
Devoir n°2 : *(A rendre le 12/12/20 au format pdf)*

Exercice 1. On pose $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x+t=0 \text{ et } 2x+y-z=0\right\}$ et $G=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, 2x+y-z=0\right\}$

1. Montrer que F et G sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Comparer F et G. En déduire $F\cap G$.
3. Soit $u=(1+a,-2,0,b+4)$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer les réels a et b pour que $u\in F$

Exercice 2. $\mathbb{R}^4$ est muni de la base canonique $b_4=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ et $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $b_3=(i,j,k)$

Soit $$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & u=(x,y,z,t) & \mapsto & (x+y+z-t,\, x-2y+2z+t,\, x-y+z) \end{array}$$

1. Déterminer $A=\mathrm{Mat}(f,b_4,b_3)$
2. Soit $E=\left\{u\in\mathbb{R}^4 \,/\, f(u)=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$. Montrer que E est une droite vectorielle dont on précisera une base.
3. On pose $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, 2x+6y+7z-t=0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera une base.
4. Soient $\varepsilon_1=(2,1,-1,2)$, $\varepsilon_2=(1,1,-1,1)$, $\varepsilon_3=(-1,-2,3,7)$ et $\varepsilon_4=(4,4,-5,-3)$ quatre vecteurs $\mathbb{R}^4$.
   a. Montrer $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   b. Montrer que $F=\mathrm{Vect}(\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$. $(\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ est-elle une base de F ?
   c. Soit $u=(x,y,z,t)\in F$. Exprimer u comme combinaison linéaire des vecteurs ε_2 , ε_3 et ε_4 .

Exercice 3. $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $b_3=(e_1,e_2,e_3)$.

Soit $$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & u=(x,y,z,) & \mapsto & (3x-2y+2z,\, 2x-y+2z,\, 2x-2y+3z) \end{array}.$$

On admet que f est une application linéaire.

1. Déterminer une base du noyau $\ker f$.
2. Déterminer la matrice $A=\mathrm{Mat}(f,b_3)$.
3. Déterminer les valeurs propres de A
4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A=PDP^{-1}$
5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer, en fonction de n , A^n
6. Soit Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ les suites définies , pour tout $n\in\mathbb{N}$, par: $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = 2a_n - b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - 2b_n + 3c_n \end{cases}$

   Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, a_n , b_n et c_n en fonction de n et de a_0 , b_0 et c_0 .