《高等数学》《工科数学分析基础》和《微积分》A 卷参考答案

(B 卷与 A 卷题目相同，顺序不同)

一、**1.** $\frac{-2016}{2017}$, $\frac{1}{2017}$;　　**2.** $\frac{2e^x+y}{e^y-x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{y}-\ln 2=(1+\frac{\ln 2}{2})x$;　　**3.** 0, -1;

4. $\frac{t}{2}$,　$(n-1)!\,(1-x)^{-n}$;　　**5.** 3, $\sqrt[3]{6}$

二、 A　B　A　D　B

三、 解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctanx-arcsinx}{tanx-sinx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctanx-arcsinx}{tanx(1-\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctanx-arcsinx}{x\left(\frac{1}{2}x^2\right)}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctanx-arcsinx}{x^3}$　　…………………………3 分

$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-(1+x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}$…………………………6 分

$=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x^2}{x^2}$　　…………………………8 分

$=-1$　　…………………………10 分

四、解：**(1)** $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{x+\sin x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}(1+\frac{x^2}{x})=1$ …………………………2 分

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)-0}{x-0}=1$　　…………………………4 分

故$f'(x)=\begin{cases}1+2x\cos x^2 & x\le 0\\ \frac{1}{1+x} & x>0\end{cases}$　　………………… … 6 分

(2)　$f_-''(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{(1+2x\cos x^2)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\frac{2x\cos x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}2\cos x^2=2$………8 分

$$f_+''(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-x}{x(1+x)}=-1$$

所以$f''(0)$不存在.　　…………………………………10 分

五、证明：$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，……………………………………2 分

由于 $f(-x)=-f(x)$， $f(x)$为偶函数，故只需证明在[0,1）上不等式成立。

因为 $f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$， $f'(0)=0$……………………………4 分

$f''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\geq 4-\cos x-1>0$，………………………8 分

所以$f'(x)$ ＞ $f'(0)=0$，$f(x)$单调增，

即在[0,1)上有 $f(x)\geq f(0)=0$． ………………10 分

六、解：设所求之点为(a,b)，则

$$y'|_{(a,b)}=\frac{p}{y}|_{(a,b)}=\frac{p}{b}\ ,$$

过该点的法线方程为 $y-b=-\frac{b}{p}(x-a)$. ……………2 分

代入$y^2=px$中求另一交点，即 $\left[b-\frac{b}{p}(x-a)\right]^2=2px$

由根与系数的关系知 $x_1+x_2=2a+2p+\frac{2p^3}{b^2}$

而 $x_1=a$，$b^2=2pa$，故

$$x_2=2a+2p+\frac{2p^3}{2pa}-a=a+2p+\frac{p^2}{a}$$ ……………4 分

则两个交点之间距离的平方为

$$f(a)=\left(2p+\frac{p^2}{a}\right)^2(1+\frac{b^2}{p^2})=p(p+2a)^3/a^2$$ ………6 分

由$f'(a)=\frac{2p(p+2a)^2(a-p)}{a^3}=0$ 可得 $a=p$ ，$a=-\frac{p}{2}$ …………8 分

而a与p同号，故只有解$a=p$,

所以所求之点为$(p,\sqrt{2}p)$或$(p,-\sqrt{2}p)$ …………………10 分

七、证明：设$F(x)=f(x)-\frac{x}{a}$，则$F(x)$在$[0,a]$连续， …………2 分

$F(0)=f(0)=1>0, F(a)=f(a)-1=-1<0$

由零点定理知，$\exists\xi\in(0,a)$使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\frac{\xi}{a}$． ………4 分

$f(x)$分别在$[0,\xi],[\xi,a]$上满足 Lagrange 中值定理，

故 $\exists x_1\in(0,\xi)$，$x_1\in(\xi,a)$ 使得

$$f'(x_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{f(\xi)-1}{\xi},$$ ……6 分

$$f'(x_2)=\frac{f(a)-f(\xi)}{a-\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi-a}\ .$$ ……8 分

故$f'(x_1)f'(x_2)=\frac{f(\xi)-1}{\xi}\ \frac{f(\xi)}{\xi-a}=\frac{1}{a^2}$ ． ……………10 分