Exercice 1 /TD “Gauss Pivot”

Résoudre le système linéaire AX = b suivant , donné sous forme d’un système d’équations, par la méthode de Gaus avec une stratégie de pivotage total, avec 3 chiffres significatifs

$$2.0\, x_1 + x_2 + 4.0\, x_4 = 2.0$$
$$-4.0\, x_1 - 2.0\, x_2 + 3.0\, x_3 - 5.0\, x_4 = -9.0$$
$$4.0\, x_1 + x_2 - 2.0\, x_3 + 3.0\, x_4 = 2.0$$
$$-3.0\, x_2 - 12.0\, x_3 - x_4 = 2.0$$

R1:

$$A^0\, x = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12.0 & -1.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

[1,2,3,4]

Q1 : Donnez toutes les matrice A^k intermédiaires

Q2 : Quel est l’ordre des éléments de x calculés ainsi?

Q3 : Recalculez la valeur du déterminant de A

$$P_1 A^0\, x = \begin{pmatrix} 0.0 & -3.0 & -12. & -1.0 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 A^0 Q_1 Q_1^{-1}\, x = \begin{pmatrix} -12.0 & -3.0 & 0.0 & -1.0 \\ 3.0 & -2.0 & -4.0 & -5.0 \\ -2.0 & 1.0 & 4.0 & 3.0 \\ 0.0 & 1.0 & 2.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

[3,2,1,4]

$$P_1A^0Q_1Q_1^{-1}\,x = \begin{pmatrix} -12.0 & -3.0 & 0.0 & -1.0 \\ 3.0 & -2.0 & -4.0 & -5.0 \\ -2.0 & 1.0 & 4.0 & 3.0 \\ 0.0 & 1.0 & 2.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

i=2, j=2 : 2- (-3)(3)/(-12) = -2 -9/12 = -2 – ¾ = -11/4
i=3, j=2 : 1 – (-2)(-3)/(-12) = 1 + ½ =1;5
i=2, j=4 : -5 -3(-1)/(-12) = -5 - ¼ = -21/4
i=3,j-4 : 3 – (-2)(-1)/(-12) = 3 + 1/6 = 19/6
b2 = -9 – (3)(2)/(-12) = -9 + ½ = -8,5
b3 = 2 – (-2)(2)/(-12) = 2 – 1/3 = 5/3

[3,2,1,4]

$$E_1P_1A^0Q_1Q_1^{-1}\,x = \begin{pmatrix} -12. & -3.0 & 0\,.0 & -1.0 \\ 0.0 & -2{,}75 & -4.0 & -5{,}25 \\ 0.0 & 1{,}5 & 4.0 & 3{,}17 \\ 0.0 & 1.0 & 2.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x2 \\ x1 \\ x4 \end{pmatrix}$$

Remarque : si nous avions un stratégie de pivotage “partiel, nous aurions choisi -2,75 et n’aurions, dans cet exemple, pas eu de permutation

$$P_2E_1P_1A^0Q_1Q_2Q_2^{-1}Q_1^{-1}\,x = \begin{pmatrix} -12. & -1.0 & 0..0 & -3.0 \\ 0.0 & -5{,}25 & -4.0 & -2{,}75 \\ 0.0 & 3{,}17 & 4.0 & 1{,}5 \\ 0.0 & 4.0 & 2.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8{,}5 \\ 1{,}67 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

$$E_2P_2E_1P_1A^0Q_1Q_2Q_2^{-1}Q_1^{-1}\,x = \begin{pmatrix} -12. & -1.0 & 0.0 & -3.0 \\ 0.0 & -5{,}25 & -4.0 & -2{,}75 \\ 0.0 & 0.0 & ? & ? \\ 0.0 & 0.0 & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8{,}5 \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

Et nous continuons ….laissé en “homework”

$$P_2E_1P_1A^0Q_1Q_2Q_2^{-1}Q_1^{-1}\,x = \begin{pmatrix} -12. & -1.0 & 0.0 & -3.0 \\ 0.0 & -5,25 & -4.0 & -2.75 \\ 0.0 & 3,17 & 4.0 & 1.5 \\ 0.0 & 4.0 & 2.0 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8,5 \\ 1,67 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

i=3, j=3 : 4.0 - (-4.0)(3.17)/(-5.25) = 4 – 2.42 = 1.58
i=3, j=4 : 1.5 - (-2.75)(3.17)/(-5.25) = 1.5 – 1.66 = -0.16
i=4, j=3 : 2.0 – (4.0)(-4.0)/(-5.25) = 2.0 – 3.05 = -1.05
i=4; j=4 : 1.0 – (-2.75)(4.0)/(-5.25) = 1.0 – 2.10 = - 1.10

second membre :
i=4 : 2.0 – (4.0)(-8.5)/(-5.25) = 2.0 – 6.48 = - 4.48
i=3 : 1.67 – (3.17)(-8.5)/(-5.25) = 1.67 – 5.13 = -3.46

$$E_2P_2E_1P_1A^0Q_1Q_2Q_2^{-1}Q_1^{-1}\,x = \begin{pmatrix} -12. & -1.0 & 0.0 & -3.0 \\ 0.0 & -5,25 & -4.0 & -2,75 \\ 0.0 & 0.0 & 1.58 & -0.16 \\ 0.0 & 0.0 & -1.05 & -1.10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8,5 \\ -3.46 \\ -4.48 \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

Pas besoin de pivotage

$$E_3P_3E_2P_2E_1P_1A^0Q_1Q_2Q_2^{-1}Q_1^{-1}\,x = \begin{pmatrix} -12. & -1.0 & 0.0 & -3.0 \\ 0.0 & -5,25 & -4.0 & -2,75 \\ 0.0 & 0.0 & 1.58 & -0.16 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8,5 \\ -3.46 \\ -6.78 \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

Matrice : i=4, j=4 : -1.10 – (-0.16)(-1.05)/(1.58) = -1.10 – 0.11 = -1.21
Second membre : -4.48 – (-3.46)(-1.05)/(1.58) = -4.48 – 2.29 = -6.78

$$\begin{pmatrix} -12. & -1.0 & 0.0 & -3.0 \\ 0.0 & -5,25 & -4.0 & -2,75 \\ 0.0 & 0.0 & 1.58 & -0.16 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \\ x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -8.5 \\ -3.46 \\ -6.78 \end{pmatrix}$$

[3,4,1,2]

Remontée du système triangulaire :

i = 4 : $-1.21\ x_2 = -6.85 \Leftrightarrow x2 = 6.78/1.21 = 5.60$
C'est x_2 qui est calculer en premier
on le sait car nous avons gardé la trace des permurations

i=3 : $x_1 = (-\mathbf{3.46} – (-0.16 \times 5.60))/1.58 = - 1.62$
i=2 : $x_4 = (-8.5 – (-4.0 * (-1.62) – 2.75 * 5.60)/(-5.25) = - 0.08$
i=1 : $x_3 = (2.0 – (-1.0 * (-0.08) – 3.0 * 5.60))/(-12.) = -1.56$

La solution est donc :

$$X = \begin{pmatrix} -1.62 \\ 5.60 \\ -1.56 \\ - 0.08 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -4.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 4.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & -12.0 & -1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.62 \\ 5.60 \\ -1.56 \\ -0.08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.04 \\ -9.00 \\ 2.00 \\ 2.00 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc une erreur mais nous avons toujours pris ”que” trois chiffres significatifs pour nos calculs intermédiaires