1 Partie 1

Exercice 4 :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. L'énoncé est équivalent à la question suivante. Étant donnés n objets identiques, quel est le nombre $T(r,n)$ de manières qu'il y a de répartir ces n objets entre r boîtes ?

Notons les boîtes $B_1,\dots,B_r$. Il suffit de se donner pour tout $i \in [1,r]$, le nombre x_i d'objets qu'on met dans la boîte B_i. Ainsi $T(r,n)$ est le cardinal de l'ensemble

$$A_{r,n} := \{(x_1,\dots,x_r) \in \mathbb{N}^r |\ x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n\}.$$

On remarque dans un premier temps que $A_{r+1,n}$ est la réunion disjointe des $A_{r,i}$ pour $i = 0,\dots,n$. Pour le voir, on se donne $i \in \{0,\dots,n\}$ et fixons la dernière coordonnée « $x_{r+1} = i$ » alors le nombre de tels $r+1-$uplets vaut exactement

$$A_{r,n-i} = \{(x_1,\dots,x_r) \in \mathbb{N}^r |\ x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n-i\} \text{ pour tout } i \in \{0,\dots,n\}.$$

Donc $A_{r+1,n} = \dot\bigcup_{i=0}^{n} A_{r,n-k} = \dot\bigcup_{i=0}^{n} A_{r,i}$.[1] Et finalement on a la relation

$$T(r+1,n) = \sum_{i=0}^{n} T(r,i).$$

Montrons alors par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $n \geq 0$ on a $T(r,n) = \binom{n+r-1}{n}$.

Pour $r = 1$ la proposition est claire. Supposons la proposition vraie pour un certain rang r. En utilisant la relation de Pascal pour passer de la première à la deuxième ligne on a

$$\begin{aligned}
T(r+1,n) &= \sum_{i=0}^{n} T(r,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{r+i-1}{i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{r+i}{i} - \binom{r+i-1}{i-1} \right] \\
&= 1 - \binom{r}{0} + \binom{r+n}{n} \\
&= \binom{r+n}{n}.
\end{aligned}$$

Exercice 7 :

1. Le symbole $\dot\cup$ signifie réunion disjointe

Soit $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a(n) := a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. a est une suite strictement croissante d'entiers vérifiant $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + (n+1)$. On a donc la propriété suivante

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists! n \in \mathbb{N} \;\; a_n \leq m < a_{n+1}. \tag{1}$$

Pour ce n on a $0 \leq m - a_n < n + 1$. On pose $j = m - a_n$ et $i = n - j$ on aura donc $f(i,j) = m$, ce qui montre la surjectivité de f. Pour l'injectivité on pose $c_{i+j} = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}$ et on remarque que

$$c_{i+j} \leq f(i,j) = c_{i+j} + j < c_{i+j} + (j + i + 1) = c_{i+j+1}.$$

Donc si $f(a,b) = f(i,j)$ on en déduit de l'unicité dans (1) que $c_{a+b} = c_{i+j}$. Donc $j = b$ car $j = f(i,j) - c_{i+j} = f(a,b) - c_{a+b} = b$. Donc $i = j$ donc f est injective.

2 Deuxième partie

Exercice 11 :

La suite u est positive et on a l'équivalent $u_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$ donc la série converge car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge On écrit, pour $N \geq n \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \to_{N\to\infty} 1.$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Pour la culture on a le résultat suivant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

qui remonte à Euler, pour les curieux vous pouvez trouver quelques démonstrations dans le lien suivant `https://math.stackexchange.com/questions/8337/different-methods-to-compute-sum-limits`
Si jamais vous vouliez montrer la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ on peut faire la majoration suivante pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} &\leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} \\
&= \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{N} \to_{N\to\infty} 1.
\end{aligned}$$

Au passage cela montre (si on suppose le résultat "culturel" connu) que

$$\pi \leq \sqrt{12} \approx 3.464.$$

Exercice 12 :
Notons respectivement a_n , b_n , c_n et d_n les termes généraux de la première, deuxième, troisième et quatrième série de l'énoncé.

— Pour tout entier naturel **non nul** on a $a_n > 0$. On a ensuite

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{n+1n!} = \frac{1}{n+1},$$

expression qui converge vers $0 < 1$ donc par le critère de d'Alembert (CA) on sait que la série converge.

— De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $b_n > 0$. On a

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \to_{n\to\infty} 0$$

car $(1+1/n)^{-n} = \exp(-n\ln(1+1/n)) = \exp(-n(1/n+o(1/n))) \to_{n\to\infty} e^{-1}$ par continuité de exp en -1 et que $\frac{1}{n+1} \to_{n\to\infty} 0$. D'après le CA la série $\sum u_n$ est convergente car $0 < 1$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $c_n > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^n = (\frac{n+1}{n})^{-n} \to_{n\to\infty} e^{-1}$$

en utilisant exactement le même argument que pour la série précédente. D'après le CA la série $\sum u_n$ est convergente car $e^{-1} < 1$.[2]

— Soit n un entier naturel non nul, on a $d_n > 0$ et

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = (n+1)\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \to_{n\to\infty} 0$$

car $(1+1/n)^n = \exp(n\ln(1+1/n)) = \exp(n(1/n+o(1/n))) \to_{n\to\infty} e$ par continuité de exp en 1 et que $\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{4n}$.

Exercice 13 :
Le premier se traite facilement avec le théorème de d'Alembert. Pour le second :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et $a \in \mathbb{R}$, on a $u_n := \frac{a^n}{n^\alpha} > 0$ et on a (même justifications que pour l'exercice précédent)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}n^\alpha}{a^n(n+1)^\alpha} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = a\left(\frac{1}{n}+1\right)^{-\alpha} \to_{n\to\infty} a.$$

2. Vous savez que $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, donc vous savez prouver que $e > 1$.

Il faut donc discuter de la valeur de a, si $a < 1$ la série converge. Si $a > 1$ la série diverge. Il reste le cas d'incertidute $a = 1$ Dans ce cas on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha > 1.$$

Exercice 14 :

Notons respectivement a_n , b_n , c_n et d_n les termes généraux de la première, deuxième, troisième et quatrième série de l'énoncé.

— Soit $n > 0$. On a $a_n > 0$ pour $n \geq 1$ (cette étape est importante !) et successivement

$$\begin{aligned} a_n &:= n\log(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \\ &= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{12n^2} \end{aligned}$$

Donc la série converge. Il faut donc faire attention quand on ajoute des DL.

— Pour b_n il faut d'abord "sentir" les choses, la suite tend rapidement vers 0 donc on peut imaginer qu'elle va converger. On pose alors abruptement $b_n = o(\frac{1}{n^2})$ qu'on justifie alors :

$$n^2 b_n := \frac{n}{\log(n!)} = \frac{1}{\frac{\log(n!)}{n}} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^n \log(i)}{n}}.$$

Il reste à prouver que $\frac{\sum_{i=1}^n \log(i)}{n} \to_{n\to\infty} +\infty$: on sait que $\log(n)$ tend vers $+\infty$ donc on peut trouver un réel $A > 0$ tel que $\log(n) \geq A$ pour tout $n \geq n_0$ et donc on aura pour tout $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n \log(i)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_0} \log(i) + \frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n_0} \log(i) \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_0} \log(i) + \frac{n-n_0}{n} A \end{aligned}$$

et le tour est joué car le premier terme tend vers 0 et le dernier vers A. Les détails sont laissés au lecteur. Une autre méthode (donné par un de vos camarades) est d'utiliser l'inégalité suivante :

$$\forall n \geq 1 \quad n! \geq 2^{n-1},$$

qu'on peut prouver par récurrence, et qui donne directement la majoration pour $n > 1$, $b_n \leq \frac{1}{n(n-1)\log(2)} \sim \frac{1}{\log(2)n^2}$ terme général d'une série convergente.

- Pour c_n voici une solution délicate. Soit $k \geq 2$ un entier, par croissance de la fonction $x \mapsto \log(x)$ on a l'encadrement

$$\log(k-1) \leq \int_{k-1}^{k} \log(x)dx \leq \log(k)$$

donc $\log(k) \sim_{k\to\infty} \int_{k-1}^{k} \log(x)dx$. Comme la série de terme général $\log(k)$ diverge on utilise le théorème suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.
Theorem 1 *Soit $(u_n)_{\nu\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{\nu\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telle que la série $\sum u_n$ diverge alors*

$$\textit{Si} \quad u_n \sim v_n \quad \textit{alors} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Ainsi,

$$\log(n!) = \sum_{k=2}^{n} \log(k) \sim \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \log(x)dx = n\log(n) - n + 1 \sim n\log(n).$$

On a donc $c_n \sim \frac{1}{n\log(n)^2}$ et le cours vous dit que cette série converge mais il faudrait savoir le démontrer en faisant une comparaison série intégrale avec la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\log(t)}$ sur $[2, +\infty[$.
- Pour d_n on a $u_n > 0$ pour $n \geq 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0. Donc la série converge.

Exercice 15 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Si $|b| \leq 1$ alors on a pour tout $n \geq 1$ $3^{\sqrt{n}} + b^n \sim_{n\to+\infty} 3^{\sqrt{n}}$ car $b^n = o_{n\to+\infty}(3^{\sqrt{n}})$ car

$$\frac{b^n}{3^{\sqrt{n}}} = \exp(n\log(b) - \sqrt{n}\log(3)) = \exp\left(n\log(b)\big(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\log(3)}{\log(b)}\big)\right) \to_{n\to\infty} 0.$$

Morale : Il faut bien sentir les choses mais aussi savoir le prouver. On a donc l'équivalence $u_n := \frac{a^n 3^{\sqrt{n}}}{3^{\sqrt{n}}+b^n} \sim_{n\to+\infty} a^n$. On en déduit que si $a \geq 1$ alors u_n ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

Si $|a| < 1$ alors la série converge absolument car $|u_n| \sim_{n\to+\infty} |a|^n$.

Si $|b| > 1$ alors la suite $(3^{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est négligeable devant $(b^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donc $u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}a^n}{b^n}$. Posons $v_n = \frac{3^{\sqrt{n}}|a|^n}{|b|^n}$ On a $v_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a}{b} 3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \to_{n\to+\infty} \frac{|a|}{|b|}$$

car $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 (multiplication par le conjugé pour le voir, ça été fait en TD). Donc la série converge de terme général v_n si $|a| < |b|$ par le CA et donc la série de terme général u_n converge absolument.

Si $|a| \geq |b|$ la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ donc la série diverge.

Exercice 17 :

Première chose à dire, pour tout n entier naturel non nul on a $a_n > 0$, ensuite on fait le calcul de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ et on trouve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\frac{(n+1)^2}{n^2}.$$

On a trivialement $\frac{(n+1)^2}{n^2} \sim 1$ mais on ne peut pas dire a priori que $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \sim 1$ car on fait ici une composition d'équivalents et il s'avère que ce n'est pas toujours vrai (essayez de trouver un tel exemple, c'est très formateur même si ça vous prend du temps).

On écrit simplement $\log(n+1) = \log(n) + \log(1+\frac{1}{n})$ et donc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log(n)}\right)(1+\frac{1}{n})^2 \to_{n\to\infty} 1.$$

Vous savez alors que la série entière converge absolument sur $]-1,1[$. Que se passe-t-il pour $|z| = 1$? On a $|a_n z^n| = |a_n| = a_n$, donc la question se réduit à la convergence de la série <u>numérique</u> $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n^2}$. Une technique à connaitre est de multiplier par n^γ avec γ à choisir.

On regarde ensuite

$$n^\gamma \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n^{2-\gamma}} \to_{n\to\infty} \text{ si et seulement si } 2-\gamma > 0.$$

Donc il faut choisir γ tel que $2-\gamma > 0$ et $\gamma > 1$, par exemple $\gamma = \frac{3}{2}$. Ainsi $a_n = o_{n\to\infty}(\frac{1}{n^{3/2}})$ donc par le théorème du cours sur les séries à termes **positifs** on a la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ qui converge.

Finalement $D_R = [-1,1]$.

Pour traiter b_n et c_n revoir l'exercice 12 qu'on a fait en TD.

Pour d_n, on fait comme d'habitude $\frac{d_{n+1}}{d_n}$ et on se souvient du développement limité de la fonction cos en 0. On a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o_{x\to 0}(x^2)$ et donc $\frac{d_{n+1}}{d_n} \to 1$ quand $n\to\infty$. Donc la série entière converge absolument pour tous les réels dans $]-1,1[$. Sur le cercle d'incertitude on regarde $\sum_{n\geq 1}|\cos(\frac{1}{n})|$. On sait que $|\cos(\frac{1}{n})| \to_{n\to\infty} 1$ quand $n\to\infty$ donc la série diverge grossièrement. Finalement $D_R =]-1,1[$.

Exercice 18 :

Que dit le cours ? Si le rayon de convergence R de la série entière étudiée est **strictement** positif alors la somme de la série $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ définie pour tout x réel tel que $|x| < R$

est indéfiniment dérivable sur $D_R :=]-R, R[$ avec

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$$

pour tout $k \geq 1$ et $x \in D_R$.

Il est bien important de comprendre ce théorème et de voir comment l'appliquer. C'est le but de l'exercice.

Soit $\rho \in]0,1[$. Soit R le rayon de convergence de la série entière associée à la suite $(a_n)_n$ définie pour tout $n \geq 0$ par $a_n = 1$. Par **définition** de R on a

$$R := \sup\{r \in [0,\infty[, (a_n r^n)_{n\geq 0} \text{ est bornée}\} = \sup\{r \in [0,\infty[, (r^n)_{n\geq 0} \text{ est bornée}\} = 1.$$

On sait alors que $f(\rho) := \sum_{n=0} \rho^n$ est définie pour tout $x \in]-1,1[$ donc vous pouvez dériver terme à terme par rapport à ρ. Autrement dit,

$$f'(\rho) = \frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{+\infty}\rho^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\rho^{n-1},$$

il faut bien noter le passage de $n = 0$ vers $n = 1$. Par ailleurs vous savez que $f(\rho) = \frac{1}{1-\rho}$: c'est juste la série géométrique. On a de plus $f'(\rho) = \frac{1}{(1-\rho)^2}$.

Donc

$$(1-\rho)\sum_{n=1}^{+\infty} n\rho^{n-1} = (1-\rho)f'(\rho) = \frac{1}{(1-\rho)}.$$

Par la même méthode ou juste en appliquant la formule du cours pour ceux qui veulent, $f^{(2)}(\rho) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$. Remarquons déjà que cette expression est encore vraie en $n = 1$. De plus $f^{(2)}(\rho) = \frac{d}{d\rho}\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{2}{(1-\rho)^3}$.

L'énoncé demande $(1-\rho)\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\rho^{n-1}$. Il faut alors relier $n(n-1) = n^2 - n$ à n^2. On écrit alors $n^2 = n(n-1) + n$.

Donc

$$\begin{aligned}
(1-\rho)\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\rho^{n-1} &= (1-\rho)\sum_{n=1}^{+\infty}(n(n-1)+n)\rho^{n-1} \\
&= (1-\rho)\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\rho^{n-1} + (1-\rho)\sum_{n=1}^{+\infty} n\rho^{n-1} \\
&= (1-\rho)\rho\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\rho^{n-2} + (1-\rho)f'(\rho) \\
&= (1-\rho)\rho f^{(2)}(\rho) + (1-\rho)f'(\rho)
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{2\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{1}{(1-\rho)}.$$

Remarque 1 *Le fait de relier n^2 à $n(n-1)$ peut paraître astucieux mais il n'en n'est rien. On vient juste de décomposer le polynôme X^2 dans le base $(1, X, X(X-1))$. Bien sûr, ici, c'est trivial, mais par exemple on peut s'amuser à le faire pour la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^3+n^2+n+1}{2^n}$. Dans ce cas on considère la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ et on doit résoudre un petit système. Un bel exercice que je laisse pour les curieux.*

Exercice 26 : Notons $[m, n] = \{m, m+1, \ldots, n\}$ avec $m, n \in \mathbb{N}$ et $m < n$.

Ici on prend $\Omega = [1, 6]^5$, pour la tribu des événements $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de Ω et P l'équiprobabilité. On peut donc voir chaque ω comme un $5-$uplet $(\omega_1, \ldots, \omega_5)$ tel que pour tout $i \in 1, \ldots, 5$ $\omega_i = 1, \ldots, 6$. On note aussi A, B, C, D, E, F, G les 7 événements demandés. Par exemple A est l'événement « 5 dés différents », B l'événement « 1 paire » etc.

a)On a $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{6^5}$.
De plus $A = \{\omega \in \Omega;\ w_i \neq w_j \text{ pour tout } i \neq j\}$, donc A représente le nombre d'arrangements de 5 éléments dans un ensemble à 6 éléments, donc $card(A) = \frac{6!}{(6-5)!} = 6!$. Donc $P(A) = \frac{6!}{6^5} = \frac{5 \cdot 4}{36 \cdot 6} = \frac{9}{54}$.

b) Il y a $6 \times \binom{5}{2}$ paires. On complète ensuite par le résultat du troisième dé, du quatrième et du cinquième, soit $5 \times 4 \times 3$. Donc $P(B) = \frac{6 \times \binom{5}{2} \times 5 \times 4 \times 3}{6^5}$.

c) Il y a $\binom{6}{2}$ résultats possibles pour les deux paires (exemple une paire avec 1 et une paire avec 4 qu'on pourrait écrire $(1, 4)$, il y a aussi $(2, 5)$ etc) et pour le premier résultat $\binom{5}{2}$ paires possibles, pour le second $\binom{3}{2}$ puis on complète par les possibilités du cinquième dé, autrement dit 4. Donc

$$P(C) = \frac{\binom{6}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}4}{6^5}.$$

d) Même rédaction. Il y a $6 \times \binom{5}{3}$ brelans et on complète par les deux dés qui restent 5×4. Donc

$$P(D) = \frac{6 \times \binom{5}{3} \times 5 \times 4}{6^5}.$$

e)f)g) Vous pouvez le faire ! Sans regarder le résutlat du TD évidemment.

Exercice 27 : Notons $[m, n] = \{m, m+1, \ldots, n\}$ avec $m, n \in \mathbb{N}$ $m < n$. Il faut placer les tours de manière à ce qu'aucune ne soit sur la même ligne et sur la même colonne.

Premier raisonnement : On suppose les tours discernables, autrement dit on peut les numéroter.Une configuration du monde possible est l'ensemble des tours placées sur l'échiquier sans qu'aucune ne soit sur la même place.

Ainsi on va prendre Ω comme l'ensemble des injections de $[1,8]$ dans $[1,8] \times [1,8]$. On a donc $card(\Omega) = \frac{64!}{56!}$. On prend la tribu totale $\mathcal{P}(\Omega)$ et l'équiprobabilité dessus. Pour compter les cas possibles sous la contrainte de l'énoncé on peut raisonner de deux façons équivalentes.

La première, on dit qu'on attribue dans un premier temps une colonne distincte pour chaque tour donc 8! possibilités et puis dans un second temps on attribue une ligne distincte donc encore 8! possibilités donc au total $8! \times 8!$ configurations possibles.

La deuxième, on peut placer la première tour de $8 \times 8 = 64$ manières différentes, une fois placée, pour la deuxième il reste alors $7 \times 7 = 49$ possibilités, ainsi de suite. Le résultat peut s'écrire $\prod_{i=1}^{8} i^2$.

Donc au final la probabilité recherchée est

$$p = \frac{8!8!56!}{64!} = \frac{\prod_{i=1}^{8} i^2 56!}{64!} \approx 9,10 \cdot 10^{-6}.$$

Deuxième raisonnement : Les tours sont indiscernables. Le nombre de possibilités de choisir 8 cases sur l'échiquier est de $\binom{64}{8}$ et le nombre de configurations 8!. Bien sûr on trouve la même chose

$$p = \frac{8!}{\binom{64}{8}} \approx 9,10 \cdot 10^{-6}.$$

Exercice 28 : L'information maximale pour cette expérience est l'ensemble des dates des n personnes. Donc on prend $\Omega = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\ ; a_i = 1, \ldots, 365 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n\}$. On prend comme famille d'événements la tribu totale $\mathcal{P}(\Omega)$ et la probabilité $\mathbf{P}$ l'application

$$\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \quad , P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega),$$

avec p l'application de Ω dans $[0,1]$ définie par $p(\omega) = \frac{1}{card(A)}$. L'événement recherché s'écrit $A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\ ; a_i = 1, \ldots, 365 \text{ et il existe } \ i \neq j \text{ tel que } a_i = a_j\}$. Le complémentaire de A s'identifie aux N arrangements d'un ensemble à 365 éléments. On trouve donc que

$$P(A) = 1 - (1 - \frac{1}{365}) \cdots (1 - \frac{N-1}{365}).$$

Exercice 34 :

La première chose à faire est de traduire l'énoncé en terme "calculable", autrement dit recenser les hypothèses. Notons A "la dose d'alcool autorisée est dépassée" et U "le résultat du test est positif".

Les hypothèses nous dit qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur cet échantillon telle que $\mathbb{P}(A) =$

$0,005$ et $\mathbb{P}(U|A) = \mathbb{P}(U^c|A^c) = 0,99$.

1. Par défintion on a $\mathbb{P}(U|A) = \frac{\mathbb{P}(U|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(U)}$. On utilise ensuite le système complet d'évènements $\{A, A^c\}$ qui nous permet d'écrire $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(U|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(U|A^c)\mathbb{P}(A^c)$. Si on se souvient que $\mathbb{P}(\cdot|A^c)$ est une probabilité alors on a $\mathbb{P}(U|A^c) = 1 - \mathbb{P}(U^c|A^c)$. Il suffit maitenant de faire l'application numérique.

2. Ici on suppose qu'on ne connait pas la valeur de p. On cherche $\mathbb{P}(U|A) = p$ telle que $\mathbb{P}(A|U) = 0.95$. En utilisant la même formule que la question précédente on trouve $p = 0,99973$.

Exercice 35 :

Notons $[m, n] = \{m, m+1, \ldots, n\}$ avec $m, n \in \mathbb{N}$ $m < n$.

On prend $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([1,6]^2, \mathcal{P}([1,6]^2), A \mapsto \frac{card(A)}{card(\Omega)})$

On s'intéresse à la probabilité de voir apparaitre la somme 5 avant la somme 7.

1. Soit E_n l'événement "ni 5 ni 7 durant les $n-1$ première lancers et un 5 au n-ème". Notons pour tout $n \geq 1$, X_n la v.a.r qui correspond à la somme i.e. $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X_n((a,b)) = a + b$ au $n-$ème lancer. On cherche donc

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\Bigg(\Big(\cap_{i=1}^{n-1} (\{X_i \neq 5\} \cap \{X_i \neq 7\})\Big) \cap \{X_n = 5\}\Bigg).$$

L'énoncé nous dit que les variables aléatoires sont indépendantes et que le résultat des lancers est le même à chaque coup, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_n) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_i \neq 5\} \cap \{X_i \neq 7\}\big)\mathbb{P}(\{X_n = 5\}) \\
&= \Big(1 - \mathbb{P}\big(\{X_1 = 5\} \cup \{X_1 = 7\}\big)\Big)^{n-1}\mathbb{P}(\{X_1 = 5\}) \\
&= \left(1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36}\right)^{n-1} \times \frac{4}{36}
\end{aligned}$$

La probabilité recherchée est

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}^*} E_n) = \sum_{ß\mathbb{N}^*} \left(1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36}\right)^{n-1} \times \frac{4}{36} = \frac{4}{36} \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{10}{18}\right)^{n-1} = \frac{2}{5}.$$

3 Partie 5

Exercice 37 : Soit $f : E := \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in E$ $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$. f est continue sur E, on sait que $\sin(t) \sim_0 t$ donc f est prolongeable par continuité en 0 donc f est intégrable en 0.

Il reste à vérifier l'intégrabilité en $+\infty$. Soit $X > 0$, on a par intégration par parties (IPP)

$$\int_1^X f(t)dt = [-\frac{\cos(t)}{t}]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}dt.$$

Le terme entre crochets converge quand $X \to +\infty$ vers $\cos(1)$ et le second vers $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ qui est finie car $\forall t \in \mathbb{R}\ |\cos(t)| \leq 1$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt < +\infty$.

La convergence absolue est plus difficile. Une solution consiste à minorer convenablement l'intégrale $\int_1^X |f(t)|dt$ et de passer à la la limite.

Si $X \geq \pi$ alors il existe un unique entier n tel que $(n+1)\pi \leq X < (n+2)\pi$ et si $X \to \infty$ alors $n \to \infty$ et réciproquement. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_1^X |f(t)|dt &\geq \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)|dt \\
&\geq \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(k+1)\pi} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)\pi} \to_{n\to\infty} +\infty.
\end{aligned}$$

Donc l'intégrale diverge absolument.

Une autre méthode consiste à voir que $|\sin(x)| \geq \sin(x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et se souvenir que $2\cos(x)^2 = \cos(2x) + 1$ pour obtenir une minoration par une intégrale divergente. Les détails sont laissés aux motivés.

Exercice 38 :

— D'abord la convergence de I_1, la fonction $f : t \mapsto t^3e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur tout compact et $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ par croissances comparées donc I_1 est finie.

Soit $X > 0$. On fait des intégrations par parties (IPP) successives

$$\begin{aligned}
&\int_0^X e^{-t}t^3dx \\
&= [-t^3e^{-t}]_0^X + 3\int_0^X e^{-t}t^2dt = [-t^3e^{-t}]_0^X + [-3t^2e^{-t}]_0^X + 6\int_0^X e^{-t}tdt \\
&= [-t^3e^{-t}]_0^X + [-3t^2e^{-t}]_0^X + [-6te^{-t}]_0^X + 6\int_0^X e^{-t}dt \\
&= [-t^3e^{-t}]_0^X + [-3t^2e^{-t}]_0^X + [-6te^{-t}]_0^X + 6[-e^{-t}]_0^X.
\end{aligned}$$

On évalue en 0 et en X puis on fait tendre X vers $+\infty$, on trouve

$$I_1 = 6.$$

— Pour I_2 : Idem le seul problème est en $+\infty$. On a $\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$, on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \in \mathbb{R}$ donc I_2 converge.
Soit $X > 0$, on fait le changement de variable $u = \sqrt{1+t^2}$

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} &= \int_1^{\sqrt{1+X^2}} \frac{du}{u^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{1+X^2}} \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{1+X^2}} \frac{du}{u+1} \\
&= \left[\frac{\log(|u-1|)}{2}\right]_0^{\sqrt{1+X^2}} - \left[\frac{\log(|u+1|)}{2}\right]_0^{\sqrt{1+X^2}}
\end{aligned}$$

De la on en déduit en faisant tendre X vers $+\infty$ que

$$I_2 = \frac{\ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1)}{2} = \sinh^{-1}(1).$$