DM Développements limités

KIROUCHENASSAMY

Badmavasan

IS2A3

23/11/2020

Exercice 1

Il y a plusieurs manières pour calculer un DL d'ordre quelconque en unpoint donné, les méthodes les plus utilisés sont :

- Directement utiliser la formule de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$ où k correspond à l'ordre.

- On connait l'expression de certaines DL en 0.

Donc, on simplifie / transforme la fonction sans la modifier pour utiliser les DLs connu pour trouver son développement limités.

Pour la suite, Je vais utiliser la méthode **2**.

(De plus la méthode 1 ne marche pas pour tous les fonctions exemple : Question 4 Exercice 1)

1) on cherche $DL_3(0)$ de $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right)$

$$\ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right) = \ln(2+x) - \ln(1-x)$$

↑ on connait DL(0) de cette fonction

$$= \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) - \ln(1-x)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln(1-x)$$

↑ on pose $u = x/2$

$DL_3(0)$ de $\ln(1-x) = -x \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

$DL_3(0)$ de $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon(u)$

on a donc,

$$DL_3(0) \text{ de } \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$= \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$DL_3(0) \text{ de } \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right) = \ln(2) + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{8}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

2) on cherche à calculer $DL_3(0)$ de la fonction $f(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$

on pose $u = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1}$

$x \to 0 \Rightarrow u \to 0$ Donc le changement de variable est cohérent.

$$u = \frac{x}{1-x} = x\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

or on connait $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

Donc,

$$u = x\left(DL_3(0)\ x \mapsto \frac{1}{1-x}\right)$$

$$DL_3(0)\ x \mapsto \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$u = x\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)\right)$$

$$u = x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

De plus,

$$DL_3(0)\ u \mapsto \exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3\varepsilon(u)$$

Par composition, on obtient :

$$\exp(x + x^2 + x^3) = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{(x + x^2 + x^3)^2}{2} + \frac{(x + x^2 + x^3)^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$DL_3(0)\, x \mapsto \exp\left(\frac{x}{1-x}\right) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$DL_3(0)\, x \mapsto \exp\left(\frac{x}{1-x}\right) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

3) on cherche $DL_3(0)\; x \longmapsto \sqrt{3+\cos(x)}$

on connait $DL_3(0)\; x \mapsto \cos(x)$, on remplace $\cos(x)$ par son développement limité d'ordre 3 en 0.

$$DL_3(0)\, x \mapsto \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$$

Après le remplacement, on obtient :

$$\sqrt{3+1-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{4-\frac{x^2}{2}} = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{8}}$$

on pose $u = \frac{x^2}{8}$ $\quad x \to 0 \Rightarrow u \to 0$

$$DL_2(0)\, u \mapsto \sqrt{1-u} = \sqrt{1+(-u)} = 1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8}$$

$$DL_3(0)\, x \mapsto 2\sqrt{1-\frac{x^2}{8}} = 2\left(1 - \frac{\left(\frac{x^2}{8}\right)}{2} - \cancel{\frac{\left(\frac{x^2}{8}\right)^2}{8}}\right)$$

on prend pas en compte car x^4 est d'ordre supérieur à 3

$$DL_3(0)\, x \mapsto 2\sqrt{1-\frac{x^2}{8}} = 2 - \frac{x^2}{8} + x^3\varepsilon(x)$$

5) on cherche $DL_3(4)\; x \longmapsto \ln(x-1)$

On pose $h = x - 4$

$x \to 4$

$h \to 0$

$$\ln(h+4-1) = \ln(h+3) = \ln\left(3\left(\frac{h}{3}+1\right)\right)$$
$$= \ln(3) + \ln\left(1+\frac{h}{3}\right)$$

$$DL_3(0)\, h \mapsto \ln\left(1+\frac{h}{3}\right) = \frac{h}{3} - \frac{h^2}{18} + \frac{h^3}{81} + h^3\varepsilon(x)$$

$$DL_3(0)\, h \mapsto \ln(h+3) = \ln(3) + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{18} + \frac{h^3}{81} + h^3\varepsilon(h)$$

or $h = x - 4$

$DL_3(4)\ x \mapsto \ln(x-1) = \ln(3) + \frac{(x-4)}{3} - \frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(x-4)^3}{81} + x^3\varepsilon(x)$

On peut developper cette expression mais pour calculer la limite (la raison pour la quelle on effectue un développement limité la plupart du temps), c'est plus pertinat de laisser le DL dans cette forme.

Forme développé] $DL_3(4)\ x \mapsto \ln(x-1) = \ln(3) + \frac{1}{81}x^3 - \frac{11}{54}x^2 + \frac{37}{24}x - \frac{244}{81} + x^3\varepsilon(x)$

Exercice 2

1> On cherche $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$ en 0, on peut pas directement étudier la limite. Donc on va remplacer $\sin^2(x)$ par son DL.

$DL_2(0)\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$\left(DL_2(0)\ \sin(x)\right)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2$

$\sin^2(x) = \frac{1}{3}x^4 + x^2 + \cancel{\frac{1}{36}x^6}$ Débordement donc on le prend pas en compte.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2 - \frac{1}{3}x^4} - \frac{1}{x^2}\right)$ mettre au même dénominateur

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{3}x^4}{-\frac{1}{3}x^6 + x^4}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{-3x^2+9}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{-x^2+3}\right)$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3-x^2}\right) = \frac{1}{3}$

2) on cherche à calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

on pose $h = \frac{1}{x}$

$x \to +\infty \quad h \to 0$

le changement de variable est cohérent.

or on peut pas calculer la limite directement, Donc on va calculer DL de $e^{1/x}$ et $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ puis Calculer la limite.

$DL_1(0)\ e^h = 1 + h$

$DL_1(0)\ \cos(h) = 1 - \frac{1}{2}h^2$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$$

3) on cherche à calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

DL $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} = 1 - \frac{1}{2x^2}$

(Référence question 2)

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$$

$\ln(1-u) = -u$ développement à l'ordre 1

$$x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \cancel{x^2} \times \left(-\frac{1}{2\cancel{x^2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{2}$$

4) On cherche à calculer $\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln(x)} \right)$

Pour cette question, on peut tout simplement reprendre la question 4 de l'exercice 1 et on calcule la limite quand x tend vers 1.

Comme je fais cette question avant de faire l'autre. Je vais détailler mes étapes de calcul.

on pose $h = x - 1$ $\quad x \to 1 \Rightarrow h \to 0$ changement de variable est cohérent.

$$\frac{\sqrt{2 - (h+1)^2} - 1}{\ln(1+h)} = \frac{\sqrt{2-(h+1)^2} - 1}{h}$$

Développement limité de $\ln(1+h)$ d'ordre 1

$$= \frac{\sqrt{2 - h^2 - 2h - 1}}{h} - \frac{1}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - h^2 - 2h}}{h} - \frac{1}{h}$$

on pose $u = -h^2 - 2h$, on a $\sqrt{1-u}$ et on connait $DL_k(0)$ $u \mapsto \sqrt{1-u}$.

Ainsi, on obtient donc,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 2h}{2h} = -1$$

Exercice 1

4> on cherche à calculer $DL_3(1)$ $\dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)}$

Dans un premier temps, on cherche à calculer $DL_3(1)$ du numérateur :

on pose $h = x-1$ $\quad x \to 1 \Rightarrow h \to 0$

$$\sqrt{2-(h+1)^2}-1 = \sqrt{2-h^2-2h-1}-1 = \sqrt{1-h^2-2h}-1$$

on pose $u = -h^2-2h$

$$\sqrt{1-u} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3-\frac{5}{128}u^4$$

$$\sqrt{1-h^2-2h}-1 = 1+\frac{1}{2}(-h^2-2h)-\frac{1}{8}(-h^2-2h)^2+\frac{1}{16}(-h^2-2h)^3$$

$$-\frac{5}{128}(-h^2-2h)^4-1$$

$$\sqrt{1-h^2-2h}-1 = -h-h^2-h^3-\frac{7}{8}h^4-\frac{5}{8}h^4$$

$$\sqrt{1-h^2-2h}-1 = -h-h^2-h^3-\frac{3}{2}h^4$$

Maintenant on passe au dénominateur avec $h = x-1$

$$\ln(1+h) = h-\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3-\frac{1}{4}h^4$$

$$\frac{1}{\ln(1+h)} = \frac{1}{h\left(1-\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}h^2-\frac{1}{4}h^3\right)} = \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}h^2-\frac{1}{4}h^3}$$

$$DL_3(0)\ \frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+u^3\varepsilon(u)$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}h-\frac{1}{3}h^2-\frac{1}{4}h^3\right)} = 1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{3}h^2+\frac{1}{4}h^3+\left(\frac{1}{2}h-\frac{1}{3}h^2+\frac{1}{4}h^3\right)^2$$

$$+\left(\frac{1}{2}h-\frac{1}{3}h^2+\frac{1}{4}h^3\right)^3$$

$DL_4(0)$ $\frac{1}{\ln(1+h)} = \frac{1}{h}\left[1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{24}h^3\right]$

Maintenant, on passe à la multiplication :

$\frac{1}{\ln(1+h)} \times \left(\sqrt{2-x^2} - 1\right) =$

$$\frac{1}{h}\left[1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{24}h^3\right] \times (-h)\left[1 + h + h^2 + \frac{12}{8}h^3\right]$$

$$= -\left[1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{24}h^3\right]\left[1 + h + h^2 + \frac{12}{8}h^3\right]$$

$$= -1 - \frac{3}{2}h - \frac{17}{12}h^2 - \frac{47}{24}h^3$$

On effectue le changement de variable $x = h+1$

$h = x - 1$

$DL_3(1)$ $\sqrt{1-h^2-2h} - 1$

$DL_3(1)$ $\frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{\ln(x)} = -1 - \frac{3}{2}(x-1) - \frac{17}{2}(x-1)^2 - \frac{47}{24}(x-1)^3 + x^3\varepsilon(x)$

$DL_3(1)$ $\frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{\ln(x)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x - \frac{17}{2}(x-1)^2 - \frac{47}{24}(x-1)^3 + x^3\varepsilon(x)$

$$= -\frac{47}{24}x^3 + \frac{107}{24}x^2 - \frac{109}{24}x + \frac{25}{24}$$