5.2.2 矩阵的秩的性质

1. **性质 5-1** $r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})$.

2. **性质 5-2** $r(\mathbf{A})=\mathbf{A}$ 的行秩$=\mathbf{A}$ 的列秩.

该结论通常称为“三秩相等定理”.

【注：性质 5-2 把 A 的秩与 A 的行向量组、列向量组的秩联系到一起了】

3. **定理 5-8** 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{P}$ 为 m 阶可逆矩阵，$\mathbf{B}=\mathbf{PA}$, 则 $\mathbf{A}$ 中任意 r 个列向量 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 和 $\mathbf{B}$ 中相应的列向量 $\mathbf{b}_{i_1},\mathbf{b}_{i_2},\cdots,\mathbf{b}_{i_r}$ 满足相同的线性表达式，从而具有相同的线性相关性.

4. **推论 5-1** 在定理 5-8 的条件下，下列结论正确.

（1）$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的列向量组的极大无关组一一对应，$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{A})$；

（2）$\mathbf{a}_j=k_1\mathbf{a}_{i_1}+k_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{a}_{i_r}\Leftrightarrow\mathbf{b}_j=k_1\mathbf{b}_{i_1}+k_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{b}_{i_r}$，其中 $1\le j\le n$.

5. **性质 5-3** 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则

$$r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{AQ})=r(\mathbf{PAQ})=r(\mathbf{A}).$$

注意，性质 5-3 的结论可简述为“在矩阵 A 的左侧、右侧或两侧乘可逆矩阵，秩都不变。”

6. **推论 5-2** **初等变换不改变矩阵的秩.**

7. **性质 5-4** $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 的秩为 $r\Leftrightarrow\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$ 等价，即存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$, 使得 $\mathbf{PAQ}=\mathbf{F}$.

注：矩阵 A 的等价标准形 F 由 A 的秩唯一确定，即 A 的等价标准形是唯一的.

上次学到性质 5-4

8. **性质 5-5** 分块三角矩阵的秩具有下列公式.

（1）$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$； $r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\right)=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$

（2）$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\ge r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{C} & \mathbf{B}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{O}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{C}\end{bmatrix}$ 也有类似的结论.

证明 （1）设 $r(\mathbf{A})=r_1, r(\mathbf{B})=r_2$，根据性质 5-4，通过初等变换可得

$$\mathbf{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

所以 $r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) = r_1 + r_2 = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$.

（2）证法 1：设 $r(\mathbf{A}) = r_1, r(\mathbf{B}) = r_2$，根据性质 5-4，通过初等变换可得

$$\mathbf{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{对}\mathbf{A},\mathbf{B}\text{作同上的初等变换}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O} & * & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & * & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

注：让C跟着A,B一起作初等变换

假设C化成$\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{作对调行变换}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{r_1} & \mathbf{O} & * & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & * & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{作对调列变换}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{r_1} & * & \mathbf{O} & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & * & \mathbf{O} & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{作倍加行变换}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{r_1} & * & \mathbf{O} & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_{r_2} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & * \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

注：最后这个矩阵化成行阶梯矩阵时，

非零行的个数至少为$r_1 + r_2$

所以 $r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) \geq r_1 + r_2 = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$..

证法 2：设 $r(\mathbf{A}) = r_1, r(\mathbf{B}) = r_2$，由矩阵的秩的定义可知，$\mathbf{A}$ 中有 r_1 阶非奇异子阵 $\mathbf{A}_1$，$\mathbf{B}$ 中有 r_2 阶非奇异子阵 $\mathbf{B}_1$，于是$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$中有 $r_1 + r_2$ 阶非奇异子阵$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix}$,其中，$\mathbf{C}_1$ 是$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$中 $\mathbf{A}_1$ 所在的行和 $\mathbf{B}_1$ 所在的列相交处的元素构成的子阵.所以

$$r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) \geq r_1 + r_2 = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}).$$

9. **性质 5-6** 设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times k$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 为 $k \times n$ 矩阵，则

$$r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - k \leq r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}.$$

注 1： **k 是 A 的列数。**

注 2： $r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$ 的意思是 $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A})$ 且 $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{B})$，做题时一般都是从二者中选择一个使用。

注 3： 性质 5-6 和性质 5-3 都是关于**矩阵乘积的秩**的公式。做题时，如果相乘的矩阵中

有可逆矩阵，要用性质 5-3；如果相乘的矩阵中没有可逆矩阵，则用性质 5-6.

证明 （1）先证右端的不等式.

通过计算可知，$[\mathbf{A},\mathbf{O}]\begin{bmatrix}\mathbf{E}_k & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{bmatrix}=[\mathbf{A},\mathbf{AB}]$

因为$\begin{vmatrix}\mathbf{E}_k & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{vmatrix}=|\mathbf{E}_k|\cdot|\mathbf{E}_n|=1\neq 0$，所以$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_k & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{bmatrix}$**可逆**。

根据性质 5-3，可得$r([\mathbf{A},\mathbf{O}])=r([\mathbf{A},\mathbf{AB}])$.

显然$[\mathbf{A},\mathbf{O}]$和$\mathbf{A}$化成行阶梯矩阵时非零行的个数相同，所以$r(\mathbf{A})=r([\mathbf{A},\mathbf{O}])$.

由$[\mathbf{A},\mathbf{AB}]$是$\mathbf{AB}$的增广矩阵可得，$r([\mathbf{A},\mathbf{AB}])\geq r(\mathbf{AB})$

综合上面的讨论可得$r(\mathbf{A})=r([\mathbf{A},\mathbf{O}])=r([\mathbf{A},\mathbf{AB}])\geq r(\mathbf{AB})$

即 $r(\mathbf{AB})\leq r(\mathbf{A})$.

由性质 5-1 及上式又可得

$$r(\mathbf{AB})=r((\mathbf{AB})^T)=r(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)\leq r(\mathbf{B}^T)=r(\mathbf{B}).$$

注：$r(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)\leq r(\mathbf{B}^T)$是根据公式$r(\mathbf{AB})\leq r(\mathbf{A})$得来的，$r(\mathbf{AB})\leq r(\mathbf{A})$刚才已经证明了，这个公式的意思是：乘积的秩小于或等于前面那个矩阵的秩。

（2） 再证左端的不等式. 通过计算可以验证下面的等式成立：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_m & -\mathbf{A}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E}_k & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{O}\end{bmatrix}.$$

因为$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_m & -\mathbf{A}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_k\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_k & \mathbf{B}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{bmatrix}$都是可逆矩阵，所以根据性质 5-3 可得$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{O}\end{bmatrix}\right)$.

根据性质 5-5，又得$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\leq r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)$，$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O} & -\mathbf{AB}\\ \mathbf{E}_k & \mathbf{O}\end{bmatrix}\right)=r(-\mathbf{AB})+r(\mathbf{E}_k)=r(\mathbf{AB})+k$

所以$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\leq r(\mathbf{AB})+k$， 即$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-k\leq r(\mathbf{AB})$.

【注：$-\mathbf{AB}$和$\mathbf{AB}$化成行阶梯矩阵时，非零行的个数一定相同，所以$r(-\mathbf{AB})=r(\mathbf{AB})$.

$\mathbf{E}_k$是个对角矩阵，也可看成行阶梯矩阵，非零行的个数为 k，所以$r(\mathbf{E}_k)=k$】

10. **例** 设$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$分别为$m\times k$矩阵和$k\times n$矩阵，$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，证明：$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\leq k$.

【注：要记住该例题的结论，做题时经常用到这个结论】

证： 由性质 5-6，可得$r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-k\leq r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{O})=0$

移项，得 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})\leq k$.

例 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，证明：$r(\mathbf{A}^*)=\begin{cases} n & r(\mathbf{A})=n \\ 1 & r(\mathbf{A})=n-1 \\ 0 & r(\mathbf{A})\le n-2 \end{cases}$.

【注：要记住该例题的结论，做题时经常用到这个结论】

证：（1） 当 $r(\mathbf{A})=n$ 时，根据矩阵的秩的定义可知，$|\mathbf{A}|\neq 0$.

由 $|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}\neq 0$ 可知，$r(\mathbf{A}^*)=n.$

（2） 当 $r(\mathbf{A})=n-1$ 时，根据矩阵的秩的定义可得，$|\mathbf{A}|=0, \mathbf{A}^*\neq \mathbf{O}$.

【注 1：由 $r(\mathbf{A})=n-1$ 可知，$\mathbf{A}$ 中非零子式的最高阶数为 $n-1$ 阶，所以 $\mathbf{A}$ 的 n 阶子式都为 0. 又因为 $|\mathbf{A}|$ 就是 $\mathbf{A}$ 的 n 阶子式，所以 $|\mathbf{A}|=0.$】

【注 2：由 $r(\mathbf{A})=n-1$ 可知，$\mathbf{A}$ 中有 $n-1$ 阶的子式不为 0，这个 $n-1$ 阶的非零子式一定对应于 $\mathbf{A}$ 中某个数的余子式，从而可知，$\mathbf{A}$ 中一定有某个数的代数余子式不为 0，所以 $\mathbf{A}^*\neq \mathbf{O}.$】

由 $\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$ 及 $|\mathbf{A}|$=0 可得，$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{O}$. 再根据上一个例题的结论，可得 $r(\mathbf{A}^*)+r(\mathbf{A})\le n$，所以 $r(\mathbf{A}^*)\le n-r(\mathbf{A})=1$

由 $\mathbf{A}^*\neq\mathbf{O}$ 又可得，$r(\mathbf{A}^*)\ge 1$，所以 $r(\mathbf{A}^*)=1$.

【注：刚才通过证明“$r(\mathbf{A}^*)\le 1$ 和 $r(\mathbf{A}^*)\ge 1$”，最后证明了 $r(\mathbf{A}^*)=1$. 希望同学们注意这种证明方法，我们经常**通过证明两个不等式来证明一个等式**】

（3） 当 $r(\mathbf{A})\le n-2$ 时，根据矩阵的秩的定义可知，$\mathbf{A}^*=\mathbf{O}$，所以 $r(\mathbf{A}^*)=0$.

【注：由 $r(\mathbf{A})\le n-2$ 可知，$\mathbf{A}$ 中非零子式的阶数低于 $n-1$。由于 $\mathbf{A}$ 的代数余子式都是 $n-1$ 阶的，所以 $\mathbf{A}$ 的所有代数余子式都为 0，$\mathbf{A}^*=\mathbf{O}.$】

例 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m\times n$ 矩阵和 $n\times m$ 矩阵, $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$,证明：$r(\mathbf{A})=m$.

【注意：不能用行列式做，因为 A 和 B 不是方阵】

证 由 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，可知 $\mathbf{AB}$ 为 m 阶方阵。于是，由 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$ 可知，$r(\mathbf{AB})=m$.

根据性质 5-6 可得，$r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{A})$. 因为 $r(\mathbf{AB})=m$，所以 $r(\mathbf{A})\ge m$.

因为矩阵的秩一定小于或等于它的行数，所以 $r(\mathbf{A})\le m$，故 $r(\mathbf{A})=m$.

例 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $m\times k$ 矩阵和 $k\times n$ 矩阵，

（1）若 $r(\mathbf{A})=k$（称 **A 为列满秩矩阵**），则 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B}).$

（2）若 $r(\mathbf{B})=k$（称 **B 为行满秩矩阵**），则 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{A}).$

【注：要记住该题结论，做题时可以直接用】

证 （1）由性质 5-6 的左端不等式，可得 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-k\le r(\mathbf{AB})$

因为 $r(\mathbf{A})=k$，所以 $r(\mathbf{B})\le r(\mathbf{AB})$.

由性质 5-6 的右端不等式，又可得 $r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{B})$，所以 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B})$.

（2）由性质 5-6 的左端不等式，可得 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})-k\le r(\mathbf{AB})$

因为 $r(\mathbf{B})=k$，所以 $r(\mathbf{A})\le r(\mathbf{AB})$.

由性质 5-6 的右端不等式，又可得 $r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{A})$，所以 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{A})$.

11. **性质 5-7** 设 **A** 和 **B** 分别为 $m\times n$ 矩阵和 $m\times k$ 矩阵，则

$$r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B}).$$

证法 1 通过计算可知 $[\mathbf{A},\mathbf{B}]=[\mathbf{E},\mathbf{E}]\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$

注意：$[\mathbf{A},\mathbf{B}]$是$[\mathbf{E},\mathbf{E}]$和$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$的乘积。

根据性质 5-6 的右端不等式，可得 $r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)$.

根据性质 5-5，可得 $r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

把上面两个不等式结合起来，可得 $r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

证法 2 设 $r(\mathbf{A})=r, r(\mathbf{B})=s$, 则 A 和 **B** 的列向量组中分别最多能找到 r 个和 s 个线性无关的列向量.于是，$[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ 的列向量组中最多能找到 $r+s$ 个线性无关的向量，所以 $r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\le r+s=r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$.

【由于 **A** 中线性无关的列向量和 **B** 中线性无关的列向量合在一起有可能线性相关，所以$[\mathbf{A},\mathbf{B}]$中线性无关列向量的个数有可能小于 $r+s$ 个。】

12. **性质 5-8** 设 **A** 和 **B** 都是 $m\times n$ 型矩阵，则 $r(\mathbf{A}+\mathbf{B})\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$. .

证明 通过计算可知 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=[\mathbf{A},\ \mathbf{B}]\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{E}\end{bmatrix}$.

注意：$\mathbf{A}+\mathbf{B}$是$[\mathbf{A},\ \mathbf{B}]$和$\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{E}\end{bmatrix}$的乘积。

根据性质 5-6 的右端不等式，可得 $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le r([\mathbf{A},\ \mathbf{B}])$.

根据性质 5-7，可得 $r([\mathbf{A},\ \mathbf{B}]) \le r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$.

把上面两个不等式结合起来，可得 $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$.

【注 1：$r(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}+(-\mathbf{B})) \le r(\mathbf{A}) + r(-\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$. 】

【注 2：性质 5-8 的结论也可写成 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \ge r(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ **】**

13. 例 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，$\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \mathbf{O}$，证明：$r(\mathbf{A}+2\mathbf{E}) + r(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = n$.

证： 由 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \mathbf{O}$，得 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = \mathbf{O}$. 根据性质 5-6 后的第一个例题可得

$$r(\mathbf{A}+2\mathbf{E}) + r(\mathbf{A}-\mathbf{E}) \le n.$$

根据性质 5-8 又可得

$$r(\mathbf{A}+2\mathbf{E}) + r(\mathbf{A}-\mathbf{E}) \ge r[(\mathbf{A}+2\mathbf{E}) - (\mathbf{A}-\mathbf{E})] \ge r(3\mathbf{E}) = n,$$

所以 $r(\mathbf{A}+2\mathbf{E}) + r(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = n$.

5.2.3 满秩矩阵

1. **定义 5-7** 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵. 当 $r(\mathbf{A}) = n$ 时，$\mathbf{A}$ 叫做满秩矩阵；当 $r(\mathbf{A}) < n$ 时，$\mathbf{A}$ 叫做降秩矩阵.

【注意：满秩矩阵和降秩矩阵都是对方阵来说的】
若 A 不是方阵时，我们给出下面的定义。
当 A 的秩等于它的行数时，称 A 为行满秩矩阵。
当 A 的秩等于它的列数时，称 A 为列满秩矩阵。

2. 满秩矩阵具有下面的结论.

定理 5-9 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}$ 为 n 元列向量，则下列命题互为充要条件.

（1） $\mathbf{A}$ 为满秩矩阵
（2） $\mathbf{A}$ 为非奇异矩阵
（3） $\mathbf{A}$ 为可逆矩阵
（4） $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解
（5） $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解
（6） $\mathbf{A}$ 的行向量组线性无关
（7） $\mathbf{A}$ 的列向量组线性无关

【注：定理 5-9 将矩阵、方程组、向量组、行列式联系到一起，所有这些结论都与 $|\mathbf{A}| \ne 0$ **等价】**

证明 由矩阵的秩的定义、非奇异矩阵的定义及定理 3-3 可知，(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).
由定理 3-3，定理 3-5 及定理 3-6 可知，(3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5).
由定理 3-3 及定理 5-2 可知，(3) $\Leftrightarrow$ (6).

注意 满秩矩阵、非奇异矩阵和可逆矩阵是同一种矩阵.

3. **定理**　设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶**方阵**，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}$ 为 n 元列向量，则下列命题互为充要条件.

（1） $\mathbf{A}$ 为降秩矩阵
（2） $\mathbf{A}$ 为奇异矩阵
（3） $\mathbf{A}$ 为不可逆矩阵

（4） $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解
（5） $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有无穷多个解或无解

（6） $\mathbf{A}$ 的行向量组线性相关
（7） $\mathbf{A}$ 的列向量组线性相关

【注：所有这些结论都与 $|\mathbf{A}|=0$ 等价】

4. **例**　设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，且 $m>n$，证明：$|\mathbf{AB}|=0.$

证　由已知可知，$\mathbf{AB}$为 m 阶方阵.

由性质 5-6，可得 $r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{A})\le n<m$，所以 $\mathbf{AB}$ 为降秩矩阵，$|\mathbf{AB}|=0.$

【注： $\mathbf{A}$ 中非零子式的阶数不会超过 $\mathbf{A}$ 的行数和列数，由矩阵的秩的定义可知，$r(\mathbf{A})\le n$ 】

5.3 矩阵的秩在向量组中的应用

5.3.1　判断向量组的线性相关性

1. （1）由向量组的秩的定义可知：

向量组V线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组V的秩等于其所含向量的个数

向量组V线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组V的秩小于其所含向量的个数

（2）以所给向量组为列构造矩阵 $\mathbf{A}$，根据三秩相等定理，求出 $\mathbf{A}$ 的秩即可知该向量组的秩，从而可判断该向量组的线性相关性.

2. **例 5-6**　证明：$m>n$ 时，n 元列向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 一定线性相关.

【注 1　在本题中，　m 表示向量个数，n 表示分量个数。】
【注 2　例 5-6 的结论可叙述为：**向量个数大于分量个数的向量组一定线性相关**】
【注 3　平面坐标系中最多能找到 2 个无关向量，3 个以上的 2 元向量一定相关；空间直角坐标系中最多能找到 3 个无关向量，4 个以上的 3 元向量一定相关. 这是例 5-6 的直观含义】

证明　令 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m]$，则 $\mathbf{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵.　由 $r(\mathbf{A})\le n<m$ 可知，

$\mathbf{A}$ 的列秩<m，所以 $\mathbf{A}$ 的列向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性相关.　证毕

根据例 5-6 马上可知，向量组 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}10\\11\\12\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ 一定线性相关。

3. **例 5-7**　证明：$r(\mathbf{R}^n)=n.$

【注1　$\mathbf{R}^n$表示所有n元实向量构成的集合，也表示n 维几何空间】

【注2　该例题的含义是：$\mathbf{R}^n$的秩等于$\mathbf{R}^n$的维数。】

证明　因为$\mathbf{R}^n$中的向量$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$线性无关，由例 5-6 可知$\mathbf{R}^n$中任何$n$+1 个向量都线性相关，所以$\mathbf{R}^n$中所含线性无关向量的最大个数为$n$,故$r(\mathbf{R}^n)=n$.

4. **例 5-8**　设向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性无关，证明：向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$也线性无关.

证法 1　因为初等变换不改变矩阵的秩，所以$r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\right]\right)\overset{c_2-c_1}{=}r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right]\right)$，

由向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性无关及“三秩相等”定理可得，$r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right]\right)=2$

所以$r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\right]\right)=2$，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$线性无关.

【注　很多关于线性相关性的证明题可利用秩来证明，通过初等变换讨论矩阵的秩是一种很重要的方法，希望同学们学会这种方法。】

证法 2　通过计算可知，$\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\right]=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right]\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

因为$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$可逆，所以根据性质5-3 可得　$r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\right]\right)=r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right]\right)=2$，

$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$线性无关。

证法 3　（用线性无关的定义证）

设$k_1\mathbf{a}_1+k_2(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)=0$，则有$(k_1+k_2)\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2=0$.

由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性无关可得，$\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_2=0\end{cases}$.

解得$\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\end{cases}$,　　所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$线性无关。

5.3.2　求向量组的极大无关组

根据定理 5-8 和推论 5-1 可知，若用初等行变换将矩阵$\mathbf{A}$化成矩阵$\mathbf{B}$，则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组是一一对应的，并且它们的对应列向量满足相同的线性表达式.因此，我们可以用初等行变换将矩阵$\mathbf{A}$化为行阶梯矩阵$\mathbf{B}$，通过$\mathbf{B}$的列向量组的极大无关组来找到$\mathbf{A}$的列向量组的极大无关组，通过$\mathbf{B}$中的列向量所满足的表达式来求出$\mathbf{A}$中的列向量所满足的表达式.

例 5-9　求向量组$\mathbf{a}_1=[1,0,1,-1]^T,\mathbf{a}_2=[1,-2,1,1]^T,\mathbf{a}_3=[1,2,1,-3]^T$,

$\mathbf{a}_4=[0,1,1,3]^T,\mathbf{a}_5=[2,-4,0,-6]^T$的秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

解　以所给向量组为列构造矩阵$\mathbf{A}$,并用初等行变换将$\mathbf{A}$化为行阶梯矩阵$\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5\right]$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&1&-4\\1&1&1&1&0\\-1&1&-3&3&-6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&1&-4\\0&0&0&1&-2\\0&2&-2&3&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&1&-4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&4&-8\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-4r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&1&-4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{B},$$

$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=3$，所以所给向量组的秩为 3.

由 $r(\mathbf{B})$=3 可知，$\mathbf{B}$ 的列秩也为 3. 只要找到 $\mathbf{B}$ 的三个线性无关的列向量，就找到了 $\mathbf{B}$ 的列向量组的一个极大无关组。

$\mathbf{B}$ 中每个非零行的第一个非零元素所在的列构成的子阵为 $[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_4]=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,

这也是行阶梯矩阵，秩为 3，所以 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_4$ 线性无关. 这三个列向量构成 $\mathbf{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，于是, $\mathbf{A}$ 中对应的列向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$ 为所给向量组的一个极大无关组.

【注：从上面的讨论可知，$\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 中选一个，$\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5$ 中选一个，与 $\mathbf{a}_1$ 合在一起都可构成所给向量组的一个极大无关组。例如，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_5$；$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$；$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_5$ 也都是所给向量组的极大无关组。请注意，由于 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 的秩为 2，所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性相关，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 不是所给向量组的极大无关组。】

为了将 $\mathbf{a}_3$ 和 $\mathbf{a}_5$ 用该极大无关组线性表示，需进一步用初等行变换将 $\mathbf{B}$ 化为行最简形

$$\mathbf{B}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&-2&2&0&-2\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\div(-2)}\begin{bmatrix}1&1&1&0&2\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{C}.$$

由于 $\mathbf{c}_3=2\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_5=\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2-2\mathbf{c}_4$，所以根据推论 5-1 的(2)可得

$$\mathbf{a}_3=2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_5=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_4\quad.$$

【注：上面两个式子中的系数分别是行最简形 C 的第三列、第五列中的数】

最后强调一下，求一个矩阵的列向量组的极大无关组并将其它向量用极大无关组线性表示时，不要做列变换. 原因是：如果做列变换，列向量的位置和线性表达式的系数都会变。