

# Distribuição Kumaraswamy

## E suas Aplicações

Alisson Rosa João Inácio Vítor Pereira

### Resumo

Muitas vezes estamos interessados em modelar variáveis que estão definidas entre zero e um, como sabemos aonde nossa variável esta definida mas não sabemos qual dos valores será observado, temos portanto uma incerteza probabilística, que pode e deve ser modelada por medidas de probabilidade. Aqui portanto, introduziremos a distribuição Kumaraswamy para o ajuste dos dados de desflorestamento, que é uma das muitas possibilidades para modelagem desse tipo de variável, encontraremos estimativas para os parâmetros da distribuição usando estimadores de máxima verossimilhança para verificar a qualidade do modelo realizamos comparações com a Distribuição Beta e a Distribuição Normal.

## 1 Introdução

Atualmente muitos fenômenos podem ser descritos como variáveis aleatórias (va) definidas no intervalo unitário (0,1)<sup>1</sup>, assim é natural que pesquisadores desenvolvam distribuições de probabilidade que abarcam esse tipo de va. Uma dessas distribuições é a Kumaraswamy, que foi introduzida em Kumaraswamy (1980) como uma alternativa ao modelo beta para aplicações na área de hidrologia. Em virtude deste fato, grande parte dos trabalhos empíricos desta distribuição concentra-se nessa área Nadarajah (2008). O presente trabalho visa contribuir na expansão e utilização da Kumaraswamy, empregando modelos incondicionais para a taxa de desflorestamento em diversos municípios da Amazônia legal, disponibilizados [aqui](#) pelo projeto PRODES do INPE. Assim é possível mensurar a qualidade da Kumaraswamy para modelagem dos dados propostos, para isso estamos utilizando 6 métricas frequentistas estabelecidas: AIC, BIC, CAIC, Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises e Anderson-Darling, em contraste com a Distribuição Normal e a Distribuição Beta.

## 2 A distribuição Kumaraswamy

Vamos nessa seção introduzir quantidades básicas da distribuição Kumaraswamy, sendo elas sua função densidade de probabilidade (pdf), função de distribuição acumulada (cdf), função quantílica (qf), função de verossimilhança (ll) e esperança (E)

### 2.1 Quantidade Básicas

Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição Kumaraswamy, então sua cdf é dada por:

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - (1 - x^\alpha)^\beta, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

Onde  $\alpha, \beta > 0$ . Sua pdf então fica definida como:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{dF}{dx} = \alpha \beta x^{\alpha-1} (1 - x^\alpha)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1 \quad (2)$$

Sua qf, que é a função inversa da cdf, fica definida como:

---

<sup>1</sup>Onde parenteses indica limites do intervalo abertos.

$$Q(u; \alpha, \beta) = \left(1 - (1 - u)^{1/\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < u < 1 \quad (3)$$

É FÁCIL ver que a esperança da distribuição Kumaraswamy é dada por

$$E(X) = \frac{\beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma(\beta)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \beta\right)} \quad (4)$$

A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\alpha, \beta; x) = \prod_{i=1}^n f(x; \alpha, \beta) = \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} \prod_{i=1}^n (1 - x_i^{\alpha})^{\beta-1} \quad (5)$$

Para verificar as possibilidades de utilizações da Kumaraswamy em contextos práticos é necessário conhecimento de sua densidade, assim nas Figura 1 e Figura 2. As figuras referem-se a Estimativa da Densidade Kernel ou *Kernel Density Estimation* (KDE), método não-paramétrico para estimação da função densidade com suavização e a Densidade Teórica, utilizando a implementação da função densidade de probabilidade desenvolvida na classe `Kuma` do python dos próprios autores. Podemos observar a flexibilidade da Densidade da Kumaraswamy em 3 casos distintos: \* Caso 1:  $\alpha = 0.5$  e  $\beta = 0.5$ ; \* Caso 2:  $\alpha = 2$  e  $\beta = 5$ ; \* Caso 3:  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$ .

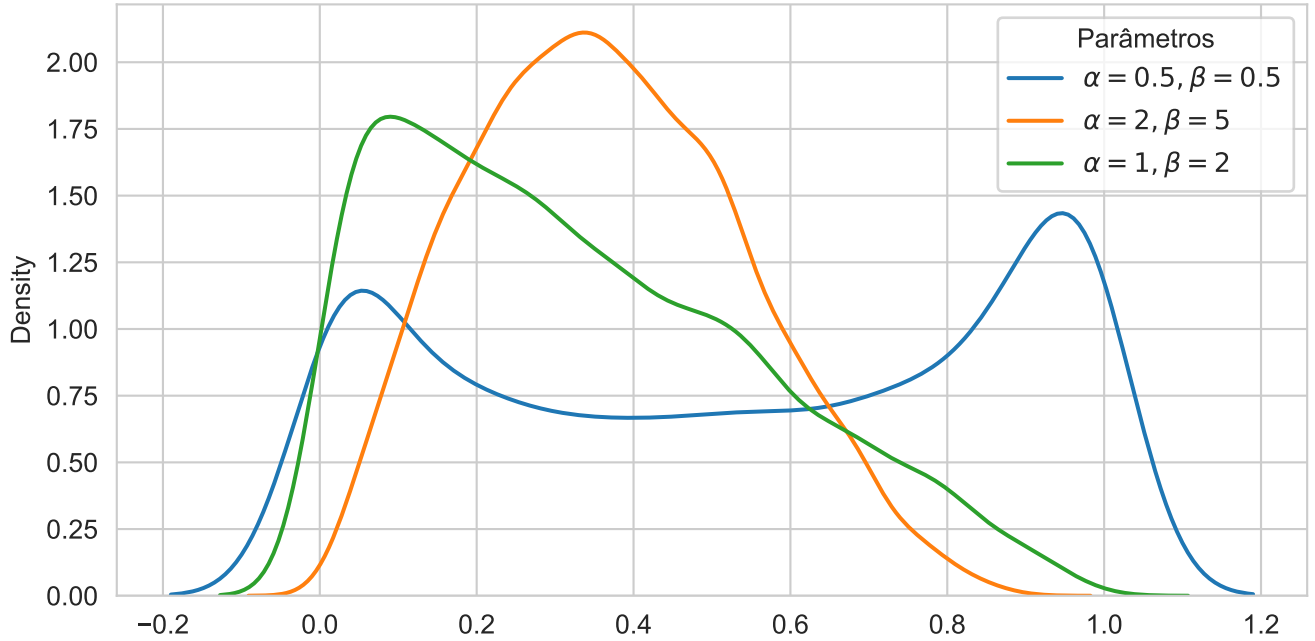


Figura 1: Função densidade por KDE da Kumaraswamy para alguns valores de parâmetros

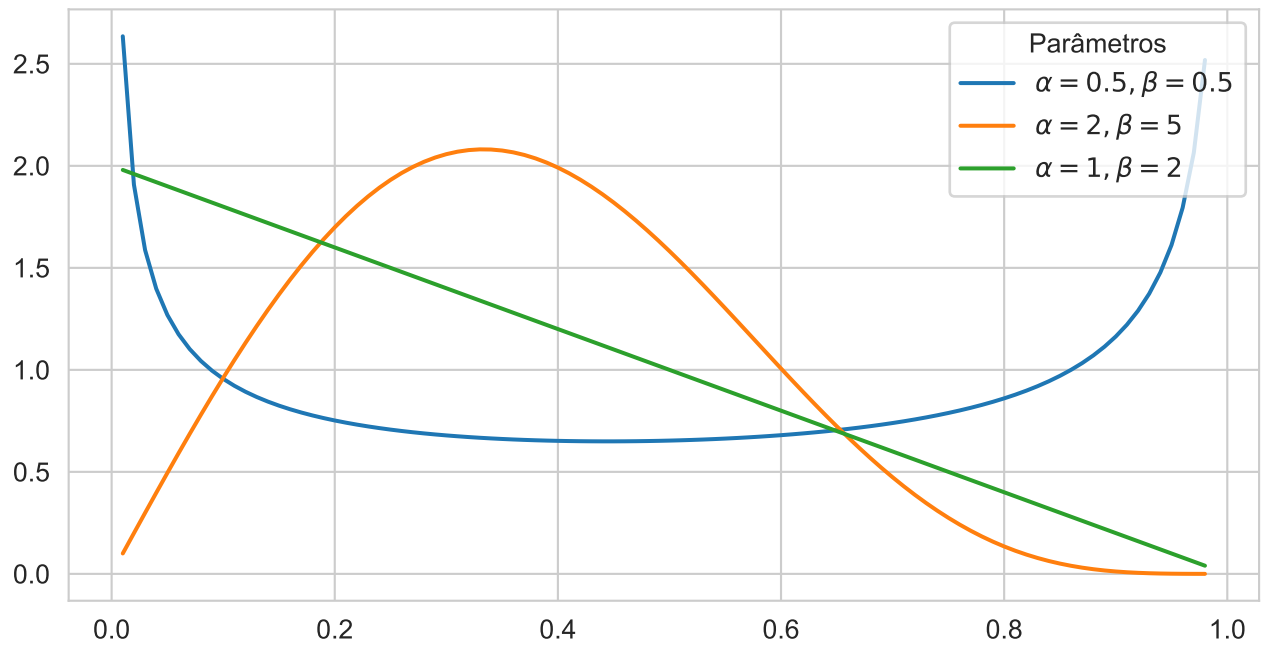


Figura 2: Função densidade da Kumaraswamy para alguns valores de parâmetros

A Figura 3 demonstra a curva da função acumulada para os casos supracitados.

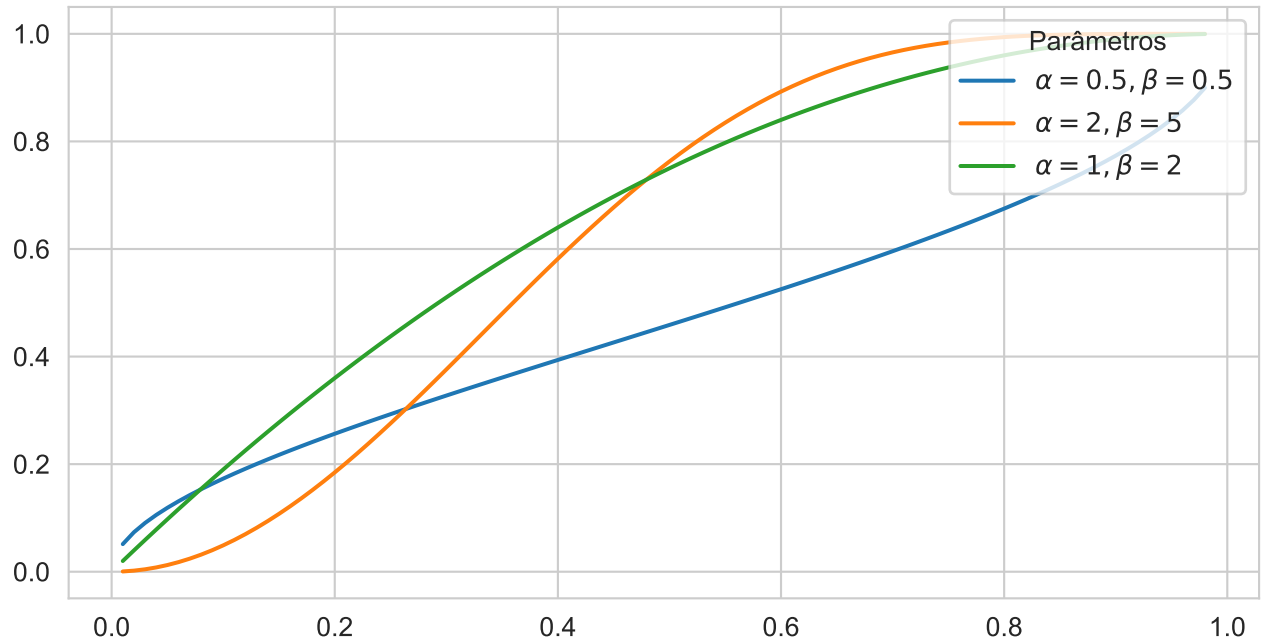


Figura 3: Função acumulada da Kumaraswamy para alguns valores de parâmetros

## 2.2 Justificativa

O artigo de Kumaraswamy (1980) propõe e demonstra aplicações da distribuição Kumaraswamy para variáveis aleatórias e processos aleatórios derivados de processos hidrológicos. O artigo foi publicado na *Journal of Hydrology*,

assim é perceptível que a distribuição foi concebida para se adequar a dados hidrológicos. Temos como casos de suas utilizações em precipitação diária, fluxo diário, reservatórios de água e análise das ondas do oceano, entre outras.

Para Nadarajah (2008) a utilização da Kumaraswamy para o campo da hidrologia, é consolidada. Sendo perceptível pelas inúmeras aplicações em diversos artigos como: Sundar e Subbiah (1989), Fletcher e Ponnambalam (2008) e Koutsoyiannis e Xanthopoulos (1989), além de se sobressair em relação a distribuição beta, a distribuição padrão para dados no  $(0,1)$ , de acordo com Koutsoyiannis e Xanthopoulos (1989). Em Dey, Mazucheli, e Nadarajah (2018) a Kumaraswamy é utilizada para a quantidade de deslocamento de líquido metálico em duas máquinas diferentes, sendo superior as Distribuições Gumbel e Fréchet.

É notório também a dissiminação recente do estudo da Kumaraswamy, em expansão para distribuições mais complexas, como em Lemonte, Barreto-Souza, e Cordeiro (2013), Mazucheli et al. (2020), Cribari-Neto e Santos (2019) e Sagrillo, Guerra, e Bayer (2021) ou em suas aplicações em regressão e séries temporais, visto em Pumi, Rauber, e Bayer (2020), Mitnik e Baek (2013), Fábio M. Bayer, Cribari-Neto, e Santos (2021) e Fábio Mariano Bayer, Bayer, e Pumi (2017).

Assim é factível a falta de ajustes da Distribuição Kumaraswamy em outras áreas de estudo, visto que a distribuição tem dissiminação acadêmica exponencial recentemente, com admiráveis contribuições da UFSM, em artigos supracitados. Decidimos contribuir para um maior estudo da distribuição em outra área ambiental, o desmatamento, pensando especificamente na Amazônia brasileira.

O estudo e modelos com bons ajustes de desmatamento e desflorestamento, impactam a vida no mundo todo, tanto humana quanto não humana. Bons modelos conseguem prever e informar quais variáveis mais impactam nos desmatamento, possibilitando verificar sua evolução conforme o tempo. Sendo útil para construção de políticas públicas, visando tomadas de decisão mais eficientes.

O desflorestamento é questão com importância ambiental, social, econômica e até política, pois a floresta amazônica tem seu papel no armazenamento de carbono, evitando o aquecimento global, na reciclagem de água e na manutenção da biodiversidade. Além de fornecerem uma grande variedade de produtos materiais e de sustento para as populações locais. Mesmo com áreas com grandes partes preservadas, há impacto na biodiversidade, pois a distribuição das espécies não é uniforme. Muitas espécies têm áreas de ocorrência restritas a partes que já foram reduzida a pequenos fragmentos.

### 3 Apresentação dos dados

Nesta seção são apresentados as análises descritivas para as variáveis em estudo, por meio de tabelas e gráficos de barras. Na Tabela 1 é possível visualizar a análise descritiva para a variável proporção de desmatamento (prop), contendo 760 observações. A média de desmatamento na região em estudo foi de 37.51% aproximadamente, com desvio padrão de 33.76% aproximadamente. Podemos notar, que neste banco de dados acabou ocorrendo valores mínimos de 0 e máximo superiores a 1. Como a Distribuição Kumaraswamy suporta valores no intervalo aberto  $(0,1)$ , adaptamos os dados para estarem dentro deste intervalo, valores iguais a 0 foram substituídos por 0.001, e valores iguais ou maiores que 1 foram substituídos por 0.999, assim mantendo a estrutura da distribuição.

Tabela 1: Análise descritiva para a proporção de desmatamento.

	prop
count	760
mean	0.375088
std	0.337627
min	0
25%	0.0268267
50%	0.317664
75%	0.683185
max	1.00408

Os estados da Amazônia Legal com maiores desmatamentos médios foram, principalmente, em Rondônia com 0.60% , Maranhão com 0.57% e PA com 0.48%. Na qual o estado de Rondônia apresenta 52 municípios, ocupando

a 6ª posição de quantidade de municípios. Maranhão apresenta a maior quantidade de municípios dentre os outros estados da Amazônia Legal, com 170 municípios. Podendo ser observado pelas Figura 4 e Figura 5.

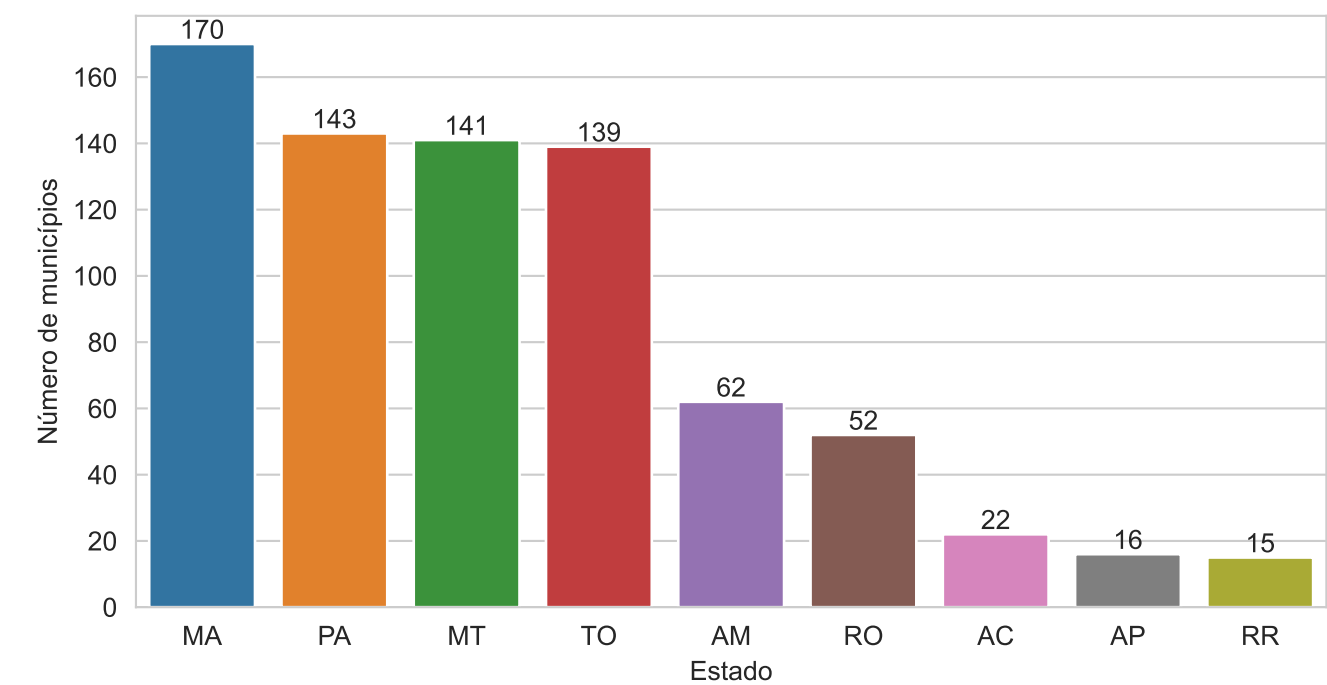


Figura 4: Número de municípios em cada estado da Amazônia Legal.

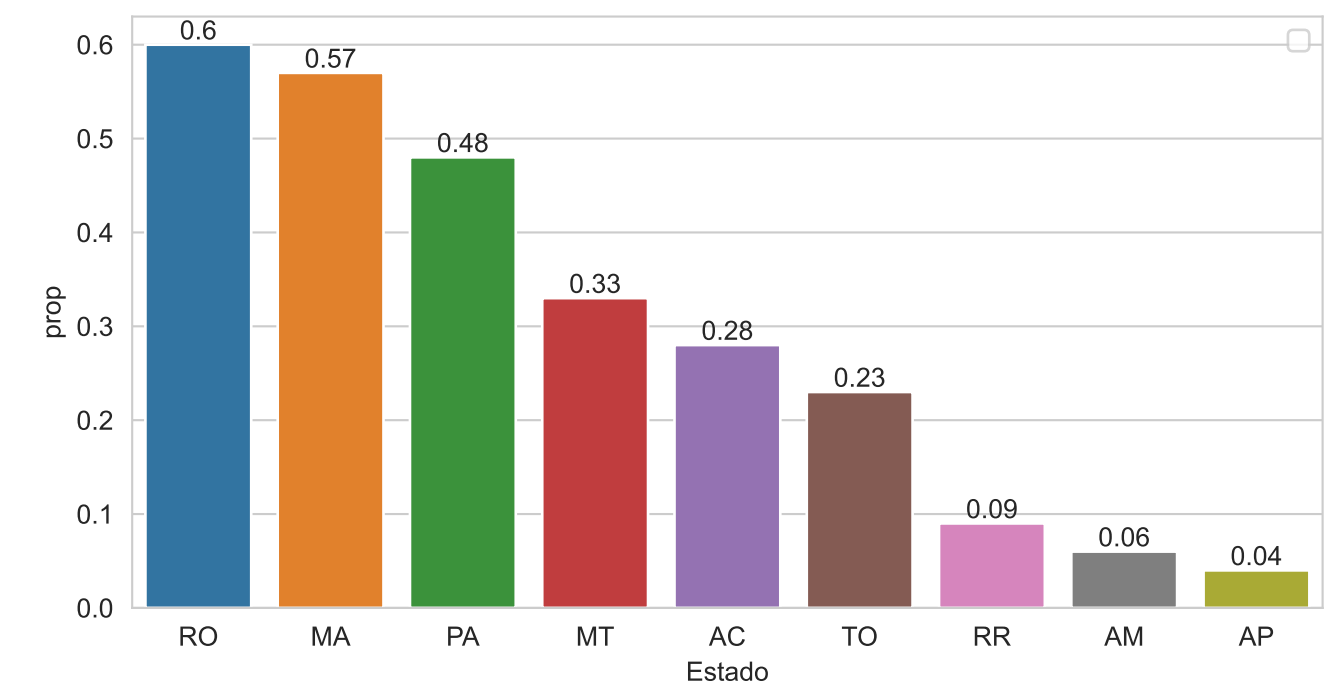


Figura 5: Proporção média de desmatamento dos Estados.

O estado de Maranhão detém o maior número de proporção de desmatamento dentre os estados da Amazônia Legal, contendo municípios com proporções máxima de desmatamento (100%), sendo as cidades de Lago dos Rodrigues, São Roberto, Igarepé Grande, Bom Lugar, Lago do Junco, Paulo Ramos, Altamira do Maranhão, Olho d'Água das Cunhãs, Brejo de Areia, Lago da Pedra, Presidente Médici. Estes dados podemos visualizar pelas Figura 6 e Figura 8. As taxas mínimas de desmatamento, vistas pela Figura 7, se aproximaram em praticamente todas as regiões. A região de Rondônia obteve a maior taxa dentre as proporções mínimas de desmatamento, com 0.06%, relativamente muito próximo de 0%, como visto em outros estados.

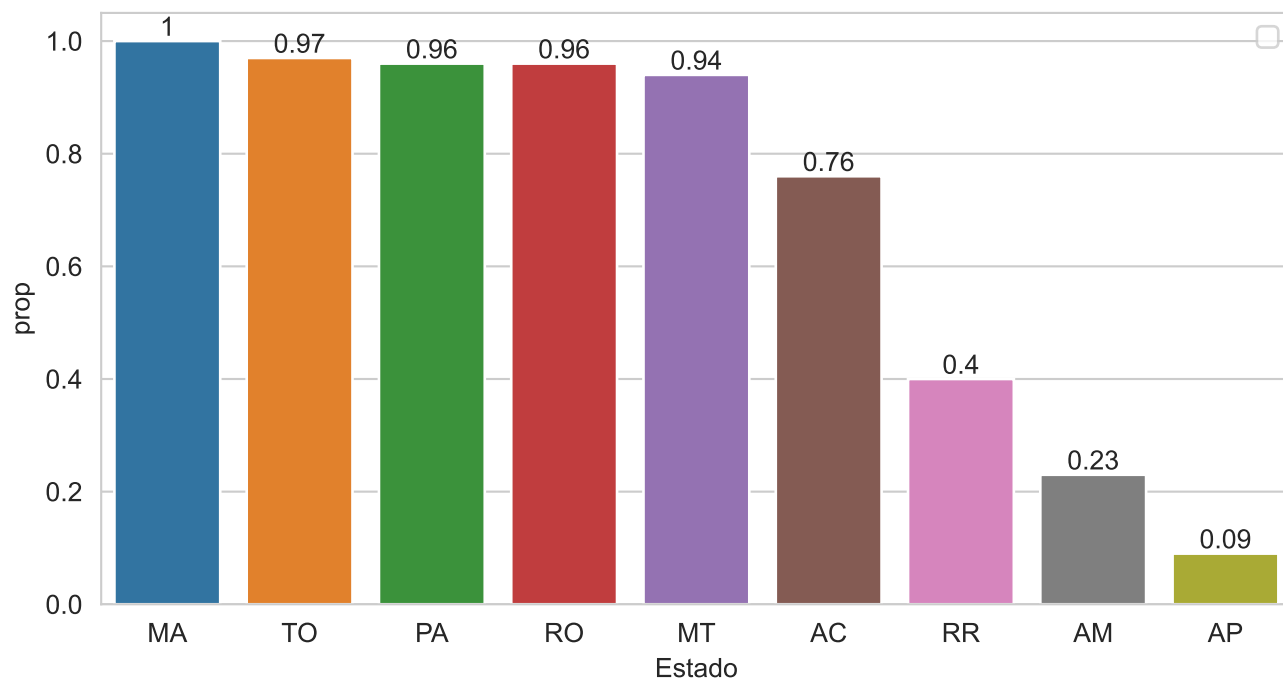


Figura 6: Proporção máxima de desflorestamento dos Estados.

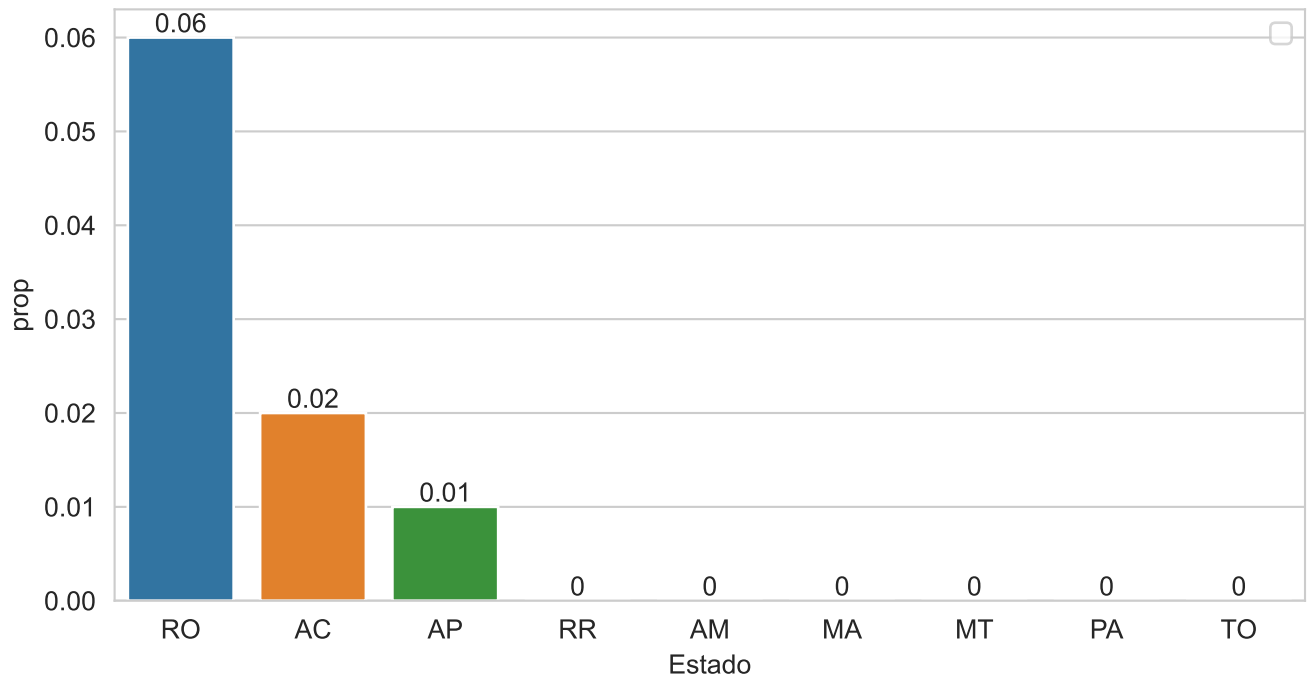


Figura 7: Proporção mínima de desmatamento dos Estados.

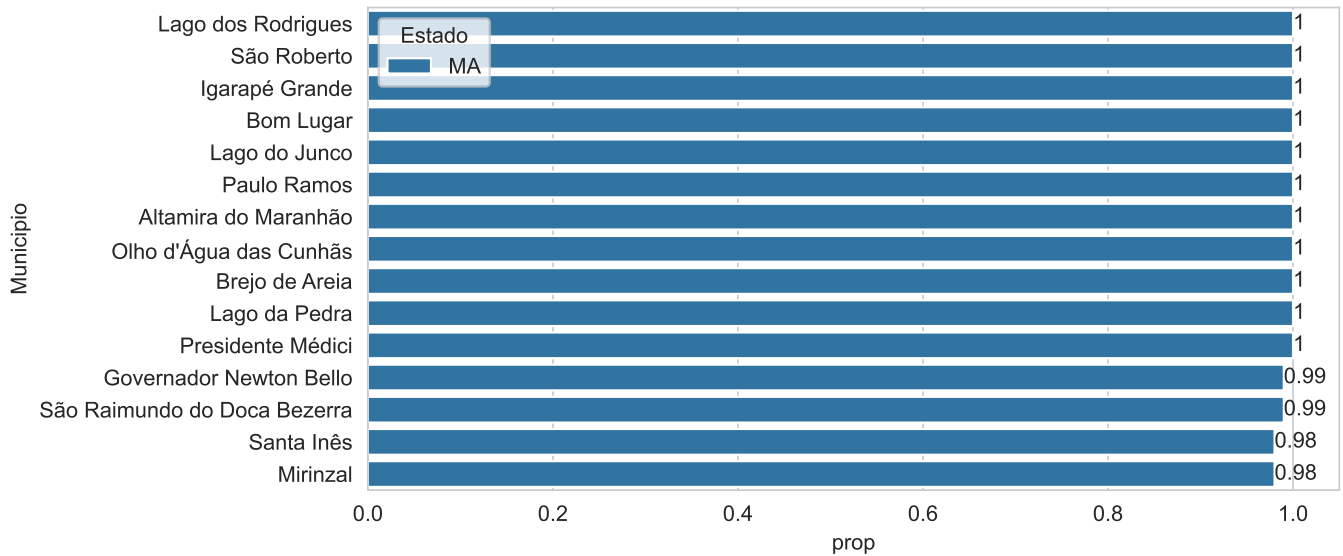


Figura 8: Cidades com maiores desflorestamento na Amazônia legal.

## 4 Ajuste Inicial

A construção e avaliação numérica dos Estimadores de Máxima Verossimilhança (EMV) foi realizado via implementação da log-verossimilhança negativa, assim a otimização computacional com a função `minimize` e o método Nelder-Mead, ambos da biblioteca `scipy` e assim, como toda a construção do presente trabalho foi desenvolvida em python.

Assim utilizamos como chute inicial  $\alpha = 0.5$  e  $\beta = 1$ , e como é possível observar nos ajustes de densidade das

Figura 9 e Figura 10, foi obtido um ajuste razoável, se ajustando de maneira coerente ao histograma, ficando os EMVs  $\hat{\alpha} = \text{python criterios['alpha']}$  e  $\hat{\beta} = \text{python criterios['beta']}$ .

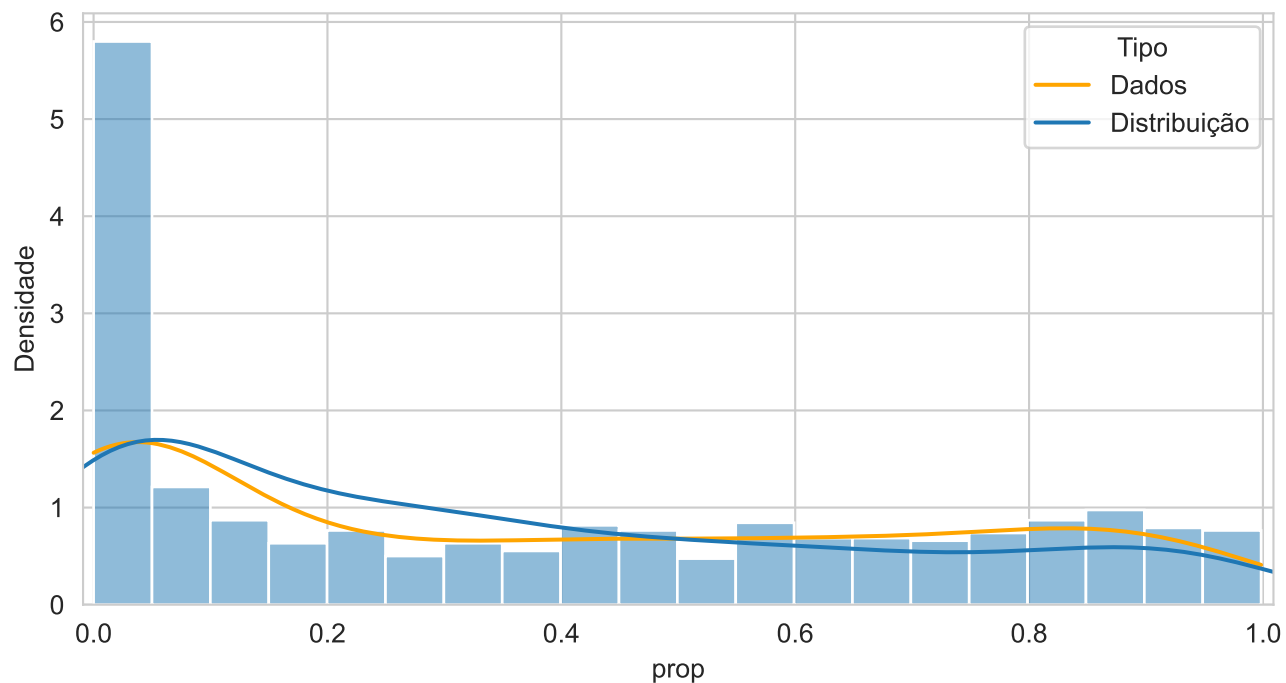


Figura 9: Densidade ajustada por KDE.

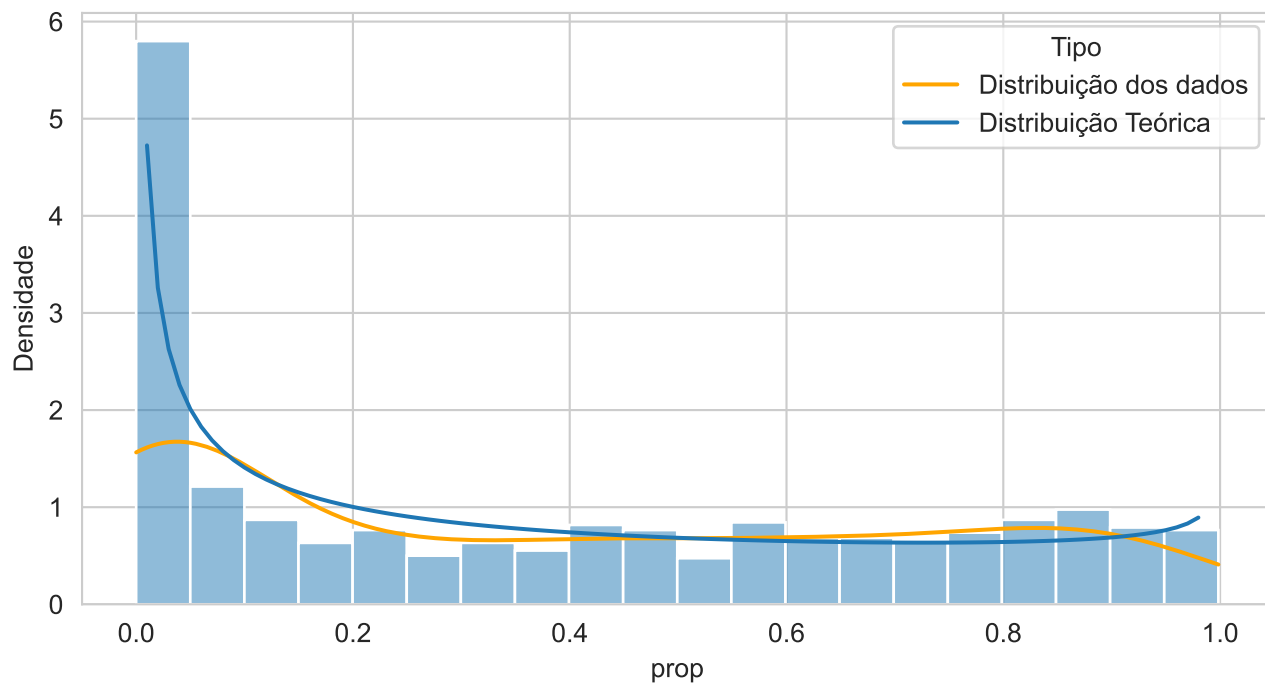


Figura 10: Ajuste da densidade teórica.



## 4.1 Medidas Básicas

# 5 Ajuste do Modelo

Para a verificação da adequação da distribuição Kumaraswamy para modelagem de dados de desmatamento iremos realizar a comparação com duas distribuições amplamente utilizadas: Distribuição Normal e a Distribuição beta, a distribuição mais utilizada para variáveis aleatórias com suporte no  $(0,1)$ .

A comparação foi construída utilizando 6 métricas: AIC, BIC, CAIC, Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises e Anderson-Darling, que se baseiam principalmente na verossimilhança. A verossimilhança a considera os parâmetros variáveis, assim a função de verossimilhança indica os parâmetros mais plausíveis de terem gerado a amostra. Logo, podemos verificar entre todas as distribuições quais possuem as maiores verossimilhanças, tendo assim os parâmetros mais plausíveis para a geração da amostra. No entanto, nota-se que todos os critérios contam outros elementos para a sua construção.

Tabela 2: Métricas para comparação da Distribuição Kumaraswamy em contraste à Distribuição Normal e Beta

	Kumaraswamy	Beta	Normal	Vencedor
AIC	-440.934	-443.086	-154637	Normal
BIC	-440.918	-433.82	-154628	Normal
CAIC	-431.667	-443.07	-154637	Normal
AD	18.1063	9.73665	767.893	Beta
CVM	9.69198	1.25157	64.3781	Beta
KS	0.0887461	0.0891663	0.537076	Kumaraswamy

É intrigante o exposto pela Tabela 2, onde podemos perceber que todas as distribuições ganham em alguma métrica, a Distribuição Normal se notabiliza por ter ganhado em todas as métricas que levam em consideração a verossimilhança diretamente. Enquanto as Distribuições Unitárias evidenciaram-se em métricas mais adequadas para Distribuições não encaixadas, assim é possível dizer que a Kumaraswamy é uma possível competidora para a Distribuição Beta em modelos incondicionais.

## 6 Conclusão

Neste trabalho analisamos em especial a Distribuição Kumaraswamy, junto com o banco de dados para a taxa de desflorestamento em diversos municípios da Amazônia Legal. De tal forma a ser comparada com outras duas distribuições, a Distribuição Beta e a Distribuição Normal.

A Distribuição Kumaraswamy é uma grande concorrente da Distribuição Beta, e por conta de possuir cdf de forma fechada, ao contrário da distribuição Beta, tem uma maior relevância na utilização em questões de simulação.

Desta forma, conseguimos perceber que a Distribuição Kumaraswamy demonstrou-se realmente uma grande concorrente da Distribuição Beta. Porém, a Distribuição Beta ainda conseguiu se sair melhor, ganhando em praticamente todas as métricas, quando as duas comparadas separadamente (descartando a Normal), apenas no teste de KS a Distribuição Kumaraswamy se saiu melhor. Portanto, a distribuição que melhor representou os dados de desflorestamento da Amazônia Legal foi a Distribuição Beta.

## 7 Referências

- Bayer, Fábio Mariano, Débora Missio Bayer, e Guilherme Pumi. 2017. "Kumaraswamy autoregressive moving average models for double bounded environmental data". *Journal of Hydrology* 555: 385–96.
- Bayer, Fábio M, Francisco Cribari-Neto, e Jéssica Santos. 2021. "Inflated Kumaraswamy regressions with application to water supply and sanitation in Brazil". *Statistica Neerlandica* 75 (4): 453–81.
- Cribari-Neto, Francisco, e Jessica Santos. 2019. "Inflated Kumaraswamy distributions". *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 91.

- Dey, Sanku, Josmar Mazucheli, e Saralees Nadarajah. 2018. "Kumaraswamy distribution: different methods of estimation". *Computational and Applied Mathematics* 37 (2): 2094–2111.
- Fletcher, SG, e K Ponnambalam. 2008. "Stochastic control of reservoir systems using indicator functions: new enhancements". *Water Resources Research* 44 (12).
- Ganji, A, K Ponnambalam, D Khalili, e M Karamouz. 2006. "Grain yield reliability analysis with crop water demand uncertainty". *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 20 (4): 259–77.
- Koutsoyiannis, Demetris, e Themistocle Xanthopoulos. 1989. "On the parametric approach to unit hydrograph identification". *Water resources management* 3 (2): 107–28.
- Kumaraswamy, Ponnambalam. 1980. "A generalized probability density function for double-bounded random processes". *Journal of hydrology* 46 (1-2): 79–88.
- Lemonte, Artur J, Wagner Barreto-Souza, e Gauss M Cordeiro. 2013. "The exponentiated Kumaraswamy distribution and its log-transform". *Brazilian Journal of Probability and Statistics* 27 (1): 31–53.
- Mazucheli, J, AFB Menezes, LB Fernandes, RP De Oliveira, e ME Ghitany. 2020. "The unit-Weibull distribution as an alternative to the Kumaraswamy distribution for the modeling of quantiles conditional on covariates". *Journal of Applied Statistics* 47 (6): 954–74.
- Mitnik, Pablo A. 2013. "New properties of the Kumaraswamy distribution". *Communications in Statistics-Theory and Methods* 42 (5): 741–55.
- Mitnik, Pablo A, e Sunyoung Baek. 2013. "The Kumaraswamy distribution: median-dispersion re-parameterizations for regression modeling and simulation-based estimation". *Statistical Papers* 54 (1): 177–92.
- Nadarajah, Saralees. 2008. "On the distribution of Kumaraswamy". *Journal of Hydrology* 348 (3): 568–69.
- Pumi, Guilherme, Cristine Rauber, e Fábio M Bayer. 2020. "Kumaraswamy regression model with Aranda-Ordaz link function". *Test* 29 (4): 1051–71.
- R Core Team. 2022. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. <https://www.R-project.org/>.
- Sagrillo, Murilo, Renata Rojas Guerra, e Fábio M Bayer. 2021. "Modified Kumaraswamy distributions for double bounded hydro-environmental data". *Journal of Hydrology* 603: 127021.
- Sundar, V, e K Subbiah. 1989. "Application of double bounded probability density function for analysis of ocean waves". *Ocean engineering* 16 (2): 193–200.