Chapitre 12 :

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSIONS FINIES

1. Exemples introductifs - Rappels

Exemple 1.

1. On sait que $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que pour tout vecteur $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme $u=xe_1+ye_2$ où $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$.

$\mathbb{R}^2=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ ***: $\mathbb{R}^2$ admet une famille génératrice finie.***

2. On sait de même que $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que pour tout vecteur $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme $u=xe_1+ye_2+ze_3$ où $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.

$\mathbb{R}^2=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ ***: $\mathbb{R}^3$ admet une famille génératrice finie.***

3. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On sait qu'il existe un unique $n+1$-uplet $(a_0,a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que

   $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ ***d'où*** $\mathbb{R}_n[X]=\mathrm{Vect}(1,X,X^2,...,X^n)$ ***: $\mathbb{R}_n[X]$ admet également une famille génératrice finie.***

4. De même le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=\mathrm{Vect}(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ où $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,

   $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. ***$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet également une famille génératrice finie.***

5. **Par contre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n'admet pas de famille génératrice.**
6. **Et le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'admet pas de famille génératrice finie.**

Définition 1. Famille libre (rappels)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, x_2,..., x_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, n vecteurs de E. On dit que les vecteurs $x_1, x_2,..., x_n$ sont linéairement indépendants ou que la famille $(x_1, x_2,..., x_n)$ est libre si le vecteur nul de E s'écrite de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $x_1, x_2,...$et x_n.

Remarque 1.

1. Lorsque les vecteurs $x_1, x_2,..., x_n$ ne sont pas linéairement indépendants, on dit qu'ils sont linéairement dépendants ou que la famille $(x_1, x_2,..., x_n)$ est liée.

2. **Interprétation de la définition :** on sait déjà que le vecteur 0_E peut s'écrire : $0_E = 0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n$, d'où :

$$(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n) \text{ famille libre de } E \Leftrightarrow \forall(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=....=\lambda_n=0\right)$$

Définition 2. Famille génératrice (rappels)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, n vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de $e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n$, tout vecteur x de E tel qu'il existe n scalaires $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n$ de $\mathbb{K}$ et $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$.

Remarque 2.

1. Soit $e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, n vecteurs de E.
   - On note $\mathrm{Vect}(\{e_1,e_2,...,e_n\})$ ou simplement $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,...,e_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n$.
   - $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,...,e_n)$ également appelé: sous-espace vectoriel de E engender par les vecteurs $e_1,\ e_2,\ldots,$ et e_n.
2. Soit $x\in E$. $\boxed{x\in\mathrm{Vect}(e_1,e_2,...,e_n)\Leftrightarrow\exists(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n\ /\ x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i}$ ou encore
3. $\boxed{\mathrm{Vect}(e_1,e_2,...,e_n)=\left\{x\in E\ /\ \exists(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n, x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\ (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n\right\}}$
4. Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E et $a_1,\ a_2,\ldots$ et a_n sont n vecteurs de E_1 alors $\mathrm{Vect}(a_1,a_2,...,a_n)\subset E_1$.

Propriété 1. (Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs) : Rappel

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $a_1,\ a_2,\ldots$ et a_n sont n vecteurs de E. Alors $\mathrm{Vect}(a_1,a_2,...,a_n)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $a_1,\ a_2,\ldots$ et a_n.

Remarque 3. (Rappels)

1. Soit a un vecteur non nul de E. $\mathrm{Vect}(a)$ est **la droite vectorielle engendré par le vecteur** a.

$\mathrm{Vect}(a)=$ ensemble des vecteurs colinéaires au vecteur $a=\{x\in E\ /\ \exists\lambda\in\mathbb{K}, x=\lambda a\}=\{\lambda a,\ \lambda\in\mathbb{K}\}$

2. Soient a et b **deux vecteurs *non colinéaires*** de E. $\mathrm{Vect}(a,b)$ **est le plan vectoriel engendré par les vecteurs** a **et** b **:** $\mathrm{Vect}(a,b)=\{x\in E\ /\ \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, x=\lambda a+\mu b\}=\{\lambda a+\mu b,\ \ (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\}$

2. Définitions - Propriétés

Définition 3. Espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

On dit que E est de dimension finie si E admet famille génératrice finie, c'est à dire s'il existe une famille finie $e_1, e_2, \ldots, e_n$, de vecteurs de E qui engendre E.

Autement dit: s'il existe une famille finie $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, de vecteurs de E tel que tout vecteur x de E est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots, e_n$,

Soit encore: $\forall x \in E$, $\exists(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n / x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$.

Remarque 4. Rappel

Si, de plus, la famille $(e) = (e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots, e_n)$ est libre, on dit que (e) est une base de E.

Dans ce cas, les coefficients α_1, α_2, …, α_n sont appelés les coordonnées du vecteur x dans la base (e).

Exemple 2.

1. On sait que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie car $\mathbb{C} = \mathrm{Vect}(1, i)$.
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
3. $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
4. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E réduit au vecteur nul, c'est-à-dire que $E = \{0_E\}$ est de dimension finie (en effet $E = \mathrm{Vect}(\varnothing)$).
5. De même le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
6. Par contre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n'admet pas de famille génératrice.
7. Et le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Lemme 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Si E possède une famille génératrice de n vecteurs, $n \in \mathbb{N}$, alors toute famille de plus de n vecteurs est liée.

Démonstration : Exercice

Lemme 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Si E possède une famille libre de n vecteurs, $n \in \mathbb{N}$, alors aucune famille de moins de n vecteurs ne peut être génératrice de E.

Démonstration : Exercice

Propriété 2. Théorème de la dimension

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $n \in \mathbb{N}$.

Si E possède une base de n vecteurs alors toutes les bases de E possèdent exactement n vecteurs.

Démonstration : Exercice

Définition 4. Dimension

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.
Si E possède une base de n vecteurs alors on appelle dimension de E, on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou tout simplement lorsqu'il n'y pas d'ambiguité $\dim(E)$, le nombre entier n.

Exemple 3.

1. $(1,i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, donc $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})=2$.
2. $(e)=(e_1,e_2,...,e_n)$ où $e_1=(1,0,0,...,0)$, $e_2=(0,1,0,...,0)$, $e_3=(0,0,1,...,0)$,… et $e_n=(0,0,0,...,1)$, est une base de $\mathbb{K}^n$, d'où $\dim(\mathbb{K}^n)=n$
3. $(1,X,X^2,...,X^n)$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, donc $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X])=n+1$.
4. Si $E=\{0_E\}$ alors $\dim(E)=0$ (en effet $E=\mathrm{Vect}(\varnothing)$).
5. $(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))=4$

TD 1.
1. Soit $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x+y+z+t=0\}$. Montrer est de dimension et que $\dim(F)=3$
2. On considère le sous-espace vectoriel :
$E=\{(x,y,z,s,t)\in\mathbb{R}^5 / x+2y+2z-s+3t=0\ ,\ x+2y+3z+s+t=0 \text{ et } 3x+6y+8z+s+5t=0\}$. Trouver une base et la dimension de E.

TD 2. Vérifier que l'ensemble $E=\{f : x\mapsto a\cos(x+\varphi) /\ (a,\varphi)\in\mathbb{R}^2\}$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.
1. Montrer que $E=\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$
2. Quelle est sa dimension ?

TD 3. Dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, soient le quatre vecteurs $f_1 : x\mapsto \sin x$, $f_2 : x\mapsto \cos x$, $f_3 : x\mapsto x\sin x$, $f_4 : x\mapsto x\cos x$ et on pose $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3,f_4)$.
1. Montrer que $\dim F=4$.
2. Soient $F_1=\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ et $F_2=\mathrm{Vect}(f_3,f_4)$. Donner $\dim F_1$ et $\dim F_2$. Vérifier que $F=F_1\oplus F_2$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''(x)+y(x)=0$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est F_1.

TD 4. On pose $F=\left\{M=\begin{pmatrix} a-b & a+b+2c \\ 2a+2c & b+c \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; déterminer sa dimension.
2. On considère les vecteurs $A=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$
   a. Vérifier que $(A,B,C)\in F^3$.
   b. (A,B,C) est-elle une base de F ?
   c. Justifier que la famille (A) est libre et la compléter pour obtenir une base de F. Compléter la famille obtenue pour avoir une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Propriété 3. (Caractérisation de la dimension infinie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les propositions suivantes sont équivalentes:
i. E est de dimension infinide
ii. Il existe une famille infinie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E libre
iii. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe une famille libre de n vecteurs de E.

Démonstration : Exercice

Propriété 4. (Caractérisation des bases en dimension finie)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et (e) une famille de vecteurs de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:
i. (e) est une base de E
ii. (e) est une famille libre et possède n vecteurs
iii. (e) est une famille génératrice de E et possède n vecteurs.

Démonstration : Exercice

3. Utilisation des matrices pour caractériser les bases

Définition 5. (Matrice de coordonnées dans une base : rappel)
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n, $(e)=(e_1,e_2,...,e_n)$ une base de E et

$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ où $(x_i)_{1\le i\le n}\in\mathbb{K}^n$.

On appelle matrice de coordonnées du vecteur x dans la base (e), la matrice colonne, notée

$\mathrm{Mat}(x,(e))$, définie par: $\mathrm{Mat}(x,(e))=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}$

Définition 6. (Matrice d'une famille de vecteurs une base : rappel)

Soient E un $\mathbb{K}$ – espace vectoriel de dimension finie n, $(e)=(e_1,e_2,...,e_n)$ une base de E et $(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_p)$ une famille de vecteurs de E telles que $\forall j\in[\![1,p]\!],\ \varepsilon_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}e_i$ où $(x_{ij})_{1\le i\le n}\in\mathbb{K}^n$.

On appelle matrice de la famille (ε) dans la base (e), la matrice $n\times p$, notée $\mathrm{Mat}((\varepsilon),(e))$, définie

par: $\mathrm{Mat}((\varepsilon),(e))=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$

TD 5.

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ déterminer les coordonnées de $u=(1,4,7)$ dans la base $B=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=((1,2,0),(0,2,1),(1,1,1))$.
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ déterminer les coordonnées de $P=3X^2-5X+1$ dans la base $B=(A_1,A_2,A_3)=(X^2-1,X+1,X^2-X)$

TD 6. $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $B=(e_1,e_2)$. On note $u=2e_1-e_2$ et $v=-e_1+e_2$

1. Démontrer que $B'=(u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\omega=e_1+3e_2$. Déterminer $P=\mathrm{Mat}(B',B)$, $W=\mathrm{Mat}(\omega,B)$ et $W'=\mathrm{Mat}(\omega,B')$

TD 7. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère $B=(e_1,e_2,e_3)=((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1))$ et $B'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7))$.

1. Montrer que B et B' sont deux bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}(u,B)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Donner la matrice de coordonnées de u relativement à B'.

TD 8. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $u=(1,0,2,-1)$, $v=(2,-1,3,-1)$, $w=(0,2,2,-2)$ et le sous-espace vectoriel $F=\text{Vect}(u,v,w)$.

1. Calculer $t=v-2u$.
2. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?
   a. (u) b. (u,v) c. (u,v,w) d. $(u,v,0_{\mathbb{R}^4})$
3. Montrer que $F=\text{Vect}(u,v)$. Donner une base de F.
4. F est-il une droite de $\mathbb{R}^4$? un plan de $\mathbb{R}^4$?
5. Soient $u_1=(0,0,1,1)$ et $v_1=(0,0,0,1)$. On note $bc=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   a. Montrer que $B=(u_1,v_1,u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner les coordonnées de $s=(a,b,c,d)$ relativement à B.
   b. Déterminer $X=\text{Mat}(w,bc)$, $Y=\text{Mat}(w,B)$ et $P=\text{Mat}(B,bc)$. Comparer X et PY.
6. Soit $G=\text{Vect}(u_1,v_1)$
   a. Déterminer $F\cap G$
   b. Montrer que $\mathbb{R}^4=F\oplus G$
7. Soient p_G la projection sur G parallèlement à s_F et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
   a. Calculer $\text{Mat}(p_G(u_1+v_1),B)$ et $\text{Mat}(p_G(u_1+v_1),bc)$
   b. On pose $\omega=(1,1,1,1)$.Calculer $\text{Mat}(s_F(\omega),B)$ et $\text{Mat}(s_F(\omega),bc)$.

Réponse de la question 6.a

Soit $U\in\mathbb{R}^4$

$$U\in F\cap G \Leftrightarrow \begin{cases}U\in F\\ U\in G\end{cases} \Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases}U=au+bv\\ U=cu_1+dv_1\end{cases} \Leftrightarrow \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \ / \ au+bv-cu_1-dv=0_{\mathbb{R}^4}$$

Or d'après la question 5.a, (u,v,u_1,v_1) est une base de $\mathbb{R}^4$, donc c'est une famille libre.

D'où : $au+bv-cu_1-dv=0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow a=b=c=d=0 \Rightarrow U=0_{\mathbb{R}^4}$

En conclusion : $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$

Propriété 5. Rappel

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n, $(e)=(e_1,e_2,...,e_n)$ une base de E et $(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)$ une famille de n vecteurs de E.

La famille (ε) est une base de E si et seulement si la matrice $\text{Mat}((\varepsilon),(e))$ est inversible.

Démonstration : Exercice

Exemple 4.

1. On considère la famille $(\varepsilon)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que où $\varepsilon_1=(-1,0,1)$, $\varepsilon_2=(1,-1,0)$ et $\varepsilon_3=(1,1,-1)$.
   (ε) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. On considère la famille $B=\left(1,1+X,(1+X)^2,(1+X)^3\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. B est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

4. Etude des sous-espaces vectoriels en dimension finie

Propriété 6.
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et E_1 un sous-espace vectoriel de E. Alors on a:

1. $\dim(E_1) \leq \dim(E)$
2. $\dim(E_1) = \dim(E) \Rightarrow E_1 = E$.

Démonstration : Exercice

Remarque 5. Quelques terminologies
Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension

1. **Droite vectorielle** : on appelle droite vectorielle de E tout sous-espace vectoriel de dimension 1 de E.
2. **Plan vectoriel** : on appelle plan vectoriel de E tout sous-espace vectoriel de dimension 2 de E.
3. **Si E est de dimension finie n,** on appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de E.

TD 9.

1. Quels sont les hyperplans de $\mathbb{R}^3$?
2. On pose $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-2y+3z=0\}$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-y-2z=0 \text{ et } 2x+y-z=0\}$.
   Montrer que E_1 est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et E_2 est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$
3. Donner un exemple de droite et d'hyperplan de $\mathbb{R}^5$
4. Donner un exemple de plan et d'hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$
5. Un espace vectoriel de dimension infinie peut-il avoir des droites ? des plans ? des hyperplans ?
6. Donner des exemples de droites, de plans de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, puis de $E = \mathbb{R}[X]$.

Propriété 7. Théorème de la base incomplète
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n. Alors toute famille libre, finie, $(e_1, e_2, ..., e_p)$, $p \leq n$, peut être complétée en une base de E.

Démonstration : Exercice

Exemple 5. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ contenant le vecteur $\varepsilon_1 = (1,-1,1)$.

TD 10.

1. Construire une base de $\mathbb{R}^2$ contenant le vecteur $\varepsilon_1 = (1,-1)$.
2. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ contenant les vecteurs $\varepsilon_1 = (1,-1,1)$ et $\varepsilon_2 = (2,0,1)$.
3. Construire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ contenant les vecteurs $P_0 = 1+X$ et $P_1 = X+X^2$.
4. Construire une base de $M_2(\mathbb{R})$ contenant les vecteurs $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Réponse :

1. $\dim(\mathbb{R}^2)=2$.

Donc il suffit de compléter le vecteur ε_1 par un vecteur $\varepsilon_2=(a,b)$ tel que $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ soit une base de $\mathbb{R}^2$

Pour cela il faut que $\det(\text{mat}((\varepsilon_1,\varepsilon_2),bc))\neq 0$

Or $\det(\text{mat}((\varepsilon_1,\varepsilon_2),bc))=\begin{vmatrix}1 & a\\ -1 & b\end{vmatrix}=a+b$

Donc par exemple $\varepsilon_2=(1,1)$ convient.

Remarque : il y a une infinité de solutions

2. $\dim(\mathbb{R}^3)=3$.

Donc il suffit de compléter la famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ par un vecteur $\varepsilon_3=(a,b,c)$ tel que $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$

Pour cela il faut que $\det(\text{mat}((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3),bc))\neq 0$

Or $\det(\text{mat}((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3),bc))=\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ -1 & 0 & b\\ 1 & 1 & c\end{vmatrix}=-a+b+2c$

Donc par exemple $\varepsilon_3=(1,1-1)$ convient.

Remarque : il y a une infinité de solutions

3. $\dim(\mathbb{R}_2[X])=3$.

Donc il suffit de compléter la famille (P_0,P_1) par un vecteur $P_2=aX^2+bX+c$ tel que (P_0,P_1,P_2) soit une base de $\mathbb{R}^3$

Pour cela il faut que $\det(\text{mat}((P_0,P_1,P_2),bc_2))\neq 0$ où $bc_2=(1,X,X^2)$

Or $\det(\text{mat}((P_0,P_1,P_2),bc_2))=\begin{vmatrix}1 & 0 & c\\ 1 & 1 & b\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=a-b+c$

Donc par exemple $P_2=X^2+1$ convient.

Remarque : il y a une infinité de solutions

4. $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))=4$.

Donc il suffit de compléter la famille (A_1,A_2) par 2 vecteurs $A_3=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ et $A_4=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ tel que (A_1,A_2,A_3,A_4) soit une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour cela il faut que $\det(\text{mat}((A_1,A_2,A_3,A_4),bc_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}))\neq 0$ où $bc_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$

Or $\det(\text{mat}((A_1,A_2,A_3,A_4),bc_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}))=\begin{vmatrix}1 & 0 & a & x\\ -1 & -1 & b & y\\ 2 & 1 & c & z\\ 1 & 2 & d & t\end{vmatrix}$

Faisons un choix : par exemple $a=x=0$

Dans ce cas : $\det\left(\mathrm{mat}\left((A_1,A_2,A_3,A_4),bc_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-1&-1&b&y\\2&1&c&z\\1&2&d&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&b&y\\1&c&z\\2&d&t\end{vmatrix}$

Si on poursuit toujours avec un choix : par exemple $b=-c=-d=1$ on a :

$$\det\left(\mathrm{mat}\left((A_1,A_2,A_3,A_4),bc_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)\right)=\begin{vmatrix}-1&1&y\\1&-1&z\\2&-1&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&y\\0&-1&z\\1&-1&t\end{vmatrix}=y+z$$

Donc il suffit de choisir (par exemple) $A_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ et $A_4=\begin{pmatrix}0&3\\-1&0\end{pmatrix}$

Remarque : il y a une infinité de solutions

5.

Propriété 8. Sous-espaces supplémentaires

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

Alors E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si la reunion d'une base de E_1 et d'une base de E_2 forme une base de E.

Démonstration : Exercice

TD 11.

1. $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$, où $\varepsilon_1=(1,-1,2)$ et $\varepsilon_2=(0,-1,1)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
2. $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, où $\varepsilon_1=(1,-1,2)$, $\varepsilon_2=(0,-1,1)$ et $\varepsilon_3=(1,0,-1)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
3. $\mathrm{Vect}(P_0)$ et $\mathrm{Vect}(P_1,P_2)$, où $P_0=X$, $P_1=2X^2$ et $P_2=X+2X^2$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$?

Réponse :

1. $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ **et** $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)\oplus\mathrm{Vect}(\varepsilon_2)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$

Les vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont pas colinéaires donc est une base de $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)\oplus\mathrm{Vect}(\varepsilon_2)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$

D'où $\dim(\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2))=2$ par conséquent $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\neq\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

2. $\dim(\mathbb{R}^3)=3$

$\det((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3),bc)=\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&-1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=2$ donc est une base de $\mathbb{R}^3$

D'où $\mathbb{R}^3=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\mathrm{vect}(\varepsilon_1)\oplus\mathrm{Vect}(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

3. $\dim(\mathbb{R}_2[X])=3$

$$\det\left((P_0,P_1,P_2),bc_2\right)=\begin{vmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&2&2\end{vmatrix}=0$$ donc n'est pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$ ($P_2=P_0+P_1$)

$\operatorname{Vect}(P_0,P_1,P_2)=\operatorname{Vect}(P_0,P_1,P_0+P_1)=\operatorname{Vect}(P_0,P_1)$

La famille (P_0,P_1) est libre , c'est donc une base de $\operatorname{Vect}(P_0,P_1,P_2)$ d'où $\dim\left(\operatorname{Vect}(P_0,P_1,P_2)\right)=2$

Par conséquent $\operatorname{Vect}(P_0,P_1,P_2)=\operatorname{Vect}(P_0)+\operatorname{Vect}(P_1,P_2)\neq\mathbb{R}_2[X]$

Propriété 9. Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel
Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède au moins un supplémentaire.

Démonstration : Exercice

Exemple 6. Construire un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ $\operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ où $\varepsilon_1=(1,-1,2)$.

TD 12.

1. Construire un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x-2y=0 \text{ et } 3z+t=0\right\}$.
2. Construire un supplémentaire dans $\mathbb{R}_2[X]$ de $F=\operatorname{Vect}(P_0,P_1)$ où $P_0=X-2$ et $P_1=1+X+X^2$.
3. Construire un supplémentaire dans $M_2(\mathbb{R})$ de $F=\operatorname{Vect}(A_1,A_2)$ avec $A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$ et $A_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$.

Définition 7. Rang d'une famille de vecteurs
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ une famille de p vecteurs de E.
On appelle rang de la famille $(e_1,e_2,\dots,e_p)$, le nombre entier note $\operatorname{rg}(e_1,e_2,\dots,e_p)$ défini par
$\operatorname{rg}(e_1,e_2,\dots,e_p)=\dim\left(\operatorname{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_p)\right)$.

Exemple 7.

1. Déterminer le rang de la famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ où $\varepsilon_1=(2,3,-1,0)$, $\varepsilon_2=(1,0,-2,1)$, $\varepsilon_3=(0,3,3,-2)$ et $\varepsilon_4=(1,3,1,-1)$.
2. Déterminer le rang de la famille (P_0,P_1,P_2) de $\mathbb{R}_3[X]$ de où $P_0=X-2$, $P_1=X+X^2$ et $P_1=1-X+2X^2$.
3. Déterminer le rang de la famille (A_1,A_2,A_3) de $M_2(\mathbb{R})$ avec $A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$ et
   $A_3=\begin{pmatrix}2&1\\1&-4\end{pmatrix}$.

Propriété 10.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ une famille de p vecteurs de E.
Alors $\operatorname{rg}(e_1,e_2,\dots,e_p)\leq\min(p,n)$

Démonstration : Exercice

TD 13. On note $E=\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, c'est des fonctions deux fois dérivables et dont la dérivée second est continue. On considère la famille (f_1,f_2,f_3,f_4) des fonctions définies par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x)=\cos x$, $f_2(x)=\sin x$, $f_3(x)=1$ et $f_4(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. On note $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3,f_4)$.

1. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?
   a. (f_1) b. $(0_E,f_1,f_2)$ **c.** (f_1,f_2,f_3)
2. Montrer que (f_1,f_2,f_3,f_4) est liée.
3. Montrer que $B=(f_1,f_2,f_3)$ est une famille génératrice de F. En déduire que B est une base de F.
4. On considère les deux sous-espaces de F : $F_1=\mathrm{Vect}(f_1)$ et $F_2=\mathrm{Vect}(f_2,f_3)$.Justifier que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans F.
5. Soit p la projection sur F_1 parallèlement à F_2 et s la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2. Déterminer $p(f_4)$ et $s(f_4)$.
6. On considère $S=\{f\in F / f''+f=0_E\}$. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de F.
7. Soit D l'application de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\forall f\in F$, $D(f)=f''+f$.
   a. Soit $f=af_1+bf_2+cf_3$. Montrer que $D(f)\in F$ et préciser ses coordonnées dans la base B.
   b. Déterminer une base de S.

TD 14. Soit (E_h) l'équation différentielle : $y''(x)+y(x)=0$

1.
   a. Déterminer S_h l'ensemble des solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que S_h est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.En donner une base que l'on notera B et préciser la dimension de S_h.
2. On définit sur $\mathbb{R}$ deux fonctions f_1 et f_2 par : $f_1(x)=\mathrm{ch}(2x)$ et $f_2(x)=\mathrm{sh}(2x)$.
   a. Montrer que $B'=(f_1,f_2)$ est une base de S_h
   b. Montrer que $F_1=\mathrm{vect}(f_1)$ et $F_2=\mathrm{vect}(f_2)$ sont supplémentaires dans S_h.
3. On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par : $f(x)=\pi\ln 2e^{2x}+12e^{-2x}$.
   c. Vérifier que f appartient à S_h
   d. Déterminer les coordonnées de f dans la base B'

e. On note p la projection sur F_1 parallèlement à F_2 , et s la symétrie par rapport à F_2 parallèlement à F_1 . Déterminer $p(f)$ et $s(f)$ (on donnera les coordonnées dans la base B' et dans la base B

4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y''(x)+y(x)=(x+1)e^{2x}$.

(on cherchera une solution particulière y_p de (E) de la forme $y_p : x \mapsto x(ax+bx)e^{2x}$ où a, b et c sont des réels à déterminer).