Correction de certains exercices de TDs

Benjamin Arras

8 avril 2021

Partie 6

Exercice 25

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \mathbb{P}\left(X_n = n\right) = \frac{1}{n^2}.$$

Cette suite converge-t-elle en probabilité ? Et en moyenne quadratique ?

Correction :

1. Cette suite converge en probabilité vers 0. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon) \geq 1$ telle que $1/n \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$. Alors, pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$,

   $$\mathbb{P}\left(|X_n| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(X_n = n\right) = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0,$$

   quand n tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \geq 1$, on a

   $$\mathbb{E}\left(X_n^2\right) = n^2\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}(1 - \frac{1}{n^2}) \longrightarrow 1,$$

   quand n tend vers $+\infty$. Cette suite ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.

Exercice 27

La durée de vie d'une ampoule électrique peut être modélisée par une v.a. X de loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec un paramètre inconnu $\theta > 0$. Afin d'optimiser l'agenda du réparateur, on cherche à estimer θ à l'aide de n v.a. indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de même loi que X. On propose d'utiliser

$$\widehat{\theta}_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k \quad \text{ou} \quad \widetilde{\theta}_n = \frac{2}{n}\left(X_1 + \cdots + X_n\right).$$

1. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ converge en probabilité vers θ, c'est-à-dire que pour tout $\delta > 0$, on a

   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\widehat{\theta}_n - \theta\right| > \delta\right) = 0.$$

2. Montrer que $\widetilde{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ, c'est-à-dire que

   $$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \widetilde{\theta}_n = \theta\right) = 1.$$

$$\hat{\theta}_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k \ \text{ et } \ \tilde{\theta}_n = \frac{2}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)$$

Correction :

1. Soient $\delta \in (0,\theta)$ et $n \geq 1$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\widehat{\theta}_n - \theta\right| > \delta\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left|\widehat{\theta}_n - \theta\right| \leq \delta\right), \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\theta - \delta \leq \widehat{\theta}_n \leq \delta + \theta\right), \\
&= 1 - F_n(\delta + \theta) + F_n((-\delta + \theta)^-),
\end{aligned}$$

où F_n est la fonction de répartition de $\widehat{\theta}_n$ et

$$F_n((-\delta + \theta)^-) = \mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_n < \theta - \delta\right).$$

Maintenant, pour tout $x \in [0,\theta]$, on a

$$\begin{aligned}
F_n(x) = \mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_n \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \leq x\right), \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_k \leq x\right) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n.
\end{aligned}$$

De plus, $F_n(x) = 1$, pour $x \geq \theta$, et $F_n(x) = 0$, pour $x \leq 0$. Ainsi, pour tout $\delta \in (0,\theta)$,

$$F_n(\delta + \theta) = 1, \quad F_n((-\delta + \theta)^-) = \mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_n < \theta - \delta\right) = \left(\frac{\theta - \delta}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\delta}{\theta}\right)^n.$$

Ainsi, pour tout $\delta \in (0,\theta)$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\widehat{\theta}_n - \theta\right| > \delta\right) = 1 - 1 + \left(1 - \frac{\delta}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{\delta}{\theta}\right)^n \longrightarrow 0,$$

quand n tend vers $+\infty$. La suite $(\widehat{\theta}_n)_{n\geq 1}$ converge donc en probabilité vers θ.

2. On remarque que $\mathbb{E}|X| < +\infty$ et $\mathbb{E}(X) = \theta/2$. Ainsi, par la loi forte des grands nombres, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p.s.} \frac{\theta}{2},$$

quand n tend vers $+\infty$. On en déduit alors que

$$\widehat{\theta}_n := \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p.s.} \theta,$$

quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 30 Un joueur participe au jeu suivant : à chaque étape du jeu, on peut doubler ou diviser son portefeuille avec une probabilité de $(1-\varepsilon)/2$ ou tout perdre avec probabilité ε, pour $\varepsilon \in (0,1)$. Le portefeuille de départ du joueur contient 1 euro. On note par G_n l'état du portefeuille après n étapes.

1. Calculer $\mathbb{P}(G_n = 0)$ ainsi que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(G_n = 0)$
2. Quelles valeurs peut prendre G_n ? Donner la loi de G_n
3. Calculer $\mathbb{E}[G_n]$ ainsi que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[G_n]$

Correction :

1. Soit $n \geq 1$. Par conditionnement,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(G_{n+1} = 0 \cap G_n = 0) + \mathbb{P}(G_{n+1} = 0 \cap G_n \neq 0),\\ &= \mathbb{P}(G_{n+1} = 0|G_n = 0)\mathbb{P}\left(G_n = 0\right) + \mathbb{P}(G_{n+1} = 0|G_n \neq 0)\mathbb{P}\left(G_n \neq 0\right),\\ &= \mathbb{P}(G_{n+1} = 0|G_n = 0)\mathbb{P}\left(G_n = 0\right) + \mathbb{P}(G_{n+1} = 0|G_n \neq 0)\left(1 - \mathbb{P}\left(G_n = 0\right)\right),\\ &= \mathbb{P}\left(G_n = 0\right)\left(1 - \mathbb{P}(G_{n+1} = 0|G_n \neq 0)\right) + \mathbb{P}(G_{n+1} = 0|G_n \neq 0),\\ &= \mathbb{P}\left(G_n = 0\right)(1-\varepsilon) + \varepsilon.\end{aligned}$$

En posant $\varepsilon_n = \mathbb{P}(G_n = 0)$, on a donc une relation de récurrence de type arithmético-géométrique :

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n (1-\varepsilon) + \varepsilon, \quad n \geq 0, \quad \varepsilon_0 = 0$$

Celle-ci se résout, pour tout $n \geq 0$, en

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= -(1-\varepsilon)^n \frac{\varepsilon}{1-1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1-1+\varepsilon},\\ &= 1 - (1-\varepsilon)^n.\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 1$.

2. L'ensemble des valeurs possibles pour G_n est donné par

$$E_n = \{0, \{2^{2k-n}, k \in \{0, \ldots, n\}\}\}.$$

Pour caractériser la loi de G_n, il faut donc calculer les fonctions de masse associées : pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}\left(G_n = 2^{2k-n}\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^n.$$

En particulier, on a

$$\mathbb{P}(G_n \neq 0) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(G_n = 2^{2k-n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^n = (1-\varepsilon)^n.$$

3. Par définition de l'espérance pour une loi finie discrète,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_n) = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k-n}\mathbb{P}\left(G_n = 2^{2k-n}\right) &= \sum_{k=0}^{n} 2^{2k-n}\binom{n}{k}\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^n,\\ &= \left(\frac{5}{4}\right)^n (1-\varepsilon)^n.\end{aligned}$$

Ainsi, on a la trichotomie suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(G_n) = \begin{cases} 0 & \text{si}\, \varepsilon \in \left(\frac{1}{5}, 1\right) \\ 1 & \varepsilon = \frac{1}{5} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie 7

Exercice 33

Considérons deux v.a. X et Y indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi conditionnelle de X sous la condition $X+Y=n$.

Correction : Puisque X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ et puisque X et Y sont indépendantes, $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Par définition de la loi conditionnelle, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k|X+Y=n) &= \frac{\mathbb{P}(X=k;X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=k;Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu}\frac{e^{\lambda+\mu}n!}{(\lambda+\mu)^n} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, conditionnellement à l'événement $X+Y=n$, X suit une loi binomiale de paramètre $(n, \lambda/(\lambda+\mu))$.

Exercice 34

Soient X et Y deux v.a. dont la loi jointe est donnée par la densité

$$f(x,y) = \frac{e^{-x/y}\,e^{-y}}{y}\,\mathbb{I}_{]0,\infty[^2}(x,y).$$

1. Déterminer la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x|y)$ de X sachant $Y=y$ (pour tout $y>0$). Calculer $\mathbb{E}(X\big|Y=y)$.
2. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X>1\big|Y=y)$.

Correction :

1. Par définition de la densité conditionnelle, pour tout $y>0$ et $x>0$,

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx} \\
&= \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, par définition de l'espérance conditionnelle, pour tout $y>0$

$$\mathbb{E}(X\big|Y=y) = \int_{(0,+\infty)} x f_{X|Y}(x|y)dx = y.$$

2. Par définition de la loi conditionnelle, pour tout $y>0$,

$$\int_1^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)dy = e^{-\frac{1}{y}}.$$

Exercice 36 Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\{0,1\}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. On suppose de plus que pour tout $n \geq 1$ on a $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_n = 1) = q$ où $p, q \in]0,1[$. Finalement, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k$$

et $N = \inf\{n \geq 0 \, T_{n+1} = 1\}$.

1. Quelles sont les lois de S_n et T_n ?
2. Quelle est la loi de N ?
3. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$\mathbb{P}(X_k = 1 | N = n) = \mathbb{P}(X_k = 1 | X_k Y_k = 0) = \frac{p(1-q)}{1-pq}.$$

4. Montrer que, pour tout $x_1, \ldots x_n \in \{0,1\}$,

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\} | N = n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i | N = n).$$

5. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(S_N = k | N = n)$, $\mathbb{E}[S_N | N = n]$ et $\mathbb{E}[S_N]$.

Correction :

1. S_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi, S_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p). Pour T_n, on remarque d'abord que

$$\mathbb{P}(X_1 Y_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1; Y_1 = 1) = pq,$$
$$\mathbb{P}(X_1 Y_1 = 0) = 1 - pq.$$

Ainsi, T_n suit une loi binomiale de paramètres (n, pq).

2. N suit une loi géométrique "translatée". En effet, l'ensemble des valeurs possibles de N est $\mathbb{N}$. Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(T_1 = 0; \ldots; T_k = 0; T_{k+1} = 1), \\ &= \mathbb{P}(X_1 Y_1 = 0; \ldots; X_k Y_k = 0; X_{k+1} Y_{k+1} = 1), \\ &= pq(1-pq)^k.\end{aligned}$$

3. Soit $1 \leq k \leq n$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k = 1 | N = n) &= \frac{\mathbb{P}(X_k = 1; N = n)}{\mathbb{P}(N = n)}, \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(N = n)} \mathbb{P}(X_1 Y_1 = 0; \ldots; X_k Y_k = 0; X_k = 1; \ldots, X_n Y_n = 0; X_{n+1} Y_{n+1} = 1), \\ &= \frac{pq(1-pq)^{n-1} p(1-q)}{pq(1-pq)^n} = \frac{p(1-q)}{(1-pq)} = \mathbb{P}(X_k = 1 | X_k Y_k = 0).\end{aligned}$$

4. Soient $n \geq 1$ et $x_1, \dots x_n \in \{0,1\}$. On suppose qu'il y a k x_i égaux à 1 et $n-k$ x_i égaux à 0. On note $I = \{i \in \{1,\dots,n\},\, x_i = 1\}$ Alors, par indépendance,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^n \{X_i = x_i\} | N = n\right) &= \frac{1}{\mathbb{P}(N=n)} \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{i \in I} \{X_i Y_i = 0; X_i = 1\}; \\
&\qquad \bigcap_{i \in I^c} X_i Y_i = 0; X_i = 0; X_{n+1} Y_{n+1} = 1 \Bigg), \\
&= \frac{1}{pq(1-pq)^n} pq (p(1-q))^k ((1-p))^{n-k} \\
&= \frac{(p(1-q))^k ((1-p))^{n-k}}{(1-pq)^n}, \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(X_i = x_i | X_i Y_i = 0\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(X_i = x_i | N = n\right).
\end{aligned}$$

5. Conditionnellement à $N = n$, la variable aléatoire S_n est la somme de n variables aéatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p(1-q)/(1-pq)$. Ainsi, S_n suit une loi binomiale de paramètres $(n, p(1-q)/(1-pq))$. Pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(S_n = k | N = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{p(1-q)}{1-pq}\right)^k \left(1 - \frac{p(1-q)}{1-pq}\right)^{n-k}.$$

De plus,

$$\mathbb{E}\left(S_n | N = n\right) = n \frac{p(1-q)}{1-pq}, \quad \mathbb{E}\left(S_n | N\right) = N \frac{p(1-q)}{1-pq}.$$

Enfin, on a

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_N | N]] = \frac{p(1-q)}{1-pq} \mathbb{E}[N] = \frac{p(1-q)}{1-pq} \frac{1-pq}{pq} = \frac{1-q}{q}.$$