Teoria dell'Informazione

Simone Alessandro Casciaro

15 Novembre 2024

Lezione 11: Esercizi sul Canale

In questa lezione, non sarà presente alcuna nozione teorica. Ci focalizzeremo sull'eseguire alcuni esercizi per calcolare la capacità del canale, come definito nella Lezione 10.

$$C = \begin{cases} \max\limits_{p(x)} I(X,Y) \\ \max\limits_{p(x)} H(X) - H(X|Y) \\ \max\limits_{p(x)} H(Y) - H(Y|X) \end{cases}$$

Esercizi

Esercizio 1

Sia $\mathbb{X} = \{0,1\}$ e $\mathbb{Y} = \{0,1,2,3\}$ e sia la matrice di canale

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{array}$$

Calcolare C

Dalla matrice $\mathbb{P}$, notiamo che una volta ricevuto il valore di Y, è possibile ricavare direttamente quello di X. Dunque, $H(X|Y) = 0$.

$$C = \max_{p(x)} H(X) - H(X|Y) = \max_{p(x)} H(X)$$

Dato che X è una variabile aleatoria bernoulliana $(\mathbb{X} = \{0,1\})$, l'entropia viene massimizzata quando $p = \frac{1}{2}$ e, in quel caso, $H(X) = 1$.
Dunque,

$$\boxed{C = 1}$$

Esercizio 2

Sia $\mathbb{X} = \{0, 1, 2\}$ e $\mathbb{Y} = \{0, 1, 2\}$ e sia la matrice di canale

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{array}$$

Calcolare C

Tramite la matrice di canale $\mathbb{P}$, ci accorgiamo che indipendentemente dal valore che assume X, abbiamo due possibili valori per Y, entrambi con probabilità $\frac{1}{2}$. Dunque,
$H(Y|X = i) = H(Y|X = j) \quad \forall i, j$
Calcoliamo, ad esempio, $H(Y|X = 0)$

$$H(Y|X = 0) = \sum_{y \in \mathbb{Y}} p(y|X = 0) \log \frac{1}{p(y|X = 0)} = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 + 0 = 1$$

Possiamo ora calcolare $H(Y|X)$

$$H(Y|X) = \sum_{x \in \mathbb{X}} p(x) * H(Y|X = x) = \sum_{x \in \mathbb{X}} p(x) * 1 = 1$$

$C = \max_{p(x)} H(Y) - H(Y|X) = \max_{p(x)} H(Y) - 1$
Massimizzare $H(Y) - 1$ è la stessa cosa di massimizzare $H(Y)$
Come nell'esercizio 1, l'entropia viene massimizzata quando Y assume una distribuzione uniforme. Tuttavia, non possiamo scegliere la distribuzione di probabilità di Y, ma solo quella di X. Proviamo, per intuito, a scegliere X con una distribuzione di probabilità uniforme e calcoliamo $p(y_j)$

$$
\begin{aligned}
p(y_j) &= \sum_{y \in \mathbb{Y}} p(x_i, y_j) \\
&= \sum_{y \in \mathbb{Y}} p(y_j|x_i)p(x_i) \\
&= \sum_{y \in \mathbb{Y}} p(y_j|x_i) * \frac{1}{3} = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Notiamo che $p(y_j)$ è un valore costante indipendente da j, dunque Y ha una distribuzione uniforme.

$$
H(Y) = \sum_{y \in \mathbb{Y}} p(y) \log \frac{1}{p(y)} = \sum_{y \in \mathbb{Y}} \frac{1}{3} \log 3 = 3 \left(\frac{1}{3} \log 3 \right) = \log 3
$$

Dunque,

$$
\boxed{C = \log 3 - 1}
$$

Esercizio 3

Sia $\mathbb{X} = \{0, 1\}$ e $\mathbb{Y} = \{0, 1\}$ e sia la matrice di canale

$$
\mathbb{P} = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 1-\alpha \end{array}
$$

Calcolare C

Cominciamo dal calcolare $H(Y|X)$

$$
\begin{aligned}
H(Y|X=0) &= \mathbb{P}(y=0|x=0) \log \frac{1}{\mathbb{P}(y=0|x=0)} + \mathbb{P}(y=1|x=0) \log \frac{1}{\mathbb{P}(y=1|x=0)} \\
&= (1-\alpha) \log \frac{1}{1-\alpha} + \alpha \log \frac{1}{\alpha} \\
&= H(B)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y|X=1) &= \mathbb{P}(y=0|x=1)\log\frac{1}{\mathbb{P}(y=0|x=1)} + \mathbb{P}(y=1|x=1)\log\frac{1}{\mathbb{P}(y=1|x=1)} \\
&= \alpha\log\frac{1}{\alpha} + (1-\alpha)\log\frac{1}{1-\alpha} \\
&= H(B)
\end{aligned}
$$

In entrambi i casi, otteniamo l'entropia di una variabile aleatoria bernoulliana B di parametro α.

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= \mathbb{P}(x=0)H(Y|X=0) + \mathbb{P}(x=1)H(Y|X=1) \\
&= p * H(B) + (1-p)H(B) \\
&= H(B) + (p+1-p) \\
&= H(B)
\end{aligned}
$$

Come nell'esercizio precedente, supponiamo di avere X uniforme e vediamo se otteniamo una distribuzione uniforme per Y

$$
\mathbb{P}(Y=0) = (1-\alpha)\mathbb{P}(X=0) + \alpha * \mathbb{P}(X=1) = (1-\alpha)\frac{1}{2} + \alpha * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
$$

$$
\mathbb{P}(Y=1) = \alpha * \mathbb{P}(X=0) + (1-\alpha) * \mathbb{P}(X=1) = \alpha * \frac{1}{2} + (1-\alpha)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}
$$

Dato che le due probabilità sono uguali indipendentemente da α, Y è uniforme e dunque, essendo una bernoulliana, ha entropia uguale a 1.
Ricapitolando, $C = \max_{p(x)} H(Y) - H(Y|X)$ e dunque

$$
\boxed{C = 1 - H(B)}
$$

Esercizio 4

Sia $\mathbb{X} = \{0,1\}$ e $\mathbb{Y} = \{0,1,e\}$ e sia la matrice di canale

$$
\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 1 & e \\
\hline
0 & 1-\alpha & 0 & \alpha \\
1 & 0 & 1-\alpha & \alpha
\end{array}
$$

Calcolare C

Calcolando $H(Y|X)$, ci accorgiamo che siamo nella stessa situazione dell'esercizio precedente.
Dunque $H(Y|X) = H(B)$ dove B è una variabile aleatoria bernoulliana di parametro α.
Consideriamo una nuova variabile aleatoria bernoulliana Z definita in questo modo:

$$Z = \begin{cases} 1 & Y = e \\ 0 & Y \neq e \end{cases}$$

Sfruttando la definizione di Entropia Congiunta, sappiamo che

$$\begin{cases} H(Y, Z) = H(Y) + H(Z|Y) \\ H(Y, Z) = H(Z) + H(Y|Z) \end{cases} \implies H(Y) = H(Z) + H(Y|Z) - H(Z|Y)$$

Z è dipendente da Y, dunque $H(Z|Y) = 0$
Vogliamo calcolare $H(Z)$, ma prima ci serve calcolare $\mathbb{P}(Z = 1)$ e $\mathbb{P}(Z = 1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}(Z = 1|X = 0)\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(Z = 1|X = 1)\mathbb{P}(X = 1) \\ &= \alpha p + \alpha(1 - p) \\ &= \alpha(p + 1 - p) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Di conseguenza, $\mathbb{P}(Z = 0) = 1 - \alpha$
Ora calcoliamo $H(Z)$

$$\begin{aligned} H(Z) &= \mathbb{P}(Z = 0) \log \frac{1}{\mathbb{P}(Z = 0)} + \mathbb{P}(Z = 1) \log \frac{1}{\mathbb{P}(Z = 1)} \\ &= \alpha \log \frac{1}{\alpha} + (1 - \alpha) \log \frac{1}{1 - \alpha} \\ &= H(B) \end{aligned}$$

Infine, calcoliamo $H(Y|Z)$

$$\begin{aligned} H(Y|Z) &= H(Y|Z = 0)\mathbb{P}(Z = 0) + H(Y|Z = 1)\mathbb{P}(Z = 1) \\ &= H(X) * (1 - \alpha) + 0 * \alpha \\ &= H(X) * (1 - \alpha) \end{aligned}$$

Quando $Z = 0$, Y si comporta esattamente come X, per questo $H(Y|Z = 0) = H(X)$

Mettendo insieme tutti i pezzi,

$$C = \max_{p(x)} H(B) + H(X) * (1 - \alpha) - H(B) = \max_{p(x)} H(X) * (1 - \alpha)$$

L'entropia massima per X, dato che è bernoulliana, è 1 quando $p = \frac{1}{2}$, dunque

$$\boxed{C = 1 - \alpha}$$