《高等数学》《工科数学分析基础》和《微积分》A 卷参考答案

(B 卷与 A 卷题目相同，顺序不同)

一、**1.** $\frac{1}{2(1+t)^2}$，$3+\frac{ln2}{8}$　　**2.** $\frac{1}{3}$，3　　**3.** $\frac{-e^y}{xe^y+1}dx$，$2e^2$

4. $\frac{3}{2}$，$\frac{1}{4}$　　**5.** 2ln2，$\frac{2019!}{2^{2017}2017}$

二、 B D C B C

三、 **解**：$\lim_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}ln(1+x)-1}{2x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{ln(1+x)-x}{2x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x}{2x^2}}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

(B 卷为$\lim_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{3x}}$，　$e^{-\frac{1}{6}}$)

四、**解**：设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，　$x>1$.　……………2 分

$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}(1-lnx)$，由 $f'(x)=0$ 知 $x=e$.　…………4 分

$x\in(1,e)$ 时　$f'(x)>0$，$f(x)$单调增;

$x\in(e,+\infty)$ 时　$f'(x)<0$，$f(x)$单调减;

故 $x=e$ 处 $f(x)$取得最大值.　……………7 分

而$2<e<3$，且$\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$ ，

故数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项为 $\sqrt[3]{3}$.　……………10 分

五、**证明**：由题知，$g(1)=g(2)=0$，从而$g(x)$在$[1,2]$上满足罗尔中值定理的条件，

必存在 $c\in(1,2)\ s.t.\ g'(c)=0$.　……4 分

又 $g'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$，显然$g'(1)=0$.　…6 分

故$g'(x)$ 在$[1,c]$上满足罗尔中值定理的条件，

必存在 $\xi\in(1,c)\subset(1,2)$ 使 $g''(\xi)=0.$ ………10 分

六、解：构造 $f(x)=aln(a+x)-(a+x)lna$ ，显然$f(0)=0.$ ……3 分

$$f'(x)=\frac{a}{a+x}-lna.$$

因 $x>0$，$a>e$，故$f'(x)<1-ln\,e=0.$ ……6 分

所以$f(x)$在$(e,+\infty)$上单调减，$f(x)<f(0)$,

即 $aln(a+x)<(a+x)lna$

也即 $(a+x)^a<a^{a+x}.$ ……10 分

七、1. 证明：构造 $F(x)=f_n(x)-1$ ，显然$g(x)$ 在$[\frac{1}{2},1]$连续，

$F\left(\frac{1}{2}\right)=f_n\left(\frac{1}{2}\right)-1=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}-1=-\frac{1}{2^n}<0,$ ……2 分

$$F(1)=f_n(1)-1=n-1>0.$$

由零点定理知，$\exists x_n\in(\frac{1}{2},1)$使得$F(x_n)=0,$

即$f_n(x)=1$在$(\frac{1}{2},1)$有根$x_n.$ ………4 分

又因为 $f_n{}'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0,$ …… 5 分

故$f_n(x)$严格单调增，$f_n(x)=1$在$(\frac{1}{2},1)$的根x_n是唯一的.

2. 由于 $f_n(x)<f_{n+1}(x)$，故 $f_{n+1}(x_{n+1})=1=f_n(x_n)<f_{n+1}(x_n).$

而$f_{n+1}(x)$严格单调增的，从而$x_{n+1}<x_n$，即$\{x_n\}$单调减，

而$x_n>\frac{1}{2}$，$\{x_n\}$ 有下界. 由单调有界原理知 $\lim_{n\to\infty}x_n$存在，设为$a.$ …8 分

由于 $f_n(x_n)=x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n=\frac{x_n-x_n{}^{n+1}}{1-x_n}=1$，

两端同时令$n\to\infty$取极限，$x_n<1$，$\lim_{n\to\infty}x_n{}^{n+1}=0,$

于是 $\frac{a}{1-a}=1$, 即 $a=\frac{1}{2}$.　　　　……………10 分