1．证：因为$[B(E+AB)B^{-1}][E-B(E+AB)^{-1}A]$

$=B(E+AB)B^{-1}E-B(E+AB)B^{-1}B(E+AB)^{-1}A$

$=B(B^{-1}+A)-BA$

$=E$

所以$[B(E+AB)B^{-1}]^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A,$

即$B(E+AB)^{-1}B^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$

2．解：$|kE-A|=\begin{vmatrix} k-1 & -2 & -2 \\ -2 & k-1 & -2 \\ -2 & -2 & k-1 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} k-5 & -2 & -2 \\ k-5 & k-1 & -2 \\ k-5 & -2 & k-1 \end{vmatrix}$

$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{=}} \begin{vmatrix} k-5 & -2 & -2 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = (k-5)(k+1)^2,$

因为$kE-A$是非奇异矩阵，所以$|kE-A|\neq 0$，即$(k-5)(k+1)^2\neq 0$，$k\neq 5$且$k\neq -1$

3．解：由$ABA^*=2BA^*+E$，得$(A-2E)BA^*=E$, $|(A-2E)BA^*|=|E|$,

$|A-2E|\cdot|B|\cdot|A^*|=|E|$，　　$|B|=\dfrac{1}{|A-2E|\cdot|A^*|}$

$|A-2E|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-8$, $|A^*|=|A|^2=24^2=576$, $|B|=-\dfrac{1}{4608}$

4. 证：由$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$,可得

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})$$

$$=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^k)$$

$$=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{E},$$

由于$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$都是方阵，

所以$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆，且$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$

5. 证：因为$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都可逆，所以$|\boldsymbol{A}|\neq 0,|\boldsymbol{B}|\neq 0.$

由$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq 0$可知,$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$可逆.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$$

6. 证：$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\alpha\alpha^T)^2=\boldsymbol{E}-2\alpha\alpha^T+(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)$

$$=\boldsymbol{E}-2\alpha\alpha^T+\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T,$$

因为$\alpha^T\alpha=1$，所以$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}-2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T=\boldsymbol{E}-\alpha\alpha^T=\boldsymbol{A}$,

即$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

由$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，得$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=-6\boldsymbol{E},(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\dfrac{\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}}{-6}=\boldsymbol{E}$,

故$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$可逆，且$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=-\dfrac{\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}}{6}$

7. 证：注：“当且仅当”就是“充分必要条件”的意思.

若$|\boldsymbol{A}|=0$，则方程组$\boldsymbol{Ax}=0$有非零解.

设$\boldsymbol{u}$为$\boldsymbol{Ax}=0$的非零解，令$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\cdots,\boldsymbol{u}]$,则$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

反过来，若存在$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，使$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则方程组$\boldsymbol{Ax}=0$有非零解，

这时，一定有$|\boldsymbol{A}|=0$.

8. 解：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=6,\ |\boldsymbol{B}_1|=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 1\end{vmatrix}=12,$

$$|\boldsymbol{B}_2|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=-6,\ |\boldsymbol{B}_3|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=6,$$

$$x_1=\frac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}|}=2,\ x_2=\frac{|\boldsymbol{B}_2|}{|\boldsymbol{A}|}=-1,\ x_3=\frac{|\boldsymbol{B}_3|}{|\boldsymbol{A}|}=1$$

9. 解：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^n\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n\end{vmatrix},\ |\boldsymbol{B}_1|=\begin{vmatrix}2 & a_1 & \cdots & a_1^n\\ 2 & a_2 & \cdots & a_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & a_n & \cdots & a_n^n\end{vmatrix}=2|\boldsymbol{A}|,$

$$|\boldsymbol{B}_2|=\begin{vmatrix}1 & 2 & \cdots & a_1^n\\ 1 & 2 & \cdots & a_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & \cdots & a_n^n\end{vmatrix}=0,\ |\boldsymbol{B}_3|=\cdots=|\boldsymbol{B}_n|=0,$$

$$x_1=\frac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}|}=2,\ x_2=\cdots=x_n=0$$

10. 证法1：反证法.

假设该方程组有解，其解为$x_1=k_1, x_2=k_2, x_3=k_3$，

则

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & k_1+k_2a_1+k_3a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & k_1+k_2a_2+k_3a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & k_1+k_2a_3+k_3a_3^2 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & k_1+k_2a_4+k_3a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_4-k_1c_1-k_2c_2+k_3c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & 0 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & 0 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

另一方面，$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le 4}(a_j-a_i) \neq 0$

上面两个式子互相矛盾，所以该方程组无解一定无解。

证法2：利用秩进行证明.

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{bmatrix}$$

由$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le 4}(a_j-a_i) \neq 0$可知，

$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{bmatrix}$的列向量组线性无关，