Final Report of MAE 310

Name: 高银骏　UID: 12111320　Date: 2025.1.12

Question 1

Strong form:

$$
(S)\begin{cases}
Given\ f_i:\Omega \to R, g_i:\Gamma_{g_i} \to R, h_i:\Gamma_{h_i} \to R, find\ u_i:\bar{\Omega} \to R, such\ that \\
\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad in\ \Omega \\
u_i = g_i \qquad on\ \Gamma_{g_i} \\
\sigma_{ij} n_j = h_i \qquad on\ \Gamma_{h_i}
\end{cases}
$$

Weak form:

$$
(W)\begin{cases}
Trial\ Solution\ Space\ S_i := \{u_i : u_i \in H^1, u_i = g_i\ on\ \Gamma_{g_i}\} \\
Test\ Function\ Space\ V_i := \{w_i : w_i \in H^1, w_i = 0\ on\ \Gamma_{g_i}\} \\
Given\ f_i:\Omega \to R, g_i:\Gamma_{g_i} \to R, h_i:\Gamma_{h_i} \to R, find\ u_i \in S_i, such\ that\ for\ all\ w_i \in V_i \\
\int_\Omega w_{(i,j)} \sigma_{ij} d\Omega = \int_\Omega w_i f_i d\Omega + \sum_{i=1}^{nsd} (\int_{\Gamma_{h_i}} w_i h_i d\Gamma)
\end{cases}
$$

Galerkin form:

$$
(G)\begin{cases}
Given\ f:\Omega \to R, g:\Gamma_g \to R, h:\Gamma_h \to R, find\ \overrightarrow{u^h} = \overrightarrow{v^h} + \overrightarrow{g^h} \in S^h, such\ that\ for\ all\ w^h \in V \\
a\left(\overrightarrow{w^h}, \overrightarrow{v^h}\right) = \left(\overrightarrow{w^h}, \vec{f}\right) + \left(\overrightarrow{w^h}, \vec{h}\right)_\Gamma - a\left(\overrightarrow{w^h}, \overrightarrow{g^h}\right) \\
with\ a(\vec{w}, \vec{u}) = \int_\Omega w_{(i,j)} c_{ijkl} u_{(k,l)} d\Omega \\
\left(\vec{w}, \vec{f}\right) = \int_\Omega w_i f_i d\Omega \\
\left(\vec{w}, \vec{h}\right)_\Gamma = \sum_{i=1}^{nsd} (\int_{\Gamma_{h_i}} w_i h_i d\Gamma)
\end{cases}
$$

Boundary conditions:

对于无限长的板，我们以中心位置为坐标原点建立 o-xy 坐标轴，分析第一象限的情况。分别命名有右边 Line 1，上边 Line 2，左边 Line 3，下边 Line 4。如图 1、2 所示。

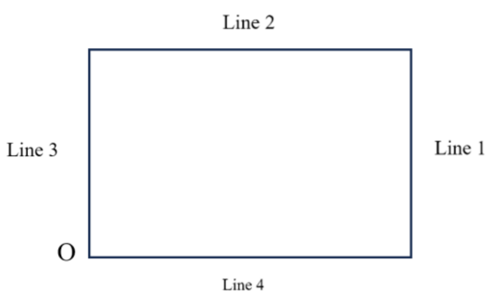


图 1 无限长板的几何分析

欲分析位移，考虑空间维数为 2（ $n_{sd}=2$ ），问题自由度为 2（ i = 1 ， 2 ），设自由度 1 为 x 方向，自由度 2 为 y 方向。

由于板的第一象限与其余象限关于 x 坐标轴和 y 坐标轴的对称性，位于 Line 3 的点的 x 方向不应该有位移，且 x 方向位移的一阶导也为零；位于 Line 4 的点的 y 方向不应该有位移，并且 y 方向位移的一阶导也为零。

设位移为 u，则由上文对称性的分析可得到部分边界条件，即

$$u_x(x=0)=0$$
$$u_y(y=0)=0$$
$$u_x{'}_x(x=0)=0$$
$$u_y{'}_y(y=0)=0$$

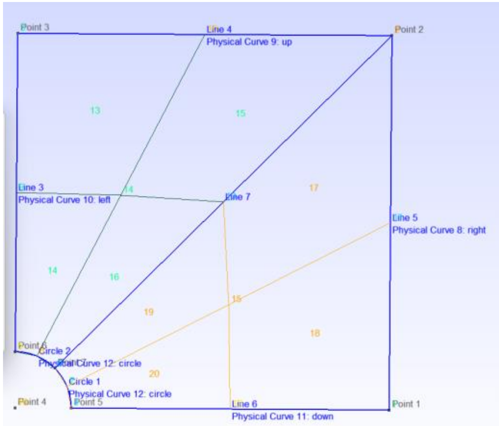


图 2 Mesh1 图例，Line11 是底边，Line10 是左边

Question 2

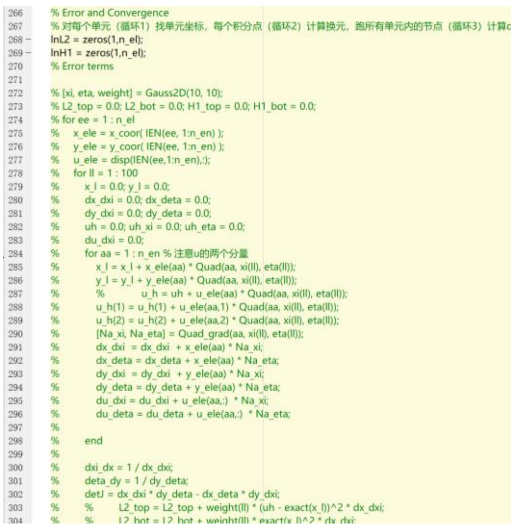
Implementation 2. 对于每一个节点的 B 梯度矩阵(Ba 和 Bb)，都应该是 3*2 的维数。则

$$K_{ab}^{e} \cong \sum_{l=1}^{n_{int}} (B_a^T \widetilde{D} B_b)_l$$

先在高斯积分点计算括号项，再组装。循环顺序：L 循环从 1 到 nint；再 b 循环从 1 到 nen，期间处理两个自由度；最后是 a 循环从 1 到 b，处理两个自由度。

Question 3

误差分析代码如见 DriverWithoutHoles.m 第 266 行至 324 行，仅完成部分代码，未能成功运行。如图 3、图 4 所示。图 3 是误差的代码，图四是人工构造的解。



```
266     % Error and Convergence
267     % 对每个单元（循环1）找单元坐标，每个积分点（循环2）计算换元，跑所有单元内的节点（循环3）计算c
268 -   InL2 = zeros(1,n_el);
269 -   InH1 = zeros(1,n_el);
270     % Error terms
271
272     % [xi, eta, weight] = Gauss2D(10, 10);
273     % L2_top = 0.0; L2_bot = 0.0; H1_top = 0.0; H1_bot = 0.0;
274     % for ee = 1 : n_el
275     %     x_ele = x_coor( IEN(ee, 1:n_en) );
276     %     y_ele = y_coor( IEN(ee, 1:n_en) );
277     %     u_ele = disp(IEN(ee,1:n_en),:);
278     %     for ll = 1 : 100
279     %         x_l = 0.0; y_l = 0.0;
280     %         dx_dxi = 0.0; dx_deta = 0.0;
281     %         dy_dxi = 0.0; dy_deta = 0.0;
282     %         uh = 0.0; uh_xi = 0.0; uh_eta = 0.0;
283     %         du_dxi = 0.0;
284     %         for aa = 1 : n_en % 注意u的两个分量
285     %             x_l = x_l + x_ele(aa) * Quad(aa, xi(ll), eta(ll));
286     %             y_l = y_l + y_ele(aa) * Quad(aa, xi(ll), eta(ll));
287     %             %            u_h = uh + u_ele(aa) * Quad(aa, xi(ll), eta(ll));
288     %             u_h(1) = u_h(1) + u_ele(aa,1) * Quad(aa, xi(ll), eta(ll));
289     %             u_h(2) = u_h(2) + u_ele(aa,2) * Quad(aa, xi(ll), eta(ll));
290     %             [Na_xi, Na_eta] = Quad_grad(aa, xi(ll), eta(ll));
291     %             dx_dxi  = dx_dxi  + x_ele(aa) * Na_xi;
292     %             dx_deta = dx_deta + x_ele(aa) * Na_eta;
293     %             dy_dxi  = dy_dxi  + y_ele(aa) * Na_xi;
294     %             dy_deta = dy_deta + y_ele(aa) * Na_eta;
295     %             du_dxi = du_dxi + u_ele(aa,:)  * Na_xi;
296     %             du_deta = du_deta + u_ele(aa,:)  * Na_eta;
297     %
298     %         end
299     %
300     %         dxi_dx = 1 / dx_dxi;
301     %         deta_dy = 1 / dy_deta;
302     %         detJ = dx_dxi * dy_deta - dx_deta * dy_dxi;
303     %         %        L2_top = L2_top + weight(ll) * (uh - exact(x_l))^2 * dx_dxi;
304     %         %        L2_bot = L2_bot + weight(ll) * exact(x_l)^2 * dx_dxi;
```

图 3 误差计算代码

```
exact = @(x,y) x*(1-x)*y*(1-y);
exact_x = @(x,y) (1-2*x)*y*(1-y);
exact_y = @(x,y) x*(1-x)*(1-2*y);
% 求导
exact_xx = @(x,y) (-2)*y*(1-y);
exact_yy = @(x,y) (-2)*x*(1-x);
exact_xy = @(x,y) (1-2*x)*(1-2*y); %混合导
% 应变 → 应力 → source term， 第一个箭头需要D矩阵，第二个箭头意思是(exact_xx+exact_yy)*D = -f
fx = @(x,y)  ( E / ( 1 - Poisson ^ 2))*(    2.0*x*(1-x) + 2.0*y*(1-y)*Poisson    ); % source term
fy = @(x,y)  ( E / ( 1 - Poisson ^ 2))*(    2.0*x*(1-x)*Poisson  + 2.0*y*(1-y)   ); % source term
```

图 4 人工构造的解

Code Development

1.   Gmsh 和相关说明

文件结构如图 5 所示。

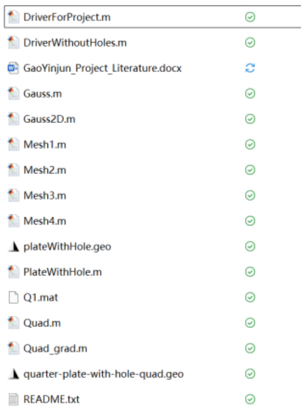


图 5 文件结构

对同一模型，导出四种不同网格细分度的.m 文件。

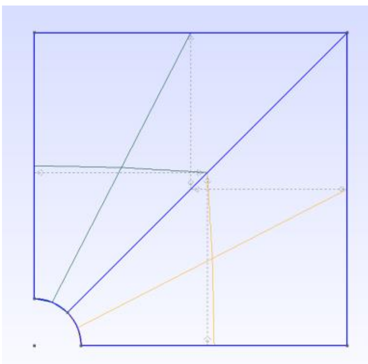


图 6 网格 1

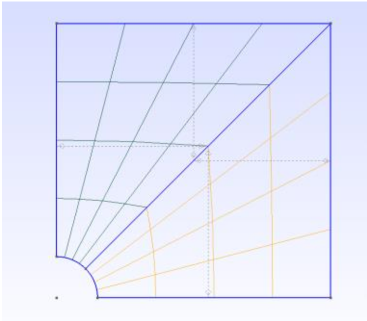


图 7 网格 2

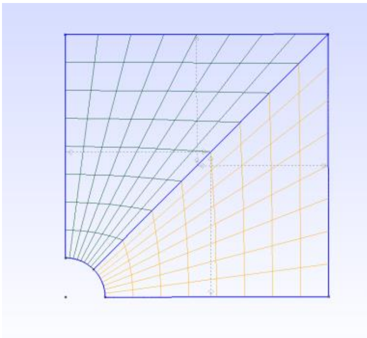


图 8 网格 3

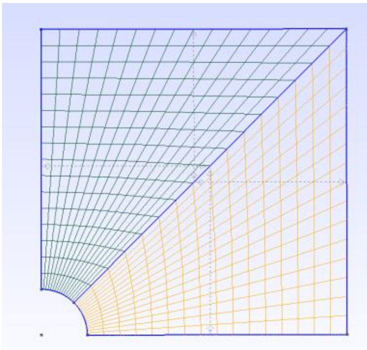


图 9 网格 4

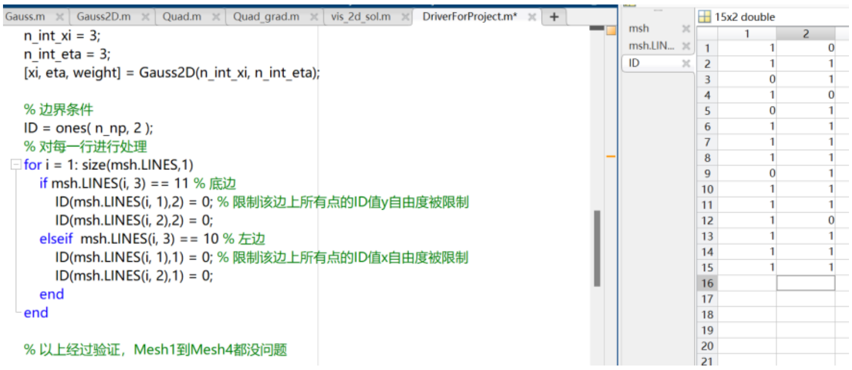
对矩形建立命名选择，分为六个命名，以便给 ID 矩阵赋值。其中有五个曲线：右边（right）、上边（up）、左边（left）、下边（down）、圆边（circle）；以及一个虚线包裹的面（surfaceDashLine）。

```
// EOF
//+
Physical Curve("right", 8) = {5};
//+
Physical Curve("up", 9) = {4};
//+
Physical Curve("left", 10) = {3};
//+
Physical Curve("down", 11) = {6};
//+
Physical Curve("circle", 12) = {1, 2};
//+
Physical Surface("surfaceDashLine", 13) = {2, 1};
```

图 10 给几何形状建立命名选择

2． 边界条件

如图 11 所示



```
n_int_xi = 3;
n_int_eta = 3;
[xi, eta, weight] = Gauss2D(n_int_xi, n_int_eta);

% 边界条件
ID = ones( n_np, 2 );
% 对每一行进行处理
for i = 1: size(msh.LINES,1)
    if msh.LINES(i, 3) == 11 % 底边
        ID(msh.LINES(i, 1),2) = 0; % 限制该边上所有点的ID值y自由度被限制
        ID(msh.LINES(i, 2),2) = 0;
    elseif  msh.LINES(i, 3) == 10 % 左边
        ID(msh.LINES(i, 1),1) = 0; % 限制该边上所有点的ID值x自由度被限制
        ID(msh.LINES(i, 2),1) = 0;
    end
end

% 以上经过验证，Mesh1到Mesh4都没问题
```

15x2 double

	1	2
1	1	0
2	1	1
3	0	1
4	1	0
5	0	1
6	1	1
7	1	1
8	1	1
9	0	1
10	1	1
11	1	1
12	1	0
13	1	1
14	1	1
15	1	1

图 11 对称性边界条件

选择边界条件思路：用户可选择为四条边赋予狄利克雷边界条件或纽曼边界条件，每条边应考虑自由度 1 和自由度 2 的具体情况。在 Matlab 中，呈现了不同的、已被注释掉的代码块，我用不同的代码块表征不同的边界条件以供用户选择。代码块 1——右边、代码块 2——上边、代码块 3——左边、代码块 4——下边。在每个代码块，我们可以为其赋予边界条件。若是狄利克雷边界条件，则限制自由度，并且在该自由度的 ID array 中设置为 0。若是纽曼边界条件，则设置一阶导为 g，g 默认是 0.

3. 平面应力和平面应变选取

```
16 -  lamda = ( Poisson * E ) / ( (1 + Poisson ) * ( 1 - 2 * Poisson ) );             % 拉梅系数
17 -  D = ( E / ( 1 - Poisson ^ 2))* [ 1, Poisson, 0; Poisson, 1, 0; 0, 0, (1 - Poisson) /2]; % 平面应力
18    % D = [ lamda + 2 * u, lamda, 0; lamda, lamda+2*u, 0; 0, 0, u];                 % 平面应变
19 -  exact = @(x,y) x*(1-x)*y*(1-y);
20 -  exact_x = @(x,y) (1-2*x)*y*(1-y);
21 -  exact_y = @(x,y) x*(1-x)*(1-2*y);
```

图 12 应力和应变的选取

在 DriverWithoutHoles.m 第 17、18 行和 DriverForProject.m 第 18、19 行有对应力、应变模型的选取代码。当前选用平面应力模型。如图 12 所示。

4. 物理参数场

在不额外指定的情况下，取四条边为纽曼边界条件，x 自由度 g1=0.03，y 自由度 g2=-0.03，则得到图 13 的结果。

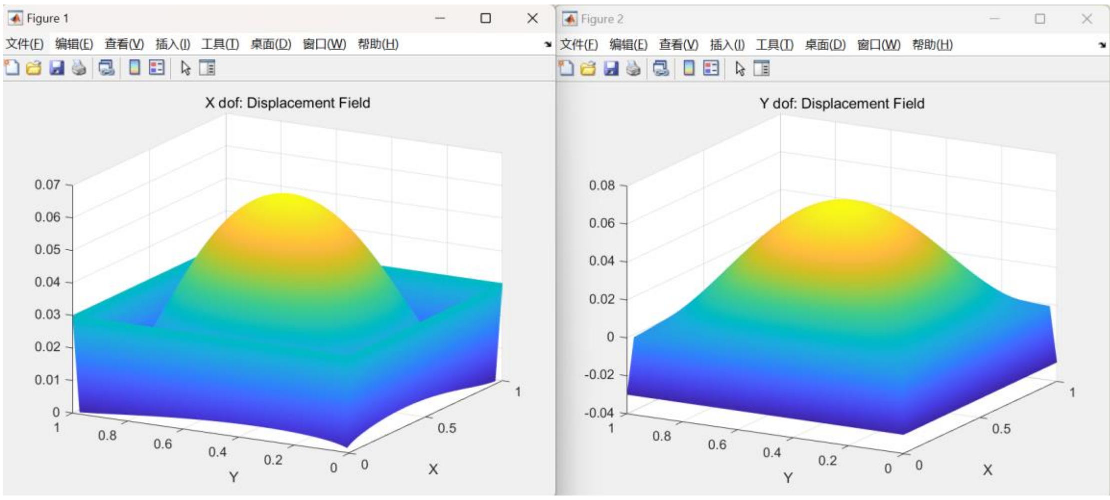


图 13 取四边皆为纽曼边界条件的不同自由度分别的变形（无孔的板）

计算结果因不同的 source term 而不同。

5. 误差分析

代码未能完全实现 L2 和 H1 范数下的误差和收敛分析。

6. 带孔板模型

对于 source term，

理论解

$$\sigma_{rr}(r,\theta)=\frac{T_x}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{T_x}{2}\left(1-4\frac{R^2}{r^2}+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos(2\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)=\frac{T_x}{2}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)-\frac{T_x}{2}\left(1+3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos(2\theta)$$

$$\sigma_{r\theta}(r,\theta)=-\frac{T_x}{2}\left(1+2\frac{R^2}{r^2}-3\frac{R^4}{r^4}\right)\sin(2\theta)$$

在孔的圆周，半径$r=R=0.5m$，则有圆周上有应力值如下

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)=\sigma_{\theta\theta}(R,\theta)=\frac{T_x}{2}\left(1+\frac{R^2}{R^2}\right)-\frac{T_x}{2}\left(1+3\frac{R^4}{R^4}\right)cos2\theta=T_x(1-2cos2\theta)$$

当 $\theta=30^\circ$ ，应力$\sigma_{\theta\theta}=0$。

$$\sigma_{\theta\theta}\left(R,\frac{\pi}{6}\right)=T_x(1-1)=0$$

当 $\theta=90^\circ$ ，应力$\sigma_{\theta\theta}=$最大值。

$$\sigma_{\theta\theta}\left(R,\frac{\pi}{2}\right)=T_x(1+2)=3T_x$$