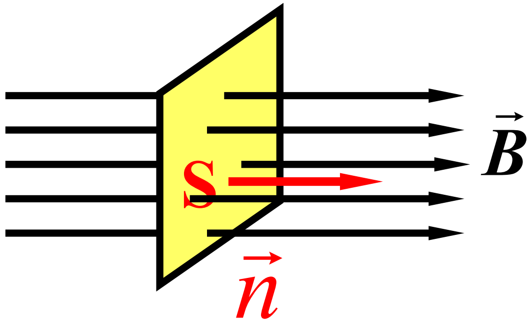
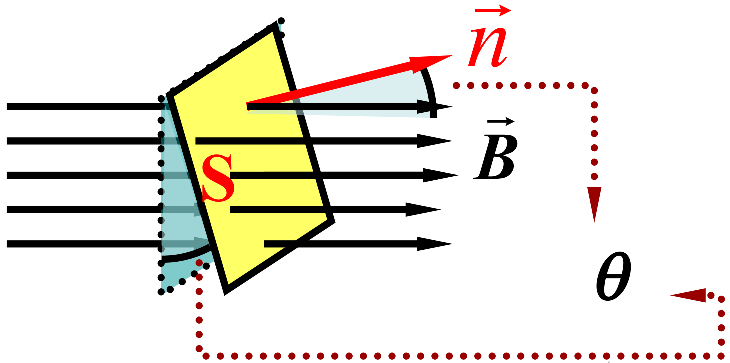
§2. 磁场的高斯定理

一、磁通量



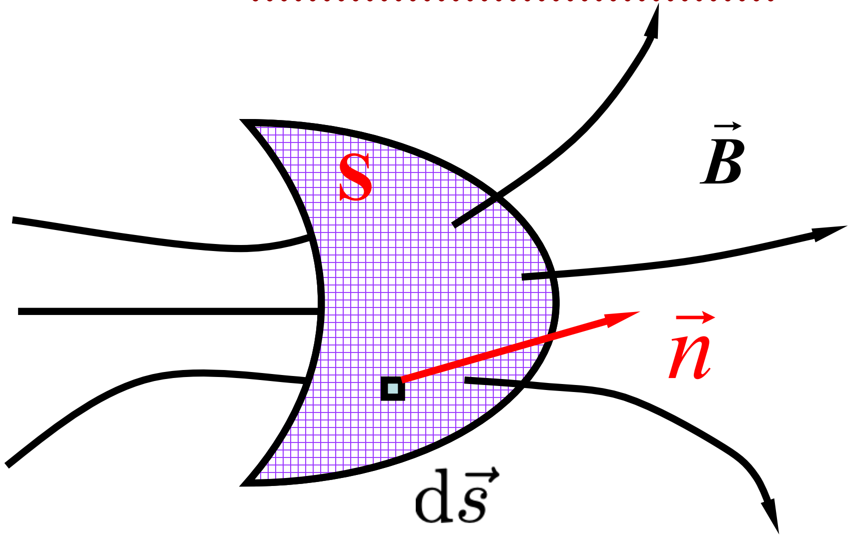
1、均匀磁场 $\vec{B} \parallel \vec{n}$

$$\Phi_m = BS$$



2、均匀磁场，有一定夹角

$$\Phi_m = BS\cos\theta = \vec{B} \cdot \vec{S}$$



3、非均匀磁场，任意曲面

$$\mathrm{d}\Phi_m = \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

单位：韦伯(Wb) $1\text{Wb}=1\text{T}\cdot\text{m}^2$

§2. 磁场的高斯定理

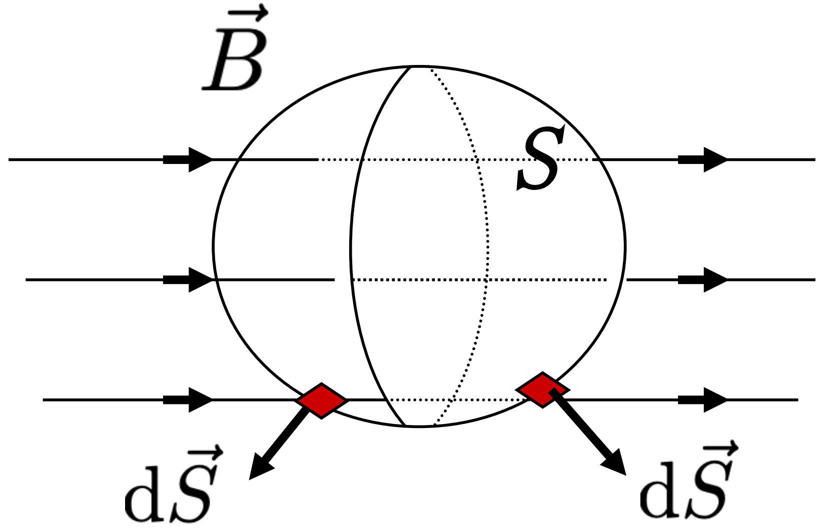
一、磁通量

4、非均匀磁场，闭合曲面

$$\Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

规定：面元法向方向

由闭合面内指向面外



$\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} < 0$ 磁感线穿入

$\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} > 0$ 磁感线穿出

二、磁场的高斯定理

磁感应线闭合 $\Phi_m = \oint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ 无源场

例： 现有一无限长载流直导线，电流为 I, 求通过面 $abcd$ 的磁通量。

选取面元　面元距离直导线x, 宽度dx

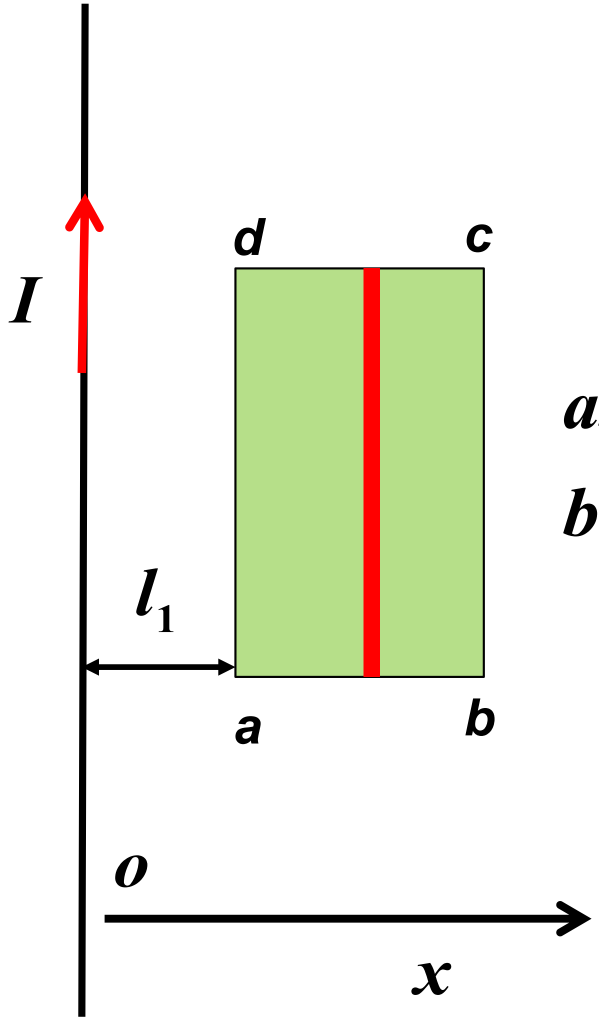
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad \otimes$$

$$\mathrm{d}\Phi_m = \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= Bh\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I h}{2\pi x}\mathrm{d}x$$

$$\Phi_m = \int_a^b \frac{\mu_0 I h}{2\pi x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu_0 I h}{2\pi}\ln\frac{l_2 + l_1}{l_1}$$



$ab = l_2$

$bc = h$

§3. 安培环路定理及其应用

一、安培环路定理

$$\sum_{L_1} I_{in} = I_2 - I_3$$

$$\sum_{L_2} I_{in} = I_1 - I_2$$

恒定磁场中，磁感应强度 B 沿任何闭合路径 L 的线积分（环路积分）等于路径 L 所包围的电流强度的代数和的 μ_0 倍

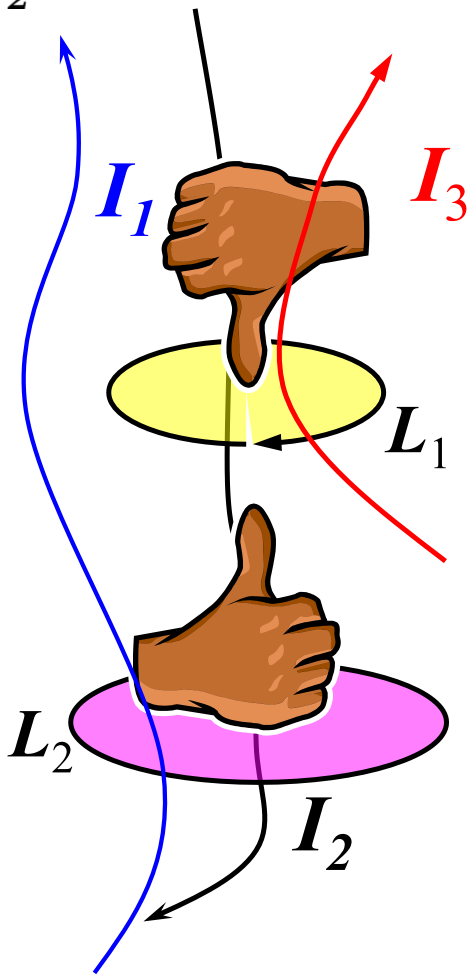
$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{in}$$

$\vec{B}$　环路上各点的磁感应强度，由空间**所有电流**共同产生

I_{in}　与L**套连**的电流

$\sum I_{in}$　正向穿过以 L 为边界的任意曲面的电流的代数和。

（与L绕行方向成右螺电流取正）

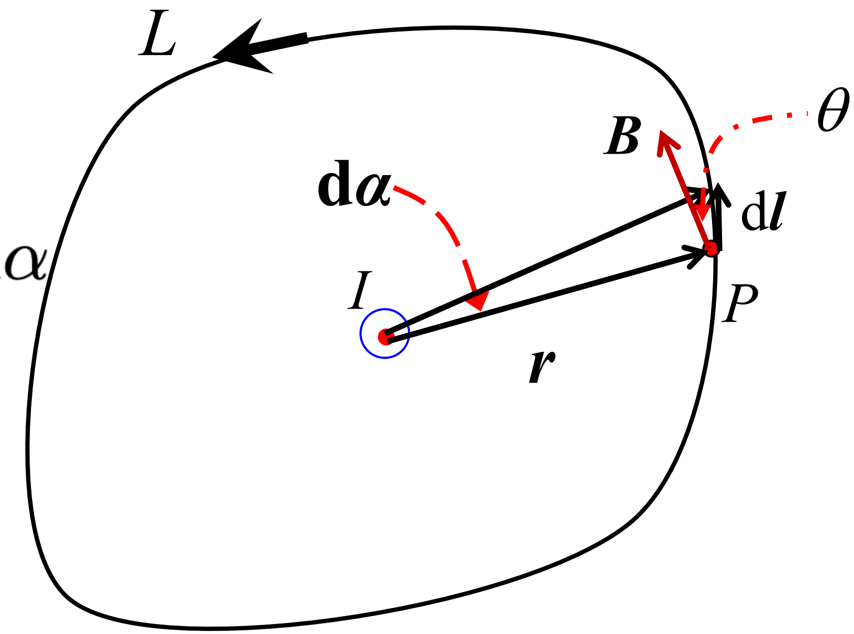


§ 3. 安培环路定理及其应用

二、定理验证　　以无限长载流直导线为例

1. 环路在垂直与导线的平面内，且包围直导线

沿任意环路L积分：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\mathrm{d}l\cos\theta = \oint_L Br\mathrm{d}\alpha$$

$$= \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_L \mathrm{d}\alpha$$

$$= \mu_0 I$$

电流反向 ➡ B 反向　$\theta' = \pi - \theta$　$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mu_0 I$

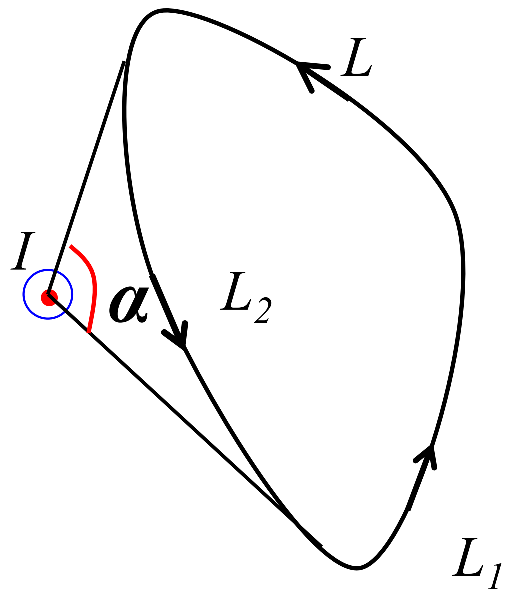
§ 3. 安培环路定理及其应用

2. 环路在垂直与导线的平面内，但不包围直导线

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} \mathrm{d}\alpha + \int_{L_2} \mathrm{d}\alpha\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}[\alpha + (-\alpha)]$$



可以进一步证明：对于非平面的任意闭合环路及任意的闭合恒定电流，安培环路定理均成立。

§3. 安培环路定理及其应用

讨论： $$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{in}$$

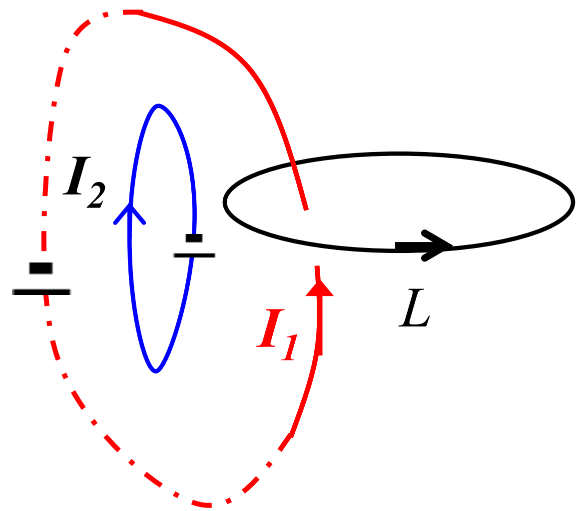
1. $\vec{B}$是空间全部电流产生的磁场

   对环路积分有贡献只有**包围在内（套连）**的电流

2. 环路积分为零时，磁感应强度不一定为零；

3. 电流正向的规定满足右手法则

   包围在内——**套连**



4. 微分形式 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

5. 稳恒磁场性质的基本方程 $\boxed{\text{有旋场}}$

§3. 安培环路定理及其应用

三、安培环路定理的应用 ---用来求解具有高度对称的磁场

选取合适的环路

常见的电流分布的对称性：

柱对称	面对称
无限长	无限大
线	平板
柱体（柱面）	平面

第一步：根据电流的对称性分析磁场的对称性；

第二步：利用安培环路定理计算磁感应强度的大小和方向。

§3. 安培环路定理及其应用

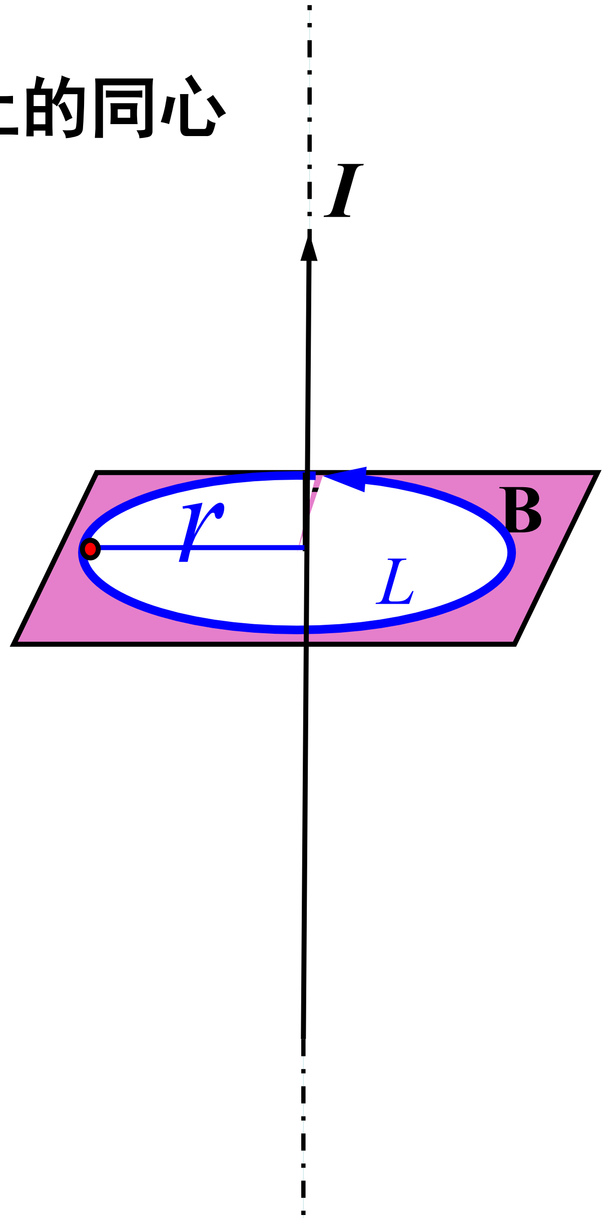
求：无限长直线电流的磁场

解：对称性分析:磁感应线是躺在垂直平面上的同心圆，选环路

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I \qquad \vec{B} \parallel \mathrm{d}\vec{l}$$

$$B\oint \mathrm{d}l = 2\pi r B = \mu_0 I$$

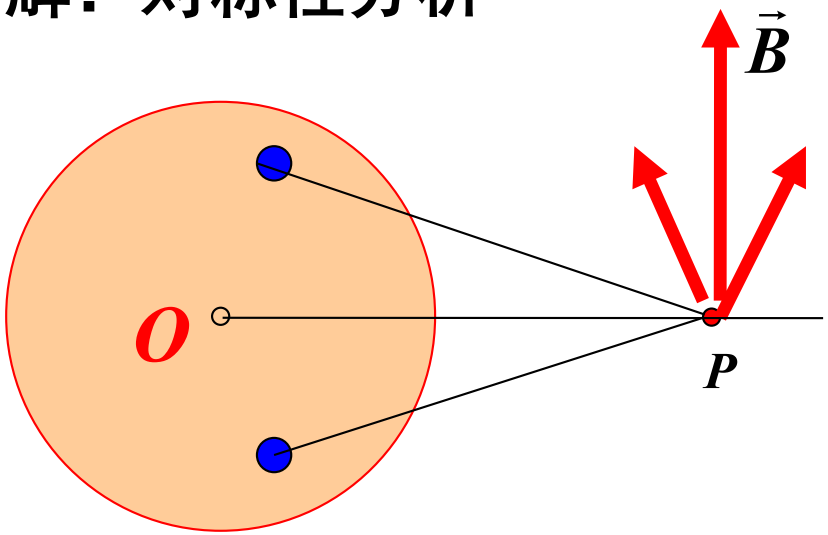
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

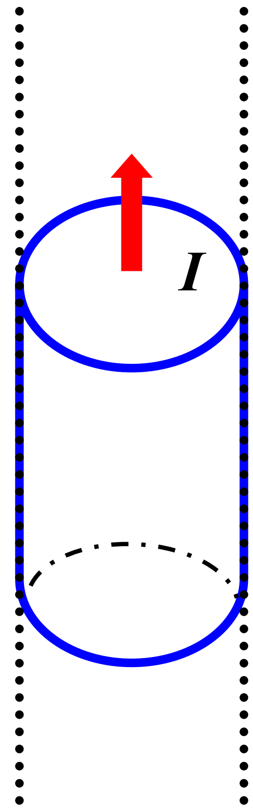


§3. 安培环路定理及其应用

求：无限长直圆柱形载流导线的磁场。设圆柱面半径为 R，面上**均匀分布**的总电流为 I

解：对称性分析





由分析可知：磁场是轴对称分布，
磁感应线为垂直于轴线的同心圆

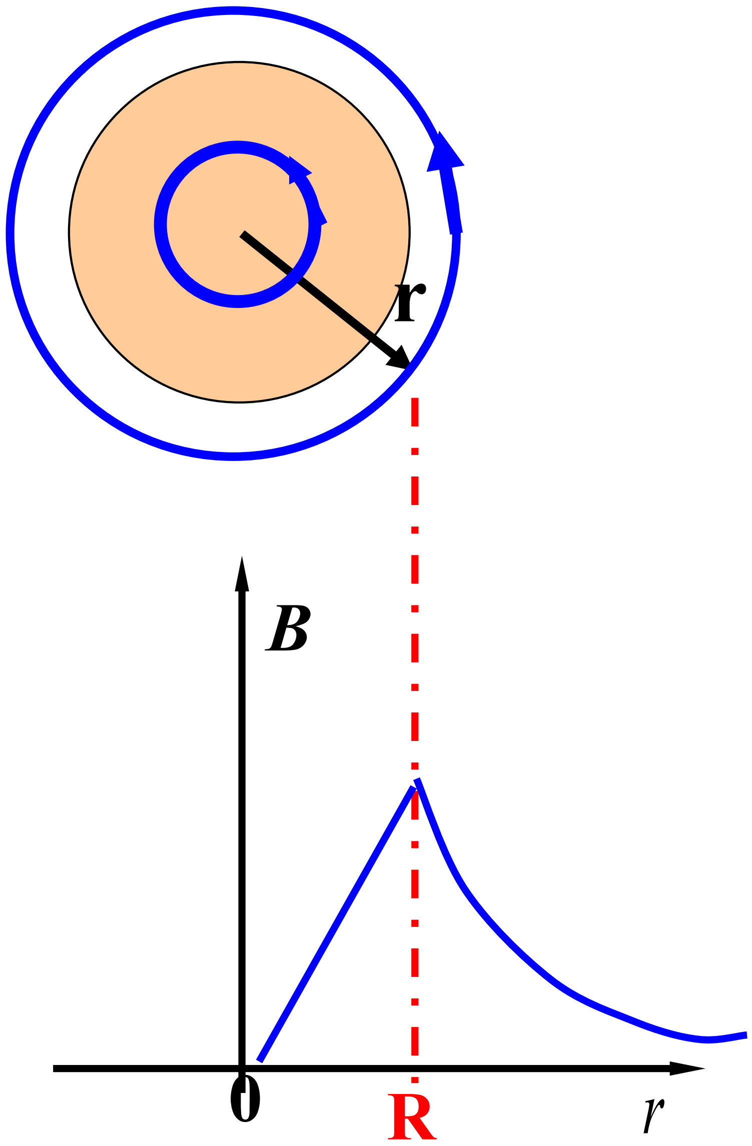
§3. 安培环路定理及其应用

选环路：同心圆

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \begin{cases} \mu_0 I \ (r > R) \\ \mu_0 \dfrac{I}{\pi R^2} \pi r^2 \ (r < R) \end{cases}$$

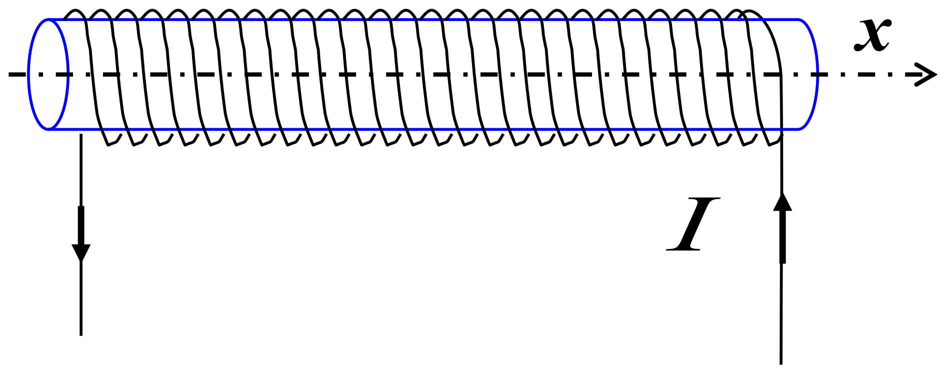
$$= B \cdot 2\pi r$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \ (r > R) \\ \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \ (r < R) \end{cases}$$



§3. 安培环路定理及其应用

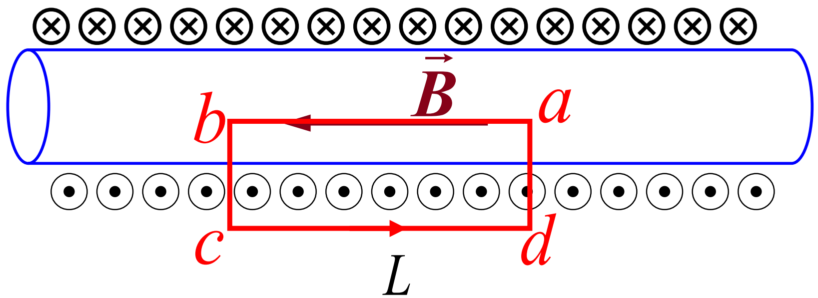
求：均匀密绕无限长直螺线管的磁场（已知单位长度匝数n，电流强度 I）



解：对称性分析——管内垂直于轴线平面内任意一点 B 的方向垂直于该平面

—— 与轴平行！

?

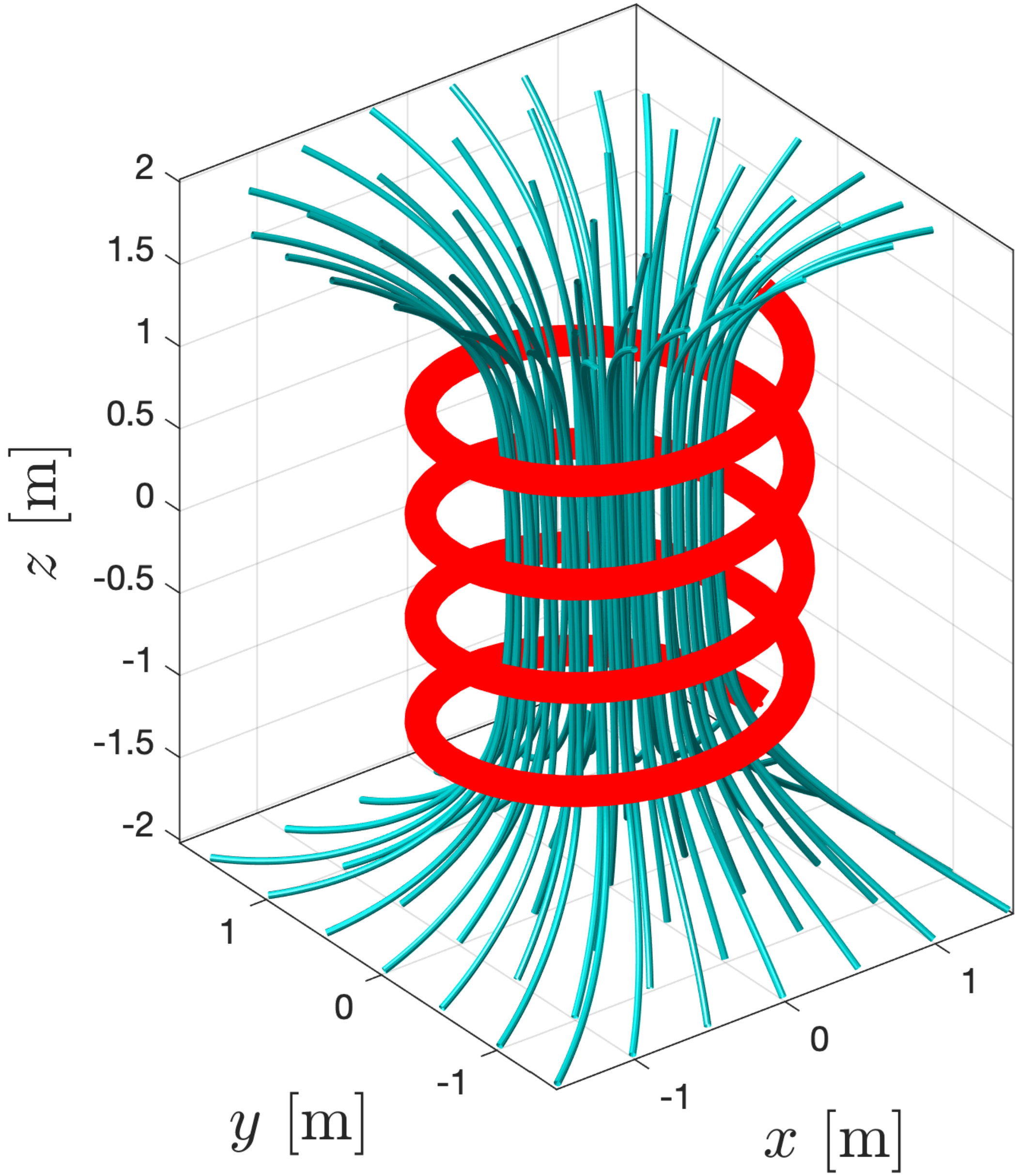


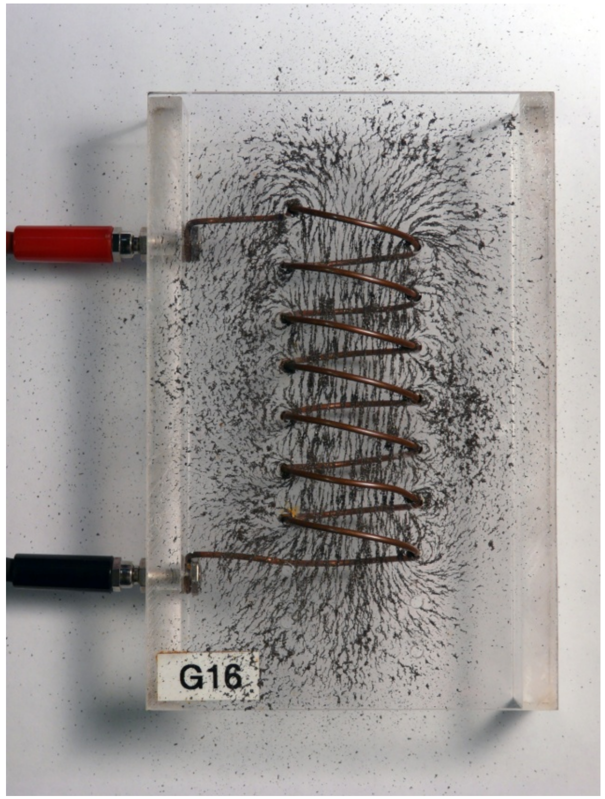
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = B\overline{ab} = \mu_0 n\overline{ab}I \Longrightarrow B = \mu_0 n I$$

有限长的螺线管:当 $L>>R$，在中部也有此结果

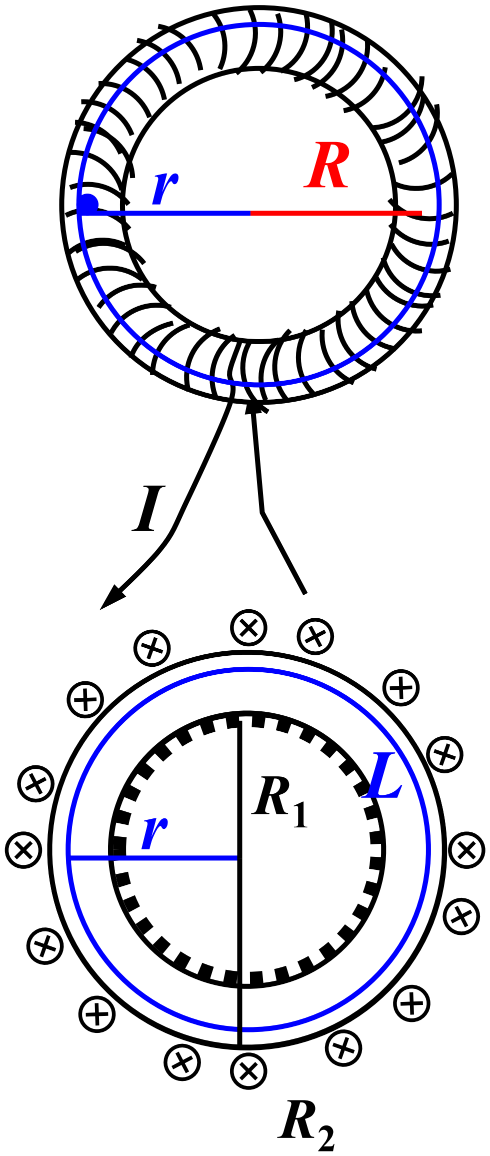
§3. 安培环路定理及其应用





螺线管周围磁场

§3. 安培环路定理及其应用



求：均匀密绕螺线环的磁场（已知中心半径*R*，总匝数*N*，电流强度*I*）

解：对称性分析——管内任意一个垂轴平面都是对称面——磁感应线是一组同心圆

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \begin{cases} \mu_0 NI \ (R_1 < r < R_2) \\ 0 \ (r > R_2, r < R_1) \end{cases}$$

$$B\oint \mathrm{d}r = B\cdot 2\pi r \approx 2\pi RB$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 nI \ (R_1 < r < R_2) \\ 0 \ (r > R_2, r < R_1) \end{cases}$$

其中：$n = N/2\pi R$ 为螺线环单位长度上的匝数

一对圆电流在对称面上产生的磁场垂直于对称面