第六章 连续时间系统的系统函数

§6.1 引 言

- 描述一个线性连续时间系统：**时域**内用$h(t)$；**频域**内用$H(j\omega)$；**复频域**内用$H(s)$。

- **系统函数**（System function）$H(s)$的定义：零状态响应函数$R_{zs}(s)$与激励函数$E(s)$之比，即

$$H(s)=\frac{R_{zs}(s)}{E(s)}\begin{array}{l}\longrightarrow \text{零状态响应信号}r_{zs}(t)\text{的拉氏变换}\\ \longrightarrow \text{激励信号}e(t)\text{的拉氏变换}\end{array}$$

- 在电系统中，系统函数也称为**转移函数**或**传输函数**。

输入端口 (激励)	输出端口 (响应)	系统函数
电流$I_1(s)$	电压$U_2(s)$	转移阻抗函数 $Z_{21}(s)=\dfrac{U_2(s)}{I_1(s)}$
电压$U_1(s)$	电流$I_2(s)$	转移导纳函数 $Y_{21}(s)=\dfrac{I_2(s)}{U_1(s)}$
电压$U_1(s)$	电压$U_2(s)$	电压传输函数 $T_{21}(s)=\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$
电流$I_1(s)$	电流$I_2(s)$	电流传输函数 $T_{21}(s)=\dfrac{I_2(s)}{I_1(s)}$

- **系统函数**$H(s)$**与系统单位冲激响应函数**$h(t)$**的对应关系：**

$$\boxed{h(t) \leftrightarrow H(s)}$$

- **系统函数**$H(s)$**与系统的频率响应函数**$H(j\omega)$**的对应关系：**

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = H(s)\Big|_{s=j\omega}}$$

- $h(t)$**反映了系统在时域内的特性，**$H(j\omega)$**反映了系统在频域内的特性，而**$H(s)$**在复频域/s域内反映了系统的特性。**

- **通过分析系统函数，可以知道系统零极点的分布情况、系统的稳定性以及系统的频率响应特性等。**

§6.2 系统函数的表示方法

一、系统函数的零极图/极零图

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

其中，a和b都是实数，$N(s)$和$D(s)$都是s的有理函数。

- 一个实系统的系统函数$H(s)$一定是复变量s的有理函数，这是系统函数的基本性质。

$$H(s)=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)},\quad H_0=\frac{b_m}{a_n}$$

$z_1,z_2,\cdots,z_m$称为$H(s)$的零点，$p_1,p_2,\cdots,p_n$称为$H(s)$的极点。

- 将$H(s)$的所有零点（○）和极点（×）画在s平面上，就得到系统函数的零极图/极零图。

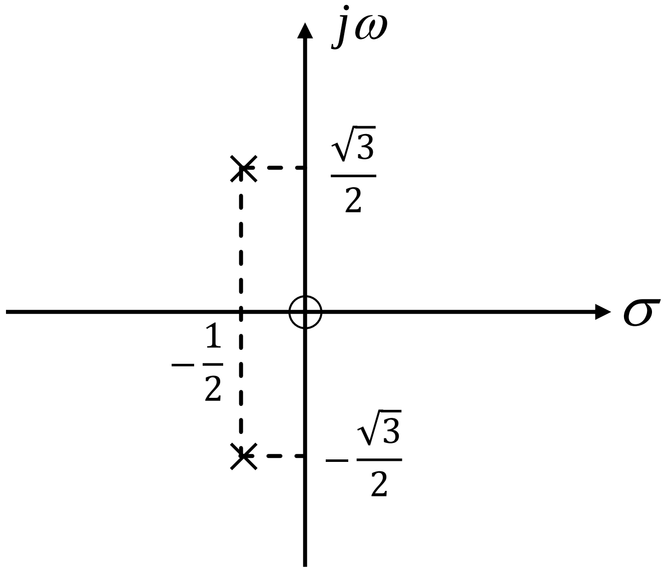
例：画出系统函数$H(s)=\frac{s}{s^2+s+1}$的零极图。

解：根据题意可知，$H(s)$的零点为 $z_1=0$

令 $s^2+s+1=0$**，解得$H(s)$的极点为**

$$p_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j,\qquad p_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

故$H(s)$的零极图为



注意：如果存在n阶零点或者极点，在相应的位置用(n)标注。

二、系统函数的频率特性图

- 系统对信号的稳态响应随频率的变化规律称为系统的**频率响应函数**$H(j\omega)$：

$$H(j\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

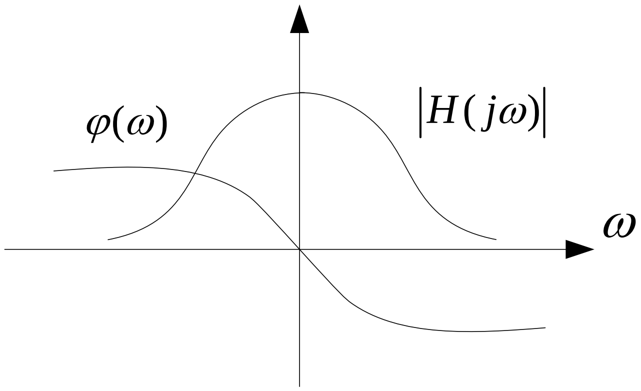
- 画出$|H(j\omega)|$随频率变化的**幅频特性曲线**以及$\varphi(\omega)$随频率变化的**相频特性曲线**。

例：画出系统函数$H(s)=\frac{1}{s+1}$的频率特性图。

解：根据题意可知，

$$H(j\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}=\frac{1}{j\omega+1}=\frac{1}{1+\omega^2}+j\frac{-\omega}{1+\omega^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}e^{j(-arctan\omega)}$$



§6.3 系统函数的零极点分布与系统稳定性的关系

一、系统函数的零极点分布对应的时域模式

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

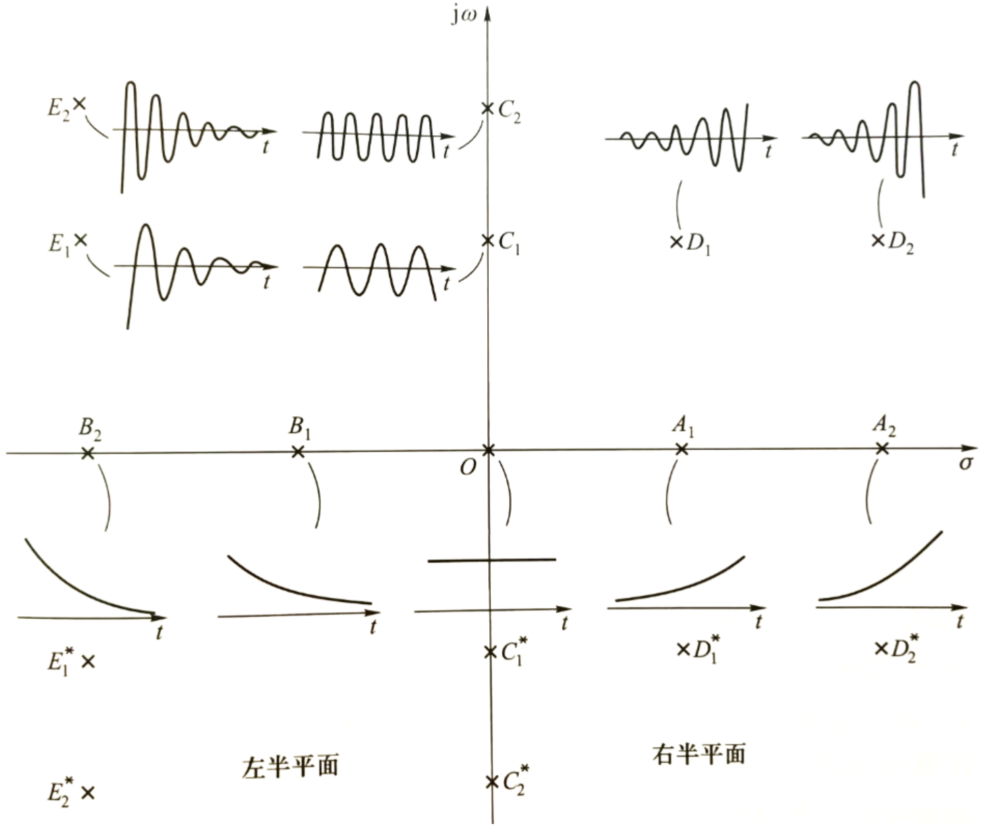
$$=H_0\frac{N(s)}{(s-p_1)^l(s-p_{l+1})\cdots(s-p_k)\cdots(s-p_n)}$$

$$=\boxed{\frac{K_{1l}}{(s-p_1)^l}+\cdots+\frac{K_{1k}}{(s-p_1)^k}+\cdots+\frac{K_{11}}{s-p_1}}+\boxed{\frac{K_{l+1}}{s-p_{l+1}}+\cdots+\frac{K_k}{s-p_k}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}}$$

$$h(t)=I.L.T.\{H(s)\}$$

$$=\boxed{\frac{K_{1l}}{(l-1)!}t^{l-1}e^{p_1 t}\varepsilon(\mathrm{t})+\cdots+\frac{K_{1k}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{p_1 t}\varepsilon(\mathrm{t})+\cdots K_{11}e^{p_1 t}\varepsilon(\mathrm{t})}$$

$$\boxed{+K_{l+1}e^{p_{l+1}t}\varepsilon(\mathrm{t})+\cdots+K_k e^{p_k t}\varepsilon(\mathrm{t})+\cdots+K_n e^{p_n t}\varepsilon(\mathrm{t})}$$



极点在s平面**左半平面** → 时域模式**收敛**

极点在s平面**右半平面** → 时域模式**发散**

在虚轴上的**单阶极点** → 时域模式**等幅振荡**

在虚轴上的**重阶极点** → 时域模式**发散**

二、系统的稳定性

- **稳定系统**：对于有界的激励信号产生**有界的响应**信号的系统，即系统具备有限输入–有限输出的**BIBO**（Boundary-input, boundary-output）特性。

- **不稳定系统**：对于有界的激励信号产生**无限增加**的响应信号的系统。

- **临界稳定系统**：对于有界的激励信号产生**幅度恒定的振荡**信号的系统。

- **稳定系统：对于有界的激励信号产生有界的响应信号的系统。**

$$\text{若}|e(t)| \le M_e\text{，则}|r(t)| \le M_r\text{，}\quad 0 \le t \le \infty$$

其中M_e和M_r为有限的正实数

- **从时域角度分析系统稳定的条件：**

$$r_{zs}(t) = e(t) * h(t) = h(t) * e(t)$$

$$|r_{zs}(t)| = |h(t) * e(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)e(t-\tau)|d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot |e(t-\tau)|d\tau$$

$$\le M_e \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau \le M_r$$

使得上式成立的条件是$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau < \infty$，即系统稳定的充分必要条件是系统单位冲激响应$h(t)$满足绝对可积。

➢ 从复频域角度分析系统稳定的条件：

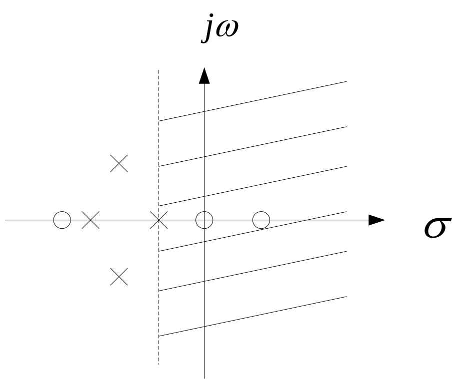
$H(s)$的极点在s平面左半平面 ⟶ 系统稳定

$H(s)$的极点在s平面右半平面 ⟶ 系统不稳定

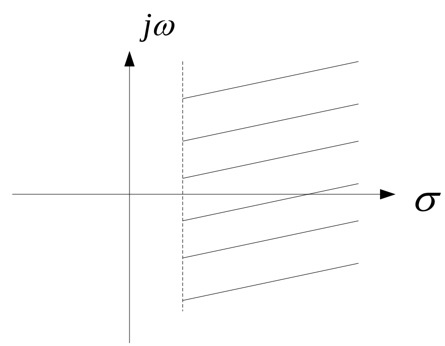
$H(s)$的极点（单阶）在虚轴上 ⟶ 系统临界稳定

$H(s)$的极点（重阶）在虚轴上 ⟶ 系统不稳定

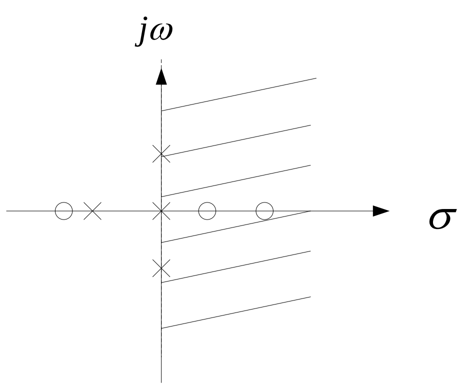
系统稳定



系统不稳定



系统临界稳定



系统稳定的判别条件是系统函数$H(s)$的收敛域包含虚轴。

§6.4 系统函数的零极点与系统频率响应特性的关系

系统函数 $H(s) = H_0 \dfrac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$

系统频率响应 $H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = H_0 \dfrac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)\cdots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)\cdots(j\omega-p_n)}$

令$j\omega - z_i = B_i e^{j\beta_i}$，$j\omega - p_k = A_k e^{j\alpha_k}$，**则有**

$$H(j\omega) = H_0 \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n} e^{j(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n)} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

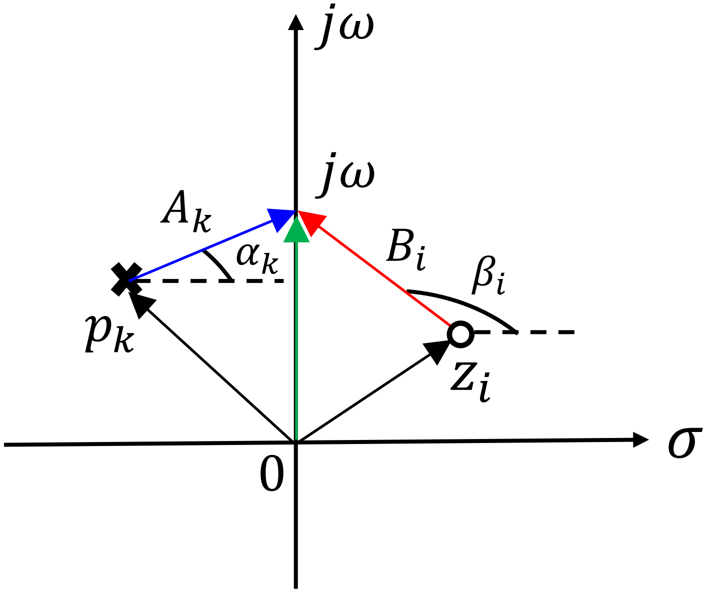
故系统幅频特性和相频特性的表达式为

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m} B_i}{\prod_{k=1}^{n} A_k}, \qquad \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$

➢ 系统频率响应特性的矢量表示法

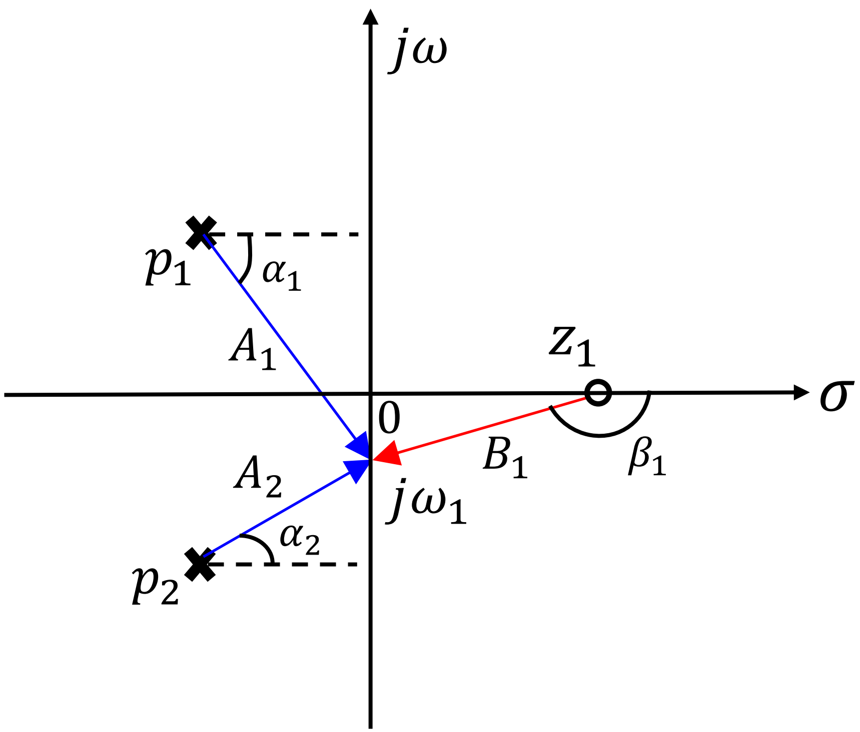
系统频率响应 $H(j\omega) = H_0 \dfrac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)\cdots(j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\cdots(j\omega - p_n)}$

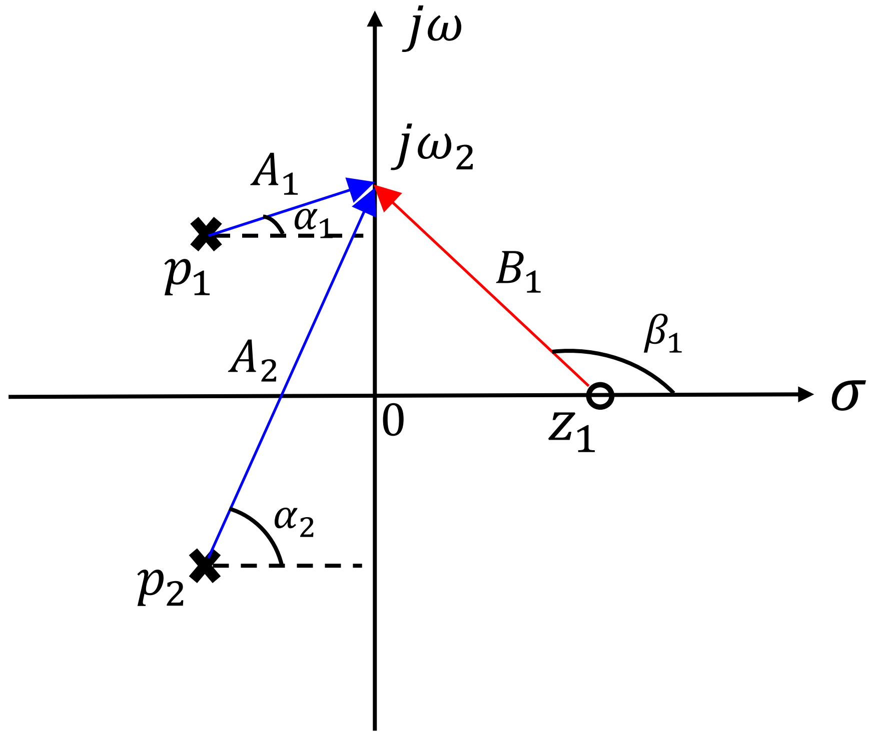
$$j\omega - z_i = B_i e^{j\beta_i}，\ j\omega - p_k = A_k e^{j\alpha_k}$$



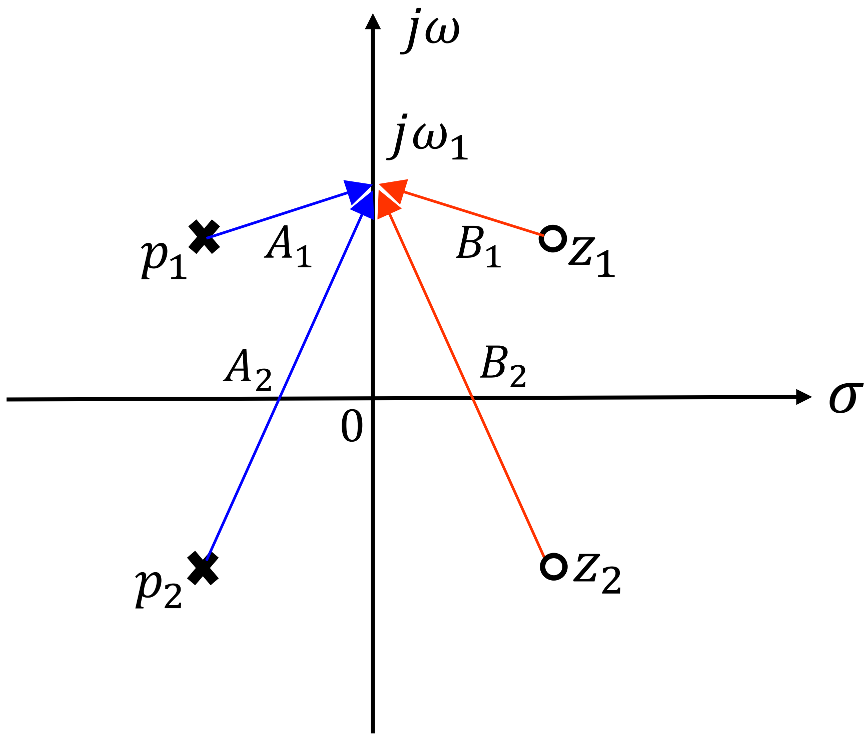
系统幅频特性和相频特性的表达式

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m} B_i}{\prod_{k=1}^{n} A_k}, \qquad \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$



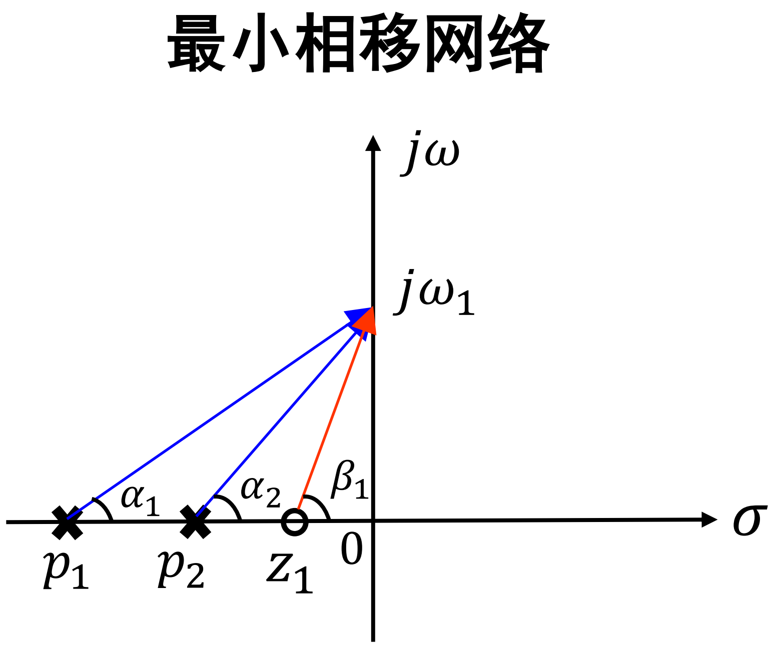


- **全通网络**：系统的**零点**都在s平面**右半平面**，系统的**极点**都在s平面**左半平面**，且零点和极点关于虚轴对称。



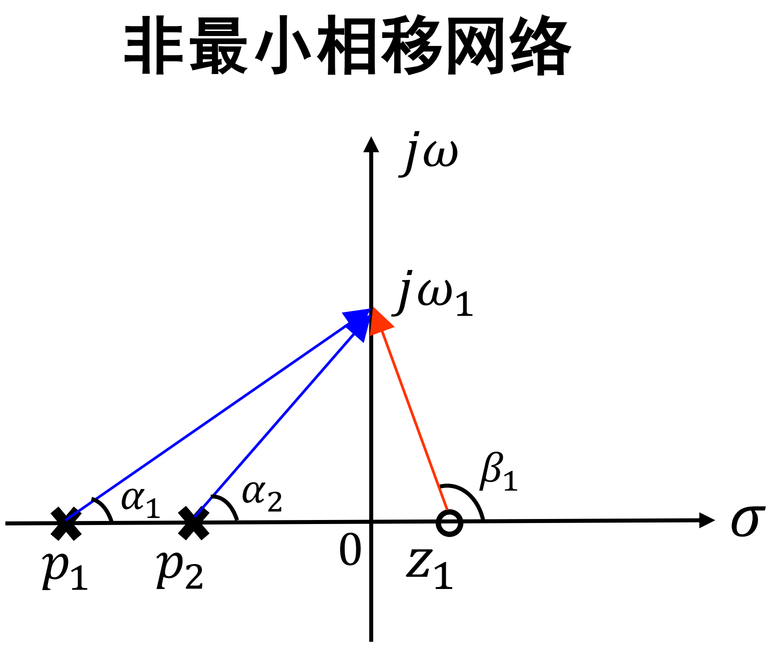
- 该网络系统的**幅频特性**是一个**常数**H_0，其允许所有频率的信号通过系统，实际工程中主要用于相位校正。

➢ **最小相移网络**：系统的零点和极点都在s平面**左半平面**。



$\omega: 0\sim\infty,$

$\varphi(\omega): 0°\sim-90°$



$\omega: 0\sim\infty,$

$\varphi(\omega): 180°\sim-90°$

➢ 最小相移网络的**相移最小**，故在实际工程中这类系统产生的延时量最小。

本章小结

基本概念：系统函数、系统函数的零极图、稳定系统、临界稳定系统、全通网络、最小相移网络。

基本运算：绘制系统的零极图、通过系统函数求系统的频率响应特性、系统稳定的时域条件和复频域条件、根据系统的零极点分布确定系统的频率响应特性。