive.

Théorème 3.4.2. *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est convergente et*
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Exemple. Pour tout $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Attention toutefois car la réciproque de ce théorème est fausse. Pour établir la convergence d'une intégrale généralisée qui n'est pas absolument convergente, nous disposons du théorème d'Abel.

Théorème 3.4.3 (Théorème d'Abel). *Soit f une fonction localement intégrable, positive et décroissante vers 0 sur $[a, +\infty[$. Soit g une fonction continue admettant une primitive bornée sur $[a, +\infty[$:*

$$\exists M,\ \forall t > a,\ \left|\int_a^t g(x)\mathrm{d}x\right| \leq M.$$

Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ converge.

Exemple. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x$ est convergente. En effet, le changement de variable $u = x^2$ nous ramène à

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

qui converge par le théorème d'Abel.

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes et les calculer lorsqu'elles convergent :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \ln x \mathrm{d}x \ , \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} \ , \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \ ,$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x \ , \qquad I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}} \ , \quad I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x \ ,$$

$$I_7 = \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \ , \quad I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \ , \qquad I_9 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} \ .$$

Exercice 3.5.2.

1. Soit λ un nombre complexe. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}x$ en précisant sa valeur en cas de convergence.
2. Soient a et b deux réels. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x$ en précisant sa valeur en cas de convergence.

Exercice 3.5.3.

1. Montrer que l'intégrale généralisée $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est convergente.
2. A l'aide d'un changement de variables, exprimer $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ en fonction de I_1.
3. En déduire que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est convergente, et donner sa valeur.
4. Soit $a > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi \ln a}{2a}$.

Exercice 3.5.4. Sans les calculer, montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes, et puis les calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)} \ , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x+2)} \ , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)} \ .$$

Exercice 3.5.5. Par comparaison, étudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} \ , \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin\sqrt{1-x^4}} \ , \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \cos x} \ ,$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \ , \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x \ , \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}} \ .$$

Exercice 3.5.6. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\ln(1+\sqrt{x})} \mathrm{d}x \ , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} \mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \frac{\cos x}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}x.$$

Exercice 3.5.7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ sont absolument convergentes si $\alpha > 1$ et semi-convergentes si $0 < \alpha < 1$.
2. Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \sin(x^2) \mathrm{d}x$?

Exercice 3.5.8. On se propose de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ est semi-convergente.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ est convergente (ind. utiliser convenablement une intégration par parties).
2. Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2} \leq |\sin x|$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \mathrm{d}x$ diverge.

Exercice 3.5.9. Utiliser le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ pour étudier la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 3.5.10 (Loi Exponentielle). Une variable aléatoire Z suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est donnée par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur $[0; +\infty[$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que cette densité définit bien une loi de probabilité, à savoir

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1.$$

2. Montrer qu'une variable aléatoire Z de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ admet une espérance et un moment d'ordre 2, à savoir les intégrales généralisées

$$\mathbb{E}[Z] := \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[Z^2] := \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$$

convergent. Puis donner leurs valeurs.

Chapitre 4

Intégrales doubles

4.1 Définition via le théorème de Fubini

La théorie générale de l'intégration des fonctions de deux variables sur un domaine du plan $\mathbb{R}^2$ est omise dans ce chapitre. On s'appuie essentiellement sur la définition de l'intégrale simple d'une fonction continue pour définir l'intégrale double d'une fonction de deux variables.

Théorème 4.1.1 (Théorème de Fubini et définition). *Soient D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1. *Si D est un compact élémentaire par rapport à x :*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\right\},$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $h_1, h_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues sur $[a, b]$, alors l'intégrale double de f sur D est donnée par

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

2. *Si le domaine D est élémentaire par rapport à y :*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ k_1(y) \leq x \leq k_2(y)\right\},$$

où $c, d \in \mathbb{R}$ et $k_1, k_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ sont continues sur $[c, d]$, alors l'intégrale double de f sur D est donnée par

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{k_1(y)}^{k_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$$

Commentaire.

1. En un mot, pour calculer une intégrale double, on la transforme en deux intégrales simples emboîtées. Dans le premier mode, on dit : qu'on intègre d'abord par rapport à y puis par rapport à x. Et dans le second, on intègre d'abord par rapport à x puis par rapport à y.
2. Si D est élémentaire à la fois par rapport à x et par rapport à y. On peut appliquer indifférement l'une des deux formules : le calcul est différent, mais le résultat est le même.

3. Dans la pratique, il peut se faire que l'un des deux modes de calcul soit plus commode que l'autre (cf. exemple 2 ci-dessous).

Corollaire 4.1.2. *Si D est le rectangle $[a, b] \times [c, d]$, on a :*

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$$

Si, de plus, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ alors

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\mathrm{d}y.$$

Les formules du théoème ramène le calcul d'une intégrale double à celui de deux intégrales simples. En particulier, l'intégrale double hérite des propriétés de l'intégrale simple.

Théorème 4.1.3 (Propriétés). *L'intégrale double vérifie les propriétés suivantes :*

(I_1) *(Normalisation) Si f et g sont égales, sauf sur un nombre fini de courbes, alors*

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D g(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(I_2) *(Linéarité) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda \iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mu \iint_D g\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(I_3) *(Croissance et positivité) Si $g \leq f$ alors $\displaystyle\iint_D g(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. On en déduit que :* $\displaystyle\left|\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \iint_D |f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(I_4) *(Additivité selon le domaine) Si $D = D_1 \cup D_2$ tel que $D_1 \cap D_2$ est formée d'au plus un nombre fini de courbes, alors*

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exemples. Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $I = \displaystyle\iint_D x\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, avec $D = [0, 1] \times [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^1 x\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x\mathrm{e}^{x+y}\right]_0^1 \mathrm{d}x \\ &= (\mathrm{e} - 1) \int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (\mathrm{e} - 1) \left[x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1. \end{aligned}$$

2. $I = \iint_D \mathrm{e}^{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D est le triangle de sommets $O = (0,0)$, $A = (0,1)$, $B = (1,1)$. Le domaine D est élémentaire à la fois par rapport à x :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\right\}$$

et par rapport à y :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\right\}.$$

Donc

$$I = \int_0^1 \left[\int_x^1 \mathrm{e}^{y^2} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\int_0^y \mathrm{e}^{y^2} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$$

On ne peut calculer à l'aide de la première formule, on utilise donc la seconde :

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^y \mathrm{e}^{y^2} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2} \mathrm{d}y = \left[\frac{\mathrm{e}^{y^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

3. $I = \iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ lorsque D est le triangle de sommets $A = (0,1)$, $B = (0,-1)$, $C = (2,3)$. Un dessin montre que

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 2x-1 \leq y \leq x+1\right\}.$$

Donc $I = \displaystyle\int_0^2 \left[\int_{2x-1}^{x+1} x\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_0^2 x(-x+2)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$

4. $I = \iint_D xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq x \leq y\}$. On peut représenter D sous la forme :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y\}.$$

Donc $I = \displaystyle\int_0^1 \left[\int_{y^2}^y xy^2 \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{y^2}^y \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y^4 - y^6}{2} \mathrm{d}y = \frac{1}{35}.$

5. $I = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ lorsque D est le quadrilatère de sommets $A = (1,0)$, $B = (4,0)$, $C = (2,1)$, $D = (3,1)$. Un dessin donne :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ y+1 \leq x \leq 4-y\right\}.$$

Donc $I = \displaystyle\int_0^1 \left[\int_{y+1}^{4-y} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y = \int_0^1 (3-2y)\mathrm{d}y = \left[3y - y^2\right]_0^1 = 2.$

6. $I = \iint_D (x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ |x| \leq y \leq 1\}$. Ici $D = D_1 \cup D_2$ avec

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -x \leq y \leq 1,\ -1 \leq x \leq 0\} \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

Donc $I = \displaystyle\iint_{D_1} (x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} (x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Or

$$\iint_{D_1} (x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^0 \left[\int_{-x}^1 (x^2 - y^2)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = -\frac{1}{6}$$

et

$$\iint_{D_2} (x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_x^1 (x^2 - y^2)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = -\frac{1}{6}.$$

Donc $I = -\dfrac{1}{3}$.

Interprétation géométrique. Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$.

1. Supposons que $f : D \to \mathbb{R}$ soit positive sur D. Soit $\mathscr{V}_f$ le domaine de l'espace suivant :

$$\mathscr{V}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq z \leq f(x, y) \text{ et } (x, y) \in D\}.$$

   C'est la partie de l'espace situé au-dessus de D et en-dessous du graphe de f. Alors l'intégrale

$$V = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

   coïncide avec le volume du domaine $\mathscr{V}_f$.

2. En particulier, si f est la fonction constante de valeur 1, alors l'intégrale double de f sur D est l'aire de D :

$$\mathrm{Aire}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4.2 Passage en coordonnées polaires

Le passage en coordonnées polaires consiste à remplacer les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point du plan, par le module r et l'argument θ du point dans le plan complexe.

Plus précisément, on considère les deux ouverts de $\mathbb{R}^2$:

$$U =]0, +\infty[\times[0, 2\pi[, \quad V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

et l'application $\phi : U \to V$ définie par $\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On vérifie sans difficulté que ϕ est bijective.

Théorème 4.2.1. *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ et soit Δ l'image réciproque de D par ϕ :*

$$\Delta = \{(r, \theta) \in [0, +\infty[\times[0, 2\pi[|\ \phi(r, \theta) \in D\}.$$

Alors, pour toute fonction f continue sur D, on a :

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Détermination graphique de Δ. On dessine le domaine D.

. On détermine les bornes de θ. Ce sont $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$.

. On détermine les bornes de r : $h_1(\theta) = \|\overrightarrow{OM_1}\|$ et $h_2(\theta) = \|\overrightarrow{OM_2}\|$.

D'où
$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\right\}.$$

Exemples.

1. Calculer $I = \iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$
On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On a :
$$(x,y) \in D \Leftrightarrow (r,\theta) \in \Delta = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$
Donc
$$I = \iint_\Delta r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}.$$

2. Calculer $I = \iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \frac{1}{2} \leq x,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$
Par passage en coordonnées polaires, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on aura :
$$I = \iint_\Delta \frac{r\cos\theta}{r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$
où
$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2\cos\theta} \leq r \leq 1\right\}.$$
D'où
$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\int_{\frac{1}{2\cos\theta}}^1 \cos\theta\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

4.3 Les intégrales doubles généralisées

Les intégrales doubles généralisées sont essentiellement appliquées en probabilités. Dans cette optique, nous ne considérerons que des fonctions à intègrer $f(x,y)$ relativement simples, continues sur des domaines d'intégration non bornés.

Dans tout ce qui suit, pour un domaine D de $\mathbb{R}^2$, on notera $D_r = D \cap [-r,r]^2$ de sorte que D apparait comme limite lorsque $r \to +\infty$ des domaines bornés. Ainsi l'intégrale double généralisée est définie comme limite d'intégrales doubles.

Définition 4.3.1. *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur D. L'intégrale double généralisée $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ est dite convergente si $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\iint_{D_r} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ existe. Dans ce cas, on pose*

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{r\to+\infty}\iint_{D_r} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale double généralisée $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ est divergente.

Exemples.

1. Calcul de $I = \displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq y \leq x\}$. Le domaine D est non borné mais
$$D_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq r \text{ et } y \leq x \leq r\right\}.$$
Par Fubini,
$$\begin{aligned}\iint_{Dr} \frac{1}{xy^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^r \left(\int_y^r \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right)\frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int_1^r \left[\frac{-1}{x}\right]_y^r \frac{1}{y}\mathrm{d}y \\ &= \int_1^r \left(\frac{1}{y}-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{y}\mathrm{d}y = \left[\frac{-1}{y}-\frac{\ln(y)}{r}\right]_1^r \\ &= \frac{-1}{r}-\frac{\ln(r)}{r}+1.\end{aligned}$$
Cette expression tend vers 1 quand r tend vers $+\infty$. Ainsi, I est convergente et vaut 1.

2. Nature de $I = \displaystyle\iint_D \frac{e^{-y}}{x^3+y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = [0,+\infty[^2$. La convergence est plus délicate à établir ici car nous n'avons pas accès aux primitives. Mais, par Fubini, on a :
$$I(r) = \iint_{D_r} \frac{e^{-y}}{x^3+y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^r e^{-y}\left(\int_0^r \frac{1}{x^3+y^2+1}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$
Comme la fonction à intégrer est positive, la fonction $r \mapsto I(r)$ est croissante. Pour que la limite en $+\infty$ existe, il faut et il suffit que cette fonction soit majorée. Tout d'abord, pour tout $y \geq 0$ et $r > 0$,
$$\int_0^r \frac{1}{x^3+y^2+1}\,dx \leq \int_0^r \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x.$$
Cette dernière intégrale généralisée est convergente par Riemann ($\alpha = 3 > 1$). Notons $C > 0$ la valeur de cette dernire intégrale. Il vient :
$$I(r) \leq C\int_0^r e^{-y}\,dy \leq C\int_0^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y = C,$$
pour tout $r > 0$. Nous venons de prouver que la fonction $r \mapsto I(r)$ est également majorée. Elle converge donc vers I. L'intégrale double généralisée I est donc convergente.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. La densité conjointe du couple (X, Y) est donc donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda x} e^{-\mu y} & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons la probabilité de l'événement $\{X > Y\}$. Par définition,

$$\mathbb{P}(X > Y) = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \lambda\mu e^{-\lambda x} e^{-\mu y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < x\}$ et donc $D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq r \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$. Le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \iint_{D_r} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^r \left(\int_0^x \mu e^{-\mu y}\mathrm{d}y \right) \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^r \Big[- e^{-\mu y} \Big]_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \int_0^r (1 - e^{-\mu x}) \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \Big[- e^{-\lambda x} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)x} \Big]_0^r \\ &= -e^{-\lambda r} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)r} + 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

qui tend vers $1 - \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$ lorsque r tend vers l'infini. On en déduit que

$$\mathbb{P}(X > Y) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

4.4 Calcul de l'intégrale de la Gaussienne

La densité d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite est donnée par :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Comme l'intégrale d'une densité de probabilité vaut toujours 1, l'expression ci-dessus suggère que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

On vérifie sans difficulté que cette intégrale généralisée est convergente. Mais pour la calculer, on considère l'intégrale double généralisée

$$J = \iint_D \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $D = [0; +\infty[^2$. Par le corollaire de Fubini :

$$\iint_{Dr} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^r \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x\right) \left(\int_0^r \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y\right)$$

Puisque l'intégrale généralisée I est convergente, il en va de même pour J. De plus, en faisant tendre r vers l'infini dans l'égalité précédente, il vient :

$$J = \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x\right)^2 = \left(\frac{I}{2}\right)^2,$$

par parité de la Gaussienne $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Effectuons un passage en coordonnées polaires. Avec $\Delta = [0; +\infty[\times[0; \pi/2[$, on obtient :

$$J = \iint_{\Delta} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\right) \left(\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}r\right) = \frac{\pi}{2}\Big[-\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que $I = \sqrt{2\pi}$.

4.5 Exercices

Exercice 4.5.1. Calculer l'intégrale double $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ et D est le triangle de sommets $O;\ A(1,0);\ B(1,1)$.
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x,\ 1 \le y,\ x+y \le 4\}$.
3. $f(x,y) = xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y,\ y^2 \le x\}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}$ et $D = [0,1]^2$.
5. $f(x,y) = \mathrm{e}^{y^2}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y \le 1\}$.
6. $f(x,y) = x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x \le 8,\ xy \le 16\}$.

Exercice 4.5.2. En passant en coordonnées polaires, calculer $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.
2. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ |y| \le x\}$.
4. $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.
5. $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4, |x| \le y\}$.
6. $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ et $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid 1 \le x^2 + y^2\}$.

Exercice 4.5.3. Dessiner puis calculer l'aire du domaine D dans les cas suivants :

1. $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y \le x+2\big\}$.
2. $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 \le y \le x\big\}$.
3. $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \le 4,\ x \le y \le 4x\big\}$.
4. $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ 0 \le x \le y\big\}$.

Exercice 4.5.4. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des points intérieurs à l'ellipse centrée de paramètres $a > 0$ et $b > 0$:

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

1. Par Fubini, prouver que l'aire de $\mathcal{E}$ vaut :

$$2b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \mathrm{d}x.$$

2. Par le changement de variables $x = a \sin(u)$, déterminer l'aire de $\mathcal{E}$.

Exercice 4.5.5. L'objectif de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I := \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

Calculer de deux manières différentes l'intégrale double

$$J := \iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $D = [0; 1]^2$. Pour cela, vous serez amener à identifier des réels α, β et γ tels que

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{\alpha x + \beta}{1+x^2} + \frac{\gamma}{1+xy}.$$

En déduire que $I = \dfrac{\pi}{8} \ln 2$.

Exercice 4.5.6. Etudier la nature de l'intégrale double généralisée suivante, et puis la calculer en cas de convergence :

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{où} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}.$$

Exercice 4.5.7. Etablir la convergence de l'intégrale double généralisée suivante :

$$\iint_D \frac{\arctan(x+y)}{x^2 y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{où} \quad D = [1, +\infty[^2.$$

Chapitre 5

Les séries numériques

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ représente l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou celui des complexes $\mathbb{C}$. Suivant le cas, $|\cdot|$ désigne soit la valeur absolue, soit le module.

QUESTION. Vous marchez toujours dans la même direction de la manière suivante ; le second pas est de longueur la moitié du premier, le troisième de longueur la moitié du second et ainsi de suite ... Jusqu'où irez-vous ?

5.1 Généralités

Définition 5.1.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On lui associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

La série de terme général u_n est la somme $\sum_{n\geq 0} u_n$. La suite (S_n) est appelée suite des sommes partiellles de la série de terme général u_n.

1. *Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Dans ce cas, $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n\geq 0} u_n$ est appelée somme de la série de terme général u_n.*
2. *Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série de terme général u_n est divergente.*

On retiendra que la nature d'une série n'est pas affectée lorsqu'on modifie ses premiers termes. L'objectif de ce chapitre est de fournir des outils permettant de déterminer la nature d'une série donnée, à savoir convergente ou divergente.

Exemples.

1. Soit la série (harmonique) de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Considérons la suite des sommes partielles (S_n) :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si S_n tendait vers S, S_{2n} tenderait aussi vers S. Ceci contredit l'inégalité précédente. (S_n) est donc divergente. Ainsi

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ est une série divergente}}$$

2. Soit la suite (géométrique) de terme général $u_n = k^n$ ($k \in \mathbb{R}$ ou $k \in \mathbb{C}$). On a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1 + k + k^2 + \cdots + k^n.$$

Pour $k \neq 1$, on a : $S_n = \dfrac{1-k^{n+1}}{1-k}$. Ainsi

. Si $|k| < 1$, $k^{n+1} \to 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-k}$.

. Si $|k| > 1$, $k^{n+1} \to \infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$.

. Si $k = -1$, $S_{2n} = 1$ et $S_{2n+1} = 0$ pas de limite.

. Si $k = 1$, $S_n = n + 1 \to +\infty$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La série } \displaystyle\sum_{n\geq 0} k^n \text{ est convergente} \Leftrightarrow |k| < 1 \\ \text{Dans ce cas } \displaystyle\sum_{n\geq 0} k^n = \frac{1}{1-k}.\end{array}}$$

Proposition 5.1.2 (Condition nécessaire). *Si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. *Autrement dit, le terme général d'une série convergente tend vers* 0.

Remarques.

1. Par contraposition : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.
2. La réciproque de cette proposition est fausse : il se peut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et la série $\sum u_n$ diverge. Par exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Exemple. $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$. On a :

$$\log u_n = \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \log n \to 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \neq 0.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Proposition 5.1.3. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries convergentes,* λ *et* μ *deux réels. Alors* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *est convergente et*

$$\sum(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum u_n + \mu \sum v_n.$$

Remarques.

1. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors la série $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.
2. Cependant, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont toutes deux divergentes, on ne peut rien conclure quant à la série $\sum(u_n + v_n)$.

Proposition 5.1.4. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes complexes. Cette série converge si et seulement si les deux séries* $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ *et* $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ *convergent. Dans ce cas,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \quad \textit{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).$$

Exemple. Soient $0 < \rho < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Puisque $|\rho \mathrm{e}^{i\theta}| < 1$, la série (géométrique) de terme général $\rho^n \mathrm{e}^{in\theta}$ converge. Sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \mathrm{e}^{in\theta} = \frac{1}{1 - \rho \mathrm{e}^{i\theta}}.$$

La série de terme général $\mathrm{Re}(\rho^n \mathrm{e}^{in\theta}) = \rho^n \cos(n\theta)$ est donc convergente et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \mathrm{e}^{in\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - \rho \mathrm{e}^{i\theta}}\right) = \frac{1 - \rho\cos(\theta)}{1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2}.$$

De la même manière, avec cette fois la partie imaginaire, la série de terme général $\rho^n \sin(n\theta)$ est convergente et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sin(n\theta) = \frac{\rho\sin(\theta)}{1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2}.$$

5.2 Série à termes positifs

On sait qu'une suite croissante et majorée est convergente. Ce principe de base se traduit en termes de séries en un résultat fondamental.

Lemme 5.2.1. *Une série* $\sum u_n$ *à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est bornée :*

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

Ainsi, la somme d'une série à termes positifs n'a que deux comportements possibles, soit elle finie et dans ce cas la série est convergente, soit égale à $+\infty$ et dans ce cas la série est divergente.

Proposition 5.2.2 (Comparaison série-intégrale). *Soit* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue et décroissante. Alors la série* $\sum_0^{+\infty} f(n)$ *et l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *sont de même nature.*

Applications. D'abord, on rappelle que

1. L'intégrale de Riemann : $I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
2. L'intégrale de Bertrand : $J_\beta = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\log t)^\beta}$ ($\beta \in \mathbb{R}$) converge $\Leftrightarrow \beta > 1$.

Il en découle que

1. Série de Riemann : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, est de même nature que l'intégrale de Riemann I_α. Donc

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1.}$$

2. Série de Bertrand : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\log n)^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$ fixé, est de même nature que l'intégrale de Bertrand J_β.

   Donc

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^\beta} \text{ converge } \Leftrightarrow \beta > 1.}$$

Théorème 5.2.3 (Théorème de comparaison). *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

1. *Si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Exemples.

1. Considérons la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{3^n + 2^n}.$$

   On majore u_n par $1/2^n$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $1/2$, donc convergente. Le Théorème de comparaison nous permet de conclure quant à la convergence de la série initiale. Majorer u_n par $1/3^n$ conduisait à la même conclusion.

2. Considérons maintenant la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{3^n - 2^n}$$

qui est toujours à termes positifs. L'inégalité

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 2,$$

valable pour tout $n \geq 2$, implique $3^n - 2^n \geq 2^n$ et donc

$$u_n = \frac{1}{3^n - 2^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

pour $n \geq 2$. Le Théorème de comparaison nous permet de conclure quant à la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Théorème 5.2.4 (Théorème d'équivalence). *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs, équivalentes au voisinage de l'infini :*

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Alors, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

Exemples.

1. les séries de terme général

$$\frac{n^2 + 3n + 1}{n^4 + 2n^3 - 2} \quad \text{et} \quad \frac{n + \ln(n)}{n^3}$$

   convergent. Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$).

2. Les séries de terme général

$$\frac{n^2 + 3n + 1}{n^3 + 2n^3 - 2} \quad \text{et} \quad \frac{n + \ln(n)}{n^2}$$

   divergent. Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1$).

Proposition 5.2.5 (Critère de D'Alembert). *Soit $\sum u_n$ une série à termes positives. On suppose que $u_{n+1}u_n$ converge vers ℓ.*

1. *Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*
2. *si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.*
3. *si $\ell = 1$, on ne peut conclure (cas douteux).*

Exemple. La série exponentielle de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$, pour tout réel positif x. Le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n} = \frac{x}{n+1}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il en découle la convergence de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$. Sa somme est notée e^x ; c'est ainsi qu'est calculé l'exponentielle d'un réel.

5.3 Séries à termes quelconques

Définition 5.3.1. *Soit $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathbb{K}$. On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème 5.3.2 (De la convergence absolue). *Soit $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathbb{K}$. Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est convergente. De plus,*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Afin de prouver la convergence d'une série $\sum u_n$, il suffit donc de prouver la convergence de la série $\sum |u_n|$ qui est à termes positifs. La Section précédente fournit tout un arsenal de résultats permettant de déterminer la nature d'une série à termes positifs. Par exemple, la série de terme général $u_n = e^{in\theta}/n^2$, où $\theta \in \mathbb{R}$, est convergente car absolument convergente. En effet,

$$\left|\frac{e^{in\theta}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

est le terme général d'une série convergente : c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2$.

Cependant, il existe des séries convergentes mais non absolument convergentes. Pour de telles séries, ce théorème n'a aucun intérêt. De telles séries sont dites semi-convergentes. En voici un exemple classique.

Définition 5.3.3. *Une série $\sum u_n$ à termes réels est dite alternée si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n a_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs.*

Théorème 5.3.4 (Théorème des séries alternées). *Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0, alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.*

Exemples.

1. La série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ vérifie les conditions du théoème, elle est convergente. Par ailleurs, cette série n'est pas absolument convergente car $|u_n| = 1/n$ est le terme général d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1$). En conclusion, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.
2. Les séries alternées convergentes ne sont pas toutes semi-convergentes puisque la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

Le théorème des séries alternées se généralise comme suit :

Théorème 5.3.5 (Théorème d'Abel). *Soit (a_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que la suite (s_n) des sommes*

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

soit bornée et soit (v_n) *une suite de nombres non négatifs, décroissante et tendant vers zéro. Alors la série* $\sum a_n v_n$ *est convergente.*

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1. Etudier la nature des séries $\sum u_n$ dans les cas suivants :

$$a)\ u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^n; \qquad b)\ u_n = \frac{2^n+n}{n2^n}; \qquad c)\ u_n = \frac{2^n+n}{n^2 2^n};$$

$$d)\ u_n = \frac{n!}{n^n}; \qquad e)\ u_n = \frac{a^n}{n^\alpha},\quad a>0; \qquad f)\ u_n = \frac{1+a^n}{n^3},\ a\geq 0;$$

$$g)\ u_n = \frac{n!+1}{(n+1)!}; \qquad h)\ u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \qquad i)\ u_n = n^{\frac{1}{n}}-1;$$

$$j)\ u_n = n^{\frac{1}{n^2}}-1; \qquad k)\ u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right); \qquad l)\ u_n = \ln\frac{n^2+1}{n^2}.$$

Exercice 5.4.2. Etudier, suivant les valeurs des paramètres a et b, la nature des séries $\sum u_n$ dans les cas suivants :

$$1)\ u_n = e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}; \qquad 2)\ u_n = \frac{2+\sin n}{n^a};$$

$$3)\ u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - a\cos\frac{1}{n} + b\sin\frac{1}{n}.$$

Exercice 5.4.3. Etudier la nature des séries $\sum u_n$ dans les cas suivants :

$$1)\ u_n = (-1)^n\frac{\ln n}{n}; \qquad 2)\ u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1}-n);$$

$$3)\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}; \qquad 4)\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n};$$

$$5)\ u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}; \qquad 6)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n-\ln n}.$$

Exercice 5.4.4. Etudier la nature des séries $\sum u_n$ dans les cas suivants :

$$1)\ u_n = \frac{\cos n}{n^2}; \qquad 2)\ u_n = (-1)^n\frac{\cos n}{n}; \qquad 3)\ u_n = \mathrm{e}^{-an}\cos n.$$

Exercice 5.4.5. Calculer la somme, lorsqu'elle existe, des séries $\sum u_n$ dans les cas suivants :

$$1)\ u_n = \frac{1}{n(n-1)},\ n\geq 2; \qquad 2)\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},\ n\geq 1;$$

$$3)\ u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ n\geq 2; \qquad 4)\ u_n = \frac{n^2+1}{n!}.$$

Exercice 5.4.6. Déterminer les réels a et b de sorte que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, où

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2},$$

soit convergente. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 5.4.7. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Montrer les propriétés suivantes.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n \in [0, +\infty[$ alors $\sum u_n$ converge.
2. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n \in]0, +\infty]$ alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice 5.4.8. On considère une série $\sum u_n$ à termes réels. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ? Justifier par une démonstration ou un contre-exemple le cas échéant.

1. Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum u_n^2$ converge.
2. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum u_n^2$ converge.
3. Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum nu_n$ converge.
4. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors la série $\sum u_n + v_n$ diverge.
5. Si la série $\sum u_n$ converge et si, pour tout n, $u_n > 0$ alors la série $\sum 1/u_n$ diverge.
6. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum \cos(n)u_n$ converge.

Exercice 5.4.9. *(Examen 2007-2008)*

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Montrer que la série de terme général $a_n 10^{-n}$ converge.
2. Soit $x \in [0, 1[$ un réel. Pour tout $n \geq 1$, notons a_n la $n-$ième décimale de x : $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$. Montrer que, pour tout entier $N \geq 1$,

$$0 \leq x - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} \leq 10^{-N} .$$

   En déduire l'égalité

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} .$$

3. Montrer que les réels $0, 9999\ldots$ (celui dont toutes les décimales sont égales à 9) et 1 sont égaux.

Exercice 5.4.10. *(Examen 2008-2009)* Déterminer (en justifiant) la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum \frac{2^n + 1000}{3^n + 1} \ , \ \sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \ , \ \sum \frac{n!}{n^n} \ \text{ et } \ \sum \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n(\ln(n))^2}\right).$$

Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

6.1 Suites de fonctions

6.1.1 Convergence simple, convergence uniforme

Etant donné un ensemble X non vide, une suite de fonctions numériques définies sur X est la donnée, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ d'une fonction f_n de X dans $\mathbb{K}$. Pour $x \in X$ fixé, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes.

Définition 6.1.1. *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X si, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Si la suite (f_n) converge simplement sur X, pour tout $x \in X$, on note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$. On définit ainsi une fonction f appelée limite simple de la suite (f_n) sur X et vérifiant

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Exemples.

1. La suite (f_n) telle que $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto 1$.
2. La suite (f_n) telle que $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers f telle que $f(x) = 0$ si $x \in]-1,1[$ et $f(1) = 1$. Elle ne converge pas pour les $x \notin]-1,1]$.
3. La suite (f_n) telle que $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f telle que $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Définition 6.1.2. *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow (\forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon) \tag{2}$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|\right). \tag{2'}$$

Remarque. La différence entre ces deux modes de convergence est que dans (1) le n_0 dépend a priori de x et du choix de ε alors que dans (2) le rang n_0 convient pour tous les points $x \in X$.

Proposition 6.1.3. *Si la suite (f_n) converge uniformément sur X vers f, alors elle converge simplement sur X vers f.*

La définition $(2')$ fournit une méthode pour prouver une convergence uniforme sur X (resp. une convergence non uniforme sur X) :

a) Etude de la convergence simple pour trouver f.

b) Calcul de $a_n = \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$.

c) Démonstration que la suite (a_n) converge vers 0 (resp. ne converge pas vers 0).

Exemple. Soit $f_n(x) = x^n$. La suite (f_n) converge simplement sur $]-1, 1]$ vers f telle que $f(x) = 0$ si $x \in]-1, 1[$ et $f(1) = 1$. Elle ne converge pas uniformément sur $]-1, 1]$ car

$$\sup_{x \in]-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

ne tend pas vers 0. Soit $a \in [0, 1[$. Pour tout entier n, on a :

$$\sup_{x \in [-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La suite (f_n) converge uniformément sur $[-a, a]$ vers f.

6.1.2 Propriétés de la limite

Théorème 6.1.4 (Continuité). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues en $a \in X$ (resp. sur X) qui converge uniformément vers f sur X. Alors f est continue en a (resp. sur X).*

La convergence uniforme d'une suite de fonctions continues assure donc la continuité de la limite. Elle permet aussi d'intervertir limite et intégration.

Théorème 6.1.5 (Intégration). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$:*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 6.1.6 (Dérivation). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables (resp. $\mathscr{C}^1$) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

(1) *Il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.*

(2) *La suite* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* g *sur tout intervalle fermé borné de* I.
Alors la suite (f_n) *converge uniformément vers* f *sur sur tout intervalle fermé borné de* I. *De plus,* f *est dérivable* (*resp.* $\mathscr{C}^1$) *sur* I *avec* $f' = g$.

Remarque. Une limite uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'est pas nécessairement une fonction dérivable. En effet, la suite (f_n) telle que $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$ converge uniformément vers $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{\frac{1}{n}}{|x| + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Les f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pourtant f n'est pas dérivable en 0.

6.2 Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un ensemble X de $\mathbb{R}$. La série de fonctions $\sum\limits_n f_n$ de terme général f_n est, par définition, la suite de fonctions (S_n) définie par

$$\forall x \in X,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Définition 6.2.1. *On dit que la série* $\sum f_n$ *converge simplement sur* X *si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* X*, et on dit qu'elle converge uniformément sur* X *si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* X.

Lorsque la série $\sum f_n$ converge simplement sur X, on appelle somme de la série, notée S, la fonction définie sur X par

$$\forall x \in X,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

On appelle aussi reste d'ordre n, noté R_n, la fonction définie sur X par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

Proposition 6.2.2. *La série* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* X *si et seulement si* $\sum f_n$ *converge simplement sur* X *et si la suite* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des restes d'ordre* n *converge uniformément sur* X *vers la fonction nulle.*

Pour les séries, on dispose d'une autre notion de convergence, souvent d'utilisation.

Définition 6.2.3. *On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur X s'il existe une série $\sum_n a_n$, à termes réels positifs, telle que :*

(1) $\forall x \in X$, $|f_n(x)| \leq a_n$

(2) *la série* $\sum_n a_n$ *converge.*

Remarque. Cette définition équivaut à dire que les f_n sont bornées sur X et que la série numérique $\sum_n \sup_{x\in X} |f_n(x)|$ est convergente.

Exemples.

1. La série $\sum (-1)^n \frac{x^n}{n}$ est simplement convergente sur $[0,1]$. De plus,

$$\forall x \in [0,1],\ |R_n(x)| \leq \left|(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

qui signifie que la suite (R_n) des reste d'ordre n converge uniformément vers zéro sur $[0,1]$. Donc la série $\sum (-1)^n \frac{x^n}{n}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.

2. La série $\sum_n \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est convergente.

3. La série $\sum_n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ car $\left|\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $\sum_n \frac{1}{1+n^2}$ est convergente.

Proposition 6.2.4. *Toute série $\sum f_n$ qui converge normalement sur X converge uniformément sur X.*

Remarque. Une série peut être uniformément convergente sur X sans y être normalement convergente. En effet, la série $\sum (-1)^n \frac{x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0,1]$. Mais elle n'est pas normalement convergente sur $[0,1]$ puisque $\sup_{[0,1]} \left|(-1)^n \frac{x^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente.

Les théorèmes vus au paragraphe 4.1.2 peuvent étre appliqués aux suites des sommes partielles de séries de fonctions et conduisent aux résultats suivants :

Théorème 6.2.5 (de continuité). *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues en a (resp. sur X) convergeant uniformément sur X. Alors, la somme est continue en a (resp. sur X).*

Théorème 6.2.6 (d'intégration). *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions continues sur* $[a,b]$ *qui converge uniformément sur* $[a,b]$. *Alors la série* $\sum \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$ *est convergente et on a*

$$\sum \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Théorème 6.2.7 (de dérivation). *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions dérivables* (*resp.* $\mathscr{C}^1$) *sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *On suppose que :*

(1) *Il existe* $x_0 \in I$ *tel que* $\sum f_n(x_0)$ *converge.*

(2) $\sum f_n'$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné de* I.

Alors

(a) *La série* $\sum f_n'$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné de* I.

(b) *La somme* $S(x) = \sum f_n(x)$ *est dérivable* (*resp.* $\mathscr{C}^1$) *sur* I *et on a* $S'(x) = \sum f_n'(x)$.

Exemples.

1. Si $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$, on a vu que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$, et comme f_n est continue, on en déduit que la fonction $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs, $f_n'(x) = -n\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ et la série $\sum f_n'$ (qui diverge en $x=0$) converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ si $a>0$ car :
$$|f_n'(x)| \leq n\frac{\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2} \quad \text{pour tout } x \geq a.$$
Le théorème de dérivation montre alors que $S(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ avec
$$S'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}.$$

2. Si $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}x^n$, on a vu que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et par suite la fonction $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}x^n$ est continue sur $[0,1]$. Par ailleurs, $f_n'(x) = (-1)^n x^{n-1}$ et la série $\sum f_n'$ (qui diverge en $x=1$) converge normalement sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$ car :
$$|f_n'(x)| = |(-1)^n x^{n-1}| \leq a^{n-1} \quad \text{pour tout } x \in [0,a].$$
Le théorème de dérivation montre alors que $S(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ avec
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{n-1} = \frac{-1}{1+x} \quad \text{pour tout } x \in [0,1[.$$
Ainsi $S(x) + \ln(1+x)$ est constant sur $[0,1[$ et, en regardant $x=0$:
$$S(x) = -\ln(1+x) \quad \text{sur } [0,1[.$$

Enfin, S étant continue sur $[0,1]$ on a :

$$S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{1^-} S(x) = -\lim_{1^-} \ln(1+x) = -\ln 2.$$

6.3 Exercices

Exercice 6.3.1. On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f à préciser.
2. Cette convergence est-elle uniforme ?

Exercice 6.3.2. On considère la suite de fonctions de $I = [0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{n+x}{1+nx}\right).$$

1. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur I.
2. Pour tout entier $n \geq 0$ on pose :

$$\forall x \in I,\ g_n(x) = f_n(x) + \arctan x - \frac{\pi}{2}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, g_n est une fonction croissante sur I.

   (b) En dÃ©duire que la suite (f_n) converge uniformément sur I.

Exercice 6.3.3. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \arctan(nx)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $a > 0$. A-t-on une convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
2. Etudier la convergence de la suite (f'_n).

Exercice 6.3.4. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$.

1. Montrer que (f_n) est une suite de fonctions dérivables qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f non dérivable.
2. Montrer que la suite (f'_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
3. Cette convergence est-elle uniforme ?

Exercice 6.3.5. Etudier la convergence simple puis uniforme des séries de fonctions suivantes :

$$\text{(i)} \sum_{n\geq 1} x^n(1-x) \quad \text{et} \quad \text{(ii)} \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n} \quad \text{sur} \quad [0,1],$$

$$\text{(iii)} \sum_{n\geq 1} \frac{x}{1+n^2x^2} \quad \text{et} \quad \text{(iv)} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}.$$

Indication : Si (v_n) est une suite décroissante vers 0 et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$, alors $|R_n| \leq v_{n+1}$.

Exercice 6.3.6. Soit $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 2} f_n$.
2. Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 2} f_n$ sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.
3. Calculer $\sup_{x\geq 0} |f_n(x)|$. A-t-on une convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
4. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} f_k(x)$. En la comparant avec une intégrale, montrer que $0 \leq (R_n)(x) \leq \dfrac{1}{\ln n}$. En déduire que la série $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6.3.7. Soit $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donner sa somme.
2. Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $[a, +\infty[$, $a > 0$, sur $\mathbb{R}^+$ et puis sur $\mathbb{R}$.
3. La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6.3.8. Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Déterminer le domaine d'existence de la somme $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de cette somme S.
3. Déterminer la limite $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 6.3.9. Soit $f_n(x) = xe^{-nx^2}[n - (n-1)e^{x^2}]$.

1. Déterminer la somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)dx$ et $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(x)dx$.
3. Que peut-on conclure ?

Chapitre 7

Espaces préhilbertiens réels

7.1 Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On introduit la notion de norme pour pouvoir mesurer la taille d'un vecteur donné ou la distance entre deux vecteurs de l'espace E.

Définition 7.1.1. *Une norme sur E est application de E dans $\mathbb{R}$ qui a tout vecteur $x \in E$ associe le nombre noté $\|x\|$ telle que :*

(i) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0)$ (*séparation*)

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$ (*homogénéité*)

(iii) $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*).

On appelle espace vectoriel normé (evn en abrégé) un espace vectoriel muni d'une norme.

Remarques.

1. En appliquant (ii) à $\lambda = 0$, on déduit $\|0\| = 0$. Le (i) devient alors une équivalence.
2. Imposer à une norme d'être à valeurs positives serait superflu. En effet, d'après (iii) et ce qui précède, on a :
$$0 = \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \| - x\| = 2\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0.$$
3. Inégalité triangulaire renversée (importante car elle permet d'affirmer que toute norme sur E est continue) :
$$\forall (x, y) \in E \times E,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$
4. La distance entre deux vecteurs x et y peut être donnée par $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$.

Exemple 1. On peut définir sur $\mathbb{R}^n$ plusieurs normes différentes.

1. Pour $p \in]0, +\infty[$ et $x = (x_1, \cdots, x_n)$, on pose $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ (surtout pour $p = 1$ ou 2).
2. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$, on pose $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Exercice. Démontrer que $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$ et $\|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Discuter le cas $n = 1$.

Exemple 2. On peut munir l'espace $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles des normes suivantes :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

Définition 7.1.2. *Soient $a \in E$ et $r > 0$. On appelle boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r de E la partie suivante :*

$$B(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\} \ \big(\textit{resp. } \bar{B}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \le r\}\big)\,.$$

La différence des deux boules est appelée la sphère de centre a et de rayon r :

$$S(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}.$$

Exemples.

1. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, la boule ouverte $B(a,r)$ est l'intervalle ouvert $]a-r; a+r[$ tandis que la boule fermée est $[a-r; a+r]$. La sphère $S(a,r)$ est réduite aux points $a-r$ et $a+r$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité est
   . Le quadrilatère de sommets $(0,-1); (1,0); (0,1); (-1,0)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$:

$$\|(x,y)\|_1 < 1 \iff \begin{cases} -1+x < y < 1-x, & \text{si } x \ge 0 \\ -1-x < y < 1+x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   . Le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\|(x,y)\|_2 < 1 \iff x^2 + y^2 < 1.$$

   . Le carré de sommets $(1,-1); (1,1); (-1,1); (-1,-1)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|(x,y)\|_\infty < 1 \iff \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 < y < 1. \end{cases}$$

7.2 Produit scalaire, norme euclidienne, orthogonalité

Définition 7.2.1. *On appelle forme bilinéaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables. Une forme bilinéaire φ sur E est dite*

1. *symétrique si $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$,*
2. *positive si $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \ge 0$,*
3. *définie positive si $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x,x) > 0$.*

Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire sur E symétrique et définie positive.

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $\langle x, y\rangle$ un tel produit scalaire.

Définition 7.2.2. *On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$-ev E muni d'un produit scalaire. Si, de plus, E est de dimension finie alors le couple $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est appelé un espace euclidien.*

Exemples.

1. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par
$$\langle(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$ muni de ce produit scalaire est un espace euclidien.
2. Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions continues de $[a, b]$. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall f, g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}),\ \langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. Le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien.
3. Le produit scalaire usuel sur le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n. La transposée de la matrice A est notée ${}^tA$ et la trace d'une matrice carrée est égale à la somme de ses coefficients diagonaux. Dès lors, l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle A, B\rangle = tr\left({}^tAB\right)$$
est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire est un espace euclidien.

Notation. Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ qui est bien défini grâce à la positivité.

Proposition 7.2.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors*
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|.$$
L'égalité a eu lieu si et seulement si x et y sont linéairements dépendants.

Démonstration. Si $\|x\| = 0$, alors $x = 0$ et $\langle x, y\rangle = 0$. L'inégalité est bien vérifiée. Supposons que $\|x\| \neq 0$. La fonction
$$\lambda \mapsto \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$
est positive pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et comme il s'agit d'un polynôme de second degré, son discriminant est donc négatif. Ce qui donne l'inégalité voulue.

Si x et y sont linéairements dépendants, alors $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \times \|y\|$. Réciproquement, s'il y égalité et que $y \neq 0$ (sinon, il n'y a rien à prouver), c'est à dire $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \times \|y\|$, alors le discriminant précédent est nul, et P a une racine double λ_0. On a donc $\|\lambda_0 x + y\|^2 = 0$, d'où $\lambda_0 x + y = 0$.

Théorème 7.2.4. *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E, appelée norme induite par le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ ou norme euclidienne.*

Démonstration. Les conditions de séparation et d'homogénéité se déduisent immédiatement des propriétés du produit scalaire. Le seul point non évident est l'inégalité triangulaire. Pour cela on écrit :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

puis par utilisation de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \times \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

En passant à la racine dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons l'inégalité triangulaire appelée aussi inégalité de Minkowski.

Définition 7.2.5. *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel, x, y des vecteurs de E et A, B des parties de E.*

(1) *On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$ ce que l'on note $x \perp y$.*
(2) *On dit que x est orthogonal à A s'il est orthogonal à tout élément de A.*
(3) *On dit que A et B sont orthogonales si tout élément de A est orthogonal à B.*
(4) *L'orthogonal de A, noté $A^{\perp}$, est défini par :*

$$A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

Remarque. Des propriériés du produit scalaire découle que $E^{\perp} = \{0\}$ et $\{0\}^{\perp} = E$.

Proposition 7.2.6. *Soient A et B deux parties de E.*

(1) *Si $A \subset B$ alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.*
(2) *$A^{\perp} = (Vect(A))^{\perp}$ est un sev de E.*
(3) *Pour tous sev F et G de E, on a : $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.*

Démonstration. Le 3. est laissé à titre d'exercice.

1. Soient $x \in B^{\perp}$ et $a \in A$. Par hypothèse, $a \in B$ (car $A \subset B$), donc $\langle x, a \rangle = 0$. Ainsi, $x \in A^{\perp}$ et l'inclusion $A^{\perp} \supset B^{\perp}$ est démontrée.

2. Démontrons que $A^{\perp}$ est un sev de E. D'abord $\langle 0, a \rangle = 0$ quel que soit $a \in A$. Donc $0 \in A^{\perp}$. D'autre part, pour tous $x, y \in A^{\perp}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

   $$\forall a \in A, \ \langle \lambda x + y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle = 0.$$

   Donc $\lambda x + y \in A^{\perp}$, d'où $A^{\perp}$ est un sev de E.

   Maintenant, Du fait que $A \subset Vect(A)$, la propriété (1) implique que $(Vect(A))^{\perp} \subset A^{\perp}$. Soient $x \in A^{\perp}$ et $y \in Vect(A)$. Le vecteur y s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de A :

   $$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires et $y_1, \dots, y_n$ des vecteurs de A. Il vient alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, y_k \rangle = 0$$

car $x \in A^\perp$ et pour tout k, $y_k \in A$. En conclusion, $x \in Vect(A)^\perp$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, considérons les vecteurs

$$v_1 = (0, 1, 1) \text{ et } v_2 = (1, 0, 0).$$

Le produit scalaire de v_1 et v_2 est nul : ces deux vecteurs sont orthogonaux. Déterminons l'orthogonal de $\{v_1, v_2\}$:

$$\begin{array}{rcl} \{v_1, v_2\}^\perp & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \langle (x, y, z), v_1 \rangle = 0 \text{ et } \langle (x, y, z), v_2 \rangle = 0\} \\ & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y + z = 0 \text{ et } x = 0\} \\ & = & \{(0, y, -y),\ y \in \mathbb{R}\} \\ & = & Vect\{(0, 1, -1)\}. \end{array}$$

7.3 Propriétés de la norme euclidienne

Proposition 7.3.1 (Identité du parallélogramme). *Soit E un espace préhilbertien réel. Alors*

$$\forall x, y \in E,\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Pour le voir, Il suffit de développer $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$ à l'aide du produit scalaire. On appelle ainsi cette égalité car elle permet de voir que dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

Remarque. Cette identité est un moyen simple de déterminer qu'une norme ne provient pas d'un produit scalaire. Exemple : montrer que la norme sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ ne provient pas d'un produit scalaire.

On sait déterminer la norme à partir du produit scalaire. Pour une norme dont on sait qu'elle provient d'un produit scalaire, on sait faire le trajet inverse. En développant $\|x + y\|^2$ à l'aide du produit scalaire, on obtient le résultat suivant.

Proposition 7.3.2 (Identité de polarisation). *Dans tout espace préhilbertien réel E, on a*

$$\begin{array}{rcl} \forall x, y \in E,\ \langle x, y \rangle & = & \dfrac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right). \end{array}$$

Définition 7.3.3. *On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est orthogonale si :*

$$\forall i, j \in I,\ (i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0).$$

Théorème 7.3.4 (Pythagore). *Soit* $\{x_1, \ldots, x_p\}$ *une famille orthogonale de* E*. Alors*

$$\|x_1 + \cdots + x_p\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_p\|^2.$$

Démonstration. Pour deux vecteurs orthogonaux x_1 et x_2, la bilinéarité du produit scalaire donne

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + 2\langle x_1, x_2\rangle + \|x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2.$$

Supposons la propriété vraie pour $p-1$ vecteurs. Les deux vecteurs $(x_1 + \cdots + x_{p-1})$ et x_p sont orthogonaux. Donc

$$\|(x_1 + \cdots + x_{p-1}) + x_p\|^2 = \|x_1 + \cdots + x_{p-1}\|^2 + \|x_p\|^2.$$

Ce qui permet de conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 7.3.5. *Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille orthogonale de* E*. Si les* x_i *sont tous non nuls alors la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *est libre.*

7.4 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Définition 7.4.1. *On dit que la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* E *est orthonormale si elle est orthogonale et si pour tout indice* $i \in I$*,* $\|x_i\| = 1$*.*

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire, à partir d'une famille libre de vecteurs de E, une famille orthonormale engendrant les mêmes sev.

Théorème 7.4.2. *On désigne par* I *un ensemble de la forme* $I = \{0, 1, \ldots, n\}$ *ou* $I = \mathbb{N}$*. Soit* $(e_i)_{i\in I}$ *une famille libre d'éléments de* E*. Alors Il existe une famille* $(V_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* E *telle que :*

- $(V_i)_{i\in I}$ *est orthonormale,*
- $\forall i \in I$*,* $\langle V_i, e_i\rangle > 0$*,*
- $\forall i \in I$*,* $Vect(V_0, \ldots, V_i) = Vect(e_0, \ldots, e_i)$*.*

Démonstration. On opère par récurrence. On pose $V_0 = e_0 \neq 0$ et on cherche V_1 sous la forme $V_1 = e_1 + \lambda_{1,0}V_0$, où le scalaire $\lambda_{1,0}$ doit être ajusté de telle sorte que V_1 soit orthogonal à V_0 ;

$$V_1 \perp V_0 \Leftrightarrow \langle e_1, V_0\rangle + \lambda_{1,0}\|V_0\|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,0} = -\frac{\langle e_1, V_0\rangle}{\|V_0\|^2}.$$

Le vecteur V_1 est non nul car (e_0, e_1) est libre. De plus, les vecteurs V_1 et V_0 forment une famille libre (car orthogonale) et sont combinaison linéaire de e_1 et e_0, d'où $Vect(V_0, V_1) = Vect(e_0, e_1)$.

De même, on cherche V_2 sous la forme $V_2 = e_2 + \lambda_{2,1}V_1 + \lambda_{2,0}V_0$ où les scalaires $\lambda_{2,1}$ et $\lambda_{2,0}$ sont déterminés par les équations $\langle V_2, V_1\rangle = 0$ et $\langle V_2, V_0\rangle = 0$. Le vecteur V_2 ainsi obtenu est non nul car sinon e_2 serait une combinaison linéaire de e_0 et e_1. D'autre part,

$$\dim Vect(V_0, V_1, V_2) = 3 = \dim Vect(e_0, e_1, e_2)$$

et $Vect(V_0, V_1, V_2) \subset Vect(e_0, e_1, e_2)$. Donc $Vect(V_0, V_1, V_2) = Vect(e_0, e_1, e_2)$.

En normalisant les vecteurs précédemment construits, on obtient une famille orthonormale.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère les vecteurs

$$a_1 = (1, 0, 1), \qquad a_2 = (1, 0, 2), \qquad a_3 = (1, 1, 1).$$

On vérifie que $\{a_1, a_2, a_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Construisons son orthonormalisée de Gram-Schmidt. On a $\|a_1\| = \sqrt{2}$, donc on pose

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

On a aussi $\langle a_2, e_1\rangle = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Donc $a_2 - \langle a_2, e_1\rangle e_1 = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ et on pose

$$e_2 = \frac{a_2 - \langle a_2, e_1\rangle e_1}{\|a_2 - \langle a_2, e_1\rangle e_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

On a $\langle a_3, e_1\rangle = \sqrt{2}$ et $\langle a_3, e_2\rangle = 0$. Donc $a_3 - \langle a_3, e_1\rangle e_1 - \langle a_3, e_2\rangle e_2 = (0, 1, 0)$ et on pose

$$e_3 = \frac{a_3 - \langle a_3, e_1\rangle e_1 - \langle a_3, e_2\rangle e_2}{\|a_3 - \langle a_3, e_1\rangle e_1 - \langle a_3, e_2\rangle e_2\|} = (0, 1, 0).$$

La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, c'est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base $\{a_1, a_2, a_3\}$.

7.5 Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle ., .\rangle$.

Théorème 7.5.1 (Projection orthogonale). *Soit $F \subset E$ un sev de dimension finie non réduit à $\{0\}$. Les sev F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux : $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. Ainsi pour tout $x \in E$, il existe un unique vecteur y appartenant à F tel que $x - y \in F^\perp$. On le note $y = p_F(x)$ et on l'appelle la projection orthogonale de x sur F. C'est également l'unique vecteur $p_F(x)$ de F tel que*

$$\|x - p_F(x)\| = \mathrm{d}(x, F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|.$$

Son expression dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de F est donnée par

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle e_i$$

et on a

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle^2.$$

Démonstration. On sait déjà que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. D'autre part,

$$x \in F \cap F^\perp \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in F \\ x \in F^\perp \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in F \\ \langle x, y \rangle = 0, \ \forall y \in F \end{array} \right. \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc $F \cap F^\perp = \{0\}$. Montrons que $E = F + F^\perp$ c'est à dire que tout $x \in E$ s'écrit sous la forme

$$(\star) \qquad x = y + z \quad \text{avec } y \in F \text{ et } z \in F^\perp.$$

On choisit une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de F et on écrit

$$y = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i \quad \text{et} \quad z = x - y.$$

On a bien $x = y + z$, $y \in F$ et, puisque $\langle z, e_i \rangle = 0$ pour tout i, $z \in F^\perp$. Le théorème de Pythagore donne alors, pour tout $t \in F$:

$$\|x - t\|^2 = \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - t)\|^2 = \|(x - p_F(x))\|^2 + \|(p_F(x) - t)\|^2.$$

On en déduit que $\|x - t\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$ avec égalité si et seulement si $\|(p_F(x) - t)\| = 0$.

La dernière égalité se déduit du fait que $x - p_F(x)$ et $p_F(x)$ sont orthogonaux :

$$\|x\|^2 = \|(x - p_F(x)) + p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2.$$

Proposition 7.5.2 (Inégalité de Bessel). *Pour tout vecteur $x \in E$ et tout système orthonormé $\{e_1, \ldots, e_m\}$, on a*

$$\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

avec égalité si et seulement si $x \in Vect(e_1, \ldots, e_m)$.

Démonstration. On pose $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \, e_i$ et $z = x - y$. L'orthogonalité $y \perp z$ entraine

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle^2 + \|z\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle^2,$$

où l'égalité a lieu si et seulement si $z = 0 \Leftrightarrow x = y \in Vect(e_1, \ldots, e_m)$.

7.6 Exercices

Exercice 7.6.1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N_1(x,y) = \max(\sqrt{x^2+y^2}, |x-y|) \quad \text{et} \quad N_2(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unités fermées associées à ces normes.
2. Montrer que $N_2 \leq \|.\|_\infty \leq \|.\|_2 \leq N_1 \leq \|.\|_1 \leq \sqrt{13}N_2$.

Exercice 7.6.2. Sur le $\mathbb{R}$-ev $B(X, \mathbb{R})$ des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$, on pose pour, tout $f \in B(X, \mathbb{R})$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

1. Montrer que l'application $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur $B(X, \mathbb{R})$.
2. Parmi les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes, lesquelles sont dans la boule unité ouverte ?

$$f_1(x) = \cos(x),\ f_2(x) = \frac{1}{2}\cos(x),\ f_3(x) = e^{-x} \ \text{ et } \ f_4(x) = \arctan(x),$$

Exercice 7.6.3. Pour quelles valeurs de λ les formes bilinéaires suivantes définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

1. $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
2. $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3. $\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$

Exercice 7.6.4. Lesquelles des formes bilinéaires suivantes définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$?

1. $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$
2. $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left[P'(t)Q(t) + P'(t)Q(t)\right] \mathrm{d}t.$
3. $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t + P(0)Q(0).$

Exercice 7.6.5. Montrer que, pour tous éléments $f, g \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$,

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t \int_0^1 g(t)^2\mathrm{d}t.$$

En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$,

$$\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t.$$

Exercice 7.6.6. Soit H le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ défini par

$$u = (x_1, x_2, x_3) \in H \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

1. Déterminer $H^\perp$ puis une base orthonormale de $P^\perp$.
2. En déduire une expression analytique de la projection orthogonale p_H de $\mathbb{R}^3$ sur H.
3. Déterminer la matrice de p_H dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $X = (1, 2, 3)$. Décomposer la projection orthogonale de X sur le sev H, et calculer

$$d(X, F) = \inf_{U \in F} \|X - U\|.$$

Exercice 7.6.7. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.

Exercice 7.6.8. Sur l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère la forme bilinéaire définie par :

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.
2. A l'aide du procédé de Schmidt appliqué à la base $(1, X, X^2)$, construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. On considère le polynÃ´me $P_0 = X^3$. Calculer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire que pour ce produit scalaire, on a :

$$\text{dist}(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{2}{5\sqrt{7}}.$$

Exercice 7.6.9. Le but est de déterminer

$$\alpha = \inf_{a,b \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \mathrm{d}x.$$

On considère à cet effet l'espace $H = \mathbb{R}_1[x]$, comme sev de $E = \mathbb{R}_2[x]$ et on admettra que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.

1. Donner une base orthonormée (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[x]$ pour ce produit scalaire.
2. Calculer $\langle f_0, P_1 \rangle$, $\langle f_0, P_2 \rangle$, et $\|f_0\|^2$. En déduire la valeur de α.
3. Calculer de même $\beta = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (\mathrm{e}^x - ax^2 - bx - c)^2 \mathrm{d}x$. On considère cette fois ci l'espace $H = \mathbb{R}_2[x]$, comme sev de $E = \mathbb{R}_2[x] \oplus \mathbb{R} f_0$, où f_0 est la fonction définie par $f_0(x) = e^x$, et on commence par chercher une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ pour le même produit scalaire.