第 3 章 逻辑代数基础

Logic Algebra

逻辑代数描述了二值变量的运算规律，它是英国数学家布尔（George Boole）于1849 年提出的，也称布尔代数。逻辑代数是按逻辑规律进行运算的代数，是分析和设计数字逻辑电路不可缺少的基础数学工具。

电路中的信号变量都为二值变量，只能有0、1两种取值。

逻辑代数与算术不同。

§3.1　逻辑代数运算法则

Operations of Logic Algebra

A 的反向运算为$\overline{A}$

$$\overline{0} = 1$$

$$\overline{1} = 0$$

或运算
逻辑加
"+"

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

与运算
逻辑乘
"•"

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot 0 = 0$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

1. 基本定律

每一个定律都有两种形式：逻辑加和逻辑乘。这两种形式互为"**对偶式**" **Dual** 。

	逻辑加 Addition	逻辑乘 Multiplication	
1) 定律 1	$A+B=B+A;$	$AB=BA$	(交换律)
2) 定律 2	$A+(B+C)=(A+B)+C;$	$A(BC)=(AB)C$	(结合律)
3) 定律 3	$A+(BC)=(A+B)(A+C);$	$A(B+C)=AB+AC$	(分配律)
4) 定律 4	$A+0=A,\quad A+1=1;$	$A\cdot 0=0,\ A\cdot 1=A$	(0-1律)
5) 定律 5	$A+\overline{A}=1;$	$A\cdot\overline{A}=0$	(互补律)
6) 定律 6	$A+A=A;$	$A\cdot A=A$	(重叠律)
7) 定律 7	$\overline{\overline{A}}=A$		(还原律)

8) De. Morgan Theorum $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B};\quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$ (摩根定理)

推论 $\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\ ;\qquad \overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

2. 基本规则

1) 代入规则

等式两侧某一变量都用一个逻辑函数代入，等式仍成立。

例: 摩根定理

若 $\overline{AX} = \overline{A} + \overline{X}$ $X = BC$

左侧: $\overline{AX} = \overline{ABC}$ 右侧: $\overline{A} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

有 $\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ 摩根定理推论

2) 反演规则 Complementary

将一个函数表达式 F 中所有的“与”（·）换成“或”（+），“或”（+）换成“与”（·）；“0”换成“1”，“1”换成“0”；原变量换成反变量，反变量换成原变量，则所得到的逻辑函数即F的反函数，表达式为 $\overline{F}$ 。

$\overline{F}$ 称为函数 F 的反函数。如果 F 成立，$\overline{F}$ 也成立。

注意: 运算顺序不变

例 已知 $F = A(B+\overline{C})+CD$，求 $\overline{F}$

解： $\overline{F} = (\overline{A}+\overline{B}C)(\overline{C}+\overline{D})$

3) 对偶规则 Duality

若 *F* 为一逻辑函数，如果将该函数表达式中所有

"与" (·) ⟺ "或" (+)

"0" ⟺ "1"

则所得到的逻辑函数即*F*的对偶式，表达式为 *F'* 。

如果 *F* 成立，*F'* 也成立

例： 已知 $F = A(B+\overline{C})+CD$ 分别求 F' 和 $\overline{F}$

解： $F' = (A+B\overline{C})(C+D)$

$$\overline{F} = (\overline{A}+\overline{B}C)(\overline{C}+\overline{D})$$

3. 常用公式

1) $A+AB=A$; $A(A+B)=A$ **吸收律**

证: $A+AB=A(1+B)=A$

2) $AB+A\overline{B}=A$; $(A+B)(A+\overline{B})=A$

证: $AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$

3) $A+\overline{A}B=A+B$; $A(\overline{A}+B)=AB$

证: **分配律** $A+BC=(A+B)(A+C)$

$$A+\overline{A}B=(A+\overline{A})(A+B)=A+B$$

4) $\mathbf{AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C;}$

$$\mathbf{(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)}$$

冗余定理

证:

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$$

$$=AB+\overline{A}C$$

推论: $AB+\overline{A}C+BCDE=AB+\overline{A}C$

5) 异或公式 (XOR) $A\oplus B=\overline{A\odot B}$

证: $\overline{AB+\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{A}B+A\overline{B}$

$A\oplus A=0,\quad A\oplus\overline{A}=1,\quad A\oplus 0=A,\quad A\oplus 1=\overline{A}$

6) 异或的因果关系 Causality

如果 $A \oplus B \oplus C = D$

则 $$\begin{cases} A \oplus B \oplus D = C; \\ A \oplus C \oplus D = B; \\ B \oplus C \oplus D = A; \end{cases}$$

多变量异或，变量为 1 的个数为奇数，异或结果为 1；1 的个数为偶数，结果为 0；与变量为 0 的个数无关。

§3.2 逻辑函数的标准形式

Standard Forms of Logic Function

3.2.1 最小项及标准与或式

1. 最小项(标准与项) Minterms (Standard Product Form)

与项定义为字母(原变量或其反变量)的逻辑乘项

$AB \qquad B\overline{C}D \qquad \overline{A}E$

最小项（标准与项）： n 变量函数，n 变量组成的与项中，每个变量都以原变量或反变量形式出现一次，且只出现一次。

$$n\text{ 个变量} \Longrightarrow 2^n\text{ 个最小项}$$

例如：3 变量 A, B, C，有 $2^3 = 8$ 个最小项：

$$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} \quad \overline{A}\cdot\overline{B}C \quad \overline{A}B\overline{C} \quad \overline{A}BC$$

$$A\overline{B}\cdot\overline{C} \quad A\overline{B}C \quad AB\overline{C} \quad ABC$$

2. 最小项真值表

变量 A B C ＼ 最小项	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1

当 A B C 取某一组值时, 只有一个最小项值为 1 , 其他都等于 0

2. 最小项真值表

例: $\bar{A}B\bar{C}=1$ ABC: 010 010 = 2

所以 $\bar{A}B\bar{C}$ 的编号为 m_2

变量 A B C \ 最小项编号 / 最小项	m_0 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_1 $\bar{A}\bar{B}C$	m_2 $\bar{A}B\bar{C}$	m_3 $\bar{A}BC$	m_4 $A\bar{B}\bar{C}$	m_5 $A\bar{B}C$	m_6 $AB\bar{C}$	m_7 ABC
0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1

最小项编号 m_i ： 使某一最小项为 1 时, 变量取值的二进制数对应的十进制数为此最小项的编号

例:

2 变量 A, B: $m_1 = \overline{A}B,\quad m_3 = AB$

4 变量 A, B, C, D:

$$m_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$$

$$m_5 = \overline{A}B\overline{C}D$$

$$m_{13} = AB\overline{C}D$$

1: 变量 **变量取 1 对应于原变量**

0: 反变量 **变量取 0 对应于反变量**

注意：字母的排列顺序

3. 标准与或式 Standard sum of products form

$$F = \overline{A}B + A\overline{C} + A\overline{B}C$$ 与或式

与或式说明，变量取何值时，函数 $F = 1$

如果一个与或式函数的每个与项都是最小项，这个函数称为标准与或式

例：

$$\left.\begin{aligned} F_1(A,B,C) &= \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}BC + ABC \\ &= m_2 + m_6 + m_3 + m_7 \\ &= \sum m(2,3,6,7) \end{aligned}\right\}\text{标准与或式}$$

m 可以忽略

例 1：将下列函数写成标准与或式:

$$F_1(A,B,C) = AB + BC + AC$$

与或式

$$= AB(C+\overline{C}) + BC(A+\overline{A}) + AC(B+\overline{B})$$

$$\left.\begin{aligned} &= ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C \\ &= m_7 + m_6 + m_3 + m_5 \\ &= \sum m(3,5,6,7) \end{aligned}\right\} \text{标准与或式}$$

注：*F*(*A*,*B*,*C*) 必须写全,涉及字母顺序即最小项编号

3.2.2 最大项及标准或与式

和项(或项) 定义为字母(原变量或反变量)的逻辑**加**项.

$$A+B \qquad \overline{A}+B+\overline{C} \qquad \overline{D}+E+F$$

1. 最大项 Maxterms

n 变量组成的或项中, 每个变量都以原变量或反变量的形式出现一次, 且只出现一次, 此或项为最大项, 也称为标准或项(Standard Sum Terms)。

n 个变量 $\Longrightarrow$ 2^n 个最大项

三变量最大项真值表

变量 $A\ B\ C$	$A+B+C$	$A+B+\overline{C}$	$A+\overline{B}+C$	$A+\overline{B}+\overline{C}$	$\overline{A}+B+C$	$\overline{A}+B+\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}+C$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
0 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	1	0	1	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1	1	0	1	1
1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	0

当 ABC 取某一组值时，只有一个最大项值为0，其他都等于1

三变量最大项真值表

变量 A B C	M_0 $A+B+C$	M_1 $A+B+\overline{C}$	M_2 $A+\overline{B}+C$	M_3 $A+\overline{B}+\overline{C}$	M_4 $\overline{A}+B+C$	M_5 $\overline{A}+B+\overline{C}$	M_6 $\overline{A}+\overline{B}+C$	M_7 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
0 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	1	0	1	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1	1	0	1	1
1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	0

使某一最大项为0时，A、B、C 取值的二进制数对应的十进制数为此最大项的编号：M_i

例: 3 变量 *A, B, C*

$$M_2 = A + \overline{B} + C \qquad (010)\text{ 使 } A + \overline{B} + C = 0$$

$$M_4 = \overline{A} + B + C$$

4 变量 *A,B,C,D* $M_2 = A + B + \overline{C} + D$

$$M_{10} = \overline{A} + B + \overline{C} + D$$

注意：最大项 $\begin{cases} 0 \Longleftrightarrow \text{原变量} \\ 1 \Longleftrightarrow \text{反变量} \end{cases}$

2. 标准或与式 Standard Product of Sums

$$F=(A+\overline{B})(B+C)$$ 或与式

或与式说明，变量取何值时，函数 $F=0$

每个或项都是最大项称为标准或与式

例: 任何一个括号等于0，F_2等于0

$$F_2(A,B,C)=(A+B+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1

$$=\mathrm{M}_0\bullet\mathrm{M}_1\bullet\mathrm{M}_4\bullet\mathrm{M}_5$$

$$=\prod\mathrm{M}(0,1,4,5)$$

M 可以忽略

3.2.3 两种标准式间的关系

1） 最小项和最大项互为反函数

$$\overline{m_i} = M_i \qquad F(A,B,C):\ \overline{m_1} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,C} = A+B+\overline{C} = M_1$$

$$\overline{M_j} = m_j$$

001 最小项编号　　001 最大项编号

2) 不在最小项中出现的编号,一定出现在最大项的编号中

$$F(A,B,C) = \Sigma\, m\,(2,3,5,6,7) \qquad F_1 \text{ 与或式}$$

$$= \Pi\, M\,(0,1,4) \qquad F_2 \text{ 或与式}$$

$F(A,B,C) = \Sigma m\,(2,3,5,6,7)$ F_1 与或式

$= \Pi M\,(0,1,4)$ F_2 或与式

$A\ B\ C$	F	F_1	F_2
0 0 0	0		M_0
0 0 1	0		M_1
0 1 0	1	m_2	
0 1 1	1	m_3	
1 0 0	0		M_4
1 0 1	1	m_5	
1 1 0	1	m_6	
1 1 1	1	m_7	

$F = F_1 = F_2$

F_1 说明函数何时为 1

F_2 说明函数何时为 0

标准与或式和标准或与式是一个逻辑关系的两种表达方式

§3.3 逻辑函数的公式化简

Simplification Using Logic Algebra

一个逻辑函数有多种表达形式

例如：

$$F = XY + \overline{Y}Z$$ **与或式**

$$= (X + \overline{Y})(Y + Z)$$ **或与式**

$$= \overline{\overline{XY} \cdot \overline{\overline{Y}Z}}$$ **与非-与非式**

$$= \overline{\overline{X + \overline{Y}} + \overline{Y + Z}}$$ **或非–或非式**

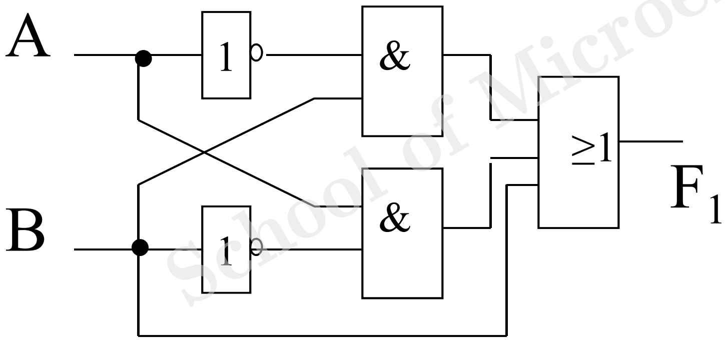
$$= \overline{\overline{X}Y + \overline{Y}\,\overline{Z}}$$ **与或非式**

上面五种都是最简表达式

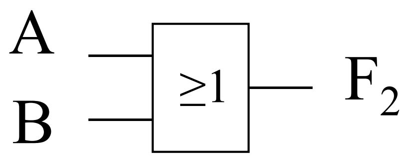
化简目的: 少用元件完成同样目的,降低成本。

例：用门电路实现下列函数

$$F_1 = \overline{A}B + B + A\overline{B}$$



$$F_2 = A + B$$



公式法化简　　(Laws, Theorems, Formula)

例1：用公式法化简下式

$$F = A\bar{B} + \overline{\bar{A}C + \bar{B}C}$$

$$= A\bar{B} + \overline{\bar{A}C} \cdot \overline{\bar{B}C}$$

$$= A\bar{B} + (A + \bar{C})(B + \bar{C})$$

$$= A\bar{B} + AB + A\bar{C} + B\bar{C} + \bar{C}$$

$$= A + \bar{C}$$

方法二

$$= A\bar{B} + \overline{(\bar{A} + \bar{B})C}$$

$$= A\bar{B} + \overline{\bar{A} + \bar{B}} + \bar{C}$$

$$= A\bar{B} + \overline{\overline{AB}} + \bar{C}$$

$$= A\bar{B} + AB + \bar{C}$$

$$= A + \bar{C}$$

例 2：用公式法化简下式

$$F = \underbrace{A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}}_{C+\bar{C}\ \text{complement}} + \bar{D}\bar{E}(B+G) + \bar{D} + (\bar{A}+B)D + A\bar{B}CDE + A\bar{B}DEG$$

吸收

吸收

$$= A\bar{B} + \bar{D} + \overline{A\bar{B}}D$$

$$= A\bar{B}+\bar{D}+D = A\bar{B}+1 = 1$$

方法二

$$= A\bar{B} + \bar{D} + \bar{A}D + BD$$

$$= A\bar{B} + \bar{D} + \bar{A}D + B$$

$$= A + \bar{D} + \bar{A} + B$$

$$= 1$$

例 3：将下列函数化简成最简或与式。

$$G=(A+B+\overline{C})(A+B)(A+\overline{C})(B+\overline{C})$$

解：对偶关系

$$G'=AB\overline{C}+AB+A\overline{C}+B\overline{C}$$

$$=AB+A\overline{C}+B\overline{C}$$

$$G=(A+B)(A+\overline{C})(B+\overline{C})$$

例 4:

$$L = AB + A\overline{C} + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D} + ADE(F+G)$$

摩根定理

$$= A\overline{\overline{B}C} + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D} + ADE(F+G)$$

$A + \overline{A}B = A + B$

$$= A + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D}$$

$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$

$$= A + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D} + \overline{C}D$$

冗余

$$= A + \overline{B}C + B\overline{D} + \overline{C}D$$

最简式 { 项数最少 / 每项中变量数最少 }

课堂练习

用公式法化简下式

$$F_1(A, B, C) = \bar{A}BC + \bar{B} + \bar{C}$$

$$= \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

$$F_2(A, B, C, D) = AC + \bar{A} + \bar{C} + \overline{A\bar{B}C + ABD}$$

$$= 1$$

$$F_3(A, B) = A \oplus A\bar{B}$$

$$= AB$$

作业:

3 . 8 (1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 18, 19, 20)

3 . 11 (1, 3, 7)	**3 . 20**
3 . 12 (1, 3, 5)	**3 . 21(1, 3, 5)**
3 . 15 (1, 3, 6)	**3 . 22(1, 3, 5)**
3 . 18 (1, 3, 7)	**3 . 23 (2)**
3 . 19 (1, 3)	**3 . 24 (2)**