

Teoria dell'Informazione

Simone Alessandro Casciaro

29 Ottobre 2024

Lezione 9: Derivati dell'Entropia II

Proseguo Lezione Precedente

Nella [Lezione 8](#), abbiamo detto che se abbiamo tre variabili aleatorie X, Y, Z tali che X, Z sono indipendenti se condizionate a Y , allora

$$I(X, Y) \geq I(X, Z)$$

Tuttavia, ci chiediamo cosa succede nel caso in cui Z non sia indipendente da X .

Esempio

Supponiamo X e Y indipendenti, con $Z = X + Y$

$$X = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad Z = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) - H(X) = 0$ perché X e Y sono indipendenti

$$\begin{aligned}
I(X, Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y, Z) \\
&= H(X|Z) && \text{perché } X \text{ è dipendente da } Y, Z \\
&= \sum_{z \in \mathbb{Z}} p(Z = z) H(X|Z = z) \\
&= \mathbb{P}(Z = 0) H(X|Z = 0) + \mathbb{P}(Z = 1) H(X|Z = 1) + \mathbb{P}(Z = 2) H(X|Z = 2) \\
&= \mathbb{P}(Z = 1) H(X|Z = 1) \\
&= \frac{1}{2} * 1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(X, Z) &= H(X) - H(X|Z) \\
&= H(X) - I(X, Y|Z) \\
&= 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$I(X, Y) \not\geq I(X, Z)$$

Esercizio: Tema d'Esame 1 Aprile 2003

Si supponga di avere lo schema $\mathbb{S} - C - \mathbb{R}$ che identificano rispettivamente la Sorgente, il Canale e Ricevente.

$$\mathbb{S} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$\mathbb{P} = \{0.2, 0.3, 0.1, 0.4\}$$

Il canale viene rappresentato da una matrice stocastica

$$M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

dove $i = \{1, \dots, 4\}$ è l'indice delle righe di M e $j = \{1, \dots, 5\}$ è l'indice delle colonne.

Calcolare $H_2(R|S)$

$$H_2(R|S) = \sum_{i=1}^4 p(x_i) \sum_{j=1}^5 p(y_j|x_i) \log_2 \frac{1}{p(y_j|x_i)}$$

Ogni entrata della matrice M_{ij} rappresenta tutti i vari possibili $p(y_j|x_i)$, mentre i $p(x_i)$ sono dati dalla distribuzione di probabilità \mathbb{P}

Possiamo dunque sostituire tutti i valori.

$$\begin{aligned} H_2(R|S) &= 0.2 \left(0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.3 \log_2 \frac{1}{0.3} + 0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} \right) \\ &\quad + 0.3 \left(0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.5 \log_2 \frac{1}{0.5} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} \right) \\ &\quad + 0.1 \left(0.6 \log_2 \frac{1}{0.6} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} \right) \\ &\quad + 0.4 \left(0.3 \log_2 \frac{1}{0.3} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} \right) \\ &= \boxed{2.033} \end{aligned}$$

Trovare $H_2(S|R)$