Dualité

Nous allons aborder ici la notion de dualité et montrer qu'à tout programme linéaire (appelé *primal*) on peut associer un autre programme, appelé *programme dual*. En fait le programme dual ne correspond pas à un autre problème que le programme primal, mais bel et bien au même problème vu sous un autre angle. D'étroites relations lient un couple de programmes duaux.

Cette découverte de la dualité a eu, comme nous le verrons, d'importantes conséquences sur la théorie de la programmation linéaire.

1.1 Définitions

Définition :
Soit le programme linéaire suivant (écrit sous forme canonique) :

$$(P)\begin{cases} \text{minimiser} & z = cx \\ \text{sous} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

On appelle dual de ce programme linéaire, le programme linéaire suivant :

$$(D)\begin{cases} \text{maximiser} & w = yb \\ \text{sous} & yA \leq c \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Dans cette définition, due à J. Von Neumann, le vecteur inconnu y de (D) est un vecteur ligne de dimension m, si m représentait le nombre de contraintes de (P).
On note que :
- les variables du dual sont en bijection avec les contraintes du primal, tandis que les contraintes du dual sont en bijection avec les variables du primal,
- le second membre du primal (vecteur b) donne les coefficients de la fonction objectif du dual et les coefficients de la fonction objectif du primal donne le second membre du dual.

Cette équivalence apparaît dans le schéma suivant :

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|c|}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & x_3 & \dots & \multicolumn{1}{c}{x_n} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{2-6}\cline{8-8}
y_1 & A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 & \dots & A_1^n & \geq & b_1 \\
y_2 & A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 & \dots & A_2^n & \geq & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
y_m & A_m^1 & A_m^2 & A_m^3 & \dots & A_m^n & \geq & b_m \\
\cline{2-6}\cline{8-8}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\leq} & \leq & \leq & \dots & \multicolumn{1}{c}{\leq} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{c^1} & c^2 & c^3 & \dots & \multicolumn{1}{c}{c^n} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
$$

1.2 Exemple

1.2.1 Problème posé (primal)

Une famille utilise 6 produits alimentaires comme source de vitamine A et C. Le tableau ci-dessous récapitule les apports en vitamines de chacun des produits, leur coût et la demande à satisfaire.

Produit	1	2	3	4	5	6	demande (unité)
Vitamine A (/kg)	1	0	2	2	1	2	9
Vitamine C (/kg)	0	1	3	1	3	2	19
Prix (kg)	35	30	60	50	27	22	

On cherche à minimiser le coût de leur régime. Pour cela, écrivons le programme linéaire associé à ce problème.

(P)

1.2.2 Problème dual

On peut associer à (P) le problème suivant : un producteur de cachets de vitamines synthétiques veut convaincre une famille d'acheter ses vitamines. Il faut pour cela que le prix soit intéressant.
Soit y_1 le prix de vente d'une unité de vitamine A sous forme synthétique.
Soit y_2 le prix de vente d'une unité de vitamine C sous forme synthétique.

Pour être compétitif, les vitamines synthétiques doivent apporter au moins autant que les produits naturels, à un moindre prix. Ainsi, si on regarde, le produit 3, par exemple, il faut que 2 unités de vitamines A plus 3 unités de vitamines C coûtent moins de 60. Ce qui s'écrit par :

$$2y_1 + 3y_2 \leq 60$$

L'objectif pour le producteur est de déterminer son prix de vente de façon à maximiser son profit tout en restant compétitif afin que les familles achètent ses produits.
On peut donc écrire le programme linéaire suivant :

(D)

1.2.3 Forme canonique

Ecrire les deux programmes (P) et (D) sous forme canonique donne :

$$(P) \qquad \text{minimiser} \qquad z = (35, 30, 60, 50, 27, 22) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$s.c. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$x_i \geq 0$$

$$(D) \qquad \text{maximiser} \qquad w = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$s.c. \qquad (y_1, y_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \leq (35, 30, 60, 50, 27, 22)$$

$$y_i \geq 0$$

1.3 Schémas d'écriture

Il existe plusieurs formes d'équivalence entre le primal et le dual, toutes dérivées de la définition, suivant que le primal est un programme à minimiser ou maximiser, suivant le type de contraintes ($\leq$, $\geq$, $=$) et suivant les contraintes de positivité sur les variables.

Ainsi, 3 formes d'équivalence peuvent être écrites :

1.3.1 Première équivalence (Définition)

$$\begin{array}{lll c lll}
P[A,b,c] & \min & z = cx & \rightarrow & D[A,b,c] & \max & w = yb \\
 & s.c. & Ax \geq b & & & s.c. & yA \leq c \\
 & & x \geq 0 & & & & y \geq 0
\end{array}$$

1.3.2 Deuxième équivalence

$$\begin{array}{lll c lll}
P[A,b,c] & \min & z = cx & \rightarrow & D[A,b,c] & \max & w = yb \\
 & s.c. & Ax \leq b & & & s.c. & yA \leq c \\
 & & x \geq 0 & & & & y \leq 0
\end{array}$$

Justification :

1.3.3 Troisième équivalence

$$\begin{array}{lll c lll}
P[A,b,c] & \min & z = cx & \rightarrow & D[A,b,c] & \max & w = yb \\
 & s.c. & Ax = b & & & s.c. & yA \leq c \\
 & & x \geq 0 & & & & y \text{ arbitraire}
\end{array}$$

Justification :

1.3.4 Récapitulatif

Le tableau ci-dessous récapitule les équivalences.

Primal (P)	$\rightarrow$	Dual (D)
minimiser $z = cx$		maximiser $w = yb$
i-ème contrainte $\left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \\ = \end{array} \right\} b_i$	$\rightarrow$	i-ème variable duale $y_i \left\{ \begin{array}{c} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{arbitraire} \end{array} \right.$
j-ème variable $x_j \left\{ \begin{array}{c} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{arbitraire} \end{array} \right.$	$\rightarrow$	j-ème contrainte duale $\left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} c_j$

1.4 Propriétés

[**Prop 1**] Le dual du dual est le primal

Preuve :

[**Prop 2**] **Théorème faible de la dualité :**
Pour chaque paire de solutions x de (P) et y de (D), on a l'inégalité suivante :

$$z = cx \quad \geq \quad yb = w$$

Preuve :

[Prop 3] Certificat d'optimalité :
Si $z = cx = yb = w$ pour des solutions admissibles x de (P) et y de (D), alors x et y sont optimales.

Preuve :

[Prop 4] Si (P) et (D) ont des solutions réalisables, alors ils ont des solutions optimales x^{opt} et y^{opt} vérifiant : $c.x^{opt} \geq y^{opt}.b$

Preuve :

[Prop 5] Si (P) (respectivement (D)) admet une solution réalisable, mais pas de solution optimale, alors (D) (resp. (P)) n'admet pas de solution réalisable.

Preuve :

[Prop 6] Théorème fondamental :
Soient (P, D) une paire de problèmes duaux. Si l'un de ces deux problèmes possède une solution optimale (finie) alors l'autre problème possède également une solution optimale finie, et les deux fonctions objectifs ont les mêmes valeurs.

$$z^{opt} \quad = \quad c.x^{opt} \quad = \quad y^{opt}.b \quad = \quad w^{opt}$$

1.5 Théorème des écarts complémentaires

1.5.1 Définitions

Soit le programme linéaire,

$$\text{minimiser } z = cx$$
$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

On dit que la contrainte C_i *est serrée à l'optimum*, si $A_i.x = b_i$.
Lorsque $A_i.x > b_i$, la contrainte c_i est dite *lâche*.

1.5.2 Enoncé du théorème

Théorème :

Soit un couple de programmes linéaires duaux :

minimiser $z = cx$	maximiser $w = yb$
$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} yA \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$

• *Si la contrainte C_i de l'un des programmes est lâche à l'optimum, alors la variable correspondante dans le programme dual, y_i est nulle.*
• *Si une variable x_i de l'un des programmes est strictement positive à l'optimum, alors la contrainte C_i correspondante dans le programme dual est serrée.*

i.e. :

$$\begin{array}{lll} A_i.x > b_i & \rightarrow & y_i = 0 \\ x_i > 0 & \rightarrow & y.A_i = c_i \end{array}$$

Démonstration :

1.5.3 Application du théorème

Le théorème des écarts complémentaires est très important et s'applique fréquemment. Il permet de prouver l'optimalité d'une solution d'un programme linéaire que l'on pense être optimale, sans appliquer l'algorithme du simplexe et sans calculer les valeurs des fonctions objectifs.

Exemple :
Reprenons l'exemple des programmes linéaires traitant l'exemple de la consommation de vitamines d'une famille. Comment vérifier que la solution $(0, 0, 0, 0, 5, 2)$ est optimale pour le programme primal?

1.6 Interprétation économique de la dualité

Soient (P) et (D), un programme linéaire et son dual, suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{lrrl} \text{maximiser } z = & 18x_1+ & 12x_2 & \\ & 4x_1+ & 5x_2 & \leq 20 \\ & 2x_1+ & x_2 & \leq 6 \\ & & x_2 & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}\right.$$

$$(D)\left\{\begin{array}{lrrrl} \text{minimiser } w = & 20y_1+ & 6y_2+ & 2y_3 & \\ & 4y_1+ & 2y_2 & & \geq 18 \\ & 5y_1+ & y_2+ & y_3 & \geq 12 \\ & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \end{array}\right.$$

Une résolution du programme (P) par la méthode du simplexe donnerait les solutions suivantes :

$$(P) : x_1^{opt} = 2,\ x_2^{opt} = 2,\ z_{max} = 60$$

La contrainte (c1) étant lâche, nous savons que $y_1^{opt} = 0$. On en déduit alors la solution du dual (Théorème des écarts complémentaires).

$$(D) : y_1^{opt} = 0,\ y_2^{opt} = 9,\ y_3^{opt} = 3,\ w_{min} = 60$$

Une question intéressante serait de connaître la sensibilité de notre problème à de petites variations extérieures.

Par exemple, on voit ici, dans le programme (P) que les contraintes (c2) et (c3) sont serrées. Modifions la contrainte (c2) de la façon suivante :

$$2x_1 + x_2 \leq 6 + \delta$$

C'est à dire que l'on relache cette contrainte. Si 6 représentait une quantité de produits disponible, on s'autorise à en utiliser plus. Quelles sont les conséquences sur le dual?

La fonction à minimiser devient :

$$20y_1 + (6+\delta)y_2 + 2y_3$$

c'est à dire une augmentation de δy_2, par rapport au programme (D).

Pour δ suffisamment petit, la solution optimale du dual ne change pas ((D) : $y_1^{opt} = 0$, $y_2^{opt} = 9$, $y_3^{opt} = 3$), tandis que la solution optimale du primal est caractérisée par :

$$(P_\delta) \left\{ \begin{array}{rrl} 2x_1 + & x_2 & \leq 6+\delta \\ & x_2 & \leq 2 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

Les deux couples de solutions ainsi définis sont réalisables et vérifient le théorème des écarts complémentaires.

Exemple : Si $\delta = 1$, les solutions deviennent :

(P) : $x_1^{opt} = 2.5$, $x_2^{opt} = 2$, $z_{max} = 69$

(D) : $y_1^{opt} = 0$, $y_2^{opt} = 9$, $y_3^{opt} = 3$,$w_{min} = 69 = 60 + 1 \times y_2$

La solution du programme primal est modifiée, tandis que la solution du dual (les valeurs des variables) reste inchangée.

Ainsi, si la fonction à maximiser représente les profits, une augmentation de la quantité de produits de δ, entraîne une augmentation du profit (z_{max}) de δy_2^{opt}, soit 9δ.
$y_1^{opt} = 0$ indique qu'il est inutile d'acquérir plus de produit 1 (ce qui est logique puisque tout le produit 1 n'est pas utilisé).

On dit que la valeur de la variable duale y_i^{opt} est égale au coût marginal du produit i.

Ce qui signifie que l'entreprise concernée aura intérêt à acquérir des produits supplémentaires i, en vue d'augmenter le profit, si le coût d'acquisition π_i est tel que $\pi_i \leq y_i^{opt}$.

Attention, cet argument reste valide seulement dans le voisinage de la solution optimale initiale !!

Théorème :
La variation de la valeur optimum de la fonction objectif du PL :

$$(P)\begin{cases} \textit{maximiser } z = cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

pour une variation de δb suffisamment faible du second membre b, pour que la base optimale de (P) reste optimale pour (P_δ)

$$(P_\delta)\begin{cases} \textit{maximiser } z = cx \\ Ax \leq b + \delta b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

est $y^{opt}\delta b$, où y^{opt} est solution optimale du dual de (P).