CONVERGENCES DE SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES
THÉORÈMES LIMITES

Partie B :

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x) n^2 x \exp(-n^2 x^2/2).$$

1. Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \geq 1$, X_n admet pour densité f_n. Démontrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire X que l'on précisera.

Exercice 2

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ convergeant en probabilité vers X. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \; P(|X_n| \geq M) + P(|X| \geq M) + P(|Y| \geq M) \leq \varepsilon.$$

2. Démontrer que YX_n converge en probabilité vers YX.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Démontrer que $(f(X_n))$ converge en probabilité vers $f(X)$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que $(f(X_n))$ converge en probabilité vers $f(X)$.

Exercice 3

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $X_n = n(1 - M_n)$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X_n?
2. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

Exercice 4

Soit n un entier naturel non-nul et soit a un réel. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}$.

1. Déterminer a pour que f_n soit une densité de variable aléatoire.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que chaque X_n admet pour densité f_n. Étudier l'existence de moments pour X_n.
3. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).
4. Étudier la convergence en probabilité de la suite (X_n).