

# 大连理工大学大学物理作业及答案详解

## 作业 1 （静电场一）

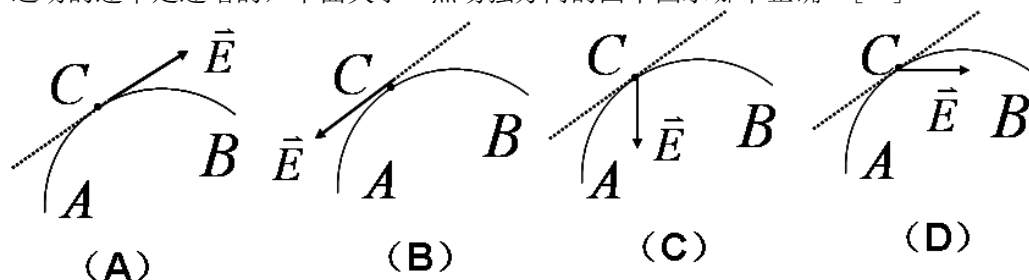
1. 关于电场强度定义式，下列说法中哪个是正确的？[ ]

- A. 场强  $\vec{E}$  的大小与试探电荷  $q_0$  的大小成反比。
- B. 对场中某点，试探电荷受力  $\vec{F}$  与  $q_0$  的比值不因  $q_0$  而变。
- C. 试探电荷受力  $\vec{F}$  的方向就是场强  $\vec{E}$  的方向。
- D. 若场中某点不放试探电荷  $q_0$ ，则  $\vec{F} = 0$ ，从而  $\vec{E} = 0$ 。

答案：【B】

[解] 定义。场强的大小只与产生电场的电荷以及场点有关，与试验电荷无关，A 错；如果试验电荷是负电荷，则试验电荷受的库仑力的方向与电场强度方向相反，C 错；电荷产生的电场强度是一种客观存在的物质，不因试验电荷的有无而改变，D 错；试验电荷所受的库仑力与试验电荷的比值就是电场强度，与试验电荷无关，B 正确。

2. 一个质子，在电场力作用下从 A 点经 C 点运动到 B 点，其运动轨迹如图所示，已知质点运动的速率是递增的，下面关于 C 点场强方向的四个图示哪个正确？[ ]



答案：【D】

[解]  $q\vec{E} = m\vec{a}$ ，质子带正电且沿曲线作加速运动，有向心加速度和切线加速度。

存在向心加速度，即有向心力，指向运动曲线弯屈的方向，因此质子受到的库仑力有指向曲线弯屈方向的分量，而库仑力与电场强度方向平行（相同或相反），因此 A 和 B 错；质子沿曲线 ACB 运动，而且是加速运动，所以质子受到的库仑力还有一个沿 ACB 方向的分量（在 C 点是沿右上方），而质子带正电荷，库仑力与电场强度方向相同，所以，C 错，D 正确。

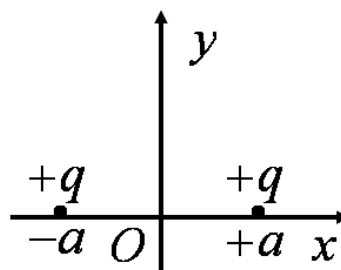
3. 带电量均为  $+q$  的两个点电荷分别位于 X 轴上的  $+a$  和  $-a$  位置，如图所示，则

Y 轴上各点电场强度的表示式为  $\vec{E} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，场强最大值的位置在  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：  $\vec{E} = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{j}$ ，  $y = \pm a/\sqrt{2}$

[解]  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$   $E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)}$

关于 y 轴对称：  $E_x = 0, E_y = 2E_1 \cos\theta$

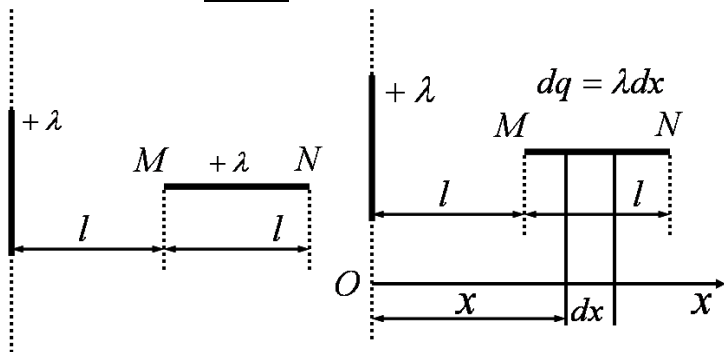


$$\therefore \vec{E} = E_y \vec{j} = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{j}$$

沿  $y$  轴正向的场强最大处  $\frac{dE}{dy} = 0$

$$\frac{dE}{dy} \propto (a^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}y(a^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}} \times 2y \quad y = a/\sqrt{2} \quad y = \pm a/\sqrt{2} \text{ 处电场最强。}$$

4. 如图所示，在一无限长的均匀带点细棒旁垂直放置一均匀带电的细棒  $MN$ 。且二棒共面，若二棒的电荷线密度均为  $+\lambda$ ，细棒  $MN$  长为  $l$ ，且  $M$  端距长直细棒也为  $l$ ，那么细棒  $MN$  受到的电场力为\_\_\_\_\_。



答案:  $\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \ln 2$ , 方向沿  $\overrightarrow{MN}$

[解] 坐标系建立如图:  $MN$  上长为  $dx$  的元电荷  $dq = \lambda dx$  受力  $dF = Edq$ 。

无限长带电直线场强  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$ , 方向: 沿  $x$  轴正向。

$$\therefore F = \int dF = \int_l^{2l} \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 x} dx = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \ln 2; \text{ 方向沿 } x \text{ 轴正向。}$$

5. 用不导电的细塑料棒弯成半径为  $R$  的圆弧，两端间空隙为  $l$  ( $l \ll R$ )，若正电荷  $Q$  均匀分布在棒上，求圆心处场强的大小和方向。

解: 设棒上电荷线密度为  $\lambda$ ，则:  $\lambda = \frac{Q}{2\pi R - l}$ ,

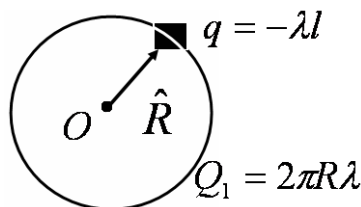
根据叠加原理，圆心处场强可以看成是半径为  $R$ ，电荷线密度为  $\lambda$  的均匀带电圆环(带电量为  $Q_1 = 2\pi R\lambda$ ) 在圆心处产生的场强  $\vec{E}_1$  与放在空隙处长为  $l$ ，电荷线密度为  $-\lambda$  的均匀带电棒(可以看成是点电荷  $q = -\lambda l$ ) 在圆心产生的场强  $\vec{E}_2$  的叠加。即:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

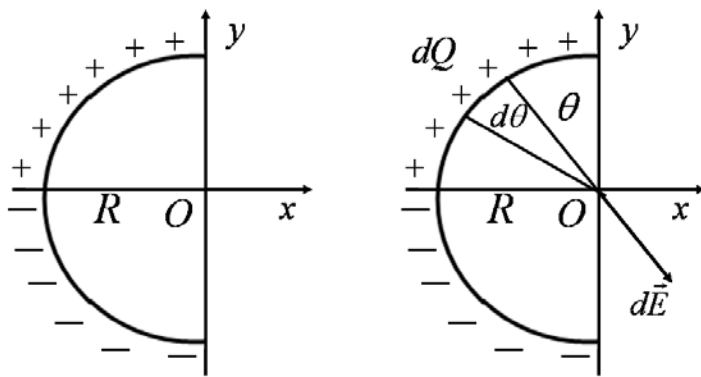
$$\because \vec{E}_1 = 0, \therefore \vec{E}_0 = \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} (-\hat{R})$$

$$\vec{E}_0 = \frac{-\lambda l}{4\pi\epsilon_0 R^2} (-\hat{R}) = \frac{lQ}{4\pi\epsilon_0 R^2 (2\pi R - l)} \hat{R}$$

(方向从圆心指向空隙处)。



6. 如图所示，将一绝缘细棒弯成半径为  $R$  的半圆形，其上半段均匀带有电荷  $Q$ ，下半段均匀带有电荷  $-Q$ ，求半圆中心处的电场强度。



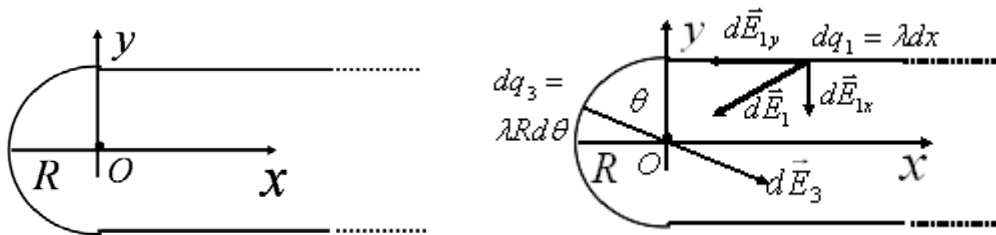
解：按题给坐标，设线密度为  $\lambda$ ，有： $\lambda = Q/(\frac{\pi}{2}R)$ 。上下段分割，任意  $dQ$  在圆心产生

$d\vec{E}_{+(-)}$  对称性： $E_{0x} = 0, E_o = E_{oy} = 2E_{+y} (2E_{-y})$ ,  $dE_{+y} = -dE_+ \cos \theta$

$$\therefore E_o = 2 \int -dE_+ \cos \theta = -2 \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \lambda R d\theta = -\frac{Q}{\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

方向沿  $y$  轴负方向。

7. 线电荷密度为  $\lambda$  的“无限长”均匀带电细线，弯成图示形状，若圆弧半径为  $R$ ，试求  $O$  点的场强。



**答案：**按题给坐标， $O$  点的场强可以看作是两个半无限长直导线、半圆在  $O$  点产生场强的叠加。即： $\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

由对称性， $\vec{E}_1$  和  $\vec{E}_2$  在  $y$  方向的矢量和为零；在  $x$  方向矢量和是单根的 2 倍。

上半无限长导线取电荷元  $dq_1 = \lambda dx$ ，它在  $O$  点的场强沿  $x$  方向的分量：

$$dE_{1x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdx}{(R^2 + x^2)} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$E_{1x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{\lambda dx}{(R^2 + x^2)} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{\lambda d(R^2 + x^2)}{(R^2 + x^2)} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$E_{1x} + E_{2x} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}, \quad \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{i}$$

由对称性， $\vec{E}_3$  在  $y$  方向的分量为零。

在圆弧上取电荷元  $dq_3 = \lambda R d\theta$ ，它在  $O$  点的场强的  $x$  方向分量，

$$dE_{3x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cos \theta$$

$$E_{3x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cos\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}, \quad \vec{E}_3 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \vec{i}$$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0$$

8. 一个金属球带上正电荷后, 质量有所增大? 减小? 不变?

**答案:** 理论上说金属带正电后因失去电子, 质量有所减少, 但测量很困难。

9. 以点电荷为中心, 半径为  $R$  的球面上, 场强的大小一定处处相等吗?

**答案:** 如果点电荷是静止孤立的且周围介质均匀分布, 则半径为  $R$  的球面上, 场强大小一定处处相等, 在其它情形, 不一定处处相等。比如, 点电荷周围还有其它的带电体, 则球面上的场强应是各场强的叠加, 可能不处处相等。

## 作业 2

1. 如图所示, 把点电荷  $+q$  从高斯面外  $P$  移到  $R$  处 ( $OP = OR$ ),

$O$  为  $S$  上一点, 则 [ ]

A. 穿过  $S$  的电通量  $\phi_e$  发生改变,  $O$  处  $\vec{E}$  变

B.  $\phi_e$  不变,  $\vec{E}$  变。 C.  $\phi_e$  变,  $\vec{E}$  不变。 D.  $\phi_e$  不变,  $\vec{E}$  不变。

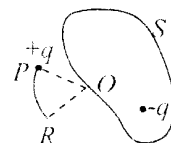


图 2-1

**答案: [B]**

[解] 闭合面外的电荷对穿过闭合面的电通量无贡献, 或者说, 闭合面外的电荷产生的电场, 穿过闭合面的电通量的代数和为零; 移动点电荷, 会使电荷重新分布, 或者说改变电荷的分布, 因此改变了  $O$  点的场强。

2. 半径为  $R$  的均匀带电球面上, 电荷面密度为  $\sigma$ , 在球面上取小面元  $\Delta S$ , 则  $\Delta S$  上的电荷受到的电场力为 [ ]。

A. 0      B.  $\frac{\sigma^2 \Delta S}{2\epsilon_0}$       C.  $\frac{\sigma^2 \Delta S}{\epsilon_0}$       D.  $\frac{\sigma^2 \Delta S}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

**答案: [B]**

解: 应用高斯定理和叠加原理求解。如图所示。

面元  $\Delta S$  上的电荷受到的库仑力是其他电荷在面元  $\Delta S$  处产生的总电场强度  $\vec{E}_1$  与面元  $\Delta S$  上的电荷量  $\Delta Q = \sigma \Delta S$  的乘积:

$$\vec{F}_1 = \Delta Q \vec{E}_1 = \sigma \Delta S \vec{E}_1。$$

面元  $\Delta S$  处电场强度  $\vec{E}$  是面元  $\Delta S$  电荷在此产生的电场强度  $\vec{E}_2$  与其他电荷在面元  $\Delta S$  处产生的总电场强度  $\vec{E}_1$  的矢量和,  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ 。

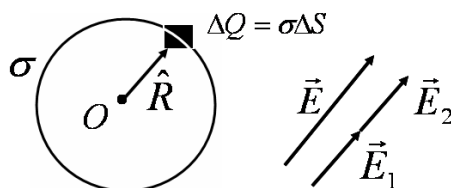
首先, 由高斯定理求得全部球面分布电荷在面元  $\Delta S$  处产生的总电场强度

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{R}$$

其次, 面元  $\Delta S$  上的电荷量  $\Delta Q = \sigma \Delta S$  对于面元  $\Delta S$  来说, 相当于无限大带电平面, 因此, 面元  $\Delta S$  上的电荷量  $\Delta Q = \sigma \Delta S$  在面元  $\Delta S$  处产生的电场强度为

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{R}$$

由叠加原理, 其他电荷在面元  $\Delta S$  处产生的总电场强度为



$$\vec{E}_1 = \vec{E} - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{R}$$

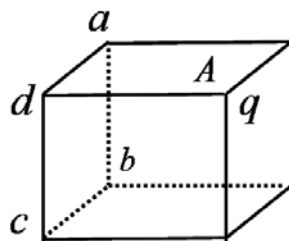
面元  $\Delta S$  上的电荷量  $\Delta Q = \sigma \Delta S$  受到的库仑力为

$$\vec{F}_1 = \Delta Q \vec{E}_1 = \sigma \Delta S \vec{E}_1 = \sigma \Delta S \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{R} = \Delta S \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{R}$$

注：本题可以用叠加原理直接进行计算，太麻烦。

3. 如图所示，一个带电量为  $q$  的点电荷位于立方体的  $A$  角上，则通过侧面  $abcd$  的电场强度通量等于 [ ]。

- A.  $\frac{q}{6\epsilon_0}$       B.  $\frac{q}{12\epsilon_0}$   
C.  $\frac{q}{24\epsilon_0}$       D.  $\frac{q}{48\epsilon_0}$



答案：【C】

[解]：如果以  $A$  为中心，再补充上 7 个相同大小的立方体，则组成一个边长为小立方体边长 2 倍大立方体，点电荷  $q$  位于大立方体的中心。

由高斯定理，穿过大立方体表面的电通量为  $q/\epsilon_0$ ，大立方体的 6 个正方形表面相对于点电荷  $q$  是对称的，所以，穿过大立方体一个侧面的电通量是总电通量的  $1/6$ ，即穿过大立方体一个侧面（可以考虑  $abcd$  所在的侧面）的电通量为  $q/6\epsilon_0$ 。

大立方体一个侧面，是由 4 个小立方体一个侧面组成的，而这 4 个小立方体侧面对于点电荷  $q$  也是对称的，所以，穿过小立方体一个侧面的电通量是穿过大立方体一个侧面的电通量的  $1/4$ ，即穿过小立方体一个侧面的电通量为  $q/24\epsilon_0$ 。

4. 一半径为  $R$  长为  $L$  的均匀带电圆柱面，其单位长度带电量为  $\lambda$ ，在带电圆柱的中垂面上有一点  $P$ ，它到轴线距离为  $r$  ( $r > R$ )，则  $P$  点的电场强度的大小 = \_\_\_\_\_，当  $r \ll L$  时， $E =$  \_\_\_\_\_，当  $r \gg L$  时， $E =$  \_\_\_\_\_。

解：当  $r \ll L$  时，在柱体中垂面附近，带电柱体可以被看作无限长。以带电柱体的轴为对称轴，过  $P$  点作一个高为  $l$  ( $l \ll L$ ) 的柱面为高斯面，如图所示。则由对称性，柱面高斯面的上下底面处电场强度处处与高斯面的法线垂直，电通量为零；柱面高斯面的侧面上，电场强度近似处处相等，并与高斯面的法线方向平行。则穿过高斯面的总电通量为

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r l E \end{aligned}$$

而高斯面包围的电荷量为

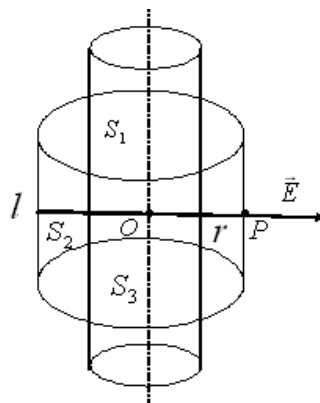
$$Q = \lambda l$$

由高斯定理，得到

$$2\pi r l E = \lambda l / \epsilon_0, \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

如果  $r \gg L$ ，则带电柱面体可以被看作点电荷，则

$$E = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



注：本题可以使用电场强度叠加原理求解。即将柱面电荷分布微分成线电荷分布。

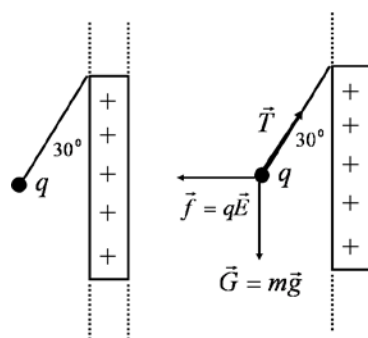
5. 半径为  $R$  的不均匀带电球体，电荷体密度分布为  $\rho = Ar$ ，式中  $r$  为离球心的距离 ( $r \leq R$ )， $A$  为常数，则球体上的总电量  $Q = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

〔解〕取半径为  $r$ 、厚度为  $dr$  的球壳。认为球壳内电荷分布是均匀的

$$dQ = 4\pi r^2 dr \rho(r) = 4\pi A r^3 dr$$

$$Q = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

$$= \pi A \int_0^R 4r^3 dr = \pi R^4 A$$



6. 如图所示，一质量  $m = 1.6 \times 10^{-6} \text{ kg}$  的小球，带电量  $q = 2 \times 10^{-11} \text{ C}$ ，悬于一丝线下端，丝线与一块很大的带电平面成  $30^\circ$  角。若带电平面上电荷分布均匀， $q$  很小，不影响带电平面上的电荷分布，求带电平面上的电荷面密度。

解：方法一：

受力分析：小球在重力  $\vec{G} = m\vec{g}$ （垂直方向），绳中张力  $\vec{T}$ （与带电平面成  $30^\circ$  角）及静电  $\vec{f} = q\vec{E}$ （水平方向）的共同作用下而处于受力平衡状态。其中  $E$  为无限大均匀带电平面（电荷面密度为  $\sigma$ ）产生的均匀电场， $E = \sigma / (2\epsilon_0)$ ，方向应水平向左

$$T \cos \theta - mg = 0 \quad qE - T \sin \theta = 0$$

$$\therefore \sigma = \frac{2\epsilon_0 m g \tan \theta}{q} = \frac{2 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1.6 \times 10^{-6} \times 9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{2 \times 10^{-11}} = 8.0 \times 10^{-6} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

方法二：利用高斯定理

选择一个柱面为高斯面，柱面的轴垂直于带电平面，柱面包括带电小球并穿过带电平面。由于小球的带电量相对平面的带电量很小则小球的电量  $q$  在高斯面中忽略不计。

7. 大小两个同心球面，半径分别为  $R_1, R_2$  ( $R_2 > R_1$ )，小球上带有电荷  $q$  ( $q > 0$ )，大球上带有电荷  $Q$  ( $Q > 0$ )。试分别求出  $r < R_1, r > R_2, R_1 < r < R_2$  时，离球心  $O$  为  $r$  处的电场强度。

解：由于电荷、电场分布具有球对称性，可利用高斯定理求场强。

取高斯面  $S_1, S_2, S_3$  如图所示。

$$\oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = 0 \quad (r < R_1), \quad E_1 4\pi r^2 = 0$$

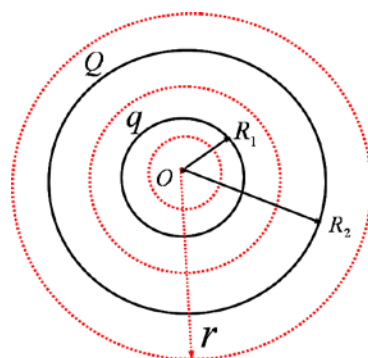
$$\vec{E}_1 = 0 \quad (r < R_1)$$

$$\oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad E_2 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (R_2 > r > R_1)$$

$$E_3 4\pi r^2 = \frac{q+Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (r > R_2)$$



8. 两个无限长同轴圆柱面，半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ )，带有等值异号电荷，每单位

长度的电量为  $\lambda$  (即电荷线密度)。试分别求出  $r < R_1, r > R_2, R_1 < r < R_2$  时, 离轴线为  $r$  处的电荷密度。

**解:** 由于电荷、电场分布具有轴对称性, 可利用高斯定理求场强, 取长为  $L$  的同轴柱面加上、下底面为高斯面。当高斯柱面的半径  $r$  满足:

$$r < R_1 \text{ 时: } \oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = 0,$$

$$E_1 \cdot 2\pi l = 0,$$

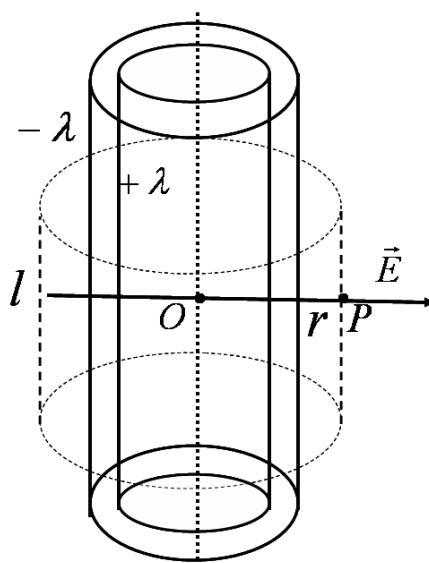
$$\vec{E}_1 = 0$$

$$R_2 > r > R_1 \text{ 时: } \oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0},$$

$$E_2 \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0},$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{r}$$

$$r > R_2 \text{ 时: } \oint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = \frac{\lambda - \lambda}{\epsilon_0} = 0, \quad \vec{E}_3 = 0$$



9. 半径为  $R$ 、电荷体密度为  $\rho$  的均匀带电球体内部, 有一个不带电的球形空腔, 空腔半径为  $R'$ , 其中心  $O'$  到球心  $O$  的距离为  $a$ , 如图所示, 求  $OO'$  的延长线上距球心  $O$  为  $r$  处的电场强度。

**解:** 利用场强叠加原理, 所求场强可看成半径  $R$ , 电荷密度  $\rho$  的均匀带电球体与半径  $R'$ , 电荷密度  $-\rho$  的均匀带电球体 (球心位于  $O'$  处) 产生场强的叠加,

$$\vec{E}_P = \vec{E} + \vec{E}'.$$

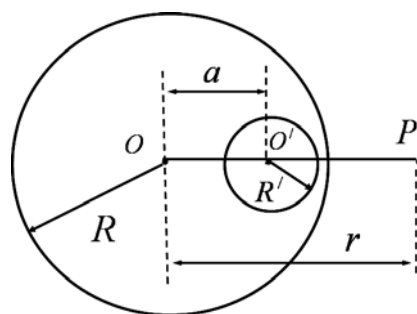
这两球各自产生的场强具有球对称性, 利用高斯定理, 有

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{E}' = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \hat{r}' = \frac{\frac{4}{3}\pi R'^3 \cdot \rho}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \hat{r}' \quad \vec{r}' = \overrightarrow{O'P} \quad r' = r - a$$

$$\hat{r} = \hat{r}',$$

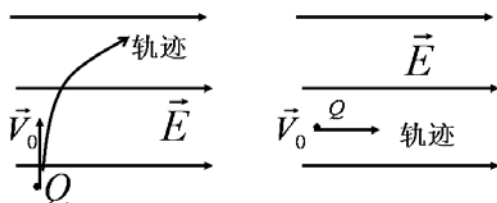
$$\vec{E}_P = \vec{E} + \vec{E}' = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} - \frac{\rho R'^3}{3\epsilon_0 (r-a)^2} \hat{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[ \frac{R^3}{r^2} - \frac{R'^3}{(r-a)^2} \right] \frac{\vec{r}}{r}$$



10. 如果点电荷  $Q$  只受电场力作用而运动, 其轨迹是否就是电场线?

**答案:** 不一定。

例如, 在均匀电场中, 如果正电荷以垂直于电场方向的初速度  $Q$  进入电场, 带电粒子的运动轨迹是抛物线, 与电场线不一致; 当带电粒子初速度沿着电场强度的方向进入电场时, 带电粒子的运动轨迹为直线, 而且沿着电场强度方向,



运动轨迹与电场线方向一致。

11. 如果高斯面上  $E$  处处为零, 能否肯定高斯面内一定没有净电荷?

**答案:** 能肯定。

$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{内}} / \epsilon_0$ ,  $S$  面上  $E=0$ , 给出电通量为 0, 因此  $Q_{\text{内}} = 0$ , 即高斯面内的电荷代数和为零, 也就是说, 高斯面内正负电荷等量。

如果高斯面内的正负电荷分开, 这也称为高斯面内存在净电荷, 则由于正负电荷分布的不均匀性, 必将导致高斯面上电场强度不为零。

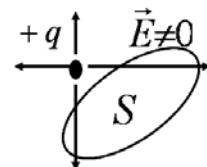
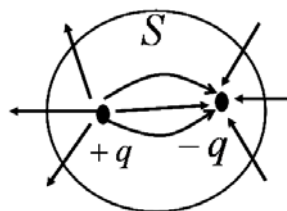
12. 如果高斯面内没有净电荷, 能否断定高斯面上  $E$  一定处处为零?

**答案:** 不能断定。

例如, 点电荷的电场处处非 0, 任取不包含点电荷的闭合曲面, 则高斯面内没有净电荷, 但高斯面上电场强度不能处处为零。

13.  $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i$  表明静电场具有什么性质?

**答案:** 静电场是有源场。电场线由正电荷出发, 终止于负电荷。



### 作业 3

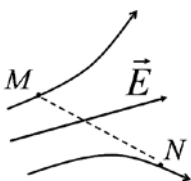
1. 电场中某区域内电场线如图所示, 将一点电荷从  $M$  移到  $N$  点则必有 [ ]。

A. 电场力的功  $A_{MN} > 0$

B. 电势能  $W_M > W_N$

C. 电势  $U_M > U_N$

D. 电势  $U_M < U_N$



**答案: 【C】**

解: 由于静电场的无旋性, 电场强度的线积分与路径无关, 由  $M$  点到  $N$  点的线积分 (即  $M$  点与  $N$  点之间的电势差), 可以取任意路径。

现取积分路径为: 由  $M$  点到  $O$  点, 处处与电场线 (电场强度方向) 垂直; 由  $O$  点到  $N$  点, 处处沿着电场线。则

$$U_M - U_O = \int_M^O \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

$$U_O - U_N = \int_O^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_O^N E dl > 0$$

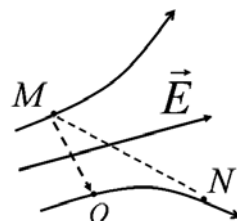
因此,  $M$  点与  $N$  点的电势差为

$$U_M - U_N = \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = (U_M - U_O) + (U_O - U_N) = \int_M^O \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_O^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_O^N E dl > 0$$

所以, C 正确, D 错误。

由  $M$  点到  $O$  点, 电场力所作的功为 (设移动电荷量为  $q$ )

$$A_{MN} = q(U_M - U_N) = q \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l}$$





尽管  $\int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$ ，但不知  $q$  的正负，无法判断  $A_{MN}$  的正负。当  $q > 0$ ，即移动正电荷时，电场力作功为正， $A_{MN} > 0$ ；如果移动的是负电荷，电场力作功为负， $A_{MN} < 0$ 。

电势能是静电场中的带电粒子与电场共同拥有的能量。定义为：点电荷  $q$  在静电场中  $M$  点时，系统拥有的电势能为：从  $M$  点移动电荷  $q$  到电势零点的过程中，电场力所作的功，

$W_M = A_{M \rightarrow 0} = q \int_M^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = qU_M$ ，静电势能等于电荷量与电荷所在点电势的乘积。电场力所作的功等于静电势能的减少，静电场中  $M$  点与  $N$  点系统的电势能之差，等于移动点电荷  $q$  由  $M$  点到  $N$  点的过程中电场力所作的功

$$W_M - W_N = A_{M \rightarrow N} = q \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(U_M - U_N)$$

尽管  $U_M - U_N > 0$ ，但电势能之差还与电荷  $q$  有关，不能判断  $W_M - W_N$  的正负。

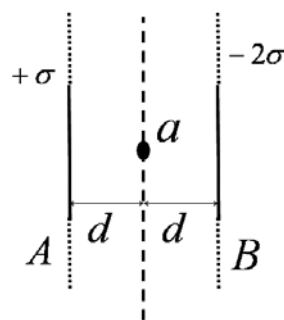
2. 图中， $A$ 、 $B$  是真空中两块相互平行的无限大均匀带电平面，电荷面密度分别为  $+\sigma$  和  $-2\sigma$ ，若将  $A$  板选作电势零点，则图中  $a$  点的电势是 [ ]。

A.  $\frac{3\sigma d}{2\epsilon_0}$

B.  $\frac{-\sigma d}{\epsilon_0}$

C.  $\frac{-3\sigma d}{2\epsilon_0}$

D.  $\frac{3\sigma d}{\epsilon_0}$



答案：【C】

解：板间电场为  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0}$ 。  $U_a - U_A = -\int_0^d E dl = -\frac{3\sigma d}{2\epsilon_0}$

解：建立直角坐标系，如图。

无限大带电平板  $A$ 、 $B$  在两板间的电场强度分别为

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}, \quad \vec{E}_2 = \frac{-2\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{i}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}$$

两板间电场强度为

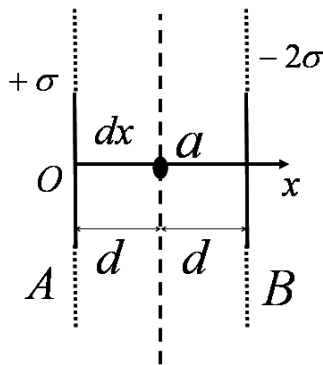
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i} = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i}$$

电场强度线积分的积分路径为：由板间中点  $a$  指向坐标原点  $O$ （板  $A$ ），则

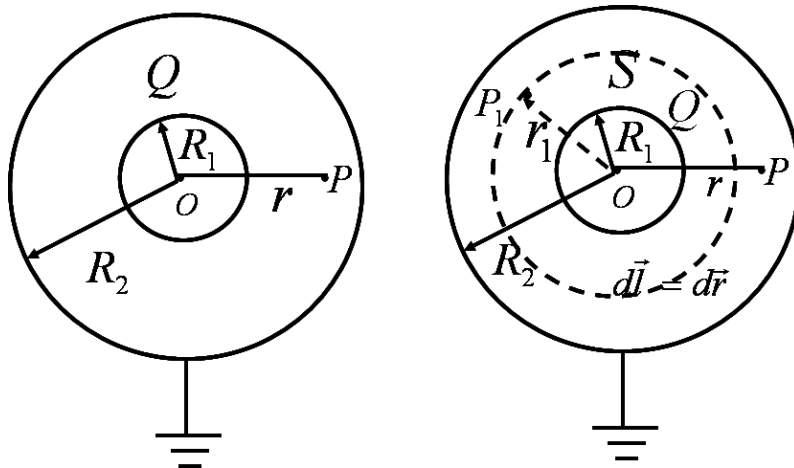
$$\begin{aligned} U_{ao} = U_a - U_o &= \int_a^o \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^o \vec{E} \cdot (-dx\vec{i}) = \\ &= \int_d^0 \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} \cdot (-dx\vec{i}) = -\int_d^0 \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} dx = \frac{3\sigma d}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

因为  $U_o = 0$ ，所以

$$U_a = \frac{3\sigma d}{2\epsilon_0}$$



3. 如图所示，两个同心球面。内球面半径为  $R_1$ ，均匀带电荷  $Q$ ；外球面半径为  $R_2$ ，是一个非常薄的导体壳，原先不带电，但与地相连接。设地为电势零点，求在两球面之间、距离球心为  $r$  处的  $P$  点的电场强度及电势。



解：取过点  $P_1$ 、半径  $r_1$  ( $R_1 < r_1 < R_2$ ) 的同心球面为高斯面  $S$ ， $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_0 / \epsilon_0$ ，得到

$$4\pi r_1^2 E = Q / \epsilon_0 \quad (R_1 < r_1 < R_2), \quad \text{电场强度为 } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{r}.$$

电势

$$U_P = \int_r^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \hat{r} \cdot d\vec{r}_1 = \int_r^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} dr_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

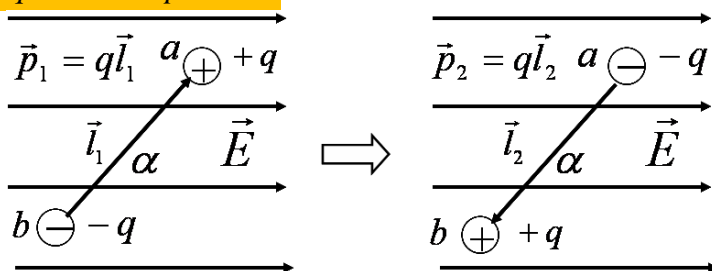
4. 一偶极矩为  $\vec{p} = q\vec{l}$  的电偶极子放在场强为  $\vec{E}$  的均匀外电场中， $\vec{p}$  与  $\vec{E}$  的夹角为  $\alpha$ 。求此电偶极子绕垂直于  $(\vec{p}, \vec{E})$  平面的轴沿  $\alpha$  增加的方向转过  $180^\circ$  的过程中，电场力做的功。

解：设偶极子正电荷初始位置为  $a$ ，负电荷初始位置为  $b$ 。转动后正电荷在  $b$  处，负电荷在  $a$  处。如图，所作的功相当于，把正电荷  $+q$  从  $a$  点移到  $b$  点电场力做功  $A(+)$  与把负电荷  $-q$  从  $b$  点移到  $a$  点电场力做功  $A(-)$  之和。

$$A = A(+) + A(-) = q(U_a - U_b) + (-q)(U_b - U_a) = 2q(U_a - U_b) = 2q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{由于 } \vec{p} = q\vec{ba}, \quad 2q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2q\vec{E} \cdot \int_a^b d\vec{l} = 2q\vec{E} \cdot \vec{ab} = -2qE\vec{ba} \cos \alpha = -2pE \cos \alpha$$

故有  $A = 2q\vec{E} \cdot \vec{ab} = -2pE \cos \alpha$ 。（注意电偶极子的方向是由负电荷指向正电荷）



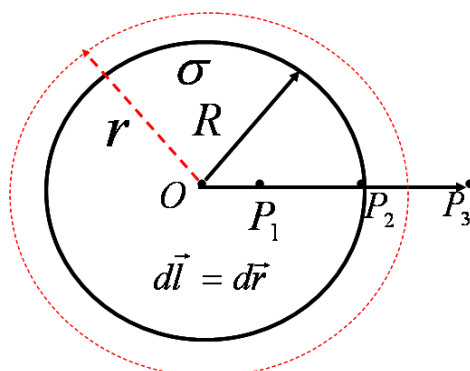
5. 均匀带电球面，半径为  $R$ ，电荷面密度为  $\sigma$ 。试求离球心为  $r$  处一点  $P$  的电势。

设 (1)  $P$  点在球内。(2)  $P$  点在球面上。(3)  $P$  点在球面外。

解：由于球对称性，由高斯定理求得场强分布

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{内}} &= 0 \quad (r < R); \\ \vec{E}_{\text{外}} &= \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r > R) \end{aligned}$$

选取无限远处为电势零点，则



$$U_{\text{外}} = \int_r^{\infty} \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^{\infty} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$$

$(r > R)$

$$U_{\text{球面}} = \int_R^{\infty} \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} R$$

$$U_{\text{内}} = \int_{r'}^R \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{r} + U_{\text{球面}} = U_{\text{球面}}$$

注意：零势面是无穷远。

6. 电荷  $Q$  均匀分布在半径为  $R$  的球体内，试求离球心  $r$  处 ( $r < R$ ) 的电势。

解：电荷体密度

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

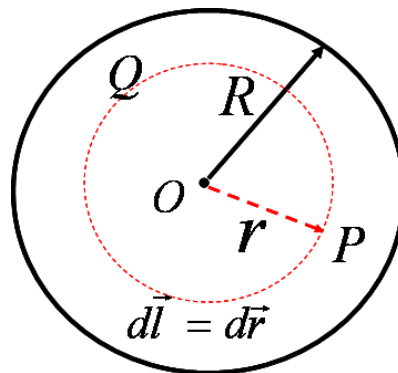
由于电场分布具有球对称性，  
利用高斯定理可得

$$\vec{E}_{\text{内}} = \frac{Q_{\text{内}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r} \quad ?$$

$(r < R)$

$$\vec{E}_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$(r > R)$



$$U_{\text{内}} = \int_r^R \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{l} + \int_R^{\infty} \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r} \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^R \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr + \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} [3R^2 - r^2]$$

7. (不用看!) 一圆盘，半径  $R = 8.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，均匀带电，面密度  $\sigma = 2.0 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$

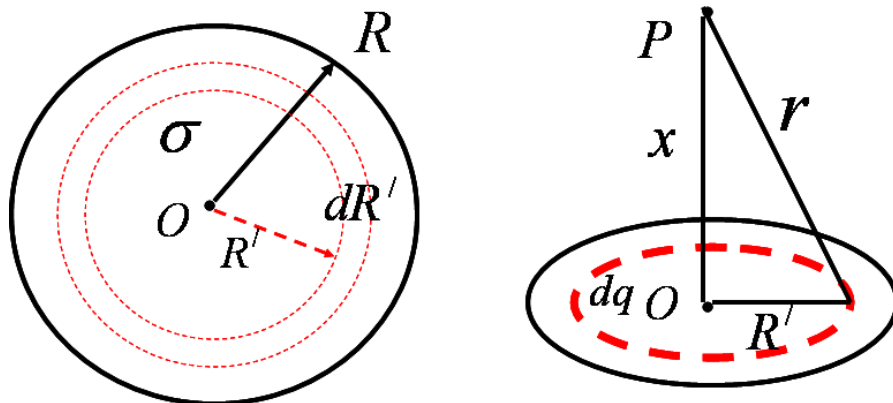
(1) 求轴上任一点的电势 (该点与盘心的距离为  $x$ )。

(2) 由场强与电势梯度的关系，求该点电场强度。

(3) 计算  $x = 6.0 \times 10^{-2} \text{ m}$  的电势和场强。

解：(1) 把圆盘无限分割成许多圆环，其中任一圆环半径为  $R'$ ，宽为  $dR'$ ，该圆环上的电荷量为

$$dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi R' dR'$$



此圆环可以被看作无限细带电圆环，在  $P$  点产生的电势为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma \cdot 2\pi R' dR'}{4\pi\epsilon_0 r} \quad r = \sqrt{R'^2 + x^2}$$

由电势叠加原理，有

$$U_P = \int dU = \int_0^R \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R' dR'}{r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{R'^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{R^2 + x^2} - x]$$

(2) 由对称性知，电场沿  $x$  方向，

$$\vec{E} = E_x \vec{i} = -\frac{dU}{dx} \vec{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right] \vec{i}$$

$$(3) \quad \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 1.13 \times 10^6 \text{ V/m}. \quad x = 6.0 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad U = 4.5 \times 10^4 \text{ V} \quad E = 4.5 \times 10^5 \text{ (V/m)}$$

8. 半径为  $R$  的圆弧  $ab$ ，所对圆心角  $\alpha$ ，如图所示，圆弧均匀带正电，电荷线密度为  $\lambda$ 。试求圆弧中心处的电场强度和电势。

**解：**无限分割带电圆弧为许多电荷元，其中任一电荷元  $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$  可看成点电荷，

它在  $O$  点产生的场强为  $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ ，电势为  $dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$ ，

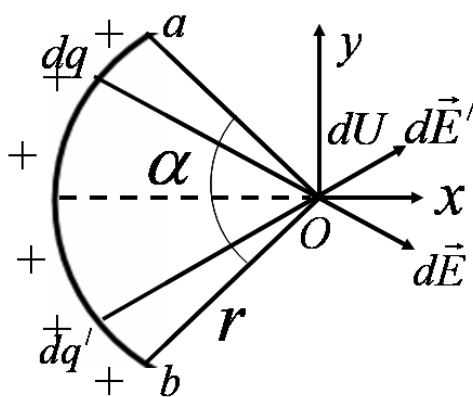
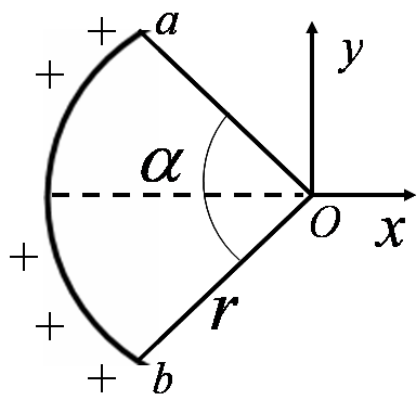
以  $x$  轴为对称轴，选另一电荷元  $dq'$  与  $dq$  对称， $dq' = dq$ ，则有  $dE' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ ，

由于对称性  $dE_y + dE'_y = 0$ ， $dE_x + dE'_x = 2dE_x = \lambda d\theta / (2\pi\epsilon_0 R)$

$O$  点总的场强和电势为所有点电荷在该点产生的场强和电势的叠加。

$$E_{Ox} = 2 \int dE_x = 2 \int dE \cos \theta = \int_0^{\alpha/2} \frac{\lambda d\theta}{2\pi\epsilon_0 R} \cos \theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \frac{\alpha}{2} \vec{i} \quad U_o = 2 \int dU = \int_0^{\alpha/2} \frac{\lambda d\theta}{2\pi\epsilon_0} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \alpha$$



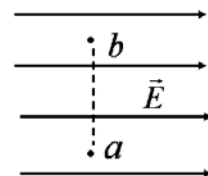
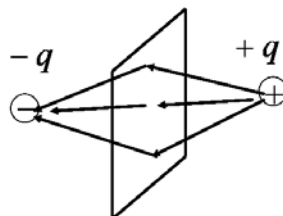
9.  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  表明静电场具有什么性质？

答：静电场是无旋场。静电场中，任意两点之间电场强度的线积分与路径无关。静电场中，任意闭合回路电场强度的线积分为零。可以引入电势的概念。

10. 电势为零的空间场强一定为零吗？

答：不一定。电势的零点是人规定的，有意义的是电势差。电势差是电场强度的线积分，线积分为零，不等于电场强度为零。

反例：如果取无限远处电势为零，则两个等量异号电荷的中垂面上各点电势为 0，电场不为 0（除电荷连线中点）。



再如，均匀电场  $\vec{E}$  中，连线垂直于电场强度方向的两点 a 和 b，电势差为零，但电场强度不为零。

11. 电场强度为零的空间电势一定为零吗？

答：不一定。电势的零点是人规定的。

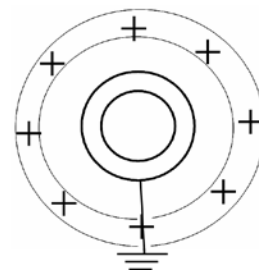
如，均匀带电球面内部各点场强为 0，电势不为 0。

但是，电场强度为零，线积分一定为零，空间各点电势相等，电势差为零。例如，处于静电平衡的导体内，电场强度为零，导体是等势体。

## 作业 4

1. 如图所示，两个同心金属球壳，它们离地球很远，内球壳用细导线穿过外球壳上的绝缘小孔与地连接，外球壳上带有正电荷，则内球壳上[ ]。

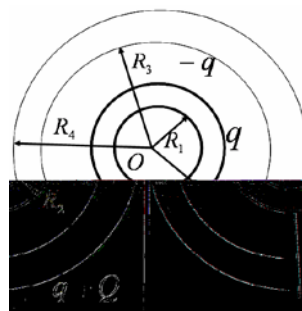
- A. 不带电荷
- B. 带正电
- C. 带负电荷
- D. 外表面带负电荷，内表面带等量正电荷



答案：【C】

解：如图，由高斯定理可知，内球壳内表面不带电。否则内球壳内的静电场不为零。

如果内球壳外表面不带电（已经知道内球壳内表面不带电），则两壳之间没有电场，外球壳内表面也不带电；由于外球壳带正电，外球壳外表面带正电；外球壳外存在静电场。电场



强度由内球壳向外的线积分到无限远,不会为零。即内球壳电势不为零。这与内球壳接地(电势为零)矛盾。因此,内球壳外表面一定带电。

设内球壳外表面带电量为 $q$ (这也就是内球壳带电量),外球壳带电为 $Q$ ,则由高斯定理可知,外球壳内表面带电为 $-q$ ,外球壳外表面带电为 $q+Q$ 。这样,空间电场强度分布

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (\text{两球壳之间: } R_2 < r < R_3)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (\text{外球壳外: } R_4 < r)$$

其他区域( $0 < r < R_2$ ,  $R_3 < r < R_4$ ), 电场强度为零。内球壳电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_2}^{R_3} \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{R_4}^{\infty} \vec{E}_2(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{R_2}^{R_3} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} + \int_{R_4}^{\infty} \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{R_4} = 0 \end{aligned}$$

则

$$\frac{q}{R_2} - \frac{q}{R_3} + \frac{q}{R_4} + \frac{Q}{R_4} = 0, \quad q = -Q \frac{R_4}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

由于 $R_2 < R_3 < R_4$ ,  $Q > 0$ , 所以

$$q < 0$$

即内球壳外表面带负电, 因此内球壳负电。

2. 真空中有一组带电导体, 其中某一导体表面某处电荷面密度为 $\sigma$ , 该处表面附近的场强大小为 $E$ , 则 $E = \sigma/\epsilon_0$ 。那么,  $E$ 是[ ]。

- A. 该处无穷小面元上电荷产生的场      B. 导体上全部电荷在该处产生的场  
C. 所有的导体表面的电荷在该处产生的场      D. 以上说法都不对

答案: 【C】

解: 处于静电平衡的导体, 导体表面附近的电场强度为 $E = \sigma/\epsilon_0$ , 指的是: 空间全部电荷分布, 在该处产生的电场, 而且垂直于该处导体表面。

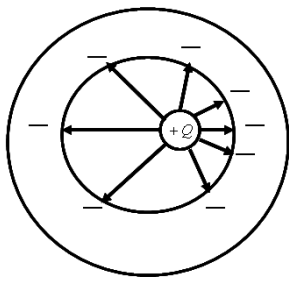
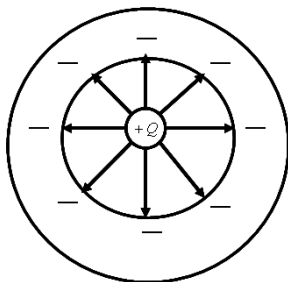
注意: 由高斯定理可以算得, 无穷小面元上电荷在表面附近产生的电场为 $\sigma/2\epsilon_0$ ; 无限大带电平面产生的电场强度也为 $\sigma/2\epsilon_0$ , 但不是空间全部电荷分布在该处产生的电场。

3. 一不带电的导体球壳半径为 $R$ , 在球心处放一点电荷。测得球壳内外的电场。然后将此点电荷移至距球心 $R/2$ 处, 重新测量电场。则电荷的移动对电场的影响为[ ]。

- A. 对球壳内外电场无影响      B. 球壳内电场改变, 球壳外电场不变  
C. 球壳内电场不变, 球壳外电场改变      D. 球壳内外电场均改变

答案: 【B】

解: 球壳内的电场由球壳内的电荷分布及球壳内表面的总电量决定, 球壳外的电场由球壳外的电荷分布及球壳外表面的总电量决定。



由高斯定理可知, 球壳内表面的电荷量与球壳内的电荷量等量异号。球壳内的电荷移动不会改变球壳内表面的电荷量。因此, 球壳外表面的电荷量不会受到球壳内电荷移动的影响。由于

静电屏蔽, 球壳外表面的电荷分布不受球壳内电荷移动的影响。因此, 球壳外的电场强度不受球壳内电荷移动的影响。

球壳外表面的电荷在球壳内和球壳里产生的电场强度为零，不受球壳内电荷移动的影响。

球壳内电荷移动，为保证球壳里的电场强度为零，球壳内表面的电荷要重新分布（净电荷量不变），这将导致球壳内的电场强度改变（电场线变化）。

4. 半径分别为  $R$  及  $r$  的两个球形导体 ( $r < R$ )，用一根很长的细导线将它们连接起来（即两球相距很远），使两个导体带电，则两球表面电荷面密度的比值  $\sigma_{\text{大球}}/\sigma_{\text{小球}}$  为 [ ]。

- A.  $R/r$       B.  $r/R$       C.  $R^2/r^2$       D.  $r^2/R^2$

答案: 【B】

解：由于两球相距很远，近似分别看作孤立导体球。电荷分布相互不影响，都是均匀分布，独自产生电场，电场不叠加。或者说，在对方电场强度线积分的范围内，电场强度为零。这样可以近似分别求得各自的电势（以无限远处电势为零）

$$U_r = \frac{\sigma_r 4\pi r^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad U_R = \frac{\sigma_R 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

由于，两个导体球用导线连接，又是一个导体，由静电平衡条件，导体为等势体：

$$\frac{\sigma_r 4\pi r^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma_R 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow \frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R}$$

5. 一面积为  $S$ ，间距为  $d$  的平行板电容器，若在其中平行插入厚度为  $d/2$  的导体板，则电容为\_\_\_\_\_。

答案:  $C = \epsilon_0 \frac{2S}{d}$      $E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

解 1：设电荷面密度为  $\sigma$ ，则电场在两极板之间、导体外处处为  $\sigma/\epsilon_0$ 。

两极板电势差为

$$U = E_1 a + E_2 (d/2 - a) = \sigma d / 2\epsilon_0,$$

而  $Q = \sigma S = CU$ ，则

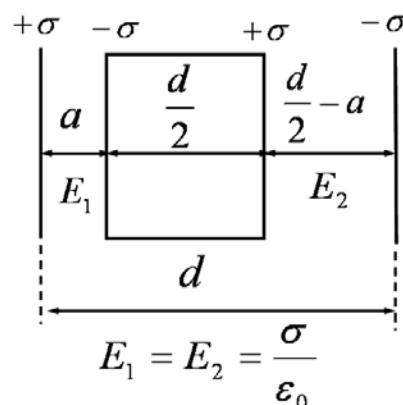
$$C = \epsilon_0 \frac{2S}{d}$$

解 2：可以看作两个平行板电容器的串联。

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{a}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{d/2 - a}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{a}{\epsilon_0 S} + \frac{d/2 - a}{\epsilon_0 S} = \frac{d}{2\epsilon_0 S}$$

$$C = \frac{2\epsilon_0 S}{d}$$



6. 两个同心导体球壳，内球壳带电  $Q$ ，外球壳原不带电，则现外球壳内表面电量\_\_\_\_\_，外球壳外表面电量\_\_\_\_\_，外球壳外  $P$  点总场强\_\_\_\_\_。

答案:  $Q_{\text{内}} = -Q, Q_{\text{外}} = Q, E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_{OP}^2} \hat{r}$

7. 试计算两根带异号的平行导线单位长度的电容。假设导线的半径为  $a$ ，相隔距离为  $d$  ( $d \gg a$ )，导线为无限长，电荷均匀分布。

解：由题意和场强叠加原理，两导线间，距  $\lambda$  导线为  $x$  点的场强为

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

由高斯定理  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q/\epsilon_0$ ,

在两个导线之间(平面)的  $P$  点, 有

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{i}, \quad \vec{E}_2 = -\frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)} \vec{i}$$

$P$  点的电场强度为

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{i} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)} \vec{i}$$

$$= \frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0 x(d-x)} \vec{i}$$

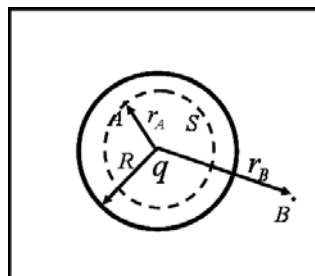
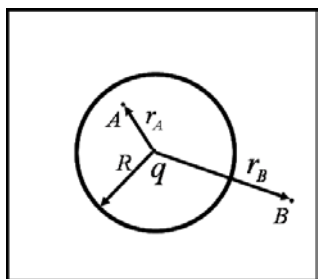
两个导线之间的电势为

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_1 \cdot \vec{i} dx + \int_1^2 \vec{E}_2 \cdot \vec{i} dx = \int_a^{d-a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} dx + \int_a^{d-a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d-x)} dx = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a}$$

故单位长度的电容为

$$C = \frac{Q}{LU} = \frac{L\lambda}{LU} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d-a}{a}} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}$$

8 在一大块金属导体中挖去一半径为  $R$  的球形空腔, 球心处有一点电荷  $q$ 。空腔内一点  $A$  到球心的距离为  $r_A$ , 腔外金属块内有一点  $B$ , 到球心的距离为  $r_B$ , 如图 4-2 所示。求  $A, B$  两点的电场强度。 $S$



解:

由于电荷  $q$  放在球心处, 球形空腔内的电场强度具有球对

称性, 由高斯定理得到  $A$  的电场强度  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q/\epsilon_0$ ,  $\vec{E}_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A^2} \frac{\vec{r}_A}{r_A}$

$B$  点在导体内,  $\vec{E}_B = 0$

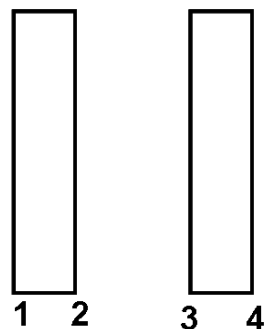
9. 有两个无限大平行面带电导体板, 如图 4-3 所示。

(1) 证明: 相向的两面上, 电荷面密度总是大小相等而符号相反; 相背的两面上, 电荷面密度总是大小相等而符号相同。

(2) 若左导体板带电  $3C \cdot m^{-2}$ , 右导体板带电  $7C \cdot m^{-2}$ , 求四个表面上的电荷面密度。 $\vec{E}$

解: 设 4 个面电荷分布为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 、 $\sigma_4$  (暂设为正)

(1) 做出如图所示的柱形高斯面  $S_1$ , 由于导体内部场强为零, 侧面法线方向与场强方向垂直, 故穿过高斯面  $S_1$  的电通量为零, 由





高斯定理有,  $S_1$  面内电荷数为零, 即  $\sigma_2 = -\sigma_3$ 。

做出如图所示的对称的柱形高斯面  $S_2$ , 侧面法线方向与场强方向垂直; 柱形两个底面上, 电场强度大小相等, 而且都与底面法线方向同向, 由高斯定理有

$$E2\Delta S = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4}{\epsilon_0} \Delta S = \frac{\sigma_1 + \sigma_4}{\epsilon_0} \Delta S, \quad E = \frac{\sigma_1 + \sigma_4}{2\epsilon_0}$$

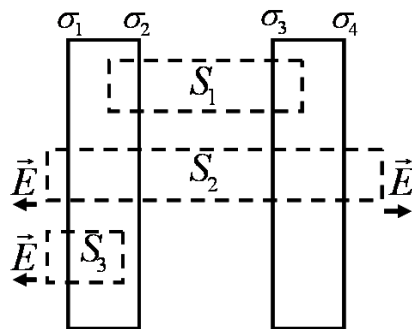
做出如图所示的对称的柱形高斯面  $S_3$ , 由高斯定理有

$$E\Delta S = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \Delta S, \quad E = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$

两式联立, 即可得到  $\sigma_1 = \sigma_4$ 。

(2)

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 3 \\ \sigma_3 + \sigma_4 = 7 \\ \sigma_1 = \sigma_4 \\ \sigma_2 = -\sigma_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = 5C \cdot m^{-2} \\ \sigma_2 = -\sigma_3 = -2C \cdot m^{-2} \end{cases}$$



10. 将一个中性的导体放在静电场中, 导体上感应出来的正负电荷的电量是否一定相等, 这时导体是否为等势体? 若在电场中将此导体分为分别带正负电的两部分, 两者的电势是否仍相等?

答: (1) 一定相等; 是等势体. (2) 不一定.

解: (1) 电荷守恒, 中性导体感应出来的电荷的电量一定等值异号。只要导体达到静电平衡, 导体一定是等势体。(2) 分开后, 变为两个导体, 各自的电荷要重新分布, 各自达到静电平衡, 各自是等势体, 但两个等势体的电势不一定相等。

11. 孤立导体带电量  $Q$ , 其表面附近的场强方向如何? 当将另一带电体移近导体时, 其表面附近的场强方向有什么变化? 导体内部的场强有无变化?

答案: (1) 方向为垂直导体面; (2) 没有变化; (3) 内部场强不变。

解: (1) 静电平衡时, 导体表面附近的电场强度与该处导体表面。在表面正电荷处, 电场强度方向向外; 在表面负电荷处, 电场强度方向向里。(2) 当将另一带电体移近导体时, 电荷要重新分布, 两个导体的电荷产生的电场叠加, 保证导体表面附近的电场强度与该处导体表面。(3) 静电平衡时, 导体内部电场强度为零。

12. 根据电容的定义  $C = \frac{Q}{U}$ , 是否可以认为系统不带电时电容为零?

答案: 不能这么认为。电容是系统的固有属性, 不会因系统带电与否而改变。

## 作业 5

1. 一平行板电容器中充满相对介电常数为  $\epsilon_r$  的各向同性均匀电介质。已知介质表面极化电荷面密度为  $\pm\sigma'$ , 则极化电荷在电容器中产生的电场强度的大小为 [ ]。

- A.  $\frac{\sigma'}{\epsilon_0}$       B.  $\frac{\sigma'}{2\epsilon_0}$       C.  $\frac{\sigma'}{\epsilon_0\epsilon_r}$       D.  $\frac{\sigma'}{\epsilon_r}$

答案: 【A】

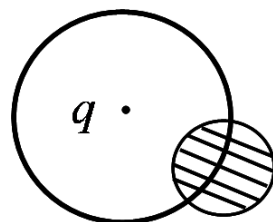
解: 极化电荷也是一种电荷分布, 除不能自由移动和依赖于外电场而存在外, 与自由电荷没有区别。在产生静电场方面, 它们的性质是一样的。在电容器中, 正是极化电荷的存在, 产

生的静电场与自由电荷产生的静电场方向相反,使得电容器中总的电场强度减弱,提高了电容器储存自由电荷的能力,电容器的电容增大。或者说,储存等量的自由电荷,添加电介质后,电场强度减弱,电容器两极的电势差减小,电容器的电容增大。

正负极化电荷产生的电场强度的大小都是  $\sigma'/2\epsilon_0$ , 方向相同, 所以, 极化电荷产生的电场的电场强度为  $\sigma'/\epsilon_0$ 。

2. 在一点电荷产生的静电场中, 一块电介质如图 5-1 放置, 以点电荷  $q$  所在处为球心作一球形闭合面, 则对此球形闭合面[ ]。

- A. 高斯定理成立, 且可用它求出闭合面上各点的场强
- B. 高斯定理成立, 但不能用它求出闭合面上各点的场强
- C. 由于电介质不对称分布, 高斯定理不成立
- D. 即使电介质对称分布, 高斯定理也不成立



答案: 【B】

解: 静电场的高斯定理, 是静电场的基本规律。无论电场分布(电荷分布)如何, 无论有无电介质, 也无论电介质的分布如何, 都成立。但是, 只有在电场分布(电荷分布和电介质分布), 在高斯面上(内)具有高度对称时, 才能应用高斯定理计算高斯面上的电场强度。否则, 只能计算出穿过高斯面的电通量。图示的高斯面上, 电场强度分布不具有高度对称性, 不能应用高斯定理计算高斯面上的电场强度。

3. 半径为  $R_1$  和  $R_2$  的两个同轴金属圆筒, 其间充满着相对介电常数为  $\epsilon_r$  的均匀介质。设两圆筒上单位长度带电量分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ , 则介质中的电位移矢量的大小  $D = \underline{\hspace{2cm}}$ , 电场强度的大小  $E = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

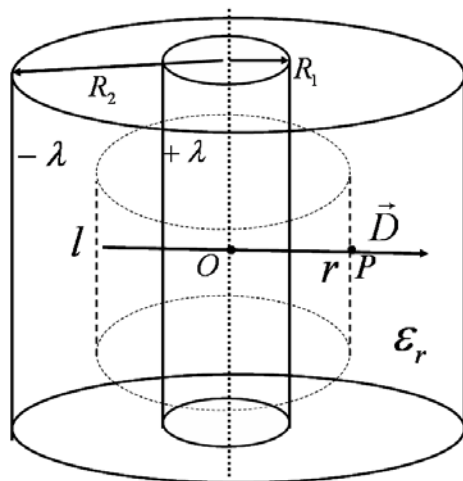
答案:  $D = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$

解: 如图, 取柱面高斯面。根据对称性, 柱面(高斯面)的上下底上, 电位移矢量  $\vec{D}$  与高斯面法线方向垂直; 柱面(高斯面)的侧面上, 电位移矢量  $\vec{D}$  处处大小相等, 并与高斯面法线方向平行。由高斯定理, 得到

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0, \quad 2\pi r l D = l\lambda, \quad D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

电场强度为

$$E = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$$



4. 一带电量  $q$ 、半径为  $R$  的金属球壳, 壳内充满介电常数为  $\epsilon$  的各向同性均匀电介质, 壳外是真空, 则此球壳的电势  $U = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案:  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

解: 由高斯定理, 可以求得球壳外电场强度

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

取无限远处电势为零, 则

$$U = \int_R^\infty E \cos \theta ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

5. 两个点电荷在真空中相距为  $r_1$  时的相互作用力等于在某一“无限大”均匀电介质中相距为  $r_2$  时的相互作用力, 则该电介质的相对介电常数  $\epsilon_r = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案:  $\varepsilon_r = \frac{r_1^2}{r_2^2}$

解: 在真空中, 两个点电荷之间的作用力(库仑力)为  $F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$

点电荷  $Q_1$  在“无限大”电介质中产生的电场强度为  $\vec{E}_1' = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$

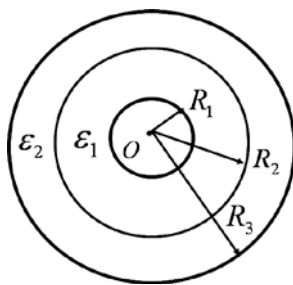
点电荷  $Q_2$  受到的库仑力为  $F' = Q_2 E_1' = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$

依题  $F' = F$

$$\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r r_2^2} \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

6. 有一同轴电缆, 内、外导体用介电系数分别为  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  的两层电介质隔开。垂直于轴线的某一截面如图 5-2 所示。求电缆单位长度的电容。

解: 取高斯面为柱面。柱面的半径为  $r$ 、长度为  $l$ , 对称轴为同轴电缆的对称轴, 柱面在同轴电缆的两极之间。由对称性, 高斯面上的上下底面电位移矢量与高斯面法线方向垂直; 侧面上, 电位移矢量处处大小相等, 并且与高斯面平行。由高斯定理, 有



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi r l D = q_0 = \lambda l, \quad \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r}, \quad R_1 < r < R_3$$

则同轴电缆的两极之间的电场强度为

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r} \hat{r}, \quad R_1 < r < R_2; \quad \vec{E}_2 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r} \hat{r}, \quad R_2 < r < R_3$$

同轴电缆的两极之间的电势差为

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{R_3} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r} \hat{r} \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r} \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right)$$

单位长度的高斯面包围的自由电荷量为  $q_0 = \lambda$

$$\text{则单位长度的同轴电缆的电容为: } C = \frac{q_0}{U} = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \varepsilon_1 \ln \frac{R_3}{R_2}}$$

7. 在一平行板电容器的两极板上, 带有等值异号电荷, 两极间的距离为  $5.0\text{mm}$ , 充以  $\varepsilon_r = 3$  的介质, 介质中的电场强度为  $1.0 \times 10^6 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

求: (1) 介质中的电位移矢量; (2) 平板上的自由电荷面密度; (3) 介质中的极化强度;

(4) 介质面上的极化电荷面密度; (5) 平板上自由电荷所产生的电场强度, 介质面上极化电荷所产生的电场强度。

解: (1)  $D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = 2.655 \times 10^{-5} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$

$$(2) \quad \sigma_{e0} = D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = 2.655 \times 10^{-5} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$(3) \quad P = \chi_e \varepsilon_0 E = 1.77 \times 10^{-5} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$(4) \quad \sigma_e' = P = 1.77 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$(5) \quad E_0 = \sigma_{e0} / \varepsilon_0 = \varepsilon_r E = 3.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1},$$

$$E' = E_0 - E = (\varepsilon_r - 1)E = 2.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{或 } E' = \sigma_e' / \varepsilon_0 = \frac{1.77 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}} = 2.0 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

8. 一导体球, 带电量  $q$ , 半径为  $R$ , 球外有两种均匀电介质。第一种介质介电常数为  $\varepsilon_{r1}$ 、厚度为  $d$ , 第二种介质为空气  $\varepsilon_{r2} = 1$  充满其余整个空间。求球内、球外第一种介质中、第二种介质中的电场场强、电位移矢量和电势。

**解:** 由高斯定理, 得到电位移矢量的空间分布

$$D_1 = 0, (r < R); \quad D_2 = D_3 = \frac{q}{4\pi r^2}, (R < r).$$

电场强度的空间分布:

$$E_1 = 0, (r < R); \quad E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2}, (R < r < R + d); \quad E_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}, (r > R + d).$$

球壳内电势: ( $r < R$ )

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^{R+d} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \int_{R+d}^\infty \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} = \int_R^{R+d} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2} dr + \int_{R+d}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2} dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R+d)}$$

球外第一种介质中的电势:  $R < r < R + d$

$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R+d} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \int_{R+d}^\infty \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} = \int_r^{R+d} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2} dr + \int_{R+d}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2} dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R+d} \right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R+d)}$$

球外第二种介质中的电势:  $r > R + d$

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2} dr = + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0r}$$

9. 半径为  $R$  的均匀带电金属球壳里充满了均匀、各向同性的电介质, 球外是真空, 此球壳的电势是否为  $\frac{Q}{4\pi\varepsilon R}$ ? 为什么?

**答:** 球壳外电场分布  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2} \hat{r}$ , 球壳电势为

$$U = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2} dr \stackrel{\text{错}}{=} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R}$$

## 作业 6

1. 真空中有一均匀带电球体和一均匀带电球面, 如果它们的半径和所带的电量都相等, 则

它们的静电能之间的关系是[ ]。

- A. 球体的静电能等于球面的静电能
- B. 球体的静电能大于球面的静电能
- C. 球体的静电能小于面的静电能
- D. 球体内的静电能大于球面内的静电能，球体外的静电能小于球面外的静电能

**答案：【B】**

解：设带电量为 $Q$ 、半径为 $R$ ，球体的电荷体密度为 $\rho$ 。

由高斯定理，可以求得两种电荷分布的电场强度分布

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 E = \frac{Q_0}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{Q_0}{2\pi \epsilon_0 r^2}$$

对于球体电荷分布：

$$E_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{2\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{2r\rho}{3\epsilon_0} > 0, \quad (r < R); \quad E_2 = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r^2}, \quad (r > R)。$$

对于球壳电荷分布：

$$E_1' = 0, \quad (r < R); \quad E_2' = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r^2}, \quad (r > R)。$$

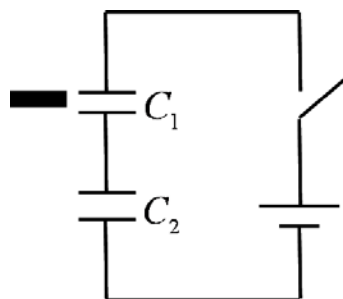
可见，球外：两种电荷分布下，电场强度相等；球内：球体电荷分布，有电场，球壳电荷分布无电场。

$$\text{静电场能量密度 } \omega = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

两球外面的场强相同，分布区域相同，故外面静电能相同；而球体(并不是导体)内部也有电荷分布，也是场分布，故也有静电能。所以球体电荷分布时，球内的静电场能量，大于球面电荷分布时，球内的静电场能量；球体电荷分布时，球外的静电场能量，等于球面电荷分布时，球外的静电场能量。

2.  $C_1$  和  $C_2$  两空气电容器串联起来接上电源充电，然后将电源断开，再把一电介质板插入  $C_1$  中，如图 6-1 所示，则 [ ]。

- A.  $C_1$  两端电势差减少， $C_2$  两端电势差增大
- B.  $C_1$  两端电势差减少， $C_2$  两端电势差不变
- C.  $C_1$  两端电势差增大， $C_2$  两端电势差减小
- D.  $C_1$  两端电势差增大， $C_2$  两端电势差不变



**答案：【B】**

解：电源接通时，给两个串联的电容器充电。充电量是相同的，是为 $Q$ 。则两个电容器的电压分别为

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}$$

电源断开后， $C_1$  插入电介质，两个电容器的电量不变，仍然都是 $Q$ 。但  $C_1$  的电容增大，因此  $C_1$  两端的电压降低；而  $C_2$  不变，因此， $C_2$  两端的电压不变。

3. 一平行板电容器，板间相距 $d$ ，两板间电势差为 $U$ ，一个质量为 $m$ ，电荷为 $-e$ 的电子，从负极板由静止开始向正极板运动，它所需的时间为[ ]。

- A.  $\frac{2md}{eU}$
- B.  $\frac{md^2}{eU}$
- C.  $\frac{md^2}{2eU}$
- D.  $\sqrt{\frac{2md^2}{eU}}$

**答案：【D】**

解：两极间的电场  $E = \frac{U}{d}$ ，电子受力  $F = -eE = -\frac{eU}{d}$   $\therefore a = \frac{F}{m} = \frac{eU}{2d}$

$$\text{由 } d = \frac{1}{2}at^2 \quad \therefore t = \sqrt{\frac{2md^2}{eU}}$$

4. 将半径为  $10\text{cm}$  的金属球接上电源充电到  $3000\text{V}$ ，则电场能量  $W = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案：**  $5 \times 10^{-5}(\text{J})$

解：孤立导体球的电容为： $C = 4\pi\epsilon_0 R$ ，所以，充电到  $U = 3000\text{V}$  时，

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \times 4\pi\epsilon_0 RU^2 = 2 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.1 \times 3000^2 = 5 \times 10^{-5}(\text{J})$$

5.  $A$ 、 $B$  为两个电容值都等于  $C$  的电容器，已知  $A$  带电量为  $Q$ ， $B$  带电量为  $2Q$ ，现将  $A$ 、 $B$  关联在一起后，则系统的能量变化  $\Delta W = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案：**  $-\frac{Q^2}{4C}$

$$\text{解：未并联前，两电容器储存的总能量为：} W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{(2Q)^2}{2C} = \frac{5Q^2}{2C}$$

当并联后，总电容为： $C' = C + C = 2C$ ，总电量不变： $Q' = Q + 2Q = 3Q$ ，

$$\text{则并联后，总电压为：} U' = \frac{Q'}{C'} = \frac{3Q}{2C}$$

$$\text{并联后，储存的总能量为：} W' = \frac{1}{2}C'U'^2 = \frac{1}{2} \cdot 2C \cdot \left(\frac{3Q}{2C}\right)^2 = \frac{9Q^2}{4C}$$

$$\text{系统的能量变化为：} \Delta W = W' - W = \frac{9Q^2}{4C} - \frac{5Q^2}{2C} = -\frac{Q^2}{4C}$$

6. 一平行板电容器电容为  $C_0$ ，将其两板与一电源两极相连，电源电动势为  $\epsilon$ ，则每一极板上带电量为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。若在不切断电源的情况下将两极板距离拉至原来的两倍，则电容器内电场能量改变为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案：**  $C_0\epsilon$ ，  $-\frac{1}{4}C_0\epsilon^2$

$$\text{解：(1) } Q = C_0U = C_0\epsilon \quad \text{电容器储存的静电场能量为 } W = \frac{1}{2}C_0U^2 = \frac{1}{2}C_0\epsilon^2$$

(2) 当增大两极板的距离时，平行板电容器电容为  $C' = \frac{1}{2}C_0$ 。因为电源未切断，故电容两端电压  $U' = U = \epsilon$  不变，则电容器储存的静电场能量为

$$W' = \frac{1}{2}C'U'^2 = \frac{1}{4}C_0\epsilon^2$$

$$\text{电容器储存的静电场能量的变化为：} \Delta W = W' - W = -\frac{1}{4}C_0\epsilon^2$$

7. 两层相对介电常数分别为  $\epsilon_{r1}$  和  $\epsilon_{r2}$  的介质，充满圆柱形电容器之间，如图 6-2 示。内外圆筒（电容器的两极）单位长度带电量分别为  $\lambda$  和  $-\lambda$ ，求：(1) 两层介质中的场强和电位移矢量；(2) 此电容器单位长度的电容。

**答案：** 同作业 5 中第 6 题的计算。

8. 充满均匀电介质的平行板电容器，充电到板间电压  $U = 1000\text{V}$  时断开电源。若把电介质从两板间抽出，测得板间电压  $U_0 = 3000\text{V}$ ，求：(1) 电介质的相对介电系数  $\epsilon_r$ ；(2) 若有

介质时的电容  $C_1 = 2.0 \times 10^{-3} \mu F$ ，抽出介质后的电容  $C_0$  为多少？(3) 抽出电介质时外力所做的功。

**解：**(1) 有电介质和无电介质时，电容器的电容间的关系： $C = \varepsilon_r C_0$ ，切断电源，电容器带电量不变， $\therefore CU = C_0 U_0$ ， $\varepsilon_r C_0 U = C_0 U_0$ ， $\therefore \varepsilon_r = \frac{U_0}{U} = 3$

$$(2) C_0 = \frac{C}{\varepsilon_r} = 6.7 \times 10^{-4} \mu F$$

$$(3) W = \frac{1}{2} CU^2 = 1 \times 10^{-3} J, W_0 = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = 3 \times 10^{-3} J \quad A_{\text{外}} = W_0 - W = 2 \times 10^{-3} J$$

9. 有一导体球与一同心导体球壳组成的带电系统，球的半径  $R_1 = 2.0 \text{ cm}$ ，球壳的内、外半径分别为  $R_2 = 4.0 \text{ cm}$ ， $R_3 = 5.0 \text{ cm}$ ，其间充以空气介质，内球带电量  $Q = 3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$  时，求：(1) 带电系统所存储的静电能；(2) 用导线将球与球壳相连，系统的静电能为多少？

**解：**(1) 由导体的静电平衡条件和电荷守恒定律、高斯定理，可分析得：导体球上所带电量在球面，电量为  $+Q$ ；球壳内表面带电量为  $-Q$ ，外表面带电量为  $+Q$ 。

由高斯定理可得各个区域的电场分布：

$$E_0 = 0 \quad (r < R_1) \quad , \quad E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2),$$

$$E_2 = 0 \quad (R_2 < r < R_3), \quad E_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R_3)$$

带电系统所储存的能量为：

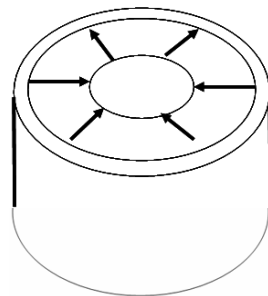
$$\begin{aligned} W_e &= \int dW_e = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV \\ &= \int_0^{R_1} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 dV + \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_1^2 dV + \int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_2^2 dV + \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_3^2 dV \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_1^2 dV + \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_3^2 dV \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 2\pi r dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 2\pi r dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{aligned}$$

(2) 当内球与球壳连在一起时，由于球与球壳是等势体，在球与球壳之间没有电场， $E_1 = 0$ ；在两面上的电量中和，只有球壳外表面带  $+Q$  电量，电场只分布在  $r > R_3$  区域，可求得：

$$W_e = \int dW_e = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dV = \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_3^2 dV = \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 2\pi r dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3}$$

## 作业 7

1. 在一个长直圆柱形导体外面套一个与它共轴的导体长圆筒，两导体的电导率可以认为是无限大。在圆柱与圆筒之间充满电导率为  $\gamma$  的均匀导电物质，当在圆柱与圆筒上加上一一定电压时，在长为  $l$  的一段导体上总的径向电流为  $I$ ，如图 7-1 所示，则在柱与筒之间与轴线的距离为  $r$  的点的电场强度为 [ ]。



- A.  $\frac{2\pi r I}{l^2 \gamma}$       B.  $\frac{I}{2\pi r l \gamma}$   
C.  $\frac{I l}{2\pi r^2 \gamma}$       D.  $\frac{I \gamma}{2\pi r l}$

答案: 【B】

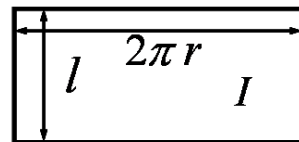
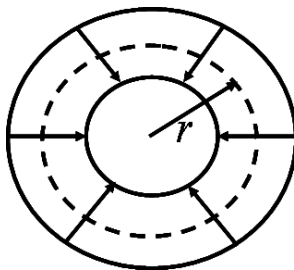
解: 如图，通过半径为  $r$ 、高为  $l$  的圆柱侧面的总电流为  $I$ ，则该处的电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r l}$$

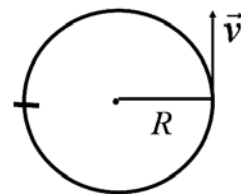
由电流密度与电场强度的关系

$J = \gamma E$  ( $\gamma$  为电导率)，得到

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I / 2\pi r l}{\gamma} = \frac{I}{2\pi r l \gamma}$$



2. 一电子以匀速率  $\vec{v}$  作圆周运动，圆轨道半径为  $R$ ，它相当于一个圆电流，如图 7-2 所示，其电流强度是 [ ]。



- A.  $\frac{ev}{2\pi R}$       B.  $\frac{ev}{\pi R^2}$   
C.  $ev$       D.  $e$

答案: 【A】

解: 在电子运动轨道上固定一个横截线，电子一个周期通过一次该横截线，即在一个运动周期  $T$  时间内，通过横截线的电量为  $e$ ，因此，电流为

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi / \omega} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi R}$$

3. 单位正电荷从电源的负极通过电源内部移到正极时非静电力所作的功定义为该电源的电动势，其数学表达式为\_\_\_\_\_。

答案:  $\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{r}$

4. 有一根电阻率为  $\rho$ 、截面直径为  $d$ 、长度为  $L$  的导线。若将电压  $U$  加在该导线的两端，则单位时间内流过导线横截面的自由电子数为\_\_\_\_\_；若导线中自由电子数密度为  $n$ ，则电子平均漂移速率为\_\_\_\_\_。

答案:  $\frac{\pi d^2 \cdot U}{4\rho L e}$ ,  $v_d = \frac{U}{n\rho L e}$

解: (1) 设单位时间内流过导线横截面的自由电子数为  $N$ ，则单位时间内流过导线横截面的电量为  $eN$ ，这就是电流， $I = eN$ 。按电流与电压的关系

$$U = IR = I\rho \frac{L}{S}$$



则 
$$N = \frac{SU}{e\rho L} = \frac{\pi(\frac{d}{2})^2 U}{e\rho L} = \frac{\pi d^2 U}{4e\rho L}$$

(2) 电子漂移距离  $L$  所用时间  $\Delta t = \frac{L}{v_d}$ ，即在  $\Delta t$  内，电子全部通过以  $L$  为高、以  $S$  为底的柱形底面，即在  $\Delta t$  内柱形内的电子全部通过底面，其他电子都没有通过。因此，在  $\Delta t$  内通过底面的电量为

$$\Delta q = enLS$$

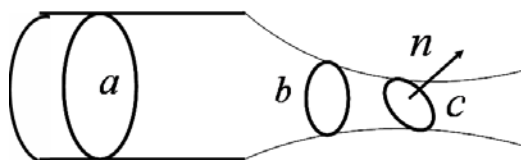
因此，电流为

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{enLS}{\Delta t} = enSv_d$$

即得到

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = enSv_d = \frac{SU}{\rho L}, \quad v_d = \frac{U}{en\rho L}$$

5. 如图 7-3 所示的导体中，均匀地流着  $10A$  的电流，已知横截面  $a = 1cm^2$ ， $b = 0.5cm^2$ ， $c$  的法线与轴线夹角为  $60^\circ$ ，试求：(1) 三个面与轴线交点处的电流密度。(2) 三个面上单位面积上的电流密度通量  $dI$ 。



解：(1)

$$J_a = \frac{I}{S_1} = 10^5 A/m^2 \quad J_b = \frac{I}{S_2} = 2 \times 10^5 A/m^2 \quad J_c = J_b = 2 \times 10^5 A/m^2$$

(2)

$$dI_1 = J_a = 10^5 A/m^2 \quad dI_2 = J_b = 2 \times 10^5 A/m^2 \quad dI_3 = J_c \cos 60^\circ = \frac{J_c}{2} = 10^5 A/m^2$$

6. 圆柱形电容器，长为  $l$ ，内、外两极板的半径为  $r_A$ ， $r_B$ ，在两极板间充满非理想电介质，其电阻率为  $\rho$ ，设在两极间加电压  $V_{AB}$ 。求：(1) 介质的漏电阻  $R$ ；(2) 漏电总电流  $I$ ；(3) 漏电流密度  $j$ ；(4) 介质内各点的场强。

解：(1)  $R = \int dR = \int \rho \frac{dr}{S}$  这里  $r \rightarrow r + dr$  的球壳层的横截面可认为相同，

$$\text{球壳层的漏电阻: } dR = \rho \frac{dr}{S} = \rho \frac{dr}{2\pi r l} \quad (r_A < r < r_B) \quad \therefore R = \int \rho \cdot \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi l} \ell_n \frac{r_B}{r_A}$$

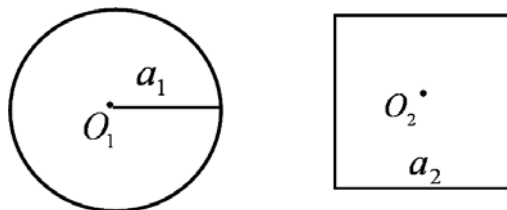
$$(2) \quad I = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{V_{AB} \cdot 2\pi l}{\rho \cdot \ell_n \frac{r_B}{r_A}}$$

$$(3) \quad j = \frac{I}{2\pi r l} = \frac{V_{AB}}{r\rho \cdot \ell_n \frac{r_B}{r_A}}$$

$$(4) \quad E = \frac{j}{\gamma} = \frac{V_{AB}}{r\rho\gamma \cdot \ell_n \frac{r_B}{r_A}}$$

## 作业 8

1. 如图 8-1 所示, 载流的圆形线圈 (半径  $a_1$ ) 与正方形线圈 (边长  $a_2$ ) 通有相同电流, 若两个线圈中心  $O_1$ ,  $O_2$  处的磁感应强度大小相同, 则半径  $a_1$  与边长  $a_2$  之比为 [ ]。



- A.  $\sqrt{2}\pi:4$       B.  $\sqrt{2}\pi:8$   
C. 1:1      D.  $\sqrt{2}\pi:1$

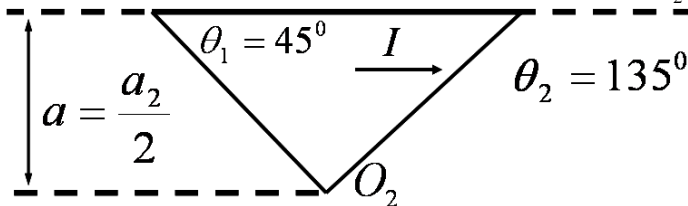
答案: 【B】

解: 圆电流  $I$  在其轴线上产生的磁场的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\mu_0 a_1^2 I}{2(a_1^2 + x^2)^{3/2}}, \text{ 方向沿着轴线}$$

在圆心处 ( $x=0$ ),  $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2a_1}$ 。

通电正方形线圈, 可以看成 4 段载流直导线, 由毕萨定律知道, 每段载流直导线在正方形中心产生的磁场的磁感应强度大小相等, 方向相同, 由叠加原理  $B_2 = 4B_2'$ 。

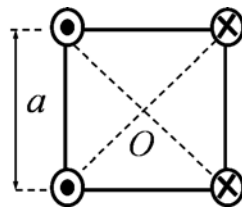


$$B_2' = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a_2}{2}} (\cos 45^\circ - \cos 135^\circ) = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a_2}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2a_1} = B_2 = 4B_2' = 4 \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a_2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{8}{\sqrt{2}\pi}$$

2. 如图 8-2 所示, 四条平行的无限长直导线, 垂直通过边长为  $a = 20\text{cm}$  正方形顶点, 每条导线中的电流都是  $I = 20\text{A}$ , 这四条导线在正方形中心  $O$  点产生的磁感应强度为 [ ]。



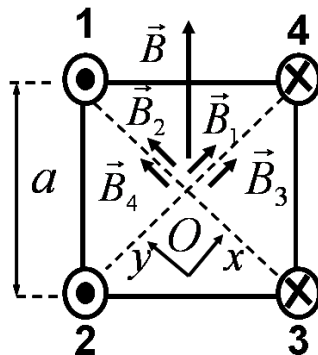
- A.  $B = 0.8 \times 10^{-4} \text{T}$       B.  $B = 1.6 \times 10^{-4} \text{T}$   
C.  $B = 0$       D.  $B = 0.4 \times 10^{-4} \text{T}$

答案: 【A】

解: 建立直角坐标系, 则 4 根无限长载流直导线在正方形中心产生的磁感应强度为

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a \cos 45^\circ} \vec{i}, \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a \cos 45^\circ} \vec{j}$$

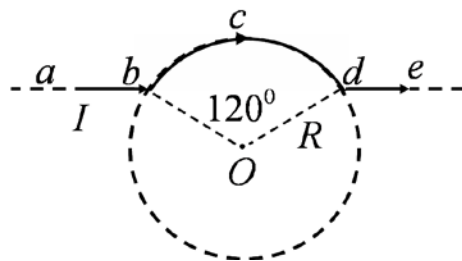
$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a \cos 45^\circ} \vec{i}, \quad \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a \cos 45^\circ} \vec{j}$$



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 = \frac{2\mu_0 I}{2\pi a \cos 45^\circ}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$B = 8 \times 10^{-5} T$$

3. 一根无限长直导线  $abcde$  弯成图 8-3 所示的形状, 中部  $bcd$  是半径为  $R$ 、对圆心  $O$  张角为  $120^\circ$  的圆弧, 当通以电流  $I$  时,  $O$  处磁感应强度的大小  $B =$  \_\_\_\_\_, 方向为 \_\_\_\_\_。



答案:  $B = \frac{\mu_0 I}{6R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(2 - \sqrt{3})$ ,

方向垂直纸面向里

解: 将整个载流导线分为三段: 直线  $ab$ 、圆弧  $bcd$ 、直线  $de$ 。

由毕萨定律可以判断出, 三段载流导线在圆心处产生的电磁感应强度方向均沿着垂直纸面向里, 因此, 总的电磁感应强度方向沿着垂直纸面向里。

两段载流直线在圆心处产生的电磁感应强度

$$B_{a-b} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos 60^\circ}(\cos 0^\circ - \cos 30^\circ) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(2 - \sqrt{3})$$

$$B_{d-e} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos 60^\circ}(\cos 120^\circ - \cos 180^\circ) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(2 - \sqrt{3})$$

三分之一圆弧在圆心处产生的电磁感应强度

$$B_{bcd} = \frac{\mu_0 I}{2R} \times \frac{1}{3} = \frac{\mu_0 I}{6R}$$

在圆心处产生的总电磁感应强度

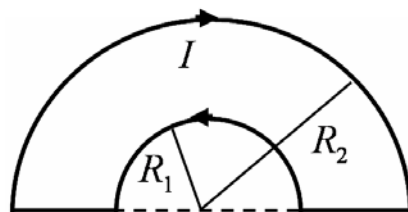
$$B = B_{a-b} + B_{bcd} + B_{d-e} = \frac{\mu_0 I}{6R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(2 - \sqrt{3})$$

方向垂直纸面向里。

4. 如图 8-4 所示, 两个同心半圆弧组成一闭合线圈,

通有电流  $I$ , 设线圈平面法向  $\vec{n}$  垂直纸面向里。则圆

心  $O$  点的磁感应强度  $\vec{B} =$  \_\_\_\_\_, 线圈的磁矩  $\vec{m} =$  \_\_\_\_\_。



答案:  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})\vec{n}$ ,  $\vec{m} = \frac{\pi I}{2}(R_2^2 - R_1^2)\vec{n}$

解: 由毕萨定律可知, 两个半圆连线上的电流圆心  $O$  处产生的电磁感应强度为零在半径为  $R_1$  的半圆弧在圆心  $O$  处产生的电磁感应强度垂直于纸面向外 (与  $\vec{n}$  反向)

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2R_1}(-\vec{n}) = -\frac{\mu_0 I}{4R_1}\vec{n}$$

半径为  $R_2$  的半圆弧在圆心  $O$  处产生的电磁感应强度垂直于纸面向里 (与  $\vec{n}$  同向)

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2R_2}\vec{n} = \frac{\mu_0 I}{4R_2}\vec{n}$$

再由毕萨定律可知, 两个半圆连线上的电流圆心  $O$  处产生的电磁感应强度为零

$$\vec{B}_3 = \vec{B}_4 = 0$$

圆心  $O$  处总的电磁感应强度

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})\vec{n}$$

线圈的磁矩

$$\vec{m} = I\vec{S} = IS\vec{n} = I\left(\frac{1}{2}\pi R_2^2 - \frac{1}{2}\pi R_1^2\right)\vec{n} = \frac{1}{2}\pi I(R_2^2 - R_1^2)\vec{n}$$

5. 在坐标原点有一电流元  $I d\vec{l} = 3 \times 10^{-3} \vec{k} A \cdot m$ 。试求该电流元在下列各点处产生的磁感应强度  $d\vec{B}$ ?

(1)  $(2, 0, 0)$ ; (2)  $(0, 4, 0)$ ; (3)  $(0, 0, 5)$ ; (4)  $(3, 0, 4)$ ; (5)  $(3, 4, 0)$

解: 该电流元产生的电磁感应强度表示为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = 3 \times 10^{-10} \vec{k} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\textcircled{1} \vec{r} = 2\vec{i}, \quad d\vec{B} = 3 \times 10^{-10} \vec{k} \times \frac{2\vec{i}}{8} = 0.75 \times 10^{-10} \vec{j} (T)$$

$$\textcircled{2} \vec{r} = 4\vec{j}, \quad d\vec{B} = 3 \times 10^{-10} \vec{k} \times \frac{4\vec{j}}{4^3} = -1.875 \times 10^{-11} \vec{i} (T)$$

$$\textcircled{3} \vec{r} = 5\vec{k}, \quad d\vec{B} = 0$$

$$\textcircled{4} \vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{k}, \quad r = 5, \quad d\vec{B} = 3 \times 10^{-10} \vec{k} \times \frac{3\vec{i}}{125} = 7.2 \times 10^{-12} \vec{j} (T)$$

$$\textcircled{5} \vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \quad r = 5, \quad d\vec{B} = 3 \times 10^{-10} \vec{k} \times \frac{(3\vec{i} + 4\vec{j})}{125} = 2.4 \times 10^{-12} (3\vec{j} - 4\vec{i}) (T)$$

6. 从经典观点来看, 氢原子可看作是一个电子绕核高速旋转的体系, 已知电子以速度  $2.2 \times 10^6 m \cdot s^{-1}$  在半径  $r = 0.53 \times 10^{-10} m$  的圆轨道上运动, 求: 电子在轨道中心产生的磁感应强度和电子的磁矩大小。

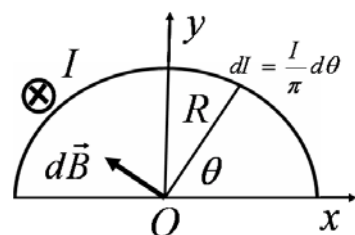
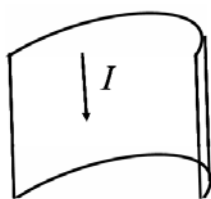
解: 角速度  $\omega = v/r = 2\pi/T$ ,  $I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} = 1.057 \times 10^{-3} A$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} \approx 12.53 (T) \quad m = I\pi r^2 \approx 9.3 \times 10^{-24} (A \cdot m^2)$$

7. 在一半径  $R = 1.0 cm$  的无限长半圆柱形金属薄片, 自上而下地有电流  $I = 3.0 A$  通过, 试求: 圆柱轴线上任一点的磁感应强度。

解: 如图, 取过场点  $O$  的横截面为  $xy$  平面, 横截面与金属薄片的交集为一个半圆弧。可以将电流  $I$  分成无限多小的无限长电流  $dI$ , 圆心角为  $\theta - \theta + d\theta$  的电流强度为

$$dI = \frac{I}{\pi R} R d\theta = \frac{I}{\pi} d\theta$$



它对场点的磁场贡献为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 (I/\pi) d\theta}{2\pi R} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

对  $\theta$  从 0 到  $\pi$  积分, 可得

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} (-2\vec{i}) = -\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \vec{i} = -3.82 \times 10^{-5} \vec{i} (T)$$

8. 在电子仪器中, 为了减小与电源相连的两条导线的磁场, 通常总是把他们扭在一起, 为什么?

答: 与电源相连的两根导线的电流方向相反, 扭在一起可以使磁场尽可能相互抵消, 以免产生磁干扰。

## 作业 9

1. 如图 9-1 所示, 在无限长载流导线附近作一球形闭合曲面  $S$  当面  $S$  向长直导线靠近的过程中, 穿过面  $S$  的磁通量  $\Phi$  及面上任一点  $P$  的磁感应强度  $B$  大小的变化为[ ]。

- A.  $\Phi$  增大,  $B$  不变
- B.  $\Phi$  不变,  $B$  增大
- C.  $\Phi$  增大,  $B$  增大
- D.  $\Phi$  不变,  $B$  不变

答案: 【B】

解: 由磁场的高斯定理  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ , 即穿过闭合曲面的磁通量为零, 或者说, 磁感应线为

闭合曲线, 所以  $\Phi$  不变; 由于长直载流导线的磁场  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ , 与距离成反比, 所以, 当闭合曲面靠近载流直导线时, 闭合曲面上各点的磁感应强度增大。

2. 一电子以速度  $\vec{v}$  垂直地进入磁感应强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中, 此电子在磁场中运动的轨迹所围的面积内的磁通量将是[ ]。

- A. 反比于  $B$ , 正比于  $v^2$
- B. 反比于  $B$ , 正比于  $v$
- C. 正比于  $B$ , 反比于  $v^2$
- D. 正比于  $B$ , 反比于  $v$

答案: 【A】

解: 电子垂直于磁场进入磁场, 将在洛伦兹力的作用下, 在垂直于磁场的平面内作圆周运动。电子在磁场中运动的轨迹半径

$$R = \frac{mv}{qB}$$

由于磁场与面积  $S$  垂直, 所围的面积内的磁通量

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \pi R^2 B = \frac{\pi m^2 v^2}{q^2 B}$$

3. 如图 9-2 所示, 一无限长密绕真实螺线管, 通电流强度为  $I$ 。对套在螺线管轴线外的环路  $L$  (螺线管穿过环路)

作积分  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} =$  \_\_\_\_\_。

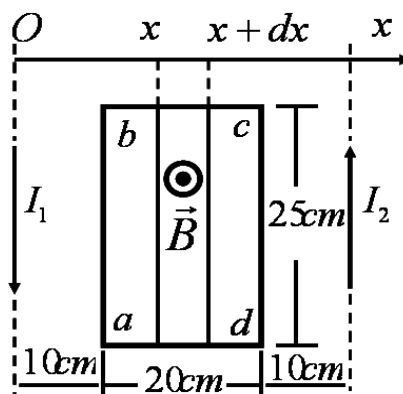
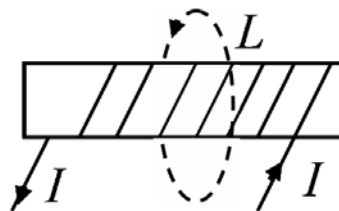
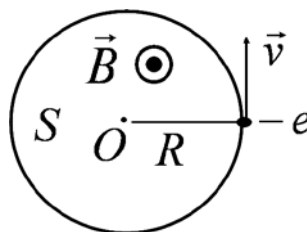
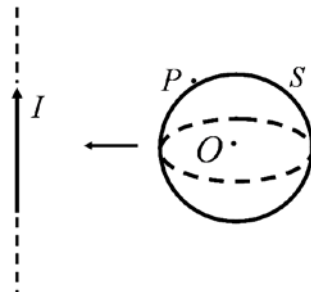
答案:  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

解: ①根据安培环路定理; ②真实螺线管。

4. 两平行长直导线相距  $0.4m$ , 每条导线载有电流  $10A$  (如图 9-3 所示), 则通过图中矩形面积  $abcd$  的磁通量  $\Phi_m =$  \_\_\_\_\_。

答案:  $1.1 \times 10^{-6} Wb$

解: 电流  $I_1$  和  $I_2$  大小相等, 方向相反, 由毕萨定律可以判知, 它们在矩形面积内产生的电磁感应强度方向均垂直于纸面向外。由对称性可知, 电流  $I_1$  和  $I_2$  产生的电磁感应强度穿过矩形面积的磁通量大小相等, 因



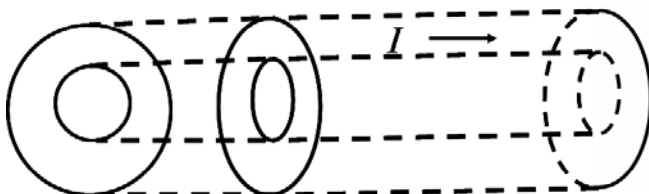
此只须计算一个电流产生磁场的磁通量。

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

$$\Phi_1 = \int_a^d \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \overline{ab} \int_{0.1}^{0.3} B_1 dx = \frac{\overline{ab} \mu_0 I}{2\pi} \ln 3$$

$$\Phi = 2\Phi_1 = \frac{\overline{ab} \mu_0 I}{\pi} \ln 3 = 10 \times 10^{-7} \ln 3 \approx 1.1 \times 10^{-6} (\text{Wb})$$

5. 有一很长的载导体直圆管，内半径为  $a$ ，外半径为  $b$ ，电流强度为  $I$ ，电流沿轴线方向流动，并且均匀地分布在管壁的横截面上，如图 9-4 所示。求空间各点的磁感应强度，并画出  $B-r$  曲线（ $r$  为场点到轴线的垂直距离）。



解：以轴线为中心的同轴圆各点场感应强度大小相等，方向沿圆周切线。取此同心圆为环路，由对称性可知，在积分环路上，感应强度大小相等，方向均沿着环路。应用安培环路定理，

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B dl = 2\pi r B = \mu_0 \sum I_0$$

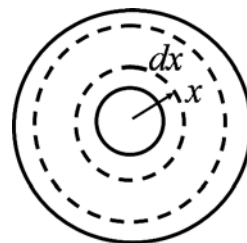
电流密度为  $j = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$ ，则

$$\sum I_0 = 0, (r < a); \quad \sum I_0 = I \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}, (a < r < b); \quad \sum I_0 = I, (r > b).$$

磁感应强度分布为

$$B = 0 \quad (r < a); \quad B = \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)} \quad (a \leq r \leq b);$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > b)$$



6. 矩阵截面的螺线环，尺寸见图 9-5。(1) 求环内磁感应强度的分布；(2) 证明通过螺线环截面（图中阴影区）的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}, \quad \text{其中 } N \text{ 为螺线环线圈总匝数，} I \text{ 为其中}$$

电流强度。

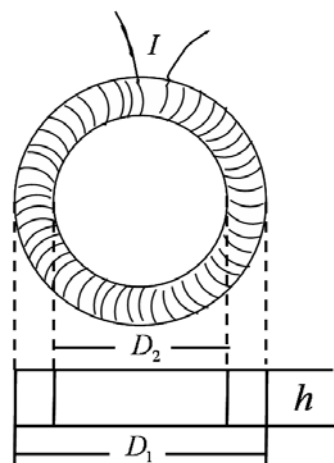
解：(1) 在与螺线环同心的圆周上各处磁场大小相同，方向沿圆周切线。取此圆周为环路，应用安培环路定理，

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B dl = 2\pi r B = \mu_0 N I, \quad B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r};$$

$$(2) \quad d\Phi = B h dr$$

$$\Phi = \int_0^\Phi d\Phi = N \int_{D_2/2}^{D_1/2} B h dr$$

$$= \int_{D_2/2}^{D_1/2} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$$

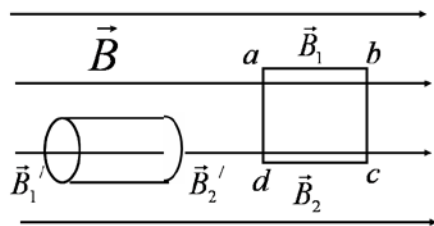


7. 在无电流的空间区域，如果磁感应线是平行直线，则磁场一定是均匀的，为什么？

证明：用高斯定理，可以证明图中  $\vec{B}_1' = \vec{B}_2'$ ；

用安培环路定理，可以证明图中  $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$

命题得证



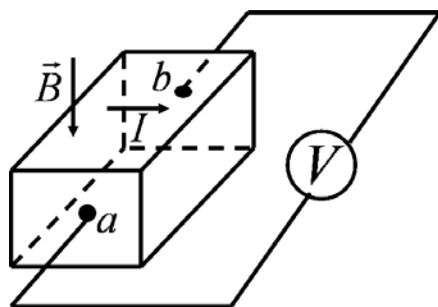
## 作业 10

1. 如图 10-1 所示，半导体薄片为  $N$  型，则  $a$ 、 $b$  两点的电势差  $U_{ab}$  [ ]。

- A. 小于零
- B. 等于零
- C. 大于零

答案：【A】

解： $N$  型半导体是电子导电，电子在外电压的作用下，沿电流相反方向漂移。这一定向运动，在外磁

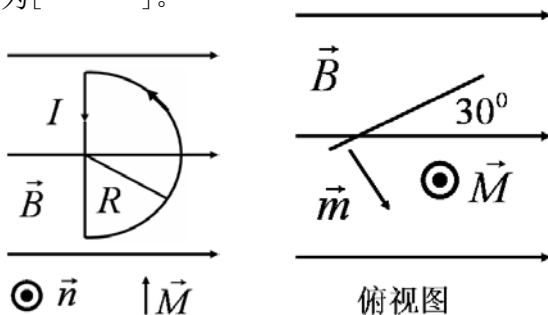


场的作用下，电子受到洛伦兹力， $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ ，方向由  $b$  指向  $a$ ，即电子还要向  $a$  端漂移。这样，在  $a$  端积聚负电荷，在  $b$  端积聚正电荷，形成一个由  $b$  指向  $a$  的横向电场，这一横向电场阻止电子向  $a$  端积聚。随着电子的积聚，横向电场越来越大，当电子受到的横向电场的库仑力与电子受到的洛伦兹力达到平衡时，电子不再宏观的横向漂移，形成稳定的横向霍尔电场，在  $a$ 、 $b$  两端形成稳定的霍尔电压。

由于  $b$  端是正电荷、 $a$  端是负电荷，所以， $b$  端电势高、 $a$  端电势低。

2. 如图 10-2 所示，半圆形线圈半径为  $R$ ，通有电流  $I$ ，在磁场  $B$  的作用下从图示位置转过  $30^\circ$  时，它所受磁力距的大小和方向分别为[ ]。

- A.  $\frac{\pi R^2 IB}{4}$ ，沿图面竖直向下
- B.  $\frac{\pi R^2 IB}{4}$ ，沿图面竖直向上
- C.  $\frac{\sqrt{3}\pi R^2 IB}{4}$ ，沿图面竖直向下
- D.  $\frac{\sqrt{3}\pi R^2 IB}{4}$ ，沿图面竖直向上



答案：【D】

解：载流线圈的磁矩为

$$\vec{m} = I\vec{S} = IS\vec{n} = \frac{1}{2}\pi R^2 I\vec{n}$$

载流线圈在磁场中受到的磁力矩为

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = \frac{1}{2}\pi R^2 I\vec{n} \times \vec{B}$$

如图，在没有转动前， $\vec{n}$  垂直于纸面向外，与磁场垂直，载流线圈受到的磁力矩最大



$$M = \frac{1}{2} \pi R^2 B$$

方向为竖直向上，在这一磁力矩的作用下，线圈将转动。从上俯视，线圈逆时针转动。

当线圈转过  $30^\circ$  时， $\vec{n}$  与磁场成  $60^\circ$  角，则此时线圈受到的磁力矩为

$$M = mB \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \pi R^2 IB \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi R^2 IB$$

方向为：竖直向上。如图，俯视图。

3. 在一无限长刚性载流直导线产生的磁场中，把同样的载流导线分别从  $a$  处移到  $c$  处、从  $b$  处移到  $c$  处（ $a$ 、 $b$ 、 $c$  位置如图 10-3 所示）。在移动过程中导线之间保持平行，若两次移动磁力做的功分别记为  $A_{ac}$  和  $A_{bc}$ ，则 [ ]。

- A.  $A_{ac} = A_{bc} = 0$
- B.  $A_{ac} = A_{bc} \neq 0$
- C.  $A_{ac} > A_{bc}$
- D.  $A_{ac} < A_{bc}$

答案：【B】  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$

解：由毕萨定律和安培力  $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ ，可以判断出，载流直导线受到的安培力指向圆心。因此，无论载流直导线从  $a$  移动  $c$ ，还是从  $b$  移动  $c$ ，安培力都作正功，不为零。

如图，从  $a$  移动  $c$ ，安培力作功

$$dA_{ac} = \vec{F} \cdot d\vec{S} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Fdr;$$

从  $b$  移动  $c$ ，安培力作功

$$dA_{bc} = \vec{F} \cdot d\vec{S} = FdS \cos \theta = Fdr。$$

而从  $a$  移动  $c$  和从  $b$  移动  $c$ ，矢径  $r$  的变化是一样的，因此，两种情况，安培力作功相同。

4. 一长直导线载有  $10A$  的电流，在距它为  $a = 2cm$  处有一电子由于运动受洛伦兹力  $\vec{f}$  的方向如图 10-4 所示，且  $f = 1.6 \times 10^{-16} N$ 。设电子在它与  $GE$  组成的平面内运动，则电子的速率  $v = \underline{\hspace{2cm}}$ ，在图中画出  $\vec{v}$  的方向。

答案：  $v = 10^7 m/s$

解：电子在  $GE$  平面内运动，即速度与洛伦兹力在同一平面内。而  $G$  点的磁场方向垂直纸面（ $GE$  平面）向里，所以电子运动速度与磁场垂直。

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad f = qvB$$

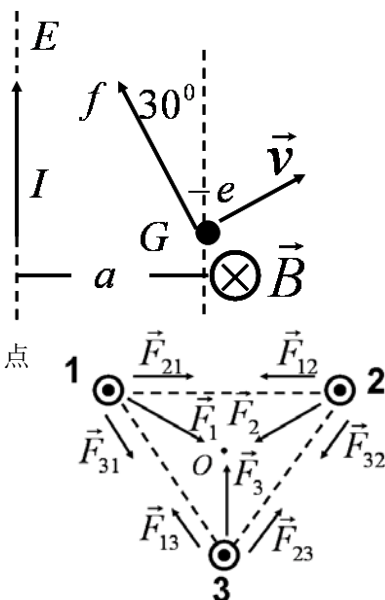
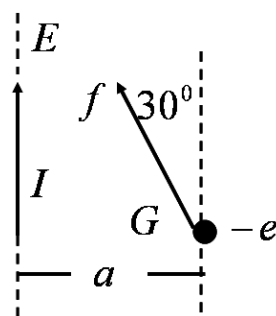
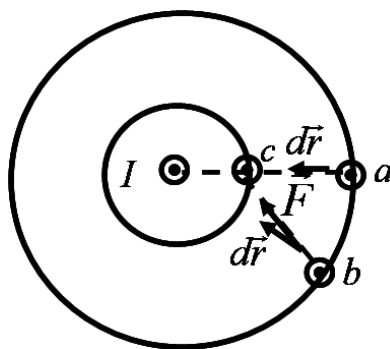
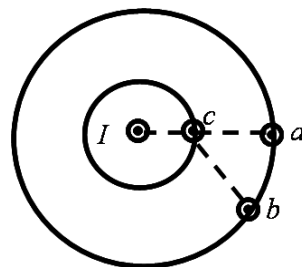
而  $G$  点的电磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 0.02} = 10^{-4} (T)$$

所以，电子的运动速率为

$$v = \frac{f}{qB} = \frac{1.6 \times 10^{-16}}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-4}} = 10^7 m/s$$

由洛伦兹力公式，可以找出电子（带负电荷）在  $G$  点的速度方向，如图。可见，电子将逆时针旋转。





5. 在空间有同样的三根直导线，相互间的距离相等，各通以同强度同方向的电流，设除了磁相互作用外，其他影响可忽略，则三条导线将\_\_\_\_\_运动。

答案：向三角形中心运动。

解：如图，因为同向电流导线相吸引。所以，三条载流导线向三角形中心  $O$  运动。

6. 厚度  $2\text{cm}$  的金属片，载有  $20\text{A}$  电流，处于磁感应强度为  $2.0\text{T}$  的均匀磁场中，（如图 10-5 所示），测得霍尔电势差为  $4.27\mu\text{V}$ 。

（1）计算片中电子的漂移速度。

（2）求带电电子的浓度。

（3） $a$  和  $b$  哪点电势较高？

（4）如果用  $P$  型半导体代替该金属片， $a$  和  $b$  哪点电势高？

解：（1）当稳定时，金属中自由电子所受磁场的洛伦兹力与霍尔电场库仑力平衡

$$ev_d B = eE_H = e \frac{V_H}{l}$$

$$v_d = \frac{V_H}{Bl} = \frac{4.27 \times 10^{-6}}{2.0 \times 2 \times 10^{-2}}$$

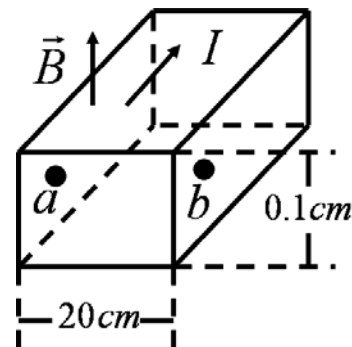
$$= 1.07 \times 10^{-4} (\text{m/s})$$

（2） $ab$  两端的霍尔电势差为

$$|V_H| = \frac{1}{ne} \frac{IB}{h}$$

得电子浓度为

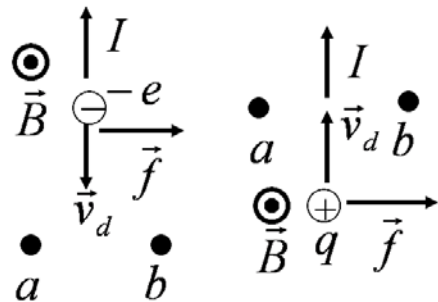
$$n = \frac{IB}{e|V_H|h} = 2.93 \times 10^{28} (1/\text{m}^3)$$



（3）如图，在金属中，在外电场的作用下，自由电子的运动方向与电流的方向相反。由洛伦兹力  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B}$

可知，电子受到的洛伦兹力方向是由  $a$  指向  $b$ ，电子向  $b$  端偏转。 $b$  端积聚负电荷， $a$  端积聚正电荷。所以  $a$  点电势高， $b$  点电势低。

（4） $P$  型半导体是空穴导电，即正电荷导电，如图。正电荷空穴的运动方向与电流方向相同。洛伦兹力  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ，仍然是由  $a$  指向  $b$ ，但此时是正电荷空穴向  $b$  端偏转， $b$  端积聚正电荷， $a$  端积聚负电荷。所以  $b$  点电势高， $a$  点电势低。



7. 一矩形线圈，边长为  $8\text{cm}$  和  $10\text{cm}$ ，其中通  $10\text{A}$  电流，放在  $B = 0.5\text{T}$  的均匀磁场中，线圈平面与磁场方向平行（10-6 所示）。

求：（1）线圈所受力矩的大小和方向；

（2）若此线圈受力矩作用转到线圈平面与磁场垂直的位置，力矩做功多少？

解：（1）载流线圈在磁场中所受的磁力矩为

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = IS \vec{n} \times \vec{B}$$

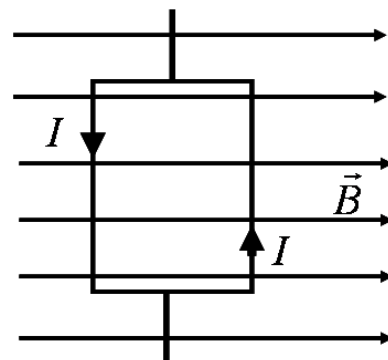
当载流线圈平面与磁场平行时，载流线圈平面的法线方向  $\vec{n}$  与磁场垂直，磁力矩最大

$$M = mB = Il_1 l_2 B = 0.04 (\text{N} \cdot \text{m})$$

方向：载流线圈平面的法线方向  $\vec{n}$  垂直纸面向外，所以，磁力矩方向竖直向上。

（2）在载流线圈转动过程中，磁力矩做的功等于：

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$



这里:  $\Phi_1 = 0$ ;  $\Phi_2 = BS = Bl_1l_2$

所以:  $A = IBS = 0.04J$

## 作业 11

1. 载流长直螺线管内充满相对磁导率为  $\mu_r$  的均匀抗磁质, 则螺线管内中部的磁感应强度  $B$  和磁场强度  $H$  的关系是[ ]。

- A.  $B > \mu_0 H$       B.  $B = \mu_r H$       C.  $B = \mu_0 H$       D.  $B < \mu_0 H$

答案: 【D】

解: 对于非铁磁质, 电磁感应强度与磁场强度成正比关系

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

抗磁质:  $\mu_r \leq 1$ , 所以,  $B < \mu_0 H$

2. 在稳恒磁场中, 关于磁场强度  $\vec{H}$  的下列几种说法中正确的是[ ]。

- A.  $\vec{H}$  仅与传导电流有关。  
B. 若闭合曲线内没有包围传导电流, 则曲线上各点的  $\vec{H}$  必为零。  
C. 若闭合曲线上各点  $\vec{H}$  均为零, 则该曲线所包围传导电流的代数和为零。  
D. 以闭合曲线  $L$  为边界的任意曲面的  $\vec{H}$  通量相等。

答案: 【C】

解: 安培环路定理  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$ , 是说: 磁场强度  $\vec{H}$  的闭合回路的线积分只与传导电流

有关, 并不是说: 磁场强度  $\vec{H}$  本身只与传导电流有关。A 错。

闭合曲线内没有包围传导电流, 只能得到: 磁场强度  $\vec{H}$  的闭合回路的线积分为零。并不能说: 磁场强度  $\vec{H}$  本身在曲线上各点必为零。B 错。

高斯定理  $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ , 是说: 穿过闭合曲面, 场感应强度  $\vec{B}$  的通量为零, 或者说, .

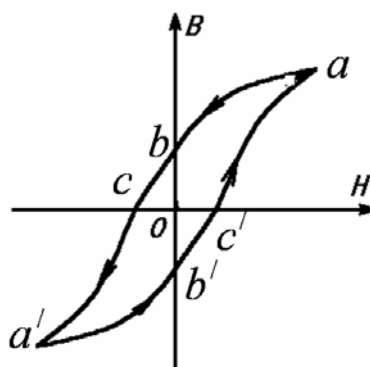
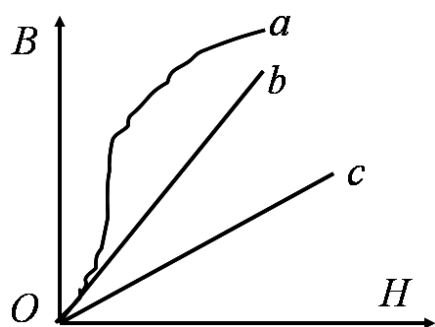
以闭合曲线  $L$  为边界的任意曲面的  $\vec{B}$  通量相等。对于磁场强度  $\vec{H}$ , 没有这样的高斯定理。不能说, 穿过闭合曲面, 场感应强度  $\vec{H}$  的通量为零。D 错。

安培环路定理  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$ , 是说: 磁场强度  $\vec{H}$  的闭合回路的线积分等于闭合回路

包围的电流的代数和。C 正确。

3. 图 11-1 种三条曲线分别为顺磁质、抗磁质和铁磁质的  $B-H$  曲线, 则  $Oa$  表示\_\_\_\_\_;  
 $Ob$  表示\_\_\_\_\_;  $Oc$  表示\_\_\_\_\_。

答案: 铁磁质; 顺磁质; 抗磁质。



4. 某铁磁质的磁滞回线如图 11-2 所示, 则图中  $Ob$  (或  $Ob'$ ) 表示 \_\_\_\_\_ ;  $Oc$  (或  $Oc'$ ) 表示 \_\_\_\_\_。

答案: 剩磁; 矫顽力。

5. 螺线环中心周长  $l = 10\text{cm}$ , 环上线圈匝数  $N = 300$ , 线圈中通有电流  $I = 100\text{mA}$ 。(1) 求管内的磁场强度  $H$  和磁感应强度  $B$ ; (2) 若管内充满相对磁导率  $\mu_r = 4000$  的磁介质, 则管内的  $H$  和  $B$  是多少? (3) 磁介质内由导线中电流产生的  $B_0$  和磁化电流产生的  $B'$  各是多少?

解: (1) 做一圆形的环路, 由  $\vec{H}$  的安培环路定理:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma I$$

$$H \cdot 2\pi r = NI,$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{NI}{l} = nI = 300 \text{ (A/m)}$$

对管内, 此时无磁介质, 则:

$$\mu_r = 1 \therefore B_0 = \mu_0 H = 3.77 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$(2) \text{ 管内充满磁介质时, } \mu_r = 4000 \therefore B = \mu_0 \mu_r H = 1.58 \text{ T}$$

$$(3) \text{ 磁介质内由导线中电流产生的磁场 } B_0 = \mu_0 H = 3.77 \times 10^{-4} \text{ T}$$

由磁化电流产生的磁场  $B' = B - B_0 = 1.58 \text{ T}$

6. 一无限长圆柱形直导线, 外包一层相对磁导率为  $\mu_r$  的圆筒形磁介质, 导线半径为  $R_1$ , 磁介质外半径为  $R_2$ , 导线内有电流  $I$  通过 (见图 11-3)。求: (1) 介质内、外的磁感应强度的分布, 画出  $B-r$  图线; (2) 介质内、外的磁场强度的分布, 画出  $H-r$  曲线。

解: 在以圆柱轴线为对称轴的圆周上, 各处磁场强度大小相等且沿圆周切线方向。应用  $H$  的安培环路定理,

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi rH = \Sigma I_0$$

$$\text{在导体内, } r < R_1: \Sigma I_0 = I \frac{\pi r^2}{\pi R_1^2} = I \frac{r^2}{R_1^2}, \quad 2\pi rH = I \frac{r^2}{R_1^2} (r < R_1),$$

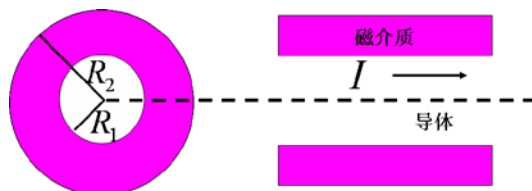
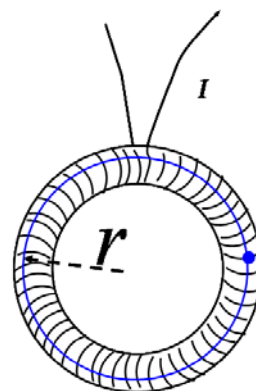
$$\text{在导体外, } r > R_1: \Sigma I_0 = I, \quad 2\pi rH = I (r > R_1),$$

$$2\pi rH = I (r > R_1),$$

因此

$$H = \begin{cases} I / (2\pi r) & (r > R_1) \\ Ir / (2\pi R_1^2) & (r < R_1) \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \mu_0 Ir / (2\pi R_1^2) & (r < R_1) \\ \mu_0 \mu_r I / (2\pi r) & (R_1 < r < R_2) \\ \mu_0 I / (2\pi r) & (r > R_2) \end{cases}$$



7. 介质中安培环路定理为  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i$ ,  $\sum I_i$  为正向穿过闭合回路  $L$  的传导电流的代数和, 这是否可以说:  $\vec{H}$  只与传导电流有关, 与分子电流无关?

答案: 不能。

解: 介质中的安培环路定理说明定理的左端, 即  $\vec{H}$  的环流只也传导电流有关, 与分子电流无关; 并不可以说  $\vec{H}$  只与传导电流有关, 与分子电流无关。这里  $\vec{H}$  的环流和  $\vec{H}$  是两个不同的概念。

$r \quad R_1$

## 作业 12

1. 在如图 12-1 所示的装置中, 当不太长的条形磁铁在闭合导线圈内作振动时 (忽略空气阻力), 则 [ ]。

- A. 振幅不变
- B. 振幅先减小后增大
- C. 振幅会逐渐加大
- D. 振幅会逐渐减小

答案: 【D】

解: 楞次定律。

当磁铁在闭合导线圈内作振动时, 穿过线圈的磁场变化, 在线圈中产生感生电动势, 在闭合线圈中有感生电流。这一电流又产生磁场, 但总是阻碍由于磁铁的振动而引起的穿过线圈的磁场的变化。弹簧与磁铁组成的振子的振动能量会逐渐减小, 因此, 振幅会逐渐减小。

振子会损失能量, 损失的能量, 通过线圈中的感生电流转化为焦耳热。  $\omega$

2. 如图 12-2 所示, 在均匀磁场  $\vec{B}$  中, 有一半径为  $R$  的导体圆盘,

盘面与磁场方向垂直, 当圆盘以匀角速度  $\omega$  绕过盘心的与  $\vec{B}$  平行的轴转动时, 盘心  $O$  与边缘上的  $A$  点间, 其电势差  $V_O - V_A$  等于 [ ]。

- A.  $\frac{1}{2}\omega R^2 B$
- B.  $-\frac{1}{2}\omega R^2 B$
- C.  $\frac{1}{4}\omega R^2 B$
- D.  $-\frac{1}{4}\omega R^2 B$

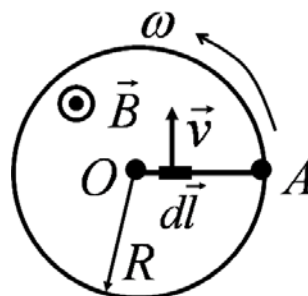
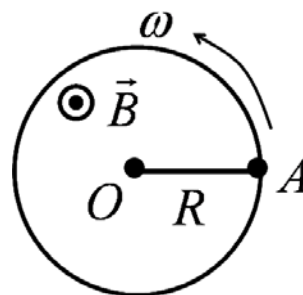
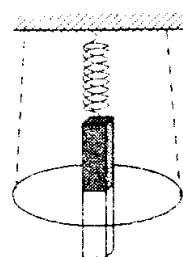
答案: B】

解: 由于导体圆盘, 相当于有无数多由盘心到盘边的直导线绕盘心  $O$  转动, 切割磁场线, 因此, 会在盘心  $O$  与盘边产生动生电动势。在  $OA$  上, 距盘心  $r$  处取线元  $d\vec{l} = d\vec{r}$ , 它所产生的动生电动势为

$$d\varepsilon_{OA} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

由图可见,  $\vec{v}$  与  $\vec{B}$  垂直、 $(\vec{v} \times \vec{B})$  与  $d\vec{r}$  方向相同, 所以

$$d\varepsilon_{OA} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = vBdr = \omega rBdr$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_{OA} &= \int_{OA} d\varepsilon_{OA} = \int_{OA} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{OA} \omega B r dr = \int_0^R \omega B r dr = \frac{1}{2} \omega B R^2\end{aligned}$$

电动势的方向为低电势指向高电势，即

$$\varepsilon_{OA} = U_A - U_O = \frac{1}{2} \omega B R^2, \quad U_O - U_A = -\frac{1}{2} \omega B R^2$$

3. 如图 12-3 所示，一长度为  $l$  的直导线  $ab$  在均匀磁场  $\vec{B}$  中以恒定速度  $\vec{v}$  移动，直导线  $ab$  中的动生电动势为\_\_\_\_\_。

答案：0

解：取取线元  $d\vec{l}$ ，则

$$d\varepsilon_{ab} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

由于  $\vec{v}$  与  $\vec{B}$  共面（平行于纸面），则  $(\vec{v} \times \vec{B})$  垂直于纸面，而  $d\vec{l}$  也平行于纸面，所以

$$d\varepsilon_{ab} = 0, \quad \varepsilon_{ab} = \int_{ab} d\varepsilon_{ab} = \int_{ab} d\varepsilon_{ab} = 0$$

4. 长直导线通有电流  $I = 5A$ ，在其附近有一导线棒  $ab$ ， $l = 20cm$ ，离长直导线距离  $d = 12cm$ （如图 12-4 所示）当它沿平行于直导线的方向以速度  $v = 10m \cdot s^{-1}$  平移时，导线棒中的感应电动势多大？哪端的电势高？（导线棒与长直导线共面且垂直）

解：如图，建立直角坐标系，取线元  $d\vec{l} = dx\vec{i}$ ，则

$$\vec{v} = v\vec{j}$$

无限长载流直导线，产生的磁场为（在棒  $ab$  处）

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi x} (-\vec{k}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{k}$$

则线元  $d\vec{l} = dx\vec{i}$  的动生电动势为

$$\begin{aligned}d\varepsilon_{ab} &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= (-v\vec{j} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{k}) \cdot dx\vec{i} \\ &= (-v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{i}) \cdot dx\vec{i} \\ &= -v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx\end{aligned}$$

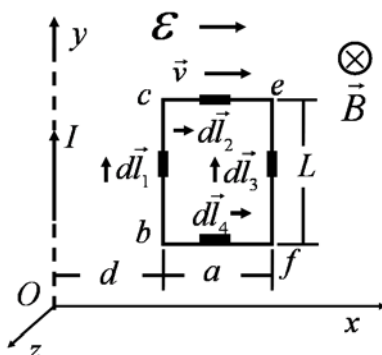
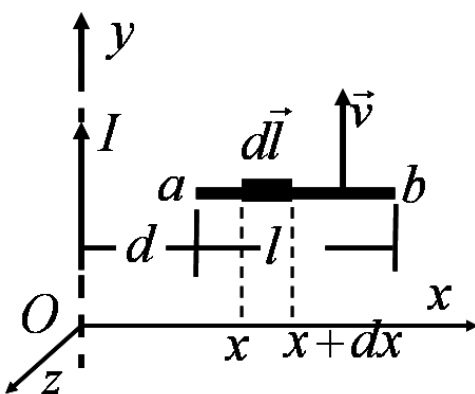
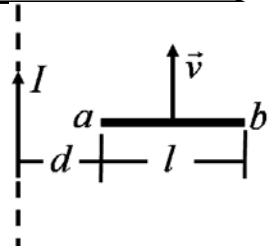
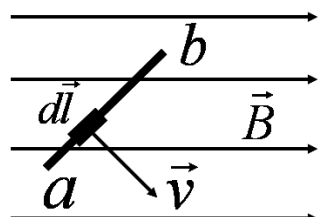
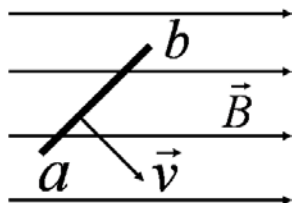
整个金属棒中感应电动势为

$$\varepsilon_{ab} = \int_{ab} d\varepsilon_{ab} = \int_d^{d+l} -v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{l+d}{d} = -0.98 \times 10^{-5} V$$

由于  $\varepsilon_{ab} = U_b - U_a < 0$ ，所以， $a$  端电势高。

5. 如图 12-5 所示，长直导线中通有电流  $I = 6A$ ，另一矩形线圈与长直导线共面共 10 匝，宽  $a = 10cm$ ，长  $L = 20cm$ ，以  $v = 2m \cdot s^{-1}$  的速度向右运动，求： $d = 10cm$  时线圈中的感应电动势。 $d\vec{l}_1 \varepsilon$

解 1：动生电动势。将矩形导体框看成 4 段导体棒，则每个棒都在无限长载流直导线产生的磁场中运动，都有可能



有动生电动势，总的电动势是每段动生电动势的代数和。

如图，建立直角坐标系，则

$$\vec{v} = v\vec{i}$$

无限长载流直导线，产生的磁场为（在棒  $bcef$  处）

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi x}(-\vec{k}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k}$$

线元  $d\vec{l}_1 = dy\vec{j}$  的动生电动势为

$$d\mathcal{E}_{bc} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}_1 = (-v\vec{i} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{k}) \cdot dy\vec{j} = (v\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{j}) \cdot dy\vec{j} = v\frac{\mu_0 I}{2\pi d}dy$$

$$\mathcal{E}_{bc} = \int_{bc} d\mathcal{E}_{bc} = \int_0^L v\frac{\mu_0 I}{2\pi d}dx = \frac{\mu_0 I v}{2\pi d}L$$

线元  $d\vec{l}_2 = dx\vec{i}$  的动生电动势为

$$d\mathcal{E}_{ce} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}_2 = (-v\vec{i} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k}) \cdot dx\vec{i} = (v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{j}) \cdot dx\vec{i} = 0, \quad \mathcal{E}_{ce} = 0$$

线元  $d\vec{l}_3 = dy\vec{j}$  的动生电动势为

$$d\mathcal{E}_{fe} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}_3 = (-v\vec{i} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}\vec{k}) \cdot dy\vec{j}$$

$$= (v\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}\vec{j}) \cdot dy\vec{j} = v\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}dy$$

$$\mathcal{E}_{fe} = \int_{fe} d\mathcal{E}_{fe} = \int_0^L v\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}dx = \frac{\mu_0 I v}{2\pi(d+a)}L, \quad \mathcal{E}_{ef} = -\mathcal{E}_{fe} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi(d+a)}L$$

线元  $d\vec{l}_4 = dx\vec{i}$  的动生电动势为

$$d\mathcal{E}_{bf} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}_4 = (-v\vec{i} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k}) \cdot dx\vec{i} = (v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{j}) \cdot dx\vec{i} = 0$$

$$\mathcal{E}_{bf} = 0, \mathcal{E}_{fb} = -\mathcal{E}_{bf} = 0$$

以顺时针方向为线框中电动势的正方向，则

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{bc} + \mathcal{E}_{be} + \mathcal{E}_{ef} + \mathcal{E}_{fb} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi d}L + 0 - \frac{\mu_0 I v}{2\pi(d+a)}L + 0 = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}L(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a})$$

线圈共有  $N$  匝，所以，电动势为

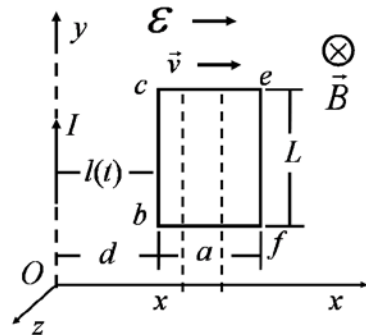
$$E = N\mathcal{E} = N\frac{\mu_0 I v}{2\pi}L(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a}) = 2.4 \times 10^{-5} (V)$$

解 2：感生电动势。由于无限长载流导线产生的磁场与场点到导线的距离成反比，线圈在移动的过程中，穿过线圈平面的磁通量发生变化，因此在线圈中产生感生电动势。

如图，建立直角坐标系。设  $t$  时刻  $bc$  边距离载流直导线  $l(t)$ ，感生电动势的正方向为顺时针方向，即取磁通量的正方向垂直纸面向里。则速度

$$v = \frac{dl(t)}{dt}$$

无限长载流直导线，产生的磁场为（在棒  $bcef$  处）



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi x}(-\vec{k}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k}$$

取  $t$  时刻  $x \rightarrow x + dx$  的面积元  $d\vec{S} = Ldx(-\vec{k})$ , 则穿过单匝线圈中  $d\vec{S}$  的磁通量为

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{k} \cdot Ldx(-\vec{k}) = \frac{\mu_0 LI}{2\pi x}dx$$

穿过单匝线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{l(t)}^{l(t)+a} \frac{\mu_0 LI}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 LI}{2\pi} \ln \frac{l(t)+a}{l(t)}$$

由法拉第电磁感应定律, 得到单匝线圈产生的电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 LI}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[ \ln \frac{l(t)+a}{l(t)} \right] \\ &= -\frac{\mu_0 LI}{2\pi} \left[ \frac{1}{l(t)+a} - \frac{1}{l(t)} \right] \frac{dl(t)}{dt} = \frac{\mu_0 LI}{2\pi} \left[ \frac{1}{l(t)} - \frac{1}{l(t)+a} \right] v \end{aligned}$$

当  $l(t) = d$  时, 总电动势为

$$E = N\varepsilon = N \frac{\mu_0 LI}{2\pi} \left[ \frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right] v = 2.4 \times 10^{-5} (V)$$

解 3: 线框的上下两条边不切割磁力线, 所以不产生感应电动势, 只有左右两条边切割磁力线产生感应电动势, 在  $d = 10\text{cm}$  时, 设左边处的磁感应强度为  $B_1$ , 右边处为  $B_2$ , 则此时线框中的磁感应电动势为:

$$\varepsilon = N[B_1Lv - B_2Lv] = N \left[ \frac{\mu_0 I}{2\pi d}Lv - \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+a)}Lv \right] = N \frac{\mu_0 ILv}{2\pi} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) = 2.4 \times 10^{-5} V$$

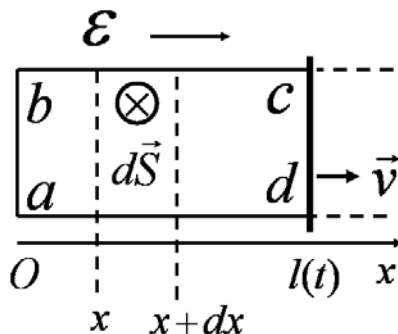
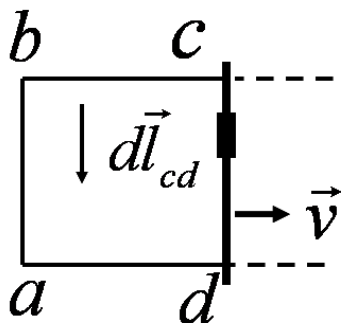
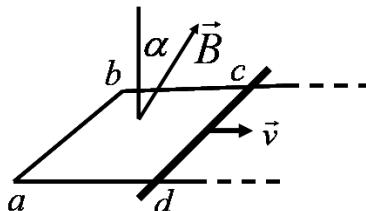
6. 如图 12-6 所示, 一长方形平面金属线框至于均匀磁场中, 磁场方向与线框平面法线的夹角为  $\alpha = 30^\circ$ , 磁感应强度  $B = 0.5T$ , 可滑动部分  $cd$  的长度为  $L = 0.2m$ , 以  $v = 1m \cdot s^{-1}$  的速度向右运动, 求线框中的感应电动势。

解 1: 动生电动势。 $cd$  段导体棒在匀强磁场中运动, 产生动生电动势。 $cd$  段导体棒上的动生电动势等于线圈中的电动势。

线元  $d\vec{l}_{cd}$  的动生电动势为

$$d\varepsilon_{cd} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}_{cd} = [vB \sin(\pi - \alpha)] \vec{cd} \cdot d\vec{l}_{cd} = vB \cos \alpha dl_{cd}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{cd} = \int_{cd} \varepsilon_{cd} = \int_0^L vB \cos \alpha dl_{cd} = vBL \cos \alpha = 0.0866(V)$$



解 2: 感生电动势。 $cd$  段导体棒运动, 矩形导体线圈的面积变化, 穿过线圈的磁通量变化, 在线圈中产生感生电动势。



如图，建立直角坐标系。设  $t$  时刻  $cd$  边距离载流直导线  $l(t)$ ，感生电动势的正方向为顺时针方向，即取磁通量的正方向垂直纸面向里。

取  $t$  时刻  $x \rightarrow x + dx$  的面积元  $d\vec{S}$ ，则穿过线圈中  $d\vec{S}$  的磁通量为

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS \cos(\pi - \alpha) = -BL \cos \alpha dx$$

穿过线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_0^{l(t)} -BL \cos \alpha dx = -BLl(t) \cos \alpha$$

由法拉第电磁感应定律，得到单匝线圈产生的电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[-BLl(t) \cos \alpha] = BL \frac{dl(t)}{dt} \cos \alpha = BLv \cos \alpha = 0.0866(V)$$

解 3：对产生电动势起作用的是垂直于速度的磁场分量  $\varepsilon$

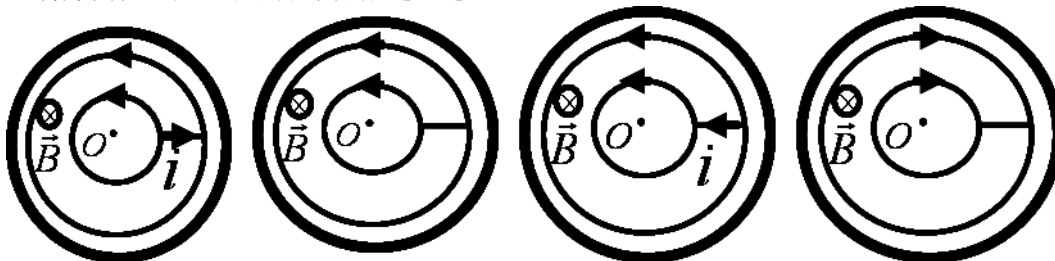
$$|\varepsilon_i| = B_{\perp} LV = BLV \cos \alpha = 0.0866 V$$

7. 将尺寸完全相同的铜环和木环适当放置，使通过两环中的磁通量的变化率相等。问：在两环中是否产生相同的感应电场和感应电流？

答：会产生相同的感应电场，但在铜环中会有感应电流产生，而在木环中没有感应电流产生。因为铜是导体，而木头不是。

## 作业 13

1. 用导线围成的回路（两个以  $O$  点为圆心，半径不同的同心圆，在一处用导线沿半径方向相连），放在轴线通过  $O$  点的圆柱形均匀磁场中，回路平面垂直于柱轴，如图 13-1 所示。如磁场方向垂直图面向里，其大小随时间减小，则 (A)，(B)，(C)，(D)，中正确表示涡旋电场方向及感应电流的流向的是 [ ]。



答：D

解：由楞次定律判断感应电流的方向。由于磁场垂直于纸面向里，并且减小，所以，感生电流产生的磁场垂直于纸面向里，由此可以判断出：回路中感生电流的方向是顺时针的。

注意：由于两环之间的导线上没有电动势，所以不同环之间没有电流。

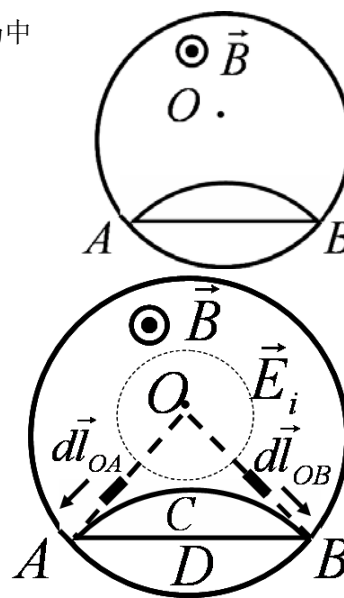
2. 均匀磁场限制在圆柱形空间（如图 13-2） $\frac{dB}{dt} \neq 0$ 。磁场中

A, B 两点用直导线 AB 连接，或用弧导线 AB 连接，则 [ ]。

- A. 直导线中电动势较大
- B. 只有直导线中有电动势
- C. 两导线中的电动势相等
- D. 弧导线中电动势较大

答：A

解：连接  $OA$  和  $OB$ ，则由于感生电场是同心圆。在  $OA$  上，线元  $d\vec{l}_{OA}$  与感生的涡旋电场  $\vec{E}_{iOA}$  垂直；在  $OB$  上，线元





$d\vec{l}_{OB}$  与感生的涡旋电场  $\vec{E}_{iOB}$  垂直。因此,  $OA$  和  $OB$  上的电动势为零

$$\varepsilon_{OA} = \int d\varepsilon_{OA} = \int \vec{E}_{iOA} \cdot d\vec{l}_{OA} = 0$$

$$\varepsilon_{OB} = \int d\varepsilon_{OB} = \int \vec{E}_{iOB} \cdot d\vec{l}_{OB} = 0$$

由法拉第电磁感应定律, 回路  $OACBO$  上的感应电动势为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{OACBO} &= \varepsilon_{OA} + \varepsilon_{ACB} + \varepsilon_{BO} = \varepsilon_{OA} + \varepsilon_{ACB} - \varepsilon_{OB} = \varepsilon_{ACB} \\ &= -\frac{d\Phi_{OACBO}}{dt} = -\frac{dB}{dt} S_{OACBO}\end{aligned}$$

则弧线  $ACB$  上的电动势为

$$\varepsilon_{ACB} = -\frac{dB}{dt} S_{OACBO}, \quad |\varepsilon_{ACB}| = \left| \frac{dB}{dt} \right| S_{OACBO}$$

弧线  $AB$  上的电动势为

$$\varepsilon_{AB2} = \left| \frac{dB}{dt} \right| S_{ABO2}$$

回路  $OADBO$  上的感应电动势为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{OADBO} &= \varepsilon_{OA} + \varepsilon_{ADB} + \varepsilon_{BO} = \varepsilon_{OA} + \varepsilon_{ADB} - \varepsilon_{OB} = \varepsilon_{ADB} \\ &= -\frac{d\Phi_{OADBO}}{dt} = -\frac{dB}{dt} S_{OADBO}\end{aligned}$$

则直线  $ADB$  上的电动势为

$$\varepsilon_{ADB} = -\frac{dB}{dt} S_{OADBO}, \quad |\varepsilon_{ADB}| = \left| \frac{dB}{dt} \right| S_{OADBO}$$

由于  $S_{OACBO} < S_{OADBO}$ , 所以  $\varepsilon_{ADB} > \varepsilon_{ACB}$

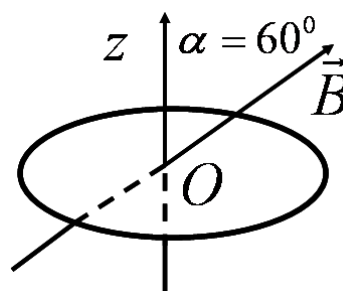
3. 如图 13-3 所示, 闭合线圈共 50 匝, 半径  $r=4\text{cm}$ , 线圈法线正向与磁感应强度之间的夹角  $\alpha = 60^\circ$ , 磁感应强度  $B = (2t^2 + 8t + 5) \times 10^{-2} \text{ T}$ 。求:  $t = 3\text{s}$  时感应电动势的大小和方向。

解: 穿过一个线圈的磁通量为:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \alpha$$

感应电动势为: (取俯视时, 逆时针方向为感生电动势的正方向)

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= -N \frac{d\Phi}{dt} = -NS \cos \alpha \frac{dB}{dt} \\ &= -N(\pi r^2) \frac{d}{dt} [(2t^2 + 8t + 5) \times 10^{-2}] \cos \alpha \\ &= -N(\pi r^2) (4t + 8) \times 10^{-2} \cos \alpha \\ \varepsilon_i|_{t=3\text{s}} &= -2.51 \times 10^{-2} \text{ V}\end{aligned}$$



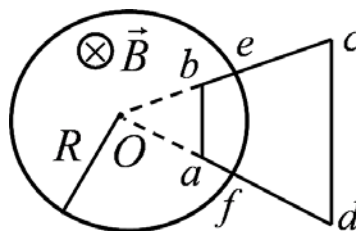
4. 如图 1 3-4 所示, 一均匀磁场被限制在  $R=1$  的圆柱形空间内, 磁场以  $\frac{dB}{dt} = 50 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$  的均匀速率增加, 已知

$\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $oa = ob = 0.4\text{m}$ , 求: 等腰梯形导线框中的感应

电动势, 并指出其方向。

解: 线框  $abcd$  所围面积中只有  $abef$  一部分有磁通量, 此面积

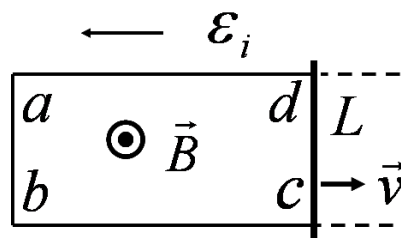
$$S' = \frac{1}{2} R^2 \theta - \frac{1}{2} oa^2 \sin \theta = 0.454 \text{ m}^2, \quad \text{回路 } abcd \text{ 方向与磁场方向一致}$$



感应电动势  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -S' \frac{dB}{dt} = -22.7V$ , 负号表示其方向由 d 到 c。

5. 如图 13-5 所示, 随时间变化的均匀磁场, 磁感应强

度  $B = 1.5e^{-\frac{t}{10}}T$ , 在其中放一固定的 U 形导轨, 导轨上有一长为  $L = 10cm$  的导体杆可无摩擦滑动, 设  $t = 0$  时可滑动杆  $cd$  与  $ab$  重合, 并开始以  $v = 100cm.s^{-1}$  的速度匀速向右运动, 求任一瞬时导体杆中的电动势。



解: 穿过导体杆  $L$  与导轨形成的线圈的磁通量:

$$\Phi(t) = \vec{B}(t) \cdot \vec{S}(t) = \vec{B}(t) \cdot (L\vec{v}t) = B(t)Lvt = 1.5e^{-\frac{t}{10}}Lvt$$

导体杆中的电动势为:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BLvt) = -Lv \frac{d}{dt}\left(1.5e^{-\frac{t}{10}}\right) = -1.5Lv\left(1 - \frac{t}{10}\right)e^{-\frac{t}{10}} = -0.15\left(1 - \frac{t}{10}\right)e^{-\frac{t}{10}}$$

6. 一块金属在均匀磁场中平移或旋转, 金属中会产生涡流吗?

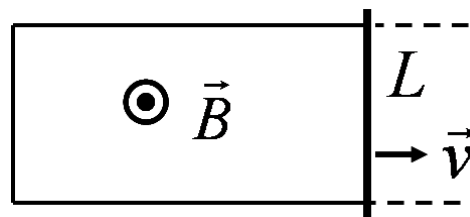
[答] 不会产生涡电流。因为涡旋电动势是由磁场随时间变化产生。

7. 变压器的铁芯总是做成片状的, 而且涂上绝缘漆互相隔开, 为什么?

[答] 减少涡旋电流

5 如图 13-5 所示, 随时间变化的均匀磁场, 磁感

应强度  $B = 1.5e^{-\frac{t}{10}}T$ , 在其中放一固定的 U 形导轨, 导轨上有一长为  $L = 10cm$  的导体杆可无摩擦滑动, 设  $t = 0$  时可滑动杆  $cd$  与  $ab$  重合, 并开始以  $v = 100cm.s^{-1}$  的速度匀速向右运动, 求任一瞬时导体杆中的电动势。



解: 穿过导体杆  $L$  与导轨形成的线圈的磁通量:

$$\Phi(t) = \vec{B}(t) \cdot \vec{S}(t) = \vec{B}(t) \cdot (L\vec{v}t) = B(t)Lvt = 1.5e^{-\frac{t}{10}}Lvt$$

回路中的感生电动势为:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BLvt) = -Lv \frac{d}{dt}\left(1.5e^{-\frac{t}{10}}\right) = -1.5Lv\left(1 - \frac{t}{10}\right)e^{-\frac{t}{10}} = -0.15\left(1 - \frac{t}{10}\right)e^{-\frac{t}{10}}$$

这是整个回路的感生电动势。

在  $t$  时刻, 回路的长度为

$$l = 2L + 2vt$$

则在  $t$  时刻, 导体棒  $cd$  上的感生电动势为

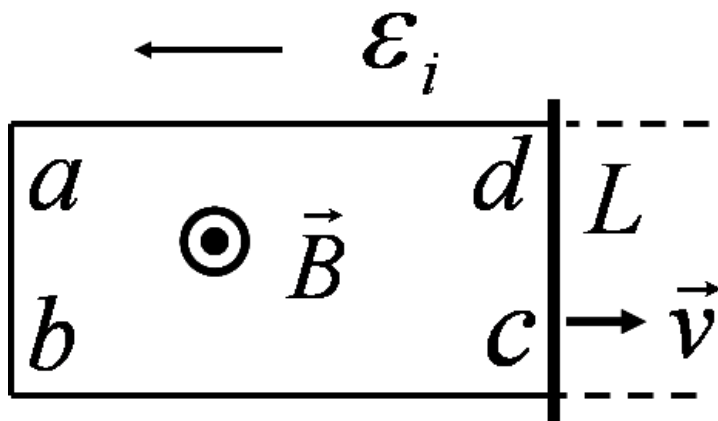
$$\varepsilon_{icd} = \frac{L}{l} \varepsilon_i = \frac{L}{2L + 2vt} \varepsilon_i = -0.15 \frac{L}{2L + 2vt} \left(1 - \frac{t}{10}\right) e^{-\frac{t}{10}}$$

在  $t$  时刻, 导体棒  $cd$  上的动生电动势为

$$\varepsilon_{cd} = -vBL$$

在  $t$  时刻, 导体棒  $cd$  上的动应电动势为

$$\varepsilon = \varepsilon_{icd} + \varepsilon_{cd} = -vBL - 0.15 \frac{L}{2L + 2vt} \left(1 - \frac{t}{10}\right) e^{-\frac{t}{10}}$$



## 作业 14

1 关于长直螺线管的自感系数  $L$  的值, 下列说法中**错误**的是[ ]。

- A. 螺线管的半径越大,  $L$  越大      B. 充有铁磁质的  $L$  比真空的  $L$  大  
C. 通以的电流  $I$  的值越大,  $L$  越大      D. 单位长度的匝数越多,  $L$  越大.

答: 【C】

解: 长直螺线管的自感系数  $L = \mu n^2 V$ , 与螺线管是否通电流无关。

2. 对于单匝线圈取自感系数的定义为  $L = \frac{\Phi}{I}$ 。当线圈的几何形状, 大小及周围磁介质分布

不变, 且无铁磁性物质时, 若线圈中的电流强度变小, 则线圈的自感系数  $L$  [ ]

- A. 变大, 但与电流不成反比关系      B. 不变  
C. 变大, 与电流成反比关系      D. 变小

答: 【B】

解: 自感系数只与线圈的几何形状, 大小及周围磁介质分布有关, 与是否通有电流无关。

3. 中子星表面的磁场估计为  $10^8 T$ , 则该处的磁能密度为\_\_\_\_\_。

按质能关系, 质量密度为\_\_\_\_\_  $kg \cdot m^{-3}$ 。

解: 磁场能量密度为  $w = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

取中子星表面附近体积  $V$ , 体积  $V$  内具有的磁场能量为  $W_m = wV$ , 质量为  $m = \rho V$ 。

按爱因斯坦质能关系  $E = mc^2$ , 则

$$W_m = wV = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V = E = mc^2 = \rho V c^2, \quad \rho = \frac{1}{2\mu_0 c^2} B^2, \quad \text{其中 } c \text{ 为真空光速。}$$

4. 半径为  $2.0cm$  的螺线管, 长  $30.0m$ , 上面均匀密绕 1200 匝线圈, 线圈内为空气。

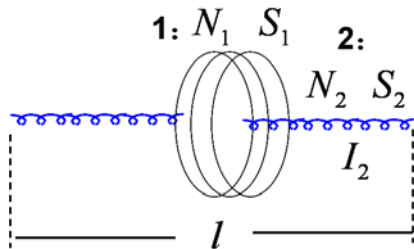
求: (1) 求此螺线管的自感系数。

(2) 当螺线管中电流以  $3.0 \times 10^2 A \cdot s^{-1}$  的速率变化时, 在线圈中产生的自感电动势多大?

[解] (1)  $L = \mu n^2 V = \mu n^2 \pi R^2 L = 4\pi \times 10^{-7} \times (1200 / 30.0)^2 \times \pi \times 0.02^2 \times 30.0$   
 $= 7.58 \times 10^{-5}$  亨利

$$(2) |\varepsilon_L| = L \left| \frac{dI}{dt} \right| = 2.27 \times 10^{-2} V$$

5. 如图 14-1, 面积为  $S_1$  总匝数  $N_1$  的线圈, 套在面积为  $S_2$  长为  $l$  总匝数为  $N_2$  的螺线管 2 上, 螺线管中通有电流  $I_2$ ,



求: (1) 线圈 1 中的磁通量;

(2) 线圈与螺线管的互感。

解: 螺线管 2 产生的磁场 (认为在线圈 2 内部, 外部为零)

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2, \text{ 其中 } n_2 = \frac{N_2}{l}$$

(1) 螺线管 2 产生的磁场, 穿过线圈 1 的磁通量 (磁链)

$$\Psi_{21} = N_1 B_2 S_2 = N_1 \mu_0 n_2 I_2 S_2, \text{ 其中 } n_2 = \frac{N_2}{l}$$

(2) 螺线管与线圈之间的互感系数

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = N_1 \mu_0 n_2 S_2$$

6. 一同轴电缆由中心导体圆柱和外层导体圆筒组成, 两者半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 筒和圆柱之间充以电介质, 电介质和金属的  $\mu_r$  均可作取 1。

求: 此电缆通过电流  $I$  (由中心圆柱流出, 由圆筒流回) 时, 单位长度内存储的磁能, 并通过和自感磁能的公式比较求出单位长度电缆的自感系数。

解: 磁场被限制在同轴电缆内, 由安培环路定理可得

$$H = \begin{cases} \frac{I r}{2\pi R_1^2} & (0 < r < R_1) \\ \frac{I}{2\pi r} & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (r > R_2) \end{cases}$$

磁场能量也只储存在电缆内, 在  $(0 < r < R_1)$  范围内, 取长度为  $l$  的一段柱壳

$dV = 2\pi r l dr$  ( $0 < r < R_1$ ), 其中储存的磁能为

$$W_{m1} = \int_V w dV = \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R_1^4} r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R_1^4} \int_0^{R_1} r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

同样在  $(R_1 < r < R_2)$  范围内, 取长度为  $l$  的一段柱壳

$dV = 2\pi r l dr$  ( $R_1 < r < R_2$ ), 其中储存的磁能为

$$W_{m2} = \int_V w dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

因此, 长度为  $l$  的一段电缆中储存的总磁能为

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} (1 + 4 \ln \frac{R_2}{R_1})$$

单位长度内储存的磁能为

$$w_m = \frac{W_m}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} (1 + 4 \ln \frac{R_2}{R_1})$$

由自感磁能与自感系数的关系  $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ ，得

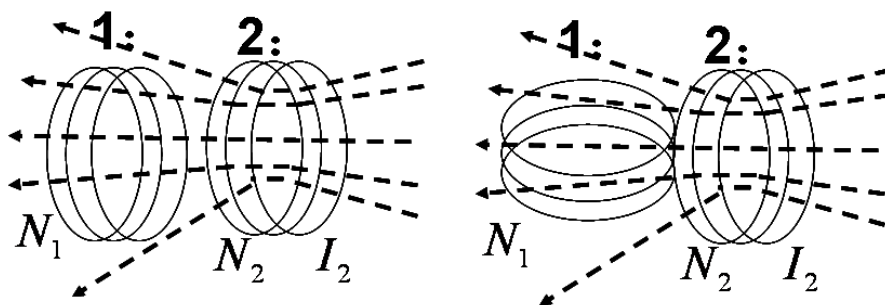
$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} (1 + 4 \ln \frac{R_2}{R_1})$$

7. 如果电路中通有强电流，当突然打开电闸断电时，就有一大火花跳过电闸，为什么？

〔解〕断电时电流变化剧烈，由于自感，在电闸的两极积聚大量的正负电荷，形成很强的电场，击穿空气。

8. 两个相距不太远的线圈，如何放置可使其互感最大？如何放置可使其互感为零？

解：平行放置互感最大，垂直放置互感为 0



## 作业 15

1. 下述说法中正确的是〔 〕

- A. 位移电流的热效应服从焦耳——楞次定律。
- B. 位移电流由变化的磁场产生的
- C. 位移电流的磁效应不服从安培环路定理
- D. 位移电流是由变化的电场产生的

答：〔D〕

解：变化的电场产生位移电流（或者说，变化的电场产生磁场）。在产生磁场方面，位移电流与传导电流是一样的，位移电流的磁效应服从安培环路定理。但位移电流不是电子的定向移动，因此，位移电流不产生焦耳热效应。

麦克斯韦的“位移电流”假说，与他的“涡旋电场”假说不同，在涡旋电场的作用下，电子是会作定向移动的。

2. 下列说法中正确的是〔 〕

- A. 变化的电场所产生的磁场，一定随时间变化
- B. 变化的磁场所产生的电场，一定随时间变化
- C. 有电流就有磁场，没有电流就一定没有磁场
- D. 变化着的电场所产生的磁场，不一定随时间变化

答：〔D〕

解：变化的电场所产生的磁场，与电场随时间的变化率成正比  $B \propto \frac{dE}{dt}$ ，而  $\frac{dE}{dt}$  可以是常数，即电场随时间的变化率固定时，变化的电场所产生的磁场也是不随时间变化的，

A 错。变化的磁场所产生的电场，与磁场随时间的变化率成正比  $E \propto \frac{dB}{dt}$ ，而  $\frac{dB}{dt}$  可以是常数，即磁场随时间的变化率固定时，变化的磁场所产生的电场也是不随时间变化的，

B 错。在电流的周围存在磁场，即有电流就有磁场；变化的电场也可以产生磁场，C 错。

3. 真空中一平面电磁波表达式为  $E_y = E_z = 0$ ,  $E_x = E_0 \cos \omega \left( t + \frac{y}{c} \right)$ , 在  $t = t_0$  时刻,

$y = y_0$  处的电场强度指向  $x$  轴负向, 则该时刻处的磁场强度方向应该是 [ B ]

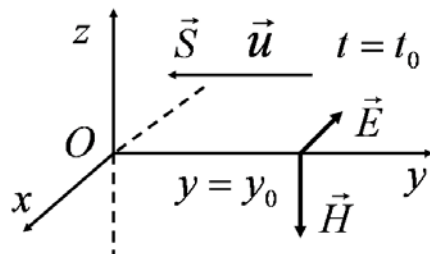
- A.  $x$  轴负向      B.  $z$  轴负向  
C.  $x$  轴正向      D.  $z$  轴正向

答 [B]

解: 电磁波的表达式得知, 电磁波的传播方向沿  $y$  轴负方向。对于平面波, 波的传播方向就是能流方向, 即坡印亭矢量方向。由坡印亭矢量, 得到电场、磁场方向满足如下关系

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

如图, 可见, 在  $t = t_0$  时刻,  $y = y_0$  处, 磁场强度方向必定沿着  $z$  轴负方向。



4. 对于平面电磁波,  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  的相位\_\_\_\_, 在空间任一点  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  的量值关系为\_\_\_\_,  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  的偏振方向彼此\_\_\_\_, 且均与波的传播方向\_\_\_\_, 从而可知电磁波是\_\_\_\_。

答: 相同;  $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$ ; 垂直; 垂直; 横波。

5. 由两块圆形导体板组成的平板电容器, 圆板半径为  $1\text{cm}$ , 中间为空气。当以  $5\text{A}$  的电流充电时, 求: (1) 电容器内部的电场强度变化率  $\frac{dE}{dt}$ ; (2) 极板间的位移电流密度  $J_d$ ;

(3) 极板间的位移电流  $I_d$ ; (4) 在圆板边缘处的磁感应强度  $B$ 。

解: 平板电容器以恒定电流充电, 板上的电荷量随时间正比增加; 板上的电荷要在电容器内产生电场, 电场强度随电荷量的增加, 正比增强; 电容器内变化的电场, 产生位移电流; 位移电流在电容器内产生磁场。

(1) 极板上电量随时间的变化:  $Q = It$ ,

$$\text{电荷面密度随时间的变化: } \sigma = \frac{Q}{S} = \frac{It}{S},$$

$$\text{极板间电场强度随时间的变化: } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{It}{\epsilon_0 S},$$

$$\text{则电场随时间的变化率: } \frac{dE}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0 S} = 1.8 \times 10^{15} \text{ V/m} \cdot \text{s}$$

(2) 极板间的电位移随时间的变化:  $D = \sigma = \frac{It}{S}$ ,

$$\text{位移电流密度: } J_d = \frac{dD}{dt} = \frac{I}{S} = 1.6 \times 10^4 \text{ A/m}^2$$

(3) 极板间的位移电流:  $I_d = J_d S = I = 5\text{A}$ ,

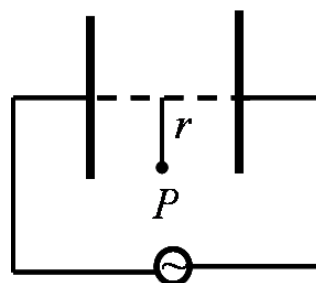
(4) 极板内, 只有位移电流。由于极板是圆形板, 具有轴对称性, 因此, 位移电流在板内产生的磁场也具有轴对称性。由安培环路定理

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_d, \quad 2\pi R B = \mu_0 I_d = \mu_0 \pi R^2 J_d = \mu_0 \pi R^2 \frac{dD}{dt} = \mu_0 \pi R^2 \frac{I}{S} = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 1.0 \times 10^{-4} \text{ T}$$

6. 如图 1 5 - 1 所示, 平板电容器之间加交变电场

$$E = 720 \sin(10^5 \pi t) \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$



求距电容器中心连线  $r = 0.01m$  处的  $P$  点, 经过  $2 \times 10^{-5} s$ , 位移电流产生的磁场强度的大小。

解: 极板间的位移电流密度

$$J_d = \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = 720 \times 10^5 \pi \epsilon_0 \cos(10^5 \pi t)$$

以  $r$  为半径绕极板中心作圆形安培环路, 由安培环路定理:  $2\pi rH = \pi r^2 J_d$ , 解出

$$H = \frac{r}{2} J_d = 3.6 \times 10^5 \pi \epsilon_0 \cos(10^5 \pi t) = 10^{-5} A/m$$

7. 真空中沿  $z$  轴负向传播的平面电磁波, 其磁场强度的表达式为

$$\vec{H} = \vec{i} H_0 \cos\left(t + \frac{z}{c}\right) [SI], \text{ 求电场强度的波的表达式。}$$

解:

$$\vec{u} = -u\vec{k} \propto \vec{E} \times \vec{H}, \vec{H} = H\vec{i}$$

$$\vec{E} = \vec{j} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H = \vec{j} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0 \cos\omega(t + \frac{z}{C}) [SI]$$

## 作业 16

1. 在地面参考系测得一星球离地球 5 光年, 宇航员欲将此距离缩为 3 光年, 他乘的飞船相对地球的速度应是 [ ]

- A.  $\frac{1}{2}c$     B.  $\frac{3}{5}c$     C.  $\frac{4}{5}c$     D.  $\frac{9}{10}c$

答: [C]

解: 这里, 要求宇航员的钟走 3 光年, 是原时:  $\Delta t = 3$ ; 地面上的时钟测量, 宇航员走 5

光年, 是测时:  $\Delta t' = 5$ 。因此由  $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ , 得到

$$5 = \frac{3}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad u = \frac{4}{5}c。$$

注意: 地面上仍然认为宇航员走了 5 光年。

2. 火箭的固有长度为  $L$ , 其相对地面以  $v_1$  作匀速直线运动。若火箭上尾部一射击口向火箭首部靶子以  $v_2$  速度发射一子弹, 则在火箭上测得子弹从出射到击中靶的时间间隔为 [ ]。

- A.  $\frac{L}{v_1 + v_2}$     B.  $\frac{L}{v_2}$     C.  $\frac{L}{v_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}$     D.  $\frac{L}{v_1 + v_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}$

答: [B]

解: 事件发生在火箭上, 与地面无关。当然, 地面上测量这一时间间隔是不同的。

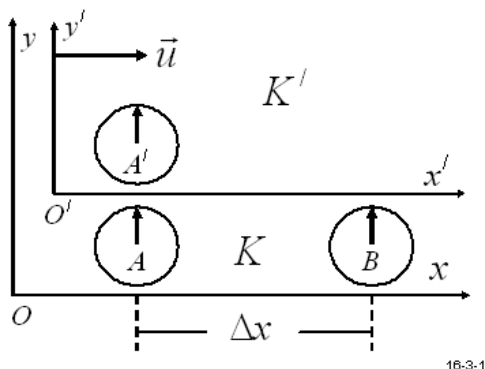
3. 在  $K$  惯性系中  $x$  轴上相距  $\Delta x$  处有两只同步钟  $A$  和  $B$ , 在相对  $K$  系沿  $x$  轴以  $u$  速运动的惯性系  $K'$  中也有一只同样的钟  $A'$ 。若  $xx'$  轴平行, 当  $AA'$  相遇时, 恰好两钟读数都为零, 则当  $A'$  与  $B$  相遇时  $K$  系中  $B$  钟的读数为 \_\_\_\_\_,  $K'$  系中  $A'$  钟的读数为 \_\_\_\_\_。

答:  $\frac{\Delta x}{u}$ ,  $\frac{\Delta x}{u} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$

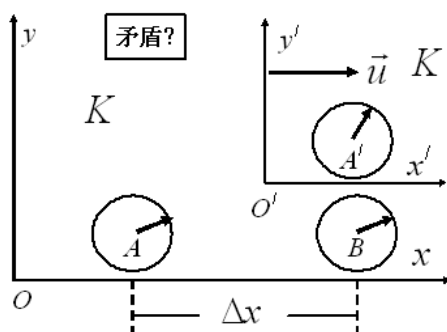
解：如图，在  $K$  系测量， $A$  和  $B$  的距离为  $\Delta x$ ，钟  $A'$  正在以速度  $u$  从  $A$  向  $B$  运动，钟  $A'$  从  $A$  到达  $B$  所用的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u}$$

这也就是  $B$  钟的读数。



16-3-1



16-3-2

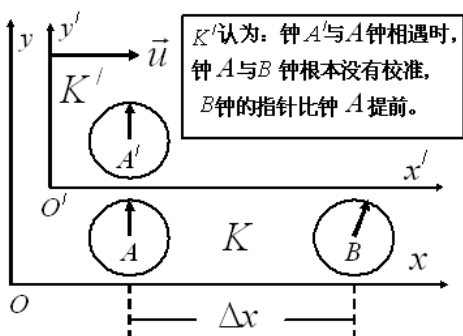
由于  $A$  和  $B$  在  $K$  系中是静止的，所以， $K$  系中测量， $A$  和  $B$  的距离  $\Delta x$  是原长；在系  $K'$  看来， $A$  和  $B$  以速度  $-\vec{u}$  运动， $A$  和  $B$  的距离  $\Delta x'$  是测量长度，因此

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{(-u)^2}{c^2}} = \Delta x \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

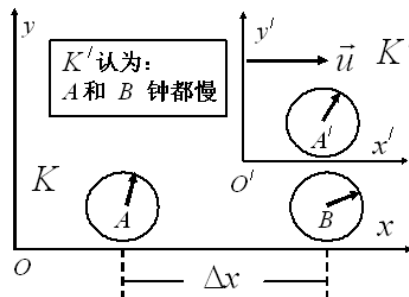
由于在系  $K'$  看来， $B$  以速度  $-\vec{u}$  运动， $B$  运动距离  $-\Delta x'$  所用时间  $\Delta t'$  为

$$\Delta t' = \frac{-\Delta x'}{-u} = \frac{\Delta x}{u} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

这就是  $A'$  钟的读数。



16-3-3



16-3-4

可见， $A'$  钟与  $B$  钟相遇时，确实是： $A'$  钟读数小、 $B$  钟读数大，即似乎确实能分辨出来“ $A'$  钟慢、 $B$  钟快”。

$A'$  钟相对于  $K$  系运动， $A'$  钟确实应该慢；而在  $K$  系看来， $B$  钟也是运动的，也该慢。这似乎出现了矛盾。

如图， $K'$  认为：钟  $A'$  与钟  $A$  相遇时，钟  $A$  与钟  $B$  根本没有校准，钟  $B$  的指针比钟  $A$  提前。（或者，从经典物理大致考虑：信号的传播是需要时间的，钟  $B$  指针指向“0”这一信号传到  $A$  时，将钟  $A$  调到“0”，此时，钟  $B$  已经过“0”了，即钟  $B$  比钟  $A$  提前了）。

如图， $K'$  认为：在对“ $AA'$  相遇时  $A'$  钟与  $B$  钟相遇所用时间的测量”中， $A$  和  $B$  钟的测量结果是一样的，都比  $A'$  钟测量的结果短，即  $A$  和  $B$  钟都慢；只不过是在  $AA'$  相遇时，



$B$  钟的指针“提前”了，从而在  $A'$  钟与  $B$  钟相遇时， $B$  钟的“读数”比  $A'$  钟的“读数”大。可见，上面的结果，并不违反相对论，反而正是相对论的必然结果。

4. 根据狭义相对论的原理，时间和空间的测量值都是\_\_\_\_\_，它们与观测者的\_\_\_\_\_密切相关。

答：相对的，相对运动状态。

5.  $K$ 、 $K'$  系是坐标轴相互平行的两个惯性系， $K'$  系相对与  $K$  沿  $x$  轴正方向匀速运动。一刚性尺静止于  $K$  系中，且与  $x$  轴成  $30^\circ$  角，而在  $K'$  系中测得该尺与  $x'$  轴成  $45^\circ$  角，试求： $K$ 、 $K'$  系的相对运动速度。

解：如图，在  $K$  系中测量， $\alpha = 30^\circ$ ，所以

$$\Delta y = \Delta x \tan \alpha = \Delta x \tan 30^\circ$$

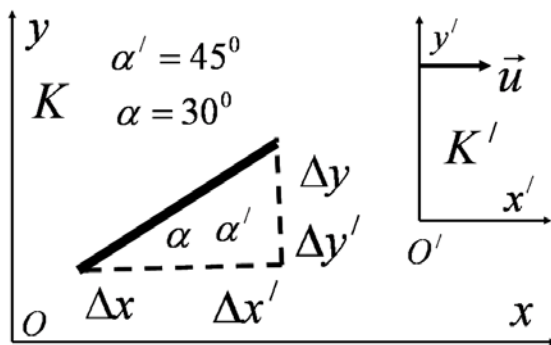
在  $K'$  系中测量， $\alpha' = 45^\circ$ ，所以

$$\Delta y' = \Delta x' \tan \alpha' = \Delta x' \tan 45^\circ$$

由洛伦兹变换，得到

$$\Delta y' = \Delta y, \quad \Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$u = \sqrt{\frac{2}{3}}c$$



6. 一匀质矩形薄板，静止时边长分别为  $a$  和  $b$ ，质量  $m_0$ ，试计算在相对薄板沿一边长以  $v$  速运动的惯性系中测得板的面密度。

解：在相对于板运动的参照系中，长度收缩，同时质量增大。

$$\text{质量为: } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \text{ 长度为: } a' = a\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad b' = b$$

质量密度为

$$\sigma = \frac{m}{a'b'} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{ab\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{ab(1 - v^2/c^2)} = \frac{\sigma_0}{1 - v^2/c^2}$$

7. 列车和隧道静止时长度相等，当列车以  $u$  的高速通过隧道时，分别在地面和列车上测量，列车长度  $L$  与隧道长度  $L'$  的关系如何？若地面观测者发现当列车完全进入隧道时，隧道的进、出口处同时发生了雷击，未击中列车，按相对论的理论，列车上的旅客会测得列车遭雷击了吗？为什么？

解：（1）由于隧道相对于地面是静止的，而列车是运动的，所以，地面测量隧道的长度是原长，地面测量列车的长度是测长，即地面测量：

$$\text{隧道长 } L'_1 = l_0, \quad \text{列车长 } L_1 = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

地面测量隧道长  $L'_1$  与列车长  $L_1$  的关系为： $L_1 = L'_1 \sqrt{1 - u^2/c^2}$

由于列车相对于列车是静止的，而隧道是运动的，所以，列车测量列车的长度是原长，列车测量隧道的长度是测长，即列车测量：

$$\text{列车长 } L'_2 = l_0, \quad \text{隧道长 } L_2 = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

地面测量隧道长  $L'_2$  与列车长  $L_2$  的关系为： $L_2 = L'_2 \sqrt{1 - u^2/c^2}$

（2）地面测得雷击时刻火车完全位于隧道内，没有遭雷击。列车上的测量同样得出列车没有遭雷击。

设列车头到达隧道出口为事件  $A_1$ ，闪电到达隧道出口为事件  $A_2$ ；列车尾到达隧道进口为事件  $B_1$ ，闪电到达隧道进口为事件  $B_2$ 。在地面上测量，事件  $A_1$  与事件  $A_2$  是同时同地发生的两个事件，在任何惯性系中测量都是同时发生的，因此在列车上测量，事件  $A_1$  与事件  $A_2$  是同时同地发生的两个事件，即在列车上测量，列车头与闪电同时到达隧道出口，闪电没有

击中列车头；在地面上测量，事件  $B_1$  与事件  $B_2$  是同时同地发生的两个事件，在任何惯性系中测量都是同时发生的，因此在列车上测量，事件  $B_1$  与事件  $B_2$  是同时同地发生的两个事件，即在列车上测量，列车尾与闪电同时到达隧道进口，闪电没有击中列车尾。

事实上，“列车头到达隧道出口的事件  $A_1$ ”与“列车尾到达隧道进口的事件  $B_1$ ”，是在地面这一惯性系中不同地点同时发生的两个事件，在列车这一惯性系中测量就不可能是同时的；“闪电到达隧道出口的事件  $A_2$ ”与“闪电到达隧道进口的事件  $B_2$ ”，是在地面这一惯性系中不同地点同时发生的两个事件，在列车这一惯性系中测量就不可能是同时的。

设“闪电到达隧道出口的事件  $A_2$ ”在地面测量  $A_2(x_1, t_1)$ ，在列车上测量  $A_2(x_1', t_1')$ ；“闪电到达隧道进口的事件  $B_2$ ”在地面测量  $B_2(x_2, t_2)$ ，在列车上测量  $B_2(x_2', t_2')$ 。由于  $t_1 = t_2$ ,  $x_2 - x_1 = l_0$ ，则

$$t_1' - t_2' = \gamma(t_1 - \frac{ux_1}{c^2}) - \gamma(t_2 - \frac{ux_2}{c^2}) = \gamma \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1) = \gamma \frac{u}{c^2}l_0 > 0$$

可见，出口处雷击先发生，此时列车头部未出隧道；入口处雷击后发生，此时列车尾部进入隧道。

8. 伽利略相对原理与狭义相对论的相对性原理有何相同之处？有何不同之处？

[答] 相同：力学规律对一切惯性系成立；

不同：狭义相对论的相对性原理要求所有物理规律对一切惯性系成立。

9. “同时性”的相对性是针对任意两个事件而言的吗？

[答] 不是，要求两个事件发生在不同地点。

同时同地发生的两个事件，在任何惯性系中测量都是同时发生的。

## 作业 17

1. 实验室测得粒子的总能量是其静止能量的  $K$  倍，则其相对实验室的运动速度为[ ]

- A.  $\frac{c}{K-1}$       B.  $\frac{c}{K}\sqrt{1-K^2}$       C.  $\frac{c}{K}\sqrt{K^2-1}$       D.  $\frac{c}{K}\sqrt{K+1}$

答：[C]

$$\text{解： } mc^2 = Km_0c^2, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = Km_0, \quad \therefore v = \frac{c}{K}\sqrt{K^2-1}$$

2. 把一静止质量为  $m_0$  的粒子，由静止加速到  $v = 0.6c$ ，所需作的功为[ ]

- A.  $0.18m_0c^2$       B.  $0.36m_0c^2$       C.  $1.25m_0c^2$       D.  $0.25m_0c^2$

答：[D]

$$\text{解： } E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = 0.25m_0c^2$$

3. 观测者乙以  $\frac{3}{5}c$  的速率相对观测者甲运动，若甲携带质量为  $1\text{kg}$  的物体，则

- (1) 乙测得物体的质量为：\_\_\_\_\_；  
 (2) 甲测得物体的总能量为：\_\_\_\_\_；  
 (3) 乙测得物体的总能量为：\_\_\_\_\_。

答：  $1.25\text{kg}$ ；  $9 \times 10^{16}\text{J}$ ；  $1.125 \times 10^{17}\text{J}$ 。

$$\text{解： } v = \frac{3}{5}c, \quad m_0 = 1\text{kg}$$

(1) 物体  $m_0 = 1\text{kg}$  相对于乙在运动, 测得的是运动质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1\text{kg}}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = 1.25\text{kg}$$

(2) 物体  $m_0 = 1\text{kg}$  相对于甲静止, 测得的是静止能量

$$E_0 = m_0 c^2 = 1 \times (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{16} (J)$$

(3) 物体  $m_0 = 1\text{kg}$  相对于乙运动, 测得的是运动的总能量

$$E = mc^2 = 1.25 \times (3 \times 10^8)^2 = 1.125 \times 10^{17} (J)$$

4. 电子静止质量  $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$ , 当它以  $v = 0.99c$  的速度运动时, 按相对论理论, 其总能量为\_\_\_\_\_, 动能为\_\_\_\_\_, 按经典理论, 其动能为\_\_\_\_\_。

答:  $5.81 \times 10^{-13} J$ ;  $4.99 \times 10^{-13} J$ ;  $4.03 \times 10^{-14} J$ 。

解: (1)  $E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{\sqrt{1-0.99^2}} = 5.81 \times 10^{-13} J$

(2) 动能等于总能与静止能量之差

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 \\ &= \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{\sqrt{1-0.99^2}} - 9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 = 4.99 \times 10^{-13} J \end{aligned}$$

(3) 按经典物理, 电子动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 (0.99c)^2 = \frac{1}{2} \times 9.11 \times 10^{-31} \times (0.99 \times 3 \times 10^8)^2 = 4.03 \times 10^{-14} J$$

5.  $\mu$  子的静止质量是电子质量的 207 倍, 在其自身参照系中平均寿命  $\bar{\tau}_0 = 2 \times 10^{-6} s$ 。

若在实验室参照系中得其平均寿命  $\bar{\tau} = 7 \times 10^{-6} s$ 。试问: 实验室测得其质量是电子静止质量的多少倍?

解: 依题, 由  $\mu$  子的静止寿命 (原时) 与运动寿命 (测时), 可以求得  $\mu$  子的运动速度

$$\frac{\bar{\tau}_0}{\bar{\tau}} = \frac{2}{7} = \sqrt{1-\beta^2}$$

则  $\mu$  子的运动质量为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{7}{2} m_0$$

$\mu$  子的静止质量与电子的静止质量之比为

$$\frac{m_0}{m_{e0}} = 207$$

则  $\mu$  子的运动质量与电子的运动质量之比为

$$\frac{m}{m_{e0}} = \frac{7m_0}{2m_{e0}} = \frac{7}{2} \times 207 = 724.5$$

6.  $\alpha$  粒子的动能等于其静止能量的一半, 求其运动速度。

解:  $mc^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 c^2$ ;  $m = \frac{3}{2} m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ;  $v = \frac{\sqrt{5}}{3} c$

7. 已知  $K'$  系相对  $K$  系以  $u = 0.8c$  的速度沿  $X$  轴正向运动。一静止质量为  $m_0$  的粒子也沿  $X$  轴运动, 在  $K$  系中测得粒子速率  $v = 0.6c$ 。求:

- (1) 相对  $K$  系, 粒子的动能  $E_k$ ;  
 (2) 相对  $K'$  系, 粒子的速度  $v'$ ;  
 (3) 在  $K'$  系中测, 粒子的总能量  $E'$ 。

解: (1)  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = \frac{5}{4}m_0$ ;

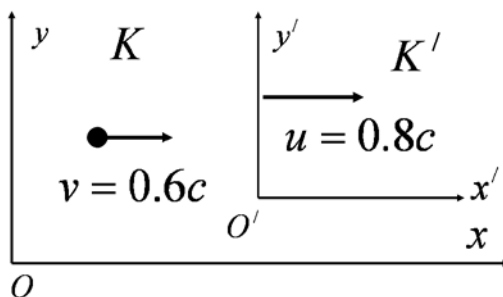
$$E_k = (m - m_0)c^2 = \frac{1}{4}m_0c^2;$$

(2)

$$v' = \frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}} = \frac{0.6c-0.8c}{1-\frac{0.6c \times 0.8c}{c^2}} = -\frac{5}{13}c;$$

(3)

$$E' = m'c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\frac{v'}{c})^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(-\frac{5}{13})^2}} = \frac{13}{12}m_0c^2$$



8. 根据相对论的理论, 实物粒子在介质中的运动速度是否有可能大于光在该介质中的传播速度。

讨论: 相对论只给出真空中的光速是物体的极限速度, 光在介质中的速度小于光速, 则实物粒子在介质中的速度有可能大于光在介质中的传播速度。

9. 如果  $A$ 、 $B$  是  $K'$  惯性系中互为因果关系两个事件 ( $A$  是  $B$  的原因, 先于  $B$  发生), 问: 是否能找到一个惯性系, 在该系中测得  $B$  先于  $A$  发生, 出现时间顺序颠倒的现象?

答: 不能。

解: (数学讨论略) 相对论理论也不可能不遵守客观事实。因果律不能颠倒, 但没有因果联系的两个事件, 在不同的惯性系中, 发生的先后顺序又可能颠倒。

## 作业 18

1 两个条件相同的物体, 一个是黑的, 一个是白的, 把它们放在火炉旁, 则\_\_\_\_\_色的物体升温快? 如果把它们放在低温的环境中, 则\_\_\_\_\_色的物体降温快。

答: 黑; 黑。

解: 黑色物体吸收本领大, 同时, 其辐射能力也大。

2 绝对黑体是[ ]

- A. 不能反射但是能发射所有的电磁辐射
- B. 能吸收任何电磁辐射, 也能发射电磁辐射
- C. 能吸收任何电磁辐射, 却不能发射电磁辐射
- D. 不能反射也不能发射任何电磁辐射

答: [A]

解: C 和 D 肯定错; B 没有说“发射所有电磁辐射”。

3. 将星球近似看做绝对黑体, 利用维恩位移定律, 可测量星球的表面温度。设测得北极星的  $\lambda_M = 0.35\mu m$ , 则北极星的表面温度为\_\_\_\_\_; 由该定律可知, 当黑体的温度升高时, 最大单色辐射本领对应的波长将向\_\_\_\_\_移动。

答:  $8.28 \times 10^3 K$ ; 短波方向。

解：由维恩位移定律有  $T\lambda_m = b$ ， $T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{0.35 \times 10^{-6}} = 8.28 \times 10^3 \text{ K}$

当温度升高时，黑体辐射的最强电磁辐射的波长变短。

4. 绝对黑体的辐射本领与表面温度关系是\_\_\_\_\_；设空腔上小孔的面积为  $3\text{cm}^2$  每分钟向外辐射  $540\text{J}$  的能量，则空腔的温度  $T =$ \_\_\_\_\_。

答： $M = \sigma T^4$ ，852 K

解：由斯特藩—波尔兹曼定律  $M = \sigma T^4$ ，得到

$$T = \left(\frac{M}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{540}{60 \times 3 \times 10^{-4} \times 5.7 \times 10^{-8}}\right)^{1/4} = 852\text{K}$$

5. 光电效应的实验规律是：

- (1) 饱和光电流与照射光的\_\_\_\_\_成正比；
- (2) 光电子的最大初动能与\_\_\_\_\_有关，与\_\_\_\_\_无关；
- (3) 要产生光电效应，对照射光的要求是\_\_\_\_\_。

答：强度；照射光的频率，光的强度；频率大于该金属的红限频率

6. 写出光电效应的爱因斯坦公式  $h\nu = \frac{1}{2}mv_M^2 + A$  中各项的物理意义。

答：入射光子的能量，逸出电子的最大初动能，金属逸出功

7. 在加热黑体过程中，其最大单色辐射本领的波长由  $0.8\mu\text{m}$  变到  $0.4\mu\text{m}$ ，计算其总辐射本领增加多少倍？

解：由维恩位移定律  $T\lambda_m = b$  及斯特藩—波尔兹曼定律  $M = \sigma T^4$ ，有  $T_2/T_1 = \lambda_{m1}/\lambda_{m2}$

$$\frac{M_{02}}{M_{01}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}\right)^4 = \left(\frac{0.8}{0.4}\right)^4 = 16$$

8. 从金属铝中逸出一个电子需要  $4.2\text{eV}$  的能量。今有波长  $\lambda = 200\text{nm}$  的紫外线照射铝表面，求：(1) 光电子的最大初动能；(2) 遏止电压；(3) 铝的红限波长。

解：逸出功  $A = 4.2\text{eV}$ ，由爱因斯坦光电效应方程，得到

$$(1) \frac{1}{2}mv^2 = \frac{hc}{\lambda} - A = 2\text{eV} \quad (2) \frac{1}{2}mv^2 = eU_a, \quad U_a = 2\text{V}$$

$$(3) \nu_0 = A/h, \quad \lambda_0 = hc/A = 296\text{nm}$$

9. 人体向外发出热辐射，为什么在黑暗中看不见人体发亮？

[答] 温度低，辐射波长太长，肉眼看不见

## 作业 19

1. 康普顿效应的主要特点是【】

- A. 散射光的波长均比入射光的波长短，波长与散射物的性质无关。
- B. 散射光的波长均比入射光的波长长，波长与散射物的性质有关。
- C. 散射光中既有比入射光的波长长的成分，也有与入射光的波长相同的成分；波长与散射物的性质无关。
- D. 散射光中既有比入射光的波长长的成分，也有与入射光的波长相同的成分；波长与散射物的性质有关。

答：[C]

2. 在康普顿散射中，设反冲电子的速度为  $0.6c$ ，则因散射使电子获得的能量是其静止能量的【】

A. 0.5 倍    B. 0.25 倍    C. 2 倍    D. 1.5 倍

答: 【B】

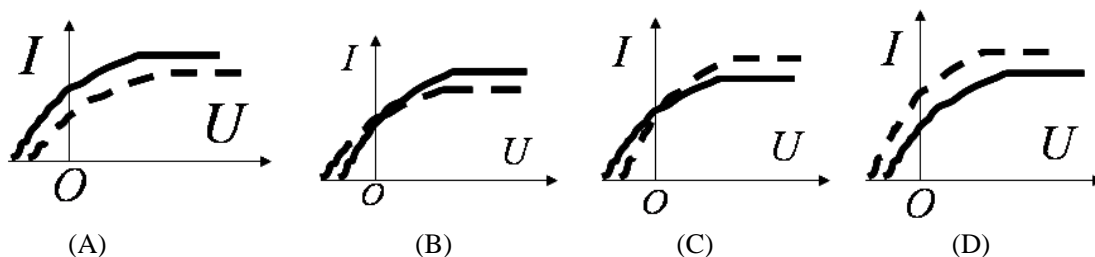
解: 散射后, 反冲电子的总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.25 m_0 c^2$$

反冲电子获得的能量, 即反冲电子的动能为

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = 0.25 m_0 c^2$$

3. 以一定频率的单色光照射在某金属上, 测得其光电流的曲线如图实线所示, 然后在光强不变增大照射光频率, 测得光电流得曲线如图 19-1 中虚线所示, 则满足题意的图是 【】。



答: 【B】

解: 由光电效应方程:  $h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A$ , 且  $\frac{1}{2}mv^2 = eU_c$ , 可见, 当增大照射光频率时, 逸出的光电子最大初动能增大, 反向截止电压数值上增大, 所以 A 和 C 错; 光的强度:  $S = Nh\nu$ , 光强不变, 增大光的频率, 则光子数应减少, 单位时间内逸出的光电子数减少, 因而虚线的饱和光电流应减小。

这里注意: 光电效应中, 饱和电流与光强成正比, 是对入射光频率不变的情况而言。

4. 康普顿效应是指\_\_\_\_\_, 这可以用光子与\_\_\_\_\_进行碰撞来解释, 在此过程中\_\_\_\_\_与\_\_\_\_\_守恒。

答: X 射线通过物质发生散射时, 出现波长比入射光波长长的散射光, 散射光波长改变的现象; 原子中受原子核束缚较小的外层电子; 动量, 能量

5. 波长为 300nm 的光照在某金属表面产生光电效益, 已知光电子的能量范围从 0 到  $4.0 \times 10^{-19} J$ 。求 (1) 遏制电压; (2) 红限频率。

(普朗克常数  $h = 6.63 \times 10^{-34} J \cdot s$ , 电子电量  $e = 1.60 \times 10^{-19} C$ )

解: (1) 光电子的最大初动能为  $4.0 \times 10^{-19} J$ , 则

$$\frac{1}{2}mV^2 = eU_a, \quad U_a = \frac{\frac{1}{2}mV^2}{e} = \frac{4.0 \times 10^{-19} J}{1.60 \times 10^{-19} C} = 2.5V$$

(2) 由  $h\nu = \frac{1}{2}mV^2 + A$  和  $A = h\nu_0$ , 得到

$$\nu_0 = \nu - \frac{\frac{1}{2}mV^2}{h} = \frac{c}{\lambda} - \frac{\frac{1}{2}mV^2}{h} = \frac{3 \times 10^8}{300 \times 10^{-9}} - \frac{4.0 \times 10^{-19}}{6.63 \times 10^{-34}} = 4.0 \times 10^{14} Hz$$

6. 钨的逸出功为 4.58eV。(1) 求钨的红限频率; (2) 分别求出照射光波长为 200nm 和 250nm 时的遏制电压。

解: (1)  $A = h\nu_0$ ,  $\nu_0 = \frac{A}{h} = \frac{4.58 \times 1.60 \times 10^{-19}}{6.63 \times 10^{-34}} = 1.1 \times 10^{15} Hz$ ,  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 273nm$

$$(2) \quad h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A = eU_a + A, \quad U_a = (h\nu - A)/e = (hc/\lambda - A)/e$$

$\lambda = 200\text{nm}$  时,

$$U_a = (hc/\lambda - A)/e = \frac{\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{200 \times 10^{-9}} - 4.58 \times 1.60 \times 10^{-19}}{1.60 \times 10^{-19}} = 1.64(\text{V})$$

当  $\lambda = 250\text{nm}$  时,  $U_a = 0.39\text{V}$

7. 在康普顿散射中, 若照射光光子能量与电子的静止能量相等, 求: (1) 散射光光子的最小能量; (2) 反冲电子的最大动量。

解: (1) 由已知  $h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} = m_0c^2$ ,

则有入射光子的波长为  $\lambda_0 = \frac{h}{m_0c}$

$$\text{由 } \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi),$$

$$\text{有 } \lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi)$$

散射光子能量最小时, 其波长最大, 此时  $\varphi = \pi$ , 因此, 散射的最大波长为

$$\lambda_{\max} = \lambda_0 + \frac{2h}{m_0c} = \frac{h}{m_0c} + \frac{2h}{m_0c} = \frac{3h}{m_0c},$$

散射光子的最小能量为

$$h\nu_{\min} = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = \frac{1}{3}m_0c^2 = 0.17\text{MeV} \quad (\text{电子静止能量 } 0.511\text{MeV})$$

(2) 当散射光子有最小能量时, 反冲电子的动能最大, 则反冲电子的动量最大。

如图, 由动量守恒  $\frac{h}{\lambda_0}\vec{e}_0 = \vec{P} + \frac{h}{\lambda_{\max}}\vec{e}$ , 则反冲电子的最大动量:

$$P = \frac{h}{\lambda_0} + \frac{h}{\lambda_{\max}} = m_0c + \frac{1}{3}m_0c = \frac{4}{3}m_0c = 3.64 \times 10^{-22} \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

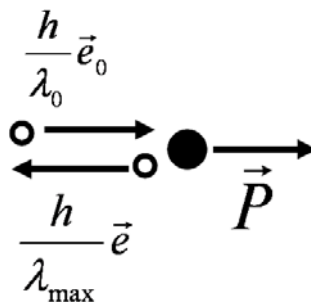
8. 光电效应和康普顿效应在对光子的粒子性认识方面有不同意义吗?

[答] 光电效应: 光子具有能量, 能量守恒

康普顿效应: 光子还具有动量, 能量和动量守恒

9. 为什么可见光作为入射光一般观察不到康普顿散射效应?

[答] 由康普顿散射公式  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi)$  可说明: 若入射光可见光, 如其波长为  $400\text{nm}$ , 则最大的  $\Delta\lambda = 0.0024\text{nm}$ , 则  $\Delta\lambda/\lambda = 0.0006\%$ , 因而很难观察到。



## 作业 20

1. 设氢原子的质量为  $m$ , 动能为  $E_k$ , 其德布罗意波长为 【】

A.  $\lambda = \frac{\sqrt{2mE_k}}{h}$     B.  $\lambda = \frac{\sqrt{mE_k}}{h}$     C.  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{mE_k}}$     D.  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}$

答: 【D】

[解] 按非相对论的动量与动能的关系:  $p = \sqrt{2mE_k}$ , 则氢原子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}$$

2. 欲使电子腔中电子的德布罗意波长为 0.1nm, 加速电压应为 【】

A. 150V      B. 122.5V      C. 1.5V      D. 12.25V      E. 24.4V

答: 【A】

[解] 按非相对论的动量与动能的关系:  $p = \sqrt{2mE_k}$  和加速电压与动能的关系  $eU = E_k$ ,

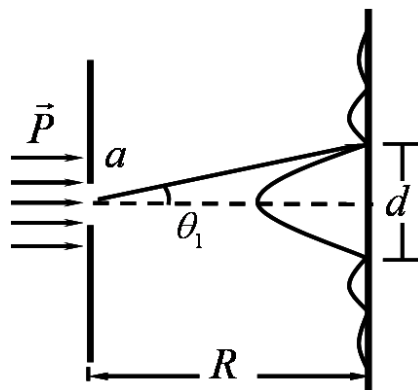
以及德布罗意波长  $\lambda = \frac{h}{p}$ , 得到  $eU = E_k = \frac{p^2}{2m\lambda^2}$ , 因此

$$U = \frac{p^2}{2me} = \frac{h^2}{2me\lambda^2} = \frac{6.63^2 \times 10^{-68}}{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.60 \times 10^{-19} \times 0.1^2 \times 10^{-18}} = 150(V)$$

或直接按公式  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \rightarrow U=150V$

3. 如图 20-1 所示一束动量为 P 的电子, 通过缝宽为 a 的狭缝。在距离为 R 处放置荧光屏, 屏上衍射图样中央明条纹的宽度 d 等于 【】

- A.  $\frac{2ha}{RP}$   
B.  $\frac{2Rh}{aP}$   
C.  $\frac{2a^2}{R}$   
D.  $\frac{2ha}{P}$



答: 【B】

解:  $\lambda = \frac{h}{p}$ ,  $a \sin \theta_1 = \lambda$ ,  $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{d/2}{R}$ ,  $\frac{ad}{2R} = \frac{h}{p}$ , 得  $d = \frac{2Rh}{ap}$

4.  $\lambda_0 = \frac{h}{m_e c}$  称为电子的康普顿波长 ( $m_e$  为电子的静止质量, h 为普朗克常数, c 为真空

中的光速), 当电子的动能等于它的静止能量时, 它的德布罗意波长  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}} \lambda_0$

答:  $\sqrt{3}/3$

[解] 依题  $E_k = mc^2 - m_e c^2 = m_e c^2$ , 则有

$$mc^2 = 2m_e c^2, \quad E = mc^2 = 2m_e c^2$$

由电子的相对论动量与能量的关系:  $p^2 c^2 + (m_e c^2)^2 = E^2$ , 得到

$$p^2 c^2 + (m_e c^2)^2 = (mc^2)^2 = (2m_e c^2)^2, \text{ 即得到}$$

$$p = \sqrt{3}m_e c, \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3}m_e c} = \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_0$$

5. 如果粒子位置的不确定量  $\Delta x$  等于粒子的德布罗意波长, 则粒子速度的不确定量一定                      (大于/等于/小于) 粒子的速度值。

答: 大于

解: 由不确定关系  $\Delta x \Delta p \geq h$  和德布罗意波长公式  $\lambda = \frac{h}{p}$ , 得到



$$\Delta p = m\Delta v \geq \frac{h}{\Delta x} = \frac{h}{\lambda} = p = mv,$$

所以，所以速度与速度的不确定量的关系为

$$\Delta v \geq v$$

6. 反应堆中的热中子动能约为  $6.12 \times 10^{12} \text{eV}$ ，计算这种热中子的德布罗意波长。

解：热中子的动能与中子的静止能量之比为

$$\frac{E_k}{m_{n0}c^2} = \frac{6.12 \times 10^{12} \times 1.602 \times 10^{-19}}{1.67 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16}} = 6.5 \times 10^3$$

可见， $E_k \gg m_{n0}c^2$ ，因此，必须考虑相对论效应。

由动量与能量的关系  $p^2c^2 + (m_{n0}c^2)^2 = (E_k + m_{n0}c^2)^2$ ，所以  $pc \cong E_k$

德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E_k} = 2.03 \times 10^{-19} \quad (m)$$

7. 质量为  $m_e$  的电子，由静止起被电势差  $U_{12} = 900 \text{V}$  的电场加速，试计算德布罗意波的波

长。（ $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$ ，普朗克常数  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ ）

解：考虑相对论效应，由动量与能量的关系  $p^2c^2 + (m_e c^2)^2 = (eU + m_e c^2)^2$ ，得到：

$$pc = 5.36 \times 10^{-14} \quad (J)$$

德布罗意波的波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{5.36 \times 10^{-14}} = 3.71 \times 10^{-12} \quad (m) = 0.00371 \quad (nm)$$

如果不考虑相对论时， $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = 3.87 \times 10^{-12} \quad (m) = 0.00387 \quad (nm)$

$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 4.3\%$ ，所以电子经  $100 \text{kV}$  电场加速，可以不考虑相对论效应。

8. 氦氖激光器所发出的红光波长为  $\lambda = 632.8 \text{nm}$ ，谱线宽度  $\Delta \lambda = 10^{-9} \text{nm}$ ，问：当这种光子沿  $x$  轴方向传播时，它的  $x$  坐标的不确定量多大？

解：由德布罗意公式  $p = \frac{h}{\lambda}$ ，得到

$$\Delta p = \frac{h\Delta \lambda}{\lambda^2},$$

再由不确定关系，得到其位置的不确定量为

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = \frac{(632.8 \times 10^{-9})^2}{10^{-9} \times 10^{-9}} = 4 \times 10^5 \quad (m)$$

9. 若一个电子和一个质子具有同样的动能，哪个粒子的德布罗意波长比较大？

答：电子。

解：动能相同，静止质量小的动量小，相应的德布罗意波长长。

## 作业 21

1. 已知粒子在一维无限深方势阱中运动, 其波函数为  $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{3\pi x}{2a} (-a \leq x \leq a)$ ,

则粒子在  $x = \frac{5a}{6}$  处出现的概率密度为【】。

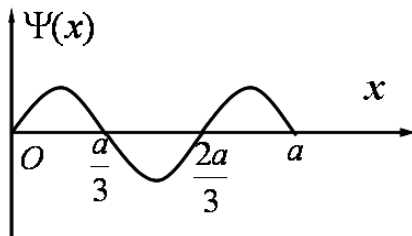
- A.  $\frac{1}{\sqrt{2a}}$  B.  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  C.  $\frac{1}{2a}$  D.  $\frac{1}{a}$

答: 【C】

解:  $|\psi|^2 \Big|_{x=\frac{5a}{6}} = \frac{1}{a} \cos^2 \left( \frac{3\pi}{2a} \cdot \frac{5a}{6} \right) = \frac{1}{a} \cos^2 \left( \frac{5\pi}{4} \right) = \frac{1}{2a}$

2. 粒子在一维矩形无限深势阱中心, 图 21-1 所示为粒子处于某一能态波函数  $\psi(x)$  的曲线。粒子出现概率最大位置为【】。

- A.  $\frac{a}{6}, \frac{a}{2}, \frac{5a}{6}$  B.  $0, \frac{a}{3}, \frac{2a}{3}, a$   
C.  $\frac{a}{2}$  D.  $\frac{a}{6}, \frac{5a}{6}$



答: 【A】

解: 显然, 这粒子处于  $n=3$  的第 2 激发态的波函数, 为正弦函数,

$|\psi(x)|^2$  的极大值出现在  $\frac{a}{6}, \frac{a}{2}, \frac{5a}{6}$  处。

3. 如果电子处于  $4f$  态, 它的轨道角动量的大小为【】。

- A.  $\sqrt{6}\hbar$  B.  $2\sqrt{3}\hbar$  C.  $\sqrt{2}\hbar$  D.  $\sqrt{3}\hbar$  E.  $4\sqrt{5}\hbar$

答: 【B】

解:  $4f$  态,  $n=4$ 、 $l=3$ , 则轨道角动量为

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar = \sqrt{3 \times (3+1)} \hbar = 2\sqrt{3} \hbar$$

4. 设描述微观粒子运动的归一化波函数为  $\psi(\vec{r}, t)$ 。

(1) 请写出  $\psi \cdot \psi^*$  的物理意义;

(2) 问:  $\psi(\vec{r}, t)$  必须满足的标准条件和归一化条件是什么? 归一化有什么意义?

解: (1) 粒子  $t$  时刻、在  $\vec{r}$  处出现的概率密度;

(2) 单值、有限、连续;  $\iiint_{-\infty}^{\infty} \psi \psi^* dV = 1$ , 符合几率描述。

5. 氢原子处于主量子数  $n=4$  的状态, 其轨道角动量可能的取值分别为\_\_\_\_\_;

对应  $l=3$  的状态, 氢原子的角动量在外磁场方向的投影可能取值分别为\_\_\_\_\_。

答:  $0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar, 2\sqrt{3}\hbar; -3\hbar, -2\hbar, -1\hbar, 0, 1\hbar, 2\hbar, 3\hbar$ 。

解:  $n=4$ , 则  $l=0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)=0, 1, 2, 3$ , 则轨道角动量的可能值为

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar = 0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar, 2\sqrt{3}\hbar$$

$l=3$  时,  $m_l = -l, -(l-1), \dots, 0, 1, 2, \dots, (l+1), l = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ,

则角动量在外磁场方向的投影可能值为

$$L_z = m_l \hbar = -3\hbar, -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar$$

6. 一个电子被束缚在宽度  $a = 10^{-10} \text{ m}$  的一维无限深方势阱中, 分别计算  $n=1, 3, 100$  的

能态电子的能量。

解：一维无限深势阱， $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$ ，

$$E_1 = \frac{6.626^2 \times 10^{-68} / 4}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 10^{-20}} = 6.03 \times 10^{-18} (J) = 37.6 (eV),$$

$$E_3 = 338.4 (eV),$$

$$E_{100} = 3.76 \times 10^5 (eV)$$

7. 设一维运动粒子的波函数为  $\psi(x) = \begin{cases} Axe^{-ax} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$  其中  $a$  为大于零的常数。试确定归一化波函数的  $A$  值。

解：由归一化条件， $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ ，得  $\int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2ax} dx = 1$ ，得

$$-\frac{A^2}{8a^3} (4a^2 x^2 e^{-2ax} + 4axe^{-2ax} + 2e^{-2ax}) \Big|_0^{\infty} = 1, \quad A^2 = 4a^3,$$

$$A = 2a^{\frac{3}{2}}$$

8. 在宽度为  $a$  的一维无限深方势阱中运动的粒子定态波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0, x > a) \\ \frac{\sqrt{2}}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} & (0 \leq x \leq a) \end{cases}$$

求：(1) 主量子数  $n = 2$  的粒子出现概率密度最大的位置；

(2) 主量子数  $n = 1$  的粒子出现在  $0 < x < \frac{a}{3}$  范围内的概率。

解：(1)  $n = 2$  时，波函数为

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a},$$

概率密度函数为

$$|\psi(x)|^2 = \left| \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} \right|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi x}{a}$$

当  $\frac{2\pi x}{a} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $x = \frac{k}{2}a + \frac{a}{4}$  为概率密度最大处，则在  $0 < x < a$  内，

在  $x = \frac{a}{4}$  和  $x = \frac{3a}{4}$  处概率密度最大。

(2)  $n = 1$  时， $(0, \frac{a}{3})$  区间粒子出现的概率

$$P = \int_0^{\frac{a}{3}} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{a}{3}} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{3} = 0.1955$$

## 作业 22

1. 氢原子光谱的巴耳末系中波长最大的谱线用  $\lambda_1$  表示, 其次波长用  $\lambda_2$  表示, 则两者的比

值  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  为【】

- A.  $\frac{27}{20}$     B.  $\frac{20}{27}$     C.  $\frac{9}{8}$     D.  $\frac{16}{9}$

答:【A】

解: 根据玻尔氢原子理论, 巴尔末系光谱频率为

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rc \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

可见, 当  $n = 3$  时, 是最小频率:  $\nu_1 = \frac{5Rc}{36}$ , 最大波长为:  $\lambda_1 = \frac{c}{\nu_{\min}} = \frac{36}{5R}$

当  $n = 4$  时, 是次最小频率:  $\nu_2 = \frac{3Rc}{16}$ , 次最大波长为:  $\lambda_2 = \frac{c}{\nu_{\min}} = \frac{16}{3R}$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{36}{5R}}{\frac{16}{3R}} = \frac{27}{20}$$

2. 处于第 3 激发态的氢原子跃迁回低能态时, 可以发出的可见光谱线有【】条。

- A. 3    B. 6    C. 1    D. 2

答:【D】

解: 可见光是高能级向  $n' = 2$  能级跃迁得到的巴尔末系。第 3 激发态是  $n = 4$ 。

由  $n = 4$  向  $n = 2$  的跃迁, 共有两个:

$$n = 4 \rightarrow n = 2$$

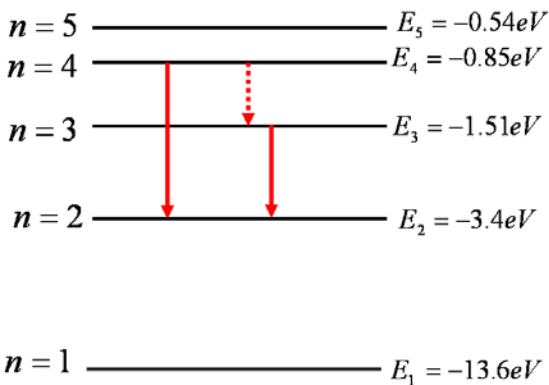
由  $n = 4 \rightarrow n = 3$  后,

再由  $n = 3 \rightarrow n = 2$

$$\text{即 } h\nu_1 = E_4 - E_2 = 2.55\text{eV}$$

$$h\nu_2 = E_3 - E_2 = 1.89\text{eV}$$

可见, 谱线有两条。



3. 具有下列哪一能量的光子能被处于  $n = 2$  的能级的氢原子所吸收【】

- A. 2.16eV    B. 2.40eV    C. 1.51eV    D. 1.89eV

答:【D】

解: 光子的能量只有刚好等于氢原子某两个能级之差时, 光子才能被吸收

$$\Delta E_1 = E_3 - E_2 = -1.51 - (-3.4) = 1.89 \text{ eV}$$

$$\Delta E_2 = E_4 - E_2 = -0.85 - (-3.4) = 2.55 \text{ eV}$$

$$\Delta E_3 = E_5 - E_2 = -0.54 - (-3.4) = 2.86 \text{ eV}$$

所以只有  $\Delta E_1 = E_3 - E_2 = -1.51 - (-3.4) = 1.89 \text{ eV}$  的光子能够被  $n = 2$  的能级的氢原子所吸收, 氢原子吸收一个光子后, 跃迁到  $E_3 = -1.51\text{eV}$  ( $n = 3$ ) 的能级上。

4. 欲使氢原子能发射巴耳末系中波长为  $656.28\text{nm}$  的谱线, 最少要给基态氢原子提供【    】 eV 能量。(里德伯常数  $R = 1.096776 \times 10^7 \text{m}^{-1}$ )

答:  $12.09\text{eV}$

[解]. 由巴尔末公式可得, 发射  $656.28\text{nm}$  的谱线是从  $n=3 \rightarrow n=2$  能级跃迁得到的, 因此, 氢原子至少应该被激发到  $E_3 = -1.51\text{eV}$  ( $n=3$ ) 的能级上。

所以要给基态氢原子提供的能量为:

$$\Delta E = E_3 - E_1 = -1.51 - (-13.6) = 12.09 \text{ eV}$$

5. 已知原子中下列电子的量子数, 对每一个原子的能量进行测量, 写出可能测到的波函数 (即能量本征态) 的数目:

(1)  $n=2, l=1, m_l=1$  \_\_\_\_\_ 种

(2)  $n=3, l=1, m_s=1/2$  \_\_\_\_\_ 种

(3)  $n=3, l=2$  \_\_\_\_\_ 种

(4)  $n=2$  \_\_\_\_\_ 种

答:  $2, 2l+1=3, 2(2l+1)=10, 2n^2=8$ ;

解: (1)  $n=2, l=1, m_l=1$ , 但  $m_s$  还有两个值, 即  $m_s = \pm 1/2$ , 所以有 2 种状态。

(2)  $n=3, l=1, m_s=1/2$ , 但  $m_l$  还有  $(2l+1)=3$  个值, 即  $m_l = -1, 0, 1$ , 所以有 3 种状态。

(3)  $n=3, l=2$ , 但  $m_l$  还有  $(2l+1)=5$  个值  $m_l = -2, -1, 0, 1, 2$ ,  $m_s$  还有两个值  $m_s = \pm 1/2$ , 所以有 10 种状态。

(4)  $n=2$ , 则  $l$  有 2 个值  $l=0, 1$ ;  $m_l$  有 4 个值:  $l=0$  时,  $m_l=0$ ,  $l=1$  时,  $m_l = -1, 0, 1$ ;  $m_s$  还有两个值  $m_s = \pm 1/2$ , 即总共有  $2n^2=8$  种状态。

6. 泡利不相容原来的内容是:

[解] 不可能有两个电子具有相同的  $(n, l, m_l, m_s)$ ;

7. 基态电子种的自的排列遵循\_\_\_\_\_原理和\_\_\_\_\_原理。

[解] 泡利不相容原理和能量最小原理;

8. 试计算能够占据一个  $f$  支壳层的最大电子数, 并写出这些电子的  $m_l$  和  $m_s$  的值。

[解]  $f$  支壳层的角量子数是  $l=3$ , 则电子的磁量子数可取  $2l+1=7$  个, 即  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ; 而自旋磁量子数可以取 2 个, 即  $m_s = \pm 1/2$ , 所以能够占据一个  $f$  支壳层的最大电子数为 14。

这些电子的  $(l, m, m_s)$  分别为:  $(3, 0, \pm \frac{1}{2}), (3, 1, \pm \frac{1}{2}), (3, -1, \pm \frac{1}{2}), (3, 2, \pm \frac{1}{2}), (3, -2, \pm \frac{1}{2}), (3, 3, \pm \frac{1}{2}), (3, -3, \pm \frac{1}{2})$ 。

9. 光子服从泡利不相容原理吗?

[解] 光子是玻色子, 其自旋量子数为 1, 它不服从泡利不相容原理; 只有费米子服从, 如电子, 质子和中子等, 其自旋量子数为  $1/2$ 。

## 作业 23

1. 原子自发辐射和受激辐射的特点分别是【】

A. 自发辐射出同频率的光不相干; 受激辐射的光与入射光也不相干

B. 自发辐射出同频率的光是相干的; 受激辐射的光与入射光也是相干的

- C. 自发辐射出同频率的光是相干的；受激辐射的光与入射光不相干  
D. 自发辐射出同频率的光不相干；受激辐射的光与入射光是相干的

【D】

2. 激光全息照相技术主要是利用激光的哪个种优良的特性 【】

- A. 亮度高 B. 方向性好 C. 相关性好 D. 抗电磁干扰能力强

【C】

3. 自发辐射是指\_\_\_\_\_。

受激辐射是指\_\_\_\_\_。

[解]自发辐射是指：无外界刺激，光自发地从高能级向低能级跃迁，自发辐射出的光是不相干的；

受激辐射是指：有外界刺激的情况下，光从高能级向低能级跃迁，且辐射光和入射光子是相干的；

4. 粒子数反转是指\_\_\_\_\_。

[解]粒子数反转是指：激光器的工作物质处于高能级中的粒子数超过处于低能级的粒子数；这样的粒子分布状态称为粒子数反转；

5. 要实现粒子数反转必须\_\_\_\_\_。

[解]有激励能源使原子激发，另外工作物质还要有合适的亚稳态能级；

6. 普通光源的发光机制是\_\_\_\_\_占优势，激光器发光是\_\_\_\_\_；要产生激光必须使激光器的工作物质中\_\_\_\_\_超过\_\_\_\_\_。这种分布状态称作\_\_\_\_\_。

[解]普通光源的发光机制是自发辐射占优势，激光器发光是受激辐射占优势；要产生激光，必须使激光器的工作物质中高能级的粒子数超过低能级的粒子数，这种分布状态称作粒子数反转

7. 激光器中光学谐振腔的作用是：

- (1) \_\_\_\_\_  
(2) \_\_\_\_\_  
(3) \_\_\_\_\_

[解] (1) 产生与维持光的振荡，使光得到加强，实现光放大；

(2) 使激光有极好的方向性；

(3) 使激光的单色性好。

8. 光和物质相互作用产生受激辐射时，辐射光和入射光具有完全相同的特性，这些特性是指\_\_\_\_\_。

[解]相位、频率、偏振状态和传播方向

9. 激光器按工作物质划分可以分成四类，他们是\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_。

[解]固体、气体、液体和半导体激光器

## 作业 24

1. 与绝缘体比较，半导体能带结果的特点是 【】

- A. 最高能带是价带 B. 满带与空带间有较窄的禁带  
C. 满带与空带相衔接 D. 满带与空带间有较宽的禁带

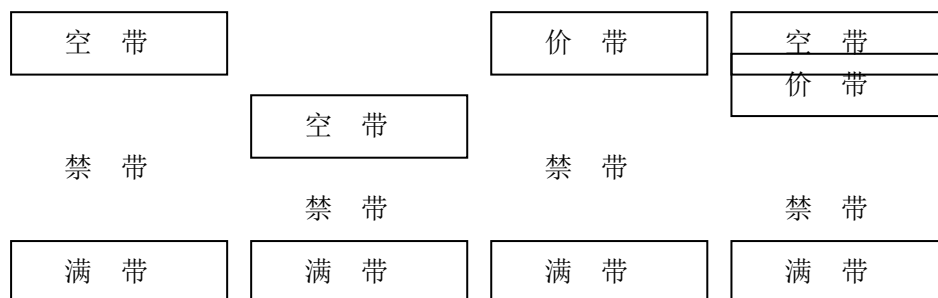
【B】

2. 下述说法中正确的是【】

- A. n 型半导体中杂质原子所形成的能级靠近空带底部，能级中的电子容易被激发到空带中，所以导电性能比本征半导体好得多。
- B. p 型半导体的导电机制与掺杂质无关
- C. 本征半导体是电子与空穴同时参与导电，而杂质半导体只有电子（或者空穴）导电，所以本征半导体的导电性能比杂质半导体好
- D. n 型半导体的导电性能优于 p 型半导体，因为 n 型半导体是电子导电，而 p 型半导体是正离子导电。

【A】

3. 图 24-1 是导体、半导体、绝缘体在低温状态下的能带结构图，其中属于半导体能带结构的是【】



【B】

4. 从能带结构看，本征半导体的导电机制是\_\_\_\_\_导电，参杂后，p 型半导体的杂质能级位于\_\_\_\_\_（A）其特点\_\_\_\_\_（B）；n 型半导体的杂质能级位于\_\_\_\_\_其特点\_\_\_\_\_。

[解]从能带结构来看，本征半导体的导电机制是本征激发到空带中的电子和余下的满带中的空穴导电；掺杂后，p 型半导体的杂质能级位于价带上方附近，其特点是价带中的电子较容易激发到该受主能级上，从而在价带中形成空穴，产生空穴导电；n 型半导体的杂质能级位于导带下方附近，其特点是杂质能级中的电子较容易激发到导带上，从而在导带中形成电子，产生电子导电。

5. 如果一能带中所有的能态都被电子填满，则称之为\_\_\_\_\_；高能态的能带中没有电子，所以称为\_\_\_\_\_；价电子所在的能级分裂而成的能带称为\_\_\_\_\_。

[解]如果一能带中所有的能态都被电子填满，这能带称为满带；高能态的能带中没有电子，所以称为空带；价电子所在的能级分裂形成的能带称为价带。

6. 为什么杂质半导体的导电性能比本征半导体好？

[解]本征半导体是电子和空穴两种载流子同时参予导电，满带和空带之间有禁带；而杂质半导体由于杂质原子提供的能级或靠近满带(p 型半导体)，或靠近空带(n 型半导体)，使得电子很容易被激发，或者满带中的电子激发到受主能级(p 型半导体)，或者施主能级上的电子激发到空带中(n 型半导体)，都会形成未满的导带，使得导电性能比本征半导体要好。

