EXERCICES DE MATHEMATIQUES

CHAPITRE 5 : DIAGONALISATION

1. PREREQUIS DE CALCUL MATRICIEL

1. Calculez, si elles existent, les inverses des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2. E est un espace vectoriel de dimension n ; $(e)=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ en est la base canonique. Vérifiez que $(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots\varepsilon_n)$ est une base de E et donnez, dans (ε), les composantes du vecteur proposé.

a) n = 3 E = $\mathbb{R}^3$ $(\varepsilon)=(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$ vecteur : $e_1-e_2+5e_3$

b) n = 3 E=$\mathbb{C}^3$ $(\varepsilon)=((1,1,i),(1,i,1),(i,1,1))$ vecteur : $\left(1, e^{i\frac{\pi}{4}}, -1\right)$.

c) n = 3 $E=\mathbb{R}_2[X]$ $(\varepsilon)=(x\mapsto 1, x\mapsto x, x\mapsto x(x+1))$ vecteur : $x\mapsto 2x^2+5$

3. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales :

a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}$

4. Pour tout entier $n \geq 1, \mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique et E_n, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de degré inférieur à n, de la base des fonctions monômes $\left(x \to x^i\right)_{0\leq i\leq n}$.

Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes :

a) $U_1 : E_2 \to E_3$ $U_1(f) : x \to \int_1^x f(t)\,dt$

b) $U_2 : E_3 \to \mathbb{R}^2$ $U_2(f) = (f'(0), f(1))$

c) $U_3 = U_2 \circ U_1$

d) $U_4 : E_2 \to E_2$ $U_4(P) = P + P'$

5. Les matrices suivantes étant canoniquement associées à une application linéaire U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, donnez la dimension et une base de Ker(U)

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & -3 \\ -1 & 5 & 16 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

6. E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p.

$(e) = (e_1, \dots, e_n)$ et $(e') = (e_1', \dots, e_n')$ sont deux bases de E;

$(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ et $(\varepsilon') = (\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_p')$ deux bases de F.

$f \in L(E, F)$ et $A = Mat(f, (e), (\varepsilon))$. Calculer B = $Mat(f, (e'), (\varepsilon'))$.

a) n = 3 p = 4 E = $\mathbb{R}^3$ F = $\mathbb{R}^4$ (e) = base canonique de $\mathbb{R}^3$ (ε) = base canonique de $\mathbb{R}^4$

$(e') = (e_2, e_3, e_1)$ $(\varepsilon') = (\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_2 + \varepsilon_4)$. A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) n = 4 p = 3 $E = \mathbb{R}_3[X]$ $F = \mathbb{R}_2[X]$

$(e) = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3)$ $(\varepsilon) = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$

$(e') = (e)$ $(\varepsilon') = (x \mapsto 1 + x, \quad x \mapsto 1 - x, \quad x \mapsto x^2)$ $f : P \mapsto P'$

7. Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

8. Soit a, b et c trois réels. Montrer que :

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$; b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

9. λ étant un nombre complexe, calculer les déterminants des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -6 \\ 2 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 8-\lambda & 4 & -1 \\ 4 & -7-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 8-\lambda \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -\lambda & -i & i \\ -i & -\lambda & i \\ -i & i & -\lambda \end{pmatrix}$

10. Pour quelles valeurs de m le système suivant admet-il une solution unique ?

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{cases}$$

11. Calculer les déterminants suivants ; a, b et c sont des paramètres complexes.

a) $\begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$

12. Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

2. DIAGONALISATION EN DIMENSION FINIE

13. On note (bc) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et U l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$A = \mathrm{Mat}(U, bc) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

a. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Que vaut $U(x, y, z)$?

b. Déterminer les réels λ tels que : $\mathrm{Det}(A - \lambda I_3) = 0$.

c. Déterminer une base de $V(9) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, U(x, y, z) = 9(x, y, z)\}$.

14. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les réels λ tels que : $\mathrm{Det}(A - \lambda I_3) = 0$.

b. Déterminer une base de $V(2) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}$

15. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

16. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $f : M \to AM$.

a. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Démontrer que 1 est une valeur propre de f.

17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On note bc la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a. Déterminer A = Mat (f, bc).
b. Démontrer que u = (1,1) est un vecteur propre de f et déterminer la valeur propre associée.
c. Démontrer que -1 est une valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre E_{-1} associé.
d. Vérifier que v = (1,-1) $\in E_{-1}$.

18. Soit U l'endomorphisme de K^3 canoniquement associé à la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Cet endomorphisme est-il diagonalisable ? a) Si K = $\mathbb{R}$? b) Si K = $\mathbb{C}$?

19. Diagonaliser la matrice A (i.e déterminer P inversible telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale) dans chacun des cas suivants :

Sur $\mathbb{R}$: a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$;g) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$;

h) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix} \left(a \in \mathbb{R}^*\right)$. j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Sur $\mathbb{C}$: l) $M = \begin{pmatrix} j & j^2 & 1 \\ j^2 & j & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(rappel : j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ m) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

n) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ o) $\begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}$

20. Discuter, suivant les valeurs des réels α, β, γ, la possibilité de diagonaliser (sur $\mathbb{R}$) la matrice :

$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Même question pour : $B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$.

21. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres complexes a, b, c, d, e, f pour que $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

22. Déterminer toutes les matrices A telle que a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ On pourra diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et montrer que $A^2 = B \Leftrightarrow \left(P^{-1}AP\right)^2 = D$.

23. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f : M \mapsto AM - MA$ est un endormophisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Rappeler la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b. Donner la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Diagonaliser cette matrice.

24. Soit A une matrice complexe d'ordre n dont 0 n'est pas valeur propre. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$; en calculant de deux manières différentes le déterminant de A.($A^{-1} - \lambda I_n$), montrer que $\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \dfrac{(-1)^n \lambda^n}{\chi_A(0)} \chi_A(\dfrac{1}{\lambda})$

3. APPLICATIONS DE LA DIAGONALISATION

1. Calcul de puissance de matrice

25. On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$
c. Calculer D^n pour tout n de $\mathbb{N}$.
d. En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$ la valeur de A^n.

26. En suivant la démarche de l'exercice précédent, calculer les puissances k-ièmes pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (ou $k \in \mathbb{Z}$ si possible) de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

27. Déterminer la puissance nième de la matrice à termes complexes $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$

28. Déterminer la puissance nième de la matrice $\begin{bmatrix} \text{ch a} & \text{b sh a} \\ \dfrac{\text{sh a}}{\text{b}} & \text{ch a} \end{bmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

29. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $A^{2p+1} = (-4)^p A \qquad A^{2p+2} = (-4)^p A^2$.

30. Dans cet exercice, les calculs se feront dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

α, β, γ et δ étant quatre complexes, on pose $M(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta \\ \gamma & \alpha & \delta & \beta \\ \delta & \beta & \alpha & \gamma \\ \beta & \delta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

Soit $N = M(0,1,0,0)$.

a) Calculer les puissances successives de N.

b) En déduire que $M(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \alpha I_4 + \beta N + \gamma N^2 + \delta N^3$.

c) Déterminer P inversible et D diagonale telle que $N = PDP^{-1}$.

d) Exprimer N^2 et N^3 en fonction de P, D et P^{-1}.

d) Exprimer $P^{-1}MP$ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et D. En déduire les valeurs propres de M, et enfin les puissances k-ièmes de cette matrice.

2. Systèmes récurrents

31. On considère le système récurrent (S) : $\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n - 4v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = w_n \end{cases}$ avec $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases}$

a. On note pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice A telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Diagonaliser A.

c. En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$ la valeur de A^n.

d. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $X_n = A^n X_0$.

e. En déduire la résolution du système récurrent (S).

32. En vous inspirant de l'exercice précédent, résoudre les systèmes récurrents linéaires suivants :

a) $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 11v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = 4u_n - 11v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4u_n - 13v_n + 6w_n \end{cases}$;avec $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{n+1} = 2v_n - 5w_n \\ v_{n+1} = 5u_n - 3v_n - 5w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + 2v_n - 3w_n \end{cases}$ avec $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \\ w_0 = 3 \end{cases}$.

33. On souhaite trouver toutes les suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} + u_{n+1} - 3u_n$.

a. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\begin{cases} x_n = u_{n+2} \\ y_n = u_{n+1} \\ z_n = u_n \end{cases}$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + y_n + 3z_n \\ y_{n+1} = x_n \\ z_{n+1} = y_n \end{cases}$.

b. Résoudre ce système récurrent.

c. En déduire, la valeur de u_n en fonction de n.

34. En vous inspirant de l'exercice précédent, trouver toutes les suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n.$$

3. Systèmes différentiels

35. On considère le système différentiel (S) suivant : $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = -2y(t) + z(t) \\ z'(t) = y(t) - 2z(t) \end{cases}$, où x, y et z sont trois fonctions de la variable t.

a. On pose, pour tout t de $\mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que, pour tout t de $\mathbb{R}$,

$(S) \Leftrightarrow (S') : X' = AX$.

b. Diagonaliser A. On notera D sa matrice diagonale et P la matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

c. On pose alors $Y = P^{-1}X$. Montrer que X est solution de (S') équivaut à Y solution de $Y' = DY$.

d. Résoudre le système $Y' = DY$, en résolvant chacune des équations qui le compose.

e. En remarquant que $X = PY$, déterminer x(t), y(t) et z(t).

36. En vous inspirant de l'exercice précédent, déterminer l'ensemble des solutions réelles (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) des systèmes différentiels suivants :

a) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 5x_2(t) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) - 2x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) - x_2(t) + 3x_3(t) \end{cases}$

37. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'unique solution réelle F vérifiant : $F(0) = X_0$:

a) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) \end{cases}$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) + \frac{1}{3}x_3(t) \end{cases}$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} 2x_1'(t) + x_2'(t) = 4x_1(t) - x_2(t) \\ x_1'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

38. Déterminer l'ensemble des solutions réelles du système différentiel : $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ et $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-4t} \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \\ 2e^t \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ \frac{3}{2}t^2 \\ 0 \end{bmatrix}$;

e) $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 16 & -1 & 8 \\ -8 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

39. Pour chacun des systèmes différentiels suivants, déterminer l'unique solution réelle F vérifiant : $F(0) = X_0$:

a) $\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 2x_2(t) + e^t \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 6x_2(t) + t \end{cases}$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + t \\ x_2'(t) = -3x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) \\ x_3'(t) = 6x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

40. On considère l'équation différentielle suivante : $y^{(3)} - 3y^{(2)} - y' - 3y = 0$.

a. On pose : $\begin{cases} z_1(t) = y(t) \\ z_2(t) = y'(t) \\ z_3(t) = y^{(2)}(t) \end{cases}$. Montrer alors que $\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = z_3(t) \\ z_3'(t) = 3z_3(t) + z_2(t) - 3z_1(t) \end{cases}$. On notera (S) ce système différentiel.

b. En notant $Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$, écrire le système précédent sous la forme $Z'(t) = AZ(t)$, où A est une matrice d'ordre 3.

c. En diagonalisant A, résoudre $Z'(t) = AZ(t)$.

d. En déduire les solutions de (S).

41. En vous inspirant de l'exercice précédent, résoudre l'équation $y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0$

4. Extremum (PSI, MP)

42. on considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : f(x,y) = $(y-x)^3+6xy$.

a. Déterminer $\operatorname{grad} f(x,y)$.

b. Montrer que $\operatorname{grad} f(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=(y-x)^2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0 \text{ ou } y=-x=\frac{1}{2}$.

c. Quels sont les seuls points critiques possibles de f ?

d. Soit $S(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$.

Déterminer $S(0,0)$ et calculer ses valeurs propres.

d. (0,0) est-il un extremum local ?

e. De même, étudier si $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ est un extremum local.

43. En vous inspirant de l'exercice précédent, déterminer les extremums locaux éventuels de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

1) f(x,y) = $(x-1)^2-2y^2$ 2) f(x,y) = $x^2y^2+x^2+y^2$

3) f(x,y) = x^3+y^3-3xy 4) f(x,y) = $x^3+3xy^2-15x-12y$

44. Déterminer les extremums locaux éventuels de la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

1) f(x,y,z) = $x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$ 2) f(x,y,z) = $x^2y+y^2z+2x-y$.

3) f(x,y,z) = $\frac{1}{2}x^2+xyz-z-y$.

45. Déterminer les extremums locaux éventuels de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1) f(x,y) = $x((\ln x)^2+y^2)$. 2) f(x,y) = xe^y+ye^x. 3) f(x,y) = $2(x-y)^2-x^4-y^4$

4) f(x,y) = x^2+y^6 5) f(x,y) = $\sqrt{x^2+y^2}$ 6) f(x,y) = $\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

46. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que f(x,y) = $x^2+y^2+x^3-y^3$. Etudier l'existence pour f d'un extremum local en (0,0) ; cet extremum est-il global ?

47. a, b et c étant trois points distincts du plan affine euclidien E_2, étudier les extremums de la fonction f définie par f(m) = $\|ma\|^2+\|mb\|^2+\|mc\|^2$.