西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第3章 多维随机变量及其分布

概率论与数理统计课程组

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

对二维随机变量进行类似一维随机变量的研究

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

3.1 二维随机变量及联合分布函数

问题的提出

研究某地区学龄儿童的发育情况：仅研究身高的分布或仅研究体重的分布是不够的。需同时考察每个儿童的身高和体重，研究二者间的关系，这就要引入定义在**同一样本空间的两个随机变量**

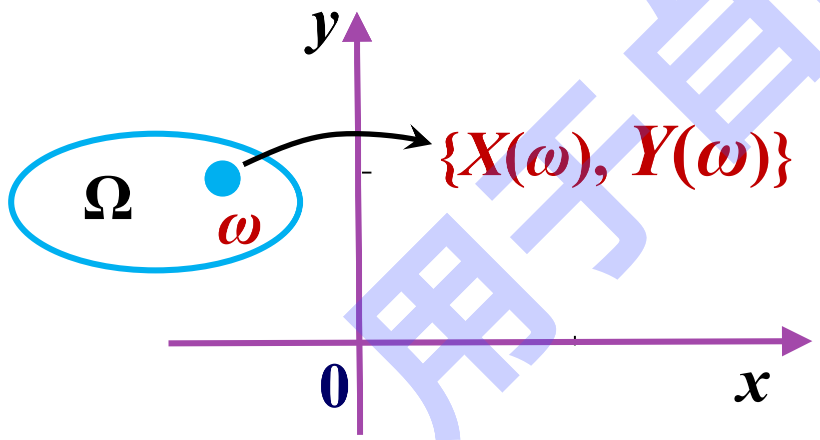
研究某种型号炮弹的弹着点分布：
每枚炮弹的弹着点位置需要由横坐标和纵坐标来确定，而它们是定义在同一样本空间的两个随机变量

二维随机变量

设E是一个随机试验，样本空间 $\Omega=\{\omega\}$；设$X=X(\omega)$和$Y=Y(\omega)$是定义在Ω上的随机变量，由它们构成的向量(X, Y)称**二维随机向量或二维随机变量**

不可以理解为**任意**两个一维随机变量的组合

因为(X, Y)的性质不仅与X 及Y 有关，而且依赖于X和Y的相互关系，需要将二者视为一个整体



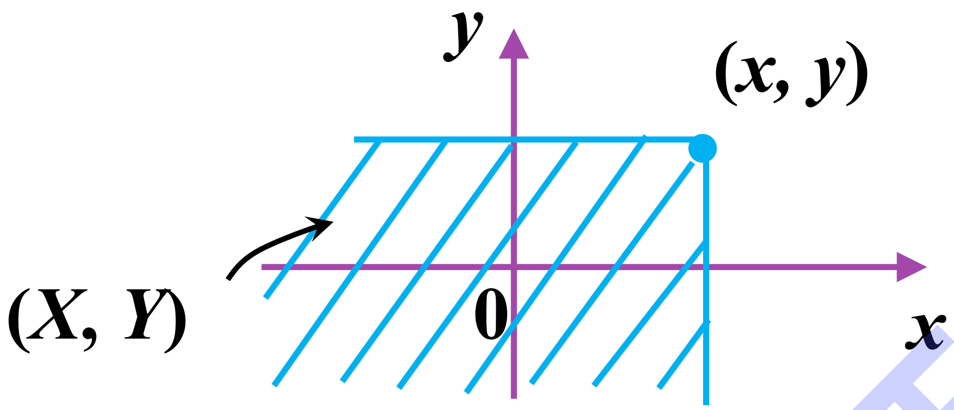
$X=X(\omega)$和$Y=Y(\omega)$的写法说明它们是来自同一个随机试验

分布函数

设(X, Y)是二维随机变量，对于任意实数x, y，有二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=\!=}P(X\le x, Y\le y)\qquad -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty$$

称为二维随机变量(X, Y)的联合分布函数



$F(x, y)$在(x, y)处的函数值实际为随机点(X, Y) 落在以(x, y)为顶点左下方无穷矩形域的概率

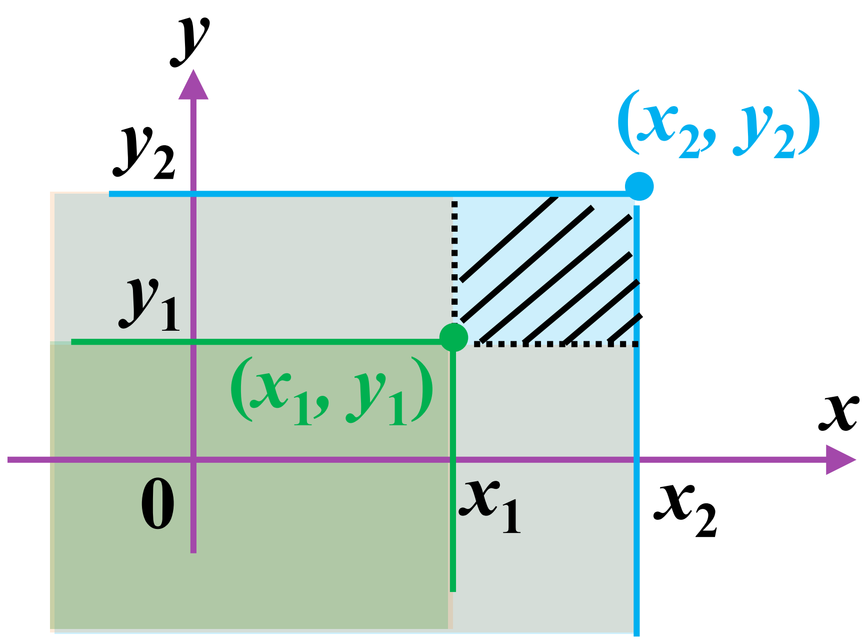
随机点(X, Y)落在矩形域

$$\{(x,y)/x_1<x\le x_2, y_1<y\le y_2\}$$

的概率为

$$P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)$$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)$$



基本性质

1° $F(x, y)$是x和y的不减函数

2° $0 \le F(x, y) \le 1$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$

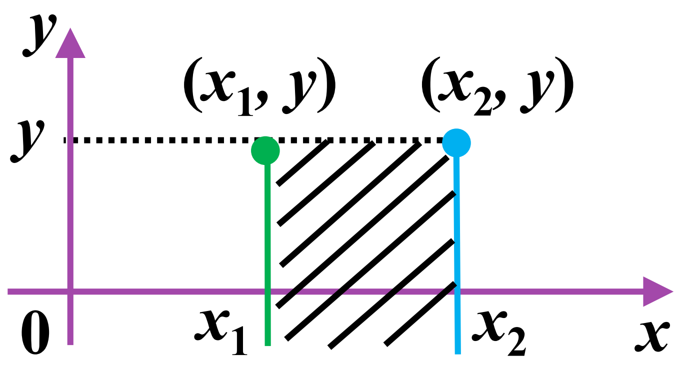
对任意固定y, $F(-\infty, y) = 0$

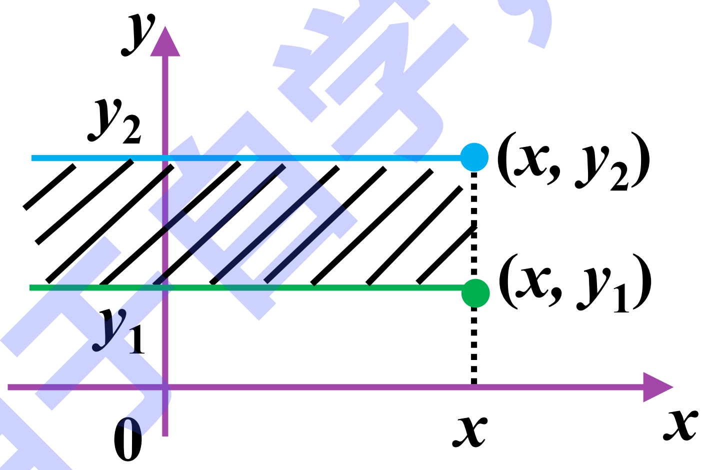
对任意固定x, $F(x, -\infty) = 0$

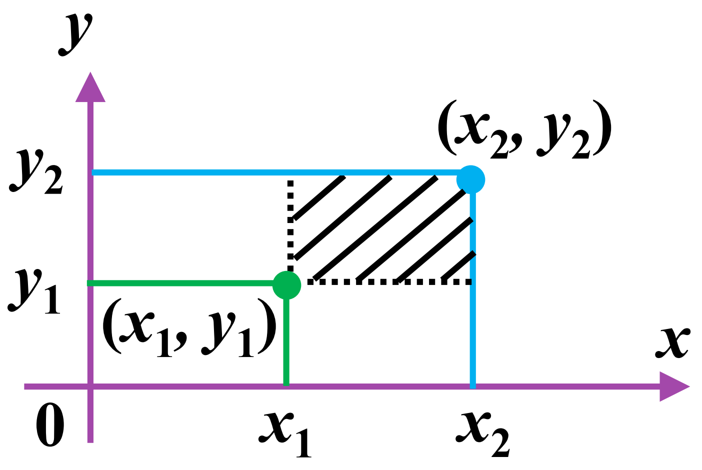
$F(x, +\infty) = ?$　　$F(+\infty, y) = ?$

3° $F(x, y)$关于x, y均为右连续，$F(x+0, y) = F(x, y)$, $F(x, y+0) = F(x, y)$

4° 若 $x_1<x_2$, $y_1<y_2$，则 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \ge 0$







$x_1<x_2$则$F(x_1, y) \le F(x_2, y)$

$y_1<y_2$则$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$

$P(x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2)$

$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2)$

本节回顾

二维随机变量

设E是一个随机试验，样本空间 $\Omega=\{e\}$；设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在Ω上的随机变量，由它们构成的向量(X, Y)称**二维随机向量或二维随机变量**

不可以理解为**任意**两个一维随机变量的组合

二维随机变量的分布函数

设(X, Y)是二维随机变量，对于任意实数x, y，有二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=\!=}P(X\le x, Y\le y)$$

$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$

称为二维随机变量**(X, Y)的联合分布函数**

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

3.2 二维离散型随机变量及联合分布律

二维离散型随机变量

定义

若二维随机变量(X, Y)全部可能取到的不同值是有限对或可列无限对，则称(X, Y)是离散型随机变量

联合分布律

设(X, Y)所有可能取值为$(x_i, y_j),\ i, j = 1, 2, \cdots$

记为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij},\ i, j = 1, 2, \cdots$

称为二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律

联合分布律可以用表格形式表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

基本性质

1° $p_{ij} \geq 0 \ (i, j = 1, 2, 3, \ldots)$

2° $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ 或写为 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

联合分布函数为 $F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

例 设随机变量X在1、2、3、4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量Y在1~X中等可能地取一整数值，试求(X, Y)的联合分布律。

解 $(X=i, Y=j)$的取值情况为：$i=1, 2, 3, 4$，j取不大于i的正整数。

$$P(X=i,Y=j)$$

$$=P(X=i)P(Y=j\,|\,X=i)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i}$$

$i=1, 2, 3, 4;\ j\le i$

即(X, Y)的联合分布律为：

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

例 某足球队在任何长度为 t 的时间区间内得黄牌或红牌的次数$N(t)$服从参数为λt的泊松分布，记 X_i 为比赛进行 t_i 分钟后的得牌数，$i=1, 2$ $(t_2>t_1)$。试写出X_1, X_2的联合分布律。

解 $$P\{N(t)=k\}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},\ k=0,1,2,\cdots$$

$X\sim P(\lambda)$ $\quad P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k=0,1,2,\cdots,\ \lambda>0$

$$P(X_1=i,X_2=j)=P(X_1=i)P(X_2=j\mid X_1=i)$$

乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B\mid A),\ P(A)>0$

$$=P(X_1=i)P(X_2-X_1=j-i\mid X_1=i)=P(X_1=i)P(X_2-X_1=j-i)$$

独立性

可拆解为长度分别为t_1和t_2-t_1的两个区间分析

$$=\frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^i}{i!}\cdot\frac{e^{-\lambda(t_2-t_1)}\left[\lambda(t_2-t_1)\right]^{j-i}}{(j-i)!}$$

$i=0,1,2,\cdots,\ j=i,i+1,\ldots$

并非直接写出X_1, X_2各自的分布律

本节回顾

二维离散型随机变量的联合分布律

若二维随机变量(X, Y)全部可能取到的不同值是有限对或可列无限对，则称(X, Y)是离散型随机变量

设(X, Y)所有可能取值为 $(x_i, y_j),\ i,j=1,2,\cdots$

$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$ 称为二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律

联合分布律

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

联合分布函数为 $F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

3.3 二维连续型随机变量及联合概率密度

二维连续型随机变量

定义

对于二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(X, Y)$，如果存在非负可积函数$f(x, y)$，使对于任意x, y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

则称(X, Y)为二维连续型随机变量，称$f(x, y)$ 为二维随机变量(X, Y)的联合概率密度函数，简称二维随机变量(X, Y)的联合概率密度

注意：联合概率密度 $f(x, y)$ 是由联合分布函数$F(x, y)$引出

基本性质

1° $f(x, y)\geq 0$

2° $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv = F(+\infty,+\infty)=1$

3° 若G为xoy平面内任意区域，点(x, y)落在G内概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$$

$z=f(x, y)$，可视为该曲面为顶xoy平面为底围成区域的体积（总共体积为1）

4° 在$f(x, y)$的连续点(x, y)处有 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$

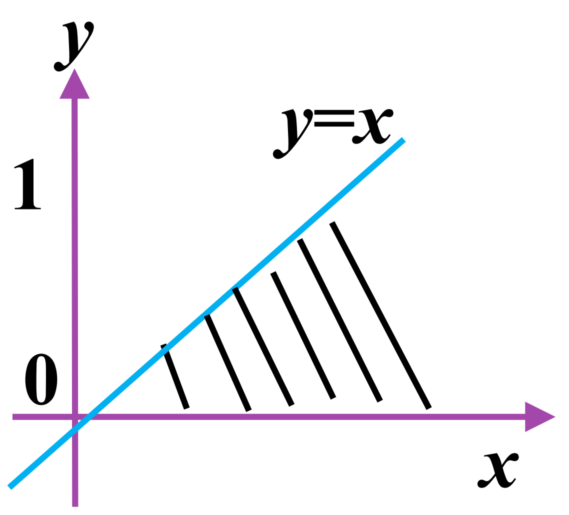
在Δx, Δy很小时

$$P(x < X \leq x+\Delta x, y < Y \leq y+\Delta y) \approx f(x,y)\Delta x \Delta y$$

落在小矩形$(x, x+\Delta x]\times(y, y+\Delta y]$内的概率

例 设二维随机变量(X,Y)具有联合概率密度：$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(i) 求常数k； (ii) 求联合分布函数$F(x,y)$； (iii) 求概率$P(Y\le X)$ 。



解 (i) 利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

$$k\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx\int_0^{+\infty} e^{-3y}dy = k/6 = 1 \quad \Rightarrow k=6 \qquad f(x,y)=\begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(ii) (X, Y)的联合分布函数为：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv=\begin{cases} \int_0^y\int_0^x 6e^{-(2u+3v)}dudv, & x>0, y>0 \\ 0\,, & \text{其他} \end{cases}$

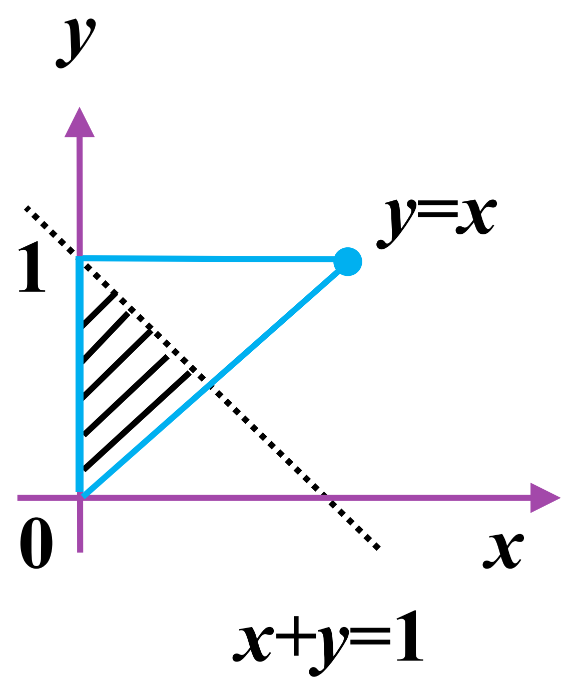
$$=\begin{cases} \int_0^x 2e^{-2u}du\int_0^y 3e^{-3v}dv, & x>0, y>0 \\ 0\,, & \text{其他} \end{cases} =\begin{cases} (1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(iii) $P(Y\le X)=\int_0^{+\infty}dy\int_y^{+\infty}6e^{-(2x+3y)}dx=\int_0^{+\infty}3e^{-3y}(-e^{-2x}\big|_y^{+\infty})dy=\int_0^{+\infty}3e^{-3y}e^{-2y}dy=\int_0^{+\infty}3e^{-5y}dy=-\frac{3}{5}e^{-5y}\big|_0^{+\infty}=\frac{3}{5}$

例 设二维随机变量(X, Y)具有联合概率密度： $f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(i) 求常数k；

(ii) 求概率$P(X+Y\le 1)$ 。



解 (i) 利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^y kxydxdy=\int_0^1\frac{k}{2}y^3dy=\frac{k}{8}\quad\Rightarrow k=8$$

$$\text{(ii)}\ \ P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}8xydy=\int_0^{\frac{1}{2}}4x[(1-x)^2-x^2]dx=\int_0^{\frac{1}{2}}4x(1-2x)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

本节回顾

二维连续型随机变量的联合概率密度

对于二维随机变量(*X*, *Y*)的分布函数*F*(*X*, *Y*)，如果存在非负可积函数*f*(*x*, *y*)，使对于任意*x*, *y*有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

则称(*X*, *Y*)为二维连续型随机变量，称*f*(*x*, *y*) 为二维随机变量(*X*, *Y*)的联合概率密度函数，简称二维随机变量(*X*, *Y*)的联合概率密度

1° $f(x, y)\geq 0$

2° $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv = F(+\infty,+\infty)=1$

3° 若*G*为*xoy*平面内任意区域，点(*x*, *y*)落在*G*内概率为 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$

4° 在*f*(*x*, *y*)的连续点(*x*, *y*)处有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

在Δ*x*, Δ*y*很小时 $P(x<X\leq x+\Delta x, y<Y\leq y+\Delta y)\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

3.4 边缘分布

上节将二维随机变量视为一个整体，讨论$F(x, y)$，

但X、Y也是一个随机变量，他们各自的分布函数如何？

定义

X、Y的分布函数记为$F_X(x)$和$F_Y(y)$称为**边缘分布函数**

$$\begin{cases} F_X(x) = F(x, +\infty) \\ F_Y(y) = F(+\infty, y) \end{cases}$$

因为 $F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y \le +\infty)$

令联合分布函数 $F(x, y)$中的 $y \to +\infty$ 得到$F_X(x)$

二维离散型随机变量

(X、Y) 联合分布律为 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$

X、Y 的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$$

因为X的分布律 $P(X=x_i)=P(X=x_i,Y<+\infty)=\sum_j p_{ij}$

$$\overset{\text{记为}}{==}\ p_{i\bullet}\qquad i=1,2,\cdots$$

因为Y的分布律 $P(Y=y_j)=P(X<+\infty,Y=y_j)=\sum_i p_{ij}$

$$\overset{\text{记为}}{==}\ p_{\bullet j}\qquad j=1,2,\cdots$$

由联合分布律的表格写出边缘分布律

X \ Y	y_1	y_2	…	y_j	…	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	$p_{2\bullet}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	$p_{i\bullet}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
$P(Y=y_j)$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	…	$p_{\bullet j}$	…	1

记号$p_{i\cdot}$中 · 表示$p_{i\cdot}$是由p_{ij}关于j求和后得到的；同样$p_{\cdot j}$是由p_{ij}关于i求和后得到的

例 对一群体的吸烟及健康状况进行调查，引入随机变量X和Y如下：

$$X=\begin{cases}0, & 健康\\1, & 一般\\2, & 不健康\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}0, & 不吸烟\\10, & 一天吸烟不多于15支\\20, & 一天吸烟多于15支\end{cases}$$

根据调查结果，得(X, Y)的如下的联合分布律：

X \ Y	0	10	20
0	0.35	0.04	0.025
1	0.025	0.15	0.04
2	0.020	0.10	0.25

(i) 关于X和Y的边缘分布律；

(ii) 求$P(X=2|Y=20)$

解 (i)

X	0	1	2
P	0.415	0.215	0.370

Y	0	10	20
P	0.395	0.290	0.315

(ii) $$P(X=2|Y=20)=\frac{P(X=2,Y=20)}{P(Y=20)}=\frac{0.25}{0.315}=0.794$$

例 已知(X, Y)的联合分布律为

$X\backslash Y$	-1	0	1
1	0.1	a	0.2
2	0.1	0.2	b

已知$P(Y=1|X=1)=0.5$，求：

(i) a、b的值；

(ii) X、Y的边缘分布律；(iii) 求$P(X=1|Y=1)$。

解 (i) 由分布律性质知 $a+b+0.6=1$ 即$a+b=0.4$

$$P(Y=1|X=1)=\frac{0.2}{0.3+a} \Rightarrow \frac{0.2}{0.3+a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=0.1,\ b=0.3$$

(ii)

X	1	2
$p_{i\cdot}$	0.4	0.6

Y	-1	0	1
$p_{\cdot j}$	0.2	0.3	0.5

(iii) $$P(X=1|Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.2}{0.5}=0.4$$

二维连续型随机变量

$(X、Y)$ 联合概率密度为 $f(x,y)$，联合分布函数为 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$

X，Y 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

因为 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)dy\right]dt=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

因为 $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx\right]dt=\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt$

$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 是 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度

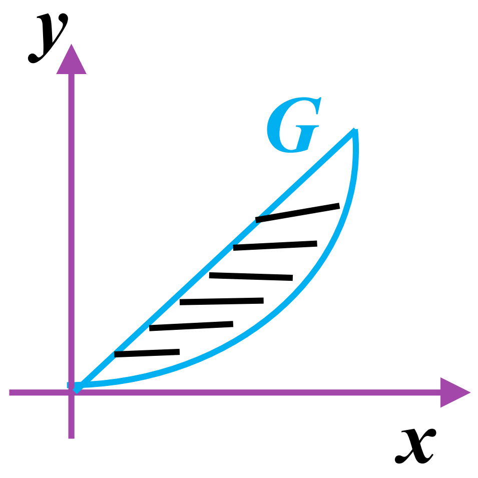
例 设G是平面上的有界区域，其面积为A，若二维随机变量(X, Y)具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1/A, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称(X, Y)在G上服从均匀分布。现设(X, Y)在有界区域$x^2\le y\le x$上服从均匀分布，其联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求边缘概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$



解

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

二维均匀分布$(X, Y)\sim U(G)$：
$(X, Y)\sim$在G的任一子区域取值的概率等价于平面区域G的几何概率

例 若二维随机变量(X, Y)具有联合概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}\qquad(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty)$$

其中μ_1、μ_2、σ_1、σ_2都是常数，且$\sigma_1>0$、$\sigma_2>0$、$-1<\rho<1$。称(X, Y)服从参数为μ_1、μ_2、σ_1、σ_2、ρ的二维正态分布，记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，求二维正态分布的边缘概率密度。

解

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_2{}^2(1-\rho^2)}\left\{y-\left[\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]\right\}^2}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}\qquad-\infty<x<+\infty$$

同理 $$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}\qquad-\infty<y<+\infty$$

即二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，且都不依赖于参数ρ；反推不成立

如果只知道关于X和关于Y的边缘概率分布，一般不能推导出X和Y的联合概率分布

本节回顾

边缘分布函数

X、Y的分布函数记为$F_X(x)$和$F_Y(y)$称为边缘分布函数 $\begin{cases} F_X(x) = F(x,+\infty) \\ F_Y(y) = F(+\infty, y) \end{cases}$

二维离散型随机变量的边缘分布律

(X、Y) 联合分布律为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij},\ i, j = 1, 2, \cdots$

$$P(X = x_i) = P(X = x_i, Y < +\infty) = \sum_j p_{ij} \overset{\text{记为}}{==} p_{i\bullet} \qquad i = 1, 2, \cdots$$

$$P(Y = y_j) = P(X < +\infty, Y = y_j) = \sum_i p_{ij} \overset{\text{记为}}{==} p_{\bullet j} \qquad j = 1, 2, \cdots$$

二维连续型随机变量的边缘概率密度

(X、Y) 联合概率密度为$f(x, y)$，联合分布函数为 $F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$

X、Y的边缘概率密度为 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$　$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

3.5 条件分布

之前定义了条件概率，两事件A、B，若$P(A)>0$，则可考虑在A发生前提下B发生的概率：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

对二维随机变量，也可类似分析

二维离散型随机变量的条件分布

(X, Y)联合分布律为 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$

边缘分布律为

$$P(X=x_i)=p_{i\bullet}=\sum_j p_{ij}$$

$$P(Y=y_j)=p_{\bullet j}=\sum_i p_{ij}$$

定义

若 $P(Y=y_j)=p_{\cdot j}>0$

考虑条件概率 $P(X=x_i|Y=y_j),\ i,j=1,2,\cdots$

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\ i=1,2,\cdots$$

称为 $Y=y_j$ 条件下，随机变量 X 的**条件分布律**

同理，若 $P(X=x_i)=p_{i\cdot}>0$

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\ j=1,2,\cdots$$

称为 $X=x_i$ 条件下，随机变量 Y 的**条件分布律**

例 盒子里装有3只黑球，4只红球，3只白球，在其中任取2球，以X表示取到黑球的数目，Y表示取到红球的只数。

求：(i) X、Y的联合分布律；(ii) $X=1$时Y的条件分布律；

(iii) $Y=0$时X的条件分布律。

解 (i) X、Y的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/15	4/15	2/15
1	3/15	4/15	0
2	1/15	0	0

(ii) 由于 $P(X=1)=7/15$

故在$X=1$时Y的条件分布

$$P(Y=0|X=1)=3/7$$

$$P(Y=1|X=1)=4/7$$

$$P(Y=2|X=1)=0$$

Y	0	1	2
$P(Y=k \mid X=1)$	4/7	3/7	0

(iii)

X	0	1	2
$P(X=k \mid Y=0)$	1/5	3/5	1/5

例 一射手进行射击，击中目标的概率为 p $(0<p<1)$，射击直至击中目标两次为止，设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数，试求 X 和 Y 的联合分布律和条件分布律。

要点：第 m 次击中第一次，第 n 次击中第二次，其他 n-2次均未击中

解 (X, Y)的联合分布律为 $P(X=m, Y=n)=p^2q^{n-2},\ q=1-p,\quad n=2, 3, \cdots,\ m=1, 2, \cdots n-1$

X的边缘分布律为 $P(X=m)=\sum_{n=m+1}^{\infty}P(X=m,Y=n)=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2q^{n-2}=pq^{m-1},\quad m=1, 2, \cdots$

Y的边缘分布律为 $P(Y=n)=\sum_{m=1}^{n-1}P(X=m,Y=n)=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},\quad n=2, 3, \cdots$

于是，对于每一 $(n=2,3,\cdots), P(Y=n)>0$ 在 Y=n 条件下，X的条件分布律为

$$P(X=m|Y=n)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(Y=n)}=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\qquad m=1, 2, \cdots, n-1$$

对于每一 $m(m=1,2,\cdots), P(X=m)>0$ 在 X=m 条件下，Y的条件分布律为

$$P(Y=n|X=m)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(X=m)}=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1},\qquad n=m+1, m+2, \cdots$$

二维连续型随机变量的条件分布

对任意x和y，均有 $P(X=x)=0$、$P(Y=y)=0$ 无法定义“条件分布函数”？ 不能用下式

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\frac{P(X\le x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

虽然$P(Y=y)=0$，但可设$\varepsilon>0$，对于任意x，考虑条件概率 $P(X\le x|y<Y\le y+\varepsilon)$

设 $P(y<Y\le y+\varepsilon)>0$ 则 $P(X\le x|y<Y\le y+\varepsilon)=\dfrac{P(X\le x,y<Y\le y+\varepsilon)}{P(y<Y\le y+\varepsilon)}=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(t,v)dv\right]dt\Big/\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(v)dv$

当 $\varepsilon>0$ 时，上式为 $F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|y<Y\le y+\varepsilon)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(t,v)dv\right]dt\Big/\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(v)dv$

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(t,y)dt}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t,y)}{f_Y(y)}dt$$

对比一维随机变量的概率密度 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ 可见 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 是二维随机变量的条件概率密度

由定义 $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{\partial}{\partial x}F_{X|Y}(x|y)\Rightarrow f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

事实上 $$\frac{\partial}{\partial x}F_{X|Y}(x|y)=\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P(X\le x, y<Y\le y+\varepsilon)}{P(y<Y\le y+\varepsilon)}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y)}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\dfrac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{\varepsilon}}{\dfrac{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y)}{\varepsilon}}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{dF_Y(y)}{dy}}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}}{f_Y(y)}=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

定义

若$(X、Y)$ 联合概率密度为$f(x, y)$， $(X、Y)$关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$，若对于固定y， $f_Y(y)>0$，则称

$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为$Y=y$ 条件下随机变量X 的**条件概率密度**

记为 $$\boxed{f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}}$$

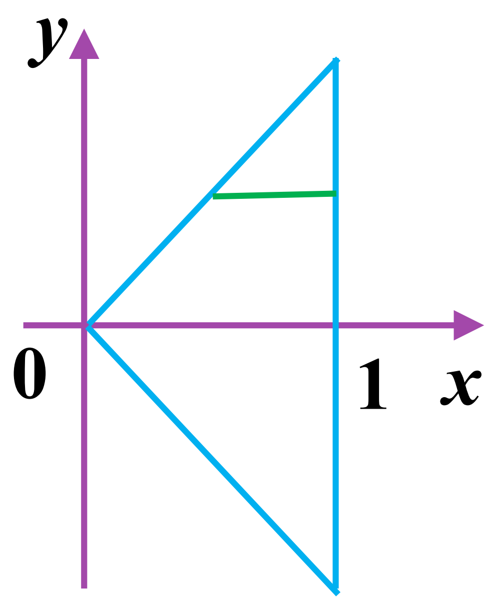
函数 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)dt=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(t,y)}{f_Y(y)}dt$

为$Y=y$ 条件下随机变量X 的**条件分布函数**，记为 $F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$

例 设二维随机变量(X,Y)在区域$\{(x,y): |y|<x<1\}$内均匀分布，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $P(X>\frac{2}{3}\,|\,Y=\frac{1}{2})$

解 据题意，(X, Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}dx=1-|y|, & -1<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$



于是给定 $y(-1<y<1)$，X 的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$P(X>\frac{2}{3}\,|\,Y=\frac{1}{2})=\int_{2/3}^{+\infty}f_{X|Y}(x\,|\,\frac{1}{2})dx=\int_{2/3}^{1}2dx=\frac{2}{3}$$

二维均匀分布的条件分布仍为均匀分布

例 设数X在区间(0, 1)上随机取值，当观察到$X=x$ $(0<x<1)$时，数Y在区间$(x, 1)$上随机取值，求Y的概率密度$f_Y(y)$

解 设数为求Y的概率密度，就要先求(X, Y)的联合概率密度；

而根据X的边缘概率密度和Y在X给定下的条件概率密度，即可求得求(X, Y)的联合概率密度

X的边缘概率密度是 $f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

对于任意x $(0<x<1)$时，在$X=x$条件下，Y条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(X, Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x<y<1,\ 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

所以Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y\dfrac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y) & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

联合分布、边缘分布和条件分布小结

二维随机变量的分布函数

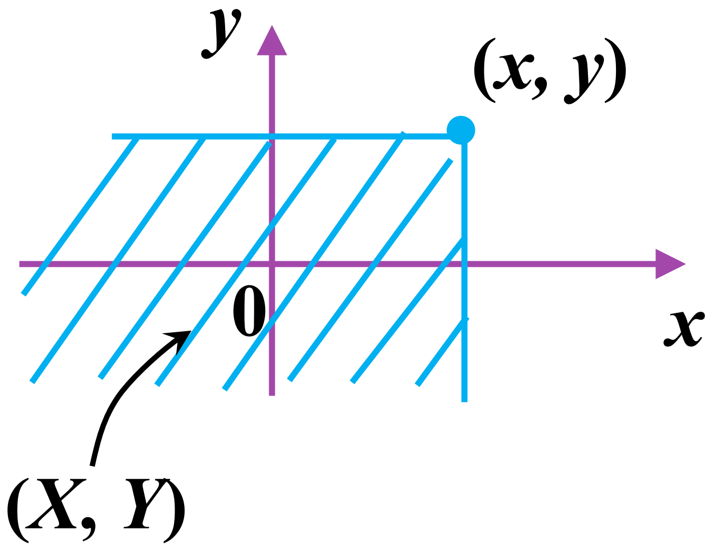
联合分布函数 $F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=\!=}P(X\le x,Y\le y)$ $-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty$

$F(-\infty,-\infty)=0,\ F(+\infty,+\infty)=1$

对任意固定y, $F(-\infty,y)=0$；对任意固定x, $F(x,-\infty)=0$

$F(x,y)$关于x, y是不减函数、右连续

若 $x_1<x_2,\ y_1<y_2$，则 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\ge 0$



边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=P(X\le x)$ $F_Y(y)=F(+\infty,y)=P(Y\le y)$

条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$ 为$Y=y$ 条件下随机变量X 的条件分布函数

$F_{Y|X}(y|x)=P(Y\le y|X=x)$ 为$X=x$ 条件下随机变量Y 的条件分布函数

二维离散型随机变量

联合分布律 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$

联合分布函数 $F(x,y)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{y_j\le y} p_{ij}$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_j	…	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	$p_{2\bullet}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	$p_{i\bullet}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
$P(Y=y_j)$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	…	$p_{\bullet j}$	…	1

边缘分布律

$$P(X=x_i)=P(X=x_i, Y\le +\infty)=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \overset{\text{记为}}{=\!=} p_{i\bullet} \qquad i=1,2,\cdots$$

$$P(Y=y_j)=P(X\le +\infty, Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \overset{\text{记为}}{=\!=} p_{\bullet j} \qquad j=1,2,\cdots$$

边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij}$ $\quad F_Y(y)=F(+\infty,y)=\sum\limits_{y_j\le y}\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_{ij}$

条件分布律

$$P(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\ i=1,2,\cdots$$ 为$Y=y_j$条件下，随机变量X的**条件分布律**

二维连续型随机变量

联合概率密度与联合分布函数 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$

边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ $\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)dy\right]dt=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)dx\right]dt=\int_{-\infty}^{y}f_Y(t)dt$$

条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为$Y=y$ 条件下随机变量X 的条件概率密度

条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(t/y)dt$ 为$Y=y$ 条件下随机变量X 的条件分布函数

$$\text{条件分布} = \frac{\text{联合分布}}{\text{边缘分布}} \qquad \text{联合分布} = \text{边缘分布} \times \text{条件分布}$$

二维离散型随机变量

条件分布律 $P(X=x_i|Y=y_j)=\dfrac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\ i=1,2,\cdots$ 为Y=y_j条件下，随机变量X的**条件分布律**

联合分布律 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(Y=y_j)P(X=x_i|Y=y_j)=\quad i,j=1,2,\cdots$

二维连续型随机变量

条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为Y=y 条件下随机变量X的条件概率密度

联合概率密度 $f(x,y)=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)$

本节回顾

二维离散型随机变量的条件分布律

若 $P(Y=y_j)=p_{\bullet j}>0$

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\ i=1,2,\cdots$$

称为 $Y=y_j$ 条件下，随机变量 X 的条件分布律

二维连续型随机变量的条件概率密度

若 $(X、Y)$ 联合概率密度为 $f(x,y)$，$(X、Y)$ 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$，
若对于固定 y，$f_Y(y)>0$，则称

$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为 $Y=y$ 条件下随机变量 X 的条件概率密度　记为 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

3.6 随机变量的独立性

问题的提出

定义了二维随机变量并获取其联合分布之后，有可能需要探讨两个变量之间的独立性，讨论二者的发生与否有无相互影响的关系

例如：

为研究某地区学龄儿童的发育情况，同时考察了每个儿童的身高和体重，即二维随机变量(X、Y)，为研究二者间的关系，可探讨两个变量X与Y之间的独立性

定义 ——分布函数

设$F(x, y)$及$F_X(x)$、$F_Y(y)$是二维随机变量 (X、Y) 的联合分布函数及边缘分布函数，若对所有x、y有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

即 $P(X\le x, Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)$ 称随机变量X和Y相互独立

定理1 ——分布律

设二维离散型随机变量 (X、Y)的联合分布律是 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots$

边缘分布律分别是 $P(X=x_i)=p_{i\cdot}$，$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$ 则X和Y相互独立等价于

$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$ 即 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ 对一切 i 和 j 都成立

定理2 ——概率密度

设 (X、Y)是连续型随机变量的联合概率密度$f(x, y)$及边缘概率密度$f_X(x)$、$f_Y(y)$是除有限点外的连续函数，则X和Y相互独立等价于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

例 (X,Y)具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求二者是否独立?

解 X和Y的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

满足 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

故X、Y相互独立

例 (X,Y)具有联合分布律（下图）

求二者是否独立?

Y \ X	0	1	P(Y=j)
1	1/6	2/6	1/2
2	1/6	2/6	1/2
P(X=i)	1/3	2/3	

解 $P(X=0,Y=1)=1/6=P(X=0)P(Y=1)$

$P(X=0,Y=2)=1/6=P(X=0)P(Y=2)$

$P(X=1,Y=1)=2/6=P(X=1)P(Y=1)$

$P(X=1,Y=2)=2/6=P(X=1)P(Y=2)$

X、Y相互独立

例 (X,Y)具有联合分布律（右图）

求二者是否独立？

$Y \backslash X$	0	1	$P(Y=j)$
1	1/6	2/6	1/2
2	2/6	1/6	1/2
$P(X=i)$	1/2	1/2	

解 $P(X=0,Y=1)=1/6$

$P(X=0)P(Y=1)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \neq P(X=0,Y=1)$

X、Y不相互独立

例 X、Y是相互独立的随机变量，已知(X, Y)联合分布律，求表中剩余的概率值

解

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X=i)$
1	0.01	0.2	0.04	0.25
2	0.03	0.6	0.12	0.75
$P(Y=j)$	0.04	0.8	0.16	

例 证明：对二维正态随机变量(X, Y)，X、Y相互独立的充要条件是参数 $\rho=0$

证 (X, Y)联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

由之前例题知，X、Y边缘概率密度为$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}$　　$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}}$

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

"$\Rightarrow$"　如果$\rho=0$，则对于所有x、y有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 即X、Y相互独立

"$\Leftarrow$"　反之，若X、Y相互独立，由于$f(x, y)$及$f_X(x)$、$f_Y(y)$都是连续函数，故对所有x、y有

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 特别的有 $f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$

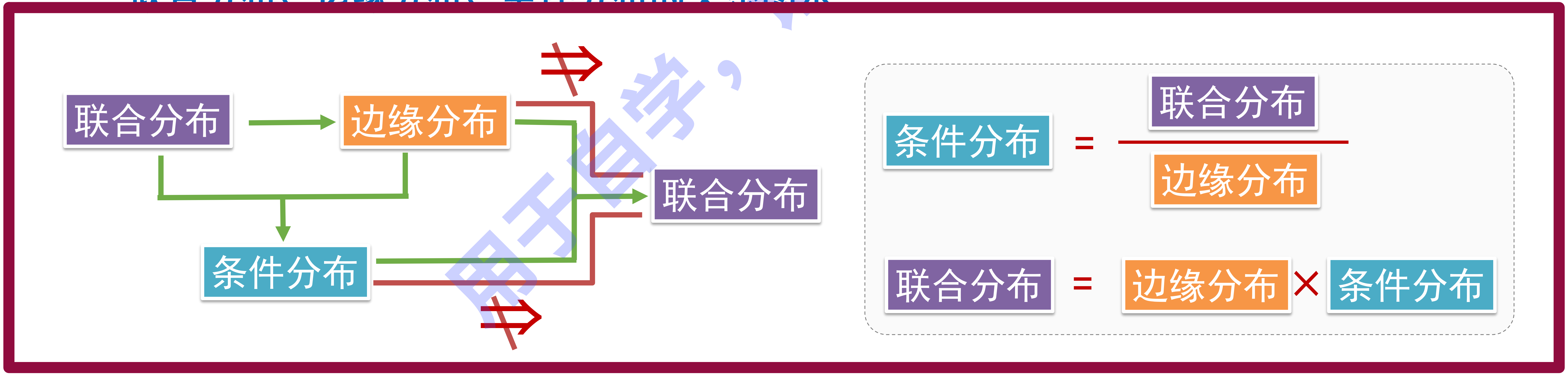
即 $\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$　　　$\rho=0$

注意

如果只知道关于X和关于Y的边缘概率分布，一般不能推导出(X, Y)的联合概率分布

例如：若二维随机变量(X, Y)中的X和Y都分别服从参数已知的一维正态分布，但不知参数ρ值的情况下仍然无法获知二维正态随机变量的具体分布

联合分布、边缘分布、条件分布的关系图示



例 设甲、乙两种元器件的寿命X、Y相互独立，服从同一分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$$

求甲寿命不大于乙寿命2倍的概率。

解 (X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x+y}{2}} & x>0, y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$P(X\le 2Y)=\int_0^{+\infty}dx\int_{x/2}^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{x+y}{2}}dy=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{4}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{3x}{4}}dx=\frac{2}{3}$$

推广至n维随机变量 ($n\geq 2$)

设E是一个随机试验，样本空间$\Omega=\{e\}$；$X_1=X_1(e), X_2=X_2(e),\ldots, X_n=X_n(e)$是定义在$\Omega$上的随机变量，$n$维向量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$称**$n$维随机变量或$n$维随机向量**

n维随机变量的联合分布函数

对于任意实数n个实数$x_1, x_2, \ldots, x_n$有n元函数 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P(X_1\leq x_1, X_2\leq x_2,\ldots,X_n\leq x_n)$

称为n维随机变量 **$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合分布函数**

n维离散型随机变量的联合分布律

设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$所有可能取值为$(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \cdots, x_{ni_n})$ $i_j=1, 2, \ldots$

$$P(X_1=x_{1i_1}, X_2=x_{2i_2},\cdots,X_n=x_{ni_n})\quad j=1,2,\cdots n$$

称n维离散型随机变量 **$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合分布律**

n维连续型随机变量的联合概率密度

若存在**非负函数** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，使得对于任意实数$x_1, x_2, \ldots, x_n$，有

$$F(x_1,x_2,\cdots x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1,x_2,\cdots x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

称其为n维连续型随机变量 **$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合概率密度**

边缘分布

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合分布函数 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$已知，则$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的$k\ (1\le k\le n)$维**边缘分布函数**就随之确定

例如边缘分布函数 $F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, +\infty, \cdots, +\infty)$$

其边缘分布律 $P(X_1 = x_{1i_1}) = \sum_{i_2, i_3, \cdots i_n} P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n})$

$$P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}) = \sum_{i_3, i_4, \cdots i_n} P(X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n})$$

其边缘概率密度 $f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_2 dx_3 \cdots dx_n$

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_3 dx_4 \cdots dx_n$$

相互独立

若对于所有$x_1, x_2, \ldots, x_n$，有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立

若对于所有$x_1, x_2, \ldots, x_m$；$y_1, y_2, \ldots, y_n$有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$= F_1(x_1, x_2, \cdots x_m)F_2(y_1, y_2, \cdots y_n)$$

其中F_1、F_2、F依次为随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$、$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$、$(X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$的联合分布函数

则称$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立

定理1

设$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立，则$X_i\,(i=1, 2, \ldots, m)$与$Y_j\,(j=1, 2, \ldots, n)$相互独立

设$h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$与$g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$是连续函数，则$h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$与$g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立

定理2

设$X_1, X_2, \ldots, X_m$相互独立，将其分成任意k个没有相同随机变量的不同小组，并对每个小组的随机变量施以相应连续函数运算后，所得到的k个随机变量也相互独立

本节回顾

相互独立的判断

分布函数： 设$F(x, y)$及$F_X(x)$、 $F_Y(y)$是二维随机变量 $(X、Y)$ 的联合分布函数及边缘分布函数，若对所有x、y有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

即 $P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$ 称随机变量X和Y相互独立

分布律： 设二维离散型随机变量 $(X、Y)$的联合分布律是 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$

边缘分布律分别是 $P(X=x_i)=p_{i\cdot}$ ， $P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$ 则X和Y相互独立等价于

$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$ 即 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ 对一切 i 和 j 都成立

概率密度： 设 $(X、Y)$是连续型随机变量的联合概率密度$f(x, y)$及边缘概率密度$f_X(x)$、 $f_Y(y)$是除有限点外的连续函数，则X和Y 相互独立等价于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

CHAPTER 3

多维随机变量及其分布

3.7 二维随机变量函数及其分布

定义

设 (X, Y)是二维随机变量，$z=g(x, y)$是已知的连续函数，则称 $Z=g(X, Y)$为二维随机变量 (X, Y)的函数

显然，二维随机变量的函数是一维随机变量

二维离散型随机变量函数的分布

设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$$

则 $Z=g(X, Y)$的可能取值为 $z_l\ (l=1,2,\cdots)$ 　其中 $z_l=g(x_i, y_j),\ \ i,j=1,2,\cdots$

Z 的分布律为 $P(Z=z_l)=\sum\limits_{g(x_i,y_j)=z_l} p_{ij},\ \ l=1,2,\cdots$

$$P(Z=z_l)=\sum_{g(x_i,y_j)=z_l} p_{ij},\quad l=1,2,\cdots$$

当 $Z=X+Y$时，

$$P(Z=z_l)=\sum_{x_i+y_j=z_l} p_{ij}=\sum_{x_i+y_j=z_l} P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_i P(X=x_i,Y=z_l-x_i)$$

或 $$P(Z=z_l)=\sum_{x_i+y_j=z_l} p_{ij}=\sum_{x_i+y_j=z_l} P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_j P(X=z_l-y_j,Y=y_j)$$

若X与Y相互独立

$$P(Z=z_l)=\sum_i P(X=x_i,Y=z_l-x_i)=\sum_i P(X=x_i)P(Y=z_l-x_i)$$

或 $$P(Z=z_l)=\sum_j P(X=z_l-y_j,Y=y_j)=\sum_j P(X=z_l-y_j)P(Y=y_j)$$

$Z=X+Y$ 的分布

设$(X$、$Y)$ 为二维连续型随机变量，联合概率密度为$f(x,y)$， 求$Z=X+Y$ 概率密度$f_Z(z)$

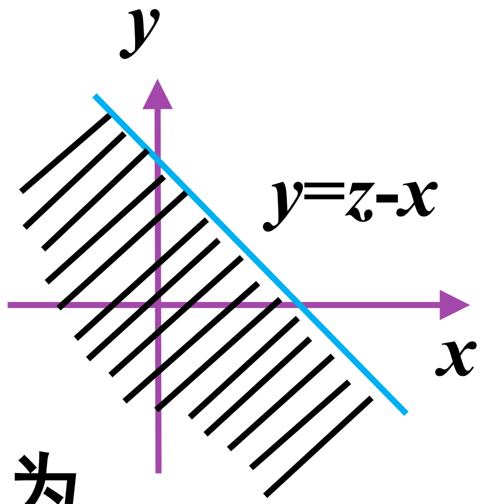
可先求Z的分布函数$F_Z(z)$

需要改为积分上限为z

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$

固定z、y，令$x=u-y$，$dx=du$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du\right]dy=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy\right]du=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)du$$



故$Z=X+Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$

由X、Y 的对称性，又可记为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

又若 X、Y 相互独立， $(X$、$Y)$ 关于X、Y 的边缘概率密度分别为$f_X(x)$、 $f_Y(y)$，又可记为

$$f_X*f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

——f_X和f_Y的卷积公式

例 设X和Y是相互独立的标准正态分布随机变量，求$Z=X+Y$的概率密度。

解 由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$\overset{令t=x-\frac{z}{2}}{=\!=}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

即 $Z\sim N(0, 2)$

若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且二者独立

则 $aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$

若 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ 且独立

则 $X_1+X_2+\cdots+X_n\sim N(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n,\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2)$

n个独立正态随机变量的线性组合（系数不全为0）仍然服从正态分布

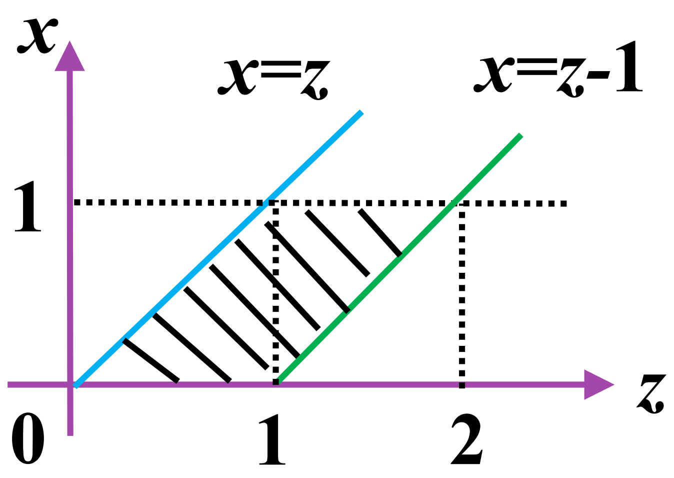
例 设X和Y相互独立，它们各自均服从(0, 1)上的均匀分布，求$Z=X+Y$的概率密度。

解 X和Y的概率密度分别为 $f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

易知仅当

$\begin{cases}0<x<1\\ 0<z-x<1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<x<1\\ z-1<x<z\end{cases}$ 时上述积分的被积函数不等于0



参考图得 $f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z dx=z & 0<z<1\\ \int_{z-1}^1 dx=2-z & 1\le z<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

例 设X和Y相互独立，服从指数分布$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}} & x\ge 0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求$Z=X+Y$的概率密度。

解 由卷积公式$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

当$z\le 0$时，$f_Z(z)=0$

当$z>0$时，仅当$x>0$、$z-x<0$时，上述积分的被积函数不等于0

于是当$z>0$时，$f_Z(z)=\int_0^z\dfrac{1}{\beta^2}e^{-\frac{x}{\beta}}e^{-\frac{z-x}{\beta}}dx=\dfrac{z}{\beta^2}e^{-\frac{z}{\beta}}$

即 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\beta^2}e^{-\frac{z}{\beta}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

参数为$(2,\beta)$的$\Gamma(Gamma)$分布

例 设X和Y相互独立且分别服从参数为(α_1, β)、(α_2, β)的Γ分布，则$Z=X+Y$服从参数为$(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$的$\Gamma$分布。

证

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)}y^{\alpha_1-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad \alpha_1>0,\beta>0 \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha_2}\Gamma(\alpha_2)}y^{\alpha_2-1}e^{-\frac{y}{\beta}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}\quad \alpha_2>0,\beta>0$$

由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$ 当$z\le 0$时，$f_Z(z)=0$

当$z>0$时，$f_Z(z)=\int_0^z\dfrac{x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\tau(\alpha_2)}e^{-\frac{x}{\beta}-\frac{z-x}{\beta}}dx=\dfrac{e^{-\frac{z}{\beta}}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}dx$

$$\overset{令x=zt}{=\!=}\frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\frac{z}{\beta}}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt=Az^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\frac{z}{\beta}}$$

由此可知 $Z\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$ 且常数 $A=\dfrac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$

$Z=\frac{Y}{X}$ 和 $Z=XY$ 的分布

设$(X$、$Y)$ 为连续型随机变量，联合概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z=\frac{Y}{X}$ 和$Z=XY$ 仍为连续型随机变量，概率密度如下：

$$Z=\frac{Y}{X}：f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x,xz)dx$$

$$Z=XY：f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx$$

又若 X、Y **相互独立**，$(X$、$Y)$ 关于X、Y 的边缘概率密度为$f_X(x)$、$f_Y(y)$，表达式继续化为

$$Z=\frac{Y}{X}：f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f_X(x)f_Y(xz)dx$$

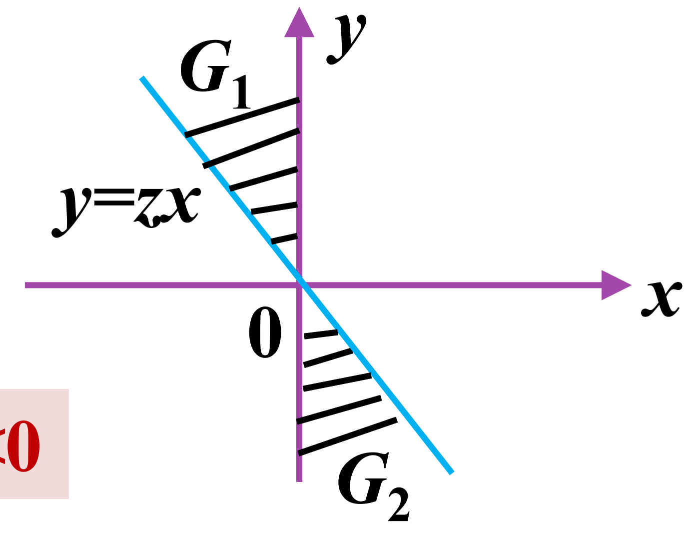
$$Z=XY：f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})dx$$

证明 （以 $Z=\dfrac{Y}{X}$ 为例）

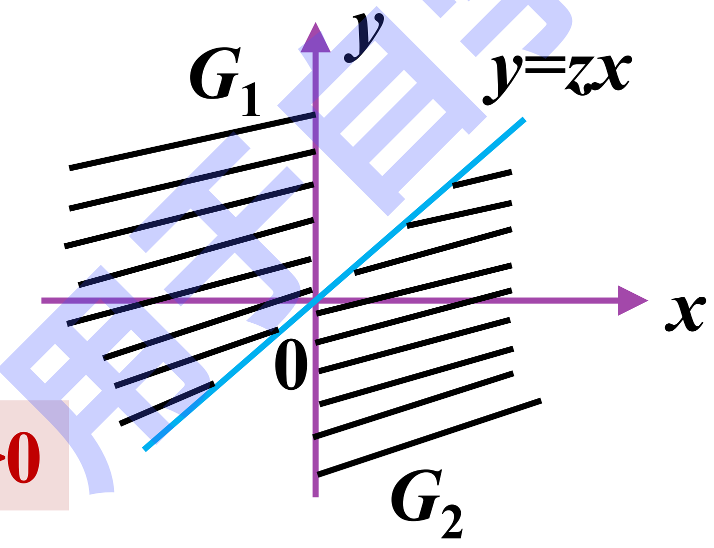
$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\iint\limits_{G_1\cup G_2} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\frac{y}{x}\le z,\,x<0} f(x,y)dydx+\iint\limits_{\frac{y}{x}\le z,\,x>0} f(x,y)dydx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)dy\right]dx$$



$z<0$



$z>0$

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)dy\right]dx$$

令$y=xu$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z}^{+\infty} xf(x,xu)du\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du\right]dx$$

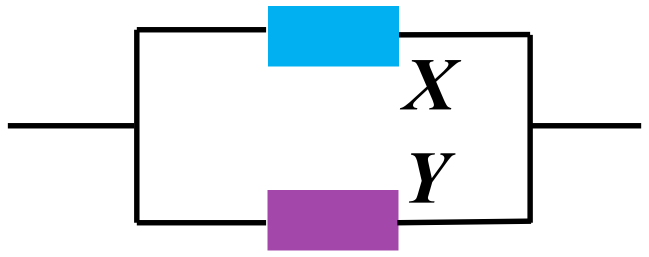
$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{-\infty}^{z}(-x)f(x,xu)du\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}|x|f(x,xu)du\right]dx$$

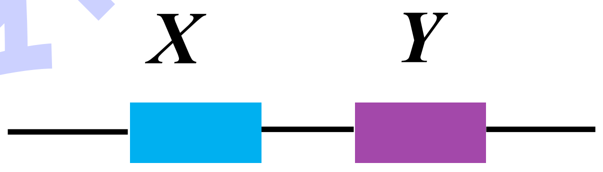
$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xu)dx\right]du$$

由概率密度$F_Z(z)$与$f_z(z)$关系 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)dx$

极值分布：$M=\max\{X, Y\}$ 和 $N=\min\{X, Y\}$ （X与Y相互独立）



$M=\max\{X, Y\}$



$N=\min\{X, Y\}$

若X、Y相互独立，已知各自边缘分布函数为$F_X(x)$、 $F_Y(y)$，求$M=\max\{X, Y\}$和$N=\min\{X, Y\}$的分布函数$F_{\max}(z)$和$F_{\min}(z)$

$M=\max\{X, Y\}$ 不大于z等价于X和Y都不大于z

$$F_{\max}(z)=P(M\le z)=P(X\le z, Y\le z)$$

$$=P(X\le z)P(Y\le z)$$

相互独立

即 $F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$

$N=\min\{X, Y\}$不大于z等价于X和Y至少一个不大于z

$$F_{\min}(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)=1-P(X>z, Y>z)$$

$$=1-P(X>z)P(Y>z)$$

相互独立

即 $F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

推广到n个相互独立的随机变量

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是n个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i) \quad i=1,2,\cdots n,$

$M=\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$的分布函数

$$F_{\max}(x)=F_{X_1}(x)F_{X_2}(x)\cdots F_{X_n}(x)$$

$N=\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$的分布函数

$$F_{\min}(x)=1-\left[1-F_{X_1}(x)\right]\left[1-F_{X_2}(x)\right]\cdots\left[1-F_{X_n}(x)\right]$$

特别地，当$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时，

$$F_{\max}(x)=\left[F(x)\right]^n \qquad F_{\min}(x)=1-\left[1-F(x)\right]^n$$

此时概率密度分别为 $f_{\max}(x)=F'_{\max}(x)=n\left[F(x)\right]^{n-1}f(x) \qquad f_{\min}(x)=F'_{\min}(x)=n\left[1-F(x)\right]^{n-1}f(x)$

例 设X与Y的联合分布律如下图，令$U=X+Y$, $V=\max\{X, Y\}$， 求(U, V)的联合分布律。

$X \backslash Y$	1	2
1	0.2	0.1
2	0.3	0.4

解 当$X=1$, $Y=1$时

$$P(U=2, V=1)=P(X=1, Y=1)=0.2$$

当$X=1$, $Y=2$时

$$P(U=3, V=2)=P(X=1, Y=2)=0.1$$

当$X=2$, $Y=1$时

$$P(U=3, V=2)=P(X=2, Y=1)=0.3$$

$$P(U=3, V=2)=0.1+0.3=0.4$$

当$X=2$, $Y=2$时

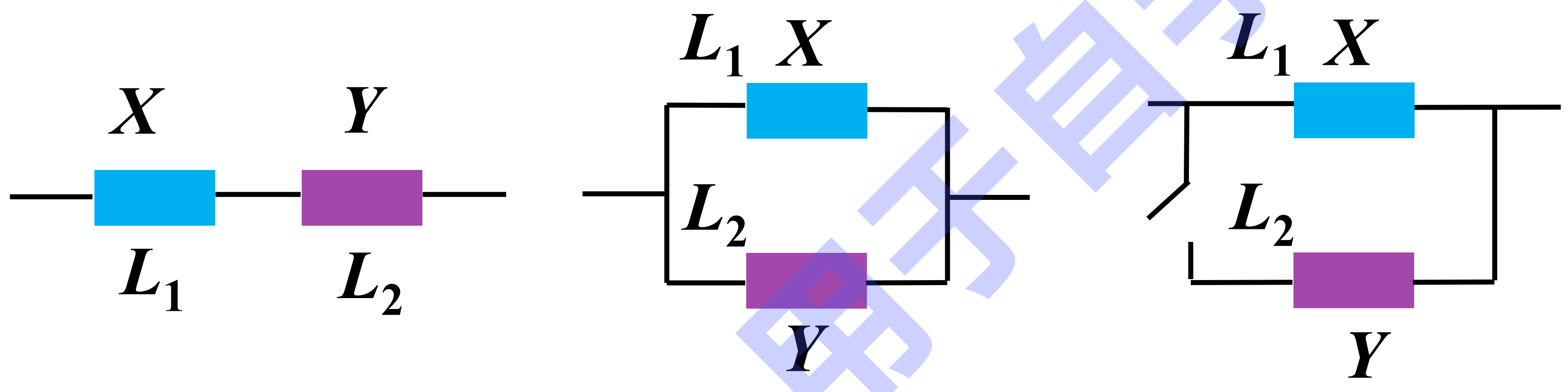
$$P(U=4, V=2)=P(X=2, Y=2)=0.4$$

$U \backslash V$	1	2
2	0.2	0
3	0	0.4
4	0	0.4

例 设系统L由两个相互独立的子系统L_1、L_2联结而成，联结的方式分别为：(i)串联；(ii)并联；(iii)备用（当系统L_1损坏时系统L_2开始工作）。设L_1、L_2的寿命分别为X、Y，概率密度如下，且 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\neq\beta$

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x} & y>0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

分别就以上三种联结方式写出L的寿命Z的概率密度。



(i) (ii) (iii)

解 (i) 串联的情况

由于当L_1、L_2中有一个损坏时，系统L就停止工作，所以L的寿命为$Z=\min\{X, Y\}$

Z的分布函数为：

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta x} & y>0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$$

$$F_{\min}(z)=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\leq 0\end{cases}$$

Z的概率密度为：

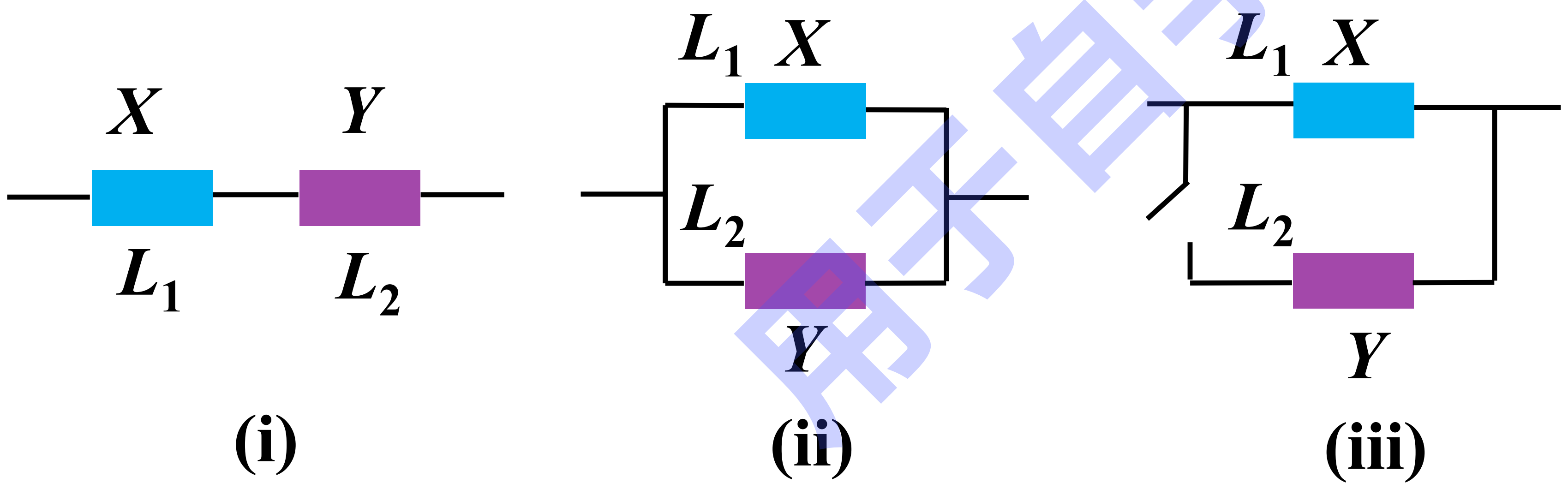
$$f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\leq 0\end{cases}$$

即Z仍服从指数分布

例 设系统L由两个相互独立的子系统L_1、L_2联结而成，联结的方式分别为：(i)串联；(ii)并联；(iii)备用（当系统L_1损坏时系统L_2开始工作）。设L_1、L_2的寿命分别为X、Y，概率密度如下，且 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\neq\beta$

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

分别就以上三种联结方式写出L的寿命Z的概率密度。



解 (ii) 并联的情况

由于当且仅当L_1、L_2都损坏时，系统L才停止工作，所以L的寿命为Z=max{X, Y}，

Z的分布函数为：

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta x} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$F_{\max}(z)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

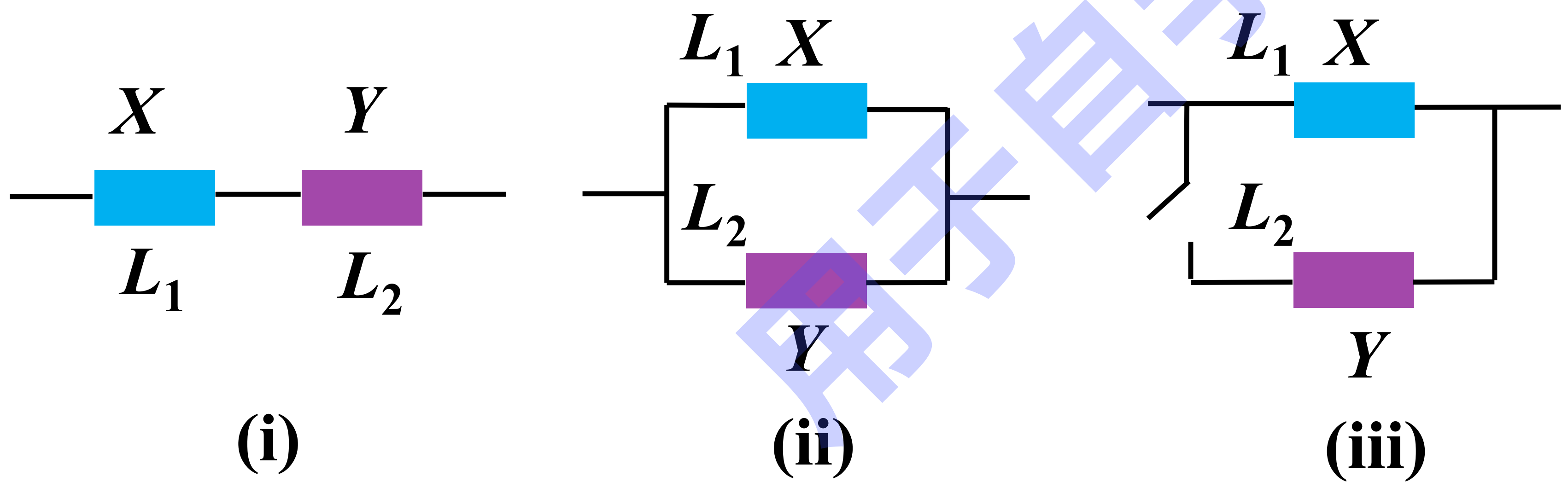
Z的概率密度为：

$$f_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

例 设系统L由两个相互独立的子系统L_1、L_2联结而成，联结的方式分别为：(i)串联；(ii)并联；(iii)备用（当系统L_1损坏时系统L_2开始工作）。设L_1、L_2的寿命分别为X、Y，概率密度如下，且 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\neq\beta$

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

分别就以上三种联结方式写出L的寿命Z的概率密度。



解 (iii) 备用的情况

由于当L_1损坏后，系统L_2才开始工作，所以整个系统L的寿命为L_1、L_2寿命之和，即$Z=X+Y$

当$z\le 0$ 时， $f_Z(z)=0$

当$z>0$ 时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy$$

$$=\alpha\beta e^{-\alpha z}\int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}dy=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right)$$

即 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}\right) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

本节回顾

- $Z=X+Y$

$Z=X+Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$ $\quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

又若 X、Y 相互独立，$(X$、$Y)$ 关于 X、Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，又可记为

$$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

——f_X 和 f_Y 的卷积公式

- $M=\max\{X, Y\}$ 和 $N=\min\{X, Y\}$

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z) \qquad F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

推广到 n 个相互独立的随机变量

$M=\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的分布函数 $\quad F_{\max}(x)=F_{X_1}(x)F_{X_2}(x)\cdots F_{X_n}(x)$

$N=\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的分布函数 $\quad F_{\min}(x)=1-[1-F_{X_1}(x)][1-F_{X_2}(x)]\cdots[1-F_{X_n}(x)]$

复习思考题

1. 设(X, Y)为二维随机变量，则$P(x_1<X\leq x_2, y_1<Y\leq y_2)=F(x_2, y_2)-F(x_1, y_1)$，对吗？

2. 设(X, Y)为二维连续型随机变量，则$P(X+Y=1)=0$，对吗？

3. (X, Y)为二维连续型随机变量，$f(x,y)$为(X, Y)的联合概率密度，$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别是关于X和关于Y的边缘概率密度，若存在一点(x_0, y_0)使$f(x_0, y_0)\neq f_X(x_0)\,f_Y(y_0)$，则有$X$和$Y$不独立，对吗？