PROBABILITÉS 1 IS 2A3
DEVOIR MAISON À RENDRE LE 04 DÉCEMBRE 2020

Veillez à bien lire le sujet et à bien justifier vos réponses. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note du devoir maison.

Exercice 1 :

Dans cet exercice, selon les valeurs des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de l'intégrale généralisée donnée par

$$I_{\alpha,\beta} = \int_{47}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\log(t))^\beta}.$$

1. On suppose que $\alpha > 1$. En étudiant le comportement asymptotique d'une fonction appropriée, montrer que l'intégrale généralisée $I_{\alpha,\beta}$ est convergente.
2. On suppose que $\alpha = 1$. Soit $R \geq 47$. Calculer l'intégrale tronquée suivante
$$I_{1,\beta,R} = \int_{47}^{R} \frac{dt}{t(\log(t))^\beta}.$$
3. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale généralisée $I_{1,\beta}$ est convergente. Que se passe-t-il pour $\beta = 1$?
4. On suppose que $\alpha < 1$. En comparant à une fonction bien choisie, montrer que $I_{\alpha,\beta}$ diverge.

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On rappelle que la partie entière supérieure d'un nombre réel est le plus petit des entiers plus grand que ce nombre réel. Elle est notée par $\lceil x \rceil$ pour $x \in \mathbb{R}$. Par exemple, $\lceil 2.5 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, etc... On note $Y = \lceil X \rceil$. Notez que Y prend donc ses valeurs dans les entiers positifs.

1. Montrer que Y suit une loi géométrique de paramètre que vous préciserez.
2. Dans la suite, on s'intéresse à la variable aléatoire Z définie par $Z = Y - X$. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
3. Soit $t \in [0, 1[$. Montrer l'égalité ensembliste suivante
$$\{Z \leq t\} = \cup_{n \geq 1} \{n - t \leq X \leq n\}.$$
4. En déduire la fonction de répartition de Z ainsi que sa densité (si elle existe). Indication : justifier que les événements $\{n - t \leq X \leq n\}$, pour $n \geq 1$, sont deux à deux disjoints.

Exercice 3 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \frac{Ce^{-x}}{(1 + e^{-x})^2},$$

où C est une constante strictement positive.

1. Montrer que f est une densité de probabilité pour une valeure de C bien choisie. Déterminer la fonction de répartition associée à la densité de probabilité f.
2. On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

   Montrer que g est une bijection et déterminer sa fonction réciproque.
3. On définit la variable aléatoire réelle Y par $Y = g(X)$ où X est une variable aléatoire réelle dont la loi admet pour densité f. Déterminer la fonction de répartition et la densité de Y.