

6) 异或的因果关系 Causality

如果 $A \oplus B \oplus C = D$

则
$$\begin{cases} A \oplus B \oplus D = C, \\ A \oplus C \oplus D = B; \\ B \oplus C \oplus D = A; \end{cases}$$

多变量异或

- 变量为 1 的个数为奇数，异或结果为 1;
- 1 的个数为偶数，结果为 0 ;
- 与变量为 0 的个数无关。

§2.2 逻辑函数的标准形式

Standard Forms of Logic Function

逻辑函数定义

以逻辑变量作为输入，以运算结果作为输出，输入和输出之间的函数关系： $Y = F(A, B, C)$

逻辑函数
描述方法

真值表

逻辑函数式

逻辑图

波形图

卡诺图

...

$$Y = AB + AC$$

$$= (AB + AC) \cdot 1$$

$$= (AB + AC) \cdot (D + \overline{D})$$

2.2.1 最小项及标准与或式

1. 最小项(标准与项) Minterms (Standard Product Form)

与项：字母(原变量或其反变量)的逻辑乘项

$$AB \quad B\bar{C}D \quad \bar{A}E$$

最小项 (标准与项)

n 变量函数, n 变量组成的与项中, 每个变量都以原变量或反变量的形式出现一次, 且只出现一次

n 个变量 $\Rightarrow 2^n$ 个最小项

例如: 3 变量 A, B, C , 有 $2^3 = 8$ 个最小项

$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$

$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}C$

$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$

$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}C$

$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}C$

$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}C$

$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}C$

$\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}C$

2. 最小项真值表

变量 <i>A B C</i>			最小项							
			$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

最小项性质

(1) 当 $A B C$ 取某一组值时, 只有一个最小项值为 1, 其他都等于 0

(2) 变量取值相同的任意两个最小项的乘积为 0

(3) 全体最小项的和为 1

变量 $A \ B \ C$			最小项							
			$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

变量 $A \ B \ C$			最小项							
			$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

最小项编号 m_i : 使某一最小项为 1 时, 变量取值的二进制数对应的十进制数为此最小项的编号

例: $\overline{A}\overline{B}C = 1$ $ABC: 010$ $(010)_2 = (2)_{10}$ $\overline{A}\overline{B}C$ 编号为 m_2

例:

2 变量 A, B : $m_1 = \overline{A}B$, $m_3 = AB$

4 变量 A, B, C, D : $m_1 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$
 $m_5 = \overline{A}B\overline{C}\overline{D}$
 $m_{13} = A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$

1: 原变量 **变量取 1 对应于原变量**

0: 反变量 **变量取 0 对应于反变量**

注意: 字母的排列顺序

3. 标准与或式

Standard sum of products form

$$F = \overline{A}B + A\overline{C} + A\overline{B}C \quad \text{与或式}$$

与或式说明, 变量取何值时, 函数 $F = 1$

标准与或式:

一个与或式函数的每个与项都是最小项

例: $F_1(A, B, C) = \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$

$$= m_2 + m_6 + m_3 + m_7$$

$$= \sum m(2, 3, 6, 7)$$

标准与或式

m 可以忽略

例 1: 将下列函数写成标准与或式

$$F_1(A, B, C) = AB + BC + AC$$

与或式

$$= AB(C + \bar{C}) + BC(A + \bar{A}) + AC(B + \bar{B})$$

$$= ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C$$

$$= m_7 + m_6 + m_3 + m_5$$

$$= \sum m(3, 5, 6, 7)$$

标准与或式

$F(A, B, C)$ 必须写全, 涉及字母顺序即最小项编号

2.2.2 最大项及标准或与式

或项：字母(原变量或反变量)的逻辑加项

$$A + B \quad \bar{A} + B + \bar{C} \quad \bar{D} + E + F$$

1. 最大项 (标准或项) Maxterms(Standard Sum Terms)

n 变量组成的或项中, 每个变量都以原变量或反变量的形式出现一次, 且只出现一次, 此或项为最大项, 也称为标准或项。

n 个变量 $\Rightarrow 2^n$ 个最大项

三变量最大项真值表

变量										
A	B	C	$A+B+C, A+B+\bar{C}, A+\bar{B}+C, A+\bar{B}+\bar{C}, \bar{A}+B+C, \bar{A}+B+\bar{C}, \bar{A}+\bar{B}+C, \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$							
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

当 ABC 取某一组值时, 只有一个最大项值为0, 其他都等于1

变量			M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
A	B	C	$A+B+C, A+B+\bar{C}, A+\bar{B}+C, A+\bar{B}+\bar{C}, \bar{A}+B+C, \bar{A}+B+\bar{C}, \bar{A}+\bar{B}+C, \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$							
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

最大项的编号 M_i ：使某一最大项为0时， A 、 B 、 C 取值的二进制数对应的十进制数

例: 3 变量 A, B, C

$$M_2 = A + \bar{B} + C \quad (010) \text{ 使 } A + \bar{B} + C = 0$$

$$M_4 = \bar{A} + B + C$$

4 变量 A, B, C, D

$$M_2 = A + B + \bar{C} + D$$

$$M_{10} = \bar{A} + B + \bar{C} + D$$

注意: 最大项

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \longleftrightarrow & \text{原变量} \\ 1 \longleftrightarrow & \text{反变量} \end{array} \right.$$

2. 标准或与式

Standard Product of Sums

$$F = (A + \bar{B})(B + C) \quad \text{或与式}$$

或与式说明, 变量取何值时, 函数 $F = 0$

标准或与式: 每个或项都是最大项

例: 任何一个括号等于0, F_2 等于0

$$F_2(A, B, C) = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_4 \cdot M_5$$

$$= \prod M(0, 1, 4, 5)$$

M 可以忽略

2.2.3 两种标准式间的关系

1) 最小项和最大项互为反函数

$$\overline{m_i} = M_i \quad F(A,B,C) : \quad \overline{m_1} = \overline{A \overline{B} C} = A + B + \overline{C} = M_1$$

001 001
最小项编号 最大项编号

2) 不在最小项中出现的编号,一定出现在最大项的编号中

$$F(A,B,C) = \Sigma m(2,3,5,6,7) \quad F_1 \text{ 与或式}$$

$$= \Pi M(0,1,4) \quad F_2 \text{ 或与式}$$

$$F(A,B,C) = \Sigma m (2,3,5,6,7)$$

$$= \Pi M (0,1,4)$$

F_1 与或式

F_2 或与式

A	B	C	F	F_1	F_2
0	0	0	0		M_0
0	0	1	0		M_1
0	1	0	1	m_2	
0	1	1	1	m_3	
1	0	0	0		M_4
1	0	1	1	m_5	
1	1	0	1	m_6	
1	1	1	1	m_7	

$$F = F_1 = F_2$$

F_1 说明函数何时为 1

F_2 说明函数何时为 0

标准与或式和标准或与式是一个逻辑关系的两种表达方式

§2.3 逻辑函数的公式化简

Simplification Using Logic Algebra

一个逻辑函数有多种表达形式

例如

$$F = XY + \bar{Y}Z$$

与或式

与或逻辑函数中，若其中包含的乘积项已经最少，而且每个乘积项里的变量也不能再减少时，称此逻辑函数为最简式

$$= \overline{\overline{XY} + \overline{\bar{Y}Z}}$$

与或非式

上面五种都是最简表达式。尽管一个逻辑函数的各种表示形式不同，但逻辑功能相同。一种形式的函数表达式对应于一种逻辑电路。

§2.3 逻辑函数的公式化简

Simplification Using Logic Algebra

一个逻辑函数有多种表达形式

例如

$$F = XY + \bar{Y}Z$$

$$= (X + \bar{Y})(Y + Z)$$

$$= \overline{\overline{XY} \cdot \overline{\bar{Y}Z}}$$

$$= \overline{X + \bar{Y} + \bar{Y} + Z}$$

$$= \overline{XY + \bar{Y}Z}$$

与或式

或与式

与非-与非式

或非-或非式

与或非式

上面五种都是**最简表达式**。一种形式的函数表达式相应于一种逻辑电路。尽管一个逻辑函数表达式的各种表示形式不同，但逻辑功能是相同的。

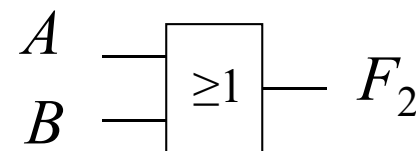
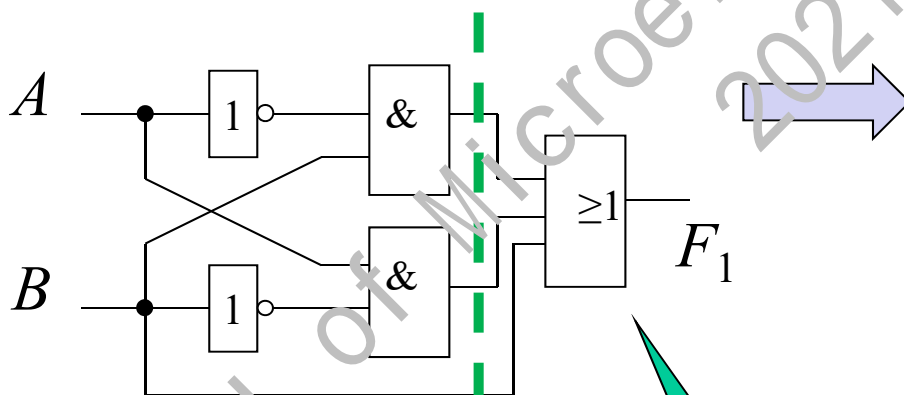
化简目的: 少用元件完成同样目的, 降低成本, 提高电路可靠性

例: 用门电路实现下列函数

逻辑图

$$F_1 = \overline{A}B + B + A\overline{B}$$

$$F_2 = A + B$$



第一级

两级结构

第二级

公式法化简 (Laws, Theorems, Formula)

例1: 用公式法化简下式

方法二

$$F = A\bar{B} + \overline{AC} + \overline{BC}$$

$$= A\bar{B} + \overline{AC} \cdot \overline{BC}$$

$$= A\bar{B} + (A + \bar{C})(B + \bar{C})$$

$$= A\bar{B} + AB + A\bar{C} + B\bar{C} + \bar{C}$$

$$= A + \bar{C}$$

$$= A\bar{B} + \overline{(A + B)C}$$

$$= A\bar{B} + \overline{A + B} + \bar{C}$$

$$= A\bar{B} + \overline{AB} + \bar{C}$$

$$= A\bar{B} + AB + \bar{C}$$

$$= A + \bar{C}$$

例 2: 用公式法化简下式

$$F = \underbrace{A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}}_{C+\bar{C} \text{ complement}} + \underbrace{\bar{D}\bar{E}(B+G)}_{\text{吸收}} + \bar{D} + (\bar{A}+B)\bar{D} + \underbrace{A\bar{B}CDE}_{\text{吸收}} + \underbrace{A\bar{B}DEG}_{\text{吸收}}$$

$$\begin{aligned} &= A\bar{B} + \bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{D} \\ &= A\bar{B} + \bar{D} + D = A\bar{B} + 1 = 1 \end{aligned}$$

方法二

$$\begin{aligned} &= A\bar{B} + \bar{D} + \bar{A}D + BD \\ &= \underline{A\bar{B}} + \underline{\bar{D}} + \underline{\bar{A}D} + \underline{BD} \\ &= \underline{A} + \underline{\bar{D}} + \underline{\bar{A}} + B \\ &= 1 \end{aligned}$$

例 3: 将下列函数化简成最简或与式

$$G = (A + B + \overline{C})(A + B)(A + \overline{C})(B + \overline{C})$$

解: 对偶规则

$$G' = AB\overline{C} + AB + A\overline{C} + B\overline{C}$$

$$= AB + A\overline{C} + B\overline{C}$$

$$G = (A + B)(A + \overline{C})(B + \overline{C})$$

例 4

$$L = \underline{AB} + A\bar{C} + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + ADE(F + G)$$

$$= \underline{A\bar{B}\bar{C}} + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + ADE(F + G)$$

$$= A + \bar{B}C + \underline{B\bar{C} + \bar{B}D} + B\bar{D}$$

$$= A + \bar{B}C + \underline{B\bar{C}} + \underline{\bar{B}D} + \underline{B\bar{D}} + \underline{\bar{C}D}$$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{D} + \bar{C}D$$

摩根定理

$$A + \bar{A}B = A + B$$

$$AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C$$

冗余

最简式

项数最少

每项中变量数最少

课堂练习

用公式法化简下式

$$F_1(A, B, C) = \underline{\bar{A}BC} + \underline{\bar{B}} + \underline{\bar{C}} = \underline{\bar{A}C} + \underline{\bar{B}} + \underline{\bar{C}}$$
$$= \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

$$F_2(A, B, C, D) = \underline{AC} + \underline{\bar{A}} + \underline{\bar{C}} + \overline{\bar{A}\bar{B}C + ABD} = \bar{A} + C + \bar{C} + \dots$$
$$= 1$$

$$F_3(A, B) = A \oplus A\bar{B} = A \cdot \bar{A}\bar{B} + \bar{A} \cdot A\bar{B} = A \cdot (\bar{A} + B)$$
$$= AB$$