西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第4章 随机变量的数字特征

概率论与数理统计课程组

CHAPTER 4

随机变量的数字特征

能描述随机变量某些特征的常数

CHAPTER 4

随机变量的数字特征

4.1 数学期望

除了分布函数和分布律/概率密度，还可以怎样表示随机试验的结果和特点？

在一些实际问题中，我们除分布函数外，更关心的是随机变量的某些特征

例如

- 在评定某地区粮食产量水平时，最关心的是平均产量
- 检查一批棉花质量时，既要注意纤维平均长度，又要注意纤维长度与平均长度的偏离程度
- 考察西安市居民的家庭收入情况，既要知家庭的年平均收入，又要研究贫富的差异程度

例 射击问题：设某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次, (命中的环数是一个随机变量).射中次数记录如下

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问:该射手每次射击平均命中靶多少环?

解 平均射中环数 $=\dfrac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$=\frac{0\times2+1\times13+2\times15+3\times10+4\times20+5\times30}{90}$$

$$=0\times\frac{2}{90}+1\times\frac{13}{90}+2\times\frac{15}{90}+3\times\frac{10}{90}+4\times\frac{20}{90}$$

$$+5\times\frac{30}{90}$$

$$=\sum_{k=0}^{5}k\cdot\frac{n_k}{n}=3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y.

$\boxed{\text{平均射中环数}} = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \boxed{\frac{n_k}{n}}$ → 频率随机波动

→ 随机波动

“平均射中环数”的稳定值 $=?$

$$\sum_{k=0}^{5} k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=0}^{5} k \cdot p_k$$

随机波动 → 稳定值

“平均射中环数”等于

射中环数的可能值与其概率之积的累加

离散型随机变量的数学期望

定义 设离散型随机变量X的分布律为

$$P(X=x_k)=p_k \ (k=1, 2, 3, \dots)$$

若级数 $\sum_k x_k p_k$ 绝对收敛，则称 $\sum_k x_k p_k$ 的和为随机变量X的**数学期望**

记为$E(X)$或EX，即 $E(X)=\sum_k x_k p_k$

数学期望简称**期望**，又称为**均值**

关于定义的几点说明

1° $E(X)$是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同，它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

2° 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变，之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

3° 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

连续型随机变量的数学期望

定义

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx < +\infty$

则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量X的**数学期望**

记为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

数学期望$E(X)$完全由随机变量X的概率分布决定

例 设随机变量 X 服从参数为 p 的 0-1 分布，即 $X\sim B(1,p)$，求 $E(X)$

解 X 的分布律为 $P(X=0)=1-p$，$P(X=1)=p$

X 的数学期望为 $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$

例 设随机变量 X 服从参数为 n、p 的二项分布，即 $X\sim B(n,p)$，求 $E(X)$

解 X 的分布律为 $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$，$q=1-p$

X 的数学期望为 $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n} k\dfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}=np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}=np(p+q)^{n-1}=np$$

例 设随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布，求 $E(X)$

解 X 的分布律为 $P(X=k)=q^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots,\quad 0<p<1, q=1-p$

X 的数学期望为 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p=p\left(1+2q+3q^2+\cdots\right)=p\left(q+q^2+q^3\cdots\right)'$

$$=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

例 设对于服从参数为 N、M、n 的超几何分布随机变量 X，求 $E(X)$

解 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=0,1,2,\cdots,\min\{M,n\}$

X 的数学期望为 $E(X)=\dfrac{nM}{N}$

例 设$X \sim P(\lambda)$，求 $E(X)$

解 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,\cdots \quad \lambda>0$

X 的数学期望为 $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$

例 设$X \sim U(a,b)$，求 $E(X)$

解 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

X 的数学期望为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b \dfrac{x}{b-a}dx=\dfrac{a+b}{2}$

即均匀分布的数学期望位于区间的中点

例 设$X\sim E(\lambda)$，求 $E(X)$

解 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

X 的数学期望为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-\lambda x}=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=\dfrac{1}{\lambda}$

例 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $E(X)$

解 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$， $-\infty<x<+\infty$

X 的数学期望为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

令$t=(x-\mu)/\sigma$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}t\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu$

即参数μ是数学期望

例 设有10个同种电子元件，其中2个废品。装配仪器时，从这10个中任取1个，若是废品，扔掉后重取1只，求在取到正品之前已取出的废品数X的期望。

解 X的分布律为：

X	0	1	2
p_k	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}$	$\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}$

X	0	1	2
p_k	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

$$E(X)=0\times\frac{4}{5}+1\times\frac{8}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{2}{9}$$

例 设一台机器一天内发生故障的概率为0.2，机器发生故障时全天停工。若一周5个工作日里无故障，可获利10万元；发生一次故障获利5万元；发生2次故障获利0元，发生3次或以上故障亏损2万元，求一周内期望利润是多少？

解 设X表示一周5天内机器发生故障天数，则 $X\sim B(5,0.2)$

设Y表示一周内所获利润，则 $P(Y=10)=P(X=0)=(1-0.2)^5=0.328$

其余同理可得，则Y的分布律为

Y	-2	0	5	10
p_k	0.057	0.205	0.410	0.328

$E(Y)=5.216$

例 有2个相互独立工作的电子装置，它们的寿命X_1、X_2服从同一指数分布，概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad \lambda>0$$

若将这2个电子装置串联联接组成整机，求整机寿命N（以小时计）的数学期望。

解 X_1、X_2分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

串联情况下，$N=\min\{X_1、X_2\}$ 分布函数为

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^2=\begin{cases}1-e^{-2\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad\Rightarrow f_{\min}(x)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$E(X_1)=\int_0^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

因此 $E(N)=\dfrac{1}{2\lambda}$ 　　并联？

只要求得一般指数分布的期望，即可同理得$E(N)$

定理 不必用Y的分布律或概率密度求$E(Y)$

设Y是随机变量X的函数:$Y=g(X)$，g是连续函数

(i) 如果X是离散型随机变量，它的分布律是$P(X=x_k)=p_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$

若级数$\sum_k g(x_k)p_k$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E\left[g(X)\right]=\sum_k g(x_k)p_k$$

(ii) 如果X是连续型随机变量，它的概率密度是$f(x)$，

若级数$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$绝对收敛，则有

$$E(Y)=E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

推广到两个随机变量的函数的情况

设Z是随机变量X、Y的函数:$Z=g(X, Y)$，g是连续函数，Z是一维随机变量

若离散型随机变量(X, Y) 分布律是$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$

$$E(Z)=E\left[g(X,Y)\right]=\sum_j\sum_i g(x_i,y_j)p_{ij}$$

设上式的级数绝对收敛

若二维随机变量(X, Y)的概率密度是 $f(x, y)$，则有

$$E(Z)=E\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

设上式的积分绝对收敛

例 已知某零件的横截面是个圆，对横截面的直径X进行测量，其值在区间(1, 2)上均匀分布，求横截面面积S的数学期望。

解 X概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$ $\qquad S=\dfrac{\pi X^2}{4}$

$$E(S)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{4}x^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{\pi x^2}{4}dx=\frac{7\pi}{12}$$

例 设二维随机变量(X, Y)联合分布律如右图，求随机变量 $Z=\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望。

解 $E(Z)=E[\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}]$

$$=\sin\frac{\pi(0+0)}{2}\times 0.1+\sin\frac{\pi(1+0)}{2}\times 0.15+\sin\frac{\pi(0+1)}{2}\times 0.25$$

$$+\sin\frac{\pi(1+1)}{2}\times 0.2+\sin\frac{\pi(0+2)}{2}\times 0.15+\sin\frac{\pi(1+2)}{2}\times 0.15$$

$$=0.25$$

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.25	0.15
1	0.15	0.2	0.15

例 设 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求：$E(X)$, $E(Y)$, $E(Y/X)$, $E[(X-Y)^2]$.

解 X 的分布律为

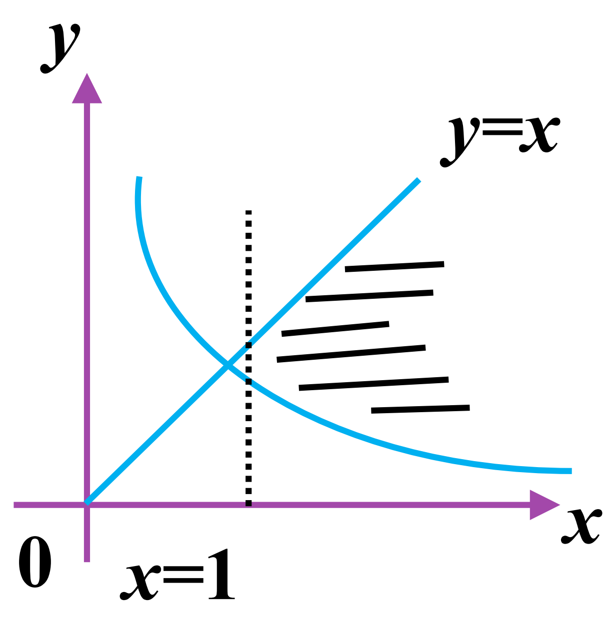
X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X)=1\times 0.4+2\times 0.2+3\times 0.4=2.$

由于

于是

例 设二维随机变量(X, Y)概率密度为



求数学期望

解

也可以先求

例 某商店经销某种商品，每周进货量X与需求量Y是相互独立的随机变量，且都在区间[10, 20]上均匀分布。商店每售出一单位商品可获利1000元；若需求量超过进货量，商店可从其他处调剂供应，这时每单位商品可获利500元；试计算此商店经销该种商品每周所获利润的数学期望。

解 设Z表示该种商品每周所得的利润，则

X和Y相互独立，因此(X, Y)联合概率密度为

数学期望的性质

1° 设C是常数，则有$E(C)=C$

2° 设X是一个随机变量， C是常数，则有
$E(CX)=CE(X)$

3° 设X、Y是两个随机变量，则有
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

推广到有限个随机变量之和，有
$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$

4° 设X、Y是两个相互独立的随机变量，则有
$E(XY)=E(X)E(Y)$

可推广到有限个相互独立的随机变量之积

证明

1° C是常数，

下面仅对连续型随机变量给予证明

例 设随机变量X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立，$X_i \sim U(0, 2i)$，求以下行列式的数学期望$E(Y)$。

解

由条件

例 一民航送客车载有20位旅客自机场出发，旅客有10个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以X 表示停车的次数，求 $E(X)$。（设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）

解 引入随机变量

易知

本题将X分解成数个随机变量之和，然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望之和求数学期望，这种方法具有一定普遍意义

本节回顾

离散型数学期望的定义及计算

设离散型随机变量X的分布律为 $P(X=x_k)=p_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$

若级数 绝对收敛，则称 的和为随机变量X的**数学期望**

连续型数学期望的定义及计算

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，若积分 绝对收敛，即

则称 的值为随机变量X的**数学期望** 记为

CHAPTER 4

随机变量的数字特征

4.2 方差

引例

- 有一批器件寿命为：一半约950小时，另一半约1050小时→平均寿命为1000小时；
  另一批器件寿命为：　一半约1300小时，另一半约700小时→平均寿命为1000小时。
  问题：哪批器件的质量更好？

单从平均寿命这一指标无法判断，需进一步考察寿命X与均值1000小时的偏离程度，方差正是体现这种意义的数学特征

例如

定义 方差本质是X的函数$g(X)=[X-E(X)]^2$的期望

设X是一个随机变量，若 存在，则称

为X的**方差**，记为 $D(X)$或DX或$Var(X)$，即

在应用上还引入量 ，记为$\sigma(X)$，称为**标准差或均方差**，它是与随机变量X具有相同量纲的量

方差$D(X)$刻画了X取值的分散程度，它是衡量X取值分散程度的一个尺度：若X取值比较集中，则$D(X)$较小，反之，若X取值比较分散，则$D(X)$较大

离散型随机变量的方差

定义

设离散型随机变量X的分布律为$P(X=x_k)=p_k$
$(k = 1, 2, 3, \ldots)$　则X的方差为

连续型随机变量的方差

定义

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，则X的方差为

此外，利用数学期望的性质，可得方差得计算公式，有

证

例 设X 服从0-1分布，分布律为$P(X=0)=1-p$, $P(X=1)=p$, 求 $D(X)$

解

所以

例 设$X \sim P(\lambda)$，求 $D(X)$

解 X 的分布律为

X 的方差为

泊松分布期望与方差相等

例 设$X \sim U(a, b)$，求 $D(X)$

解 X 的概率密度为

之前算得X 的数学期望为

例 设X 服从指数分布，概率密度为

其中$\lambda>0$，求 $E(X)$、$D(X)$

解

于是

即指数分布的期望恰为参数λ的倒数，方差是期望的平方

方差的性质

1° 设C是常数，则有$D(C)=0$

2° 设X是一个随机变量， C是常数，则有$D(X+C)=D(X)$

3° 设X是一个随机变量， C是常数，则有$D(CX)=C^2D(X)$

4° 设X、Y是两个相互独立的随机变量，则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

推广到有限个相互独立随机变量之和，有

$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+ b^2D(Y)$

一般地，若X、Y是任意两随机变量（不要求相互独立），有

5° $D(X)=0$的充要条件是X以概率1取常数$E(X)$，即 $P(X=E(X))=1$

证明

1° C是常数，

2°

3°

4°

协方差

故 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{E(XY)-E(X)E(Y)\}$

若X、Y **相互独立**，则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

5° 充分性

设$P\{X=E(X)\}=1$，则有

于是

必要性证明见第5章*Chebyshev*不等式处

例 设$X\sim B(n,p)$，求 $E(X)$、$D(X)$

解 随机变量X是事件A在n重伯努利试验中发生的次数，$(X=0,1,2,\ldots,n)$，每次事件相互独立，$P(A)=p$，记

于是$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，服从同一分布即0-1分布

X_k	0	1
p_k	$1-p$	p

定理

以n, p为参数的二项分布变量，可分解为n个相互独立且都服从以p为参数的0-1分布的随机变量之和

例 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $E(X)$、$D(X)$

解 先求标准正态变量Z的数学期望和方差

Z的概率密度为

于是

因为

即正态分布的两个参数 μ, σ^2分别是其期望和方差

随机变量线性变换时的数学期望和方差

设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2\neq 0$，

记 则$E(X^*)=0$, $D(X^*)=1$

证

不一定是$N(0, 1)$

X^*称为X的标准化变量

定理

独立的n个正态变量的线性组合仍服从正态分布

若 且它们相互独立

它们的线性组合也服从正态分布，即有

其中C_1、C_2、…、C_n为不全为0的常数

如：$X\sim N(1, 3)$，$Y\sim N(2, 4)$ 且X、Y相互独立，

则 $Z=2X-3Y\sim N(-4, 48)$

$D(Z)=2^2D(X)-3^2D(Y)$，对吗？

在多个变量和的方差计算中，负号不会造成方差相减，
不同变量在加减时它们的方差都是相加的，因为$(-1)^2=1$

例 设活塞的直径(以cm计) 和汽缸的直径X,Y相互独立，$X\sim N(22.40,\ 0.03^2)$，$Y\sim N(22.50,\ 0.04^2)$，任取一只活塞，任取一只汽缸，求活塞能装入汽缸的概率。

解 依照题意，需求

由于

故有

例 设连续型随机变量X的概率密度为

求随机变量　　　的方差 $D(Y)$.

解

例

解

常见离散型随机变量的数学期望与方差

分布名称	参数	分布律	数学期望	方差
0−1分布	$0<p<1$		p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n, p)$	$n\geq 1,\ 0<p<1$		np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$\lambda>0$		λ	λ
几何分布	$0<p<1$			
超几何分布	$M<N,\ n<N$			

常见连续型随机变量的数学期望与方差

分布名称	参数	概率密度	数学期望	方差
均匀分布 $U(a, b)$	$a<b$			
指数分布 参数 λ	$\lambda>0$			
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$\sigma>0$		μ	σ^2

本节回顾

方差的定义及计算

设离散型随机变量X的分布律为$P(X=x_k)=p_k$, (k = 1, 2, 3, …) 则X的方差为

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，则X的方差为

利用数学期望的性质，可得方差得计算公式，有

CHAPTER 4

随机变量的数字特征

4.3 协方差与相关系数

二维随机变量(X,Y)除讨论X与Y的期望和方差外，还需讨论描述X与Y之间相互关系的数字特征。

协方差

定义

量 称为随机变量X与Y的**协方差**，

记为$\mathrm{cov}(X, Y)$

实际中$\mathrm{cov}(X, Y)$可用下式计算 $\mathrm{cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

证明按定义式展开，cov(X, Y)

$=E(XY)-E(X)E(Y)$

回顾方差定义，$D(X+Y)$

$=D(X)+D(Y)+2\mathrm{cov}(X, Y)$

协方差的性质

1° $\mathrm{cov}(X, X)=D(X)$

2° $\mathrm{cov}(X, Y)=\mathrm{cov}(Y, X)$

3° a, b, c, d是常数，$\mathrm{cov}(aX+b, cY+d)=ac\,\mathrm{cov}(X, Y)$

4° $\mathrm{cov}(X_1+X_2, Y)=\mathrm{cov}(X_1, Y)+\mathrm{cov}(X_2, Y)$

推广至线性组合 $\mathrm{cov}(aX+bY, cX+dY) = acD(X)+bdD(Y)+(ad+bc)\mathrm{cov}(X,Y)$

5° $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{cov}(X, Y)$

推广至线性组合 $D(aX+bY)= a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$

例 随机变量X和Y有如下联合分布律，

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.6	0	0.1
1	0	0.1	0
2	0.1	0	0.1

求X和Y的协方差。

解 先求X和Y的边缘分布律

X	0	1	2
P	0.7	0.1	0.2

Y	0	1	2
P	0.7	0.1	0.2

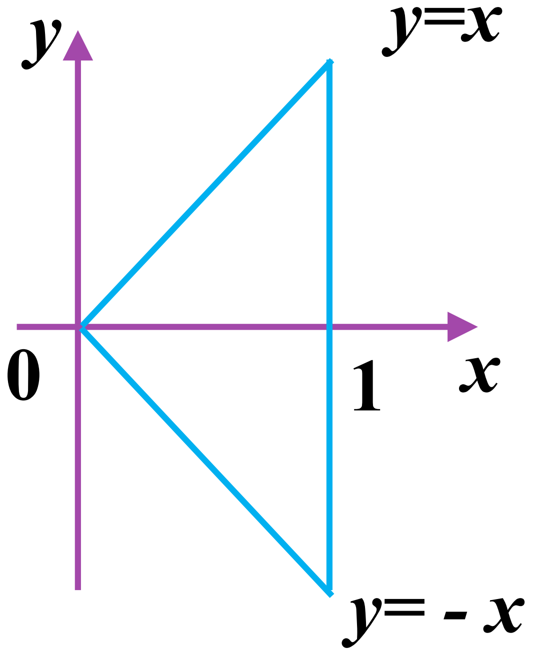
从而

故

也可以用协方差的原始定义验证这里的结果

例 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

求协方差$\mathrm{cov}(X, Y)$。



解 据题意，(X, Y) 概率密度的图像如右所示

则

从而

例 随机变量X和Y有如下联合分布律，

求cov(X-Y, Y)

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/3	0
2	1/12	0	1/12

解 先求X和Y的边缘分布律

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	4
P	7/12	1/3	1/12

从而

例 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

求$D(2X-3Y+8)$

解

则

类似地

从而

相关系数

定义

设X、Y是随机变量，若$D(X)>0$，$D(Y)>0$，则

ρ_{XY}无量纲

称为随机变量X与Y的**相关系数**

相关系数的性质证明需用到下述定理

定理 (*Cauchy – Schwarz*不等式)

若X、Y是随机变量，且 $E(X^2)<+\infty$，$E(Y^2)<+\infty$，则 $[E(XY)]^2 \le E(X^2)\,E(Y^2)$

相关系数的性质

1° 可由*Cauchy-Schwarz*不等式证明

2° 若 X、Y 相互独立且方差都大于零，则$\rho_{XY}=0$

3° 的充要条件是，存在常数a $(a\neq 0)$ ， b使 $P(Y=aX+b)=1$

性质3证明 考虑以X线性函数$a+bX$近似表示Y，以均方误差

来衡量以$a+bX$近似表达Y的好坏程度　　$e(a, b)$越小， $a+bX$与Y的近似程度越好

求最佳近似式

对e关于a, b求偏导　　解得

将a_0, b_0带入e，

1° 由 $e(a_0, b_0)$和$D(Y)$的非负性

3°

特别地

表明X和Y的线性关系的程度较好；

表明X和Y的线性关系的程度较差；

表明X和Y之间不存在线性关系

不相关的判断及等价条件

定义 设X、Y是随机变量，若$\rho_{XY}=0$，则称X与Y不相关

定理 若随机变量X、Y相互独立且方差均大于0，则X与Y不相关，但反之不然（不相关无法推知相互独立）

相关是针对线性关系而言的；
独立是针对任意、一般关系而言

独立性的成立更加苛刻

定理 若随机变量X、Y相互独立且方差均大于0，则X与Y不相关的充要条件包括

定理 若二维随机变量(X, Y)服从二维正态分布，则X、Y不相关的充要条件是X、Y相互独立

一般而言，“X、Y不相关”和“X、Y相互独立”不是等价条件，前者是后者的必要不充分条件。二者等价的一个连续型分布如下；浙大盛骤等四版117页习题 30是一个离散型的例子。

定理

若(X,Y)是二维正态随机变量，$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$，则 $\rho_{XY}=\rho$，即

$$X\text{和}Y\text{相互独立} \Leftrightarrow \rho=0 \Leftrightarrow X\text{和}Y\text{不相关}$$

即二维正态变量(X, Y)联合概率密度中的参数ρ就是X和Y的相关系数，因而二维正态变量的分布完全可由X、Y各自的均值、方差以及它们的相关系数所确定

例 对二维正态分布的随机变量(X, Y)，联合概率密度为

求X、Y的相关系数，并证明X与Y相互独立等价于X与Y不相关 。

证 X、Y的边缘概率密度为

因此

而

于是

ρ值是否为0判断独立性，ρ_{XY}的大小判断线性相关程度

例 二维连续随机变量(X, Y)有联合概率密度

其中$\varphi_1(x,y)$、 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态随机变量的联合概率密度，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 1/3和 -1/3，它们的边缘概率密度对应随机变量的的期望都为 0，方差都为 1，求以下问题。

(1) (X, Y)关于X、 Y的边缘概率密度； (2) X与 Y的相关系数；

(3) X与 Y是否相互独立，为什么？

$\varphi_1(x,y)$ 对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; 1/3)$， $\varphi_2(x,y)$ 对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; -1/3)$

解 (1) 由二维正态变量的边缘概率密度是一维正态随机变量的概率密度，可知的两个边缘概率密度均是标准正态随机变量的概率密度，从而

类似地

例 二维连续随机变量(X, Y)有联合概率密度

其中$\varphi_1(x,y)$、$\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态随机变量的联合概率密度，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 1/3和 -1/3，它们的边缘概率密度对应随机变量的的期望都为 0，方差都为 1，求以下问题。

(1) (X, Y)关于X、Y的边缘概率密度；　(2) X与Y的相关系数；

(3) X与Y是否相互独立，为什么？

$\varphi_1(x,y)$ 对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; 1/3)$，$\varphi_2(x,y)$ 对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; -1/3)$

解 (2) 依题意，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$

$E(X) = E(Y) =0$，$D(X) = D(Y) =1$

该积分项是$\varphi_1(x,y)$对应二维正态分布的协方差定义式，由于方差为1，故协方差等于相关系数（第5个参数）

$E(XY)$

$\text{cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

例 二维连续随机变量(X, Y)有联合概率密度

其中$\varphi_1(x,y)$、$\varphi_2(x,y)$都是二维正态随机变量的联合概率密度，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为1/3和-1/3，它们的边缘概率密度对应随机变量的的期望都为0，方差都为1，求以下问题。

(1) (X, Y)关于X、Y的边缘概率密度；　(2) X与Y的相关系数；

(3) X与Y是否相互独立，为什么？

$\varphi_1(x,y)$对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; 1/3)$，$\varphi_2(x,y)$对应的分布是$N(0, 0; 1, 1; -1/3)$

解 (3) 由于

将5个参数代入二维正态分布的定义式可得

(X, Y)的联合概率密度为

X与Y不独立　　(X, Y)不是二维正态分布！

对二维正态随机变量的小结

1. 联合分布与边缘分布的关系

联合概率密度可以推导出边缘概率密度；但仅知两边缘概率密度不能推知联合概率密度

2. X、Y相互独立的判断条件

其充要条件是 $\rho=0$

3. X、Y相互独立与不相关的等价性

X、Y相关系数 $\rho_{XY}=\rho$

例 设 $X \sim N(0, 1)$， $Y=X^3$, 求X与Y的相关系数。

解 采用随机变量函数的期望公式

故

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

例 设X、Y服从同一分布，其分布律如右图，已知 ，判断X和Y是否不相关？是否不独立？

X_k	-1	0	1
p_k	1/4	1/2	1/4

解 X、Y联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$P(X=i)$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$P(Y=j)$	1/4	1/2	1/4	

$\text{cov}(X, Y)=0$，X、Y不相关

$P(X=-1, Y=-1) \neq P(X=-1)P(Y=-1)$，$X$、$Y$不独立

例 设X、Y相互独立并服从同一分布，记$U=X-Y$，$V=X+Y$，则随机变量U与V是否一定不相关，是否一定独立？

解 先求U、V协方差

所以U与V一定不相关

但是U与V不一定独立

例如设X与Y相互独立并服从正态分布，则(U, V)也服从正态分布，二维正态分布独立与不相关等价，从而U与V独立

例如，设$X\sim B(1, 0.5)$ 即0-1分布

从而U与V不独立

例 设 X、Y 在单位圆盘上服从均匀分布，即

试证 X 与 Y 是不相关的，但不是相互独立的

解 依题意，X, Y 的边缘概率密度容易求得分别为

显然 ，故 X、Y 不相互独立

但由对称性

又

从而 即 故 X、Y 是不相关的

本节回顾

协方差

量称为随机变量X与Y的协方差，记为$\text{cov}(X, Y)$

$\text{cov}(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

相关系数

设X、Y是随机变量，若$D(X)>0$，$D(Y)>0$，则称为随机变量X与Y的相关系数

不相关的判断

设X、Y是随机变量，若$\rho_{XY}=0$，则称X与Y

CHAPTER 4

随机变量的数字特征

4.4 n维正态随机变量

矩的概念

定义 设X、Y是随机变量

若$\mu_k=E(X^k)$，$k = 1, 2, 3, \ldots$存在，

则称为X的k阶原点矩，简称k阶矩

若 存在，

则称为X的k阶中心矩

若$\mu_{kl}=E(X^kY^l)$，$k, l= 1, 2, 3, \ldots$存在，

则称为X和Y的$k+l$阶混合原点矩，简称$k+l$阶混合矩

若 存在，

则称为X和Y的$k+l$阶混合中心矩

一二阶的原点矩和中心矩更常用

X的数学期望$E(X)$是X的一阶原点矩

X的方差$D(X)$是X的二阶中心矩

协方差$\mathrm{cov}(X, Y)$是X和Y的二阶混合中心矩

一阶矩和二阶矩之间有如下关系：

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$$

实际应用中高于4阶的矩很少使用。三阶中心矩主要用来衡量随机变量的分布是否有偏，四阶中心矩主要用来衡量随机变量的分布在均值附近的陡峭程度如何

n维正态随机变量

定义

设二维随机变量(X_1, X_2)的四个二阶中心矩都存在，即

称该矩阵为随机变量(X_1, X_2) 的协方差矩阵

定义

设n维随机变量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的二阶混合中心矩

都存在，则称矩阵

为随机变量$(X_1, X_2, \dots, X_n)$的协方差矩阵

协方差矩阵一定是对称阵

利用协方差矩阵，可由二维正态变量的概率密度推广，得到n维正态变量的联合概率密度

设 (X_1, X_2)服从二维正态分布，其概率密度为

引入列矩阵

(X_1, X_2) 的协方差矩阵

B的行列式

B的逆矩阵

经计算

(X_1, X_2) 的概率密度为

推广到n维正态随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的情况

引入列矩阵

n维正态随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的概率密度为

其中B为随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的协方差矩阵

n维正态变量的五条重要性质

1° n维正态随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的每一个分量X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$都是正态随机变量；反之，若$X_1, X_2, \ldots, X_n$都是正态随机变量且相互独立，则$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是n维正态随机变量

2° n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从n维正态分布的充要条件是：$X_1, X_2, \ldots, X_n$的任意线性组合$l_1X_1+l_2X_2+\ldots+l_nX_n$服从一维正态分布（其中$l_1, l_2, \ldots, l_n$不全为0）

3° 若$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从n维正态分布，设$Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$是$X_j\,(j=1, 2, \ldots, n)$线性变换，则$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$也服从k维正态分布

正态变量的线性变换不变性

4° 设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是n维正态变量，$m<n$，则$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的任意m个分量是m维正态变量

5° 设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从n维正态分布，则“$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立”与“$X_1, X_2, \ldots, X_n$两两不相关”等价

例 设 X 和 Y 相互独立 $X \sim N(1, 2)$，$Y \sim N(0, 1)$，求 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度。

解 依题意 X 和 Y 的联合分布为正态分布，则 X 和 Y 的线性组合服从正态分布

于是 $Z \sim N(\, E(Z), D(Z), \,)$

而 $E(Z) = 2E(X) - E(Y) + 3 = 2 + 3 = 5$

$D(Z) = 4D(X) + D(Y) = 8 + 1 = 9$

即 $Z \sim N(\, 5, 9\,)$

故 Z 的概率密度是

例 设 (X, Y)服从二维正态分布，且

(1) 求 Z 的数学期望和方差；　(2) 求 X 和 Z 的相关系数；

(3) 问 X 和 Z 是否不相关？是否独立？为什么？

解 (1) 依题意　　于是

(2) 由协方差的性质

故

(3) 因 X 和 Z 的相关系数为零故不相关，因为 (X,Y) 服从二维正态分布，又

故由正态分布的线性不变性知，(X, Z) 服从二维正态分布，于是 X, Z 相互独立

本节回顾

矩

设X、Y是随机变量　　若$\mu_k=E(X^k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$存在，则称为X的k阶原点矩，简称k阶矩

若　　存在，则称为X的k阶中心矩

若$\mu_{kl}=E(X^kY^l)$, $k, l= 1, 2, 3, \ldots$存在，则称为X和Y的$k+l$阶混合原点矩，简称 $k+l$ 阶混合矩

若　　存在，则称为X和Y的$k+l$阶混合中心矩

n维正态随机变量

复习思考题

1. 叙述$E(X)$和$D(X)$的定义。
2. 设有一批数据　　　　记

   则　　　　对吗？
3. 试述计算随机变量X函数$g(X)$的期望$E[g(X)]$的两种方法。
4. 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,用如下两种方法求$E(X^2)$：

   (i) $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2$；

   (ii) $E(X^2)=E(X.X)=E(X),\ E(X)=\mu^2$；

   两种结果不一样，哪一种错？为什么？
5. 试问$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$ 对吗？

6. 已知随机变量X具有概率密度：

   求$E(X)$，下列哪种解法是正确的？

   解法1：

   解法2：

7. 设X和Y为两随机变量，且已知$D(X)=6$，$D(Y)=7$，则$D(X-Y)=D(X)-D(Y)=6-7=-1<0$，这与任意一个随机变量的方差都不小于零矛盾，为什么？

8. 考虑100包水泥的总重量Y用以下两种方式表示：

(i) 设第i袋水泥的重量为X_i，$i=1, 2, \ldots, 100$，由题意知，$X_i\sim N(50, 2.5^2)$，$Y=\sum X_i$，则
$Y\sim N(100\times 50, 100\times 2.5^2)$；

(ii) 设一包水泥的重量为X，由题意$X\sim N(50, 2.5^2)$，若将100包水泥的总重量看成是1包水泥的100倍，即

$Y=100X$，Y是X的线性函数，则：

$E(Y)=100E(X)=100\times 50$，$D(Y)=100^2D(X)=100^2\times 2.5^2$

$Y\sim N(100\times 50, 100^2\times 2.5^2)$

这两种方法得到的总重量的分布不一样（因为方差不同，后者方差是前者的100倍），试问哪一种正确？