

第三章 连续信号的正交分解

§ 3.1 引言

➤ 信号具有**时域特性**和**频域特性**。本章将重点讨论信号的**频域特性**，其目的是：

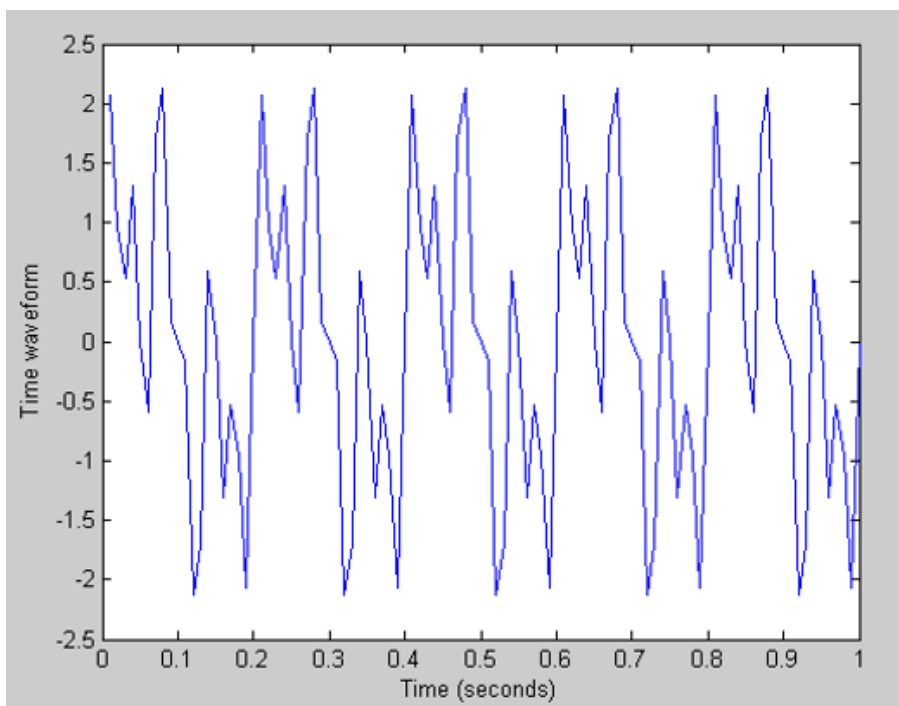
(1) 掌握信号频域特性的分析；

(2) 为系统的频域分析作准备。

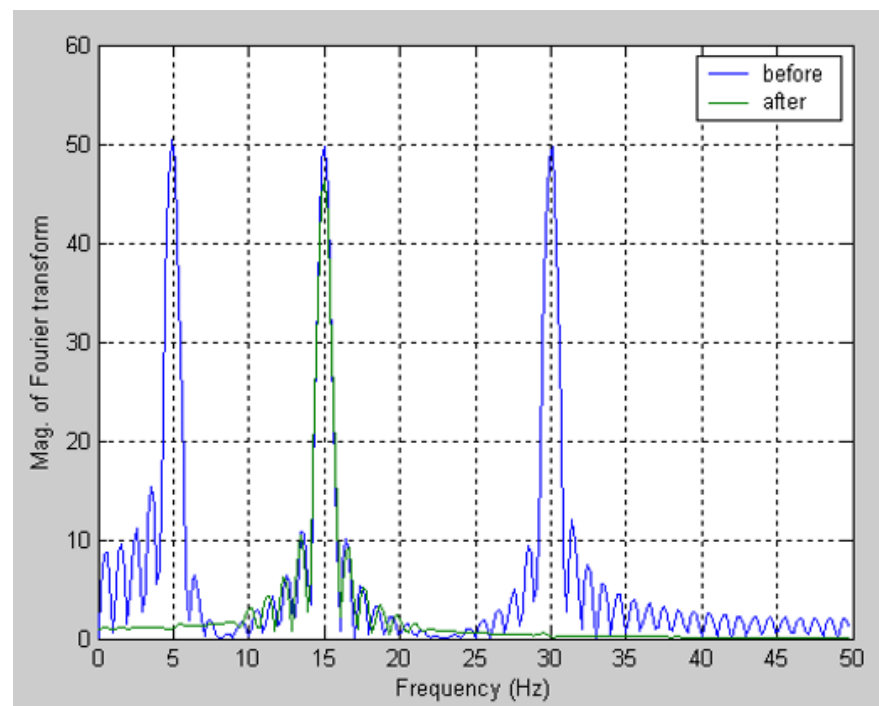
某一信号的表达式为

$$f(t) = 50 \cos(5 \times 2\pi t) + 50 \cos(15 \times 2\pi t) + 50 \cos(30 \times 2\pi t)$$

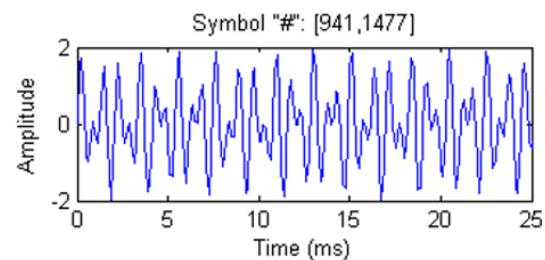
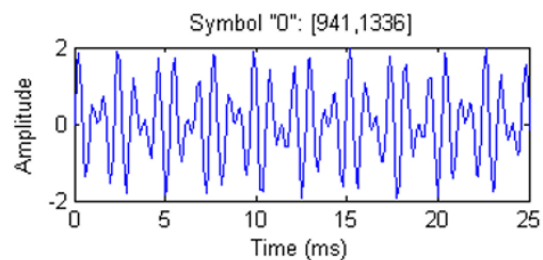
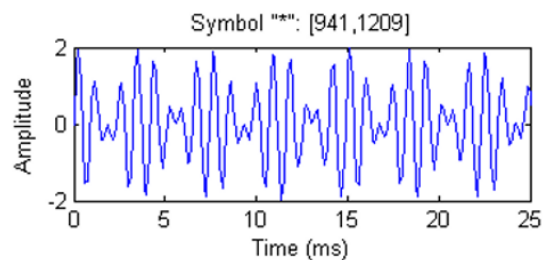
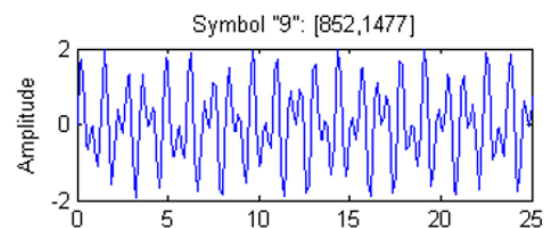
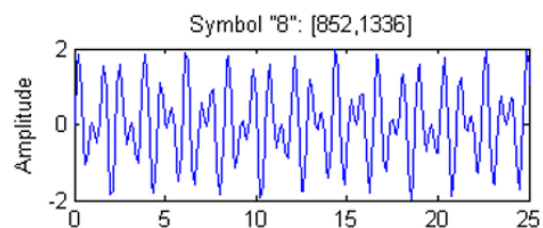
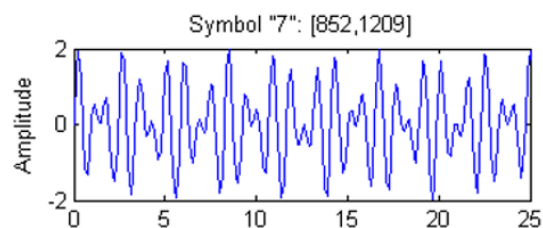
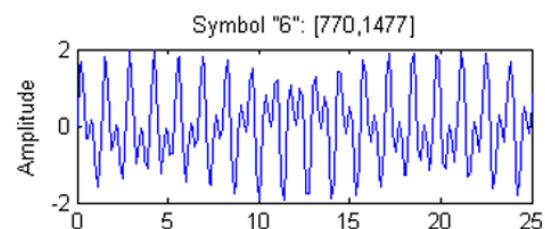
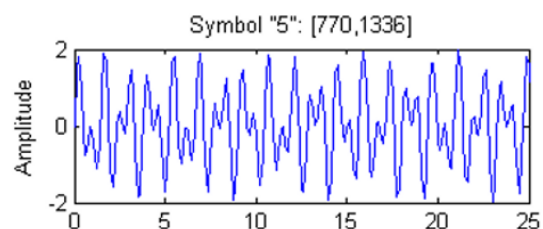
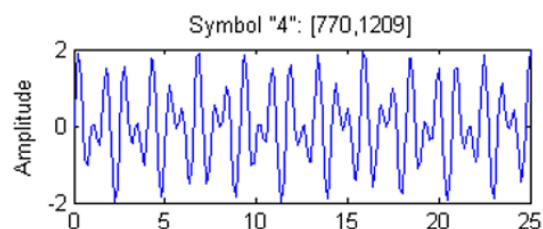
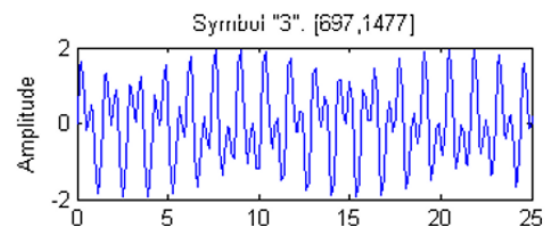
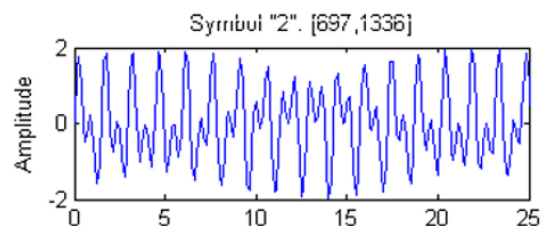
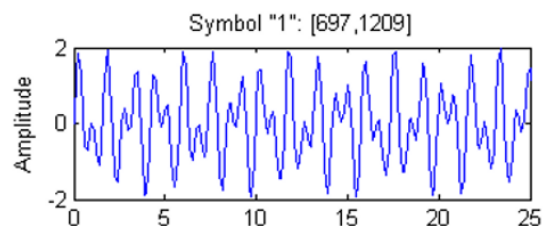
信号的时域波形



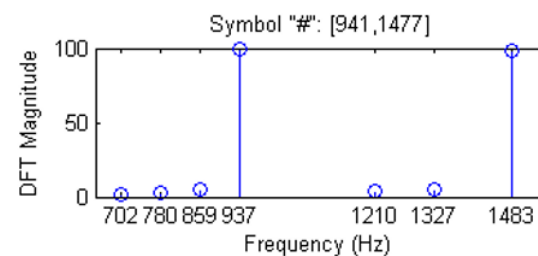
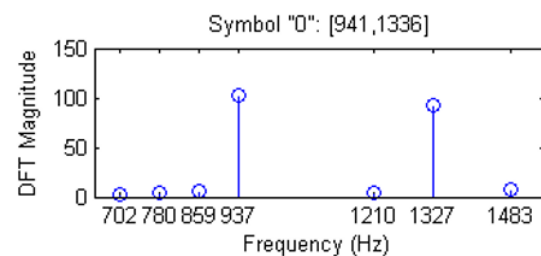
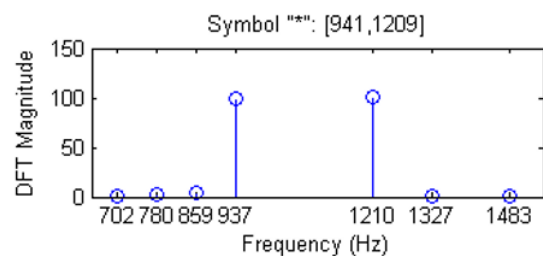
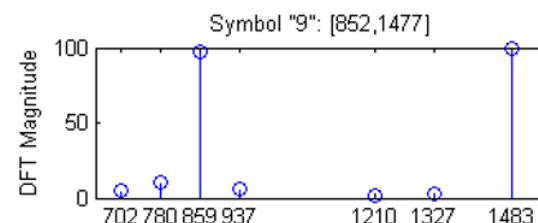
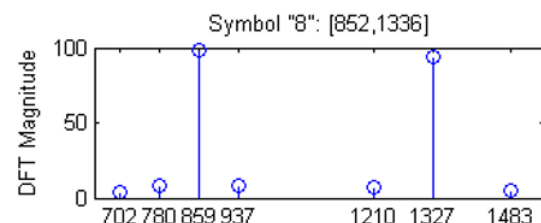
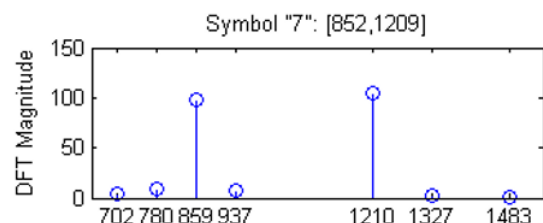
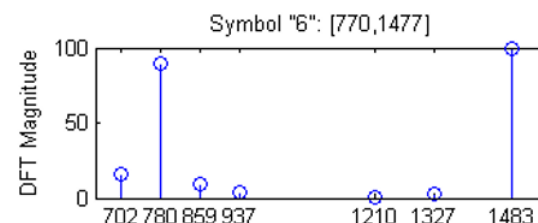
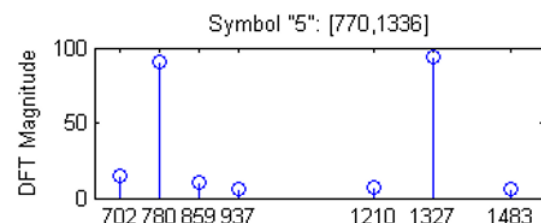
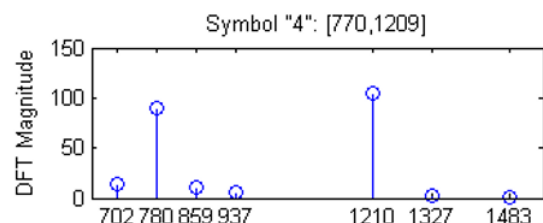
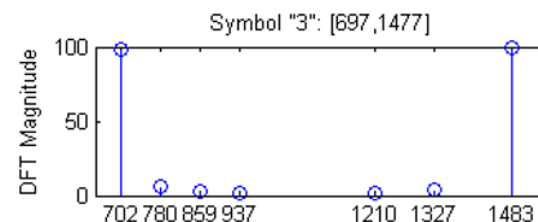
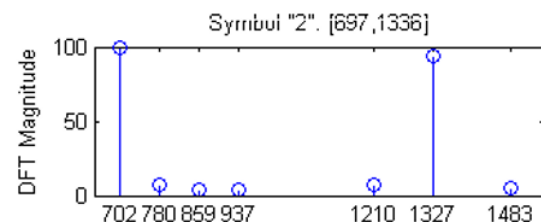
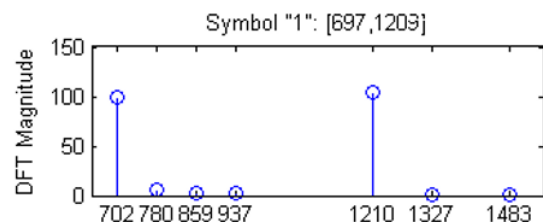
信号的频域波形

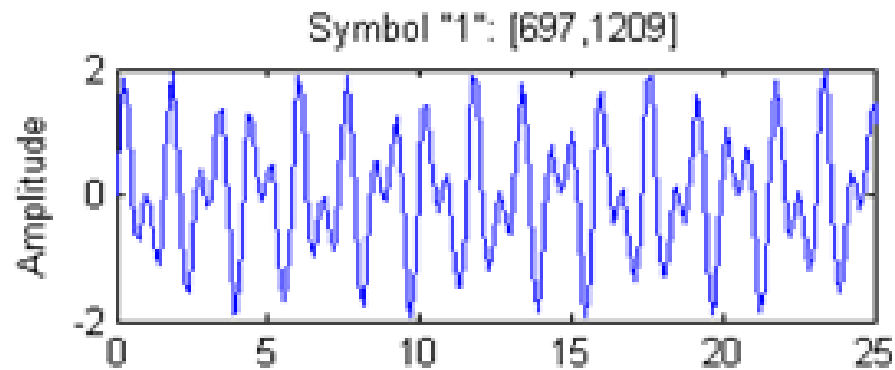


电话按键的双音频信号的时域波形



电话按键的双音频信号的频域波形





$$f(t) = 100 \cos 2\pi \times 697 t + 100 \cos 2\pi \times 1209 t$$

$$\Omega_1 = 2\pi \times 697 \text{ (rad/s)}$$

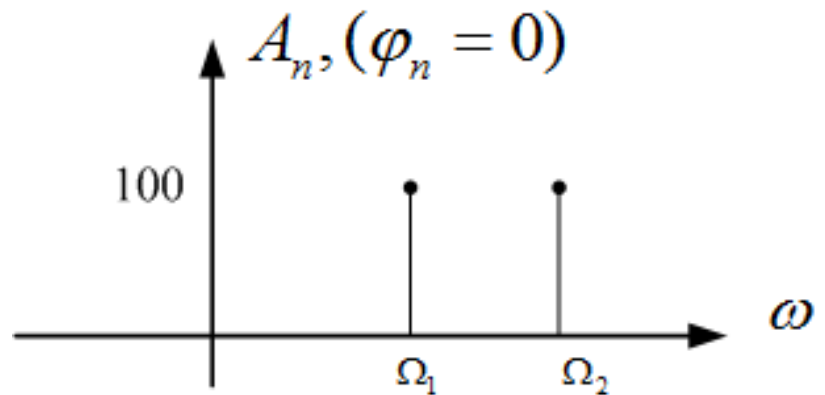
$$A_1 = 100$$

$$\phi_1 = 0$$

$$\Omega_2 = 2\pi \times 1209 \text{ (rad/s)}$$

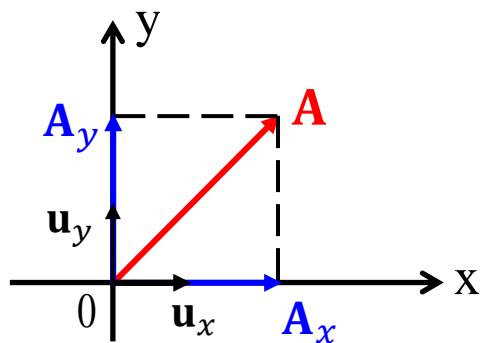
$$A_2 = 100$$

$$\phi_2 = 0$$



§ 3.2 正交函数集与信号分解

一、矢量的正交分解



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$$

$$= |\mathbf{A}_x| \mathbf{u}_x + |\mathbf{A}_y| \mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = |\mathbf{u}_x| |\mathbf{u}_y| \cos \theta = 0$$

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = 1$$

其中, u_x, u_y 是 x 和 y 方向的单位向量。

二、信号的正交分解

有一函数集 $\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}$, 若这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足以下的正交特性:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j^*(t) dt = \begin{cases} k & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

则称此函数集为**正交函数集**, 这些函数构成了一个 N 维的**正交信号空间** (Orthogonal signal space)。

在区间 (t_1, t_2) 上的任意能量有限信号 $f(t)$ 可以用正交函数集合中函数的线性组合来近似表示，即：

$$f(t) \approx C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \cdots + C_r g_r(t) + \cdots C_n g_n(t)$$

如果该正交函数集是完备的，则有

$$f(t) = C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \cdots + C_r g_r(t) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} C_i g_i(t)$$

求解系数 C_r ：

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \cdots + C_r g_r(t) + \cdots] g_r(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} C_r g_r^2(t) dt$$

$$\text{故 } C_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt}, \quad r = 1, 2, 3, \cdots$$

若正交函数集是由复函数组成的，则 $C_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r(t) g_r^*(t) dt}$

§ 3.3 周期信号的傅里叶级数

- 对信号运用正交函数集进行分解时，应考虑两个方面：
 - (1) 分解后能**反映**信号本身的某些**物理特性**；
 - (2) 分解**过程简单**。
- **三角函数集**和**复指数函数集**恰好能够满足这两个条件，信号 $f(t)$ 在这两个函数集中分解得到的是**傅里叶级数** (Fourier series — F.S.)。

三角函数集 $\{1, \cos \Omega t, \sin \Omega t, \cos 2\Omega t, \sin 2\Omega t, \dots, \cos n\Omega t, \sin n\Omega t, \dots\}$

复指数函数集 $\{1, e^{j\Omega t}, e^{-j\Omega t}, e^{j2\Omega t}, e^{-j2\Omega t}, \dots, e^{jn\Omega t}, e^{-jn\Omega t}, \dots\}$

- 可以证明**三角函数集**和**复指数函数集**在区间 $(t_1, t_1 + T)$ 上都是一个**完备的正交函数集**，其中 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ 。

➤ 周期信号 $f(t)$ 进行傅里叶级数分解时，需要满足狄利克雷 (Dirichlet) 条件：

(1) 在一个周期内，函数是绝对可积的 ($\int_{t_1}^{t_1+T} |f(t)| dt < \infty$)，此条件保证了傅里叶级数中每一项的系数都是有限值；

(2) 在一个周期内，函数具有有限个极值点；

(3) 在一个周期内，函数具有有限个第一类间断点，即左右极限存在但不相等的间断点。

一、三角傅里叶级数

对于任何一个周期为 T 的满足狄利克雷条件的周期信号 $f(t)$ ，其在区间 $(t_1, t_1 + T)$ 的基本形式的三角傅里叶级数为：

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \Omega t + a_2 \cos 2\Omega t + \cdots + a_n \cos n\Omega t + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin \Omega t + b_2 \sin 2\Omega t + \cdots + b_n \sin n\Omega t + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos n\Omega t dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} \cos^2 n\Omega t dt} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos n\Omega t dt \\ b_n &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin n\Omega t dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} \sin^2 n\Omega t dt} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin n\Omega t dt \end{aligned}$$

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ：基波角频率； $n\Omega = \frac{2\pi n}{T}$ ： n 次谐波角频率。

注意：积分区间可以是 $(0, T)$ ，也可以是 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

根据三角函数的性质可知：

$$a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t = A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) = A_n \cos n\Omega t \cos \varphi_n - A_n \sin n\Omega t \sin \varphi_n$$

所以系数 a_n, b_n 与幅度 A_n 和相位 φ_n 的关系为：

$$\begin{aligned} a_n &= A_n \cos \varphi_n \quad (\text{偶函数}) & b_n &= -A_n \sin \varphi_n \quad (\text{奇函数}) \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (\text{偶函数}) & \varphi_n &= -\arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (\text{奇函数}) \end{aligned}$$

因此可得余弦形式的三角傅立叶级数：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

$$= \frac{a_0}{2} + A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2) + \cdots + A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) + \cdots$$

直流分量 基波分量 二次谐波分量 n次谐波分量

其中, A_n : n次谐波分量的幅度

φ_n : n次谐波分量的相位

- $n\Omega, A_n, \varphi_n$ 反映了周期信号 $f(t)$ 的频域特性。
- 给定一个信号, 这些量就可以唯一的确定。
- 反过来, 给定这些量, 就有一个唯一的信号与之对应。

基本形式的三角傅里叶级数

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \Omega t + a_2 \cos 2\Omega t + \cdots + a_n \cos n\Omega t + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin \Omega t + b_2 \sin 2\Omega t + \cdots + b_n \sin n\Omega t + \cdots \end{aligned}$$

余弦形式的三角傅里叶级数

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \\ &= \frac{a_0}{2} + A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2) + \cdots + A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) + \cdots \end{aligned}$$

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$: 基波角频率; $n\Omega = \frac{2\pi n}{T}$: n次谐波角频率。

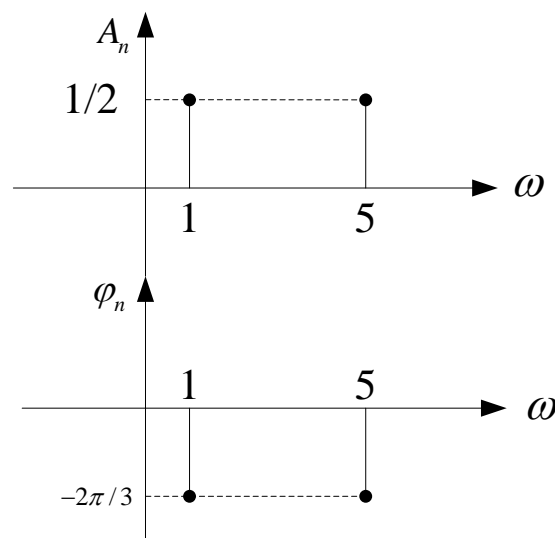
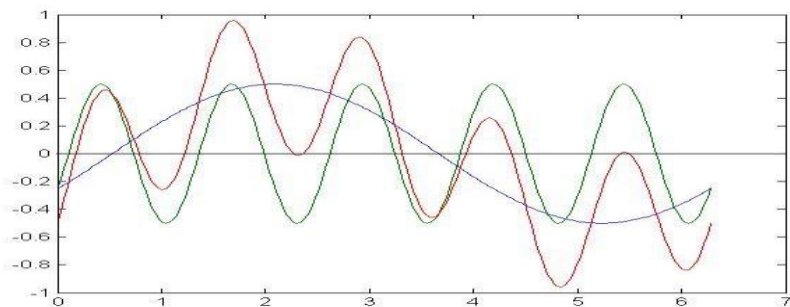
例：已知信号 $f(t) = \frac{1}{2}\cos(t - \frac{2\pi}{3}) + \frac{1}{2}\cos(5t - \frac{2\pi}{3})$ ，求信号的直流分量、基波分量和谐波分量，并绘制其频谱图。

解：根据信号 $f(t)$ 的表达式可知：

该信号无直流分量，只包含基波分量和5次谐波分量。

$$\Omega = 1, A_1 = \frac{1}{2}, \phi_1 = -\frac{2\pi}{3}$$

$$5\Omega = 5, A_5 = \frac{1}{2}, \phi_5 = -\frac{2\pi}{3}$$



二、函数的奇偶性与谐波含量的关系

1. 若 $f(t)$ 是偶函数

则 $f(t) \cos n\Omega t$ 也是偶函数， $f(t) \sin n\Omega t$ 是奇函数，因而

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt = 0$$

说明其傅里叶级数展开式中只含有直流分量和余弦谐波分量，不含有正弦谐波分量。

2. 若 $f(t)$ 是奇函数

则 $f(t) \cos n\Omega t$ 也是奇函数， $f(t) \sin n\Omega t$ 是偶函数，因而

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt$$

说明其傅里叶级数展开式中只含有正弦谐波分量，不含有直流分量和余弦谐波分量。

三、指数傅里叶级数

对于任何一个周期为 T 的满足狄利克雷条件的周期信号 $f(t)$ ，其在区间 $(t_1, t_1 + T)$ 的指数傅里叶级数为：

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + c_1 e^{j\Omega t} + c_{-1} e^{-j\Omega t} + c_2 e^{j2\Omega t} + c_{-2} e^{-j2\Omega t} \\ &\quad + \dots + c_n e^{jn\Omega t} + c_{-n} e^{-jn\Omega t} + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \end{aligned}$$

其中，
$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt}{\int_{t_1}^{t_1+T} e^{jn\Omega t} e^{-jn\Omega t} dt} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ：基波角频率； $n\Omega = \frac{2\pi n}{T}$ ： n 次谐波角频率。

四、三角傅里叶级数与指数傅里叶级数的关系

根据欧拉公式有：

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n [e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + e^{-j(n\Omega t + \varphi_n)}] \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + \boxed{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-j(n\Omega t + \varphi_n)}} \end{aligned}$$

对于上式的**第三项**，进行一次**变量代换** $n = -m$ 得

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + \boxed{\frac{1}{2} \sum_{-m=1}^{\infty} A_{-m} e^{-j(-m\Omega t + \varphi_{-m})}}$$

对于上式的**第三项**，再进行一次**变量代换** $m = n$ 得

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} A_{-n} e^{j(n\Omega t - \varphi_{-n})}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} A_{-n} e^{j(n\Omega t - \varphi_{-n})}$$

因为 A_n 是偶函数，即 $A_{-n} = A_n$ ； φ_n 是奇函数，即 $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ ，且进一步令 $a_0 = A_0, \varphi_0 = 0$ ，则有

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j(n\Omega t + \varphi_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\Omega t}$$

其中 $\dot{A}_n = A_n e^{j\varphi_n}$ ，称作 n 次谐波分量的复数幅度。

与指数傅里叶级数的标准形式比较可得：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

$$\dot{A}_n = 2c_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

注意： $-n\Omega$ 的引入只是便于数学处理，不代表存在负频率。

§ 3.4 周期信号的频谱

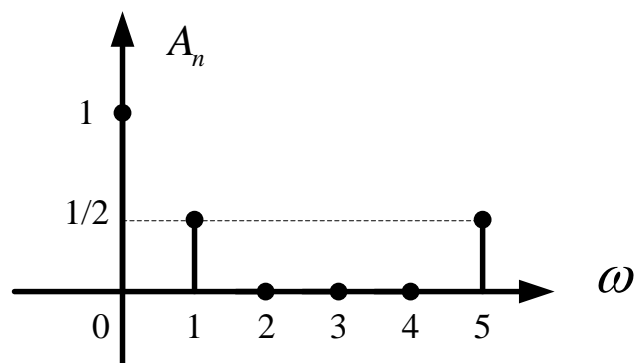
- **幅度频谱图** (Amplitude spectrum)：用不同长短的线段表示各谐波分量幅度的大小，然后按频率由低到高的顺序排列起来。
- **相位频谱图** (Phase spectrum)：用不同长短的线段表示各谐波分量相位的大小，然后按频率由低到高的顺序排列起来。
- **双边频谱图**：以指数傅里叶级数中 c_n 的模值和辐角作图，然后按频率由低到高的顺序排列起来。

讨论：已知信号 $f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(t - \frac{2\pi}{3}) + \frac{1}{2} \cos(5t - \frac{2\pi}{3})$ ，试画出其单边和双边的幅度频谱图和相位频谱图。

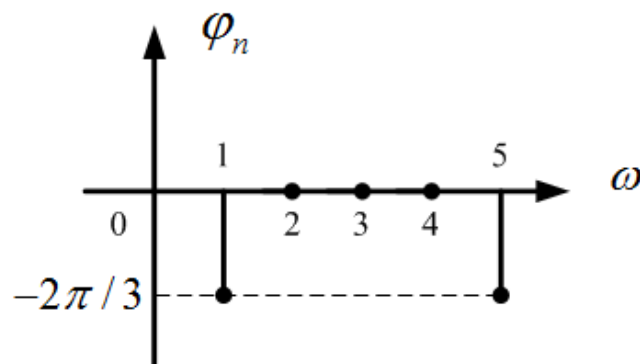
解：根据信号 $f(t)$ 的表达式可知：

该信号的直流分量为 1；基波分量的幅度为 $\frac{1}{2}$ ，相位为 $-\frac{2\pi}{3}$ ；5次谐波分量的幅度为 $\frac{1}{2}$ ，相位为 $-\frac{2\pi}{3}$ 。

单边幅度频谱图



单边相位频谱图

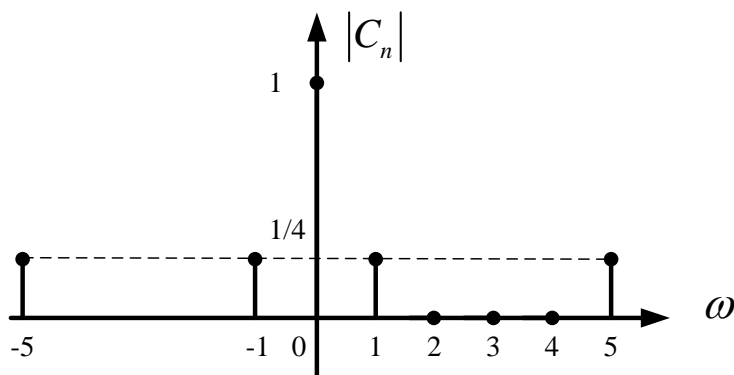


根据欧拉公式有：

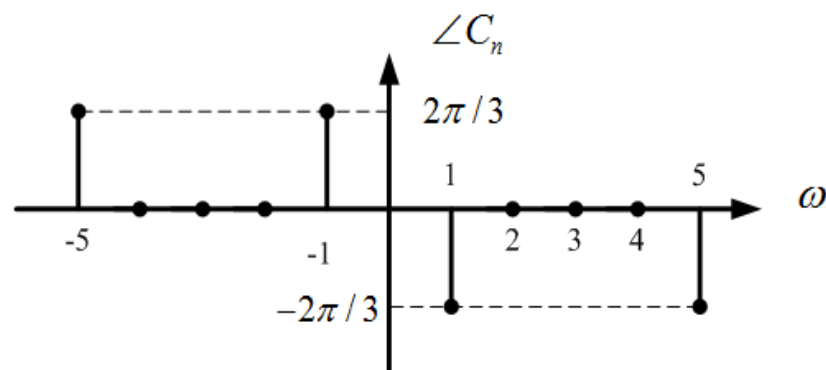
$$\begin{aligned}f(t) &= 1 + \frac{1}{2} \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(5t - \frac{2\pi}{3}\right) \\&= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[e^{j(t-\frac{2\pi}{3})} + e^{-j(t-\frac{2\pi}{3})} \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[e^{j(5t-\frac{2\pi}{3})} + e^{-j(5t-\frac{2\pi}{3})} \right] \\&= 1 + \frac{1}{4} e^{j(t-\frac{2\pi}{3})} + \frac{1}{4} e^{-j(t-\frac{2\pi}{3})} + \frac{1}{4} e^{j(5t-\frac{2\pi}{3})} + \frac{1}{4} e^{-j(5t-\frac{2\pi}{3})} \\&= 1 + \frac{1}{4} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{jt} + \frac{1}{4} e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-jt} + \frac{1}{4} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j5t} + \frac{1}{4} e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j5t}\end{aligned}$$

故 $C_0 = 1e^{j0}$, $C_1 = \frac{1}{4}e^{j-\frac{2\pi}{3}}$, $C_{-1} = \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $C_5 = \frac{1}{4}e^{j-\frac{2\pi}{3}}$, $C_{-5} = \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{3}}$

双边幅度频谱图

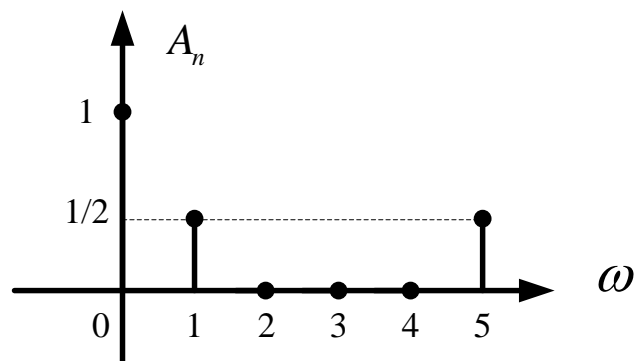


双边相位频谱图

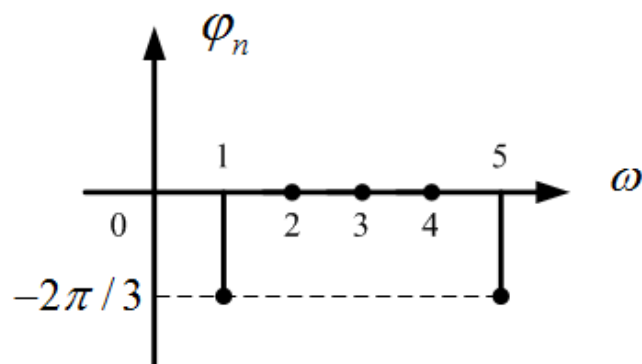


单边频谱图和双边频谱图的比较

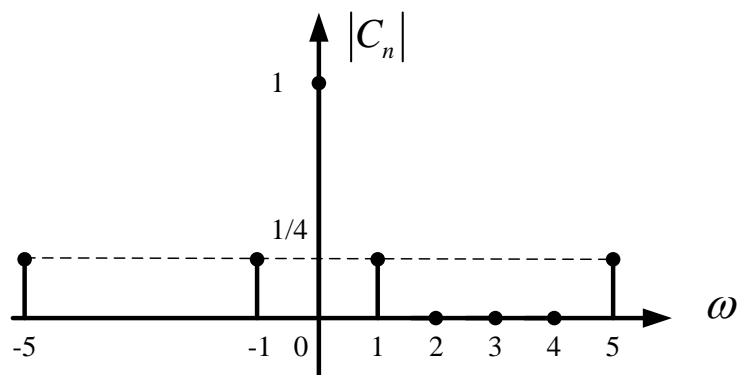
单边幅度频谱图



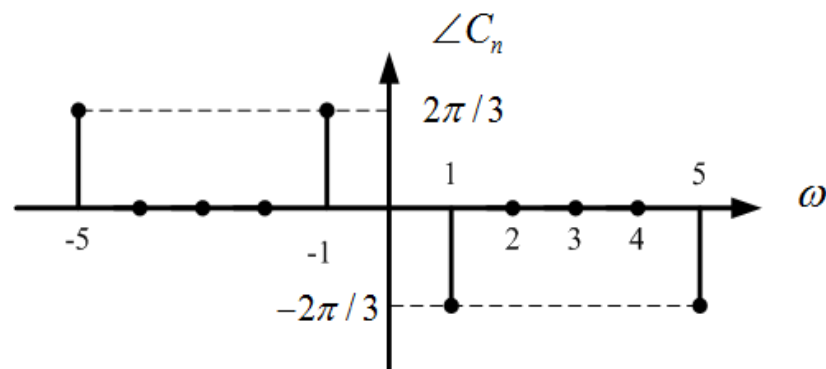
单边相位频谱图



双边幅度频谱图



双边相位频谱图



例：已知周期信号 $f(t) = 2 + \cos(2\pi t) - 0.5 \cos(5\pi t)$

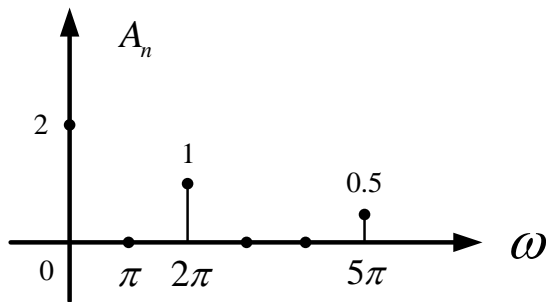
- (1) 绘制其单边幅度频谱图和相位频谱图；
- (2) 绘制其双边幅度频谱图和相位频谱图。

解：(1) 根据诱导公式，将 $f(t)$ 的表达式改写成标准余弦形式的三角傅里叶级数：

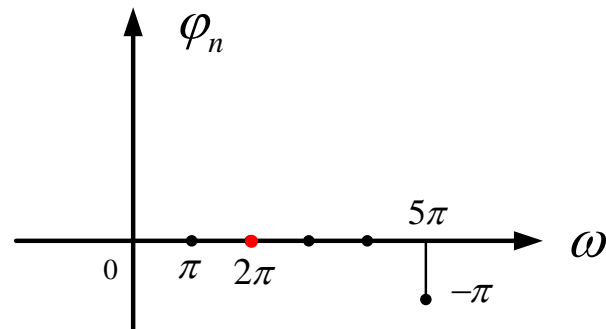
$$f(t) = 2 + \cos(2\pi t) - 0.5 \cos(5\pi t) = 2 + \cos(2\pi t) + 0.5 \cos(5\pi t - \pi)$$

$$\frac{a_0}{2} = 2; A_2 = 1, \varphi_2 = 0; A_5 = 0.5, \varphi_5 = -\pi$$

单边幅度频谱图

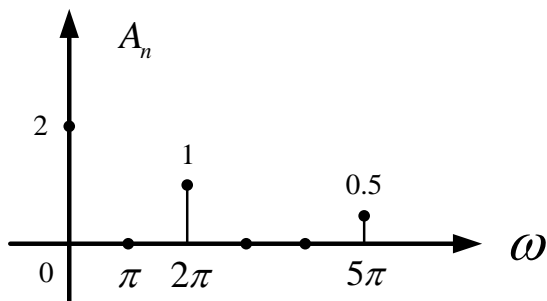


单边相位频谱图

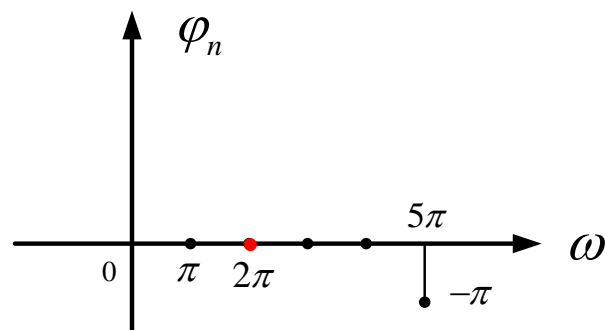


(2) 其双边幅度频谱图和相位频谱图为

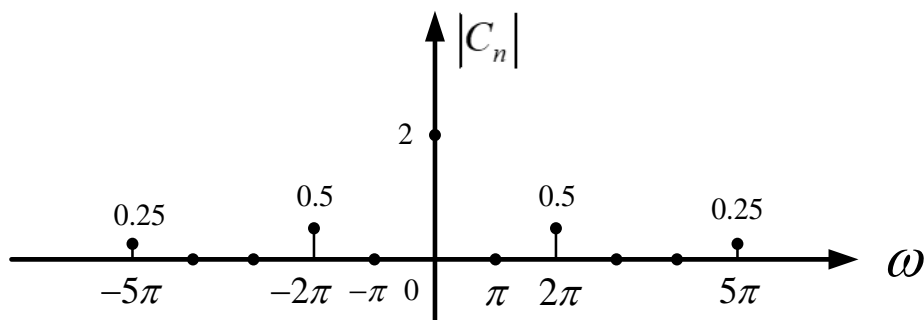
单边幅度频谱图



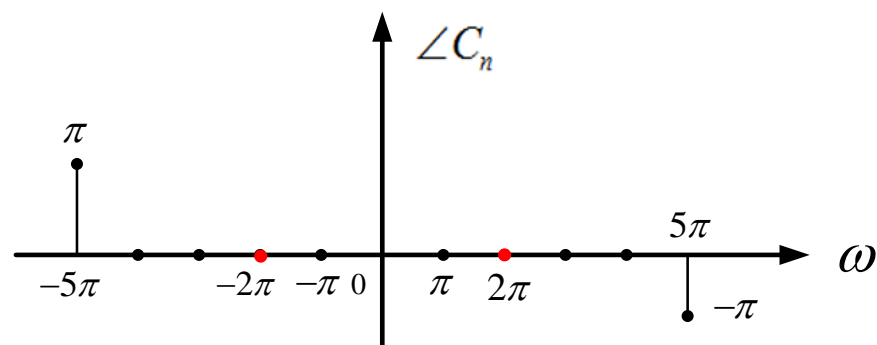
单边相位频谱图



双边幅度频谱图

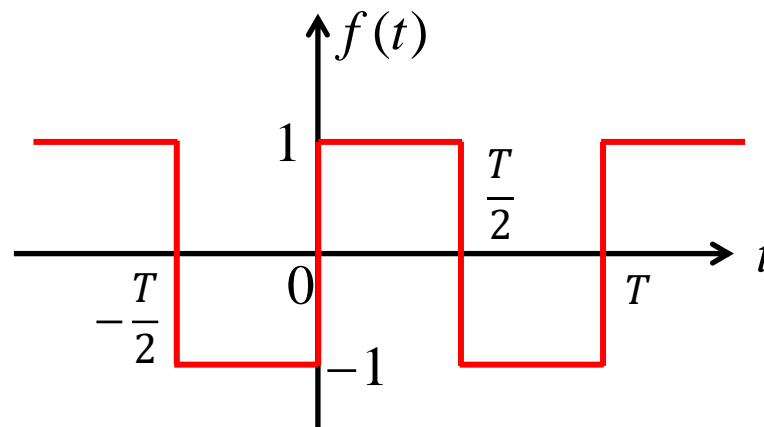


双边相位频谱图



讨论：一个周期信号 $f(t)$ 如图所示，试求其余弦形式的三角傅里叶级数并画出其幅度频谱图和相位频谱图。

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$$



解：由图可知，信号 $f(t)$ 在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 一个周期内是奇函数，所以 $f(t) \cos n\Omega t$ 是奇函数， $f(t) \sin n\Omega t$ 是偶函数，故有

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt = 0$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \sin n\Omega t \, dt \\
 &= \frac{4}{T} \cdot \frac{1}{n\Omega} (-\cos n\Omega t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{4}{T} \cdot \frac{1}{n\Omega} \left(1 - \cos n\Omega \frac{T}{2} \right) \\
 &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}
 \end{aligned}$$

故其基本形式的三角傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{4}{\pi} (\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \Omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \Omega t + \cdots)$$

又因为

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + b_n^2} = b_n \quad \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} = -\frac{\pi}{2}$$

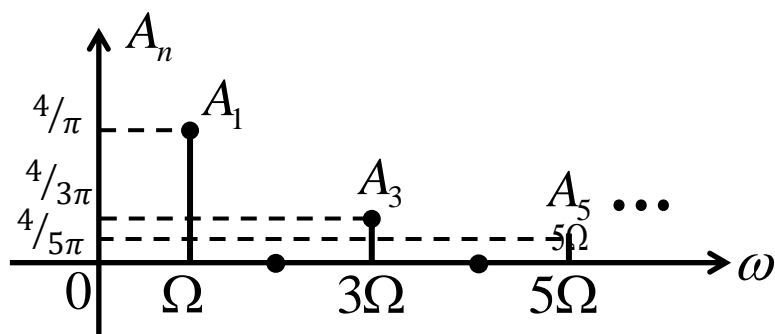
故其余弦形式的三角傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \cdots \right]$$

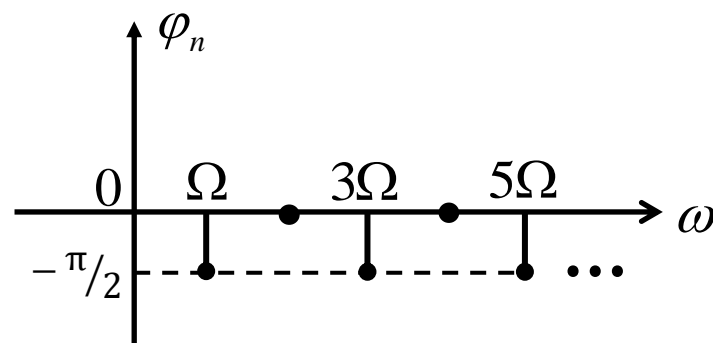
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos(\Omega t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3} \cos(3\Omega t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5} \cos(5\Omega t - \frac{\pi}{2}) + \cdots \right]$$

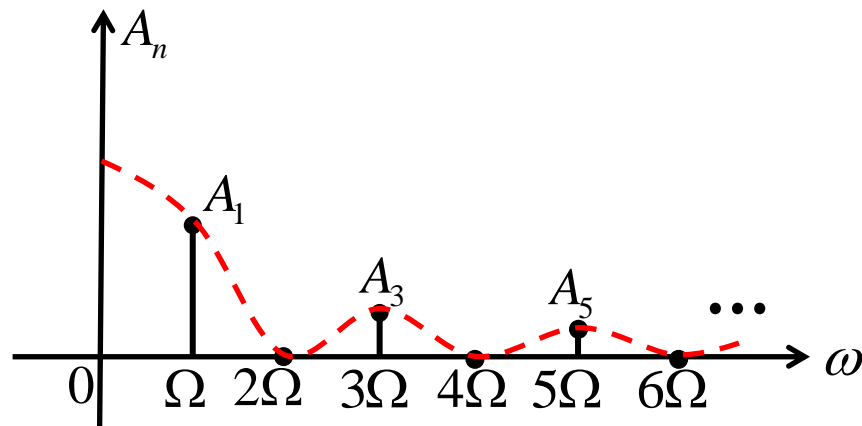
根据其余弦形式的三角傅里叶级数，可以画出其幅度频谱图和相位频谱图

幅度频谱图



相位频谱图

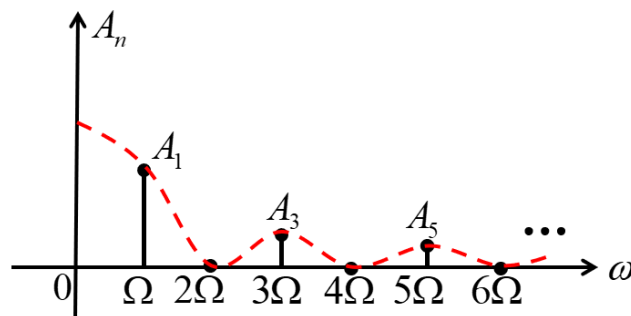




- 周期信号是由无穷多个频率分量组成的，谱线的**间隔是基波角频率**。频率**越高**，幅度**越小**。频谱具有**离散性、谐波性和收敛性**。
- 如果忽略高频分量，信号就是由有限个频率分量构成的。将**零频率**开始到需要考虑的**最高频率分量**之间的范围称作信号的**频宽** (Frequency bandwidth)。

§ 3.5 傅里叶变换与非周期信号的频谱

- 周期信号的频谱具有离散性。
- 当 $T \rightarrow \infty$ 时，周期信号变成非周期信号，周期信号离散的频谱变为非周期信号连续的频谱。



- 各频率分量的幅度都趋于无穷小，但它们之间的相对大小关系没有改变。

$$A_n = 2c_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

一、傅里叶变换 (Fourier transform, F.T.)

对于周期信号，其复数幅度为

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

方程两边同乘 $\frac{T}{2}$ 有

$$\frac{T}{2} \dot{A}_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时，有 $\Omega \rightarrow d\omega$ ， $n\Omega \rightarrow \omega$ ，故

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} \dot{A}_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(j\omega)$$

非周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} \dot{A}_n = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\pi \dot{A}_n}{\Omega}$$

$F(j\omega)$ 表示的是信号在单位频带内的幅度，故称作**频谱密度函数** (Frequency spectrum density function)，简称**频谱函数**。

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

- 其中， $|F(j\omega)|$ 代表信号各频率分量的**相对大小**， $\varphi(\omega)$ 代表信号各频率分量的**相位**。
- 若 $f(t)$ 是一个**实信号**，则 $F(j\omega)$ 是频率 ω 的**偶函数**， $\varphi(\omega)$ 是频率 ω 的**奇函数**。

二、傅里叶反变换 (Inverse fourier transform, I.F.T.)

一个周期信号可以展开为指数傅里叶级数，即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A_n e^{jn\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \right] e^{jn\Omega t}$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时，有

$$\Omega \rightarrow d\omega, \quad n\Omega \rightarrow \omega, \quad \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

所以，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

非周期信号 $f(t)$ 的傅里叶反变换为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶正变换

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶反变换

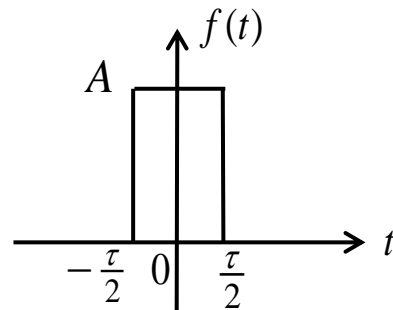
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

其中，傅里叶变换和傅里叶反变换存在的充分条件是：信号 $f(t)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ 。此条件只是充分条件，而非必要条件。

讨论：单个矩形脉冲信号 $f(t)$ 如图所示，求其傅里叶变换/频谱函数，分别画出其幅度和相位频谱图并将两图合并成一张图。

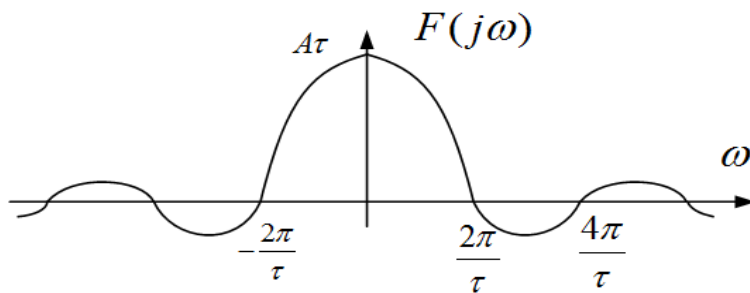
$$f(t) = \begin{cases} A & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



解：根据傅里叶变换的定义有

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} \cdot (e^{-j\omega t}) \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{A}{j\omega} (e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \\ &= A\tau \frac{\sin(\frac{\omega\tau}{2})}{\frac{\omega\tau}{2}} = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

$$F(j\omega) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

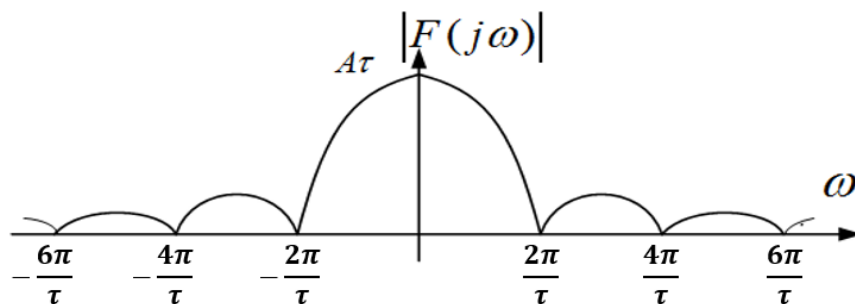


幅度频谱图
和相位频谱
图合并

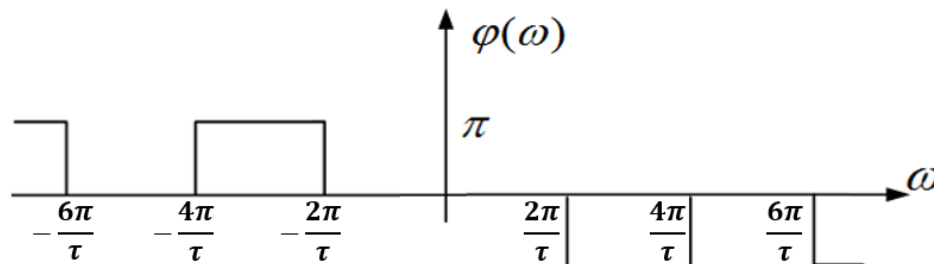
$F(j\omega)$ 的模值和相位分别为

$$|F(j\omega)| = A\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \frac{2n2\pi}{\tau} < \omega < \frac{(2n+1)2\pi}{\tau}, n = 0, 1, 2, \dots \\ -\pi, & \text{当 } \frac{(2n+1)2\pi}{\tau} < \omega < \frac{(2n+2)2\pi}{\tau}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

幅度频谱图



相位频谱图



§ 3.6 常见信号的频谱函数

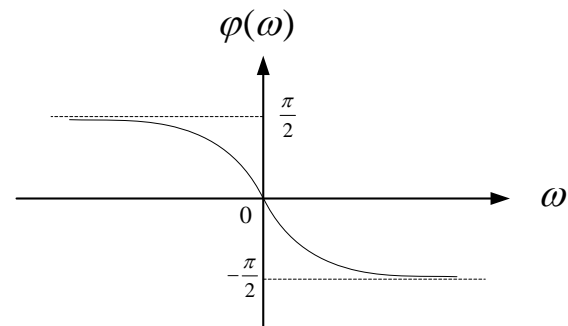
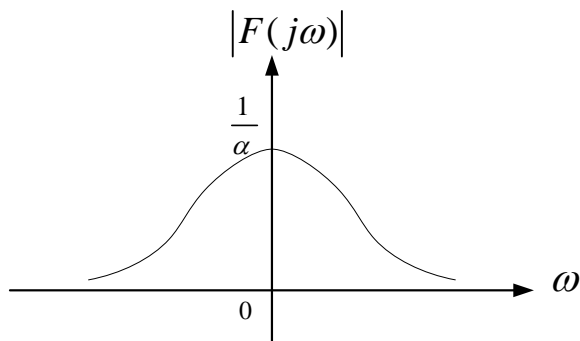
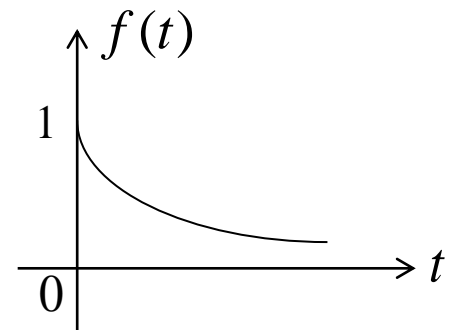
一、单边指数信号

$$f(t) = e^{-\alpha t} \varepsilon(t), \alpha > 0$$

$$F.T.\{e^{-\alpha t} \varepsilon(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$



二、双边指数信号

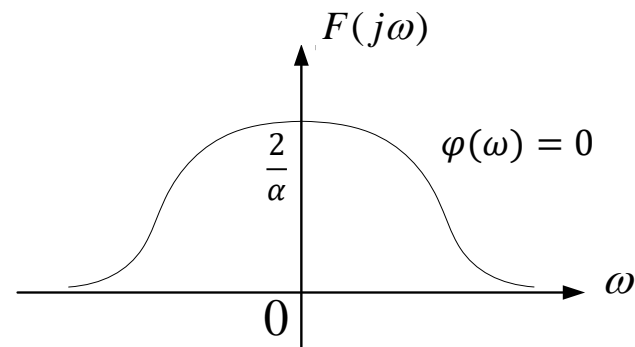
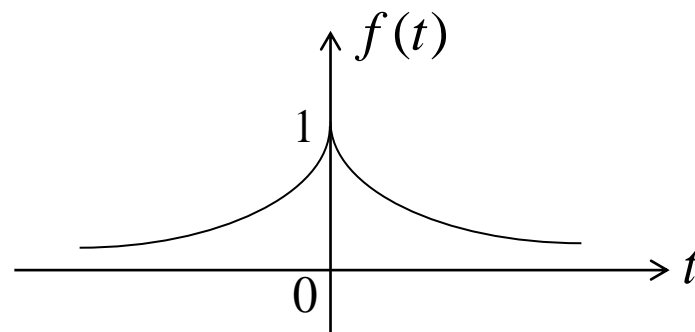
$$f(t) = e^{-\alpha|t|}, -\infty < t < \infty$$

$$F.T.\{e^{-\alpha|t|}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt$$

$$= \frac{1}{\alpha-j\omega} + \frac{1}{\alpha+j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$



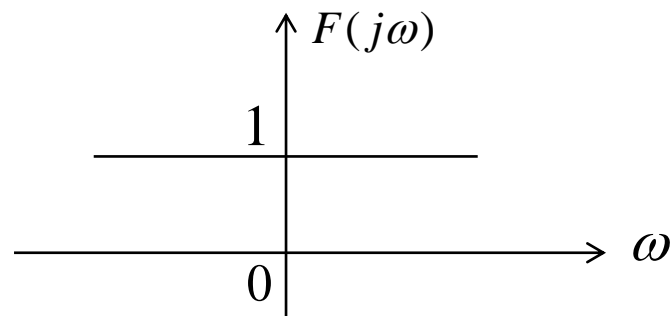
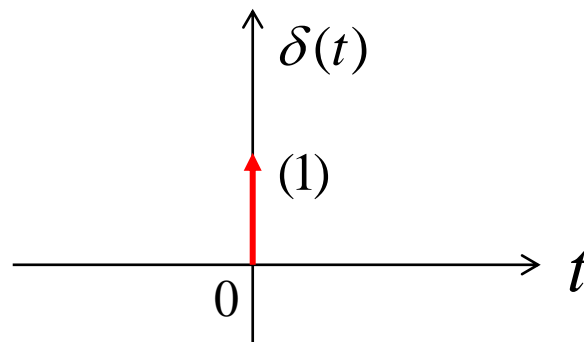
三、单位冲激信号

$$f(t) = \delta(t)$$

$$F.T.\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

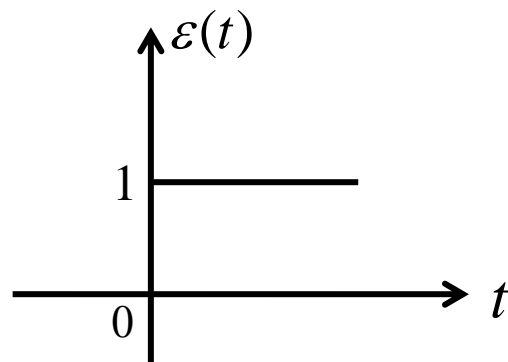
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$= e^{-j\omega \cdot 0} = 1$$



四、单位阶跃信号

$$f(t) = \varepsilon(t)$$



- 因为 $\varepsilon(t)$ 不满足绝对可积条件，不可以直接使用傅里叶变换。但是，可以通过对单边指数函数取极限的方法来求得，所得到的表达式属于广义的傅里叶变换。

$$\begin{aligned} F.T.\{\varepsilon(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = A(\omega) + jB(\omega) \end{aligned}$$

$$F.T.\{\varepsilon(t)\} = A(\omega) + jB(\omega)$$

已知 $e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ 的傅里叶变换为

$$F.T.\{e^{-\alpha t}\varepsilon(t)\} = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = A_e(\omega) + jB_e(\omega)$$

$$A(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} A_e(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{当 } \omega \neq 0 \\ \infty & \text{当 } \omega = 0 \end{cases} \quad \text{且}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} A_e(\omega) d\omega &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \arctan \frac{\omega}{\alpha} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi \end{aligned}$$

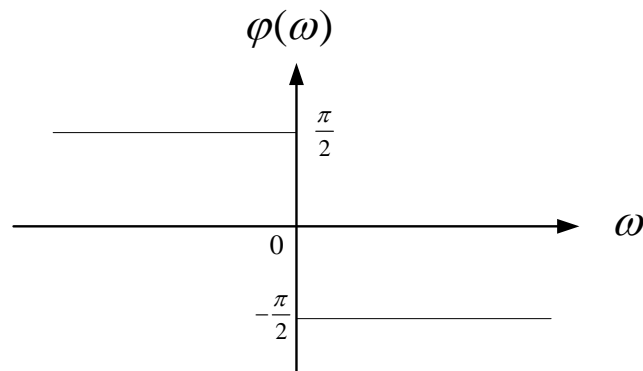
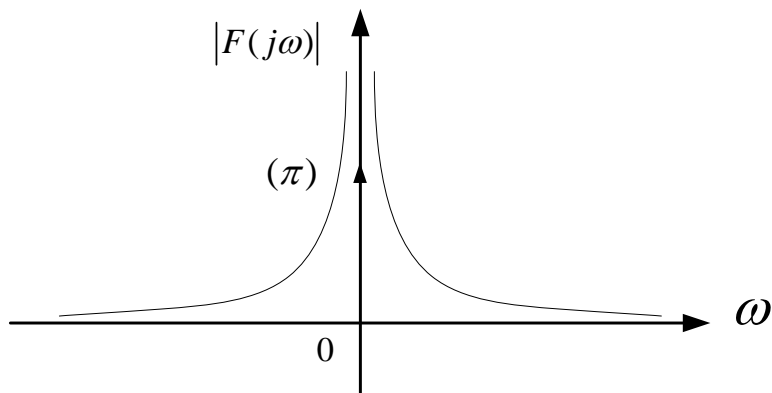
由此可知， $A(\omega)$ 是一个冲激函数，其冲激强度为 π ，即

$$A(\omega) = \pi\delta(\omega)$$

$$B(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} B_e(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = -\frac{1}{\omega}$$

所以， $F.T.\{\varepsilon(t)\} = A(\omega) + jB(\omega) = \pi\delta(\omega) - j\frac{1}{\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$$F.T.\{\varepsilon(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



五、复指数信号

$$f(t) = e^{j\omega_c t}$$

$$F.T.\{e^{j\omega_c t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_c t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_c)t} dt$$

此积分直接求解比较困难，可以运用单位冲激函数的傅里叶反变换来求解。

$$F.T.\{e^{j\omega_c t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_c)t} dt$$

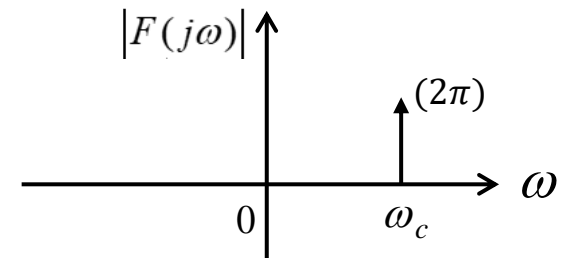
由单位冲激函数的傅里叶变换可知 $F.T.\{\delta(t)\} = 1$

则有 $I.F.T.\{1\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$

又因为 $\delta(t)$ 是偶函数，故 $2\pi\delta(t) = 2\pi\delta(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega$

运用变量代换，将上式中的 ω 换成 t ， t 换成 $\omega - \omega_c$ 后可得

$$F.T.\{e^{j\omega_c t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_c)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_c)$$



根据上式和欧拉公式可以得到

$$F.T.\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$$

$$F.T.\{\cos \omega_c t\} = \pi[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)]$$

$$F.T.\{\sin \omega_c t\} = j\pi[\delta(\omega + \omega_c) - \delta(\omega - \omega_c)]$$

§ 3.7 周期信号的频谱函数

- 周期信号不满足绝对可积条件的，在引入奇异函数后，从极限的观点来分析，则周期信号的傅里叶变换也存在，所得到的表达式属于广义的傅里叶变换。

已知周期信号 $f(t)$ 的指数傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} \quad \text{其中, } \dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

故其频谱函数为

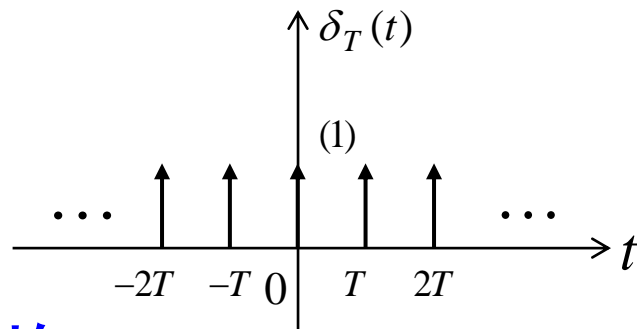
$$\begin{aligned} F.T.\{f(t)\} &= F.T.\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\Omega t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n F.T.\{e^{jn\Omega t}\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n \cdot 2\pi\delta(\omega - n\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi \dot{A}_n \delta(\omega - n\Omega) \end{aligned}$$

注意：此处的推导运用了傅里叶变化的线性特性，将在下一节中介绍。

这是一个冲激强度为 $\pi \dot{A}_n$ 的冲激序列

例：已知一个周期为 T 的冲激序列如图所示，求其频谱函数图。

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

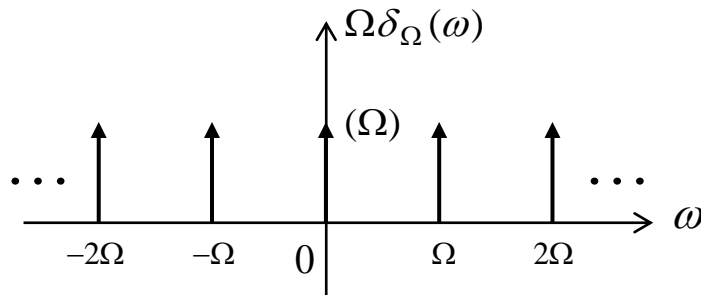


解：在区间 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 内， $\delta_T(t) = \delta(t)$ 故

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{2}{T} \cdot e^{-j0} = \frac{2}{T}$$

$$F(j\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta(\omega - n\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \delta_{\Omega}(\omega)$$

由上式可知，其频谱函数图仍然是一个冲激序列，冲激强度为 Ω



§ 3.8 傅里叶变换的性质

一、线性特性

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$, 且 a_1, a_2 为常数,
则 $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$

二、延时特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$,

则 $f(t - t_0) \leftrightarrow F(j\omega)e^{-j\omega t_0} = |F(j\omega)|e^{j[\varphi(\omega) - \omega t_0]}$

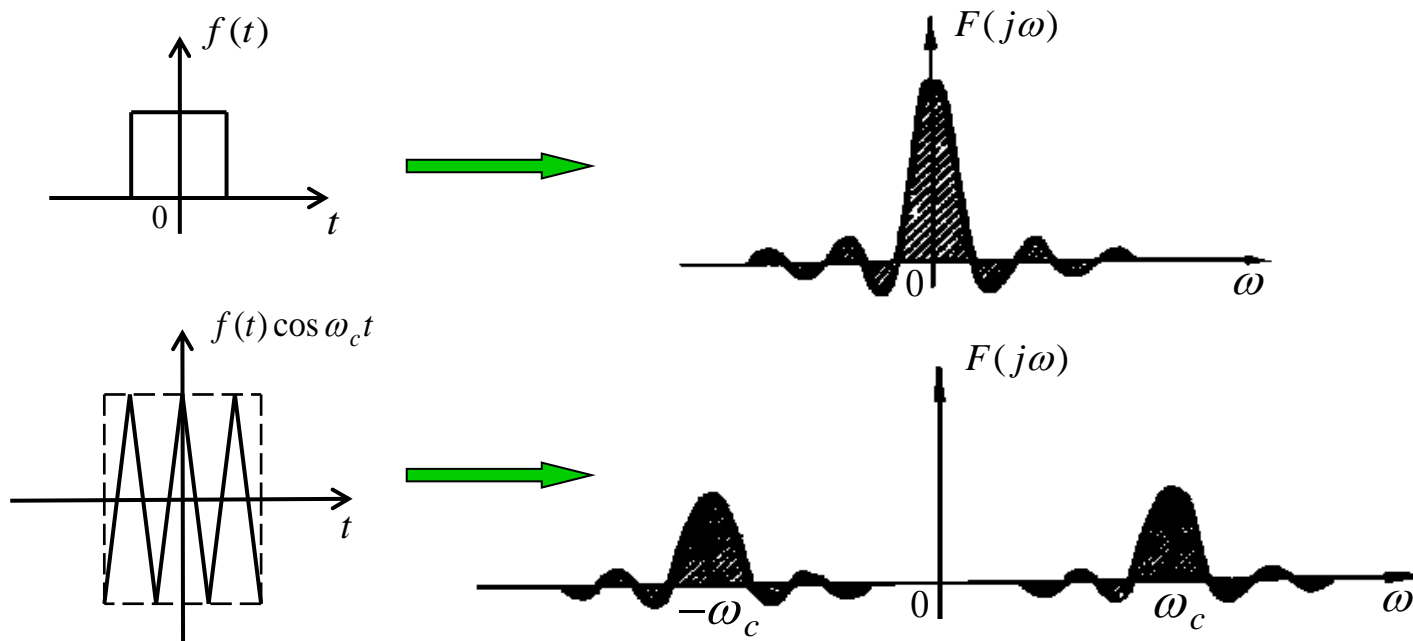
信号在时域中的时移，对应频谱函数在频域中产生相移，而幅度频谱函数保持不变。

三、移频特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ，则 $f(t)e^{j\omega_c t} \leftrightarrow F[j(\omega - \omega_c)]$

应用这个性质和欧拉公式，可以导出以下傅里叶变换，即

$$f(t) \cos \omega_c t \leftrightarrow \frac{1}{2} \{F[j(\omega + \omega_c)] + F[j(\omega - \omega_c)]\}$$

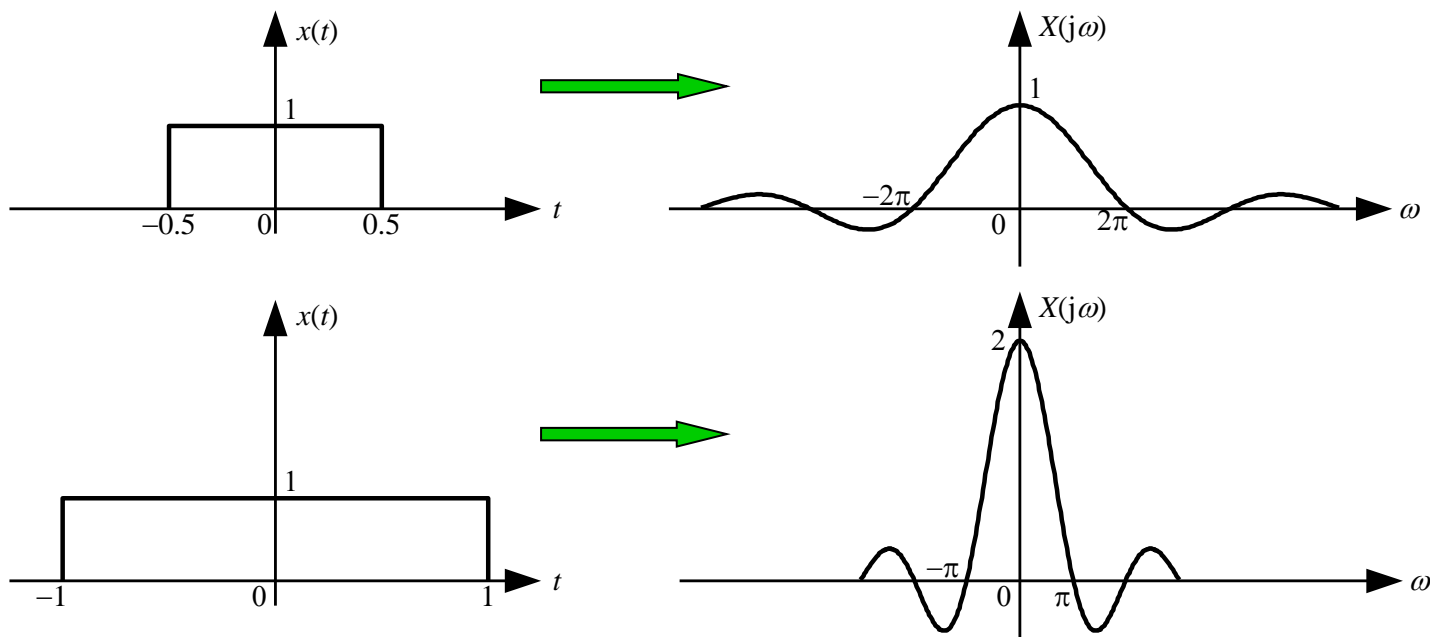


同理可得 $f(t) \sin \omega_c t \leftrightarrow \frac{j}{2} \{F[j(\omega + \omega_c)] - F[j(\omega - \omega_c)]\}$

四、尺度变换特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ，且 a 为实数，则 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$

时域中压缩，则频域中展宽；时域中展宽，则频域中压缩。



五、奇偶特性

通常处理的时间信号 $f(t)$ 都是实函数，故

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \\ &= R(\omega) + jX(\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

其中， $R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$, $X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$

偶函数

奇函数

$$|F(j\omega)| = [R^2(\omega) + X^2(\omega)]^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctan \left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right]$$

偶函数

奇函数

若信号 $f(t)$ 是实偶函数，则 $F(j\omega) = R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$

若信号 $f(t)$ 是实奇函数，则 $F(j\omega) = jX(\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$

六、对称特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

也就是说, 如果一个时间信号 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(j\omega)$, 则与 $F(j\omega)$ 形式相同的另一个时间信号 $F(jt)$ 的频谱函数是与 $f(t)$ 有着相同形式的 $2\pi f(-\omega)$ 。

例如, 当 $f(t) = \delta(t)$ 时, $F.T.\{\delta(t)\} = 1$

根据对称特性可得

$$F.T.\{1\} = 2\pi f(-\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

七、微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega)$, $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$

八、积分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$

当 $F(0) = 0$, 有 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$

九、频域的微分与积分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则

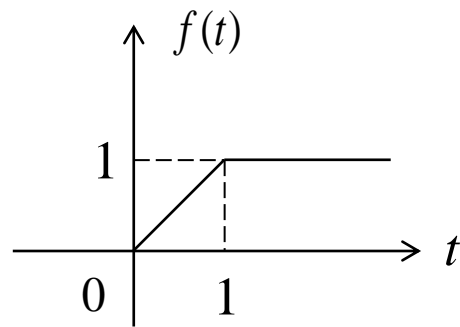
$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega}, \pi f(0)\delta(t) + j\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(j\Omega) d\Omega$$

十、卷积定理

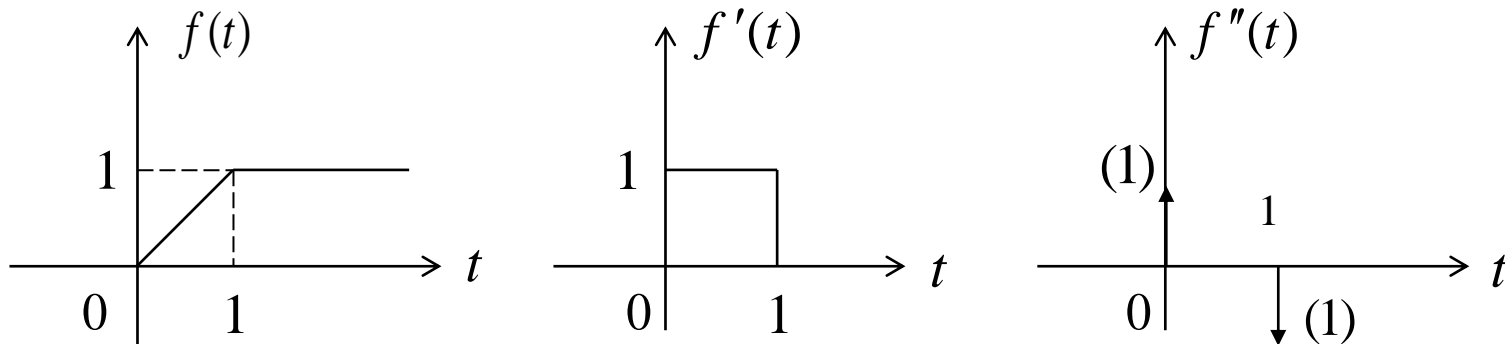
若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$, 则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega), \quad f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]$$

例：已知函数 $f(t)$ 如图所示，求其傅里叶变换。



解：对 $f(t)$ 进行两次微分可得



令 $f_1(t) = f'(t)$, $f_2(t) = f''(t)$ ，由图可知

$$f_2(t) = f''(t) = \delta(t) - \delta(t-1) \quad \text{故 } F_2(j\omega) = 1 - e^{-j\omega}, F_2(0) = 0$$

根据积分特性可得

$$F_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F_2(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})}{j\omega} = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} e^{-j\frac{\omega}{2}} = \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

且 $F_1(0) = 1$

$$F_1(j\omega) = \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}}, \quad F_1(0) = 1$$

再利用一次积分特性可得

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \pi F_1(0)\delta(\omega) + \frac{F_1(j\omega)}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) (-j \cdot e^{-j\frac{\omega}{2}}) \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

本章小结

基本概念： 正交函数集、傅里叶级数、傅里叶变换、频谱图、频带宽度、频谱(密度)函数。

基本运算： 周期信号的傅里叶级数、周期信号的频谱、非周期信号的傅里叶变换、非周期信号的频谱、常用信号的频谱函数、傅里叶变换性质的应用。