191 级队工科数学第一次模拟测试参考答案

一．1.(1)(2) ；0　　2. $\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left(\frac{1}{2(x+2)}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}\right)$ ；$-\frac{1+t^2}{t^3}$

3. −1, 0

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-1}-a-\frac{b}{x^2}\right]=0$，由此，有 $a=-1$

回代原式　$b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}+x^2)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-1}+1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}-x^2\left[(1-\frac{1}{x^6})^{\frac13}-1\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}-x^2\frac13\left(-\frac{1}{x^6}\right)=0$$

4. $e^{\frac12}$;6

8. $e^{\frac12}$ 【解析】 $\left(\sin^2\frac1x+\cos\frac1x\right)^{x^2}=e^{x^2\ln(\sin^2\frac1x+\cos\frac1x)}$，

$$\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(\sin^2\frac1x+\cos\frac1x\right)=\lim_{t\to0}\frac{\ln(\sin^2t+\cos t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2t+\cos t-1}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t(1-\cos t)}{t^2}=\frac12,$$

所以原式 $=e^{\frac12}$.

3.【解】 因为当 $x\to0$ 时，有 $e^{3x^2}-1\sim3x^2$，于是 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{3x^2}=2$，由极限与无穷小的关系，有 $f(x)\sin2x=((2+\alpha)3x^2+1)^2-1\xrightarrow{\text{当}\ x\to0\ \text{时}}0$，

所以当 $x\to0$ 时 $\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1\sim\frac12f(x)\sin2x$，于是可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac12f(x)\sin2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac16\frac{f(x)\cdot2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac13\frac{f(x)}{x}=2,$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=6.$$

5. 1 ；$\frac1e$

9. 1 【解析】 由题设有 $y''=-(x-1)y'-x^2y+e^x$. 因为 $y(0)=0,y'(0)=1$，所以 $y''(0)=2$. 由 y'' 的表达式知，y'' 在 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{y(x)-x}{x^2}\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to0}\frac{y'(x)-1}{2x}\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to0}\frac{y''(x)}{2}=1.$$

8. $\frac1e$ 【解析】 因为在[0,1]上 $f(x)=nx(1-x)^n$ 可取最大值，最大值 >0. 但在端点处 $f(0)=f(1)=0$. 故存在 $x_0\in(0,1)$ 使 $f(x)$ 在 x_0 取最大值，故 $f'(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=n(1-x_0)^n-n^2x_0(1-x_0)^{n-1}=0$，解得 $x_0=\frac{1}{n+1}$，故 $M(n)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$，

$$\lim_{n\to\infty}M(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac1e.$$

二．1.A

2.D

1.D 【解析】 因 $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$，存在 $\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时 $f(x)$ 有界．因 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^3+x^2}=1$，存在 $X>0$，当 $x\in(X,+\infty)$ 时，$\frac{x^3+x+1}{x^3+x^2}$ 有界，又 $|1-\cos x|\leqslant 2$，所以当 $x\in(X,+\infty)$ 时 $f(x)$ 有界．又 $f(x)$ 在 $[\delta,X]$ 上连续，从而有界．综合之，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界．选(D)．

1.D 【解析】 由 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=a$，$\lim_{x\to x_0^-} g(x)=b$，$a<b$，所以 $\lim_{x\to x_0^-}(g(x)-f(x))=b-a>0$．由保号性定理知，存在去心邻域 $\mathring{U}_\delta(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，有 $g(x)-f(x)>0$．选(D)．其他均可举出反例．

3.D

4.B　　提示：端点特殊，单独考虑

5.A

3.A 【解析】 ①、②、③、④ 都不正确．选(A)．

① 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ -1, & \text{当 } x<0.\end{cases}$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断，而 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处连续．

② 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, x\neq x_0,\\ 0, x=x_0.\end{cases}$ 有 $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0} f(x_0-h)=1$，而 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处并不连续．

③ 的反例：设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续且 $f(x_0)=0$，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域有定义且有界但不连续，则显然有 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=0=f(x_0)g(x_0)$，$f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续．

④ 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $f(x)+g(x)\equiv 0$，它在 $x=0$ 是连续的．

三 (1)

证 (1) 因为 $\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2|x|^3}$，要使 $\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$，即 $|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时，就有 $\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$．

(2)

(2) 因 $\frac{n}{n+\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\frac{n^2}{n^2+\pi}$，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\pi}=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$，由夹逼准则，即得证．

四．略

五．$a=2, b=-3$

19.【解】 方法一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}-2}{x^2}\overset{洛}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{a}{2}(1+ax)^{-\frac{1}{2}}+\frac{b}{3}(1+bx)^{-\frac{2}{3}}}{2x}$. 当 $x\to 0$ 时分子 $\to \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}$. 若 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}\neq 0$，则由洛必达法则知，上式右边 $\to\infty$，从而左边 $\to\infty$，矛盾，故 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}=0$.

再由洛必达法则，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^2}{2}(-\frac{1}{2})(1+ax)^{-\frac{3}{2}}+\frac{b^2}{3}(-\frac{2}{3})(1+bx)^{-\frac{5}{3}}}{2}=-\frac{a^2}{8}-\frac{b^2}{9}\overset{题设}{=\!=}-\frac{3}{2},$$

由 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}=0$ 及 $-\dfrac{a^2}{8}-\dfrac{b^2}{9}=-\dfrac{3}{2}$，解得 $a=2, b=-3$.

六.(1)

证 取函数 $f(x)=x^5+x-1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

$$f(0)=-1<0, f(1)=1>0,$$

由零点定理知至少存在点 $x_1\in(0,1)$ 使 $f(x_1)=0$，即方程 $x^5+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个正根.

若方程 $x^5+x-1=0$ 还有一个正根 x_2，即 $f(x_2)=0$. 则由 $f(x)=x^5+x-1$ 在 $[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）上连续，在 (x_1,x_2)（或 (x_2,x_1)）内可导知 $f(x)$ 满足罗尔定理条件，故至少存在点 $\xi\in(x_1,x_2)$（或 (x_2,x_1)），使

$$f'(\xi)=0.$$

但 $f'(\xi)=5\xi^4+1>0$，矛盾. 因此方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

(2)

(2) 取函数 $f(t)=e^t$，$f(t)$ 在 $[1,x]$ 上连续，在 $(1,x)$ 内可导. 由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(1,x)$，使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1),$$

即 $$e^x-e=e^\xi(x-1).$$

又，$1<\xi<x$，故 $e^\xi>e$，因此

$$e^x-e>e(x-1),$$

即 $$e^x>x\cdot e.$$

七．(1) 2

14.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^{\tan x-x}-1)}{x-\sin x}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}\overset{洛}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=2.$

(2) $-\dfrac{1}{6}$

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x(2+\cos x)}=-\frac{1}{6}$$

.