

# Teoria dell'Informazione

Simone Alessandro Casciaro

29 Ottobre 2024

## Lezione 9: Derivati dell'Entropia II

### Proseguo Lezione Precedente

Nella [Lezione 8](#), abbiamo detto che se abbiamo tre variabili aleatorie  $X, Y, Z$  tali che  $X, Z$  sono indipendenti se condizionate a  $Y$ , allora

$$I(X, Y) \geq I(X, Z)$$

Tuttavia, ci chiediamo cosa succede nel caso in cui  $Z$  non sia indipendente da  $X$ .

#### Esempio

Supponiamo  $X$  e  $Y$  indipendenti, con  $Z = X + Y$

$$X = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad Z = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) - H(X) = 0$  perché  $X$  e  $Y$  sono indipendenti

$$\begin{aligned}
I(X, Y|Z) &= H(X|Z) - H(X|Y, Z) \\
&= H(X|Z) && \text{perché } X \text{ è dipendente da } Y, Z \\
&= \sum_{z \in \mathbb{Z}} p(Z = z) H(X|Z = z) \\
&= \mathbb{P}(Z = 0)H(X|Z = 0) + \mathbb{P}(Z = 1)H(X|Z = 1) + \mathbb{P}(Z = 2)H(X|Z = 2) \\
&= \mathbb{P}(Z = 1)H(X|Z = 1) \\
&= \frac{1}{2} * 1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(X, Z) &= H(X) - H(X|Z) \\
&= H(X) - I(X, Y|Z) \\
&= 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$I(X, Y) \not\geq I(X, Z)$$

## Esercizio: Tema d'Esame 1 Aprile 2003

Si supponga di avere lo schema  $\mathbb{S} - C - \mathbb{R}$  che identificano rispettivamente la Sorgente, il Canale e Ricevente.

$$\mathbb{S} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$\mathbb{P} = \{0.2, 0.3, 0.1, 0.4\}$$

Il canale viene rappresentato da una matrice stocastica

$$M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

dove  $i = \{1, \dots, 4\}$  è l'indice delle righe di  $M$  e  $j = \{1, \dots, 5\}$  è l'indice delle colonne.

Calcolare  $H_2(R|S)$

$$H_2(R|S) = \sum_{i=1}^4 p(x_i) \sum_{j=1}^5 p(y_j|x_i) \log_2 \frac{1}{p(y_j|x_i)}$$

Ogni entrata della matrice  $M_{ij}$  rappresenta tutti i vari possibili  $p(y_j|x_i)$ , mentre i  $p(x_i)$  sono dati dalla distribuzione di probabilità  $\mathbb{P}$

Possiamo dunque sostituire tutti i valori.

$$\begin{aligned} H_2(R|S) &= 0.2 \left( 0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.3 \log_2 \frac{1}{0.3} + 0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} \right) \\ &+ 0.3 \left( 0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.5 \log_2 \frac{1}{0.5} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} \right) \\ &+ 0.1 \left( 0.6 \log_2 \frac{1}{0.6} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} \right) \\ &+ 0.4 \left( 0.3 \log_2 \frac{1}{0.3} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1} \right) \\ &= \boxed{2.033} \end{aligned}$$

Trovare  $H_2(S|R)$

Partiamo dalla definizione di  $H(S|R) = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 p(y_j)p(x_i|y_j) \log \frac{1}{p(x_i|y_j)}$

Sapendo che  $p(y_j)p(x_i|y_j) = p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j|x_i)$ , possiamo sostituire ottenendo

$$H(S|R) = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 p(x_i)p(y_j|x_i) \log \frac{p(y_j)}{p(x_i)p(y_j|x_i)}$$

Grazie alla definizione di probabilità marginale, sappiamo che  $p(y_j) = \sum_{i=1}^4 p(x_i, y_j) =$

$\sum_{i=1}^4 p(x_i)p(y_j|x_i)$  e quindi sostituiamo

$$H(S|R) = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 p(x_i)p(y_j|x_i) \log \left( \frac{\sum_{k=1}^4 p(x_k)p(y_j|x_k)}{p(x_i)p(y_j|x_i)} \right)$$

Implementiamo [questa formula](#) in Python

```
def H_SR(C: list[list[float]], P: list[float]) -> float:
    if len(C) != len(P):
        raise Exception('Lenght are not correct')
    entropy = 0
    for x in range(len(C)):
        for y in range(len(C[x])):
            p_y = sum([C[xx][y]*P[xx] for xx in range(len(C))])
            val = M[x][y]*P[x]
            entropy += p_xy*math.log(p_y/p_xy,2)
    return entropy
```

e il codice restituisce come valore  $H(S|R) = \boxed{1.627}$