第五章 连续时间系统的复频域分析

§5.1 引　言

➢ 傅里叶变换的优点：

(1) 避免了卷积运算，简化了响应的求解过程；

(2) 物理意义明确，引入了谐波、频响等概念。

➢ 傅里叶变换的缺点：

(1) 只能处理满足收敛条件的信号，对不满足收敛条件的信号，必须使用奇异函数，不方便；

(2) 需要使用傅里叶反变换，广义积分$\int_{-\infty}^{\infty}(\quad)dx$有时计算很困难。

- 复频域分析法就是拉普拉斯变换(拉氏变换)分析法：将激励信号分解为变幅的正弦信号加权和的形式，分别讨论每个信号单独作用到系统中的响应，最后叠加得到激励信号作用到系统中的总响应。

- 其优点在于：

  (1)将微积分运算转换为乘除法运算；

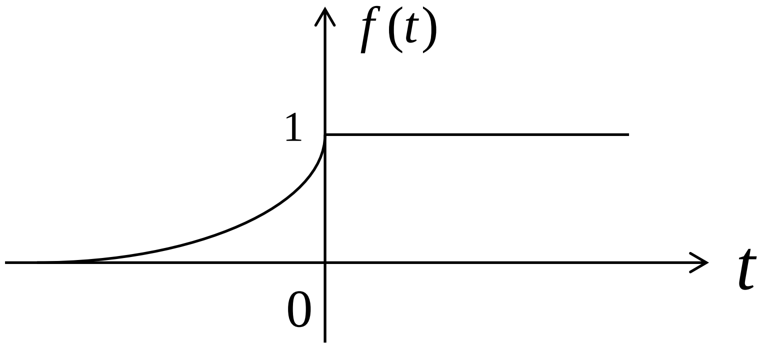
  (2)将卷积的运算转换为乘积的运算；

  (3)比傅里叶变换的适用范围更广泛。

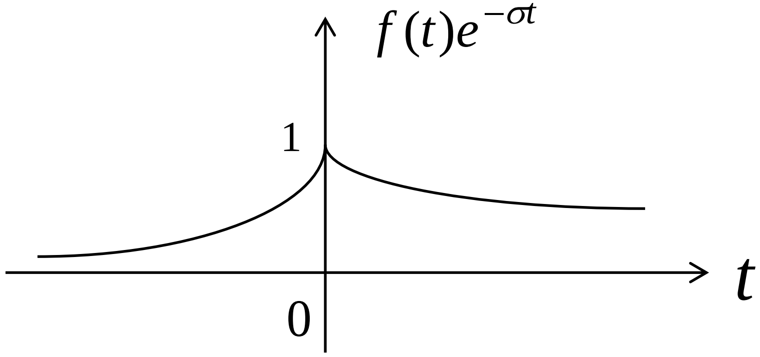
§5.2 拉普拉斯变换

若信号本身不满足绝对可积条件，其傅里叶变换就不存在。为使信号收敛，用收敛因子$e^{-\sigma t}$去乘$f(t)$。例如：

$$f(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ e^{\beta t} & t<0\end{cases}$$



$$f(t)e^{-\sigma t}=\begin{cases}e^{-\sigma t} & t>0\\ e^{\beta t}e^{-\sigma t} & t<0\end{cases}$$



只要$0<\sigma<\beta$，则$f(t)e^{-\sigma t}$就双向收敛。

$$F.T.\{f(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

令$s = \sigma + j\omega$**，则有**$F_d(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

此式称为双边拉普拉斯正变换式（Double-sided Laplace transform, L.T.），或称为广义的傅里叶变换。

根据傅里叶反变换的定义可得：

$$I.F.T.\{F_d(s)\} = f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_d(s)e^{j\omega t}d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_d(s)e^{\sigma t}e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_d(s)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_d(s)e^{st}d\omega$$

因为$s = \sigma + j\omega$**，故**$d\omega = \frac{1}{j}ds$**，且积分限为**$s: \sigma - j\infty \sim \sigma + j\infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_d(s)e^{st}ds$$

此式称为双边拉普拉斯反变换式（Inverse Laplace transform, I. L.T.）。

实际工程中，绝大多数的激励信号都是因果信号，故研究的重点是单边拉普拉斯变换（Single-sided Laplace transform）：

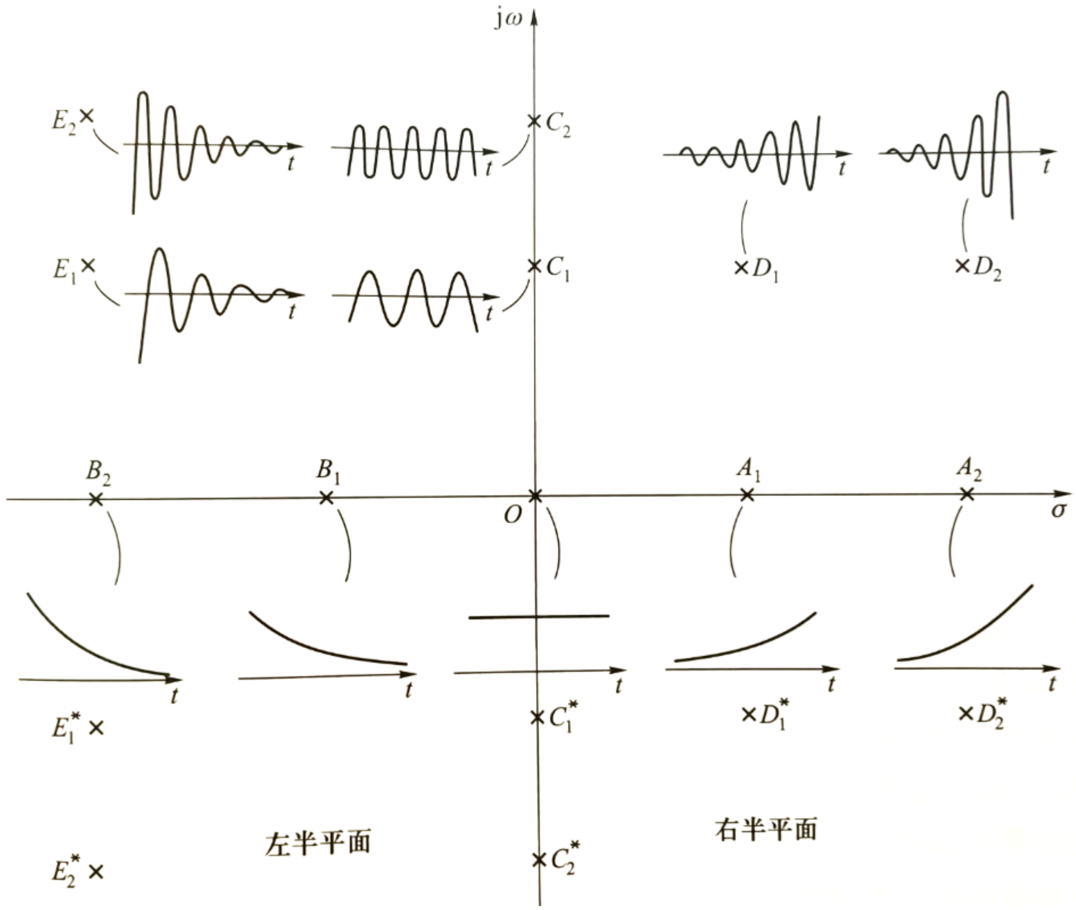
单边拉普拉斯正变换 $$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

单边拉普拉斯反变换 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds\right]\varepsilon(t)$$

原函数$f(t)\leftrightarrow$ 象函数$F(s)$

s称为信号的复频率（Complex frequency），$F(s)$可以看作是信号的复频谱（Complex frequency spectrum）。

变幅的余弦信号 $e^{\sigma t}\cos\omega t=\frac{1}{2}e^{(\sigma+j\omega)t}+\frac{1}{2}e^{(\sigma-j\omega)t}$



复平面/s平面上不同复频率所对应的时间函数变化模式图

§5.3 拉普拉斯变换的收敛域/收敛区

- 信号 $f(t)$ 与收敛因子 $e^{-\sigma t}$ 相乘后是否收敛，取决于两个因素：
  (1) 信号$f(t)$本身的收敛性；
  (2) 收敛因子中σ的取值范围。

- 将能够使$f(t)e^{-\sigma t}$满足绝对可积的σ的取值范围称为信号$f(t)$拉普拉斯变换的收敛域/收敛区（**Region of convergence**）。

- 显然，只有在收敛域内，信号的拉普拉斯变换才存在。在收敛域外，信号的拉普拉斯变换不存在。

- 单边拉普拉斯变换存在的条件是：信号$f(t)e^{-\sigma t}$满足**绝对可积**，也就是要求$f(t)$是**指数阶函数**且**分段连续**。

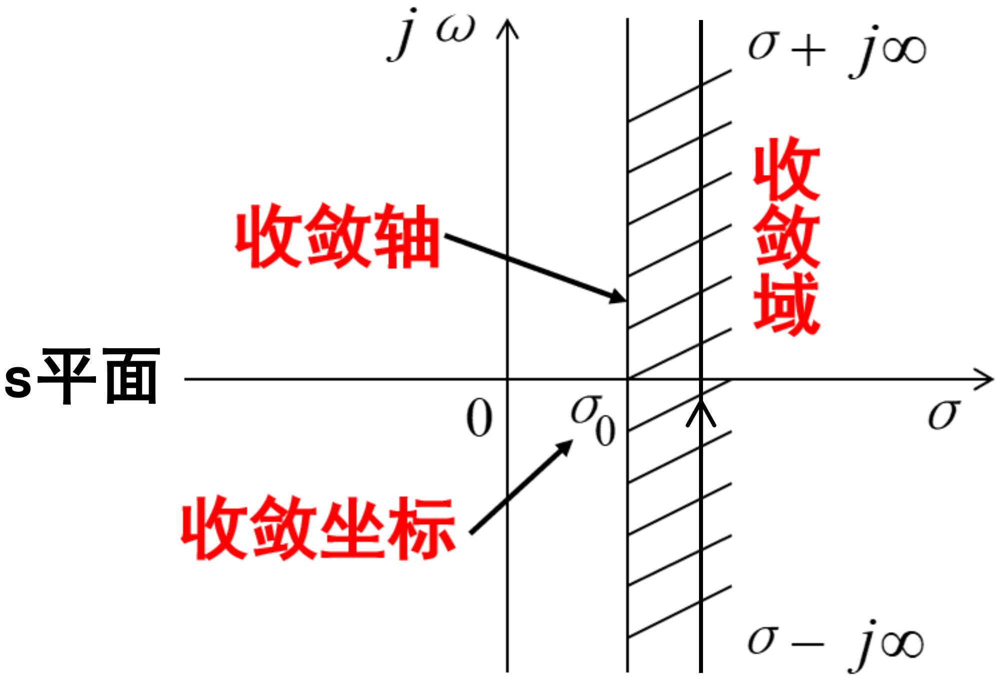
- 指数阶函数：存在一个**常数**σ_0，使得$f(t)e^{-\sigma t}$在$\sigma > \sigma_0$的范围内**有界**，且当$t \to \infty$时，$f(t)e^{-\sigma t}$的**极限值趋于零**，即

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0,\ \sigma > \sigma_0}$$

- 分段连续：除了**有限个间断点**外，函数$f(t)$都是**连续的**，且间断点处$f(t)$的极限值是**有限的**。

- 此条件只是**充分条件**，而非**必要条件**。

单边拉普拉斯变换的收敛域为$\sigma > \sigma_0$



注意：单边拉普拉斯变换的收敛域不包含收敛轴。

实际工程中，大多数信号都是指数阶信号且分段连续，因此这些信号的单边拉氏变换都存在，所不同的是收敛域不同。

例：求下列信号单边拉普拉斯变换的收敛域。

(1) $f(t)=\varepsilon(t)$； (2) $f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)$

解：(1) 根据单边拉普拉斯变换收敛域的判别条件，有

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t}=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)e^{-\sigma t}=0$$

当$\sigma>0$时，上式成立。故其收敛域为$\sigma>0$。

(2) 根据单边拉普拉斯变换收敛域的判别条件，有

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t}=\lim_{t\to\infty}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)]e^{-\sigma t}=0$$

σ 取任意值时，上式均成立，故其收敛域为整个s平面。

§5.4 常用函数的拉普拉斯变换

- 当信号$f(t)$满足绝对可积条件时，其傅里叶变换与其拉普拉斯变换有简单的互换关系：

$$F(s)=F(j\omega)|_{j\omega=s},\quad F(j\omega)=F(s)|_{s=j\omega}$$

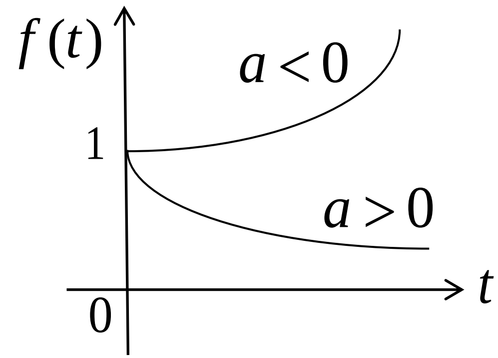
- 当信号 $f(t)$ 不满足绝对可积条件时，其傅里叶变换不存在，其拉普拉斯变换需要用定义式求解。

$$F(s)=L.T.\{f(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

- 实际工程应用中，比较常见的两类信号是(1)t的指数函数和(2)t的正整数幂函数。这两类信号的拉普拉斯变换是关注的重点。

一、单边指数函数

$f(t)=e^{-\alpha t}\varepsilon(\mathrm{t})$，$\alpha$为常数

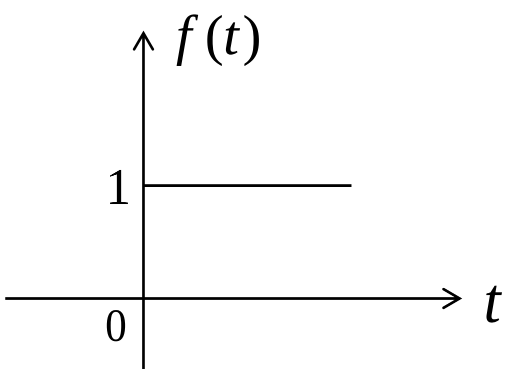


$$F(s)=L.T.\{e^{-\alpha t}\varepsilon(\mathrm{t})\}=\int_{0^-}^{\infty}e^{-\alpha t}\varepsilon(\mathrm{t})e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(s+\alpha)t}dt$$

$$=-\frac{1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s+\alpha}$$

收敛域： $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\alpha t}\varepsilon(\mathrm{t})e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(\mathrm{t})e^{-(\sigma+\alpha)t}=0 \longrightarrow \sigma>-\alpha$

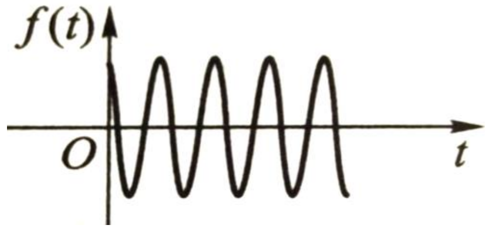
1. 单位阶跃函数



$f(t)=\varepsilon(\mathrm{t})=e^{-\alpha t}\varepsilon(\mathrm{t})\Big|_{\alpha=0}$　　$F(s)=L.T.\{\varepsilon(\mathrm{t})\}=\dfrac{1}{s}$

收敛域： $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(\mathrm{t})e^{-\sigma t}=0 \longrightarrow \sigma>0$

2. 单边余弦函数

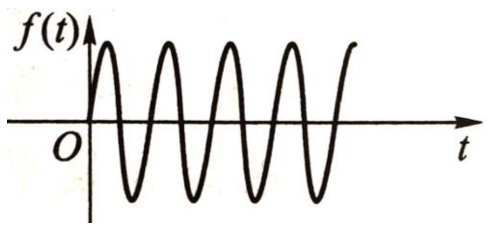


$$f(t)=\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)\varepsilon(\mathrm{t})$$

$$F(s)=L.T.\{\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

收敛域： $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})e^{-\sigma t}=0 \Longrightarrow \sigma>0$

3. 单边正弦函数

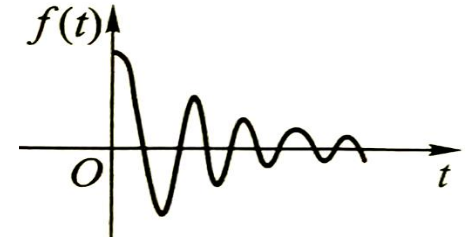


$$f(t)=\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)\varepsilon(\mathrm{t})$$

$$F(s)=L.T.\{\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})\}=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

收敛域： $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})e^{-\sigma t}=0 \Longrightarrow \sigma>0$

4. 单边衰减余弦函数



$$f(t)=e^{-\alpha t}\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t}),\quad \alpha>0$$

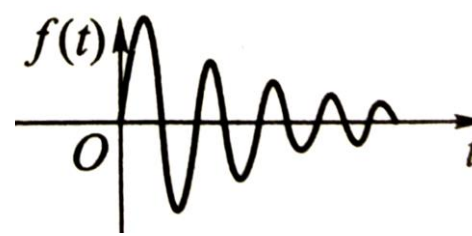
$$f(t)=e^{-\alpha t}\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})=\frac{1}{2}\left[e^{-(\alpha-j\omega)t}+e^{-(\alpha+j\omega)t}\right]\varepsilon(\mathrm{t})$$

$$F(s)=L.T.\{e^{-\alpha t}\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+(\alpha-j\omega)}+\frac{1}{s+(\alpha+j\omega)}\right]=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

收敛域： $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\alpha t}\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})e^{-(\sigma+\alpha)t}=0$

$$\Longrightarrow\ \sigma>-\alpha$$

5. 单边衰减正弦函数



$$f(t)=e^{-\alpha t}\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t}),\quad \alpha>0$$

$$f(t)=e^{-\alpha t}\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})=\frac{1}{2j}\left[e^{-(\alpha-j\omega)t}-e^{-(\alpha+j\omega)t}\right]\varepsilon(\mathrm{t})$$

$$F(s)=L.T.\{e^{-\alpha t}\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})\}=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s+(\alpha-j\omega)}-\frac{1}{s+(\alpha+j\omega)}\right]=\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

收敛域： $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\alpha t}\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})e^{-(\sigma+\alpha)t}=0$

$$\Longrightarrow\ \sigma>-\alpha$$

二、t的正整数幂函数

$f(t) = t^n \varepsilon(\mathrm{t})$，$n$为正整数

$$F(s) = L.T.\{t^n \varepsilon(\mathrm{t})\} = \int_{0^-}^{\infty} t^n \varepsilon(\mathrm{t}) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt$$

$$= -\frac{t^n}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$= \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} L.T.\{t^{n-1} \varepsilon(\mathrm{t})\}$$

以此类推可得

$$L.T.\{t^n \varepsilon(\mathrm{t})\} = \frac{n}{s} L.T.\{t^{n-1} \varepsilon(\mathrm{t})\} = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} L.T.\{t^{n-2} \varepsilon(\mathrm{t})\}$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdots \frac{1}{s} L.T.\{\varepsilon(\mathrm{t})\}$$

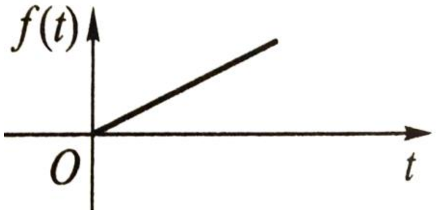
$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdots \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

收敛域： $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) e^{-\sigma t} = \lim\limits_{t\to\infty} t^n \varepsilon(\mathrm{t}) e^{-\sigma t} = \lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(\mathrm{t}) \dfrac{t^n}{e^{\sigma t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{n!}{\sigma^n e^{\sigma t}} = 0$

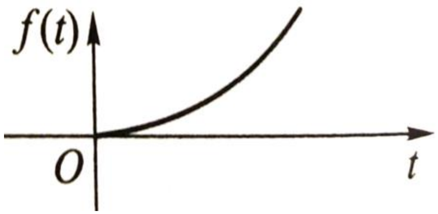
$\Longrightarrow \sigma > 0$

$$\boxed{t^n\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

当$n=1$时，有 $t\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1!}{s^{1+1}} = \frac{1}{s^2}$



当$n=2$时，有 $t^2\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3}$



三、冲激函数

$$f(t) = \delta(t)$$

$$F(s) = L.T.\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^0 = 1$$

收敛域： $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t} = \lim_{t\to\infty} \delta(t)e^{-\sigma t} = \lim_{t\to\infty} \delta(t)e^{-\sigma\cdot 0} = 0$

$\longrightarrow$ σ可以取任意值，收敛域为整个s平面

§5.5 拉普拉斯反变换的计算

- 通常情况下，拉普拉斯变换后得到的$F(s)$都是有理函数。所以，求解拉普拉斯反变换可以采用部分分式展开法。

- 因为$F(s)$是有理函数，故可表示为两个s的多项式之比，即

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

其中a和b为常数， m和n为正整数。

一、当$n>m$且$D(s)=0$的根均为单根的情况

设$D(s)=0$的根为$s_1,s_2,\cdots,s_n$且$s_1\neq s_2\neq\cdots\neq s_n$，则有

$$D(s)=(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_k)\cdots(s-s_n)$$

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_k)\cdots(s-s_n)}$$

$$=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_k}{s-s_k}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}$$

其中$K_1, K_2, \cdots K_k, \cdots, K_n$为待定系数。

$$\boxed{K_k=(s-s_k)F(s)\Big|_{s=s_k}=(s-s_k)\frac{N(s)}{D(s)}\Big|_{s=s_k}}$$

- **在确定了每个部分分式的系数后，就可以逐项求解拉普拉斯反变换。**

因为$\boxed{L.T.\left\{\frac{K_k}{s-s_k}\right\}=K_k e^{s_k t}\varepsilon(\mathrm{t})}$**，故有**

$$f(t)=I.L.T.\{F(s)\}=I.L.T.\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{K_k}{s-s_k}\right\}=\sum_{k=1}^{n}I.L.T.\left\{\frac{K_k}{s-s_k}\right\}=\sum_{k=1}^{n}K_k e^{s_k t}\varepsilon(\mathrm{t})$$

例： $F(s)=\frac{4s^2+13s+11}{2s^2+6s+4}$，**求其拉普拉斯反变换** $f(t)$ 。

解：将$F(s)$化简为真分式

$$F(s)=\frac{4s^2+13s+11}{2s^2+6s+4}=\frac{4(s^2+3s+2)+(s+3)}{2(s^2+3s+2)}$$

$$=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+2}\right)$$

求待定系数K_1和K_2

$$K_1=(s+1)\cdot\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-1}=2，K_2=(s+2)\cdot\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-2}=-1$$

则$F(s)$可展开为

$$F(s)=2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2}\right)=2+\frac{1}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{s+2}$$

故其拉普拉斯反变换为

$$f(t)=I.L.T.\{F(s)\}=2\delta(t)+e^{-t}\varepsilon(\mathrm{t})-\frac{1}{2}e^{-2t}\varepsilon(\mathrm{t})$$

二、当$n > m$且$D(s) = 0$的根有p阶重根的情况

设s_1是$D(s) = 0$的p阶重根，其余均为单根，则有

$$D(s) = (s - s_1)^p \left(s - s_{p+1}\right) \cdots (s - s_k) \cdots (s - s_n)$$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \boxed{\frac{K_{1p}}{(s - s_1)^p} + \frac{K_{1(p-1)}}{(s - s_1)^{(p-1)}} + \cdots + \frac{K_{12}}{(s - s_1)^2} + \frac{K_{11}}{s - s_1}}$$

$$+ \boxed{\frac{K_{p+1}}{s - s_{p+1}} + \cdots + \frac{K_k}{s - s_k} + \cdots + \frac{K_n}{s - s_n}}$$

其中待定系数$K_{p+1}, \cdots, K_n$的求解方法不变。

$$K_k = (s - s_k) \frac{N(s)}{D(s)} \bigg|_{s = s_k}$$

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\boxed{\frac{K_{1p}}{(s-s_1)^p}+\frac{K_{1(p-1)}}{(s-s_1)^{(p-1)}}+\cdots+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^2}+\frac{K_{11}}{s-s_1}}+\frac{K_{p+1}}{s-s_{p+1}}+\cdots+\frac{K_k}{s-s_k}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}$$

求解待定系数K_{1p}

方程两边同乘$(s-s_1)^p$得

$$(s-s_1)^p\frac{N(s)}{D(s)}=K_{1p}+(s-s_1)K_{1(p-1)}+\cdots+(s-s_1)^{p-2}K_{12}+(s-s_1)^{p-1}K_{11}$$
$$+(s-s_1)^p\left(\frac{K_{p+1}}{s-s_{p+1}}+\cdots+\frac{K_k}{s-s_k}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}\right)$$

故 $K_{1p}=(s-s_1)^p\frac{N(s)}{D(s)}\Big|_{s=s_1}$

求解待定系数$K_{1(p-1)}$，上式两边对s取微分得

$$\frac{d}{ds}\left[(s-s_1)^p\frac{N(s)}{D(s)}\right]=K_{1(p-1)}+2(s-s_1)K_{1(p-2)}+\cdots+(p-1)(s-s_1)^{p-2}K_{11}$$
$$+\frac{d}{ds}\left[(s-s_1)^p\left(\frac{K_{p+1}}{s-s_{p+1}}+\cdots+\frac{K_k}{s-s_k}+\cdots+\frac{K_n}{s-s_n}\right)\right]$$

故 $K_{1(p-1)}=\frac{d}{ds}\left[(s-s_1)^p\frac{N(s)}{D(s)}\right]\Big|_{s=s_1}$

例： $F(s)=\dfrac{s+4}{s(s+2)(s+1)^2}$，**求其拉普拉斯反变换** $f(t)$ 。

解： $D(s)=s(s+2)(s+1)^2=0$ **的根为** $s_1=0$，$s_2=-2$，$s_3=-1$ (二阶重根)

则$F(s)$可展开为 $F(s)=\dfrac{K_1}{s}+\dfrac{K_2}{s+2}+\dfrac{K_{32}}{(s+1)^2}+\dfrac{K_{31}}{s+1}$

求待定系数

$$K_1=s\cdot\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=0}=\frac{s+4}{(s+2)(s+1)^2}\bigg|_{s=0}=2$$

$$K_2=(s+2)\cdot\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=-2}=\frac{s+4}{s(s+1)^2}\bigg|_{s=-2}=-1$$

$$K_{32}=(s+1)^2\cdot\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=-1}=\frac{s+4}{s(s+2)}\bigg|_{s=-1}=-3$$

$$K_{31}=\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\cdot\frac{N(s)}{D(s)}\right]\bigg|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\left[\frac{s+4}{s(s+2)}\right]\bigg|_{s=-1}$$

$$=\frac{s(s+2)-(2s+2)(s+4)}{s^2(s+2)^2}\bigg|_{s=-1}=-1$$

故$F(s)$可展开为 $F(s)=\frac{2}{s}+\frac{-1}{s+2}+\frac{-3}{(s+1)^2}+\frac{-1}{s+1}$

其拉普拉斯反变换为

$$f(t)=I.L.T.\{F(s)\}=2\varepsilon(\mathrm{t})-e^{-2t}\varepsilon(\mathrm{t})-3te^{-t}\varepsilon(\mathrm{t})-e^{-t}\varepsilon(\mathrm{t})$$

$$=(2-e^{-2t}-3te^{-t}-e^{-t})\,\varepsilon(\mathrm{t})$$

$$=[2-e^{-2t}-(3t+1)e^{-t}]\,\varepsilon(\mathrm{t})$$

三、零极点分布图

- 拉普拉斯**正变换**将时域函数$f(t)$变换为复频域函数$F(s)$，拉普拉斯**反变换**将复频域函数$F(s)$变换为时域函数$f(t)$。

- $f(t)$和$F(s)$是**同一个信号**在**不同域内**的表现形式，两者有一定的对应关系。

- 复频域函数$F(s)$的性质是由其零极点决定的。

  零点（**Zero**）：使$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=0$，即$N(s)=0$的s_z的取值

  极点（**Pole**）：使$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\infty$，即$D(s)=0$的$s_p$的取值

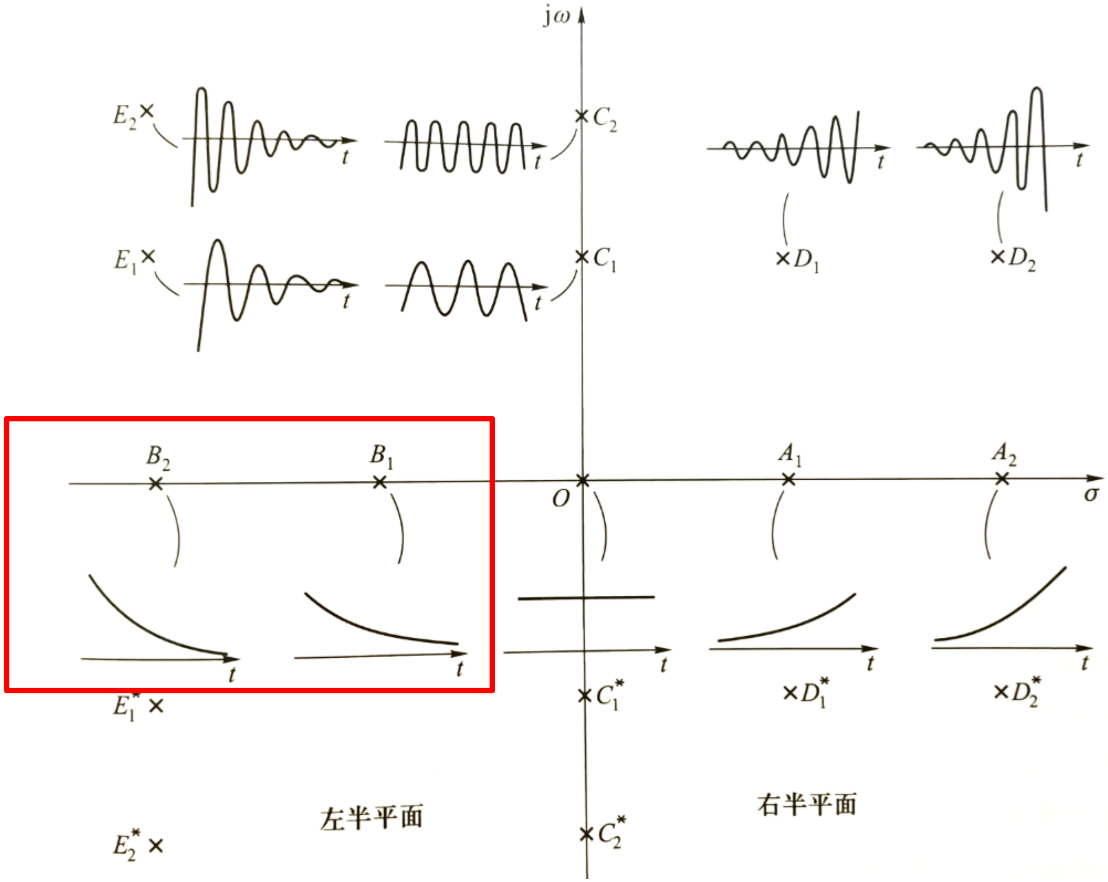
- 将函数$F(s)$的所有零点（○）和极点（×）画在s平面上，就得到$F(s)$的**零极图/极零图**。

- 零点的分布只影响$f(t)$分量的幅度和相位大小，但**极点的分布**影响$f(t)$分量的**时间模式**。

- 零点、极点与收敛域的关系：当s在收敛域内取值时，得到的$F(s)$一定是一个有限值，不能是无穷大。

- 这说明收敛域内**不能有极点**，**可以有零点**。或者说极点一定在收敛域以外，或者在收敛轴上。

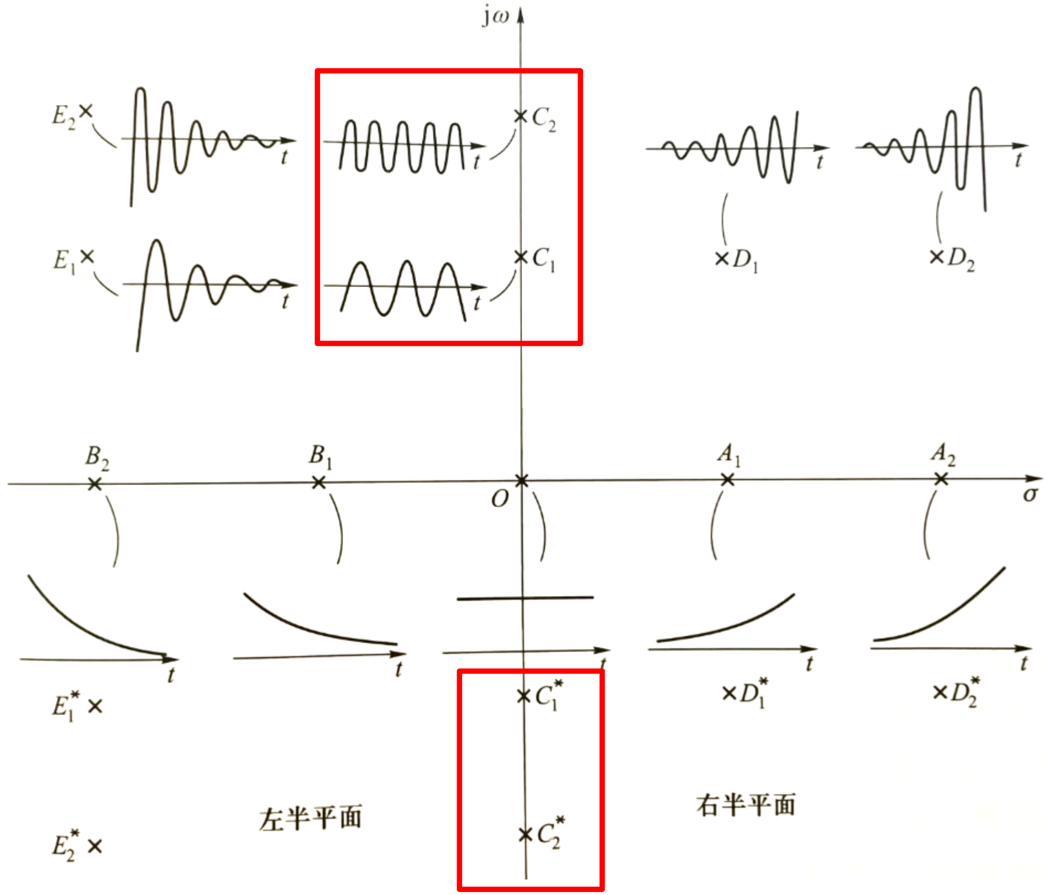
1. 负实轴上的极点：



一阶极点$\frac{k}{s-\alpha}\ (\alpha < 0)$对应$e^{\alpha t}\varepsilon(\mathrm{t})$指数衰减的时间模式

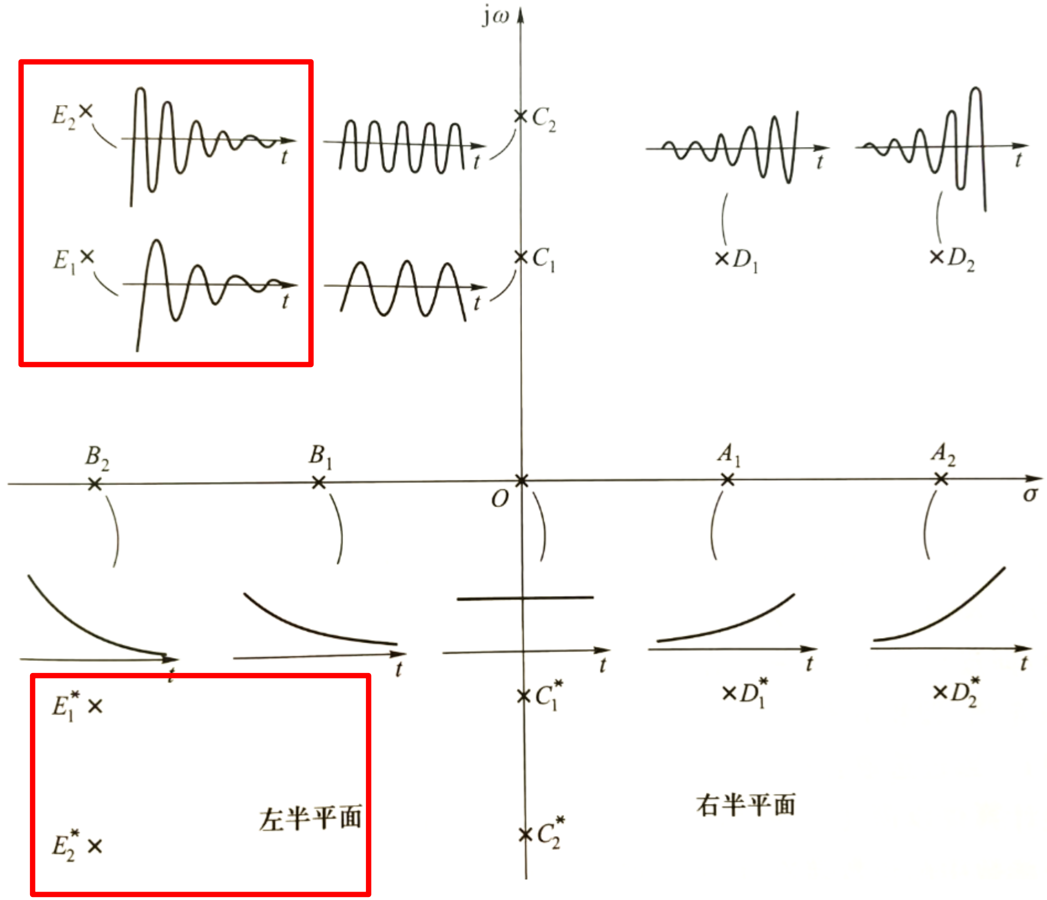
二阶极点$\frac{k}{(s-\alpha)^2}\ (\alpha < 0)$对应$te^{\alpha t}\varepsilon(\mathrm{t})$先增加后衰减的时间模式

2. 虚轴上的共轭极点：



共轭极点$\frac{k}{s^2+\omega^2}$对应$\sin\omega t\ \varepsilon(\mathrm{t})$或$\cos\omega t\ \varepsilon(\mathrm{t})$等幅振荡的时间模式

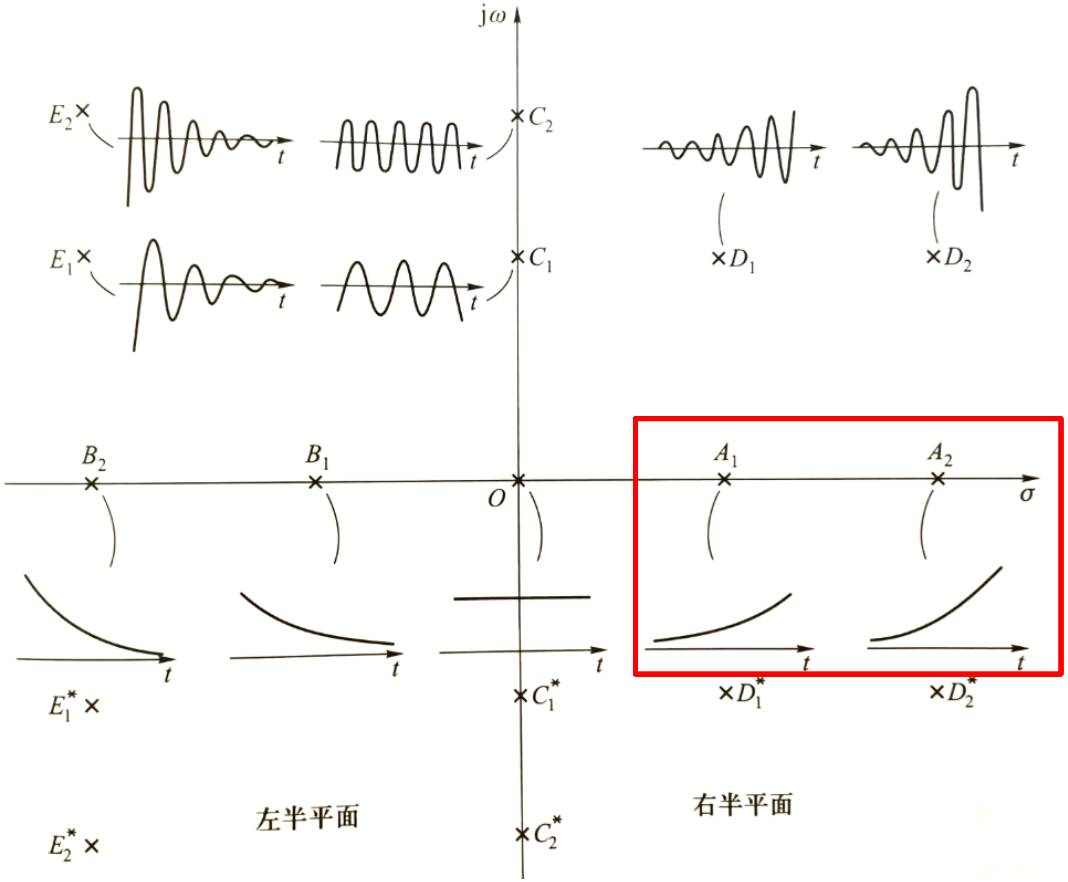
3. 左半平面内的共轭极点：



共轭极点$\dfrac{k}{(s-\alpha)^2+\omega^2}(\alpha<0)$**对应**$e^{\alpha t}\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})$**或**$e^{\alpha t}\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})$

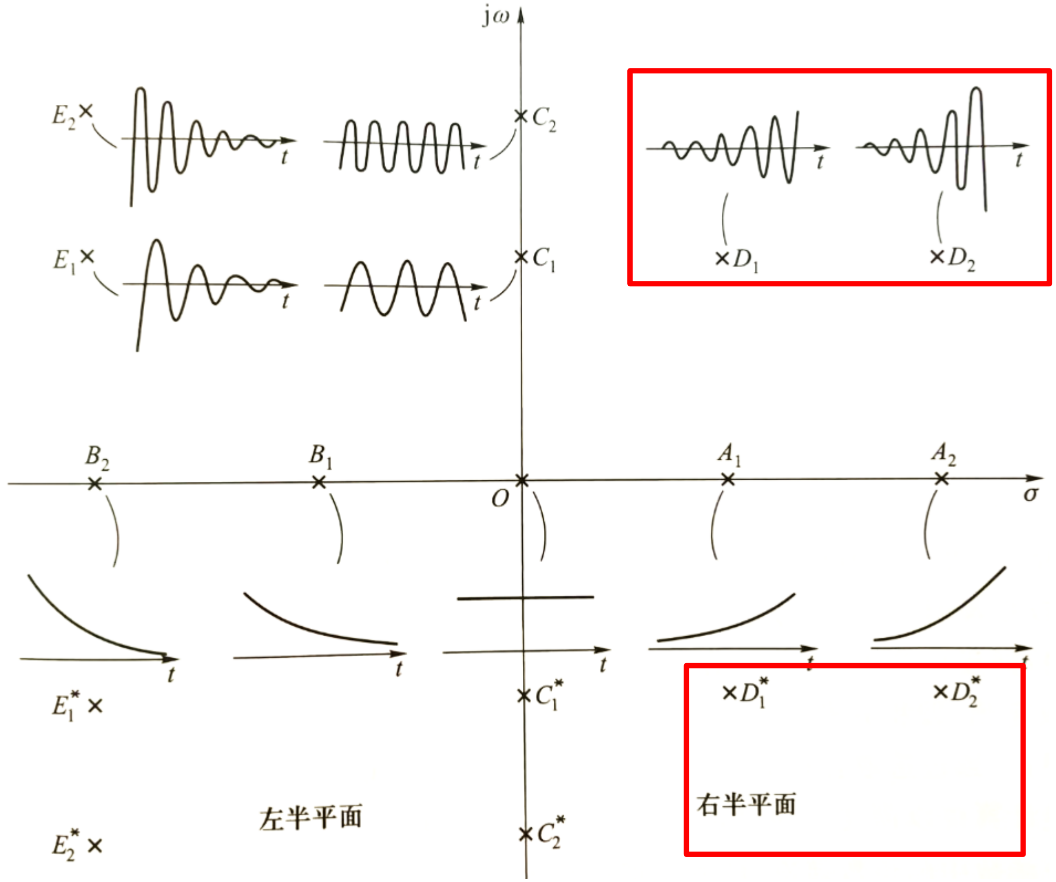
衰减振荡的时间模式

4. 正实轴上的极点：



极点$\frac{k}{s-\alpha}$ $(\alpha>0)$对应$e^{\alpha t}\varepsilon(t)$指数增加(发散)的时间模式

5. 右半平面内的共轭极点：



共轭极点$\dfrac{k}{(s-\alpha)^2+\omega^2}\ (\alpha > 0)$**对应**$e^{\alpha t}\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})$**或**$e^{\alpha t}\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t})$

增幅振荡(发散)的时间模式

例： $F(s)=\dfrac{3(s+2)(s+4)}{s(s^2+9)(s+5)}$，**求其零点和极点，并画出其零极图。**

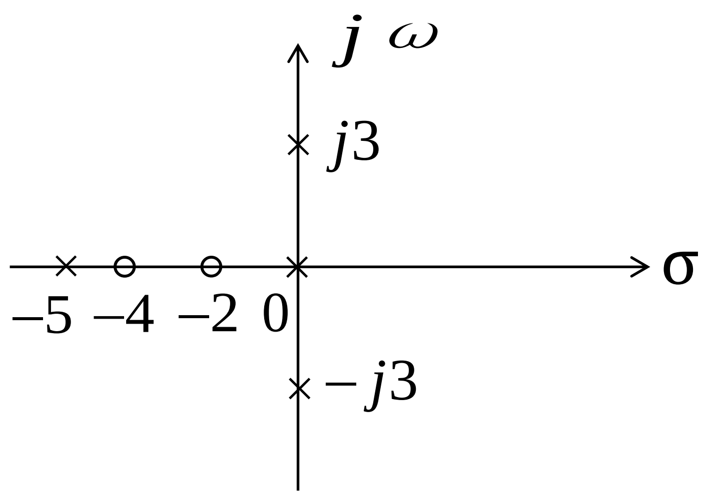
解： $F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=\dfrac{3(s+2)(s+4)}{s(s^2+9)(s+5)}$

求其零点 $N(s)=3(s+2)(s+4)=0$ **可得** $s_{z1}=-2$，$s_{z2}=-4$

求其极点 $D(s)=s(s^2+9)(s+5)=0$

可得 $s_{p1}=0$，$s_{p2}=j3$，$s_{p3}=-j3$，$s_{p4}=-5$

故$F(s)$的零极图为



§5.6 拉普拉斯变换的基本性质

一、线性特性

若$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$，且$a_1, a_2$为常数，则

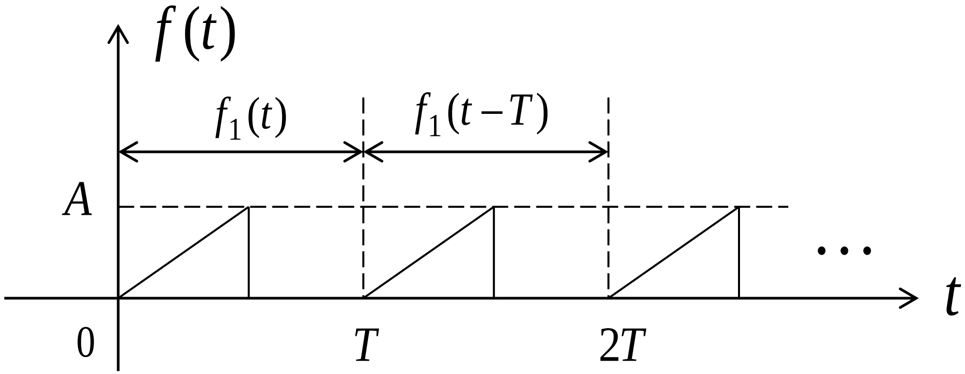
$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

二、时域平移/延时特性

若有始信号$f(t) \leftrightarrow F(s)$，且$t_0 > 0$，

则$f(t - t_0) \leftrightarrow F(s) e^{-st_0}$

讨论：单边周期信号的拉普拉斯变换。设$f(t)$为单边周期信号，即$t<0, f(t)=0; t>0, f(t)$呈现周期性变化且周期为T。



$$f(t)=f_1(t)\varepsilon(t)+f_1(t-T)\varepsilon(t-T)+f_1(t-2T)\varepsilon(t-2T)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}f_1(t-nT)\varepsilon(t-nT)$$

故单边周期信号的拉普拉斯变换为

$$F(s)=L.T.\{f(t)\}=F_1(s)+F_1(s)e^{-sT}+F_1(s)e^{-s2T}+\cdots$$

$$=F_1(s)(1+e^{-sT}+e^{-s2T}+\cdots)$$

$$=F_1(s)\frac{1\cdot(1-e^{-snT})}{1-e^{-sT}}=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

三、频域平移/移频特性

若$f(t) \leftrightarrow F(s)$，则$f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s-s_0)$

例如：

(1) $\varepsilon(\mathrm{t}) \leftrightarrow \frac{1}{s}$，则$e^{-\alpha t}\varepsilon(\mathrm{t}) \leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$

(2) $t\varepsilon(\mathrm{t}) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$，则$e^{-\alpha t}t\varepsilon(\mathrm{t}) \leftrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^2}$

(3) $\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t}) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$，则$e^{-\alpha t}\cos\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t}) \leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

(4) $\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t}) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$，则$e^{-\alpha t}\sin\omega t\,\varepsilon(\mathrm{t}) \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

四、尺度变换特性

若$f(t) \leftrightarrow F(s)$，且$a>0$，则$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

五、时域微分特性

若$f(t) \leftrightarrow F(s)$，则 $\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - s^{n-3} f''(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$$

六、时域积分特性

若$f(t) \leftrightarrow F(s)$，则 $\displaystyle\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}F(s)$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)d\tau}{s} + \frac{1}{s}F(s)$$

七、复频域微分特性

若$f(t) \leftrightarrow F(s)$，则$tf(t) \leftrightarrow -\dfrac{dF(s)}{ds}$

八、复频域积分特性

若$f(t) \leftrightarrow F(s)$，则$\dfrac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{\infty} F(x)dx$

九、参变量的微分与积分特性

若$f(t,a) \leftrightarrow F(s,a)$，则$\dfrac{\partial f(t,a)}{\partial a} \leftrightarrow \dfrac{\partial F(s,a)}{\partial a}$

若$f(t,a) \leftrightarrow F(s,a)$，则$\int_{a_1}^{a_2} f(t,a)da \leftrightarrow \int_{a_1}^{a_2} F(s,a)da$

十、卷积定理

若$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s)$，$f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$，则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s), \qquad f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}[F_1(s) * F_2(s)]$$

§5.7 线性系统的拉普拉斯变换分析法

一、运用拉普拉斯变换求系统的零状态响应

已知系统的零状态响应是激励信号与单位冲激响应的卷积，即

$$r_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

若响应信号$r_{zs}(t)$和激励信号$e(t)$的拉普拉斯变换分别为$R_{zs}(s)$和$E(s)$，则根据**卷积定理**有

$$R_{zs}(s) = E(s)H(s), \qquad H(s) = \frac{R_{zs}(s)}{E(s)}$$

$H(s)$称为s域内的**系统函数**（**System function**）或**转移函数**（**Transfer function**），反映了系统零状态响应与激励之间的关系。

- 系统对任意激励信号零状态响应的**求解步骤**：

  (1) 求激励信号的**拉普拉斯变换**$E(s)$；

  (2) 求**系统函数**$H(s)$；

  (3) 计算**响应的拉普拉斯变换**$R_{zs}(s) = E(s)H(s)$；

  (4) 通过**拉普拉斯反变换**求时域响应 $r_{zs}(t) = I.L.T.\{R_{zs}(s)\}$ 。

- 求解$H(s)$的方法：

  (1) 运用**单位冲激响应**的拉普拉斯变换：$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$

  (2) 在电路结构上运用**欧姆定律**：当$E(s) = 1$时，$R_{zs}(s) = H(s)$

电阻：$u_R(t) = Ri_R(t) \to U_R(s) = RI_R(s)$ 复频域阻抗为R

电容(无初始电压)：$i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt} \to U_C(s) = \dfrac{1}{sC}I_C(s)$ 复频域阻抗为$\dfrac{1}{sC}$

电感(无初始电流)：$u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \to U_L(s) = sLI_L(s)$ 复频域阻抗为sL

(3) 通过系统的微分方程求解：

对于一个二阶系统，其零状态的微分方程为

$$\frac{d^2 r_{zs}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dr_{zs}(t)}{dt} + a_0 r_{zs}(t) = b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

方程两边同时求拉普拉斯变换，可得：

$$s^2 R_{zs}(s) + a_1 s R_{zs}(s) + a_0 R_{zs}(s) = b_1 s E(s) + b_0 E(s)$$

整理上式可得

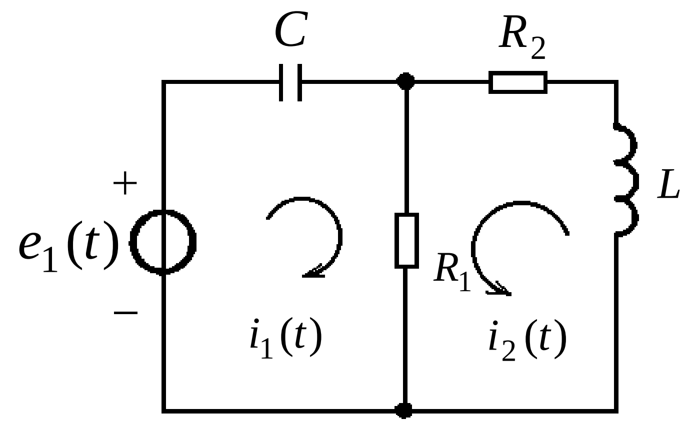
$$H(s) = \frac{R_{zs}(s)}{E(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

由此推广到n阶系统：

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

也就是将转移算子$H(p)$中的微分算子p全部改成s。

例：已知电路如图所示，$e_1(t)=3e^{-t}\varepsilon(t)$，元件参数为$C=1F$, $L=\frac{1}{2}H, R_1=\frac{1}{5}\Omega, R_2=1\Omega$，求零状态响应电流$i_2(t)$。



解：(1) 求激励信号的拉普拉斯变换，即

$$E(s)=L.T.\{3e^{-t}\varepsilon(t)\}=\frac{3}{s+1}$$

(2) 求系统函数，根据电路可得

$$H(s)=-\frac{R_1 /\!/ (R_2+Ls)}{\frac{1}{Cs}+R_1 /\!/ (R_2+Ls)}\cdot\frac{1}{R_2+Ls}$$

$$=\frac{-R_1Cs}{LCR_1s^2+(L+CR_1R_2)s+R_1+R_2}$$

代入元件参数，可得

$$H(s)=\frac{-2s}{s^2+7s+12}$$

(3) 计算响应的拉普拉斯变换，即

$$I_2(s) = E(s)H(s) = \frac{3}{s+1} \cdot \frac{-2s}{s^2+7s+12}$$

$$= \frac{-6s}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{-9}{s+3} + \frac{8}{s+4}$$

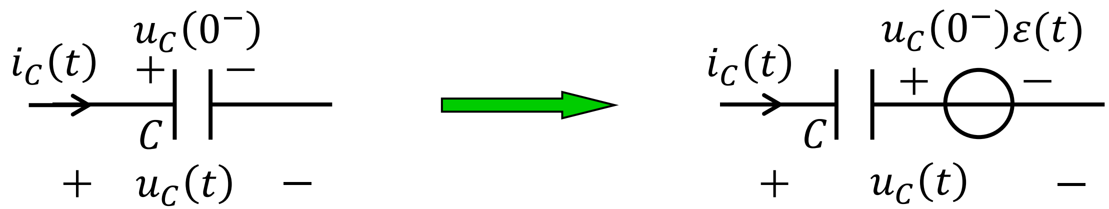
(4) 通过拉普拉斯反变换求时域响应，即

$$i_2(t) = I.L.T.\{I_2(s)\} = e^{-t}\varepsilon(t) - 9e^{-3t}\varepsilon(t) + 8e^{-4t}\varepsilon(t)$$

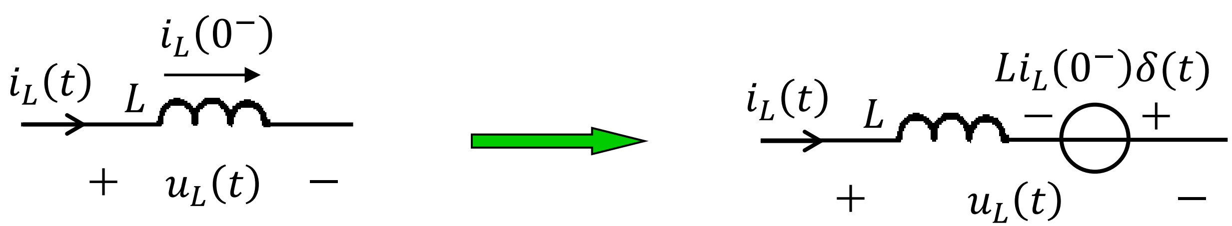
$$= (e^{-t} - 9e^{-3t} + 8e^{-4t})\varepsilon(t)$$

二、运用等效激励源法求系统的零输入响应

电容（有初始电压）： $i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt} \rightarrow U_C(s) = \dfrac{1}{sC}I_C(s) + \dfrac{1}{s}u_C(0^-)$

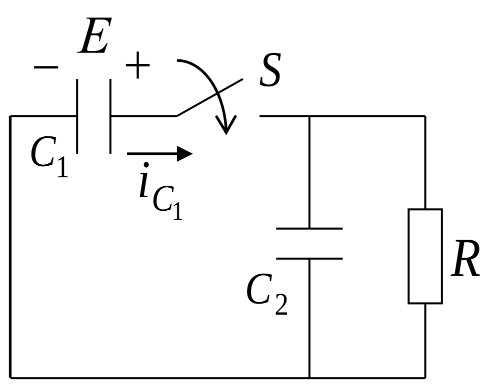


电感（有初始电流）： $u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \rightarrow U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$



利用求解零状态响应的方法，求出在等效激励源作用下系统的响应，即为系统的零输入响应。

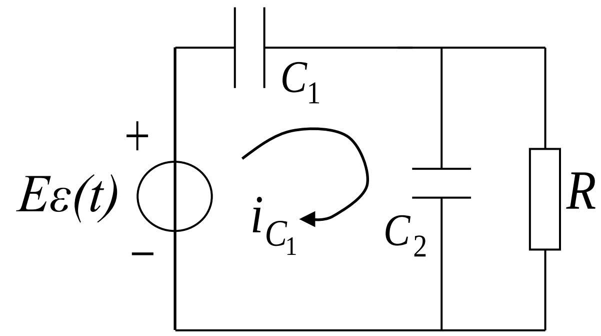
例：已知电路如图所示，元件参数为$C_1=1F, C_2=2F, R=3\Omega$，初始条件为$u_{C1}(0^-)=E$，方向如图。若开关S在$t=0$时闭合，求通过电容$C_1$的响应电流$i_{C1}(t)$。



解：将电容C_1两端的初始电压等效为一个激励源，等效电路如下图所示。

(1) 求等效激励信号的拉普拉斯变换，即

$$E(s)=L.T.\{E\varepsilon(t)\}=\frac{E}{s}$$



(2) 求等效电路的系统函数，即

$$H(s)=\frac{1}{\frac{1}{C_1 s}+\frac{1}{C_2 s}/\!/ R}=\frac{C_1C_2Rs^2+C_1 s}{(C_1R+C_2R)s+1}$$

代入元件参数，可得

$$H(s)=\frac{6s^2+s}{9s+1}$$

(3) 计算响应的拉普拉斯变换，即

$$I_{C1}(s)=E(s)H(s)=\frac{E}{s}\cdot\frac{6s^2+s}{9s+1}=E\cdot\frac{\frac{6}{9}s+\frac{1}{9}}{s+\frac{1}{9}}$$

$$=E\cdot\frac{\frac{6}{9}\left(s+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{81}}{s+\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{2E}{3}+\frac{\frac{E}{27}}{s+\frac{1}{9}}$$

(4) 通过拉普拉斯反变换求时域响应，即

$$i_{C1}(t)=I.L.T.\{I_{C1}(s)\}=\frac{2E}{3}\delta(t)+\frac{E}{27}e^{-\frac{t}{9}}\varepsilon(t)=\frac{2E}{3}\left[\delta(t)+\frac{1}{18}e^{-\frac{t}{9}}\varepsilon(t)\right]$$

三、运用时域法求系统的零输入响应，运用拉普拉斯变换求系统的零状态响应

例：已知线性系统的转移函数$H(s)=\frac{s+5}{s^2+5s+6}$**，初始条件**$r_{zi}(0)=2, r'_{zi}(0)=1$**，当激励信号**$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$**时，求系统的全响应**$r(t)$**。**

解：(1) 运用时域法求零输入响应$r_{zi}(t)$**：**

根据系统的转移函数，知其特征方程为 $p^2+5p+6=0$

得特征根为 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3$

则零输入响应为 $r_{zi}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$

并且 $r'_{zi}(t)=\lambda_1c_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2c_2e^{\lambda_2 t}=-2c_1e^{-2t}-3c_2e^{-3t}$

代入初始条件 $\begin{array}{l} r_{zi}(0)=c_1+c_2=2 \\ r'_{zi}(0)=-2c_1-3c_2=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1=7 \\ c_2=-5 \end{array}$

故系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)=(7e^{-2t}-5e^{-3t})\varepsilon(t)$

$$\boxed{r_{zi}(t) = (7e^{-2t} - 5e^{-3t})\varepsilon(t)}$$

(2) 运用拉普拉斯变换求系统的零状态响应$r_{zs}(t)$：

激励信号的拉普拉斯变换为 $E(s) = L.T.\{e^{-t}\varepsilon(t)\} = \dfrac{1}{s+1}$

系统的转移函数为 $H(s) = \dfrac{s+5}{s^2+5s+6}$

响应的拉普拉斯变换为

$$R_{zs}(s) = E(s)H(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+5}{s^2+5s+6} = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{2}{s+1} + \frac{-3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

通过拉普拉斯反变换求零状态响应

$$r_{zs}(t) = I.L.T.\{R_{zs}(s)\} = 2e^{-t}\varepsilon(t) - 3e^{-2t}\varepsilon(t) + e^{-3t}\varepsilon(t)$$

故系统的全响应为 $r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$

$$= \underbrace{2e^{-t}\varepsilon(t)}_{\text{受迫响应分量}} + \underbrace{4e^{-2t}\varepsilon(t) - 4e^{-3t}\varepsilon(t)}_{\text{自然响应分量}}$$

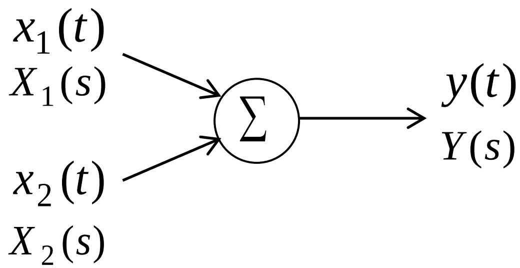
§5.8 线性系统的模拟

- 对于一个线性系统，其描述方法包括：微分方程、系统函数、模拟框图等。

- 模拟框图有助于：分析多种输入信号下系统的响应、求解系统的最佳参数、寻找实现某种系统的途径。

- 线性系统的模拟框图有三种基本运算单元：加法器、乘法器、积分器。

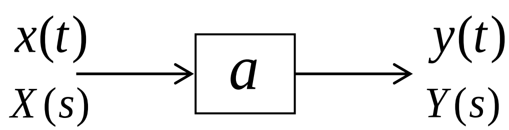
加法器



$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

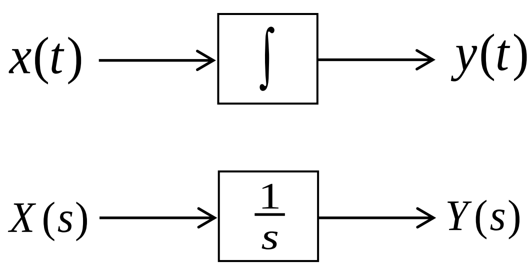
乘法器



$$y(t) = ax(t)$$

$$Y(s) = aX(s)$$

积分器（初始条件为0）



$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} x(\tau)d\tau$$

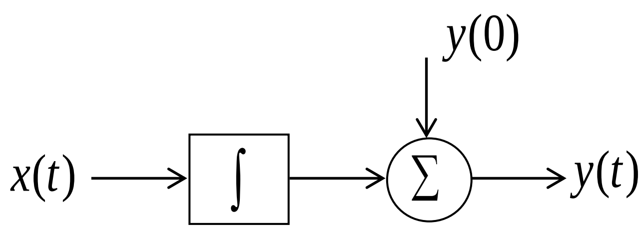
$$Y(s) = \frac{1}{s}X(s)$$

当初始条件不为0时，积分器的表达式为：

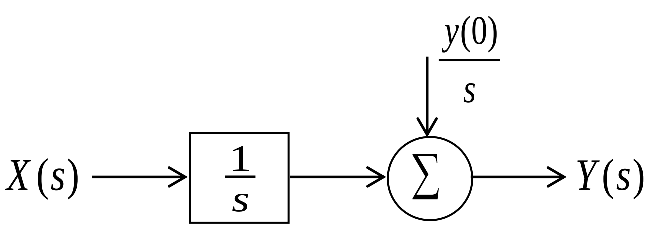
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{0}x(\tau)d\tau+\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau=y(0)+\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau$$

$$Y(s)=L.T.\left\{\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\right\}=\frac{\int_{-\infty}^{0}x(\tau)d\tau}{s}+\frac{1}{s}X(s)=\frac{y(0)}{s}+\frac{X(s)}{s}$$

积分器（初始条件不为0）



$$y(t)=y(0)+\int_{0}^{t}x(\tau)d\tau$$



$$Y(s)=\frac{y(0)}{s}+\frac{X(s)}{s}$$

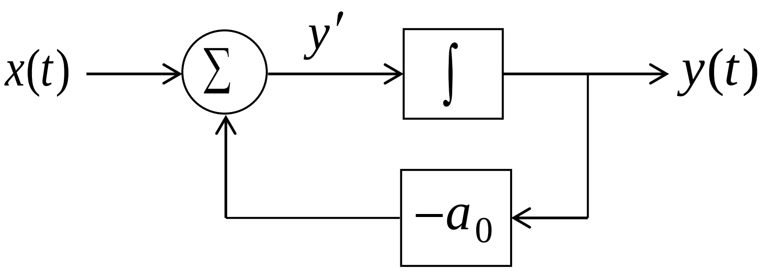
实际工程中，可以控制电容的初始电压使系统处于指定的初始状态。故模拟框图中一般将积分器的初始条件省略，来简化框图。

一、直接型模拟框图

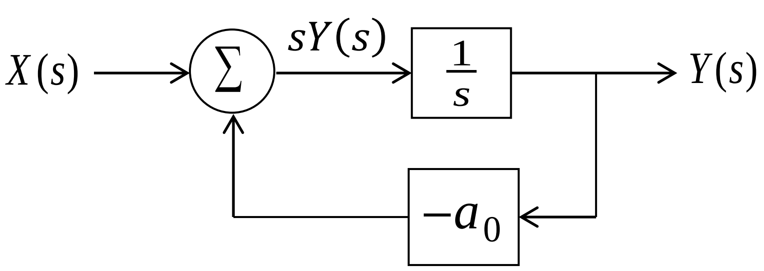
1. 输入函数不包含激励的导数项

一阶系统时域模拟框图： $y'(t)+a_0y(t)=x(t)$

$$y'(t)=x(t)-a_0y(t)$$



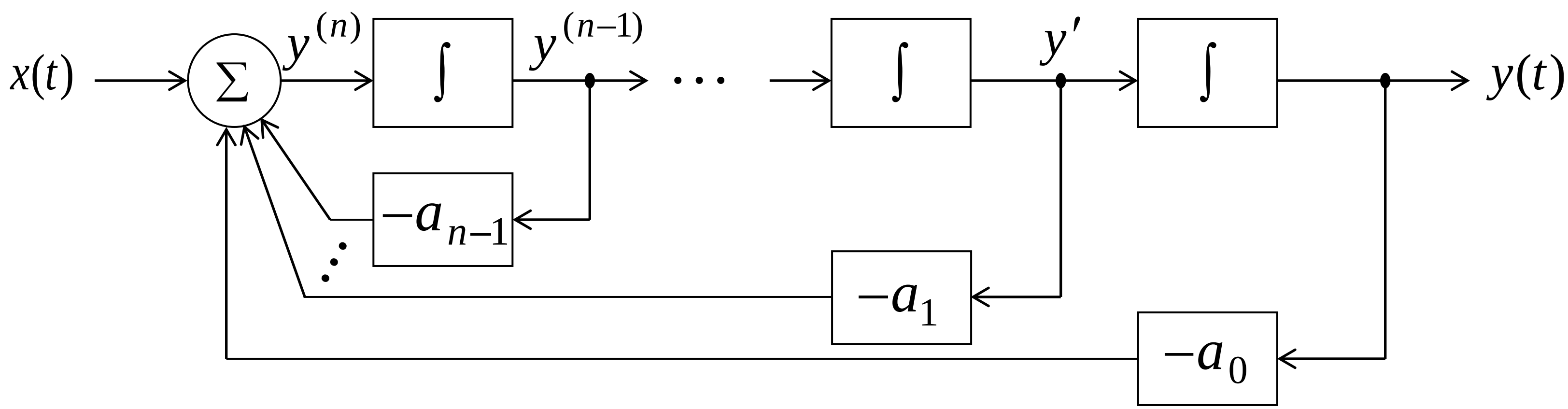
一阶系统频域模拟框图： $sY(s)=X(s)-a_0Y(s)$



由此推广到n阶系统：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t)$$

$$y^{(n)}(t) = x(t) - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_1 y'(t) - a_0 y(t)$$



2. 输入函数包含激励的导数项

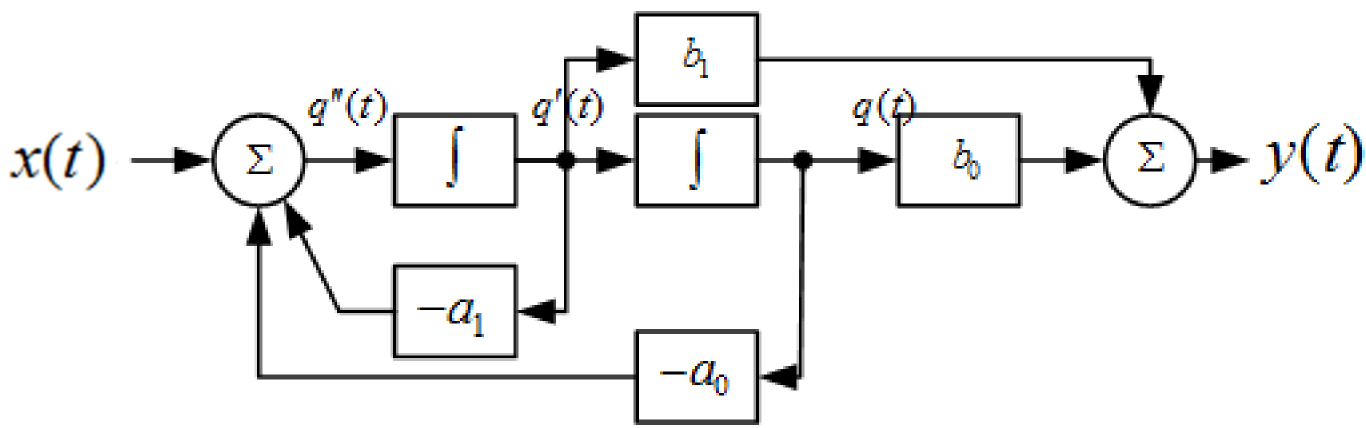
对于一般的二阶系统：$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_1x'(t)+b_0x(t)$

引入一个辅助函数$q(t)$，使得其满足

$$\boxed{q''(t)+a_1q'(t)+a_0q(t)=x(t)}$$

$$\begin{aligned}b_1x'(t)+b_0x(t)&=b_1q'''(t)+a_1b_1q''(t)+a_0b_1q'(t)+b_0q''(t)+a_1b_0q'(t)+a_0b_0q(t)\\&=[b_1q'''(t)+b_0q''(t)]+a_1[b_1q''(t)+b_0q'(t)]+a_0[b_1q'(t)+b_0q(t)]\\&=y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)\end{aligned}$$

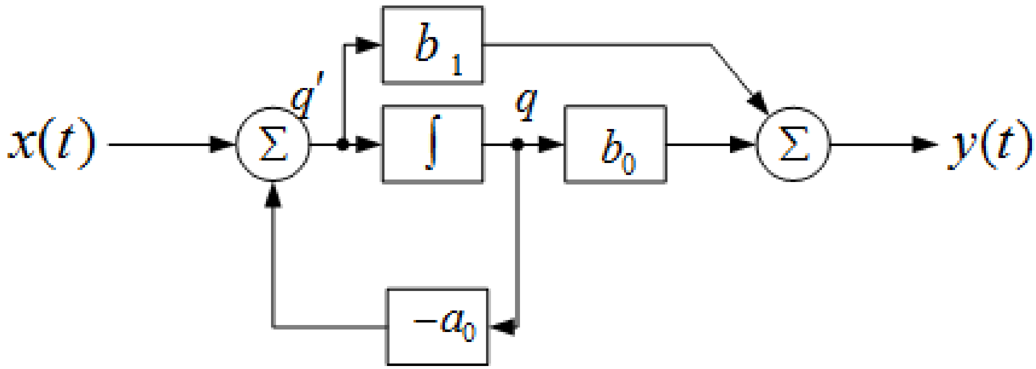
利用方程两边平衡的原则，可得：$\boxed{y(t)=b_1q'(t)+b_0q(t)}$



3. 输入函数与输出函数同阶

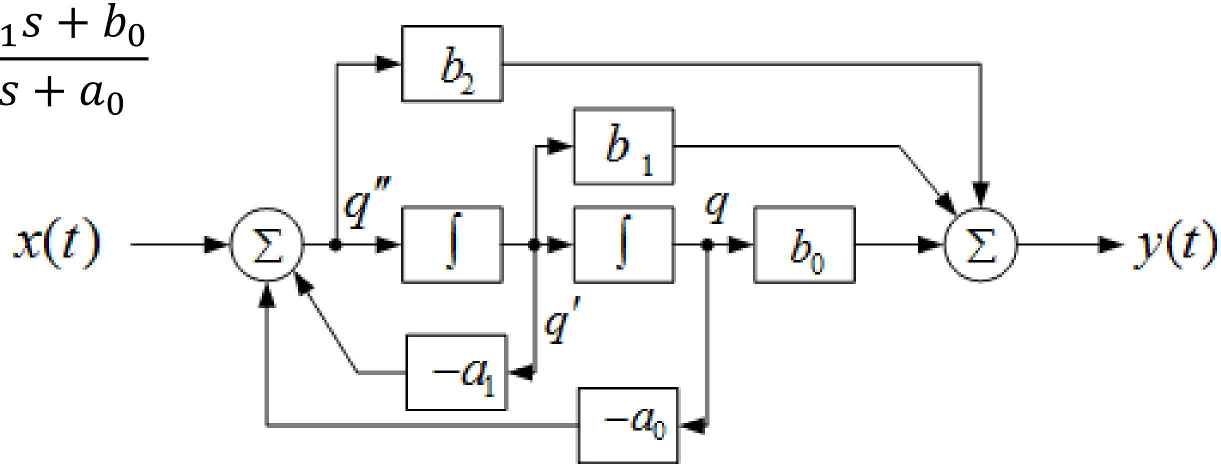
一阶系统： $y'(t) + a_0 y(t) = b_1 x'(t) + b_0 x(t)$

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}$$



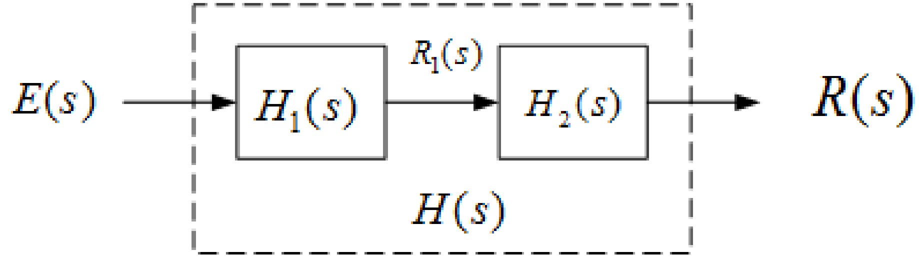
二阶系统： $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$



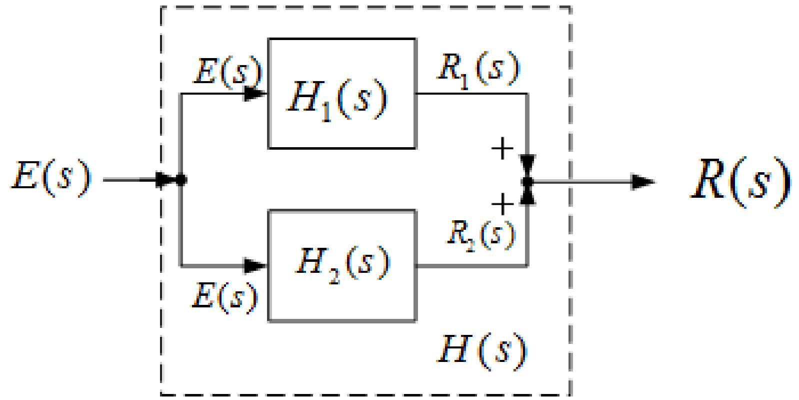
二、串联(级联)型模拟框图和并联型模拟框图

串联型模拟框图：



$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{R_1(s)}{E(s)}\cdot\frac{R(s)}{R_1(s)}=H_1(s)\cdot H_2(s)$$

并联型模拟框图：



$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{R_1(s)+R_2(s)}{E(s)}=\frac{R_1(s)}{E(s)}+\frac{R_2(s)}{E(s)}=H_1(s)+H_2(s)$$

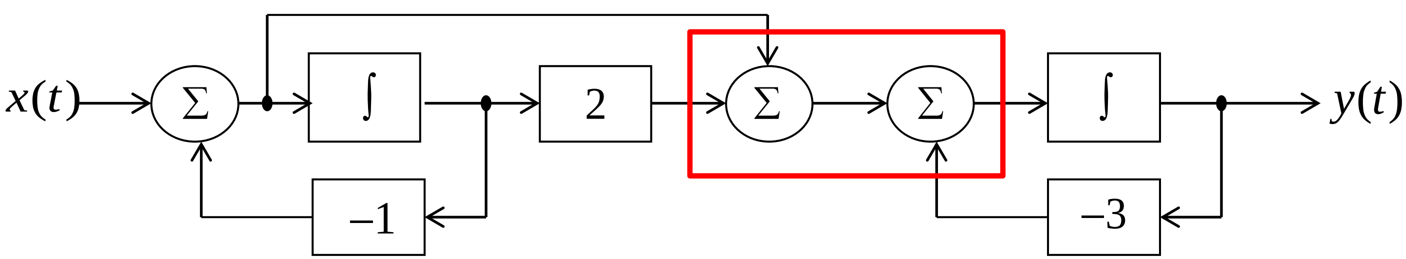
例：已知线性系统的转移函数$H(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+3}$，画出其串联型模拟框图和并联型模拟框图。

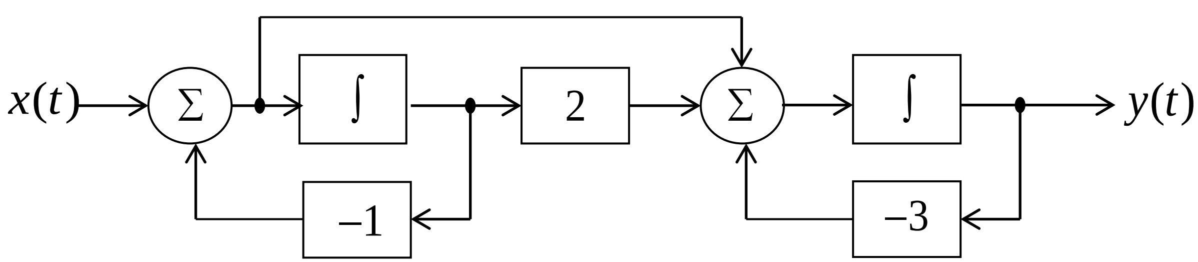
解：(1) 将系统函数$H(s)$改写成以下形式：

$$H(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+3}=\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}=\frac{s+2}{s+1}\cdot\frac{1}{s+3}=H_1(s)\cdot H_2(s)$$

即 $H_1(s)=\frac{s+2}{s+1}\qquad H_2(s)=\frac{1}{s+3}$

故其串联型模拟框图为



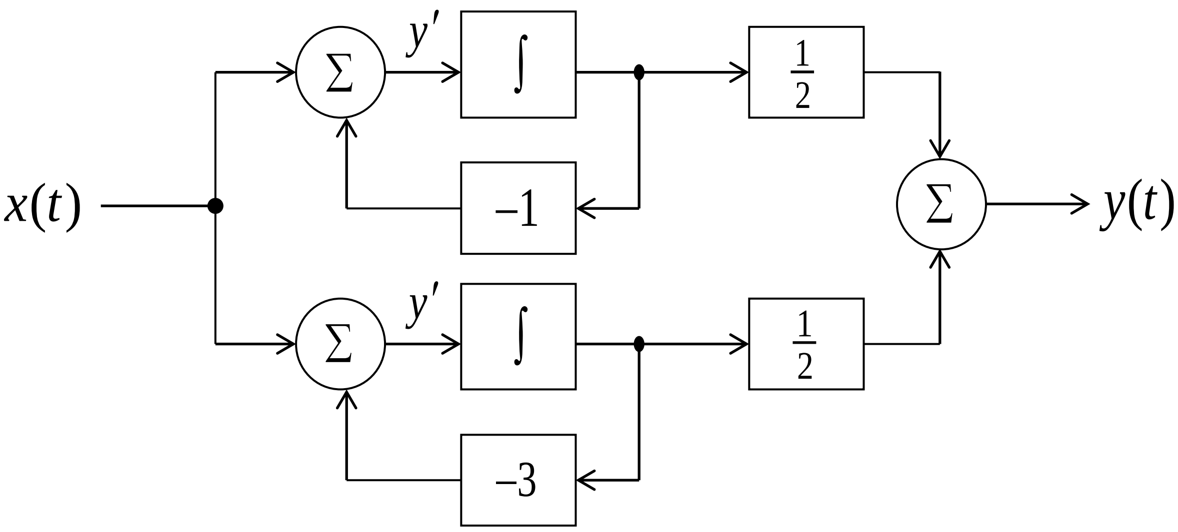


解：(2)将系统函数$H(s)$改写成以下形式：

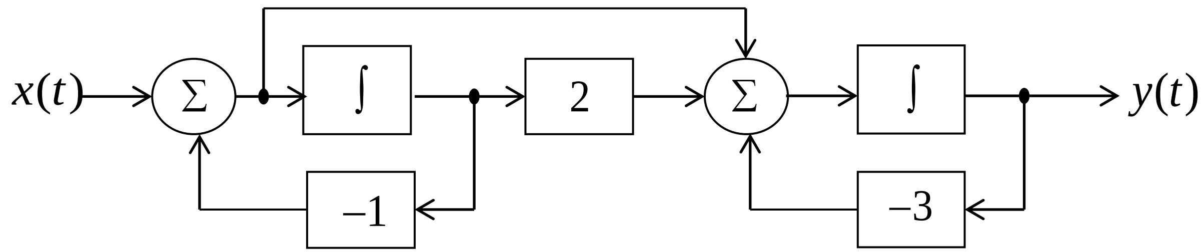
$$H(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+3}=\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}=\frac{1/2}{s+1}+\frac{1/2}{s+3}=H_1(s)+H_2(s)$$

即 $H_1(s)=\dfrac{1/2}{s+1}$ $\qquad H_2(s)=\dfrac{1/2}{s+3}$

故其并联型模拟框图为

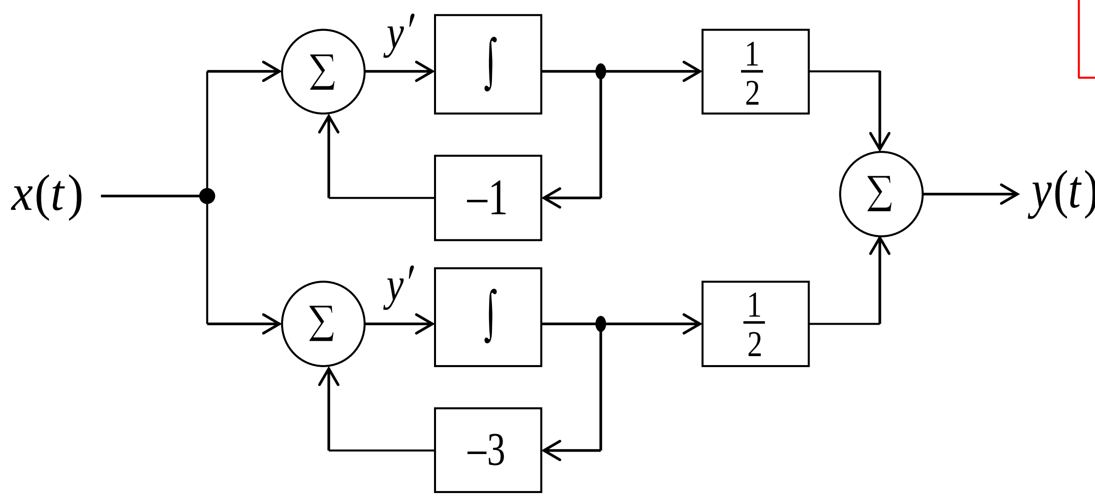


串联型



$$H(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

并联型



- **串联型**模拟框图：能同时控制系统的零点和极点，前级系统的误差对后级系统有较大影响。

- **并联型**模拟框图：只能控制系统的极点，不能控制系统的零点，各子系统之间不易受到干扰。

本章小结

基本概念：拉普拉斯变换、复频率、收敛域、零极图、系统函数、等效激励源、系统模拟框图。

基本运算：拉普拉斯正变换和反变换的求解、常见信号的拉普拉斯变换、拉普拉斯变换的性质、连续时间系统的复频域分析方法、线性系统的模拟框图。