第7章 参数估计

概率论与数理统计课程组

CHAPTER 7

参数估计

§7.1 点估计

§7.2 区间估计

§7.3 单侧置信区间

§7.4 估计量的评选标准

CHAPTER 7

参数估计

7.1 点估计

问题的提出

参数估计是统计推断的基本问题之一，实际工作中碰到的总体，其分布类型往往是知道的，只是不知道其中的某些参数

因此，要求估计该参数的值，或是以一定的可靠性估计该参数在某个范围内或者不低于某数。参数估计问题就是要求通过样本估计总体分布所包含未知参数的值

参数估计的分类
- 点估计
  - 矩估计法
  - 最大似然估计法
- 区间估计

点估计

设总体X的分布函数$F(x;\ \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$形式已知，$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$是未知参数，$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自总体$X$的一个样本，$x_1, x_2, \dots, x_n$是相应的一个样本值。

点估计问题就是要构造一个适当的统计量

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(X_1, X_2, ..., X_n) \qquad i = 1, 2, ...$$

用它的观察值作为未知参数θ_i的近似值

$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(X_1, X_2, ..., X_n)$ 称为θ_i的点估计量

本质是一个随机变量

$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ 称为θ_i的点估计值

矩估计法

设X是连续型随机变量，其概率密度为
$f(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k)$
或X为离散型随机变量，其分布律为
$P(X=x)=p(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k)$

其中$\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$为待估参数，$X_1,X_2,\dots,X_n$是来自总体$X$的样本，假设总体$X$的前$k$阶矩

$$\mu_l=E(X^l)=\int_{-\infty}^{\infty}x^l f(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k)dx$$ X连续型

$$\mu_l=E(X^l)=\sum_{x\in R_X}x^l p(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k)$$ X离散型

存在，一般它们是$\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$的函数

基于样本矩 $A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$

依概率收敛于相应的总体矩μ_l

样本矩的连续函数依概率收敛于相应的总体矩的连续函数

定义

由*Khinchine*大数定律，若总体X的期望$E(X)$有限，则样本均值$\overline{X}$收敛于$E(X)$

因此，可以用样本矩作为相应的总体矩的估计量，而以样本矩的连续函数作为相应总体矩连续函数的估计量

该方法称为矩估计法

❖ 样本矩的连续函数收敛于总体矩的连续函数

统计量 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,\ k=1,\ 2,\cdots$ 样本值 $a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k,\ k=1,\ 2,\cdots$

设总体X的k阶矩存在，记为 $E(X^k)\xrightarrow{\text{记成}}\mu_k$

当$n\to\infty$时，$A_k\xrightarrow{P}\mu_k,\ k=1,2,\ldots$

因为$X_1,X_2,\ldots,X_n$互相独立且与X同分布，故 $X_1^k,X_2^k,\ \ldots,X_n^k$ 独立且与X^k同分布

$$E(X_1^k)=E(X_2^k)=\ldots=E(X_n^k)=\mu_k$$

由*Khinchine*大数定律 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}\mu_k,\ k=1,2,\ldots$

由依概率收敛的性质 $g(A_1,A_2,\ldots,A_k)\xrightarrow{P}g(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k)$ g是连续函数

具体流程

设 $\begin{cases} \mu_1 = \mu_1(\theta_1, \theta_2, \ \cdots \ , \theta_k) \\ \mu_2 = \mu_2(\theta_1, \theta_2, \ \cdots \ , \theta_k) \\ \quad \vdots \\ \mu_k = \mu_k(\theta_1, \theta_2, \ \cdots \ , \theta_k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_1(\mu_1, \mu_2, \ \cdots \ , \mu_k) \\ \theta_2 = \theta_2(\mu_1, \mu_2, \ \cdots \ , \mu_k) \\ \quad \vdots \\ \theta_k = \theta_k(\mu_1, \mu_2, \ \cdots \ , \mu_k) \end{cases}$

其中 $\mu_l = E(X^l)$

这是一个包含k个参数$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$的联立方程组，可以从中解出$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$

以样本矩A_l分别代替上式中总体矩μ_l, $l = 1, 2, \ldots, k$

而 $A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$

以 $\hat{\theta}_i = \theta_i(A_1, A_2, \ \cdots \ , A_k), \ i = 1, 2, \ldots, k$

分别作为θ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$的估计量

这种估计量称为参数θ_i的**矩估计量**，其样本值称为参数θ_i的**矩估计值**

流程概要

2、3顺序可互换

1. 写出总体矩的k个方程，是k个未知参数的表达式
2. 解方程组，将每个未知参数用总体矩表示
3. 用样本l阶矩代替总体l阶矩

例 设在总体X的均值μ和方差σ^2均未知，$(X_1, X_2,\dots, X_n)$是取自X的一个样本，试求μ和σ^2的矩估计。

解 先求总体矩

Step 1 求总体矩，有几个参数待估就写几个

$$\mu_1 = E(X) = \mu$$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + \left[E(X)\right]^2 = \mu^2 + \sigma^2$$

再求样本矩

Step 3 求样本矩，用来替代总体矩

$$A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X},\quad A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

令 $\begin{cases} \mu_1 = A_1 \\ \mu_2 = A_2 \end{cases}$ 得到 $\begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \end{cases}$

Step 2

解方程组，采用规范的统计量写法

例 设总体概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta}\, x^{\sqrt{\theta}-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$\theta > 0$是未知参数，$(X_1, X_2,\dots, X_n)$是取自X的一个样本，试求θ的矩估计。

解

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{\theta}\, x^{\sqrt{\theta}} dx$$

$$= \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

Step 1

令 $E(X) = \overline{X}$

Step 3

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} = \overline{X} \ \Rightarrow \hat{\theta} = \left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$$

Step 2

最大似然估计法

引例

考察下例，假设在一个罐中放着许多白球和黑球，并假定已经知道两种球的数目之比是1:3，但不知道哪种颜色球多。如果用放回抽样方法从罐中任取 n 个球，其中黑球的个数为 x 的概率为

$$P\left(x;p\right)=C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$$

由假设知，$p=\frac{1}{4}$ 或 $p=\frac{3}{4}$

若取 n=3，如何通过x来估计p值

先计算抽样的可能结果 x 在这两种 p 值之下的概率，列出分布律

x	0	1	2	3
$P(x, 3/4)$	1/64	9/64	27/64	27/64
$P(x, 1/4)$	27/64	27/64	9/64	1/64

从上表可知

$x=0$, $P\left(0,1/4\right)=27/64>P\left(0,\ 3/4\right)=1/64$

$\hat{p}=1/4$ 更合理；x=1类似；

$x=2$, $P\left(2,1/4\right)=9/64<P\left(2,\ 3/4\right)=27/64$

$\hat{p}=3/4$ 更合理；x=3类似；

因此 $\hat{p}(x)=\begin{cases}1/4 & x=0,\ 1\\ 3/4 & x=2,\ 3\end{cases}$

对每个x，取 $\hat{p}(x)$ 使得 $P\left[x;\hat{p}(x)\right]\geq P\left(x;p'\right)$

p'是不同于p的另一个值

最大似然估计的原理

抽样中，样本$X_1, X_2, \dots, X_n$取值为$x_1, x_2, \dots, x_n$这一事件发生的可能性应该是较大的（因为结果已然出现），即参数的取值应使得事件$\{X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n\}$的概率最大

具体流程

若X为离散型随机变量，其分布律为 $P(X=x)=p(x;\theta)$，或若X是连续型随机变量，其概率密度为$f(x;\theta)$

$\theta=(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$是待估参数，$\theta\in\Theta$，$\Theta$为参数空间，也就是$\theta$的取值范围

设$(x_1, x_2, \dots, x_n)$是样本$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的样本值

(i) 做似然函数

似然函数通常简写为$L(\theta)$

若X为离散型随机变量，则$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的联合分布律为

$$P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

似然函数为 $$L(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

若X为连续型随机变量，则$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的联合概率密度为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

似然函数为 $$L(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

(ii) 使似然函数取最大值

求使 $L(x_1,x_2,...,x_n;\theta)$ 达到最大，即 $L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)$

$\hat{\theta}(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 称为 θ 的最大似然估计量　　$\hat{\theta}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 称为θ的最大似然估计值

注意：求$L(\theta)$的最大值通常转为求 $\ln L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)$ 的最大值，称对数似然函数

一般是从方程 $\frac{d}{d\theta}L(\theta)=0$ 或是 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$ 解得 $\hat{\theta}$

流程概要

1. 写出似然函数（联合概率密度或联合分布律）
2. 求似然函数或对数似然函数取最大值的条件
3. 写出以统计量表示未知参数的结果

例 设总体概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$\theta>0$是未知参数，$(X_1,X_2,\dots,X_n)$是取自X的一个样本，试求θ的最大似然估计。

解 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{n/2}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1}$

Step 1 写出似然函数，即联合概率密度或联合分布律

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

Step 2 求使似然函数最大值的条件

令 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ 即 $\dfrac{n}{\sqrt{\theta}}=-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2}$

Step 3 以规范的统计量写法表示

例 设总体X概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta} & x\geq\mu \\ 0 & 其他\end{cases}$

其中$\theta>0$，θ、μ 是未知参数，$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是取自X的样本，求θ、μ 的**矩估计**与**最大似然估计**。

解 (i) 矩估计

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\mu}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}dx=\mu+\theta$$

$$E(X^2)=\int_{\mu}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}dx=\mu^2+2\theta\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta}dx=\mu^2+2\mu\theta+2\theta^2$$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\theta^2$$

令 $E(X)=\overline{X}$　　$D(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 样本二阶中心矩B_2

$$\Rightarrow\ \hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\qquad \hat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

例 设总体X概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta} & x\ge\mu\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

其中$\theta>0$，θ、μ是未知参数，$(X_1,X_2,\dots,X_n)$是取自X的样本，求θ、μ的矩估计与最大似然估计。

解 (ii) 最大似然估计

$$L(\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-(x_i-\mu)/\theta}=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}\qquad x_i\ge\mu$$

此时不能通过求偏导数获得μ的最大似然估计量

因为$x_i\ge\mu$，故μ的取值范围最大不超过 $x=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

而 $L(\theta,\mu)=\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu}{\theta}}$ 是μ的增函数，μ取最大值时L达到最大，故 $\hat{\mu}=X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

又 $\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})$ 令 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i-X_{(1)}\right]=0$ 故 $\hat{\theta}=\overline{X}-X_{(1)}$

例 设总体X服从$(0,\theta)$上的均匀分布，$\theta>0$未知，$x_1,x_2,\ldots,x_n$是取自X的一个样本，试求θ的最大似然估计和矩估计。

解 (i) 最大似然估计　　X概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n} & 0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$　由于$\dfrac{d}{d\theta}\ln(\theta)=-\dfrac{n}{\theta}\ne 0$　不能用微分法求 $\hat{\theta}$

只能从定义上去求 $\hat{\theta}$　　因为$0\le x_i\le\theta$　故θ的最小取值为 $x_{(n)}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

又 $\ln L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}$　对$\theta>x_{(n)}$的θ是减函数　　θ越小，L越大，故 $\hat{\theta}=x_{(n)}$ 时，L最大

故θ的最大似然估计值是 $\hat{\theta}=x_{(n)}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

(ii) 矩估计　　由 $E(X)=\int_0^\theta\dfrac{1}{\theta}x\,dx=\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}$　　$\Rightarrow\hat{\theta}=2\overline{X}=2\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

本题给出条件是样本值，因此答案用样本估计值（估计量的观测值），一般是用样本的估计量表示

例 设总体X分布律为

x_k	1	2	3
p_k	θ	$\theta/2$	$1-3\theta/2$

θ 是未知参数， 现得到X的一组样本观测值(2, 3, 2, 1, 3)，试求θ的矩估计和最大似然估计。

解 (i) 矩估计

$$E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_k p_k=\theta+2\times\theta/2+3\times(1-3\theta/2)=3-5\theta/2$$

$$\overline{X}=2.2 \qquad 令\ E(X)=\overline{X} \qquad \Rightarrow \hat{\theta}=0.32$$

(ii) 最大似然估计

$$L(\theta)=(\theta/2)(1-3\theta/2)(\theta/2)\theta(1-3\theta/2)=\frac{1}{16}\theta^3(2-3\theta)^2$$

$$\ln L(\theta)=-\ln 16+3\ln\theta+2\ln(2-3\theta) \qquad \frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{3}{\theta}-\frac{6}{2-3\theta}=0 \qquad \Rightarrow \hat{\theta}=0.4$$

上述例题矩估计和最大似然估计的结果

分布	矩估计	最大似然估计
例 2&4	$\hat{\theta}=\left(\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$	$\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2}$
例 5	$\hat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$	$\hat{\mu}=X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ $\hat{\theta}=\overline{X}-X_{(1)}$
例 6	$\hat{\theta}=2\overline{X}$	$\hat{\theta}=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

本节回顾

矩估计法

1. 写出总体矩的k个方程，是k个未知参数的表达式
2. 解方程组，将每个未知参数用总体矩表示
3. 用样本l阶矩代替总体l阶矩

最大似然估计法

1. 写出似然函数（联合概率密度或联合分布律）
2. 求似然函数或对数似然函数取最大值的条件
3. 写出以统计量表示未知参数的结果

CHAPTER 7

参数估计

7.2 区间估计

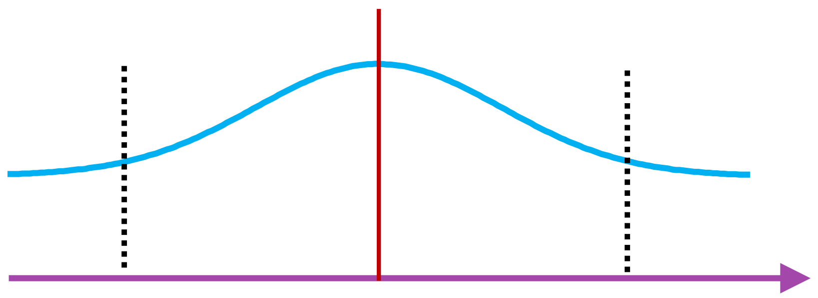
点估计是由样本求出未知参数θ的一个估计值，区间估计则是由样本给出参数θ的一个估计范围，并指出该区间包含θ的可靠程度。

引例

一果园收获了30万个苹果，抽取其中36个苹果作为样本，测得样本均值为112g（标准差为40g），问：30万个苹果的均值 μ 落在100~124 g的概率是多少？

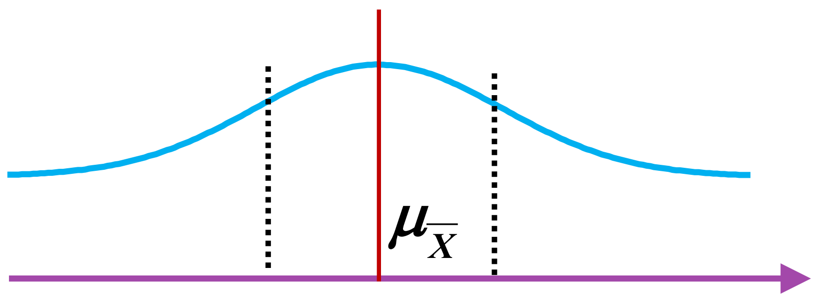
30万个苹果可视为总体，其均值μ和方差σ^2未知；
样本容量36，样本均值的一观察值为112，样本标准差的一观察值为40（注意样本标准差是 S 不是σ）

总体分布 $\sim N(\mu,\sigma^2)$



$\mu_{\overline{X}}=\mu \qquad \sigma_{\overline{X}}=\sigma/\sqrt{n}$

样本分布 $\sim N(\mu_{\overline{X}},\sigma_{\overline{X}}^{\ 2})$



$\mu_{\overline{X}}=112 \qquad \sigma_{\overline{X}}=40 \qquad n=36$

题意是求总体均值 μ 落在样本均值 $\overline{X}$ 左右12g范围内的概率

实际也可转为求样本均值 $\overline{X}$ 落在总体均值 μ 左右12g范围内的概率

可以用样本均值的抽样分布

$$P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|<12\right)=P\left(\left|\overline{X}-\mu_{\overline{X}}\right|<12\right)$$

虽然 $\sigma_{\overline{X}}=\sigma/\sqrt{n}=\sigma/6$ 但是σ仍是未知， 所以只能用最好的估计值来替代σ，也即是样本标准差S

S的一个测量值 $s=40$，因此 $\sigma_{\overline{X}}=\sigma/\sqrt{n}=\sigma/6=40/6$

$$\frac{\overline{X}-\mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}\sim N(0,1) \qquad P\left(\left|\overline{X}-\mu_{\overline{X}}\right|<12\right)=P\left(\left|\overline{X}-\mu_{\overline{X}}\right|<\frac{9}{5}\sigma_{\overline{X}}\right)=\Phi(1.8)-\Phi(-1.8)=2\Phi(1.8)-1=0.9282$$

本引例说明，可以由小样本的较少信息尽可能获得更多信息

有92.82%的概率测量样本均值落在实际均值左右12g范围

也就是说: 有92.82%的概率实际均值落在样本均值左右12g范围

有92.82%的可能性（置信水平）总体均值落在样本均值左右12g的范围（置信区间）

设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是总体X的一个样本，区间估计的方法是给出两个统计量，即

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n) \quad 与 \quad \bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

使得区间 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 以一定的可靠程度盖住θ

置信区间　置信水平

定义　　$1-\alpha$为置信水平

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数θ，$\theta\in\Theta$，Θ是θ可能的取值范围，对于给定值α $(0<\alpha<1)$，若由来自总体X的样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$确定的两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 而 $\underline{\theta}<\overline{\theta}$ 且对任意$\theta\in\Theta$有

$$P\left\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right\}=1-\alpha$$

称随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$是参数$\theta$的**置信水平为$1-\alpha$的(双侧)置信区间**

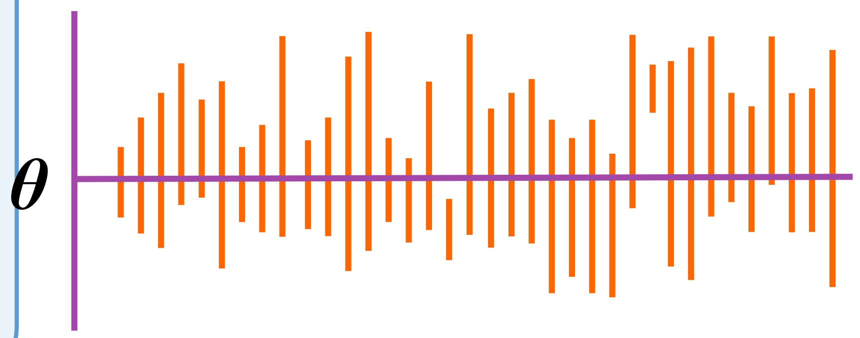
$\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$分别为参数θ在该置信水平的**双侧**置信区间的置信下限和置信上限

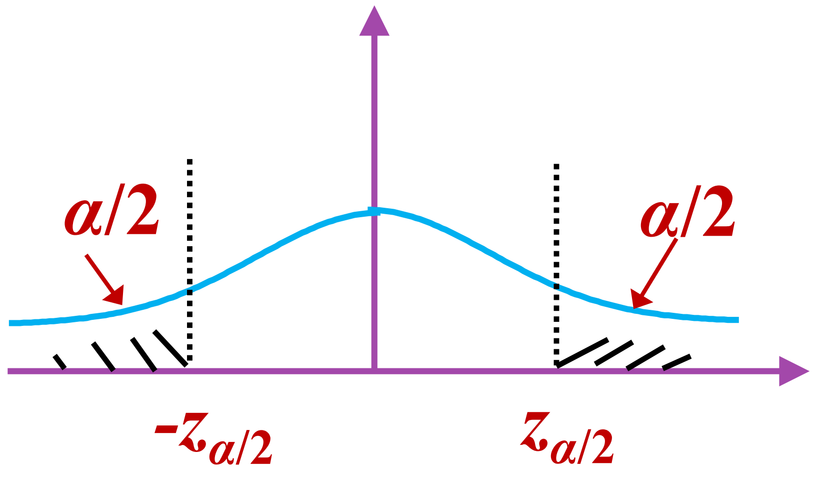
置信区间的含义

若反复抽样多次，每个样本值确定一个区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$

每个这样的区间或**包含**θ的真值，或**不包含**θ的真值

例如：当$\alpha=0.05$，即置信水平为95%时，区间不包含θ值的概率为0.05，20次区间中只有**大约**1个不包含θ值（用频率值理解）；当$\alpha=0.01$，即置信水平为99%时，100次区间中将**约**有99个包含θ值





求未知参数θ置信区间的步骤

1 • 构造一个待估参数θ及样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$的函数，称为枢轴量W（注意不能称其为统计量，因为必须含未知参数θ），W服从的分布（一般是四大分布的一种）不依赖于θ及其他任意未知参数（根据八大分布所述规则），即

$$W = W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$$

2 • 对于给定的置信水平1- α，选定两个常数a、b（上分位点），使得

$$P\{a < W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1 - \alpha$$

3 • 通过上述定W范围在(a, b)的不等式解出等价的不等式，$\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$

即 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量

从而解得θ的置信水平为1- α的置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$

正态总体区间估计的枢轴量选择（八大分布）

枢轴量是样本和待估参数的函数

❖ 单个正态总体

- 检验均值 μ
  - σ^2已知 → 1 枢轴量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
  - σ^2未知 → 4 枢轴量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
- 检验方差 σ^2
  - μ已知 → 2 枢轴量 $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$
  - μ未知 → 3 枢轴量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

❖ 两个相互独立正态总体

检验均值差 μ_1-μ_2

σ_1^2、σ_2^2 已知

5 枢轴量 $$U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知

6 枢轴量 $$t=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

检验方差比 σ_1^2/σ_2^2

μ_1、μ_2 已知

7 枢轴量 $$F=\frac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$$

μ_1、μ_2 未知

8 枢轴量 $$F=\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

单个正态总体$N(\mu, \sigma^2)$参数的置信区间

设已给定置信水平为$1-\alpha$，并设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本

$\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差

❖ μ未知，σ^2已知　求μ置信水平为$1-\alpha$的置信区间

因$\overline{X}$是μ的无偏估计，且有 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$　$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 所服从的分布$N(0, 1)$不依赖任何参数

按照其上α分位点定义，有 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$　即 $P\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2} < \mu < \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

置信区间为 $\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$　或记为 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$

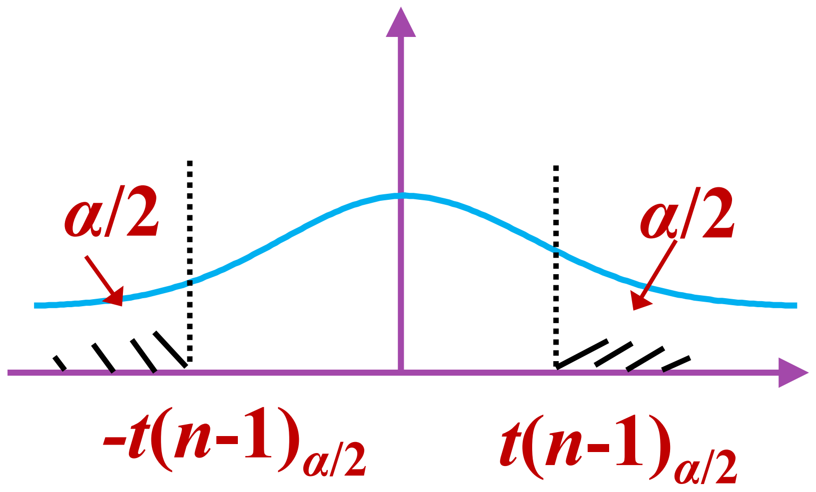
注意：置信水平为的$1-\alpha$双侧置信区间并不唯一　若 $\alpha = 0.05$　$P\left(-z_{0.04} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right) = 0.95$

❖ μ未知， σ^2未知　求μ置信水平为1- α的置信区间

$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差

σ^2未知，不可使用区间 $\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$

σ不可出现在结果的统计量中，只能使用S



由第6章定理， $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = P\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

置信区间为 $\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$　或记为 $\left(\overline{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

例 设某种植物的高度X (cm) 服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，随机选取36棵，其平均高度为15 cm，就以下两种情形，求μ的95%双侧置信区间：(i) $\sigma^2=16$，(ii) σ^2未知，$S^2=16$。

解 (i) $n=36 \quad \bar{x}=15 \quad \sigma=4$ 置信水平为$1-\alpha$

预先整理已知条件

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Step 1 根据四大分布、八大分布，构造一个样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 以及含有待估参数的函数，称为枢轴量

$$P\left(-z_{\alpha/2}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

Step 2 使得枢轴量的取值在两个分位点之间，分位点由置信水平确定

$$P\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+z_{\alpha/2}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95 \qquad P\left(\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

得 $\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15-\frac{1.96\times4}{\sqrt{36}}=13.693 \qquad \bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=15+\frac{1.96\times4}{\sqrt{36}}=16.307$

μ的95%双侧置信区间 $(13.693, 16.307)$

Step 3 查上分位表，代已知数据，整理求解不等式

例 设某种植物的高度X (cm) 服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，随机选取36棵，其平均高度为15 cm，就以下两种情形，求μ的95%双侧置信区间：(i) $\sigma^2=16$，(ii) σ^2未知，$S^2=16$。

解 (ii) $n=36$ $\bar{x}=15$ $s^2=16$ 置信水平为$1-\alpha$ 预先整理已知条件

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$ Step 1

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$ Step 2 $$P\left(\bar{X}-t_{0.025}\times\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+t_{0.025}\times\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-0.05$$

查表得 $t_{0.025}(35)=2.0301$ 又 $15-\frac{2.0301\times4}{6}=13.647$ $15+\frac{2.0301\times4}{6}=16.353$

μ的95%双侧置信区间 $(13.647,16.353)$ Step 3

(i)、(ii)两情况 μ双侧置信区间
- σ^2已知 $(13.693,16.307)$ 区间短，精度高
- σ^2未知，S^2已知 $(13.647,16.353)$ 区间长，精度低

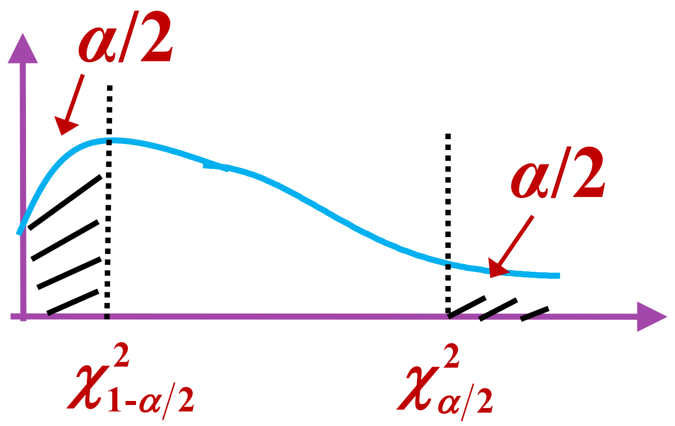
但σ^2未知的情形更为实用，用 t 分布求置信区间只依赖于样本数据及统计量 $\bar{X}$，S^2，n

❖ μ已知， σ^2未知　求σ^2置信水平为1- α的置信区间

$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本， μ已知, $\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差

由第6章定理,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$



由 $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n)\right) = 1-\alpha$　取 $P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right) = 1-\alpha$

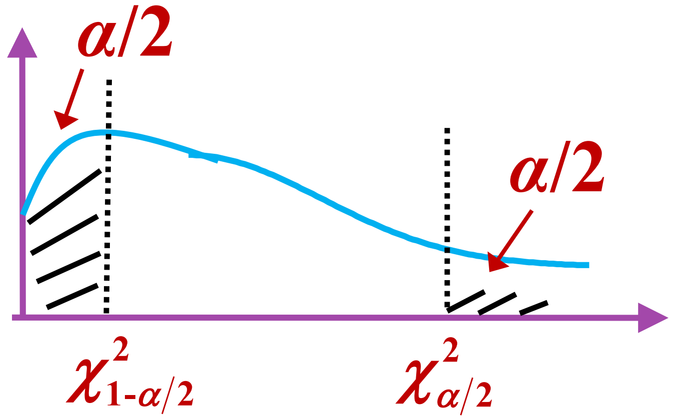
置信区间为
$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$$

❖ μ未知， σ^2未知　求σ^2置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本， μ未知，$\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差

由第6章定理，

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



由 $$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

即 $$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

置信区间为 $$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

例 一个园艺科学家正在培养一个新品种的苹果，这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外，另一个重要特征是单个重量差异不大。为了评估新苹果，随机挑选了25个测重量(单位：g)，其样本方差为 $s^2=4.25$，试求σ^2 的置信度为95%和的99%的置信区间。

解 $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$ Step 1

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$ Step 2 $$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=1-\alpha$$

置信水平为95% $$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(24)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-0.025}(24)}\right)=1-0.05$$ 查表得 $\chi^2_{0.025}(24)=39.4,\ \chi^2_{0.975}(24)=12.4$

又 $$\frac{(25-1)\times4.25}{39.4}=2.59,\ \frac{(25-1)\times4.25}{12.4}=8.23$$

95%双侧置信区间 $(2.59,8.23)$ Step 3

置信水平为99% $$\chi^2_{0.005}(24)=45.6,\ \chi^2_{0.995}(24)=9.89,\ \frac{(25-1)\times4.25}{45.6}=2.24,\ \frac{(25-1)\times4.25}{9.89}=10.31$$

99%双侧置信区间 $(2.24,10.31)$

两个正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$、$N(\mu_2, \sigma_2^2)$参数的置信区间

设 $(X_1,\cdots,X_{n_1})$ 和 $(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且两样本相互独立

设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$ 分别是样本均值，

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,\ S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$$ 分别是样本方差

❖ σ_1^2已知， σ_2^2已知 求$\mu_1-\mu_2$置信水平为$1-\alpha$的置信区间

由 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$ 转为标准正态分布 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

置信区间为 $$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\alpha/2}\right)$$

❖ $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$， σ^2未知 求$\mu_1-\mu_2$置信水平为$1-\alpha$的置信区间

设$(X_1,\cdots,X_{n_1})$和$(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ 分别是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且两样本相互独立

设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$ 分别是样本均值，

$S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$ 分别是样本方差

由第6章定理，$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ 其中 $S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$，$S_W=\sqrt{S_W^2}$

置信区间为 $\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\,t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)$

若$\mu_1-\mu_2$置信区间包含0，实际中可认为这两个均值没有显著性区别

❖ μ_1、μ_2已知　求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 置信水平为1- α的置信区间

设 $(X_1,\cdots,X_{n_1})$ 和 $(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且两样本相互独立

由第6章定理，$\dfrac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$

$$P\left(\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2,n_1)}=F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)<\frac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}<F_{\alpha/2}(n_1,n_2)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right)=1-\alpha$$

置信区间为 $$\left(\frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)},\ \frac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right)$$

❖ μ_1、 μ_2未知　求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 置信水平为1- α的置信区间

设 $(X_1,\cdots,X_{n_1})$和$(Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且两样本相互独立

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2,\ S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$$ 分别是样本方差

由第6章定理， $\dfrac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

$$P\left(\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}=F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)=1-\alpha$$

置信区间为 $$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)$$

该置信区间含1说明方差无显著性差别

例 设两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠得直径 (mm) 如下。

甲	15.0	14.8	15.2	15.4	14.9	15.1	15.2	14.8	
乙	15.2	15.0	14.8	15.1	14.6	14.8	15.1	14.5	15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X, Y，且

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，求：

(i) $\sigma_1^2 = 0.18$，$\sigma_2^2 = 0.24$，求$\mu_1 - \mu_2$的置信水平为0.90的置信区间；

(ii) 若$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$未知，求$\mu_1 - \mu_2$的置信水平为0.90的置信区间；

(iii) 若μ_1、μ_2未知，求 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为0.90的置信区间。

解 $n_1 = 8,\ \bar{x} = 15.05,\ S_1^2 = 0.0457;$

$n_2 = 9,\ \bar{y} = 14.9,\ S_2^2 = 0.0575$

(i) $\sigma_1^2 = 0.18$，$\sigma_2^2 = 0.24$，$\mu_1 - \mu_2$的置信水平为0.90的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, z_{\alpha/2}\right)$$

查表得到 $z_{0.05} = 1.645$ 所求区间为$(-0.018, 0.318)$

(ii) 若$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$未知，$\mu_1 - \mu_2$的置信水平为0.90的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}\right)$$

$t_{0.05}(15) = 1.7531,\ s_W = 0.228,\ \sqrt{1/n_1 + 1/n_2} = 0.486$

所求区间为 $(-0.044, 0.344)$

该置信区间含0说明均值无显著性差别

(iii) 若μ_1、μ_2未知， σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为0.90的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)$$

由 $F_{0.05}(7,8)=3.50,\ F_{0.95}(7,8)=\dfrac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\dfrac{1}{3.73}=0.268$

所求区间为 $(0.227, 2.965)$

该置信区间含1说明方差无显著性差别

小结

- ✓ 置信水平越高，区间越长，但区间精确度差（苛刻的命中要求→宽范的区间结果）
- ✓ 置信区间越短，精确度高，但置信水平低（更明确的区间结果→命中率的下降）

本节回顾

- 置信区间、置信水平
- 区间估计流程

1
- 构造一个待估参数θ及样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$的函数，称为枢轴量W，W服从的分布不依赖于θ及其他任意未知参数，即 $W = W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$

2
- 对于给定的置信水平1- α，选定两个常数a、b（上分位点），使得

$$P\{a < W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1 - \alpha$$

3
- 通过上述定W范围在(a, b)的不等式解出等价的不等式，$\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$

即 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量

从而解得θ的置信水平为1- α的置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$

CHAPTER 7

参数估计

7.3 单侧置信区间

有些问题中，我们仅关注某参数的上限（如雾霾浓度），或只关心某参数的下限（如器件寿命）

单侧置信区间

单侧置信区间的求取流程与双侧置信区间的方法类似

单侧置信下限

对于给定值α (0< α <1)，若由样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

对任意$\theta \in \Theta$满足 $P\{\theta>\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$

称区间$(\underline{\theta}, +\infty)$是$\theta$ 置信水平为1- α的单侧置信区间，$\underline{\theta}$称为θ 置信水平为1- α的单侧置信区间的置信下限

单侧置信上限

对于给定值α (0< α <1)，若由样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 确定的统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

对任意$\theta \in \Theta$满足 $P\{\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$

称区间$(-\infty, \overline{\theta})$是$\theta$ 置信水平为1- α的单侧置信区间，$\overline{\theta}$ 称为θ 置信水平为1- α的单侧置信区间的置信上限

单个正态总体均值、方差的双侧置信区间与单侧置信区间

置信水平1-α

待估参数	μ	μ
其他参数	σ^2已知	σ^2未知
枢轴量	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
双侧置信区间	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
单侧置信区间	$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha},+\infty\right)$ $\left(-\infty,\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}\right)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),+\infty\right)$ $\left(-\infty,\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right)$

待估参数	σ^2	σ^2
其他参数	μ已知	μ未知
枢轴量	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
双侧置信区间	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$
单侧置信区间	$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)},+\infty\right)$ $\left(0,\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}\right)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)},+\infty\right)$ $\left(0,\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$

两个相互独立正态总体均值、方差的双侧置信区间与单侧置信区间 置信水平 $1-\alpha$

待估参数	$\mu_1 - \mu_2$	$\mu_1 - \mu_2$
其他参数	σ_1^2、σ_2^2 已知	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知
枢轴量	$U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$t=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$
双侧置信区间	$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\alpha/2}\right)$	$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)$
单侧置信区间	$\left((\overline{X}-\overline{Y})-\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\alpha},+\infty\right)$ $\left(-\infty,(\overline{X}-\overline{Y})+\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\alpha}\right)$	$\left((\overline{X}-\overline{Y})-S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}t_{\alpha}(n_1+n_2-2),+\infty\right)$ $\left(-\infty,(\overline{X}-\overline{Y})+S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}t_{\alpha}(n_1+n_2-2)\right)$

待估参数	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
其他参数	μ_1、μ_2已知
枢轴量	$F=\dfrac{n_2\sigma_2^2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$
双侧置信区间	$\left(\dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)},\ \dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right)$
单侧置信区间	$\left(\dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\dfrac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)},+\infty\right)$ $\left(0,\ \dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_\alpha(n_2,n_1)\right)$

待估参数	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
其他参数	μ_1、μ_2未知
枢轴量	$F=\dfrac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$
双侧置信区间	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)$
单侧置信区间	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)},+\infty\right)$ $\left(0,\dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha}(n_2-1,n_1-1)\right)$

例 设某批轮胎的寿命(单位:公里)服从正态分布N(μ, 4000^2)，现从中随机抽取n=100只，测得平均寿命为32000公里，试求参数的置信水平为0.95的单侧置信下限与对应的单侧置信区间 ($z_{0.05}$=1.645)。

解 由于 $\sigma^2 = 4000^2$，因此参数μ的置信水平为1-α的单侧置信下限为

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$$

$$n = 100, \quad \bar{x} = 3200, \quad \sigma = 4000, \quad 1-\alpha = 0.95, \quad \alpha = 0.05, \quad z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$$

故

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha = 32000 - \frac{4000}{\sqrt{100}} \times 1.645 = 31342$$

从而参数的置信水平为0.95的单侧置信下限为 $\underline{\mu} = 31342$

单侧置信区间为 $(31342, +\infty)$

例 从一批灯泡中随机抽取5只做寿命测试，计算得平均寿命为1160小时，标准差为99.75小时。设灯泡寿命服从正态分布，求灯泡寿命平均值 μ 置信水平为0.95的单侧置信下限与对应的单侧置信区间 ($t_{0.05}(4)=2.1318$)。

解 由于 σ^2 未知，因此参数μ的置信水平为1-α的单侧置信下限为

$$\underline{\mu}=\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$$

$$n=5,\quad \bar{x}=1160,\quad s=99.75,\quad 1-\alpha=0.95,\quad \alpha=0.05,\quad t_{\alpha}(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318$$

故 $$\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)=1160-\frac{99.75}{\sqrt{5}}\times 2.1318=1065$$

从而参数的置信水平为0.95的单侧置信下限为 $\underline{\mu}=1065$

单侧置信区间为 $(1065,\ +\infty)$

本节回顾

单侧置信区间

单侧置信下限

对于给定值α ($0<\alpha<1$)，若由样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

对任意$\theta\in\Theta$满足 $P\{\theta>\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$

称区间$(\underline{\theta}, +\infty)$是$\theta$置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间，$\underline{\theta}$称为$\theta$置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间的置信下限

单侧置信上限

对于给定值α ($0<\alpha<1$)，若由样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$确定的统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

对任意$\theta\in\Theta$满足 $P\{\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$

称区间$(-\infty, \overline{\theta})$是$\theta$置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间，$\overline{\theta}$称为$\theta$置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间的置信上限

CHAPTER 7

参数估计

7.4 估计量的评选标准

对总体的未知参数，可用不同方法求得不同的估计量，如何评价不同估计量好坏？

通常 用三条标准检验：无偏性，有效性，一致（相合）性

无偏性——数学期望标准

定义 反复将估计量使用多次，“平均”偏差为0

若估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在且对任意$\theta\in\Theta$，有

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 是θ 的无偏估计量

若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$， 那么称 $\left|E(\hat{\theta})-\theta\right|$ 为以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 估计的系统误差

无偏估计就是无系统误差

无偏性是对估计量的一个最常见的重要要求，是“好”估计的标准之一

无偏性的统计意义是指在大量重复试验下，由

$$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

所作的估计值的平均恰是θ，从而无偏性保证$\hat{\theta}$ 没有系统误差

设总体X的一阶矩和二阶矩存在（不管服从什么分布），记 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$

则样本均值$\overline{X}$和样本方差S^2 分别是μ和σ^2的无偏估计， $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 却不是σ^2的无偏估计

证明

因为 $X_1, X_2, \dots, X_n$与X同分布且相互独立，故

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

故$\overline{X}$是μ的无偏估计

$$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n(\sigma^2/n+\mu^2)\right]=\sigma^2$$

故 S^2 是σ^2的无偏估计，而$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 不是σ^2的无偏估计

例 检验7.1节例题的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 与最大似然估计量 $\hat{\theta}=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的无偏性。

解 $X_1, X_2, \ldots, X_n$与X同分布 $X\sim U(0,\theta)$ $E(X)=\frac{\theta}{2}$

$$E(2\overline{X})=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{2}{n}\cdot n\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$$

$\hat{\theta}=2\overline{X}$ 是θ的无偏估计

为考察 $\hat{\theta}=X_{(n)}$ 的无偏性，先求$X_{(n)}$的分布

由第3章知，$F_{X_{(n)}}(x)=[F(x)]^n$ 于是，$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$E\left[X_{(n)}\right]=\int_0^{\theta}\frac{x\cdot nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$$

$\hat{\theta}=X_{(n)}$是θ的有偏估计 可以取 $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 为θ的无偏估计

有效性——方差标准

定义

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

都是θ的无偏估计量，若对于任意 $\theta\in\Theta$，有

$$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$$

且至少对于某一个$\theta\in\Theta$上式的不等号成立，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效

样本容量n相同的前提下比较

设总体X的 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，虽然X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$和$\overline{X}$ 都可以作为参数μ的无偏估计量，

但是由于 $D(X_i)=\sigma^2, D(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$ 　　$\overline{X}$ 比 X_i 更有效

例 由上例题$X \sim U(0, \theta)$，$X_1, X_2,\ldots, X_n$是取自X的样本，其两个无偏估计量分别为 $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$，$\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n} X_{(n)}$ 哪个有效$(n \geq 2)$?

解 $$D(\hat{\theta}_1) = D(2\overline{X}) = \frac{4}{n} \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

由 $$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E\left[X_{(n)}\right] = \int_0^\theta \frac{x \cdot nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+1}\theta$$

$$\Rightarrow E\left[X_{(n)}^2\right] = \int_0^\theta \frac{x^2 nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

于是 $$D(\hat{\theta}_2) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\left\{E\left[X_{(n)}^2\right] - \left[E\left(X_{(n)}\right)\right]^2\right\} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

因为 $$D(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta^2}{3n} > \frac{\theta^2}{n(n+2)} = D(\hat{\theta}_2) \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_2 \text{ 比 } \hat{\theta}_1 \text{ 更有效}$$

一致性（相合性）——样本容量极限标准

无偏性和有效性都是在样本容量 n 固定的前提下提出，我们还希望随着样本容量的增大，一个估计量的值稳定于待估参数的真值

定义

样本容量n无穷时的特性，序列收敛趋势

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是θ的估计量，若对于任意 $\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$ 时

$$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

依概率收敛于θ，则称 $\hat{\theta}$ 为θ的一致（相合）估计量

若对于任意 $\theta\in\Theta$ 都满足：对于任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$

一致性（相合性）是对一个估计量的**基本要求**，如果不具备一致性（相合性），**那么不论样本容量n取多大，都不能将未知参数估计足够准确**，这样的估计量不可取

例 由上例题$X \sim U(0, \theta)$，$X_1, X_2, \dots, X_n$是取自X的样本，证明：$\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$ 和 $\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n} X_{(n)}$ 都是θ的一致（相合）估计量。

证 $E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta$

$$D(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta^2}{3n} \qquad D(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

由Chebyshev不等式，对于任意$\varepsilon>0$，当$n \to \infty$时，

$$P\left(\left|\hat{\theta}_1 - \theta\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D(\hat{\theta}_1)}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2} \to 0$$

同理 $$P\left(\left|\hat{\theta}_2 - \theta\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D(\hat{\theta}_2)}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \to 0$$

所以 $\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$都是θ的一致（相合）估计量

一致性（相合性）证明一般只需证明统计量的方差其极限为0，再利用Chebyshev不等式即可

本节回顾

估计量的评选标准

- 无偏性 $E(\hat{\theta})=\theta$ 反复将估计量使用多次，“平均”偏差为0

- 有效性 样本容量n相同的前提下比较

$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$ 至少对于某一个$\theta\in\Theta$不等号成立 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$有效

- 一致性（相合性） 样本容量n无穷时的特性，序列收敛趋势

若对于任意 $\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$ 时 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 依概率收敛于θ

复习思考题

1. 总体未知参数矩估计的思想方法是什么？试写出 (0, 1) 分布、 二项分布$B(n, p)$、泊松分布$P(\lambda)$、均匀分布$U(a, b)$、正态分布$N(\mu, \sigma^2)$中有关参数的矩估计式。
2. 最大似然估计的主要步骤是什么？
3. 未知参数的估计量与估计值有什么区别？
4. 估计量的三个基本评价标准是什么？如何理解它们的含义？
5. 求参数置信区间的一般方法是什么？对正态总体，试从有关的统计量自行导出几类参数的置信区间？
6. 置信水平的含义是什么？置信水平、区间长度和样本容量的关系怎样？
7. 总体X有容量为n的样本，样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，样本方差为 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

   存在性质$E(\overline{X})=E(X)$, $E(S^2)=D(X)$，这是否只对正态总体成立？