第　十　讲

常微分方程幂级数解法(二)

北京大学　物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 方程正则奇点处的解
   - 方程奇点处解的一般形式
   - 正则奇点
2. 求解的思路与一般结论
   - 求解思路
   - 一般步骤与结论
3. Bessel方程的解
   - Bessel方程
   - Bessel方程的第一解
   - Bessel方程的第二解

讲授要点

1. 方程正则奇点处的解
   - 方程奇点处解的一般形式
   - 正则奇点
2. 求解的思路与一般结论
   - 求解思路
   - 一般步骤与结论
3. Bessel方程的解
   - Bessel方程
   - Bessel方程的第一解
   - Bessel方程的第二解

讲授要点

1. 方程正则奇点处的解
   - 方程奇点处解的一般形式
   - 正则奇点
2. 求解的思路与一般结论
   - 求解思路
   - 一般步骤与结论
3. Bessel方程的解
   - Bessel方程
   - Bessel方程的第一解
   - Bessel方程的第二解

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§6.3 — 6.4
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§9.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§8.2

方程奇点处的解

- 只讨论极点性的奇点
- 方程的奇点可能同时也是解的奇点
- 还可能是解的枝点

方程奇点处的解

- 只讨论极点性的奇点
- 方程的奇点可能同时也是解的奇点
- 还可能是解的枝点

方程奇点处的解

- 只讨论极点性的奇点
- 方程的奇点可能同时也是解的奇点
- 还可能是解的枝点

讲授要点

1. 方程正则奇点处的解
   - 方程奇点处解的一般形式
   - 正则奇点
2. 求解的思路与一般结论
   - 求解思路
   - 一般步骤与结论
3. Bessel方程的解
   - Bessel方程
   - Bessel方程的第一解
   - Bessel方程的第二解

定理 （不证）

如果z_0是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$的奇点，则在$p(z)$和$q(z)$都解析的环形区域$0<|z-z_0|<R$内，方程的两个线性无关解是

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$$

$$w_2(z)=g w_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k(z-z_0)^k$$

其中ρ_1,ρ_2和g都是常数

方程奇点邻域内的解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

- 如果ρ_1或ρ_2是整数，且$g=0$，则z_0点为方程解的极点或本性奇点
- 如果ρ_1或ρ_2不是整数，或$g \neq 0$，则方程的解为多值函数，z_0点为其枝点

方程奇点邻域内的解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

- 如果ρ_1或ρ_2是整数，且$g=0$，则z_0点为方程解的极点或本性奇点
- 如果ρ_1或ρ_2不是整数，或$g \neq 0$，则方程的解为多值函数，z_0点为其枝点

方程奇点邻域内的解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

- 如果ρ_1或ρ_2是整数，且$g=0$，则z_0点为方程解的极点或本性奇点
- 如果ρ_1或ρ_2不是整数，或$g \neq 0$，则方程的解为多值函数，z_0点为其枝点

方程奇点邻域内的解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

现在如果我们把上面的解式代入方程，尽管仍然能得到系数之间的递推关系，但却无法求出系数的普遍表达式． 因为这时的级数解中，一般说来，都有无穷多个正幂项和负幂项，我们无法设定系数的“初值”

方程奇点邻域内的解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

如果级数解中只有有限个负幂项，这时总可以调整相应的ρ值，使得级数解中没有负幂项

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

- 反复利用递推关系即可求得系数普遍表达式
- 遗留的待定系数只能有两个
- 这种形式的解称为正则解
- 当$g=0$时，$w_2(z)$的表达式中不含对数项，两个解的形式相同
- 当$g\neq 0$时，$w_2(z)$的形式和$w_1(z)$不同(含有对数项)，因而需分别求解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

- 反复利用递推关系即可求得系数普遍表达式
- 遗留的待定系数只能有两个
- 这种形式的解称为正则解
- 当$g=0$时，$w_2(z)$的表达式中不含对数项，两个解的形式相同
- 当$g\neq 0$时，$w_2(z)$的形式和$w_1(z)$不同(含有对数项)，因而需分别求解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

- 反复利用递推关系即可求得系数普遍表达式
- 遗留的待定系数只能有两个
- 这种形式的解称为正则解
- 当$g=0$时，$w_2(z)$的表达式中不含对数项，两个解的形式相同
- 当$g \neq 0$时，$w_2(z)$的形式和$w_1(z)$不同(含有对数项)，因而需分别求解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-z_0)^k$$

- 反复利用递推关系即可求得系数普遍表达式
- 遗留的待定系数只能有两个
- 这种形式的解称为正则解
- 当$g=0$时，$w_2(z)$的表达式中不含对数项，两个解的形式相同
- 当$g\neq 0$时，$w_2(z)$的形式和$w_1(z)$不同(含有对数项)，因而需分别求解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

- 反复利用递推关系即可求得系数普遍表达式
- 遗留的待定系数只能有两个
- 这种形式的解称为正则解
- 当$g=0$时，$w_2(z)$的表达式中不含对数项，两个解的形式相同
- 当$g\neq 0$时，$w_2(z)$的形式和$w_1(z)$不同(含有对数项)，因而需分别求解

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=-0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$$

- 反复利用递推关系即可求得系数普遍表达式
- 遗留的待定系数只能有两个
- 这种形式的解称为正则解
- 当$g=0$时，$w_2(z)$的表达式中不含对数项，两个解的形式相同
- 当$g \neq 0$时，$w_2(z)$的形式和$w_1(z)$不同(含有对数项)，因而需分别求解

讲授要点

1. 方程正则奇点处的解
   - 方程奇点处解的一般形式
   - 正则奇点
2. 求解的思路与一般结论
   - 求解思路
   - 一般步骤与结论
3. Bessel方程的解
   - Bessel方程
   - Bessel方程的第一解
   - Bessel方程的第二解

方程奇点邻域内两个线性无关解都是正则解的充要条件

定理 （不证）

方程$\dfrac{d^2w}{dz^2}+p(z)\dfrac{dw}{dz}+q(z)w=0$在它的奇点$z_0$的邻域$0<|z-z_0|<R$有两个正则解

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$$

$$w_2(z)=gw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k$$

的充分必要条件是z_0点为正则奇点

ρ_1和ρ_2称为正则解的指标

方程奇点邻域内两个线性无关解都是正则解的充要条件

定理 （不证）

方程$\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$在它的奇点$z_0$的邻域$0<|z-z_0|<R$有两个正则解

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$$

$$w_2(z)=gw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k$$

的充分必要条件是z_0点为正则奇点

ρ_1和ρ_2称为正则解的指标

定义

若$z=z_0$是方程$\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$的奇点，且是

$p(z)$的不超过一阶的极点 $q(z)$的不超过二阶的极点	即	$(z-z_0)p(z)$在z_0点解析 $(z-z_0)^2q(z)$在z_0点解析

则称$z=z_0$为方程的正则奇点

例10.1　Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

- 系数是$p(z)=-\dfrac{2z}{1-z^2}$　　$q(z)=\dfrac{l(l+1)}{1-z^2}$
- $z=\pm 1$是$p(z), q(z)$的一阶极点
- 故$z=\pm 1$为Legendre方程的正则奇点

例10.1 Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

- 系数是$p(z)=-\dfrac{2z}{1-z^2}$　　$q(z)=\dfrac{l(l+1)}{1-z^2}$
- $z=\pm1$是$p(z), q(z)$的一阶极点
- 故$z=\pm1$为Legendre方程的正则奇点

例10.1 Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

- 系数是$p(z)=-\dfrac{2z}{1-z^2}$ $\quad q(z)=\dfrac{l(l+1)}{1-z^2}$
- $z=\pm 1$是$p(z), q(z)$的一阶极点
- 故$z=\pm 1$为Legendre方程的正则奇点

例10.1 Legendre方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$

- 系数是$p(z)=-\dfrac{2z}{1-z^2}$ $\qquad q(z)=\dfrac{l(l+1)}{1-z^2}$
- $z=\pm1$是$p(z),q(z)$的一阶极点
- 故$z=\pm1$为Legendre方程的正则奇点

例10.2　超几何(hypergeometric)方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$

- 系数是

$$p(z)=\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)}\qquad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

- $z=0$和$z=1$都是$p(z), q(z)$的一阶极点
- 故$z=0$与$z=1$都是超几何方程的正则奇点

例10.2 超几何(hypergeometric)方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$

- 系数是

$$p(z)=\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)}\qquad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

- $z=0$和$z=1$都是$p(z), q(z)$的一阶极点
- 故$z=0$与$z=1$都是超几何方程的正则奇点

例10.2　超几何(hypergeometric)方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$

- 系数是

$$p(z)=\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)}\qquad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

- $z=0$和$z=1$都是$p(z),q(z)$的一阶极点
- 故$z=0$与$z=1$都是超几何方程的正则奇点

例10.2　超几何(hypergeometric)方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$

- 系数是

$$p(z)=\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)}\qquad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

- $z=0$和$z=1$都是$p(z),q(z)$的一阶极点
- 故$z=0$与$z=1$都是超几何方程的正则奇点

无穷远点

要判断无穷远点$z=\infty$是不是方程的正则奇点，也必须作变换$z=1/t$

方程 $$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0 \tag{1}$$

变为 $$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{p(1/t)}{t^2}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{q(1/t)}{t^4}w=0 \tag{2}$$

如果$t=0$是方程(2)的正则奇点，则$z=\infty$是方程(1)的正则奇点

无穷远点

要判断无穷远点$z=\infty$是不是方程的正则奇点，也必须作变换$z=1/t$

方程 $$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0 \tag{1}$$

变为 $$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{p(1/t)}{t^2}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{q(1/t)}{t^4}w=0 \tag{2}$$

如果$t=0$是方程(2)的正则奇点，则$z=\infty$是方程(1)的正则奇点

无穷远点

要判断无穷远点$z=\infty$是不是方程的正则奇点，也必须作变换$z=1/t$

方程 $$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0 \tag{1}$$

变为 $$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{p(1/t)}{t^2}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{q(1/t)}{t^4}w=0 \tag{2}$$

如果$t=0$是方程(2)的正则奇点，则$z=\infty$是方程(1)的正则奇点

当$t=0$是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{p(1/t)}{t^2}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{q(1/t)}{t^4}w=0$$ 的奇点，且

$$t\left[\frac{2}{t}-\frac{p(1/t)}{t^2}\right]=2-\frac{p(1/t)}{t}$$ 与 $$t^2\cdot\frac{q(1/t)}{t^4}=\frac{q(1/t)}{t^2}$$

解析时，则$t=0$是此方程的正则奇点

当$z=\infty$是方程$w''+p(z)w'+q(z)w=0$的奇点，且 $zp(z)$ 与 $z^2q(z)$ 解析时，则$z=\infty$是此方程的正则奇点

当$t=0$是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{p(1/t)}{t^2}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{q(1/t)}{t^4}w=0$$ 的奇点，且

$$t\left[\frac{2}{t}-\frac{p(1/t)}{t^2}\right]=2-\frac{p(1/t)}{t}$$ 与 $$t^2\cdot\frac{q(1/t)}{t^4}=\frac{q(1/t)}{t^2}$$

解析时，则$t=0$是此方程的正则奇点

当$z=\infty$是方程$w''+p(z)w'+q(z)w=0$的奇点，且 $zp(z)$ 与 $z^2q(z)$ 解析时，则$z=\infty$是此方程的正则奇点

当$z=\infty$是方程$w''+p(z)w'+q(z)w=0$的奇点，且 $zp(z)$ 与 $z^2q(z)$ 解析时，则$z=\infty$是此方程的正则奇点

- $z=\infty$是Legendre方程
$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$
的奇点
- 且为正则奇点
- Legendre方程共有三个正则奇点：$z=\pm1,\infty$

当$z=\infty$是方程$w''+p(z)w'+q(z)w=0$的奇点，且 $zp(z)$ 与 $z^2q(z)$ 解析时，则$z=\infty$是此方程的正则奇点

- $z=\infty$是Legendre方程
$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$
的奇点
- 且为正则奇点
- Legendre方程共有三个正则奇点：$z=\pm1,\infty$

当$z=\infty$是方程$w''+p(z)w'+q(z)w=0$的奇点，且 $zp(z)$ 与 $z^2q(z)$ 解析时，则$z=\infty$是此方程的正则奇点

- $z=\infty$是Legendre方程
$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+l(l+1)w=0$$
的奇点
- 且为正则奇点
- Legendre方程共有三个正则奇点：$z=\pm1,\infty$

当$z=\infty$是方程$w''+p(z)w'+q(z)w=0$的奇点，且 $zp(z)$ 与 $z^2q(z)$ 解析时，则$z=\infty$是此方程的正则奇点

- $z=\infty$是超几何方程
$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$
的奇点
- 且为正则奇点
- 超几何方程共有三个正则奇点：$z=0,1,\infty$

当$z=\infty$是方程$w''+p(z)w'+q(z)w=0$的奇点，且 $zp(z)$ 与 $z^2q(z)$ 解析时，则$z=\infty$是此方程的正则奇点

- $z=\infty$是超几何方程
$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$
的奇点
- 且为正则奇点
- 超几何方程共有三个正则奇点：$z=0,1,\infty$

当$z=\infty$是方程$w''+p(z)w'+q(z)w=0$的奇点，且 $zp(z)$ 与 $z^2q(z)$ 解析时，则$z=\infty$是此方程的正则奇点

- $z=\infty$是超几何方程
$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$
的奇点
- 且为正则奇点
- 超几何方程共有三个正则奇点：$z=0,1,\infty$

讲授要点

1. 方程正则奇点处的解
   - 方程奇点处解的一般形式
   - 正则奇点
2. 求解的思路与一般结论
   - 求解思路
   - 一般步骤与结论
3. Bessel方程的解
   - Bessel方程
   - Bessel方程的第一解
   - Bessel方程的第二解

求解思路

- 将正则解$w_1(z)$或$w_2(z)$代入方程
- 通过比较系数，求出指标和递推关系
- 进而求出系数的普遍表达式

实际求解过程，总是先将解$w_1(z)$代入方程

- 如果能够同时求得两个线性无关解，任务便告完成(说明$w_2(z)$不含对数项，即$g = 0$)
- 如果只能求得一个解(例如$\rho_1 = \rho_2$时)，那么，就还必须再将$w_2(z)$(说明g一定不为0)代入方程求解

求解思路

- 将正则解$w_1(z)$或$w_2(z)$代入方程
- 通过比较系数，求出指标和递推关系
- 进而求出系数的普遍表达式

实际求解过程，总是先将解$w_1(z)$代入方程

- 如果能够同时求得两个线性无关解，任务便告完成(说明$w_2(z)$不含对数项，即$g = 0$)
- 如果只能求得一个解(例如$\rho_1 = \rho_2$时)，那么，就还必须再将$w_2(z)$(说明g一定不为0)代入方程求解

求解思路

- 将正则解$w_1(z)$或$w_2(z)$代入方程
- 通过比较系数，求出指标和递推关系
- 进而求出系数的普遍表达式

实际求解过程，总是先将解$w_1(z)$代入方程

- 如果能够同时求得两个线性无关解，任务便告完成(说明$w_2(z)$不含对数项，即$g=0$)
- 如果只能求得一个解(例如$\rho_1=\rho_2$时)，那么，就还必须再将$w_2(z)$(说明g一定不为0)代入方程求解

求解思路

- 将正则解$w_1(z)$或$w_2(z)$代入方程
- 通过比较系数，求出指标和递推关系
- 进而求出系数的普遍表达式

实际求解过程，总是先将解$w_1(z)$代入方程

- 如果能够同时求得两个线性无关解，任务便告完成(说明$w_2(z)$不含对数项，即$g=0$)
- 如果只能求得一个解(例如$\rho_1=\rho_2$时)，那么，就还必须再将$w_2(z)$(说明g一定不为0)代入方程求解

求解思路

- 将正则解$w_1(z)$或$w_2(z)$代入方程
- 通过比较系数，求出指标和递推关系
- 进而求出系数的普遍表达式

实际求解过程，总是先将解$w_1(z)$代入方程

- 如果能够同时求得两个线性无关解，任务便告完成(说明$w_2(z)$不含对数项，即$g=0$)
- 如果只能求得一个解(例如$\rho_1=\rho_2$时)，那么，就还必须再将$w_2(z)$(说明g一定不为0)代入方程求解

求解思路

- 将正则解$w_1(z)$或$w_2(z)$代入方程
- 通过比较系数，求出指标和递推关系
- 进而求出系数的普遍表达式

实际求解过程，总是先将解$w_1(z)$代入方程

- 如果能够同时求得两个线性无关解，任务便告完成(说明$w_2(z)$不含对数项，即$g=0$)
- 如果只能求得一个解(例如$\rho_1=\rho_2$时)，那么，就还必须再将$w_2(z)$(说明g一定不为0)代入方程求解

评述

如果$w_1(z), w_2(z)$是二阶线性常微分方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

的两个解

$$w_1''(z) + p(z)w_1'(z) + q(z)w_1(z) = 0$$
$$w_2''(z) + p(z)w_2'(z) + q(z)w_2(z) = 0$$

用$w_2(z), w_1(z)$分别乘此二方程，相减，即得

$$w_1w_2'' - w_2w_1'' + p(z)(w_1w_2' - w_2w_1') = 0$$

即 $(w_1w_2' - w_2w_1')' + p(z)(w_1w_2' - w_2w_1') = 0$

评述

如果$w_1(z), w_2(z)$是二阶线性常微分方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

的两个解

$$w_1''(z) + p(z)w_1'(z) + q(z)w_1(z) = 0$$
$$w_2''(z) + p(z)w_2'(z) + q(z)w_2(z) = 0$$

用$w_2(z), w_1(z)$分别乘此二方程，相减，即得

$$w_1w_2'' - w_2w_1'' + p(z)(w_1w_2' - w_2w_1') = 0$$

即 $(w_1w_2' - w_2w_1')' + p(z)(w_1w_2' - w_2w_1') = 0$

评述

如果$w_1(z), w_2(z)$是二阶线性常微分方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

的两个解

$$w_1''(z) + p(z)w_1'(z) + q(z)w_1(z) = 0$$
$$w_2''(z) + p(z)w_2'(z) + q(z)w_2(z) = 0$$

用$w_2(z), w_1(z)$分别乘此二方程，相减，即得

$$w_1w_2'' - w_2w_1'' + p(z)(w_1w_2' - w_2w_1') = 0$$

即 $\quad (w_1w_2' - w_2w_1')' + p(z)(w_1w_2' - w_2w_1') = 0$

评述

$$(w_1w_2' - w_2w_1')' + p(z)(w_1w_2' - w_2w_1') = 0$$

即
$$\frac{(w_1w_2' - w_2w_1')'}{w_1w_2' - w_2w_1'} = -p(z)$$

积分即得

$$w_1w_2' - w_2w_1' = A\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

两端除以w_1^2，又能化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = \frac{A}{w_1^2}\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

评述

$$(w_1w_2' - w_2w_1')' + p(z)(w_1w_2' - w_2w_1') = 0$$

即
$$\frac{(w_1w_2' - w_2w_1')'}{w_1w_2' - w_2w_1'} = -p(z)$$

积分即得
$$w_1w_2' - w_2w_1' = A\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

两端除以w_1^2，又能化为
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = \frac{A}{w_1^2}\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

评述

$$(w_1w_2'-w_2w_1')'+p(z)(w_1w_2'-w_2w_1')=0$$

即
$$\frac{(w_1w_2'-w_2w_1')'}{w_1w_2'-w_2w_1'}=-p(z)$$

积分即得
$$w_1w_2'-w_2w_1'=A\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

两端除以w_1^2，又能化为
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=\frac{A}{w_1^2}\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

评述

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=\frac{A}{w_1^2}\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

再积分一次，就得到$w_1(z), w_2(z)$之间的关系

$$w_2(z)=Aw_1(z)\int^z\left\{\frac{1}{[w_1(z)]^2}\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]\right\}\mathrm{d}z$$

因此，如果已知二阶线性常微分方程

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0$$

的一个解$w_1(z)$，总可以通过计算积分来求出第二解

评述

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=\frac{A}{w_1^2}\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

再积分一次，就得到$w_1(z), w_2(z)$之间的关系

$$w_2(z)=Aw_1(z)\int^z\left\{\frac{1}{[w_1(z)]^2}\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]\right\}\mathrm{d}z$$

因此，如果已知二阶线性常微分方程

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0$$

的一个解$w_1(z)$，总可以通过计算积分来求出第二解

讲授要点

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

1. 将$p(z), q(z)$展开为Laurent级数

$$p(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{l-1} \qquad q(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{l-2}$$

将$p(z), q(z)$及$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho}$代入方程

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho)(k+\rho-1) z^{k+\rho-2}$$
$$+ \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{l-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\rho) z^{k+\rho-1}$$
$$+ \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{l-2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} = 0$$

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \qquad \text{不妨设正则奇点} z = 0$$

1. 将$p(z), q(z)$展开为Laurent级数

$$p(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{l-1} \qquad q(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{l-2}$$

将$p(z), q(z)$及$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho}$代入方程

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2}$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{l-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)z^{k+\rho-1}$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{l-2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} = 0$$

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \qquad \text{不妨设正则奇点} z = 0$$

1. 将$p(z), q(z)$展开为Laurent级数

$$p(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{l-1} \qquad q(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{l-2}$$

将$p(z), q(z)$及$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho}$代入方程

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2} + \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{l-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)z^{k+\rho-1} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{l-2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} = 0$$

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

❷ 整理，并消去$z^{\rho-2}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\left[a_l(k+\rho-l)+b_l\right]c_{k-l}z^k = 0 \qquad \text{(A)}$$

❸ 比较等式(A)两端最低次幂(即z^0)的系数，可得

$$c_0\left[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0\right]=0$$

因为$c_0 \neq 0$，故得指标方程

$$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0$$

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$　　不妨设正则奇点$z = 0$

❷ 整理，并消去$z^{\rho-2}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\left[a_l(k+\rho-l)+b_l\right]c_{k-l}z^k = 0 \qquad \text{(A)}$$

❸ 比较等式(A)两端最低次幂(即z^0)的系数，可得

$$c_0\left[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0\right]=0$$

因为$c_0 \neq 0$，故得指标方程

$$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0$$

$w''+p(z)w'+q(z)w=0$ 不妨设正则奇点$z=0$

❷ 整理，并消去$z^{\rho-2}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\left[a_l(k+\rho-l)+b_l\right]c_{k-l}z^k = 0 \qquad \text{(A)}$$

❸ 比较等式(A)两端最低次幂(即z^0)的系数，可得

$$c_0\left[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0\right]=0$$

因为$c_0\neq 0$，故得指标方程

$$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0$$

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

❸ 比较等式(A)两端最低次幂(即z^0)的系数，可得

$$c_0\left[\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0\right] = 0$$

因为$c_0 \neq 0$，故得**指标方程**

$$\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0 = 0$$

其中

$$a_0 = \lim_{z\to 0} zp(z) \qquad b_0 = \lim_{z\to 0} z^2 q(z)$$

解指标方程，得两个根ρ_1, ρ_2

规定$\mathrm{Re}\rho_1 \geq \mathrm{Re}\rho_2$

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

❸ 比较等式(A)两端最低次幂(即z^0)的系数，可得

$$c_0\left[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0\right]=0$$

因为$c_0 \neq 0$，故得**指标方程**

$$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0$$

其中

$$a_0=\lim_{z\to 0} zp(z) \qquad b_0=\lim_{z\to 0} z^2 q(z)$$

解指标方程，得两个根ρ_1, ρ_2

规定$\mathrm{Re}\rho_1 \geq \mathrm{Re}\rho_2$

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

❸ 比较等式(A)两端最低次幂(即z^0)的系数，可得

$$c_0 \left[\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0\right] = 0$$

因为$c_0 \neq 0$，故得指标方程

$$\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0 = 0$$

其中

$$a_0 = \lim_{z\to 0} zp(z) \qquad b_0 = \lim_{z\to 0} z^2 q(z)$$

解指标方程，得两个根ρ_1, ρ_2

规定$\mathrm{Re}\rho_1 \geq \mathrm{Re}\rho_2$

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点 $z = 0$

❹ 比较等式(A)两端 z^n 的系数，得

$$(n+\rho)(n+\rho-1)c_n + \sum_{l=0}^{n}[a_l(n+\rho-l)+b_l]c_{n-l} = 0$$

于是就得到系数之间的递推关系

$$[(n+\rho)(n+\rho-1)+a_0(n+\rho)b_0]c_n + \sum_{l=1}^{n}[a_l(n+\rho-l)+b_l]c_{n-l} = 0$$

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$　　不妨设正则点$z = 0$

4 比较等式(A)两端z^n的系数，得

$$(n+\rho)(n+\rho-1)c_n + \sum_{l=0}^{n}[a_l(n+\rho-l)+b_l]c_{n-l} = 0$$

于是就得到系数之间的递推关系

$$[(n+\rho)(n+\rho-1)+a_0(n+\rho)b_0]c_n + \sum_{l=1}^{n}[a_l(n+\rho-l)+b_l]c_{n-l} = 0$$

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

5. 反复利用递推关系，就可以得到系数c_n的普遍表达式

在c_n的表达式中一定含有ρ

用$\rho = \rho_1$代入，即可得到解$w_1(z)$

用$\rho = \rho_2$代入，又可得到解$w_2(z)$?

6. 当$\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时，就求出了方程的(两个线性无关的)特解

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

5. 反复利用递推关系，就可以得到系数c_n的普遍表达式

在c_n的表达式中一定含有ρ

用$\rho = \rho_1$代入，即可得到解$w_1(z)$

用$\rho = \rho_2$代入，又可得到解$w_2(z)$?

6. 当$\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时，就求出了方程的(两个线性无关的)特解

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

5. 反复利用递推关系，就可以得到系数c_n的普遍表达式

在c_n的表达式中一定含有ρ

用$\rho = \rho_1$代入，即可得到解$w_1(z)$

用$\rho = \rho_2$代入，又可得到解$w_2(z)$?

6. 当$\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时，就求出了方程的(两个线性无关的)特解

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

5. 反复利用递推关系，就可以得到系数c_n的普遍表达式

在c_n的表达式中一定含有ρ

用$\rho = \rho_1$代入，即可得到解$w_1(z)$

用$\rho = \rho_2$代入，又可得到解$w_2(z)$?

6. 当$\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时，就求出了方程的(两个线性无关的)特解

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

5. 反复利用递推关系，就可以得到系数c_n的普遍表达式

在c_n的表达式中一定含有ρ

用$\rho = \rho_1$代入，即可得到解$w_1(z)$

用$\rho = \rho_2$代入，又可得到解$w_2(z)$?

6. 当$\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时，就求出了方程的(两个线性无关的)特解

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \qquad \text{不妨设正则奇点} z = 0$$

5 反复利用递推关系，就可以得到系数c_n的普遍表达式

在c_n的表达式中一定含有ρ

用$\rho = \rho_1$代入，即可得到解$w_1(z)$

用$\rho = \rho_2$代入，又可得到解$w_2(z)$?

7 如果$\rho_1 = \rho_2$，肯定只能得到一个解，第二解一定含对数项$\Longrightarrow$需重求$w_2(z)$

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

❽ 如果$\rho_1 - \rho_2 =$ 正整数m，对于$\rho = \rho_2$

$$[(m+\rho_2)(m+\rho_2-1) + a_0(m+\rho_2)b_0]c_m^{(2)} + \sum_{l=1}^{m}[a_l(m+\rho_2-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)} = 0$$

即变为$0 \cdot c_m^{(2)} + \sum_{l=1}^{m}[a_l(\rho_1-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)} = 0$

因此 $\sum_{l=1}^{m}[a_l(\rho_1-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)} = 0$ $c_m^{(2)}$任意

Case 1

$\sum_{l=1}^{m}[a_l(\rho_1-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)} \neq 0$ $c_m^{(2)}$无解

Case 2

$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ 不妨设正则奇点$z = 0$

8 如果$\rho_1 - \rho_2 =$ 正整数m，对于$\rho = \rho_2$

$$[(m+\rho_2)(m+\rho_2-1)+a_0(m+\rho_2)b_0]c_m^{(2)} + \sum_{l=1}^{m}[a_l(m+\rho_2-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)} = 0$$

即变为$0\cdot c_m^{(2)} + \sum_{l=1}^{m}[a_l(\rho_1-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)} = 0$

因此 $\sum_{l=1}^{m}[a_l(\rho_1-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)} = 0$ $c_m^{(2)}$任意

Case 1

$\sum_{l=1}^{m}[a_l(\rho_1-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)} \neq 0$ $c_m^{(2)}$无解

Case 2

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0 \qquad \text{不妨设正则奇点} z=0$$

8 如果$\rho_1-\rho_2=$正整数m，对于$\rho=\rho_2$

$$[(m+\rho_2)(m+\rho_2-1)+a_0(m+\rho_2)b_0]c_m^{(2)} + \sum_{l=1}^{m}[a_l(m+\rho_2-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)}=0$$

即变为$0\cdot c_m^{(2)}+\sum_{l=1}^{m}[a_l(\rho_1-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)}=0$

因此 $\sum_{l=1}^{m}[a_l(\rho_1-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)}=0 \qquad c_m^{(2)}$任意

Case 1

$\sum_{l=1}^{m}[a_l(\rho_1-l)+b_l]c_{m-l}^{(2)}\neq 0 \qquad c_m^{(2)}$无解

Case 2

方程的第二解一定不含对数项，还能继续求解

以后的各项系数$c_n^{(2)} (n > m)$会同时依赖于$c_0^{(2)}$和$c_m^{(2)}$．第二解$w_2(z)$便有两项，一项正比于$c_0^{(2)}$，一项正比于$c_m^{(2)}$

仔细分析就会发现，$c_{m+n}^{(2)}$和$c_m^{(2)}$之间的关系与$c_n^{(1)}$和$c_0^{(1)}$之间的关系完全一样，因此，与$c_m^{(2)}$成正比的项正好就是第一解(最多可能差一个常数倍)，因而不妨取$c_m^{(2)} = 0$

Return

方程的第二解一定不含对数项，还能继续求解

以后的各项系数$c_n^{(2)}(n>m)$会同时依赖于$c_0^{(2)}$和$c_m^{(2)}$．第二解$w_2(z)$便有两项，一项正比于$c_0^{(2)}$，一项正比于$c_m^{(2)}$

仔细分析就会发现，$c_{m+n}^{(2)}$和$c_m^{(2)}$之间的关系与$c_n^{(1)}$和$c_0^{(1)}$之间的关系完全一样，因此，与$c_m^{(2)}$成正比的项正好就是第一解(最多可能差一个常数倍)，因而不妨取$c_m^{(2)}=0$

方程的第二解一定不含对数项，还能继续求解

以后的各项系数$c_n^{(2)}(n>m)$会同时依赖于$c_0^{(2)}$和$c_m^{(2)}$．第二解$w_2(z)$便有两项，一项正比于$c_0^{(2)}$，一项正比于$c_m^{(2)}$

仔细分析就会发现，$c_{m+n}^{(2)}$和$c_m^{(2)}$之间的关系与$c_n^{(1)}$和$c_0^{(1)}$之间的关系完全一样，因此，与$c_m^{(2)}$成正比的项正好就是第一解(最多可能差一个常数倍)，因而不妨取$c_m^{(2)}=0$

Return

等式无意义，说明所取第二解的数学形式不对

方程的第二解一定不含对数项

应取

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$

重新求解

等式无意义，说明所取第二解的数学形式不对

方程的第二解一定不含对数项

应取

$$w_2(z) = gw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-z_0)^k$$

重新求解

等式无意义，说明所取第二解的数学形式不对

方程的第二解一定不含对数项

应取

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$

重新求解

总结

规定方程在正则奇点处的两个指标$\mathrm{Re}\rho_1 \geq \mathrm{Re}\rho_2$，则

- $\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时　　第二解一定不含对数项
- $\rho_1 = \rho_2$时　　第二解一定含对数项
- $\rho_1 - \rho_2 =$ 正整数时　　第二解可能含对数项

总结

规定方程在正则奇点处的两个指标$\mathrm{Re}\rho_1 \geq \mathrm{Re}\rho_2$，则

- $\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时　　第二解一定不含对数项
- $\rho_1 = \rho_2$时　　第二解一定含对数项
- $\rho_1 - \rho_2 =$ 正整数时　　第二解可能含对数项

总结

规定方程在正则奇点处的两个指标$\mathrm{Re}\rho_1 \geq \mathrm{Re}\rho_2$，则

- $\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时　　第二解一定不含对数项
- $\rho_1 = \rho_2$时　　第二解一定含对数项
- $\rho_1 - \rho_2 =$ 正整数时　　第二解可能含对数项

讲授要点

1. 方程正则奇点处的解
   - 方程奇点处解的一般形式
   - 正则奇点
2. 求解的思路与一般结论
   - 求解思路
   - 一般步骤与结论
3. Bessel方程的解
   - Bessel方程
   - Bessel方程的第一解
   - Bessel方程的第二解

例10.3 Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

常见的常微分方程之一，其中ν是常数，$\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$

$$p(z)=\frac{1}{z}\qquad q(z)=1-\frac{\nu^2}{z^2}$$

$z=0$是方程的正则奇点

$z=\infty$是方程的非正则奇点

例10.3 Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

常见的常微分方程之一，其中ν是常数，$\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$

$$p(z)=\frac{1}{z} \qquad q(z)=1-\frac{\nu^2}{z^2}$$

$z=0$是方程的正则奇点

$z=\infty$是方程的非正则奇点

例10.3 Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

常见的常微分方程之一，其中ν是常数，$\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$

$$p(z)=\frac{1}{z}\qquad q(z)=1-\frac{\nu^2}{z^2}$$

$z=0$是方程的正则奇点

$z=\infty$是方程的非正则奇点

例10.3　Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

常见的常微分方程之一，其中ν是常数，$\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$

$$p(z)=\frac{1}{z}\qquad q(z)=1-\frac{\nu^2}{z^2}$$

$z=0$是方程的正则奇点

$z=\infty$是方程的非正则奇点

例10.3 Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

常见的常微分方程之一，其中ν是常数，$\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$

$$p(z)=\frac{1}{z}\qquad q(z)=1-\frac{\nu^2}{z^2}$$

$z=0$是方程的正则奇点

$z=\infty$是方程的非正则奇点

讲授要点

1. 方程正则奇点处的解
    - 方程奇点处解的一般形式
    - 正则奇点
2. 求解的思路与一般结论
    - 求解思路
    - 一般步骤与结论
3. Bessel方程的解
    - Bessel方程
    - Bessel方程的第一解
    - Bessel方程的第二解

例10.4 求Bessel方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中$\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$是参数

解 $z=0$是正则奇点，因此可令$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{k+\rho}$

代入方程，就有

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2}$$
$$+\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)z^{k+\rho-1}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{k+\rho}=0$$

例10.4　求Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中$\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$是参数

解　$z=0$是正则奇点，因此可令$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+\rho}$

代入方程，就有

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2}+\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)z^{k+\rho-1}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+\rho}=0$$

例10.4 求Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中$\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$是参数

解 $z=0$是正则奇点，因此可令$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+\rho}$

代入方程，就有

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2}$$
$$+\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)z^{k+\rho-1}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+\rho}=0$$

例10.4 求Bessel方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中$\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$是参数

整理合并，约去$z^{\rho-2}$，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left[(k+\rho)^2-\nu^2\right]z^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{k+2}=0$$

由最低次幂(z^0)项的系数，且因$c_0\neq 0$，就得到指标方程

$$\rho^2-\nu^2=0$$

因而求得指标 $\rho_1=\nu \qquad \rho_2=-\nu$

例10.4　求Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中$\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$是参数

整理合并，约去$z^{\rho-2}$，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left[(k+\rho)^2-\nu^2\right]z^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{k+2}=0$$

由最低次幂(z^0)项的系数，且因$c_0\neq 0$，就得到**指标方程**

$$\rho^2-\nu^2=0$$

因而求得指标　$\rho_1=\nu$　$\rho_2=-\nu$

例10.4 求Bessel方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

在$z=0$点邻域内的解，其中$\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$是参数

整理合并，约去$z^{\rho-2}$，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left[(k+\rho)^2-\nu^2\right]z^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{k+2}=0$$

由最低次幂(z^0)项的系数，且因$c_0\neq 0$，就得到指标方程

$$\rho^2-\nu^2=0$$

因而求得指标 $\rho_1=\nu$ $\rho_2=-\nu$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left[(k+\rho)^2-\nu^2\right]z^k+\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+2}=0$$

由z^1的系数，得

$$c_1\left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]=0 \quad 即 \quad c_1(2\rho+1)=0$$

因此 $$c_1=\begin{cases}0 & 当\rho\neq-1/2\\ 任意 & 当\rho=-1/2\end{cases}$$

以后将看到，即使$\rho=-1/2$，仍可取$c_1=0$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left[(k+\rho)^2-\nu^2\right]z^k+\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+2}=0$$

由z^1的系数，得

$$c_1\left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]=0 \quad \text{即} \quad c_1(2\rho+1)=0$$

因此 $$c_1=\begin{cases} 0 & \text{当}\rho\neq -1/2 \\ \text{任意} & \text{当}\rho=-1/2 \end{cases}$$

以后将看到，即使$\rho=-1/2$，仍可取$c_1=0$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[(k+\rho)^2-\nu^2\right] z^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+2} = 0$$

由z^1的系数，得

$$c_1\left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]=0 \quad 即 \quad c_1(2\rho+1)=0$$

因此 $$c_1 = \begin{cases} 0 & 当\rho \neq -1/2 \\ 任意 & 当\rho = -1/2 \end{cases}$$

以后将看到，即使$\rho=-1/2$，仍可取$c_1=0$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[(k+\rho)^2-\nu^2\right] z^k+\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+2}=0$$

由z^n的系数，得

$$c_n\left[(\rho+n)^2-\nu^2\right]+c_{n-2}=0$$

即 $$c_n n(2\rho+n)+c_{n-2}=0$$

因此得到**递推关系** $$c_n=-\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$$

反复利用递推关系，就可以求得全部叠加系数c_n

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left[(k+\rho)^2-\nu^2\right]z^k+\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+2}=0$$

由z^n的系数，得

$$c_n\left[(\rho+n)^2-\nu^2\right]+c_{n-2}=0$$

即

$$c_n n(2\rho+n)+c_{n-2}=0$$

因此得到**递推关系**

$$c_n=-\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$$

反复利用递推关系，就可以求得全部叠加系数c_n

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[(k+\rho)^2-\nu^2\right] z^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+2} = 0$$

由z^n的系数，得

$$c_n\left[(\rho+n)^2-\nu^2\right]+c_{n-2}=0$$

即

$$c_n n(2\rho+n)+c_{n-2}=0$$

因此得到递推关系 $$c_n=-\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$$

反复利用递推关系，就可以求得全部叠加系数c_n

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\text{递推关系 } c_n = -\frac{1}{n(n+2\rho)} c_{n-2}$$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$

$$c_2 = -\frac{1}{2(2+2\rho)} c_0 = -\frac{1}{1(1+\rho)} \left(\frac{1}{2}\right)^2 c_0$$

$$c_3 = -\frac{1}{3(3+\rho)} c_1 = 0$$

$\cdots$

例10.4　求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\text{递推关系}\ c_n = -\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$

$$c_2 = -\frac{1}{2(2+2\rho)}c_0 = -\frac{1}{1(1+\rho)}\left(\frac{1}{2}\right)^2 c_0$$

$$c_3 = -\frac{1}{3(3+\rho)}c_1 = 0$$

$\cdots$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\text{递推关系}\quad c_n = -\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$

$$c_2 = -\frac{1}{2(2+2\rho)}c_0 = -\frac{1}{1(1+\rho)}\left(\frac{1}{2}\right)^2 c_0$$

$$c_3 = -\frac{1}{3(3+\rho)}c_1 = 0$$

$\cdots$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\text{递推关系 } c_n = -\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ **$c_0 \Rightarrow c_{2n}$**

$$c_{2n} = -\frac{1}{n(n+\rho)}\frac{1}{2^2}c_{2n-2}$$

$$= \frac{(-)^2}{n(n-1)(n+\rho)(n+\rho-1)}\frac{1}{2^4}c_{2n-4} = \cdots$$

$$= \frac{(-)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0$$

例10.4　求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

递推关系 $c_n = -\dfrac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$　　　$c_0 \Rightarrow c_{2n}$

$$c_{2n} = -\frac{1}{n(n+\rho)}\frac{1}{2^2}c_{2n-2}$$

$$= \frac{(-)^2}{n(n-1)(n+\rho)(n+\rho-1)}\frac{1}{2^4}c_{2n-4} = \cdots$$

$$= \frac{(-)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0$$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

递推关系 $c_n = -\dfrac{1}{n(n+2\rho)} c_{n-2}$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ $\quad$ $c_0 \Rightarrow c_{2n}$

$$c_{2n} = -\frac{1}{n(n+\rho)}\frac{1}{2^2}c_{2n-2}$$

$$= \frac{(-)^2}{n(n-1)(n+\rho)(n+\rho-1)}\frac{1}{2^4}c_{2n-4} = \cdots$$

$$= \frac{(-)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0$$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

递推关系 $c_n = -\dfrac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ $c_0 \Rightarrow c_{2n}$

$$\begin{aligned} c_{2n} &= -\frac{1}{n(n+\rho)}\frac{1}{2^2}c_{2n-2} \\ &= \frac{(-)^2}{n(n-1)(n+\rho)(n+\rho-1)}\frac{1}{2^4}c_{2n-4} = \cdots \\ &= \frac{(-)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0 \end{aligned}$$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

递推关系 $c_n = -\dfrac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ $\qquad c_1 \Rightarrow c_{2n+1}$

$$c_{2n+1} = -\frac{1}{(n+1/2)(n+\rho+1/2)}\frac{1}{2^2}c_{2n-1}$$

$$= (-)^2\frac{1}{(n+1/2)(n+\rho+1/2)} \times \frac{1}{(n-1/2)(n+\rho-1/2)}\frac{1}{2^4}c_{2n-3} = \cdots$$

$$= (-)^n\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(n+3/2)}\frac{\Gamma(\rho+3/2)}{\Gamma(n+\rho+3/2)}\frac{1}{2^{2n}}c_1 = 0$$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\text{递推关系 } c_n = -\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ $\qquad$ $c_1 \Rightarrow c_{2n+1}$

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= -\frac{1}{(n+1/2)(n+\rho+1/2)}\frac{1}{2^2}c_{2n-1}\\
&= (-)^2\frac{1}{(n+1/2)(n+\rho+1/2)}\\
&\quad\times\frac{1}{(n-1/2)(n+\rho-1/2)}\frac{1}{2^4}c_{2n-3} = \cdots\\
&= (-)^n\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(n+3/2)}\frac{\Gamma(\rho+3/2)}{\Gamma(n+\rho+3/2)}\frac{1}{2^{2n}}c_1 = 0
\end{aligned}$$

例10.4　求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\text{递推关系}\ c_n = -\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$　　**$c_1 \Rightarrow c_{2n+1}$**

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= -\frac{1}{(n+1/2)(n+\rho+1/2)}\frac{1}{2^2}c_{2n-1} \\ &= (-)^2\frac{1}{(n+1/2)(n+\rho+1/2)} \\ &\quad\times\frac{1}{(n-1/2)(n+\rho-1/2)}\frac{1}{2^4}c_{2n-3} = \cdots \\ &= (-)^n\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(n+3/2)}\frac{\Gamma(\rho+3/2)}{\Gamma(n+\rho+3/2)}\frac{1}{2^{2n}}c_1 = 0 \end{aligned}$$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$\text{递推关系}\ c_n = -\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ $\qquad$ **$c_1 \Rightarrow c_{2n+1}$**

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= -\frac{1}{(n+1/2)(n+\rho+1/2)}\frac{1}{2^2}c_{2n-1} \\ &= (-)^2\frac{1}{(n+1/2)(n+\rho+1/2)} \\ &\quad\times\frac{1}{(n-1/2)(n+\rho-1/2)}\frac{1}{2^4}c_{2n-3} = \cdots \\ &= (-)^n\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(n+3/2)}\frac{\Gamma(\rho+3/2)}{\Gamma(n+\rho+3/2)}\frac{1}{2^{2n}}c_1 = 0 \end{aligned}$$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

递推关系 $c_n = -\dfrac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}$

$(c_0, c_1) \Rightarrow c_k$ $c_1 \Rightarrow c_{2n+1}$

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= -\frac{1}{(n+1/2)(n+\rho+1/2)}\frac{1}{2^2}c_{2n-1} \\
&= (-)^2\frac{1}{(n+1/2)(n+\rho+1/2)} \\
&\quad\times\frac{1}{(n-1/2)(n+\rho-1/2)}\frac{1}{2^4}c_{2n-3} = \cdots \\
&= (-)^n\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(n+3/2)}\frac{\Gamma(\rho+3/2)}{\Gamma(n+\rho+3/2)}\frac{1}{2^{2n}}c_1 = 0
\end{aligned}$$

例10.4　求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$c_{2n}=\frac{(-)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0 \qquad c_{2n+1}=0$$

用$\rho_1=\nu$代入

$$w_1(z)=c_0 z^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

取$c_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$，就有解

$$\mathrm{J}_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$c_{2n}=\frac{(-)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0 \qquad c_{2n+1}=0$$

用$\rho_1=\nu$代入

$$w_1(z)=c_0z^\nu\sum_{k=0}^\infty\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

取$c_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$，就有解

$$\mathrm{J}_\nu(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

例10.4　求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$c_{2n}=\frac{(-)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0 \qquad c_{2n+1}=0$$

用$\rho_1=\nu$代入

$$w_1(z)=c_0z^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

取$c_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$，就有解

$$\mathrm{J}_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

讲授要点

1. 方程正则奇点处的解
   - 方程奇点处解的一般形式
   - 正则奇点
2. 求解的思路与一般结论
   - 求解思路
   - 一般步骤与结论
3. Bessel方程的解
   - Bessel方程
   - Bessel方程的第一解
   - Bessel方程的第二解

例10.4　求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$c_{2n}=\frac{(-)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0 \qquad c_{2n+1}=0$$

用$\rho_2=-\nu\neq 0$代入

$$w_2(z)=c_0z^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

取$c_0=\dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$，就有解

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}$$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$c_{2n}=\frac{(-)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0 \qquad c_{2n+1}=0$$

用$\rho_2=-\nu\neq 0$代入

$$w_2(z)=c_0z^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

取$c_0=\dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$，就有解

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}$$

例10.4 求Bessel方程在$z=0$点邻域内的解

$$c_{2n}=\frac{(-)^n}{n!}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)}\frac{1}{2^{2n}}c_0 \qquad c_{2n+1}=0$$

用$\rho_2=-\nu\neq 0$代入

$$w_2(z)=c_0z^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

取$c_0=\dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$，就有解

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}$$

补充讨论：$\rho = -1/2$时可取$c_1 = 0$

- 这只能出现在$\nu = 1/2$时
- $\rho = -1/2$只对应于$w_2(z)$
- 第一解为$\mathrm{J}_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$

$\rho = -1/2$

$$c_{2k+1} = (-)^k \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)} \frac{\Gamma(\rho+3/2)}{\Gamma(k+\rho+3/2)} \frac{1}{2^{2k}} c_1$$

$$= \frac{(-)^k}{k!} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)} \frac{1}{2^{2k}} c_1$$

补充讨论：$\rho = -1/2$时可取$c_1 = 0$

- 这只能出现在$\nu = 1/2$时
- $\rho = -1/2$只对应于$w_2(z)$
- 第一解为$\mathrm{J}_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$

$\rho = -1/2$

$$c_{2k+1} = (-)^k \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)} \frac{\Gamma(\rho+3/2)}{\Gamma(k+\rho+3/2)} \frac{1}{2^{2k}} c_1$$

$$= \frac{(-)^k}{k!} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)} \frac{1}{2^{2k}} c_1$$

补充讨论：$\rho=-1/2$时可取$c_1=0$

- 这只能出现在$\nu=1/2$时
- $\rho=-1/2$只对应于$w_2(z)$
- 第一解为$\mathrm{J}_{1/2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$

$\rho=-1/2$

$$c_{2k+1}=(-)^k\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)}\frac{\Gamma(\rho+3/2)}{\Gamma(k+\rho+3/2)}\frac{1}{2^{2k}}c_1$$

$$=\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)}\frac{1}{2^{2k}}c_1$$

补充讨论：$\rho=-1/2$时可取$c_1=0$

- 这只能出现在$\nu=1/2$时
- $\rho=-1/2$只对应于$w_2(z)$
- 第一解为$\mathrm{J}_{1/2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$

$\rho=-1/2$

$$c_{2k+1}=(-)^k\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)}\frac{\Gamma(\rho+3/2)}{\Gamma(k+\rho+3/2)}\frac{1}{2^{2k}}c_1$$

$$=\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)}\frac{1}{2^{2k}}c_1$$

补充讨论：$\rho=-1/2$时可取$c_1=0$

- 这只能出现在$\nu=1/2$时
- $\rho=-1/2$只对应于$w_2(z)$
- 第一解为$\mathrm{J}_{1/2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$

$\rho=-1/2$

$$c_{2k+1}=(-)^k\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)}\frac{\Gamma(\rho+3/2)}{\Gamma(k+\rho+3/2)}\frac{1}{2^{2k}}c_1$$

$$=\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)}\frac{1}{2^{2k}}c_1$$

补充讨论：$\rho=-1/2$时可取$c_1=0$

- 这只能出现在$\nu=1/2$时
- $\rho=-1/2$只对应于$w_2(z)$
- 第一解为$\mathrm{J}_{1/2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$

$\rho=-1/2$ $w_2(z)$中与c_1有关的级数

$$z^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+1}z^{2k+1}$$
$$=c_1z^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}$$

补充讨论：$\rho=-1/2$时可取$c_1=0$

- 这只能出现在$\nu=1/2$时
- $\rho=-1/2$只对应于$w_2(z)$
- 第一解为$\mathrm{J}_{1/2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$

$\rho=-1/2$　　$w_2(z)$中与c_1有关的级数

$$z^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+1}z^{2k+1}$$
$$=c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

补充讨论：$\rho = -1/2$时可取$c_1 = 0$

- 这只能出现在$\nu = 1/2$时
- $\rho = -1/2$只对应于$w_2(z)$
- 第一解为$\mathrm{J}_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$

$\rho = -1/2$

只不过在$w_2(z)$中增加了与$w_1(z)$成正比的项

$$c_1\sqrt{\pi/2}\mathrm{J}_{1/2}(z)$$

要求的第二解$w_2(z)$应当与$w_1(z)$线性无关，故而不妨取$c_1 = 0$

补充讨论：$\rho=-1/2$时可取$c_1=0$

- 这只能出现在$\nu=1/2$时
- $\rho=-1/2$只对应于$w_2(z)$
- 第一解为$\mathrm{J}_{1/2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$

$\rho=-1/2$

只不过在$w_2(z)$中增加了与$w_1(z)$成正比的项

$$c_1\sqrt{\pi/2}\mathrm{J}_{1/2}(z)$$

要求的第二解$w_2(z)$应当与$w_1(z)$线性无关，故而不妨取$c_1=0$

讨论：是否已经求出了Bessel方程的线性无关解？

$$\mathrm{J}_{\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}$$

- 上面的确求出了两个指标 $\rho=\pm\nu$
- 对应于每一个指标，也都求出了相应的解
- 当$\nu\neq$ 整数时，求出的两个解$\mathrm{J}_{\nu}(x)$和$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$的确线性无关

讨论：是否已经求出了Bessel方程的线性无关解?

$$\mathrm{J}_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}$$

- 上面的确求出了两个指标 $\rho = \pm\nu$
- 对应于每一个指标，也都求出了相应的解
- 当$\nu \neq$ 整数时，求出的两个解$\mathrm{J}_{\nu}(x)$和$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$的确线性无关

讨论：是否已经求出了Bessel方程的线性无关解?

$$\mathrm{J}_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}$$

- 上面的确求出了两个指标 $\rho = \pm\nu$
- 对应于每一个指标，也都求出了相应的解
- 当$\nu \neq$ 整数时，求出的两个解$\mathrm{J}_\nu(x)$和$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$的确线性无关

讨论：是否已经求出了Bessel方程的线性无关解?

$$\mathsf{J}_{\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$
$$\mathsf{J}_{-\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}$$

- 当$\nu=0$时，上面只给出了一个解

$$\mathsf{J}_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

这表明，第二解应该含有对数项，即

$$w_2(x)=g\mathsf{J}_0(z)\ln z+\sum_{k=0}^{\infty}d_k z^k \qquad g\neq 0$$

讨论：是否已经求出了Bessel方程的线性无关解？

$$\mathrm{J}_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}$$

- 当$\nu = n, n = 1, 2, 3, \cdots$时，求得的$\mathrm{J}_{-n}(z)$与$\mathrm{J}_n(z)$线性相关；换言之，仍然只求得一个解

理由如下

$\mathrm{J}_{\pm n}(z)$线性相关

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

- 级数解$\mathrm{J}_{-n}(z)$中前$k=0,1,\cdots,n-1$各项的系数均为0
- $\mathrm{J}_{-n}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^{n+l}}{(n+l)!\Gamma(l+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\qquad(k-n=l)$$

$$=(-)^n\mathrm{J}_n(z)$$

$\mathrm{J}_{\pm n}(z)$线性相关

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

- 级数解$\mathrm{J}_{-n}(z)$中前$k=0,1,\cdots,n-1$各项的系数均为0
- $$\begin{aligned}\mathrm{J}_{-n}(z)&=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^{n+l}}{(n+l)!\Gamma(l+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\qquad(k-n=l)\\&=(-)^n\mathrm{J}_n(z)\end{aligned}$$

$\mathrm{J}_{\pm n}(z)$线性相关

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

解法失效之根源：求解过程不合法

- 在级数解法中，本来总约定级数解的首项系数不为0
- 但上面的求解过程中，却违反了这个约定：在导出$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$时，取$c_0=2^{\nu}/\Gamma(1-\nu)$，当$\nu=$ 正整数n时恰恰规定了$c_0=0$

$\mathrm{J}_{\pm n}(z)$线性相关

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

解法失效之根源：求解过程不合法

- 在级数解法中，本来总约定级数解的首项系数不为0
- 但上面的求解过程中，却违反了这个约定：在导出$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$时， 取$c_0=2^{\nu}/\Gamma(1-\nu)$，当$\nu=$ 正整数n时恰恰规定了$c_0=0$

$\mathrm{J}_{\pm n}(z)$线性相关

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

如何改正求解过程中的不合法运算?

☞ 如果只是舍弃$c_0=2^\nu/\Gamma(1-\nu)$这个不合理的规定，的确可以使得$w_2(z)$的级数中的系数$c_0, c_2, \cdots, c_{2n-2}$不为0，但从递推关系

$$c_{2k}=-\frac{1}{k(k-\nu)}\frac{1}{2^2}c_{2k-2}$$

可以看出，这又势必导致系数$c_{2n}, c_{2n+2}, \cdots$均变为无穷

$\mathrm{J}_{\pm n}(z)$线性相关

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

如何改正求解过程中的不合法运算?

- 因此，必须彻底改正计算中的错误：当$\nu=$正整数时，必须取第二解为

$$w_2(z)=g\mathrm{J}_n(z)\ln z+\sum_{k=0}^{\infty}d_k z^{k-n}\qquad g\neq 0$$

即对数项一定不为0

- 将正确的$w_2(z)$代入Bessel方程，即可定出叠加系数 (从略)

$\mathrm{J}_{\pm n}(z)$线性相关

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

如何改正求解过程中的不合法运算?

- ☞ 因此，必须彻底改正计算中的错误：当$\nu=$正整数时，必须取第二解为

$$w_2(z)=g\mathrm{J}_n(z)\ln z+\sum_{k=0}^{\infty}d_kz^{k-n}\qquad g\neq 0$$

即对数项一定不为0

- ☞ 将正确的$w_2(z)$代入Bessel方程，即可定出叠加系数 (从略)

例10.4(续)　求n阶Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)w=0$$

在$z=0$点邻域内的第二解

别解

- 基本思想：从$\nu\neq n$时Bessel方程的两个线性无关解$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)$出发，重新组合，得到一组新的线性无关解，使之在$\nu=n$时仍然线性无关
- 为此需要计算$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)$间的Wronski行列式

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\mathrm{J}_{-\nu}(z)]=\begin{vmatrix}\mathrm{J}_\nu(z) & \mathrm{J}_{-\nu}(z)\\ \mathrm{J}'_\nu(z) & \mathrm{J}'_{-\nu}(z)\end{vmatrix}$$

例10.4(续)　求n阶Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)w=0$$

在$z=0$点邻域内的第二解

别解

- 基本思想：从$\nu\neq n$时Bessel方程的两个线性无关解$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)$出发，重新组合，得到一组新的线性无关解，使之在$\nu=n$时仍然线性无关
- 为此需要计算$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)$间的Wronski行列式

$$W[\mathrm{J}_\nu(z),\mathrm{J}_{-\nu}(z)]\equiv\begin{vmatrix}\mathrm{J}_\nu(z) & \mathrm{J}_{-\nu}(z)\\ \mathrm{J}'_\nu(z) & \mathrm{J}'_{-\nu}(z)\end{vmatrix}$$

计算Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)]$

本讲第二节已经证得

对于二阶线性常微分方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

的两个解$w_1(z), w_2(z)$，恒有

$$w_1 w_2' - w_2 w_1' = A \exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

$$\therefore \quad W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = A \exp\left[-\int^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right] = \frac{A}{z}$$

计算Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)]$

本讲第二节已经证得

对于二阶线性常微分方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

的两个解$w_1(z), w_2(z)$，恒有

$$w_1w_2' - w_2w_1' = A\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

$$\therefore \qquad W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = A\exp\left[-\int^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\right] = \frac{A}{z}$$

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z),\mathrm{J}_{-\nu}(z)]=A/z$

为了定出积分常数A，只需考察

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

对x^{-1}的贡献只来自级数中的第一项

$$A=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{-\nu}{2^{-\nu}}-\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{\nu}{2^\nu}$$

$$=-\frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)}=-\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu \qquad \because\ \Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)=\frac{\pi}{\sin\pi\nu}$$

Wronski行列式$W[\mathsf{J}_\nu(z), \mathsf{J}_{-\nu}(z)] = A/z$

为了定出积分常数A，只需考察

$$\mathsf{J}_{\pm n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

对x^{-1}的贡献只来自级数中的第一项

$$A = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{-\nu}{2^{-\nu}} - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \frac{\nu}{2^\nu}$$

$$= -\frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu \qquad \because \quad \Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin\pi\nu}$$

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = A/z$

为了定出积分常数A，只需考察

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

对x^{-1}的贡献只来自级数中的第一项

$$A = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{-\nu}{2^{-\nu}} - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{\nu}{2^\nu}$$

$$= -\frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu \qquad \because \quad \Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin\pi\nu}$$

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = A/z$

为了定出积分常数A，只需考察

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k\pm n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

对x^{-1}的贡献只来自级数中的第一项

$$A = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{-\nu}{2^{-\nu}} - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{\nu}{2^\nu}$$

$$= -\frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu \qquad \because \quad \Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin\pi\nu}$$

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = A/z$

为了定出积分常数A，只需考察

$$\mathrm{J}_{\pm n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k\pm n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k\pm n}$$

对x^{-1}的贡献只来自级数中的第一项

$$A = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{-\nu}{2^{-\nu}} - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\frac{\nu}{2^\nu}$$

$$= -\frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} = -\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu \qquad \because \quad \Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin\pi\nu}$$

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 再次表明，当$\nu = n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$时$\mathrm{J}_\nu(z)$和$\mathrm{J}_{-\nu}(z)$线性相关
- 如何将Bessel方程的第二解取为$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)$的线性组合，$w_2(z) = c_1\mathrm{J}_\nu(z) + c_2\mathrm{J}_{-\nu}(z)$，使得
$$W[\mathrm{J}_\nu(z), w_2(z)] = -\frac{2c_2}{\pi z}\sin\pi\nu$$
对任何ν均不为0?
- 需要选择适当的组合系数c_1, c_2
- 可考虑的选择之一是取$c_2 = -1/\sin\pi\nu$

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = -\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 再次表明，当$\nu = n,\ n = 0, 1, 2, \cdots$时$\mathrm{J}_\nu(z)$和$\mathrm{J}_{-\nu}(z)$线性相关
- 如何将Bessel方程的第二解取为$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)$的线性组合，$w_2(z) = c_1\mathrm{J}_\nu(z) + c_2\mathrm{J}_{-\nu}(z)$，使得
$$W\left[\mathrm{J}_\nu(z), w_2(z)\right] = -\frac{2c_2}{\pi z}\sin\pi\nu$$
对任何ν均不为0?
- 需要选择适当的组合系数c_1, c_2
- 可考虑的选择之一是取$c_2 = -1/\sin\pi\nu$

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 再次表明，当$\nu = n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$时$\mathrm{J}_\nu(z)$和$\mathrm{J}_{-\nu}(z)$线性相关
- 如何将Bessel方程的第二解取为$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)$的线性组合，$w_2(z) = c_1\mathrm{J}_\nu(z) + c_2\mathrm{J}_{-\nu}(z)$，使得
$$W\left[\mathrm{J}_\nu(z), w_2(z)\right] = -\frac{2c_2}{\pi z}\sin\pi\nu$$
对任何ν均不为0?
- 需要选择适当的组合系数c_1, c_2
- 可考虑的选择之一是取$c_2 = -1/\sin\pi\nu$

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 再次表明，当$\nu = n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$时$\mathrm{J}_\nu(z)$和$\mathrm{J}_{-\nu}(z)$线性相关
- 如何将Bessel方程的第二解取为$\mathrm{J}_{\pm\nu}(z)$的线性组合，$w_2(z) = c_1\mathrm{J}_\nu(z) + c_2\mathrm{J}_{-\nu}(z)$，使得
$$W\left[\mathrm{J}_\nu(z), w_2(z)\right] = -\frac{2c_2}{\pi z}\sin\pi\nu$$
对任何ν均不为0?
- 需要选择适当的组合系数c_1, c_2
- 可考虑的选择之一是取$c_2 = -1/\sin\pi\nu$

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 如此则有 $W\left[\mathrm{J}_\nu(z), w_2(z)\right] = \dfrac{2}{\pi z} \neq 0$
- 因此对任何ν，$w_2(z) = \dfrac{c_1'\mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$与$\mathrm{J}_\nu(z)$线性无关
- 这样定义的$w_2(z)$是否有意义?
- 当$\nu=$整数时，分母为0，因此除非分子也为0，否则这样定义的$w_2(z)$无意义

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 如此则有 $W\left[\mathrm{J}_\nu(z), w_2(z)\right] = \dfrac{2}{\pi z} \neq 0$
- 因此对任何ν，$w_2(z) = \dfrac{c_1'\mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$与$\mathrm{J}_\nu(z)$线性无关
- 这样定义的$w_2(z)$是否有意义?
- 当$\nu=$整数时，分母为0，因此除非分子也为0，否则这样定义的$w_2(z)$无意义

Wronski行列式$W[\mathsf{J}_\nu(z), \mathsf{J}_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 如此则有 $W\left[\mathsf{J}_\nu(z), w_2(z)\right] = \dfrac{2}{\pi z} \neq 0$
- 因此对任何ν，$w_2(z) = \dfrac{c_1'\mathsf{J}_\nu(z) - \mathsf{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$与$\mathsf{J}_\nu(z)$线性无关
- 这样定义的$w_2(z)$是否有意义?
- 当$\nu=$整数时，分母为0，因此除非分子也为0，否则这样定义的$w_2(z)$无意义

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 如此则有 $W\left[\mathrm{J}_\nu(z), w_2(z)\right] = \dfrac{2}{\pi z} \neq 0$
- 因此对任何ν，$w_2(z) = \dfrac{c_1'\mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$与$\mathrm{J}_\nu(z)$线性无关
- 这样定义的$w_2(z)$是否有意义?
- 当$\nu=$整数时，分母为0，因此除非分子也为0，否则这样定义的$w_2(z)$无意义

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 考虑到$\mathrm{J}_{-n}(z) = (-)^n\mathrm{J}_n(z)$，因此可取$c_1' = \cos\pi\nu$
- $$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$$
  称为ν阶Neumann函数
- 当$\nu = n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$时，$\mathrm{N}_\nu(z)$为不定式，可按l'Hospital法则求极限

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 考虑到$\mathrm{J}_{-n}(z) = (-)^n\mathrm{J}_n(z)$，因此可取$c_1' = \cos\pi\nu$
- $$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$$
  称为ν阶Neumann函数
- 当$\nu = n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$时，$\mathrm{N}_\nu(z)$为不定式，可按l'Hospital法则求极限

Wronski行列式$W[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] = -\dfrac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$

- 考虑到$\mathrm{J}_{-n}(z) = (-)^n\mathrm{J}_n(z)$，因此可取$c_1' = \cos\pi\nu$
- $$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$$
  称为ν阶Neumann函数
- 当$\nu = n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$时，$\mathrm{N}_\nu(z)$为不定式，可按l'Hospital法则求极限

$$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \qquad \left|\arg z\right| < \pi$$

$$\mathrm{N}_n(z) = \lim_{\nu\to n}\mathrm{N}_\nu(z) = \lim_{\nu\to n}\frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial \mathrm{J}_\nu(z)}{\partial\nu} - (-)^n\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n(z)\ln\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

当$n=0$时应当去掉右端第二项

$$\mathsf{N}_\nu(z) = \frac{\mathsf{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathsf{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \qquad |\arg z| < \pi$$

$$\mathsf{N}_n(z) = \lim_{\nu\to n}\mathsf{N}_\nu(z) = \lim_{\nu\to n}\frac{\mathsf{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathsf{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial\mathsf{J}_\nu(z)}{\partial\nu} - (-)^n\frac{\partial\mathsf{J}_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathsf{J}_n(z)\ln\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

当$n=0$时应当去掉右端第二项

$$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \qquad |\arg z| < \pi$$

$$\mathrm{N}_n(z) = \lim_{\nu\to n}\mathrm{N}_\nu(z) = \lim_{\nu\to n}\frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial \mathrm{J}_\nu(z)}{\partial\nu} - (-)^n\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n(z)\ln\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

当$n=0$时应当去掉右端第二项

$$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \qquad |\arg z| < \pi$$

$$\mathrm{N}_n(z) = \lim_{\nu\to n}\mathrm{N}_\nu(z) = \lim_{\nu\to n}\frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial \mathrm{J}_\nu(z)}{\partial\nu} - (-)^n\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n(z)\ln\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

当$n=0$时应当去掉右端第二项

$$\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \qquad |\arg z| < \pi$$

$$\mathrm{N}_n(z) = \lim_{\nu\to n} \mathrm{N}_\nu(z) = \lim_{\nu\to n} \frac{\mathrm{J}_\nu(z)\cos\pi\nu - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial \mathrm{J}_\nu(z)}{\partial\nu} - (-)^n \frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n(z)\ln\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

当$n=0$时应当去掉右端第二项