VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES INFINIES

LOI GEOMETRIQUE

Exercice 1.
Un concierge possède un trousseau de dix clefs dont une seule permet d'ouvrir la porte en face de lui. Soit X le nombre de clefs essayées pour ouvrir la porte.

1) Déterminer la loi de X *(On envisagera deux cas, avec puis sans remise).*

2) Le concierge est ivre un jour sur trois.
Quand il est ivre, il essaie les clefs au hasard avec remise, sinon, on procède sans remise. Sachant qu'un jour huit essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour-là ?

Exercice 2.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p$sur $\mathbb{N}^*$. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1) Donner la loi du couple (U, V).

2) En déduire les lois marginales de U et de V.

3) Calculer les espérances de U et de V.

Exercice 3.
La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} p(X = 2k)$.

La variable X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?

2) Idem si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$ (on pourra se ramener à l'étude des solutions de l'équation différentielle $y' + y = e^{\lambda}$).

Exercice 4.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1]$.

On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 1\}$ si cet ensemble est non vide, $N = +\infty$ sinon.

1) Calculer $P(N = +\infty)$.

2) Donner la loi de N.

LOI DE POISSON

Exercice 5.
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que

$$p((X = n) \cap (Y = m)) = \frac{k}{(n + m + 1)!}.$$

1) Calculer k.
2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer la loi de $Z = X + Y$ et calculer $E(Z)$.

Exercice 6.

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et b produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaîne A soit défectueux est $0,1$ alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaîne B soit défectueux est $0,2$.

1) On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'évènement : "l'objet provient de la chaîne A".

2) On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. ON considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $p_{(Y=n)}(X = k)$. (on distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).

c) En déduire, en utilisant le système complet d'évènements $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Exercice 7.

Le nombre X de touristes sur les Ramblas de Barcelone suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Sur cette avenue, chaque touriste a la probabilité p fixe de se faire voler son portefeuille. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au nombre de portefeuilles volés et calculer son espérance.

Exercice 8.

Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90. (utiliser une loi de Poisson). Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90.

Exercice 9.

Le nombre d'exemplaire d'un journal A demandés chaque jour à un gérant d'un hospice est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(8)$. La recette de chaque vente est de 1€.

1) Calculer la recette moyenne.

2) Le stock est de 10 exemplaires. Quelle est la probabilité que le gérant ne puisse satisfaire toutes les demandes ? Quelle est alors la recette moyenne ?

Exercice 10.

On donne $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p(X = k) = \frac{4}{k}p(X = k - 1)$. Montrer que X suit une loi de Poisson.

Exercice 11.

Une bactérie a la probabilité p d'être touchée par un laser. On envoie un rayon laser chaque seconde. La bactérie ne meurt que lorsqu'elle est touchée r fois ($r \in \mathbb{N}*$, fixé). Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale à la durée de vie de la bactérie ainsi que son espérance de vie.

Exercice 12.

On considère une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

Pour tout entier n de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose $S_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que S_n est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

1) a) Déterminer la fonction de répartition F_n de S_n.

b) En déduire que S_n est une variable aléatoire à densité et vérifier que la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda n e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de S_n.

On pose pour tout réel x supérieur ou égal à 0 :

$$I_n(x) = \int_0^x F_n(t)dt \quad \text{et} \quad J_n(x) = \int_0^x t f_n(t)dt.$$

2) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \geq 2$, on a $F_n(x) = F_{n-1}(x) - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{f_n(x)}{n}$.

3) a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \geq 2$, on a $I_n(x) = I_{n-1}(x) - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{F_n(x)}{n}$.

b) Calculer $I_1(x)$ puis en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $I_n(x) = x - \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{F_k(x)}{k}$.

4) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $J_n(x) = xF_n(x) - I_n(x)$.

b) Déduire des questions précédentes que S_n possède une espérance et que $E(S_n) = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

LOI DE PASCAL et BINOMIALE NÉGATIVE

Exercice 13.

Un livre compte quatre erreurs. Lors d'une relecture, la probabilité qu'une erreur soit corrigée est $0,3$. Calculer le nombre minimal de relectures pour que la probabilité que toutes les erreurs soient corrigées soit supérieur ou égale à $0,95$.

Exercice 14.

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. On appelle succès le fait d'obtenir un 6.

1) On note T_n le nombre de lancers qu'il faut pour obtenir un n^e succès.

a) Déterminer la loi de probabilité de T_n, son espérance mathématique, sa variance.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n-1}{n-1}(t-pt)^k = \frac{1}{(1-(t-pt))^n}$.

c) En déduire la fonction génératrice de T_n.

2) On note Y_n le nombre d'échecs précédant le n^e succès. Déterminer la loi de probabilité de Y, sa fonction génératrice, son espérance mathématique, sa variance.

AUTRES LOIS INCLASSABLES

Exercice 15.

Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p(X = k) = \dfrac{e^{-2}2^k}{4 \times k!}(1 + ak)$.

1) Déterminer a.

2) La variable X admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 16. *Le problème du collectionneur.*

Dans chacun de mes paquets de céréales "SnowFlakes" il y a une figurine de Blanche neige et les sept nains (huit figurines différentes au total). Combien faut-il que j'achète de paquets en moyenne pour avoir les huit figurines ?

Exercice 17.

Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ p\left[(X=j)\cap(Y=k)\right] = \frac{(j+k)\lambda^{k+j}}{e^{2\lambda} j!k!} \text{ avec } \lambda > 0.$$

1) Déterminer λ.
2) Trouver les lois de X, de Y. Sont-elles indépendantes ?
3) Calculer $E(2^{X+Y})$.

Exercice 18.
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p(X=k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$.
1) Déterminer a.
2) La variable aléatoire X admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 19.
La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit une variable aléatoire Y par

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ est impair.} \\ \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y si :
1) si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$.
2) si X suit $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$.