La méthode

$R\,x = Q^T b$

1 – Calculez R et Q

2 – Calculez $Q^T b = c$

3 – Résoudre $R\,x = c$

Nous pouvons calculer au fur et à mesure lors de la factorisation QR

$CX(n) = (4/3)\,qn^2 + O(n^2)$

Exercice

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 4.0 \\ -2.0 & -2.0 & 3.0 & -5.0 \\ 6.0 & 1.0 & -2.0 & 3.0 \\ 2.0 & -3.0 & -12.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 6.0 & 0.0 \\ 4.0 & -5.0 & -3.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ -1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Q1 : Résoudre en utilisant la méthode de Cholesky
Q2 : Résoudre en utilisant une factorisation QR
Q3 : Ecrire un programme pour cette méthode (*homework*)

Nous savons que A^TA est symétrique définie positive

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 6.0 & 2.0 & 0.0 & 4.0 \\ 1.0 & -2.0 & 1.0 & -3.0 & 1.0 & -5.0 \\ 0.0 & 3.0 & -2.0 & -12. & 6.0 & -3.0 \\ 4.0 & -5.0 & 3.0 & -1.0 & 0.0 & -2.0 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & \boxed{0.0} & 4.0 \\ -2.0 & -2.0 & \boxed{3.0} & -5.0 \\ 6.0 & 1.0 & \boxed{-2.0} & 3.0 \\ 2.0 & -3.0 & \boxed{-12.0} & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & \boxed{6.0} & 0.0 \\ 4.0 & -5.0 & \boxed{-3.0} & -2.0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 64.0 & -14.0 & -54.0 & 26.0 \\ -14.0 & 41.0 & 49.0 & 30.0 \\ -54.0 & 49.0 & 202. & -3.00 \\ 26.0 & 30.0 & -3.00 & 55.0 \end{pmatrix}}_{A^TA}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2.0 & -2.0 & 6.0 & 2.0 & 0.0 & 4.0 \\ 1.0 & -2.0 & 1.0 & -3.0 & 1.0 & -5.0 \\ 0.0 & 3.0 & -2.0 & -12. & 6.0 & -3.0 \\ 4.0 & -5.0 & 3.0 & -1.0 & 0.0 & -2.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 \\ -9.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ -1.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}}_{A^Tb} = \begin{pmatrix} 40 \\ 12.5 \\ -62.5 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 64.0 & -14.0 & -54.0 & 26.0 \\ -14.0 & 41.0 & 49.0 & 30.0 \\ -54.0 & 49.0 & 202. & -3.00 \\ 26.0 & 30.0 & -3.00 & 55.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 12.5 \\ -62.5 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$A^TA\,x = A^Tb$$

$$
\begin{pmatrix} 64.0 & -14.0 & -54.0 & 26.0 \\ -14.0 & 41.0 & 49.0 & 30.0 \\ -54.0 & 49.0 & 202. & -3.00 \\ 26.0 & 30.0 & -3.00 & 55.0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 12.5 \\ -62.5 \\ 56 \end{pmatrix}
$$

Résoudre alors ce système symétrique définie positif par la méthode de Cholesky

$$A^TA\ x = A^Tb$$

$$
L = \begin{pmatrix} X & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ X & X & 0.0 & 0.0 \\ X & X & X & 0.0 \\ X & X & X & X \end{pmatrix}
$$