

2019-2020 学年第一学期期中考试

《工科数学分析基础 A I》A 答案

一、选择题：1—15 小题，每小题 3 分，共 45 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上

1. (C); 2. (A); 3. (B); 4. (B); 5. (C);
6. (C); 7. (A); 8. (D); 9. (C); 10. (A);
11. (A); 12. (C); 13. (D); 14. (C); 15. (D);

二、解答题：16—21 小题，共 55 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本题满分 10 分)

求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{\tan x - \sin x}$$

解 先分解分母：

$$\tan x - \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \sin x (1 - \cos x) \frac{1}{\cos x}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sin x$ 与 x 为等价无穷小， $1 - \cos x$ 与 $\frac{x^2}{2}$ 为等价无穷小，而 $\cos x \rightarrow 1$ ，因此原极限等于

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3} \quad (5 \text{ 分})$$

又因为

$$\begin{aligned} \sin x - \arctan x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right) \\ &= \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

所以原极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{\tan x - \sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} \quad (10 \text{ 分})$$

17. (本题满分 10 分)

求数列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{n\sqrt{n}} \cdot \cos \frac{2a}{n\sqrt{n}} \cdots \cos \frac{na}{n\sqrt{n}} \right)$$

解 记：

$$x_n = \cos \frac{a}{\frac{3}{n^2}} \cdot \cos \frac{2a}{\frac{3}{n^2}} \cdots \cos \frac{na}{\frac{3}{n^2}}$$

对上式取对数，得

$$\ln x_n = \ln \left(\cos \frac{a}{\frac{3}{n^2}} \cdot \cos \frac{2a}{\frac{3}{n^2}} \cdots \cos \frac{na}{\frac{3}{n^2}} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{ka}{\frac{3}{n^2}} \quad (2 \text{ 分})$$

利用等式 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ ，得

$$\cos \frac{ka}{\frac{3}{n^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 a^2}{n^3} + o\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 a^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5 \text{ 分})$$

根据 $\ln(1+x) = x + o(x)$ ，可得

$$\begin{aligned} \ln \cos \frac{ka}{\frac{3}{n^2}} &= \ln \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k^2 a^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = -\frac{1}{2} \frac{k^2 a^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{k^2 a^2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (7 \text{ 分})$$

于是

$$\sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{ka}{\frac{3}{n^2}} = -\frac{a^2}{2n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + o(1) = -\frac{a^2}{2n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + o(1)$$

由此即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = -\frac{a^2}{6} \quad (9 \text{ 分})$$

因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{n\sqrt{n}} \cdot \cos \frac{2a}{n\sqrt{n}} \cdots \cos \frac{na}{n\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e^{-\frac{a^2}{6}}. \quad (10 \text{ 分})$$

18. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有一阶连续导数, 且 $f(0)=0$, $f''(0)$ 存在. 若

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0, \end{cases}$$

求 $F'(x)$, 并证明 $F'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

【求解与证明】首先求 $F'(x)$, 当 $x \neq 0$ 时, 由求导法则易求 $F'(x)$, 而 $F'(0)$ 需按定义计算.

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2} \quad \frac{0}{0} \text{ 型} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0), \end{aligned} \quad (3 \text{ 分})$$

于是

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2} f''(0), & x = 0, \end{cases} \quad (5 \text{ 分})$$

然后讨论 $F'(x)$ 的连续性, 当 $x \neq 0$ 时由连续性的运算法则得到 $F'(x)$ 连续.

当 $x=0$ 时可按定义证明 $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = F'(0)$ 这是 $\frac{0}{0}$ 型极限问题, 可用洛必达法则,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f'(x)x - f'(0)x] - [f(x) - f'(0)x]}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f'(0)x}{x^2} = f''(0) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} \\ &= f''(0) - \frac{1}{2} f''(0) = \frac{1}{2} f''(0) = F'(0) \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

即 $F'(x)$ 在 $x=0$ 也连续, 因此, $F'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续. (10 分)

19. (本题满分 10 分)

设可微函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y=2$ 所确定, 试求 $f(x)$ 的极大与极小值。

解 方程两边同时对 x 求导, 得

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3 + 3y' = 0 \quad \text{①}$$

$$\text{即 } x^2 - 1 + (y^2 + 1)y' = 0, \text{ 从而 } y' = \frac{1-x^2}{y^2+1}$$

$$\text{令 } y' = \frac{1-x^2}{y^2+1} = 0, \text{ 得到驻点 } x_1=-1, x_2=1. \quad (2 \text{ 分})$$

代入原方程得:

$$-1 + [y(-1)]^3 + 3 + 3y(-1) = 2, [y(-1)]^3 + 3y(-1) = 0, \text{ 即得, } y(-1) = 0;$$

$$1 + [y(1)]^3 - 3 + 3y(1) = 2, \text{ 即得, } y(1) = 1, \quad (6 \text{ 分})$$

将①两边同时对 x 求导, 得

$$6x + 6y(y')^2 + 3y^2 \cdot y'' + 3y'' = 0$$

$$x_1=-1, \text{ 代入得 } -6 + 6y(-1)(y'(-1))^2 + 3y^2(-1) \cdot y''(-1) + 3y''(-1) = 0$$

$$-6 + 3y''(-1) = 0$$

$$x_2=1, \text{ 代入得 } 6 + 6y(1)(y'(1))^2 + 3y^2(1) \cdot y''(1) + 3y''(1) = 0$$

$$6 + 3y^2(1) \cdot y''(1) + 3y''(1) = 0, \quad 6 + 6y''(1) = 0 \quad (8 \text{ 分})$$

即得 $y''(-1) = 2 > 0$, $y(-1) = 0$ 是极小值; $y''(1) = -1 < 0$, $y(1) = 1$, 是极

大值。 (10 分)

20. (本题满分 10 分)

设 $y = \sin\left(\ln\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}\right)$ ($x > 0$), 求 y' 。

解:

$$y' = \cos\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x}{1+x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\ln\frac{x}{1+x^2}\right)' \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \cos\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x}{1+x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2}\right)' \quad (5 \text{ 分})$$

$$= \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \ln\frac{x}{1+x^2}\right) \cdot \left(\frac{2(1+x^2)}{x}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad (8 \text{ 分})$$

$$= \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} \cdot \cos\left(\ln\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}\right) \quad (10 \text{ 分})$$

21. (本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) < 0 < f(b)$ 。证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 且 $f(x) > 0$, 当 $x \in (\xi, b]$ 时。

【证明】定义 $E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$, 显然 E 非空有上界, 记 $\xi = \sup E$ 。
由上确界定义, 存在 $x_n \in E$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, 因此由连续可知 $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0$ 。 (5 分)

但若 $f(\xi) < 0$, 零点定理说明 ξ 的右边还有函数值为零, 与上确界矛盾。因此 $f(\xi) = 0$ 。 (8 分)

若存在 $x \in (\xi, b]$ 使得 $f(x) \leq 0$, 照样零点定理说明 ξ 的右边还有函数值为零, 矛盾。结论成立。 (10 分)