Devoir Maison à rendre pour le 28 mai 2020

PARTIE I (12 points)

Exercice 1 (4pt)

Soit l'ordonnancement simple suivant, représentant des travaux à effectuer, dont l'objectif est de minimiser la durée du projet.

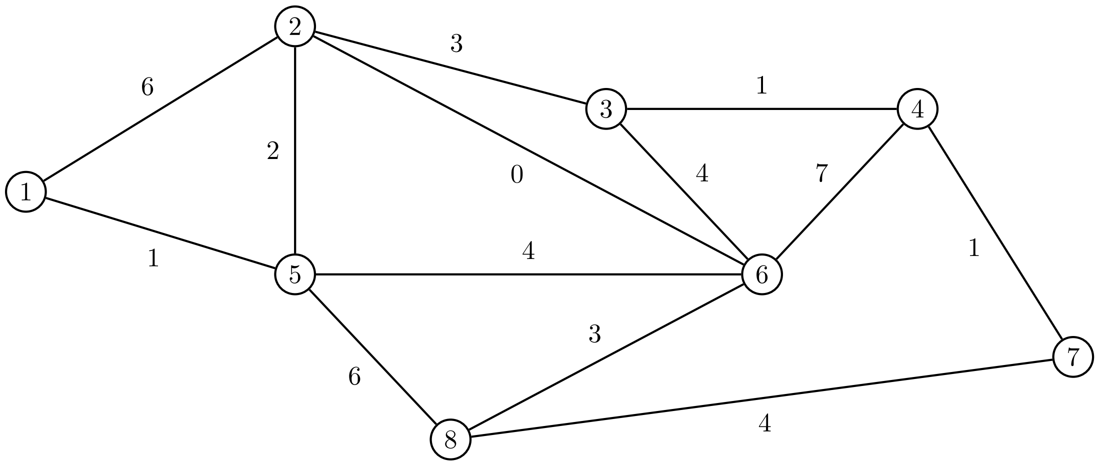
Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H
Préc.	B,F	-	E	A,C	-	-	C	E
Durée	7	5	4	6	4	5	3	2

Q1.1/ Rappeler la modélisation utilisée pour représenter sous forme d'un graphe un ordonnancement simple (1pt) puis définir le graphe (sommets, arcs, pondération) et le dessiner (1pt).

Q1.2/ Déterminer la durée minimale de ce projet d'ordonnancement (1pt) et les tâches critiques de ce projet (1pt).

Exercice 2 (4pt)

Soit le graphe pondéré $G = (X, E, \omega)$ suivant.



Q2.1/ Donner la représentation tabulaire sous forme de table des successeurs de ce graphe (0.5pt). *N'oubliez pas que les sommets successeurs doivent être considérés dans l'ordre numérique.*

Q2.2/ Donner l'arborescence couvrante des plus courts chemins à partir du sommet "1" en appliquant l'algorithme de Dijkstra (1pt). Préciser l'ordre d'exploration des sommets (0.5pt). *Les sommets successeurs doivent être considérés dans l'ordre numérique.*

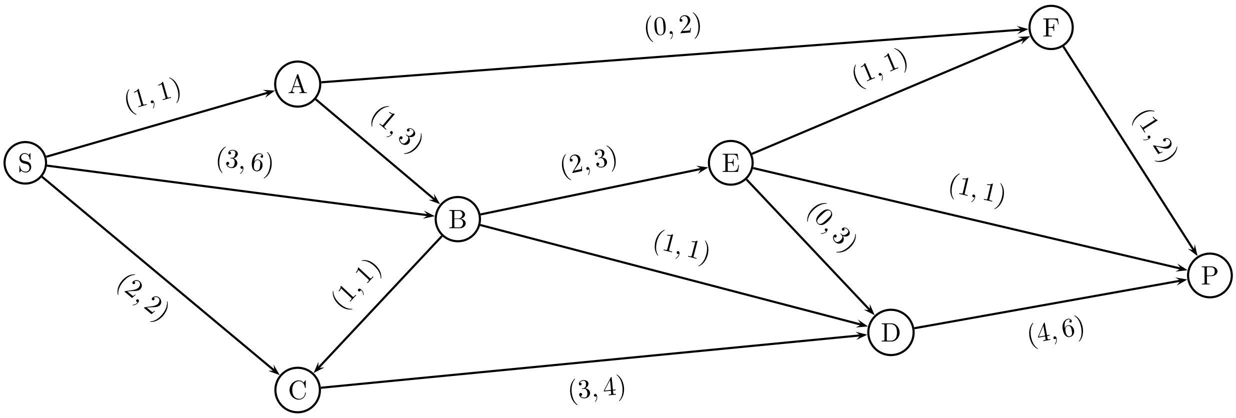
Q2.3/ Pourquoi ne peut-on pas utiliser l'algorithme de Bellmann ? (1pt)

Q2.4/ Peut-on extraire une chaîne Hamiltonienne de ce graphe ? Justifier (0.5pt)

Q2.5/ Peut-on extraire une chaîne Eulérienne de ce graphe ? Justifier (0.5pt)

Exercice 3 (4pt)

Soit le réseau $R = (X, A, c)$ suivant :
Pour chaque arc a, il est précisé le nombre d'unités de flot courant $f(a)$ et sa capacité maximale $c(a)$ sous la forme $(f(a), c(a))$



Q3.1/ Déterminer la quantité de flot Φ passant actuellement dans ce réseau (2pt).

Q3.2/ Déterminer la valeur du flot Φ* maximal (2pt). *N'oubliez pas de prouver l'optimalité.*

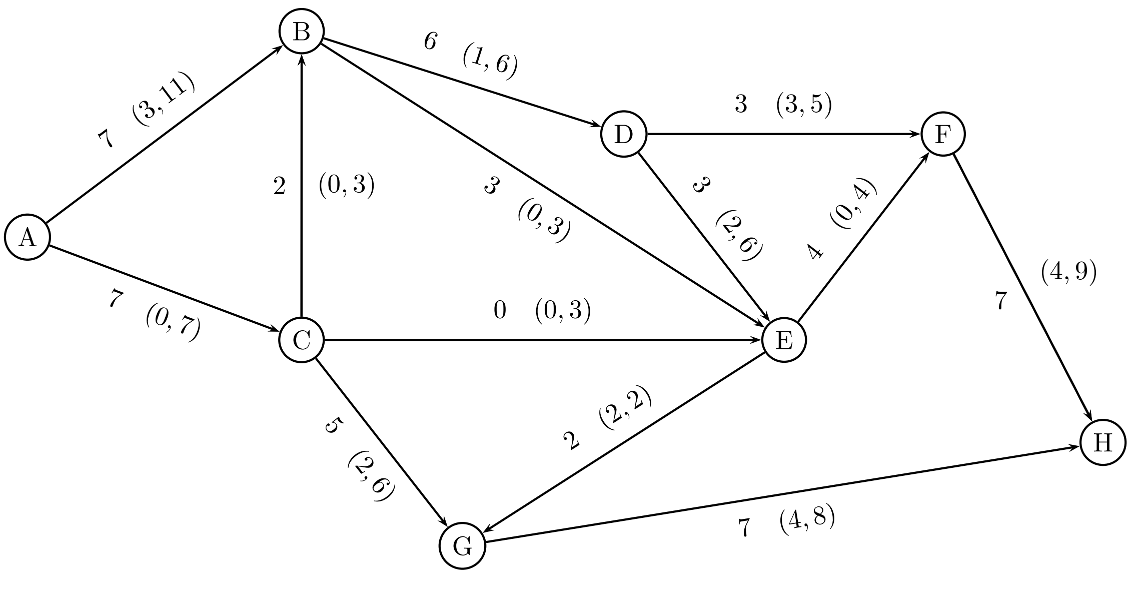
PARTIE II (8 points)

Exercice 4 (2pt)

Soit le réseau canalisé $R = (X, A, b, c)$ suivant :

Pour chaque arc a, il est précisé le nombre d'unités de flot courant $f(a)$ et entre parenthèses ses capacités minimale $b(a)$ et maximale $c(a)$ d'unités de flot.

Comme vous pouvez le constater, la particularité des **réseaux canalisés** et d'avoir une **capacité minimale** pour le flot qui doit passer dans chaque arc, en d'autres termes, la quantité $b(a)$ d'un arc a représente la valeur minimale de flot qui doit toujours passé par cet arc. Lors de l'application de l'algorithme de Ford-Fulkerson, quand on repousse du flot, il faut donc veiller à respecter cette contrainte de borne minimale.



Q3.1/ Déterminer la source et le puits de ce réseau, puis la quantité de flot Φ passant actuellement dans ce réseau.

Q3.2/ Déterminer la valeur du flot Φ* maximal. *N'oubliez pas de prouver l'optimalité, elle se démontre de la même façon que pour les réseaux classiques !*

Exercice 5 (2pt)

Reprenons l'exercice 2 du TD7. Nous avions choisi de modéliser ce problème d'affectation comme un réseau. Mais ce problème peut se modéliser autrement et nous avons les outils pour le résoudre autrement...
Q5.1/ Proposer une autre modélisation de ce problème.
Indice : Penser au TD3...

Q5.2/ Résoudre ce problème à partir de cette nouvelle modélisation. Préciser votre méthodologie.

Exercice 6 (2pt)

Reprenons (à nouveau) l'exercice 2 du TD7 et restons maintenant sur la modélisation sous forme d'un réseau. Nous voudrions prendre en compte en plus de l'adéquation des candidats aux postes, leurs préférences. Par exemple, le candidat 5 préfère dans l'ordre P4, P2, P1 puis P5.
Q6.1/ Proposer une modélisation qui tiendrait compte des préférences de chacun des candidats.

Q6.2/ Proposer une idée pour résoudre un tel problème.
Indice : voir la fin du poly de graphe...

Exercice 7 (2pt)

On veut transporter 9 produits chimiques par le rail. A, B, C, D, E, F, G, H, I désignent ces neuf produits chimiques. Dans le tableau ci-dessous, une étoile signifie que les produits ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon, car il y aurait risque d'explosion :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A				*		*	*	*	*
B			*			*			
C		*		*	*	*			
D	*		*		*	*	*	*	
E			*	*		*			
F	*	*	*	*	*		*	*	*
G	*			*		*		*	
H	*			*		*	*		
I	*					*			

On se propose de résoudre ce problème à l'aide d'un algorithme de coloration.

L'algorithme de Welsh-Powell est couramment utilisé et permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe). En voici les différentes étapes :

Etape 1 Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.

Etape 2 En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur (attention : considérer les sommets dans l'ordre établi à l'étape 1).

Etape 3 S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, FIN.

Q7.1/ Modéliser ce graphe comme un graphe d'incompatibilité. Justifier l'utilisation de cette modélisation.

Q7.2/ Déterminer la coloration donnée par l'algorithme de Welsh-Powell.

Q7.3/ Prouver l'optimalité de cette coloration.