西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第8章　假设检验

概率论与数理统计课程组

CHAPTER 8

假设检验

CHAPTER 8

假设检验

8.1 假设检验的基本思想与基本概念

问题的提出

统计推断的另一类重要问题是假设检验，实际中往往是总体分布函数完全未知或是只知其形式、但不知其中某些参数

因此，为了推断总体的未知特性，提出某些关于总体的假设，假设检验就是根据样本对所提假设作出**接受还是拒绝的决策**的过程：在样本的基础上得到一个对总体参数判断有较大把握的结论

引例

某车间用一台包装机包装食盐，食盐的净重是一随机变量，服从正态分布，其均值为0.5 kg，标准差为0.015 kg。某日开工后为检验包装机是否正常，随机抽取9袋，称得净重(kg)为：0.497, 0.506, 0.518, 0.524, 0.498, 0.511, 0.520, 0.515, 0.512
问该包装机是否正常？

分析

以 μ，σ 分别表示一天袋装食盐的净重总体X的均值和标准差。

由于长期实践表明标准差比较稳定，我们设σ=0.015，于是$X\sim N(\mu,\sigma^2)=N(\mu,0.015^2)$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)=N(\mu,0.015^2)$　这里μ未知

机器正常则 $\mu=0.5$，不正常则 $\mu\neq 0.5$，为此我们提出两个相互对立的假设

- H_0： $\mu=\mu_0=0.5$　　机器正常
- H_1： $\mu\neq\mu_0$　　机器不正常

需要给出一定的规则，利用已知样本，做出决策是接受原假设H_0(拒绝备择假设H_1)，还是拒绝原假设H_0(接受备择假设H_1)

需要估计μ，可以考虑借助样本均值$\overline{X}$

$\overline{X}$ 是总体均值μ的无偏估计量，$\overline{X}$ 的观察值 $\bar{x}$ 的大小在一定程度上反映了μ的大小

如果H_0为真，则样本的观测值$\bar{x}$ 与μ_0的偏差$|\bar{x}-\mu_0|$一般不应过大，否则应怀疑假设H_0的正确性而拒绝H_0

H_0为真时，$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$　　衡量$|\bar{x}-\mu_0|$的大小就转换为衡量$\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|$的大小

选定一正数k，当观测值 $\bar{x}$ 满足　$\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \ge k$ 拒绝原假设H_0　$\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < k$ 接受原假设H_0

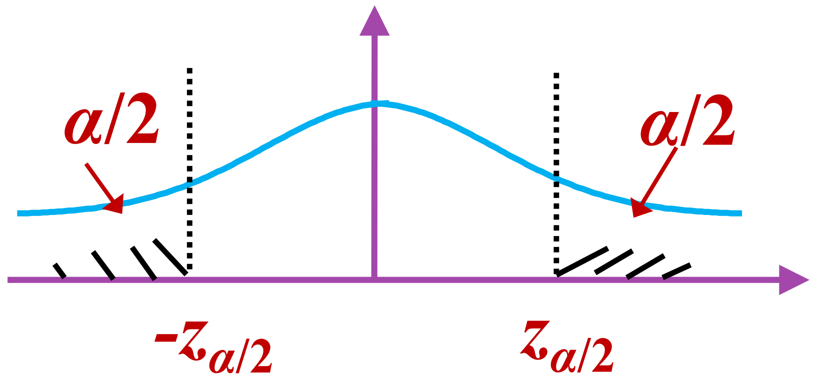
但是，由于做出这一决策的依据是一个样本，当实际上H_0为真时仍可能做出拒绝H_0的决策（这种可能性是无法消除的），犯这种错误的概率记为

$$P(\text{拒绝}H_0 / H_0\text{为真时}) \quad \text{或} \quad P_{\mu_0}(\text{拒绝}H_0) \quad \text{或} \quad P_{\mu\in H_0}(\text{拒绝}H_0)$$

希望控制这样的错误在一定范围，因此给定一个较小的数α $(0<\alpha<1)$，使这类错误的概率不超过α，即 $P(\text{拒绝}H_0 / H_0\text{为真时}) \le \alpha$

由于只允许犯这类错误概率最大为α，上式取等号 $P(\text{当}H_0\text{为真时拒绝}H_0) = P\left(\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \ge k\right) = \alpha$

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$



由此知 $k=z_{\alpha/2}$

- 若样本值满足 $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq k=z_{\alpha/2}$ 拒绝H_0
- 若样本值满足 $\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|< k=z_{\alpha/2}$ 接受H_0

本例中取$\alpha=0.05$，则$k=z_{0.025}=1.96$，又有$n=9$，$\sigma=0.015$，样本均值 $\overline{x}=0.511$

$$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=2.2>1.96$$ 拒绝H_0（接受H_1，机器不正常）

若均值检查机器正常，一般还应对方差进行检验

符合实际推断原理

$\mu=\mu_0$时 $\left\{\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{\alpha/2}\right\}$是小概率事件

在一次试验中几乎不会发生，现如今发生了，则有理由怀疑H_0的正确性，进而拒绝H_0

这里k是假设检验的一个门槛值，给定α就能得k

α称为显著性水平（区别于参数估计的置信水平）

μ_0与 $\overline{x}$ 的无显著性差异是在显著性水平α之下作出的

统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 称为检验统计量

假设检验的基本概念和定义

定义

在**显著性水平α**之下，检验假设H_0和H_1

也常说成“在显著性水平α下，针对H_1检验H_0”

H_0称为**原假设**或**零假设**，H_1称为**备择假设**

备择假设是指与原假设相矛盾的假设

双边假设检验

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

单边假设检验

右边假设 $H_0: \mu \le \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$

左边假设 $H_0: \mu \ge \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$

仅涉及总体分布未知参数的假设称为**参数假设**，而对总体分布类型或分布某些特征提出的假设称为非参数假设

假设检验就是在原假设和备择假设之间做出接受哪个拒绝哪个的判断，需根据样本制定一个规则一旦样本的观测值确定后即可作出决策，在H_0与H_1两者之间接受其一

能够对原假设H_0是真或不真做出回答的统计量称为**假设检验统计量**

使得原假设H_0为真的假设检验统计量取值范围称为假设检验的**接受域**；拒绝原假设H_0的假设检验统计量取值范围称为**拒绝域**；拒绝域的边界点称为**临界点**

由于样本的随机性，进行判断时，可能会发生错误，发生错误也是一个随机事件

- 第I类错误（弃真）：H_0为真但拒绝H_0

  P(拒绝H_0 / H_0为真时) $=\alpha$

- 第II类错误（存伪）：H_0不真但接受H_0

  P(接受H_0 / H_0不真时) $=\beta$

给定样本容量，若减小第I类错误的概率，则第II类错误的概率往往增大；若要使两类错误概率都减小，需要增大样本容量

一般控制第I类错误的概率使其不大于α，通常α取0.1, 0.05, 0.01, 0.005

只控制**第I类错误**的概率，而不考虑第II类错误的概率的假设检验称为**显著性检验**

称α为**显著性水平**　　**注意与区间估计中的置信水平1-α区分**

正态总体假设检验的接受域

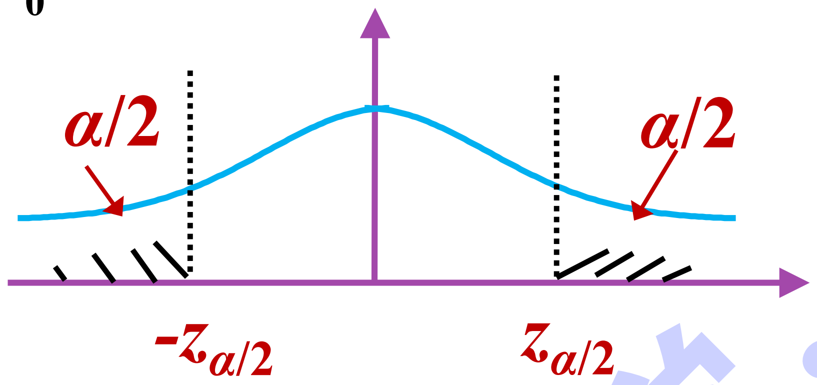
设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ未知，σ^2已知，设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体的样本，给定**显著性水平**为α

双边假设

$H_0: \mu=\mu_0 \quad H_1: \mu\neq\mu_0$

接受域为

$$|u|=\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}$$

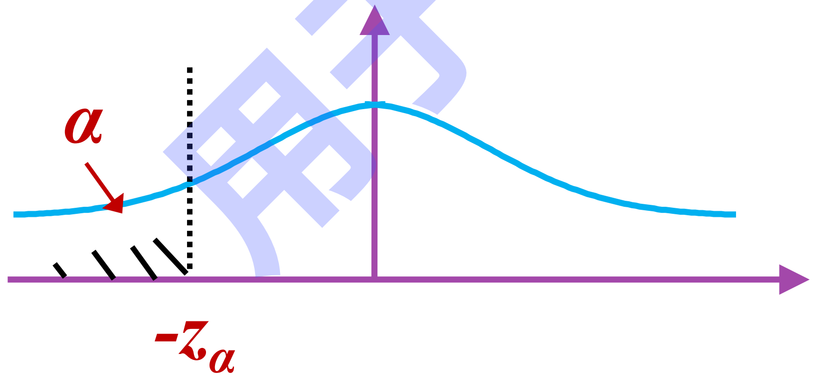


左边假设

$H_0: \mu\geq\mu_0 \quad H_1: \mu<\mu_0$

接受域为

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>-z_\alpha$$



右边假设

$H_0: \mu\leq\mu_0 \quad H_1: \mu>\mu_0$

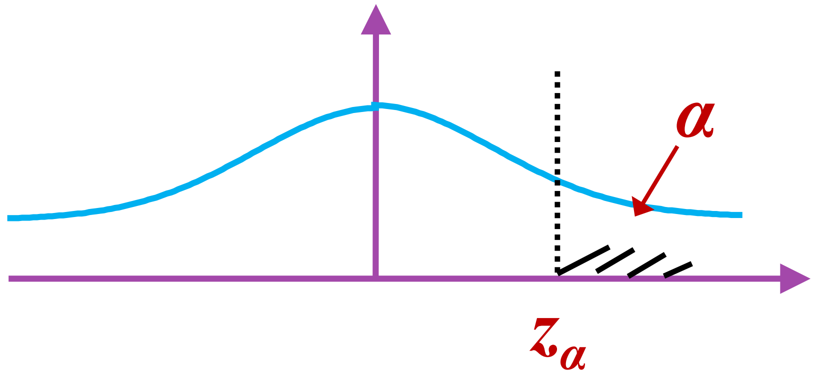
H_1为真时，$\bar{x}$ 观察值往往偏大

$$P(\text{拒绝}H_0/H_0\text{为真时})=P_{\mu\in H_0}\left(\bar{X}\geq k\right)$$

$$=P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\leq P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\geq\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\alpha$$

接受域为

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<z_\alpha$$



求未知参数假设检验的步骤

1. 根据实际的问题，提出原假设H_0和备择假设H_1
2. 确定检验统计量（根据八大分布）及其在H_0为真时的分布
3. 根据显著性水平α和样本容量n，按照P(当H_0为真时拒绝H_0)$=\alpha$ 求出临界点，确定接受域或拒绝域
4. 计算检验统计量的样本观测值
5. 根据样本观测值做出决策，是接受原假设H_0还是拒绝H_0（接受H_1）

注意

- ✓ 关键在于提出合适正确的原假设H_0和备择假设H_1
- ✓ 绝不可交换H_0和H_1的设置将左边假设问题转为右边假设问题

拒绝域的形式和区间正是通过“拒绝为真的H_0” 推导出的

- ✓ 原假设H_0一般是“默认”、“正常”状态时的数值关系（含等号），而备择假设H_1一般是“不正常”、“有变化”的情况

双边假设的两个临界点：上α /2分位点、上(1- α /2)分位点；
左边假设的一个临界点：上(1- α)分位点；右边假设的一个临界点：上α分位点

三种假设检验的上分位点

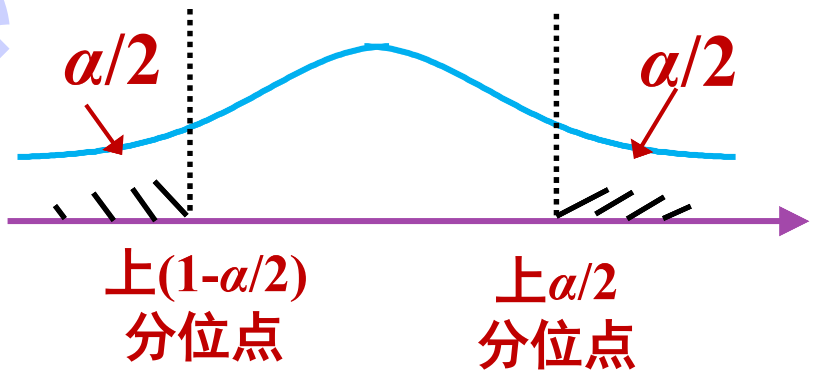
给定显著性水平为α

图中阴影部分为拒绝域（含临界点）

双边假设

$H_0: \theta = \theta_0 \quad H_1: \theta \neq \theta_0$

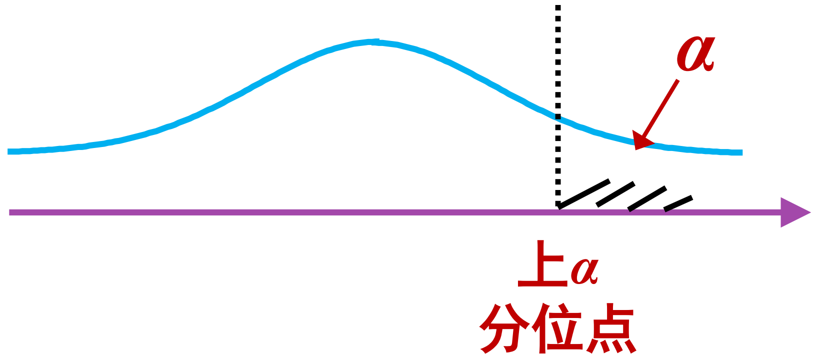
临界点：上$\alpha/2$分位点、上$(1-\alpha/2)$分位点



右边假设

$H_0: \theta \leq \theta_0 \quad H_1: \theta > \theta_0$

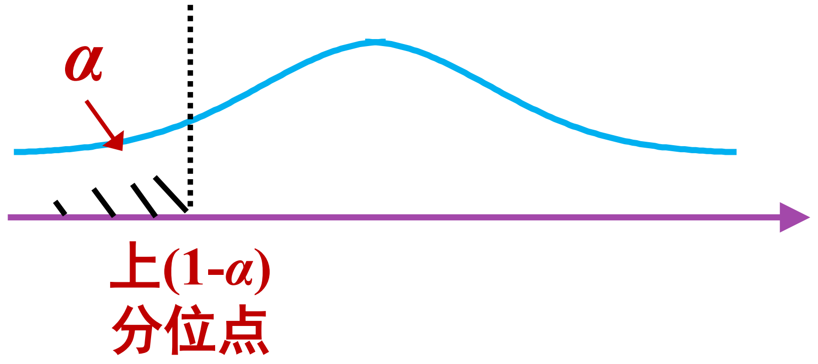
临界点：上α 分位点



左边假设

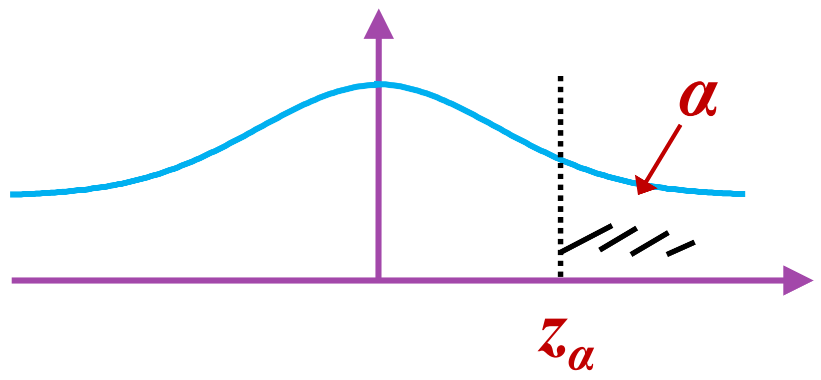
$H_0: \theta \geq \theta_0 \quad H_1: \theta < \theta_0$

临界点：上$(1-\alpha)$分位点



例 某公司购买牛奶，公司怀疑供应商在牛奶中掺水牟利，通过测得冰点温度这一指标可以检测牛奶是否掺水，天然牛奶的冰点温度服从正态分布$N(-0.545, 0.008^2)$，牛奶掺水可导致冰点温度升高，今测得供应商提交的5批牛奶冰点温度，得到样本均值 $\bar{x}=-0.535$，试问在显著性水平$\alpha=0.05$下是否认为供应商在牛奶中掺水。

解 该问题需做如下检验：$H_0: \mu \le \mu_0 = -0.545$; $H_1: \mu > \mu_0 = -0.545$ **Step 1**



检验统计量是 $U = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 服从的分布是$N(0, 1)$ **Step 2**

这是右边假设问题，允许犯第I类错误的概率最大为α，临界点是上α分位点，$k=z_\alpha$ **Step 3**

拒绝域为 $u = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge k = z_\alpha$ 也就是说U的观测值落在该区间则拒绝原假设H_0

在本例中 $n=5,\ \bar{x}=-0.535,\ \mu_0=-0.545,\ \sigma=0.008,\ \alpha=0.05,\ z_\alpha=z_{0.05}=1.645$ **Step 4**

$u = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{-0.535-(-0.545)}{0.008/\sqrt{5}} = 2.7951 > 1.645$ 从而拒绝H_0，即认为供应商在牛奶中掺水了 **Step 5**

例 设袋中有10个球，其颜色有黑白两种，p表示白球所占比例。有待检验的统计假设是，H_0: p=0.5, H_1 : p=0.2，从袋中有放回的取4个球，当其中白球数小于2时，拒绝H_0，否则接受。试给出：
(i) 总体及其分布形式；(ii) 样本容量；(iii) 检验法（即拒绝域与接收域）；
(iv) 犯第I类错误、第II 类错误的概率。

解 (i) 从袋中任取一球，观察其颜色，并定义随机变量X，
$$X=\begin{cases}1 & \text{取到白球}\\ 0 & \text{取到黑球}\end{cases}$$

则X 就是这个统计问题的总体，分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

(ii) 样本容量 n=4，(X_1, X_2, X_3, X_4)

(iii) 拒绝域为
$$C=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1+x_2+x_3+x_4<2,\ x_i=0\text{或}x_i=1,\ i=1,2,3,4\}$$

接受域为
$$\overline{C}=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1+x_2+x_3+x_4\geq 2, x_i=0\text{或}x_i=1, i=1,2,3,4\}$$

例 设袋中有10个球，其颜色有黑白两种，p表示白球所占比例。有待检验的统计假设是，$H_0: p=0.5$，$H_1: p=0.2$，从袋中有放回的取4个球，当其中白球数小于2时，拒绝H_0，否则接受。试给出：

(i) 总体及其分布形式；(ii) 样本容量；(iii) 检验法（即拒绝域与接收域）；

(iv) 犯第I类错误、第II 类错误的概率。

解 (iv) 依题意有 $\sum_{i=1}^{4} X_i \sim B(4, p)$

犯第I类错误的概率为 $\alpha=P(\text{拒绝}H_0/H_0\text{为真})=P\left(\sum_{i=1}^{4} X_i<2\Big/p=0.5\right)$

$$=P\left(\sum_{i=1}^{4} X_i=0\Big/p=0.5\right)+P\left(\sum_{i=1}^{4} X_i=1\Big/p=0.5\right)=C_4^0p^0(1-p)^4+C_4^1p^1(1-p)^3=0.3125$$

犯第II类错误的概率为 $\beta=P(\text{接受}H_0/H_0\text{为假})=P\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\geq 2\Big/p=0.2\right)$

$$=1-P\left(\sum_{i=1}^{4} X_i=0\Big/p=0.2\right)-P\left(\sum_{i=1}^{4} X_i=1\Big/p=0.2\right)=1-C_4^0p^0(1-p)^4-C_4^1p^1(1-p)^3=0.1808$$

本节回顾

假设检验的概念和定义

显著性水平、左边/右边/双边假设、接受域、拒绝域、第I类和第II类错误

求未知参数假设检验的步骤

- 提出原假设H_0和备择假设H_1
- 确定检验统计量及其在H_0为真时的分布
- 根据显著性水平α和样本容量n， 求出临界点，确定接受域或拒绝域
- 计算检验统计量的样本观测值
- 做出决策，是接受原假设H_0还是拒绝H_0（接受H_1）

CHAPTER 8

假设检验

8.2 单正态总体参数的假设检验

单个正态总体$N(\mu, \sigma^2)$均值μ的假设检验

❖ σ^2已知，关于μ的检验

注意所有的拒绝域含有等号，接受域不含等号

检验统计量及其分布	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$\lvert u\rvert=\left\lvert\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\rvert \geq z_{\alpha/2}$	$\lvert u\rvert=\left\lvert\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\rvert < z_{\alpha/2}$
右边检验	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$u=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$	$u=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z_\alpha$
左边检验	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$u=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$	$u=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > -z_\alpha$

❖ σ^2未知，关于μ的检验 （t 检验）

不能再用统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 用样本标准差S代替σ

检验统计量及其分布	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu\neq\mu_0$	$\lvert t\rvert=\left\lvert\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right\rvert\geq t_{\alpha/2}(n-1)$	$\lvert t\rvert=\left\lvert\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right\rvert< t_{\alpha/2}(n-1)$
右边检验	$H_0: \mu\leq\mu_0$ $H_1: \mu>\mu_0$	$t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\geq t_{\alpha}(n-1)$	$t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}< t_{\alpha}(n-1)$
左边检验	$H_0: \mu\geq\mu_0$ $H_1: \mu<\mu_0$	$t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\leq -t_{\alpha}(n-1)$	$t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}> -t_{\alpha}(n-1)$

例 加工某罐头，每瓶中VC 的含量为随机变量X，服从正态分布，用传统工艺加工时，$X\sim N(19,4)$。现改变工艺，抽查16瓶，测得VC 含量为 23, 20.5, 21, 22, 20, 19, 20, 23, 20.5, 18.8, 20, 19.5, 22, 18, 23 。

问在新工艺下，VC 的含量是否比旧工艺提高？（假定VC含量的方差仍为4，取显著性水平为0.05）

解 假设新工艺下$X\sim N(\mu, 4)$， μ未知

检验问题：$H_0: \mu \le \mu_0 = 19;\quad H_1: \mu > \mu_0 = 19$ Step 1

检验统计量及其分布：$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$ Step 2

临界点：$z_\alpha = z_{0.05} = 1.65$ 拒绝域：$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \ge z_\alpha = z_{0.05} = 1.65$ Step 3

观测值：$u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{20.8 - 19}{2 / \sqrt{16}} = 2.18 > 1.65$ Step 4

故拒绝H_0，接受H_1，
即新工艺使VC含量提高了 Step 5

例 设某次考试考生成绩服从正态分布，从中随机的抽取36名学生的成绩，算的平均成绩为66.5分，标准差为15分。问在显著性水平0.05下，是否可以认为全体考生的平均成绩为70分？

解 已知总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，对μ作检验

检验问题：$H_0: \mu=\mu_0=70$;　　$H_1: \mu\neq\mu_0=70$　Step 1

检验统计量及其分布：$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n\text{-}1)$　Step 2

临界点：$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.03$　拒绝域：$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.03$　Step 3

观测值：$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}\right|=1.4<2.03$　Step 4

故接受假设，即认为在显著性水平0.05下，全体考生的平均成绩为70分　Step 5

单个正态总体$N(\mu, \sigma^2)$ 方差σ^2的假设检验

❖ μ已知，关于σ^2的检验　（χ^2 检验）

检验统计量及其分布	$\chi^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}(n)$ $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n)$	$\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n)$
右边检验	$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}(n)$	$0 < \chi^2 < \chi^2_{\alpha}(n)$
左边检验	$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n)$	$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(n)$

❖ μ未知，关于σ^2的检验（χ^2 检验）

检验统计量及其分布	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leq\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$	$\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)<\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$
右边检验	$H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$	$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq\chi_{\alpha}^2(n-1)$	$0<\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<\chi_{\alpha}^2(n-1)$
左边检验	$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$	$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leq\chi_{1-\alpha}^2(n-1)$	$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}>\chi_{1-\alpha}^2(n-1)$

例 某洗衣粉包装机在正常工作条件下，每袋洗衣粉净重服从正态分布，标准重量为1000 克，标准差不能超过15 克。为检查机器工作是否正常，从已装好的袋装产品中，随机抽查10袋，测其净重为：1020,1030,968,994,014,998,976,928,950,1048。问包装机工作是否正常？设α=0.05。

解 已知总体$X\sim N(\mu, \sigma^2)$，μ, σ^2 未知，对μ, σ^2分别作检验　　很多问题需要均值和方差都检验，如例8-20

(i) 检验均值μ

检验问题：$H_0: \mu=\mu_0=1000; H_1: \mu\neq\mu_0=1000$

检验统计量及其分布：$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n\text{-}1)$

临界点：$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(9)=0.262$

拒绝域：$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(9)=0.262$

观测值：$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{998-1000}{30.23/\sqrt{10}}\right|=0.209<0.262$

故接受假设H_0

(ii) 检验方差σ^2

检验问题：$H_0: \sigma^2\leq\sigma_0^2=15^2$；$H_1: \sigma^2>\sigma_0^2=15^2$

检验统计量及其分布：$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

临界点：$\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(9)=16.919$

拒绝域：$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(9)=16.919$

观测值：$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{(10-1)\times 913.78}{15^2}=36.55>16.919$

故拒绝假设H_0，标准差大于15

综合以上讨论，认为机器不正常

本节回顾

单个正态总体的假设检验

- 单个正态总体
  - 检验均值 μ
    - σ^2已知 → 1 检验统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
    - σ^2未知 → 4 检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
  - 检验方差 σ^2
    - μ已知 → 2 检验统计量 $\chi^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$
    - μ未知 → 3 检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

CHAPTER 8

假设检验

8.3 双正态总体参数的假设检验

设 $(X_1,\cdots,X_{n_1})$和$(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本，这两样本相互独立

样本均值和样本方差分别是 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$$

对总体X和Y参数进行的假设检验称为双正态总体的假设检验

双正态总体均值差的假设检验

❖ σ_1^2、σ_2^2已知，关于μ_1-μ_2 的检验

检验统计量及其分布	$U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0: \mu_1-\mu_2=\delta$ $H_1: \mu_1-\mu_2\neq\delta$	$\lvert u\rvert=\left\lvert\dfrac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right\rvert \geq z_{\alpha/2}$	$\lvert u\rvert=\left\lvert\dfrac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right\rvert < z_{\alpha/2}$
右边检验	$H_0: \mu_1-\mu_2\leq\delta$ $H_1: \mu_1-\mu_2>\delta$	$u=\dfrac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \geq z_{\alpha}$	$u=\dfrac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} < z_{\alpha}$
左边检验	$H_0: \mu_1-\mu_2\geq\delta$ $H_1: \mu_1-\mu_2<\delta$	$u=\dfrac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \leq -z_{\alpha}$	$u=\dfrac{(\overline{x}-\overline{y})-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} > -z_{\alpha}$

例 已知两种工艺条件下纺得细纱其强力总体服从正态分布，$X\sim N(\mu_1, 28^2)$，$Y\sim N(\mu_2, 28.5^2)$，现在两类产品中抽样试验，得强力数据的均值为：甲工艺 $n_1=100, \bar{x}=280$ ，乙工艺：$n_2=100, \bar{y}=286$ ，问在显著性水平0.05下这两种工艺的平均强力有无显著性差异？

解 σ_1^2,σ_2^2 已知，μ_1,μ_2 未知

检验问题：$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta=0$; $H_1:\mu_1-\mu_2\neq\delta=0$

检验统计量及其分布：$U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$

临界点：$z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$

拒绝域：$|u|=\left|\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right|\geq z_{\alpha/2}=1.96$

观测值：$\left|\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right|=\left|\dfrac{280-286}{\sqrt{28^2/100+28.5^2/100}}\right|=1.50<1.96$ 两种工艺无显著性差异

❖ 具有相同方差$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知，关于$\mu_1$-$\mu_2$ 的检验 （t 检验）

检验统计量及其分布	$t=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0: \mu_1-\mu_2=\delta$ $H_1: \mu_1-\mu_2\neq\delta$	$\lvert t\rvert \geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$	$\lvert t\rvert < t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
右边检验	$H_0: \mu_1-\mu_2\leq\delta$ $H_1: \mu_1-\mu_2>\delta$	$t\geq t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$	$t< t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$
左边检验	$H_0: \mu_1-\mu_2\geq\delta$ $H_1: \mu_1-\mu_2<\delta$	$t\leq -t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$	$t> -t_{\alpha}(n_1+n_2-2)$

其中 $S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$， $S_W=\sqrt{S_W^2}$

例 从两处煤矿各抽取若干样本，分析其含灰量 (%) 数据如下。甲矿：24.3, 20.8, 23.7, 21.3, 17.4 ；乙矿：18.2, 16.9, 20.2, 16.7；假定各煤矿含灰量都服从正态分布，且方差相等。问甲、乙两矿的平均含灰量有无显著性差异？α=0.05

解 具有相同方差，μ_1、μ_2 、σ^2未知

检验问题：$H_0: \mu_1-\mu_2=\delta=0$; $H_1: \mu_1-\mu_2\neq\delta=0$

检验统计量及其分布：$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$, $n_1=5$, $n_2=4$

临界点：$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(7)=2.365$ 拒绝域：$\left|\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{s_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(7)=2.365$

观测值：$\left|\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{s_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\right|=\left|\dfrac{21.5-18}{\sqrt{5.4}\sqrt{1/5+1/4}}\right|=2.245<2.365$

无显著性差异

双正态总体方差比的假设检验

❖ μ_1、μ_2 已知，关于 σ_1^2 / σ_2^2 的检验 （F 检验）

检验统计量及其分布	$F=\dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F\geq F_{\alpha/2}(n_1,n_2)$ $F\leq\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_2,n_1)}$	$\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_2,n_1)}<F<F_{\alpha/2}(n_1,n_2)$
右边检验	$H_0:\sigma_1^2\leq\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$F\geq F_{\alpha}(n_1,n_2)$	$0<F<F_{\alpha}(n_1,n_2)$
左边检验	$H_0:\sigma_1^2\geq\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$F\leq\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_2,n_1)}$	$F>\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_2,n_1)}$

❖ μ_1、μ_2 未知，关于 σ_1^2/σ_2^2的检验 （F 检验）

检验统计量及其分布	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\leq\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}$	$\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}<\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ $<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
右边检验	$H_0:\sigma_1^2\leq\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\geq F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$	$0<\dfrac{s_1^2}{s_2^2}<F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
左边检验	$H_0:\sigma_1^2\geq\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\leq\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_2-1,n_1-1)}$	$\dfrac{s_1^2}{s_2^2}>\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_2-1,n_1-1)}$

例 某种作物有甲乙两个品种，为了比较其优劣，两个品种各种10亩，假设亩产量服从正态分布。收获后测得甲品种的亩产量的均值为30.97公斤，标准差为26.7 公斤，乙品种的亩产量的均值为21.79公斤，标准差为12.1公斤，现取检验水平为0.01，能否认为这两个品种的产量没有差异？

解 甲：$X \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2), \overline{x} = 30.97, s_1 = 26.7, n_1 = 10$　　乙：$Y \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2), \overline{y} = 21.79, s_2 = 12.1, n_2 = 10$

由题意，检验问题：$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$　　　$H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

(i) 检验方差比　　　检验假设：$H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1: \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

检验统计量及其分布：$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

拒绝域：$\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = \dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_2 - 1, n_1 - 1)} = \dfrac{1}{F_{0.005}(9,9)} = 0.1529$ 或 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.005}(9,9) = 6.54$

观测值：$\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{26.7^2}{12.1^2} = 4.869 < 6.54$　　　故接受假设H_0，认为二者方差相等

（方差虽未知但相等）

(ii) 检验均值差

检验问题：$H_0: \mu_1 = \mu_2$;　　$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

检验统计量及其分布：$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

其中 $S_W = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 1}$, $n_1 = 10$, $n_2 = 10$

拒绝域：$\left| \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{S_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \right| \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(18) = 2.8785$

观测值：$\left| \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{S_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \right| = \left| \dfrac{30.97 - 21.79}{\sqrt{429.65}\sqrt{1/10 + 1/10}} \right| = 0.99 < 2.8785$

故接受假设H_0，可知在显著性水平0.01 下，两品种的亩产量无显著性差异

本节回顾

两个正态总体的假设检验

❖ 两个相互独立正态总体

- 检验均值差 μ_1-μ_2
  - σ_1^2、σ_2^2 已知 → 5 检验统计量 $U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$
  - $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知 → 6 检验统计量 $t=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$
- 检验方差比 σ_1^2/σ_2^2
  - μ_1、μ_2 已知 → 7 检验统计量 $F=\dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$
  - μ_1、μ_2 未知 → 8 检验统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

复习思考题

1. 假设检验的基本思想是什么？其中用了一条什么原理？
2. 检验的显著性水平α的意义是什么？
3. 比较双边、左边和右边检验的拒绝域。
4. 使用U检验法可以进行哪些假设检验？
5. 使用t检验法可以进行哪些假设检验？
6. 使用χ^2检验法可以进行哪些假设检验？
7. 使用F检验法可以进行哪些假设检验？
8. 正态总体期望与方差的区间估计和假设检验两者之间有什么相似之处？
9. 成对数据差的t检验适用于哪些特殊场合？
10. 分布拟合的χ^2检验的基本步骤是什么？

CHAPTER 8

假设检验

8.4 置信区间与假设检验之间的关系

设总体X的分布形式已知，有未知参数θ， $\theta \in \Theta$， Θ是θ的取值范围

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体X的一个样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$是相应的一个样本值，

设 $\left(\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n), \overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right)$ 是参数θ的一个置信水平为1- α的置信区间

对任意$\theta \in \Theta$有 $$P_\theta\left(\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right)=1-\alpha$$

考虑显著性水平为α的双边检验 $\mathrm{H}_0: \theta=\theta_0$ $\mathrm{H}_1: \theta \neq \theta_0$

由此得， $$P_{\theta_0}\left(\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta_0<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right)=1-\alpha$$

即， $$P_{\theta_0}\left(\left\{\theta_0 \le \underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right\} \cup \left\{\theta_0 \ge \overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right\}\right)=\alpha$$

接受域为 $$\underline{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)<\theta_0<\overline{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

也就是说，在显著性水平α下检验假设H_0时，可以求参数的θ的一个置信水平为1- α的置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 并考量该区间是否包含θ_0，若包含则接受H_0，不包含则拒绝H_0

反之，对$\theta \in \Theta$，考虑显著性水平为α的双边检验 $H_0: \theta = \theta_0$ $H_1: \theta \neq \theta_0$

它的接受域为 $\underline{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) < \theta_0 < \overline{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

则 $P_{\theta_0}\left(\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta_0 < \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right) = 1 - \alpha$

因此 $\left(\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n), \overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right)$ 是参数θ的一个置信水平为1- α的置信区间

也就是说，要求参数θ的一个置信水平为1- α的置信区间，可以先求显著性水平为α的假设检验问题 $H_0: \theta = \theta_0$ $H_1: \theta \neq \theta_0$ 的接受域

$$\underline{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n) < \theta_0 < \overline{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

则 $\left(\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n), \overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right)$ 是参数θ的一个置信水平为1- α的置信区间

上述讨论双侧置信区间与双边检验之间的情况，单侧置信区间和单边检验的情形与之类似

勿混淆置信水平为1- α和显著性水平为α两说法的概念、意义、用途

CHAPTER 8

假设检验

8.5 几类假设检验简介

基于成对数据的检验　比较差异，做对比试验获观测值（t 检验）

设有n对相互独立的观察结果$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$，令$D_1=X_1-Y_1, D_2=X_2-Y_2, \ldots, D_n=X_n-Y_n$，则$D_1, D_2, \ldots, D_n$相互独立

设 $D_i \sim N(\mu_D, \sigma_D^2),\ i=1,2,\ldots,n$

则称$D_1, D_2, \ldots, D_n$是构成正态总体$N(\mu_D, \sigma_D^2)$的一个样本，其中 μ_D, σ_D^2未知

设$D_1, D_2, \ldots, D_n$的样本均值 $\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$ ，样本方差为 $S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2$

分别记$D_1, D_2, \ldots, D_n$的样本均值和样本方差的观测值为 $\overline{d}, s_D^2$

成对数据的检验即当总体方差 σ_D^2 未知，单个正态总体均值的假设检验

检验统计量及其分布	$t=\dfrac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	拒绝域	接受域
双边检验	$H_0:\mu_D=0$ $H_1:\mu_D\neq 0$	$\lvert t\rvert=\left\lvert\dfrac{\overline{d}}{s_D/\sqrt{n}}\right\rvert\geq t_{\alpha/2}(n-1)$	$\lvert t\rvert=\left\lvert\dfrac{\overline{d}}{s_D/\sqrt{n}}\right\rvert< t_{\alpha/2}(n-1)$
右边检验	$H_0:\mu_D\leq 0$ $H_1:\mu_D>0$	$t=\dfrac{\overline{d}}{s_D/\sqrt{n}}\geq t_{\alpha}(n-1)$	$t=\dfrac{\overline{d}}{s_D/\sqrt{n}}< t_{\alpha}(n-1)$
左边检验	$H_0:\mu_D\geq 0$ $H_1:\mu_D<0$	$t=\dfrac{\overline{d}}{s_D/\sqrt{n}}\leq -t_{\alpha}(n-1)$	$t=\dfrac{\overline{d}}{s_D/\sqrt{n}}> -t_{\alpha}(n-1)$

例 为检验某药物是否会改变人的血压，现随机选取10名实验者，测量他们服药前后的血压，数据如下：

服药前血压134 122 132 130 128 140 118 127 125 142

服药后血压140 130 135 126 134 138 124 126 132 144

假设服药前后血压的差值服从正态分布，取α为0.05，从这些数据中是否能够得出该药物会改变血压的结论。

解 服药前后的血压差$D \sim N(\mu, \sigma^2)$，　μ, σ^2未知

现有容量10的样本值：6, 8, 3, −4, 6, −2, 6, −1, 7, 2

$\bar{d}=3.1,\ s_D^2=17.6556$

检验假设：$H_0: \mu_D = 0;\ H_1: \mu_D \neq 0$　检验统计量及其分布：$t = \dfrac{\bar{d}}{s_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

拒绝域：$\left|\dfrac{\bar{d}}{s_D/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(9) = 2.2622$

观测值：$\left|\dfrac{\bar{d}}{s_D/\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{3.1}{\sqrt{17.6556}/\sqrt{10}}\right|$=2.3228>2.2622　　拒绝假设$H_0$，认为存在显著性差异

最优势检验

- 第I类错误（弃真）：H_0为真但拒绝H_0

  P(拒绝H_0 / H_0为真时) $=\alpha$

- 第II类错误（存伪）：H_0不真但接受H_0

  P(接受H_0 / H_0不真时) $=\beta$

只控制第I类错误的概率，而不考虑第II类错误的概率的假设检验称为**显著性检验**

但是有些实际问题中，除了控制第I类错误的概率α外，还希望控制**第II类错误的概率β**也在预先给定的范围之内

记$\beta(\theta)=P_\theta$ (接受H_0)， 则$\theta\in H_0$时，$\beta(\theta)$是不犯第I类错误的概率,从而$\beta(\theta)\geq 1-\alpha$

则$\theta\in H_1$时，$\beta(\theta)$是犯第II类错误的概率，**$1-\beta(\theta)$**是不犯第II类错误的概率

最优势检验：如何选择样本容量n，使得当$\theta\in H_0$时，$1-\beta(\theta)\leq\alpha$，而当$\theta\in H_1$时，$\beta(\theta)\leq\beta$，其中$\beta$ $(0<\beta<1)$是预先给定的常数

$1-\beta(\theta)$是称为对θ的势

分布拟合检验

前边所述的各种检验都是在分布形式已知的前提下讨论

但是在实际问题中，我们不知道总体服从什么分布，这时候根据样本对总体的分布提出检验

❖ 总体X分布中不含未知参数

检验如下假设：H_0 : 总体X的分布函数是$F(x)$ H_1 : 总体X的分布函数不是$F(x)$

利用检验统计量及其分布： $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2(k-1)$

❖ 总体X分布中含未知参数

检验如下假设：

H_0 : 总体X的分布函数是$F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$ H_1 : 总体X的分布函数不是$F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$

可转为总体分布不含未知参数的情形讨论