Exercice 1. Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y)=|x+2y|+|x+y|$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse :

- Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$N(u)=0 \Leftrightarrow |x+2y|+|x+y|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow u=0_{\mathbb{R}^2}$$

- Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

$$N(\lambda u)=N(\lambda x,\lambda y)=|\lambda x+2\lambda y|+|\lambda x+\lambda y|=|\lambda(x+2y)|+|\lambda(x+y)|=|\lambda||x+2y|+|\lambda||x+y|$$

$$=|\lambda|(|x+2y|+|x+y|)=|\lambda|N(u)$$

- Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $v=(x',y')\in\mathbb{R}^2$

$$N(u+v)=N(x+x',y+y')=|x+x'+2y+2y'|+|x+x'+y+y'|$$

$$=|(x+2y)+(x'+2y')|+|(x+y)+(x'+y')|\le(|x+2y|+|x'+2y'|)+(|x+y|+|x'+y'|)$$

$$\le(|x+2y|+|x+y|)+(|x'+2y'|+|x'+y'|)$$

$$\le N(u)+N(v)$$

Conclusion : N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. On pose $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et définit sur E l'application N par : $N(f)=\int_a^b|f(x)|dx$. Montrer que N est une norme sur E.

Réponse :

- Soit $f\in E$

$$N(f)=0 \Leftrightarrow \int_a^b|f(x)|dx=0 \Leftrightarrow \forall x\in[a,b],\ f(x)=0 \Leftrightarrow f=0_E$$

- Soit $f\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

$$N(\lambda f)=\int_a^b|\lambda f(x)|dx=\int_a^b|\lambda||f(x)|dx=|\lambda|\int_a^b|f(x)|dx=|\lambda|N(f)$$

- Soit $f\in E$ et $g\in E$

$$N(f+g)=\int_a^b|f(x)+g(x)|dx\le\int_a^b(|f(x)|+|g(x)|)dx\le\int_a^b|f(x)|dx+\int_a^b|g(x)|dx\le N(f)+N(g)$$

Conclusion : N est bien une norme sur E.

Exercice 3. Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y)=|x|+|y|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   Réponse : Voir exercice 1
2. Soit $B_a = B(a,1)$ où $a=(0,0)$. Dessiner B_1 dans un repère orthonormé.

   Réponse : Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$

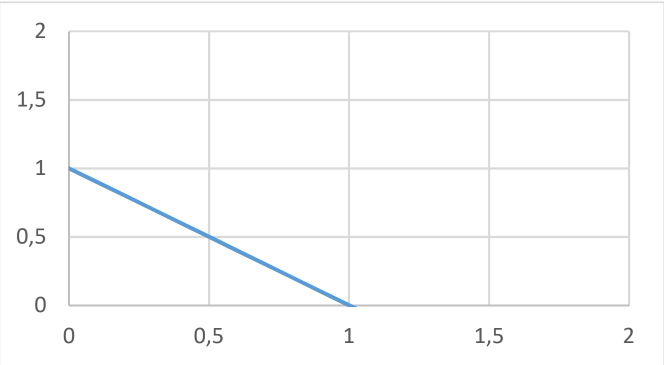
   $B_a = B(a,1) = \{u\in\mathbb{R}^2 / N(u-a)<1\} = \{u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x-0|+|y-0|<1\} = \{u=(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x|+|y|<1\}$

   Quatre cas à distinguer :

   - 1^{ier} cas : $x\geq 0$ et $y\geq 0$

     $|x|+|y|<1 \quad \Leftrightarrow \quad x+y<1$

     - On trace dans le plan cartésien , la droite : $x+y=1$
     - On choisit un point quelconque du plan n'appartenant pas la droite et on vérifie si ses coordonnées satisfont l'inéquation ou non.
     - Si elles satisfont alors la partie où se trouve le point est solution sinon c'est l'autre partie qui est solution.

   - $2^{ième}$ cas : $x\leq 0$ et $y\leq 0$

     $|x|+|y|<1 \quad \Leftrightarrow \quad -x-y<1$

   - $3^{ième}$ cas : $x\geq 0$ et $y\leq 0$

     $|x|+|y|<1 \quad \Leftrightarrow \quad x-y<1$

   - $4^{ième}$: $x\leq 0$ et $y\geq 0$

     $|x|+|y|<1 \quad \Leftrightarrow \quad -x+y<1$

Exercice 4. Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   Réponse : Voir exercice 1
2. Soit $B_a = B(a,1)$ où $a=(0,0)$. Dessiner B_2 dans un repère orthonormé.

Exercice 5. Page 65 exercice 7.6.3-1

Soit $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$

- Symétrie

$\varphi(y,x) = y_1x_1 + 6y_2x_2 + 3y_3x_3 + 3\lambda(y_1x_3 + y_3x_1) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 3\lambda(x_1y_3 + x_3y_1) = \varphi(x,y)$

D'où φ est symétrique.

- Positivité

$\varphi(x,x) = x_1x_1 + 6x_2x_2 + 3x_3x_3 + 3\lambda(x_1x_3 + x_3x_1)$

Posons $x_1 = a$, $x_2 = b$ et $x_3 = c$

Donc $\varphi(x,x) = a^2 + 6b^2 + 3c^2 + 6\lambda ac = (a^2 + 3c^2 + 6\lambda ac) + 6b^2 = (a+3\lambda c)^2 - 9\lambda^2c^2 + 3c^2 + 6b^2$

$= (a+3\lambda c)^2 + 3(1-3\lambda^2)c^2 + 6b^2$

$$\varphi(x,x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-3\lambda^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-\lambda\sqrt{3})(1+\lambda\sqrt{3}) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

- Non dégénérescence ou stricte positivité : on suppose $\lambda \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

On montre que : $\forall x \in \mathbb{R}^3$: $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,0)$

  - $\lambda \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

    $\varphi(x,x) = 0 \quad \Leftrightarrow (a+3\lambda c)^2 + 3(1-3\lambda^2)c^2 + 6b^2 = 0$

    $$\Leftrightarrow (a+3\lambda c)^2 + 3(1-3\lambda^2)c^2 + 6b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = (0,0,0)$$

  - $\lambda \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

    $\varphi(x,x) = 0 \quad \Leftrightarrow (a+3\lambda c)^2 + 3(1-3\lambda^2)c^2 + 6b^2 = 0$

    $\Leftrightarrow (a+3\lambda c)^2 + 6b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$: dans ce cas φ n'est pas strictement positif.

En conclusion : φ est un produit scalaire si et seulement si $\lambda \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

Exercice 6. Page 65 exercice 7.6.4-1

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_3[X]$

- Symétrie

$$\varphi(P,Q)=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt==\int_{-1}^{1}Q(t)P(t)\,dt=\varphi(Q,P)$$

D'où φ est symétrique.

- Positivité

$$\varphi(P,P)=\int_{-1}^{1}P(t)P(t)\,dt=\int_{-1}^{1}P^2(t)\,dt\geq 0$$

- Non dégénérescence ou stricte positivité :

$$\varphi(P,P)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \int_{-1}^{1}P^2(t)\,dt=0 \Leftrightarrow P=0_{\mathbb{R}_3[X]}$$

En conclusion, φ est un produit scalaire

Exercice 7. Page 65 exercice 7.6.4-2

Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$ et $Q\in\mathbb{R}_3[X]$

- Symétrie

$$\varphi(P,Q)=\int_{-1}^{1}\left[P'(t)Q(t)+P(t)Q'(t)\right]dt==\int_{-1}^{1}\left[Q'(t)P(t)+Q(t)P'(t)\right]dt=\varphi(Q,P)$$

D'où φ est symétrique.

- Positivité

$$\varphi(P,P)=\int_{-1}^{1}\left[P'(t)P(t)+P(t)P'(t)\right]dt=\int_{-1}^{1}2P'(t)P(t)\,dt=\left[P^2(t)\right]_{-1}^{1}=P^2(1)-P^2(-1)\ :$$

φ n'est pas postive

Par exemple : si $P=X-1$ alors $\varphi(P,P)=0-4=-4$

Exercice 8. Soit φ le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}^3$ tel que pour $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$

on ait : $\varphi(x,y)=y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3+\frac{1}{2}(y_1x_3+y_3x_1)$

Positivité :

$$\varphi(x,x)=x_1x_1+x_2x_2+x_3x_3+\frac{1}{2}(x_1x_3+x_3x_1)$$

Posons $x_1=a$, $x_2=b$ et $x_3=c$

Donc $\varphi(x,x)=a^2+b^2+c^2+ac=(a^2+c^2+ac)+b^2=\left(a+\frac{1}{2}c\right)^2-\frac{1}{4}c^2+c^2+b^2$

$$=\left(a+\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2+b^2$$

Soit $u=(1,1,-1)$ et $v=(1,1,2)$

- Par rapport au produit scalaire cartésien on a : $u.v=1\times1+1\times1+(-1)\times2=0$

  $u=(1,1,-1)$ et $v=(1,1,2)$ sont orthogonaux par rapport au scalaire cartésien
- Par rapport au produit scalaire φ, on a :

$$\varphi(u,v)=1\times1+1\times1+(-2)\times(-2)+\frac{1}{2}(1\times(-2)+(-2)\times1)=2+4-2=4$$

$u=(1,1,-1)$ et $v=(1,1,2)$ ne sont pas orthogonaux par rapport au scalaire φ

Question : Déterminer $E=u^{\perp}=\{v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \varphi(u,v)=0\}$ = ensemble des vecteurs orthogonaux à u

$$v=(x,y,z)\in u^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(u,v)=0 \Leftrightarrow x+y-z+\frac{1}{2}(-x+z)=0 \Leftrightarrow x+2y-z=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=x+2y \\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

En conclusion : $E=u^{\perp}=\mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,2))$

Exercice 9. Soit φ le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}^3$ tel que pour $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$ on ait : $\varphi(x,y)=y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3$ (produit scalaire cartésien)

Soit $B=(u,v,w)$ tel que $u=(1,0,1)$, $v=(0,1,1)$ et $w=(1,1,1)$. On admet que B est une base de $\mathbb{R}^3$

1. Vérifier que cette base n'est pas orthogonale
   Réponse :
   $\varphi(u,v)=1\times0+0\times1+1\times1=1$. u et v ne sont pas orthogonaux donc B n'est pas une base orthogonale
2. Orthonormaliser cette base par l'algorithme de Gramm-Schmidt
   On pose :
   - $e_1=u=(1,0,1)$
   - On construit e_2 sous la forme $e_2=v+\alpha e_1$ avec la condition $\varphi(e_2,e_1)=0$
     $$\varphi(e_2,e_1)=0 \Leftrightarrow \varphi(v+\alpha e_1,e_1)=0 \Leftrightarrow \varphi(v,e_1)+\alpha\varphi(e_1,e_1)=0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{\varphi(v,e_1)}{\varphi(e_1,e_1)}$$
   - On construit e_3 sous la forme $e_2=w+\beta e_1+\gamma e_2$ avec la condition
     $\varphi(e_3,e_1)=\varphi(e_3,e_2)=0$