

CONVERGENCES DE SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

THÉORÈMES LIMITES

Partie A :



Exercice 1.

- (1) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $|U|$.
- (2) Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Déterminer la loi de $\sin(V)$ (on pourra utiliser le principe de la fonction muette).
- (3) Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+W}{1-W} \right)$ (on pourra utiliser le principe de la fonction muette).

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calculer $\mathbb{E}[(X + Y)^2]$.

Exercice 3. Soit $\alpha > 0$. Sur un même espace de probabilité on considère une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \rightarrow 0$ dans \mathbb{L}^1 . Pour quelles valeurs de α la suite $(Z_n, n \geq 1)$ converge-t-elle presque sûrement ?

Exercice 4. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{P}(X \geq a) = a^{-\lambda}$ pour tout $a \geq 1$. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X , définies sur le même espace de probabilité. On pose

$$T_n = \left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}.$$

Montrer que T_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire qu'on déterminera.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- (1) Montrer que la convergence

$$\frac{1}{\ln(n)} \max_{1 \leq k \leq n} X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{\lambda}$$

a lieu en probabilité.

- (2) On pose $Z_n = \frac{1}{\ln(n)} \max_{1 \leq k \leq n} X_k - \frac{1}{\lambda}$. En notant F_n la fonction de répartition de Z_n , montrer que, pour tout réel x , $F_n(x)$ converge vers un réel noté $F(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Exercice 6. En utilisant le théorème central limite, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

On pourra utiliser le fait que la somme de n variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.