PROBABILITÉS 2 GIS2A3
DEVOIR MAISON

La date limite de rendu du Devoir Maison est **le** 11 **mai** 2020 **à 23h59**. La première partie porte sur des notions fondamentales du cours pour la suite de la formation. La seconde partie permet d'aller un peu plus loin. Une attention **particulière** sera portée à **la qualité de la rédaction** et à **la précision des réponses**. Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'indicatrice d'un ensemble A est notée $\mathbb{1}_A$.

Partie 1 (12 points)

Exercice 1 :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, on note

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad T_n := \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

1. Pour tout $n \geq 1$, quelle est la loi de S_n ? Pour tout $n \geq 1$, calculer les quantités $\mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{E}(T_n^2)$.
2. Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T_∞ dont on donnera la loi.
3. Soit $a > 0$. On introduit la fonction f_a définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

   $$f_a(x) = \min(|x|, a).$$

   Montrer que la fonction f_a est continue et bornée sur $\mathbb{R}$. En déduire que

   $$\mathbb{E}(f_a(T_n)) \longrightarrow \mathbb{E}(f_a(T_\infty)),$$

   quand n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que, pour tout $a > 0$ et pour tout $n \geq 1$, on a

   $$|\mathbb{E}(|T_n|) - \mathbb{E}(|T_\infty|)| \leq \mathbb{E}\,||T_n| - f_a(T_n)| + \mathbb{E}\,||T_\infty| - f_a(T_\infty)| + |\mathbb{E}(f_a(T_n) - f_a(T_\infty))|.$$

5. Pour toute variable aléatoire X telle que $\mathbb{E}|X|^2 < +\infty$, montrer que

   $$\mathbb{E}||X| - f_a(X)| \leq \mathbb{E}\left(|X|\mathbb{1}_{|X|\geq a}\right) \leq \left(\mathbb{E}X^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(|X| \geq a)^{\frac{1}{2}}.$$

   Indication : Utiliser l'égalité $|x| - \min(|x|, a) = (|x| - a)\mathbb{1}_{|x|>a}$.
6. En utilisant les questions 3, 4 et 5 ainsi qu'une inégalité de concentration du cours, montrer que $\mathbb{E}(|T_n|)$ converge vers $\mathbb{E}(|T_\infty|)$ quand n tend vers $+\infty$.

7. (**Question bonus +1**) : Soit $x_+ = \max(x, 0)$. En calculant $\mathbb{E}((T_\infty)_+)$ et $\mathbb{E}((T_n)_+)$ et en admettant que $\mathbb{E}((T_n)_+) \longrightarrow \mathbb{E}((T_\infty)_+)$ quand n tend vers $+\infty$, montrer la formule de Stirling
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Partie 2 (8 points)

Exercice 2 :

Soient f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in [0,1]$ fixé. Pour tout $n \geq 1$ entier, on note S_n^x une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres (n, x).

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'application p_n, définie, pour tout $x \in [0,1]$, par
$$p_n(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n^x}{n}\right)\right),$$
est un polynôme en x.
2. On rappelle qu'une fonction continue sur $[0,1]$ est uniformément continue sur $[0,1]$:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y \in [0,1] \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$
En utilisant la continuité uniforme de f, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1]$,
$$|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n^x}{n} - x\right| \leq \eta\right) + 2\|f\|_{\infty,[0,1]}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n^x}{n} - x\right| \geq \eta\right).$$
3. En utilisant une inégalité de concentration du cours, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1]$,
$$|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_{\infty,[0,1]}\frac{x(1-x)}{n\eta^2}.$$
4. En déduire que la suite de fonctions $(p_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction f.