плотностью тепловых источников $F(x,t)$ в точке x в момент t^1). В результате действия этих источников на участке стержня $(x, x+dx)$ за промежуток времени $(t, t+dt)$ выделится количество тепла

$$dQ = SF(x,t)dxdt \tag{1}$$

или в интегральной форме

$$dQ = S\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,t)dxdt, \tag{2}$$

где Q - количество тепла, выделяющегося на участке стержня (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2).
Уравнение теплопроводимости получается при подсчете баланса тепла на конкретном отрезке (x_1, x_2) за некоторый промежуток времени (t_1, t_2). Применяя закон сохранения энергии и пользуясь формулами (5),(7) и (9), можно написать равенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[k\frac{du}{dx}(x,\tau)|_{x=x_2} - k\frac{du}{dx}(x,\tau)|_{x=x_1}\right]d\tau + \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} F(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho\left[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)\right]d\xi \tag{3}$$

которое и представляет уравнение теплопроводности в игтегральной форме. Чтобы получить уравнение теплопроводности в дифференциальной форме, предположим, что функция $u(x,t)$ имеет непрерывные производные u_{xx} и ${u_t}^2$).
Пользуясь теоремой о среднем, получаем равенство

$$\left[k\frac{du}{dx}(x,\tau)|_{x=x_2} - k\frac{du}{dx}(x,\tau)|_{x=x_1}\right]_{\tau=t_3}\Delta t + F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t =$$

$$= \left\{c\rho[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]\right\}_{\xi=x_3}\Delta x \tag{4}$$

которые при помощи теоремы о конечных приращениях можно преобразить к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\,(x,t)\right]_{\substack{x=x_5\\t=t_5}}\Delta t\Delta x + F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t =$$

$$= \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right]_{\substack{x=x_3 \\ t=t_3}} \Delta x \Delta t, \quad (5)$$

где t_3, t_4, t_5 и x_3, x_4, x_5 - промежуточные точки интервалов (t_1, t_2) и (x_1, x_2). Отсюда, после сокращения на произведение $\Delta x \Delta t$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x})|_{\substack{x=x_5 \\ t=t_5}} + F(x,t)|_{x=x_4 t=t_4} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}|_{\substack{t=t_5 \\ x=x_5}} \quad (6)$$

Все эти рассуждения относятся к произвольным промежуткам (x_1, x_2) и (t_1, t_2). Переходя к пределу при $x_1, x_2 \to x$ и $t_q, t_2 \to t$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + F(x,t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7)$$

называемое уравнением теплопроводности. Рассмотрим некоторые частные случаи. 1. Если стержень однороден, то κ, c, ρ можно считать постоянными, и уравнение обычно записывают в виде

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

$$a^2 = \frac{\kappa}{c\rho}, f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho},$$

где a^2 постоянная, называемая коэффицентом температуропроводности. Если источники отсутствуют, т.е. $F(x,t) = 0$, то уравнение теплопроводности принимает простой вид:

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (8)$$

2. Плотность тепловых источников может зависеть от температуры. В случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося закону Ньютона, количество тепла,теряемого стержнем [1]), рассчитаное на единицу длины и времени, равно

$$F_0 = h(u - \Theta),$$