

# Controle Preditivo de um Robô com Tração Diferencial

Alison Tristão

June 19, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modelo Cinemático</b>	<b>2</b>
2.1	Relação entre Velocidades, Posição e Orientação . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Modelo Dinâmico</b>	<b>4</b>
3.1	Dinâmica dos Atuadores . . . . .	4
3.2	Relação de Esforços nos Referenciais . . . . .	5
3.3	Dinâmica do Robô . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Linearização do Modelo</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Controle Preditivo Generalizado (GPC)</b>	<b>8</b>
5.1	Restrições . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Simulação</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>9</b>

# 1 Introdução

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um sistema de controle preditivo generalizado (GPC) aplicado a um robô com tração diferencial. O controlador é projetado com base em um modelo preditivo do sistema, otimizando a atuação dos motores para minimizar o erro de rastreamento de trajetória em um plano bidimensional  $(x, y)$ .

## 2 Modelo Cinemático

O sistema modelado consiste em um robô com tração diferencial, que se movimenta em um plano bidimensional  $(x, y)$  e é controlado por dois motores de corrente contínua, conforme representado na Figura 1.

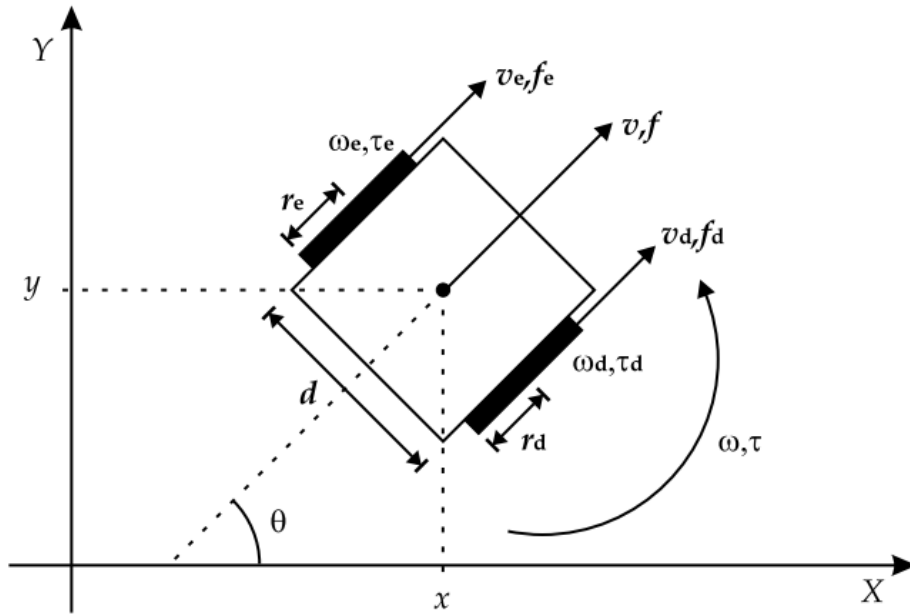


Figure 1: Modelo do robô com tração diferencial

A seguinte nomenclatura é utilizada:

- $v, \omega$ : velocidade linear e angular do robô;
- $\omega_d, \omega_e$ : velocidade angular das rodas;
- $v_d, v_e$ : velocidade linear das rodas;
- $r_d, r_e$ : raio das rodas;
- $d$ : distância entre as rodas;
- $(x, y), \theta$ : coordenadas e orientação do robô no plano;
- $f, \tau$ : força e torque aplicados sobre o robô;
- $f_d, f_e$ : forças aplicadas nas rodas;
- $\tau_d, \tau_e$ : torques aplicados nas rodas;

## 2.1 Relação entre Velocidades, Posição e Orientação

Em [2], o modelo cinemático é descrito por um sistema de equações que relaciona a velocidade linear e angular do robô com a velocidade angular das rodas. Para encontrar o modelo começamos definindo as velocidades tangenciais das rodas:

$$v_e = \omega_e r_e \quad v_d = \omega_d r_d \quad (1)$$

A partir da velocidade linear e angular do robô, podem-se relacionar as velocidades tangenciais das rodas:

$$v_e = v - \frac{d}{2}\omega \quad v_d = v + \frac{d}{2}\omega \quad (2)$$

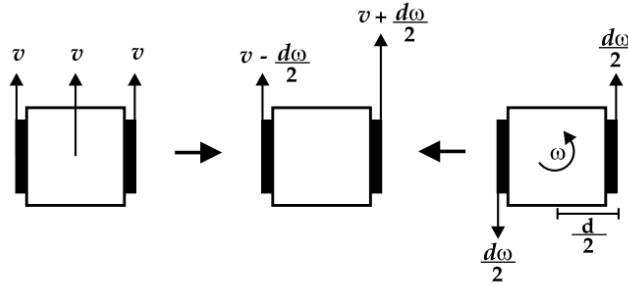


Figure 2: Composição do modelo cinemático

Ou, ao contrário, a partir das velocidades das rodas, podemos relacioná-las com a velocidade do robô:

$$v = \omega_d \frac{r_d}{2} + \omega_e \frac{r_e}{2} \quad \omega = \omega_d \frac{r_d}{d} - \omega_e \frac{r_e}{d} \quad (3)$$

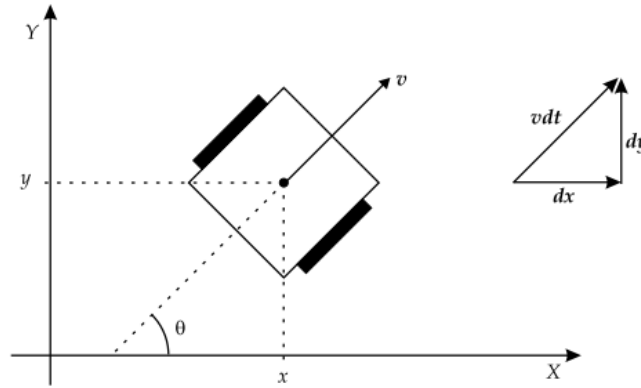


Figure 3: Coordenadas do robô no plano

Ao relacionar os movimentos cinemáticos a deslocamentos incrementais em um plano bidimensional, como na Figura 3, tem-se que a velocidade do robô pode ser expressa como:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos(\theta) \\ \dot{y} = v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (4)$$

### 3 Modelo Dinâmico

Para encontrar o modelo dinâmico resultante entre a tensão aplicada nos motores e as velocidades resultantes sobre o robô, precisamos considerar duas dinâmicas:

A relação entre a tensão aplicada nos motores e o torque resultante sobre as rodas, em conjunto com as resultantes que esses torques aplicados geram sobre o robô, considerando sua massa, momento de inércia e coeficientes de viscosidade.

#### 3.1 Dinâmica dos Atuadores

A dinâmica dos atuadores relaciona a tensão aplicada aos motores com o torque e a velocidade angular nas rodas, resultantes das características do circuito de armadura.

Conforme descrito em [1], as equações diferenciais que representam o circuito de armadura e o equilíbrio de torque em um motor CC são:

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri + K_\omega \omega \quad (5)$$

$$t_r = K_t i = J \frac{d\omega}{dt} + \beta \omega \quad (6)$$

A primeira equação descreve o comportamento elétrico do motor, em que a tensão aplicada  $u$  se divide entre a indutância  $L$  da armadura, a resistência  $R$ , e a força contraeletromotriz (CEMF)  $K_\omega \omega$  gerada pela rotação do eixo. Já a segunda equação representa o balanço de torques no rotor, onde o torque gerado  $K_t i$  é utilizado para vencer a inércia do motor  $J$  e as perdas por atrito viscoso  $\beta$ .

Relacionando as duas equações acima, podemos eliminar a corrente elétrica  $i$  e obter uma equação diferencial de segunda ordem que relaciona diretamente a tensão aplicada  $u$  à velocidade angular  $\omega$ :

$$LJ \frac{d^2\omega}{dt^2} + (L\beta + RJ) \frac{d\omega}{dt} + (R\beta + K_\omega K_t) \omega = K_t u \quad (7)$$

Considerando que  $L$  é desprezível, podemos simplificar a equação para:

$$RJ \frac{d\omega}{dt} + (R\beta + K_\omega K_t) \omega = K_t u \quad (8)$$

Que, finalmente, pode ser reescrita como:

$$t_r = \rho K_t u - \beta \omega - J \frac{d\omega}{dt} \quad (9)$$

Onde a nomenclatura utilizada é:

- $u, i$ : tensão aplicada e corrente no circuito de armadura;
- $L, R, \rho$ : indutância, resistência e o inverso da resistência do motor;
- $K_\omega, \omega$ : constante de velocidade angular e velocidade angular;
- $K_t, t_r$ : constante de torque e torque resultante;
- $J, \beta$ : momento de inércia e coeficiente de viscosidade do motor.

### 3.2 Relação de Esforços nos Referenciais

As forças aplicadas sobre as rodas devido ao torque aplicado nos motores, mostradas na Figura 2, resultam nas velocidades lineares e angulares do robô.

Em [2], essas forças são definidas como:

$$f_d = \frac{t_d}{r_d} \quad f_e = \frac{t_e}{r_e} \quad (10)$$

Assim, resultando nos esforços totais aplicados sobre a estrutura do robô:

$$f = f_d + f_e = \frac{t_d}{r_d} + \frac{t_e}{r_e} \quad t = t_d \frac{d}{2r_d} - t_e \frac{d}{2r_e} \quad (11)$$

Para encontrar esses esforços, precisamos utilizar a equação 9, que define a relação entre os torques aplicados nos motores e as tensões  $u_d$  e  $u_e$ .

Ao escrever a equação dos motores em forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} t_d \\ t_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_d K_{td} & 0 \\ 0 & \rho_e K_{te} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d \\ u_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_d & 0 \\ 0 & \beta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_d \\ \omega_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_d & 0 \\ 0 & J_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_d \\ \dot{\omega}_e \end{bmatrix} \quad (12)$$

Utilizando a equação 2, podemos reescrever a relação entre os torques aplicados, eliminando as velocidades angulares das rodas  $\omega_d$  e  $\omega_e$  e substituindo-as pelas velocidades lineares  $v$  e  $\omega$  do robô:

$$\begin{bmatrix} \omega_d \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_d} & \frac{d}{2r_d} \\ \frac{1}{r_e} & -\frac{d}{2r_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (13)$$

Resumindo, em forma matricial, a relação entre os torques aplicados sobre o robô e suas velocidades é dada por:

$$\mathbf{t} = \mathbf{K}_{mot} \mathbf{u} - \mathbf{B}_{mot} {}^\omega \mathbf{T}_v \mathbf{v} - \mathbf{J}_{mot} {}^\omega \mathbf{T}_\omega \dot{\omega} \quad (14)$$

Finalmente, ao aplicarmos a matriz de transformação  ${}^\omega \mathbf{T}_v^T$ , que projeta os torques das rodas nos eixos do referencial do robô, obtendo a equação que relaciona os esforços totais resultantes  $\mathbf{f}$  com os torques aplicados  $\mathbf{t}$ , encontrando a relação que define as velocidades do robô aos esforços aplicados sobre sua estrutura.

$$\mathbf{f} = {}^\omega \mathbf{T}_v^T \mathbf{t} \quad (15)$$

Onde:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_d \\ t_e \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_e \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f \\ t \end{bmatrix} \quad {}^\omega \mathbf{T}_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_d} & \frac{d}{2r_d} \\ \frac{1}{r_e} & -\frac{d}{2r_e} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{mot} = \begin{bmatrix} \rho_d K_{td} & 0 \\ 0 & \rho_e K_{te} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{mot} = \begin{bmatrix} \beta_d & 0 \\ 0 & \beta_e \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{mot} = \begin{bmatrix} J_d & 0 \\ 0 & J_e \end{bmatrix} \quad {}^\omega \mathbf{T}_v^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_d} & \frac{1}{r_e} \\ \frac{d}{2r_d} & -\frac{d}{2r_e} \end{bmatrix}$$

### 3.3 Dinâmica do Robô

Para encontrar a dinâmica do robô, consideramos as leis de Newton e Euler, relacionando a força e o torque aplicados sobre o robô com as acelerações linear e angular resultantes. Assim como em [2], temos:

$$f = m\dot{v} + \beta_l v \quad t = J\dot{\omega} + \beta_\theta \omega \quad (16)$$

Onde  $m$  é a massa do robô,  $J$  é o momento de inércia,  $\beta_l$  e  $\beta_\theta$  são os coeficientes de viscosidade linear e angular, respectivamente.

Substituindo as equações de esforço e torque definidas na equação 11, temos:

$$m\dot{v} + \beta_l v = \frac{t_d}{r_d} + \frac{t_e}{r_e} \quad J\dot{\omega} + \beta_\theta \omega = t_d \frac{d}{2r_d} - t_e \frac{d}{2r_e} \quad (17)$$

Ou em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_l & 0 \\ 0 & \beta_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2r_d} & \frac{1}{2r_e} \\ \frac{r_d}{2r_d} & -\frac{r_e}{2r_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_d \\ t_e \end{bmatrix} \quad (18)$$

Utilizando a equação 14, podemos reescrever a dinâmica do robô em termos da tensão aplicada nos motores:

$$\mathbf{M}_{robo} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}_{robo} \mathbf{v} = {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}}^T (\mathbf{K}_{mot} \mathbf{u} - \mathbf{B}_{mot} {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \mathbf{v} - \mathbf{J}_{mot} {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}}) \quad (19)$$

Deixando  $\mathbf{v}$  em função de  $\mathbf{u}$ , temos:

$$(\mathbf{M}_{robo} + {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{J}_{mot} {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}}) \dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{B}_{robo} + {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{B}_{mot} {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}}) \mathbf{v} = {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{K}_{mot} \mathbf{u} \quad (20)$$

Onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa e inércia do robô e  $\mathbf{B}$  é a matriz de viscosidade, representadas por:

$$\mathbf{M}_{robo} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{robo} = \begin{bmatrix} \beta_l & 0 \\ 0 & \beta_\theta \end{bmatrix}$$

Por fim, a dinâmica do robô pode ser expressa como:

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (21)$$

Onde:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{robo} + {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{J}_{mot} {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{robo} + {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{B}_{mot} {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}} \quad \mathbf{K} = {}^\omega \mathbf{T}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{K}_{mot}$$

O sistema apresenta um comportamento dinâmico linear de **primeira ordem**. Assumindo que  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes invertíveis e constantes, a equação pode ser reescrita em espaços de estados como:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{q}} = {}^v \mathbf{T}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \mathbf{v} \end{cases} \quad (22)$$

Onde  $\mathbf{q}$  é o vetor de estados do robô.

$${}^v \mathbf{T}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

## 4 Linearização do Modelo

A implementação de controle preditivo em hardware embarcado exige soluções computacionalmente menos custosas, devido ao baixo poder de processamento dos microcontroladores. Isso favorece a utilização de modelos lineares, dada a simplicidade na minimização de funções quadráticas.

Para reduzir o custo computacional do controle, utilizaremos a linearização por meio de séries de Taylor em torno de  $\omega_0$  e  $v_0$ .

Assumiremos que o centro do referencial está localizado no centro geométrico do robô, e que sua orientação permanece fixa em 0 graus em relação ao eixo  $x$ .

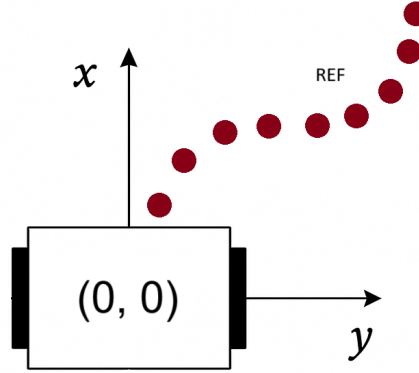


Figure 4: Referencial do robô

Utilizando a aproximação por séries de Taylor:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \left. \frac{\partial x}{\partial s} \right|_{v_0} \Delta v + \left. \frac{\partial x}{\partial \theta} \right|_{\omega_0} \Delta \theta \\ y &= y_0 + \left. \frac{\partial y}{\partial s} \right|_{v_0} \Delta v + \left. \frac{\partial y}{\partial \theta} \right|_{\omega_0} \Delta \theta \end{aligned}$$

Assim, o modelo cinemático definido na Equação 4 pode ser representado em  $(x, y)$  como:

$$\begin{cases} x \approx v_0 \cos(\omega_0) + \cos(\omega_0) \Delta v - v_0 \sin(\omega_0) \Delta \theta \\ y \approx v_0 \sin(\omega_0) + \sin(\omega_0) \Delta v + v_0 \cos(\omega_0) \Delta \theta \end{cases} \quad (23)$$

Considerando os valores numéricos com  $\omega_0 = 0$ , temos:

$$\begin{cases} \dot{x} \approx v \\ \dot{y} \approx v_0 \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \approx s \\ y \approx v_0 \theta \end{cases} \quad (24)$$

É possível observar que ao linearizar o modelo, acontece um desacoplamento entre as variáveis de estado, resultando em uma relação direta entre a velocidade linear  $v$  e a posição  $x$ , e entre a velocidade angular  $\omega$  e a posição  $y$ . Simplificando significativamente a relação entre a posição  $\mathbf{q}$  e as entradas de controle  $\mathbf{u}$ .

## 5 Controle Preditivo Generalizado (GPC)

O Controle Preditivo Generalizado (GPC) é uma técnica avançada de controle preditivo (MPC) que adota a função de transferência do sistema como modelo. No qual, nesse trabalho a função de transferência é proveniente da equação descrita em 21.

Nota-se que o sistema descrito possui um comportamento dinâmico linear de **primeira ordem**, onde é possível encontrar as matrizes que contêm as constantes de tempo e ganhos estáticos do sistema:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{M} \quad \mathbf{K}_u = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{K} \quad (25)$$

Permitindo que encontremos a função de transferência das variáveis de controle para cada uma das variáveis de saída do sistema. Que ao utilizarmos  $u_d$ ,  $u_e$ ,  $v$  e  $\omega$ , no domínio discreto, usando a transformada  $z$ , elas são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{dv}(z^{-1}) &= \frac{b_{dv}z^{-1}}{1 - a_dz^{-1}} & \mathbf{H}_{d\omega}(z^{-1}) &= \frac{b_{d\omega}z^{-1}}{1 - a_dz^{-1}} \\ \mathbf{H}_{ev}(z^{-1}) &= \frac{b_{ev}z^{-1}}{1 - a_ez^{-1}} & \mathbf{H}_{e\omega}(z^{-1}) &= \frac{b_{e\omega}z^{-1}}{1 - a_ez^{-1}} \end{aligned}$$

Onde os parâmetros  $b$  e  $a$  são obtidos a partir da discretização da constante de tempo e ganho estático extraídos das matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\boldsymbol{\tau}$ .

Integrando os valores das velocidades para obter as posições (sendo  $T$  o período de amostragem) e utilizando os incrementos de controle  $\Delta u$ , conforme a implementação típica do GPC, obtêm-se as funções de transferência discretas para cada variável de controle e saída do sistema  $\frac{Y(z)}{\Delta U(z)}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ds}(z^{-1}) &= \frac{b_{dv}z^{-1}}{1 - a_dz^{-1}} \frac{T}{(1 - z^{-1})^2} & \mathbf{H}_{d\theta}(z^{-1}) &= \frac{b_{d\theta}z^{-1}}{1 - a_dz^{-1}} \frac{T}{(1 - z^{-1})^2} \\ \mathbf{H}_{es}(z^{-1}) &= \frac{b_{ev}z^{-1}}{1 - a_ez^{-1}} \frac{T}{(1 - z^{-1})^2} & \mathbf{H}_{e\theta}(z^{-1}) &= \frac{b_{e\theta}z^{-1}}{1 - a_ez^{-1}} \frac{T}{(1 - z^{-1})^2} \end{aligned}$$

Por fim, a partir das funções de transferência do sistema, podemos definir o modelo que será utilizado no GPC. Nesse modelo, a matriz  $G$  representa a resposta ao degrau para cada variável de controle, enquanto  $F$  é a matriz de polinômios responsável pelo cálculo da resposta livre a partir de  $y[k]$ .

Assim podemos definir a predição futura como:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{y}[k] \quad (26)$$

Resultando na função de custo do GPC, em que  $\mathbf{w}$  representa o valor de referência, e  $\boldsymbol{\delta}$  e  $\boldsymbol{\lambda}$  são os pesos associados, respectivamente, à ação de controle e ao erro de predição.”

$$J_u = \boldsymbol{\delta}(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{w})^2 + \boldsymbol{\lambda}\Delta\mathbf{u}^2 \quad (27)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ds} & \mathbf{G}_{es} \\ \mathbf{G}_{d\theta} & \mathbf{G}_{e\theta} \end{bmatrix} \quad \Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_d \\ \Delta\mathbf{u}_e \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s(z^{-1}) \\ \mathbf{F}_\theta(z^{-1}) \end{bmatrix}$$



## **5.1 Restrições**

## **6 Simulação**

## **7 Conclusão**

citação [2]

## References

- [1] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 3rd edition, 1997.
- [2] F. C. Vieira. Controle dinâmico de robôs móveis com acionamento diferencial. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal–RN, Brasil, Feb. 2005. Disponível em PDF.