第四节　空间中的直线及其方程

学习这一节要掌握好下面三个方面的知识：

（一）　直线方程的三种形式：点向式（也叫对称式）、参数式、一般式。

（二）　直线方程三种形式之间的转换。

（三）　求直线方程的三种方法：点向法、两点法、一般式法。

一、　直线的点向式方程与参数式方程

1.定义　与直线平行的非零向量叫做该直线的方向向量，方向向量的三个坐标称为该直线的方向数．显然，直线上的任一个向量都与其方向向量平行．

注意：我们习惯用 $\vec{s}$ 表示方向向量，用 l 表示直线。

2. 一条直线由其上一点和它的方向向量唯一确定．下面我们在此条件下来建立直线的方程．

设 $P(x,y,z)$ 是直线 l 上一点，$\vec{s}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ 为直线 l 的方向向量，即方向数为 m,n,p,

则点 $P(x,y,z)$ 在直线 l 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} /\!/ \vec{s}$，即

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (4.4)$$

这种由一点和方向向量所确定的直线方程叫做直线的点向式方程．由于方程的结构对称，也叫做直线的对称式方程．

注：（1）“点 $P(x,y,z)$ 在直线 l 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} /\!/ \vec{s}$” 是一个关键点，要记住。

（2）上面的讨论用到结论：“两个向量平行 $\Leftrightarrow$ 对应的坐标成比例”。

（3）直线方程的形式与平面方程的形式是不一样的，一定要加以区别。

（4）点向式方程的分母是方向向量的坐标，分子减的三个数是所过点的坐标。

（5）因为点向式方程的分母是方向向量的坐标，方向向量的坐标中是可以有 **0** 的，所以当 m,n,p 中有的为 **0** 时，仍然认为方程（**4.4**）有意义。

3. 对于上面的直线 l，我们现在来建立它的参数式方程。

点 $P(x,y,z)$ 在直线 l 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} /\!/ \vec{s} \Leftrightarrow$ 存在数 t，使得 $\overrightarrow{P_0P}=t\vec{s}$，即 $\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}$，

也即 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$，　　　　(4.6)

这个方程叫做直线的参数式方程，其中 t 为参数。

注：公式（4.6）是要记住的，参数 t 的系数是方向向量的坐标，即直线的方向数。

4. 点向式方程（即对称式方程）与参数式方程之间的转换。

（1）令式 (4.4) 等于参数 t，可将直线的对称式方程化为参数式方程。

（2）从式 (4.6) 的三个式子分别求出 t，可将直线的参数式方程化为对称式方程。

例： 将直线的点向式方程 $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{3}$ 化成参数式方程.

解： 令 $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{3}=t$，求得参数式方程为 $\begin{cases}x=t\\ y=-1\\ z=2+3t\end{cases}$.

注： 该直线过点 $(0,-1,2)$，方向向量为 $\vec{s}=\vec{i}+3\vec{k}$ （也可写成 $\boldsymbol{s}=[1,0,3]^T$），方向数为 $1,0,3$.

例：将直线的参数式方程 $\begin{cases}x=1+4t\\ y=2+5t\\ z=3+6t\end{cases}$ 化成点向式方程.

解：从参数式方程可得 $\frac{x-1}{4}=t,\frac{y-2}{5}=t,\frac{z-3}{6}=t,$

因为上面三个式子都等于 t，所以 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{6}$.

这就化成了点向式（即对称式）方程.

例：将参数式方程 $\begin{cases}x=1\\ y=2t\\ z=3t\end{cases}$ 化成点向式方程.

解：该直线过点 $(1,0,0)$，方向向量为 $\boldsymbol{s}=[0,2,3]^T$，

该直线的点向式（即对称式）方程为 $\frac{x-1}{0}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{3}$..

例 4-10 求过两个相异点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 和 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的直线方程.

解：所求直线过点 P_0，方向向量为 $\overrightarrow{P_0P_1}$.

该直线的点向式（即对称式）方程为 $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$.

上式称为**直线的两点式方程**.

注：上式虽然称为两点式方程，但一般不把它看作直线方程的一种新形式，它的本质还是点向式（即对称式）方程的形式，把它看作是求直线方程的一种新方法更合适。

例 4-11 求直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-3}$ 与平面 $2x-y+z=4$ 的交点 P.

解： 将直线的点向式方程化成参数式方程，得 $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2\\ z=3-3t\end{cases}$，

将上式代人平面方程 $2x-y+z=4$，得 $2(1+2t)-2+(3-3t)=4$，求得 $t=1$。

所求的交点为 $P(3,2,0)$。

注：求一条直线与一个平面的交点一般都是通过直线的参数式方程来求的，这种方法是要记住的。

二、直线的一般式方程

1. 当平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与平面 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 相交时，它们的交线 l 上的点的坐标同时满足 π_1 与 π_2 的方程，即满足方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$.

反过来，坐标满足该方程组的点同时在平面 π_1 与 π_2 上，即在交线 l 上。因此，可用这个方程组来表示直线 l，并把它称为直线 l 的一般式方程.

注：（1）直线的一般式方程是直线方程的第三种形式，我们要接受它，这种形式的方程能转换成点向式方程和参数式方程，下面有介绍。

（2）如果从已知条件能知道所求直线是某两个平面的交线，那么只要求出这两个平面的方程，联立以后就可得到这条直线的一般式方程。这是求直线方程的另一种方法。

2. 由于经过一条直线的平面有无穷多个，将其中任何两个平面的方程联立，得到的方程组都可表示这条直线．因此，直线的一般式方程不唯一。

注：直线的点向式（即对称式）方程、参数式方程也都不唯一。

3. 直线的三种形式的方程，对于处理不同的问题各有其长处，应熟悉它们相互间的转换.

前面我们介绍了点向式（即对称式）方程与参数式方程之间的转换，下面来介绍直线的一般式方程与点向式（即对称式）方程之间的转换。

首先介绍将点向式方程化为一般式方程的做法。

（1）对于点向式方程（4.4），当 m,n,p 中只有一个为零，例如 $m=0$ 时，点向式方程(4.4)可化成一般式方程 $\begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$.

注：当点向式方程（4.4）的分母 $m=0$ 时，对应的分子 $x-x_0$ 也一定为 0，这可通过点向式方程化为参数式方程的做法来思考。另外，$x-x_0=0$ 和 $\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 表示两个平面，这条直线可看成这样两个平面的交线。

（2）当 m,n,p 中有两个为零，例如 $n=0, p=0$ 时，点向式方程(4.4)可化成一般式方程

$$\begin{cases} y-y_0=0 \\ z-z_0=0 \end{cases}.$$

注：当 $n=0, p=0$ 时，对应的分子 $y-y_0, z-z_0$ 也一定为 0.

（3）当 m,n,p 都不为零时，点向式方程(4.4)可化为一般式方程 $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n} \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$,

注：这时，直线的一般式方程也可写成$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}\\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}\end{cases}$或$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}\\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}\end{cases}$，

上面的三种形式可互推。

下面通过例 4-12 介绍将直线的一般式方程化为对称式方程的做法。

例 4-12　将直线的一般式方程$\begin{cases}x-y+z=0\\ x+y-2z=2\end{cases}$化为对称式方程.

解法 1　本题从字面上看是将一般式方程化为对称式方程，按解法 1 做题时，把它看成求直线的点向式方程更好理解。

先求直线上一点。 在该直线方程中，令$z=0$，得$\begin{cases}x-y=0\\ x+y=2\end{cases}$，求得$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$. 因此，点$(1,1,0)$是该直线上的一个点.

再求该直线的方向向量$\vec{s}$. 由于这条直线是法向量分别为$\mathbf{n}_1=[1,-1,1]^T$和$\mathbf{n}_2=[1,1,-2]^T$的两个平面的交线，因此$\vec{s}\perp\overrightarrow{n_1}$且$\vec{s}\perp\overrightarrow{n_2}$. 可取该直线的方向向量为

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k},$$

于是，该直线的对称式方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$.

解法 2　通过两点法来求这条直线的对称式方程。

令$z=0$，求得该直线上的一点$(1,1,0)$；再令$y=0$，又求得该直线上的一点$\left(\dfrac{2}{3},0,-\dfrac{2}{3}\right)$.根据两点式方程可求得该直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{3}}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-\frac{2}{3}},\qquad \text{即}\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}.$$

解法 3　先将直线的一般式方程化为参数式方程，再将参数式方程化为对称式方程。

在$\begin{cases}x-y+z=0\\ x+y-2z=2\end{cases}$中，令$z=t$,求出$x$和$y$，可得该直线的参数式方程$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t+1\\ y=\dfrac{3}{2}t+1\\ z=t\end{cases}$，

再将其化为对称式方程，得$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$.