一．选择题（每题 3 分，共 30 分）

1．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$. 若$\boldsymbol{A}$可逆，则方程组$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2=a_3, \\ b_1x_1+b_2x_2=b_3, \\ c_1x_1+c_2x_2=c_3 \end{cases}$（　）

A．有唯一解.　　　　　　　　　　　　B．有无穷多解.

C．无解 .　　　　　　　　　　　　　D．解的情况不能确定.

2.设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵，将$\boldsymbol{A}$的第 2 列加到第 1 列得矩阵$\boldsymbol{B}$，再交换$\boldsymbol{B}$的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}=$（　）

A. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　B. $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　C. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

3．已知向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性无关，且向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$线性相关，则（　）

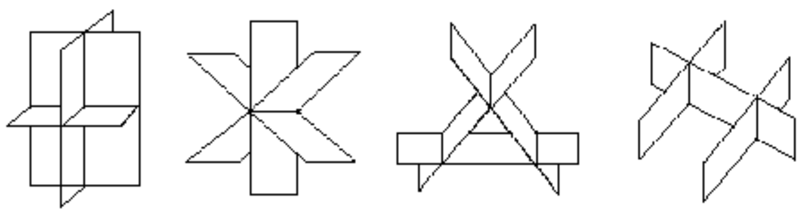
A．$\boldsymbol{\alpha}$能被$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$线性表出.　　　　B．$\boldsymbol{\beta}$不能被$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$线性表出.

C．$\boldsymbol{\delta}$能被$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性表出　　.　　　D．$\boldsymbol{\delta}$不能被$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性表出.

4.设$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$是 4 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，若$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系可为（　）

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

5.（线性代数与解析几何）设有三张不同的平面：$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i\ (i=1,2,3)$，它们组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩都为2，则三张平面的关系位置为（　）



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

5.（线性代数 A）设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$均为$n$阶方阵，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且$\boldsymbol{B}$可逆，则（　　）.

A.矩阵$\boldsymbol{C}$的行向量组与矩阵$\boldsymbol{A}$的行向量组等价.

B.矩阵$\boldsymbol{C}$的列向量组与矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组等价.

C.矩阵$\boldsymbol{C}$的行向量组与矩阵$\boldsymbol{B}$的行向量组等价.

D.矩阵$\boldsymbol{C}$的列向量组与矩阵$\boldsymbol{B}$的列向量组等价.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是3阶单位矩阵．若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，且线性方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系由两个线性无关的解向量构成，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$（　）

A. 16.　　B. 8.　　C. 4.　　D. 2.

7. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则（　）

A. $x=-y$.　　B. $x=y$.　　C. $x=-2y$.　　D. $x=2y$.

8. 在向量空间 R^2 中，从基底 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1\quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1\quad -1]^{\mathrm{T}}$ 到基底 $\boldsymbol{\beta}_1=[1\quad 3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[2\quad 4]^{\mathrm{T}}$ 的过渡矩阵为（　　）

A. $\begin{bmatrix}-2&-3\\1&1\end{bmatrix}$.　　B. $\begin{bmatrix}4&6\\-2&-2\end{bmatrix}$.　　C. $\begin{bmatrix}2&3\\-1&-1\end{bmatrix}$.　　D. $\begin{bmatrix}-4&-6\\2&2\end{bmatrix}$.

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{O}$ 为 n 阶零矩阵，则下列结论**错误**的是（　　）

A. $\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

B. $\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

C. $\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

D. $\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，则（　）

A. 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价时，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同．

B. 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价时，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似．

C. 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似时，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同．

D. 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同时，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似．

二．填空题（每空 3 分，共 39 分）

11. 设 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\1&1&2&2\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\2&2&1&1\end{vmatrix}$，且 D 的第 i 行第 j 列元素的代数余子式为 A_{ij}.

若 $D=27$，则 $A_{21}+A_{22}=$______________.

12. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{bmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，则 $a=$______________.

13. 已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 2 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则$\left|\boldsymbol{A}^{*}-2\boldsymbol{A}^{-1}\right|=$______________.

14. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[1\quad 1\quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[-1\quad 0\quad 2]^{\mathrm{T}}$，记$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\beta}_1$.

若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$正交，则$k=$_____________.

15. 设$\boldsymbol{\alpha}$是三元列向量，若$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\-1 & 1 & 2\\-2 & 2 & 4\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$______________.

16. 线性空间$V=\left\{(x,y,z)\middle|2x+3y-z=0\right\}$的一组基为______________.

参考答案：$\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{bmatrix}$.（答案不唯一）

17. （线性代数与解析几何）过点$(-1,0,4)$与直线$\begin{cases}2x-y+z+1=0,\\x-3y+2z+4=0\end{cases}$垂直的平面的方程为_________________.

17. （线性代数 A）已知向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性无关，且向量组$\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\gamma},3\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$的线性相关，则$k=$_________________.

18. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$满足$\boldsymbol{A}^6=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵，则$\boldsymbol{A}^{11}=$______________.

19. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_2x_3$正定，则$a$的取值范围是______________.

20. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 10 & a\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 & a+10 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. 若该向量组的秩小于 4，则 $a=$_____________，且该向量组的一个极大无关组为_____________.

21. 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ b & c & \frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & d \end{bmatrix}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $b=$_____________，$d=$_____________.

三．解答题（22 题 9 分，23 题 13 分，24 题 9 分）

22. 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，求 $\boldsymbol{B}$.

23. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 存在两个不同的解，求 a，b 的值，并求 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 通解.

24. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

证明：（1）$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}$ 可逆；（2）$\lambda = 1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；（3）$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.