7.2　向量的正交性

7.2.1　向量的内积

1. 在空间解析几何中，

向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的数量积的定义为$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

【注：学习通的视频中，把零向量$\mathbf{0}$写成θ了，在学习指导中用θ表示两个向量的夹角】

向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的数量积的坐标表达式为$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$，

其中$\vec{a}$和$\vec{b}$的坐标向量分别为$\mathbf{a}=[a_1,a_2,a_3]^T$，$\mathbf{b}=[b_1,b_2,b_3]^T$.

由数量积的定义，可得$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}，$$

由数量积的定义，可得$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

下面将数量积的坐标表达式、长度的公式、夹角的公式推广到n维实向量空间$\mathbf{R}^n$中，对应地给出$\mathbf{R}^n$中向量的内积、长度和角度的定义.

2. 【重点】**定义 7-5**　设$\mathbf{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T,\mathbf{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$是两个**实向量**，$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的**内积**记作$(\mathbf{a},\mathbf{b})$,规定$(\mathbf{a},\mathbf{b})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

因为$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，$\mathbf{b}^T\mathbf{a}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，所以$\mathbf{a}^T\mathbf{b}$和$\mathbf{b}^T\mathbf{a}$也都表示$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的内积。

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\mathbf{b}^T\mathbf{a}$$

3. 【了解】根据内积的定义,容易验证内积具有下列性质：

（1）$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{a})$

(2)　$(k\mathbf{a},\mathbf{b})=k(\mathbf{a},\mathbf{b})$，　$(\mathbf{a},k\mathbf{b})=k(\mathbf{a},\mathbf{b})$

(3)　$(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c})$，　$(\mathbf{c},\mathbf{a}+\mathbf{b})=(\mathbf{c},\mathbf{a})+(\mathbf{c},\mathbf{b})$

(4)　$(\mathbf{a},\mathbf{a})\geq 0$,且　$(\mathbf{a},\mathbf{a})=0\Leftrightarrow\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

其中，$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{R}^n$，$k$为任意实数.

4. 【了解】**定义 7-6**　定义了内积的向量空间称为**欧氏空间**.

在欧氏空间中，我们可以讨论长度、角度、正交等问题。

5. 【重点】**定义 7-7**　实向量$\mathbf{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$的**长度**（也叫做**范数**）记作$\|\mathbf{a}\|$，规定

$$\|\mathbf{a}\|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

【注意：在代数中用$\|\mathbf{a}\|$表示长度，这主要是为了与行列式的符号加以区分，因为将来也会讲矩阵的长度】

当$\|\mathbf{a}\|=1$时，$\mathbf{a}$叫做**单位向量**；对于非零向量$\mathbf{a}$，**称$\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$为$\mathbf{a}$的单位化向量**.

注意　$\mathbf{a}^T\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|^2$，这个公式很重要，要记住。

6. 【了解】向量的长度具有下列性质：

（1）非负性　$\|\mathbf{a}\|\geq 0$，且$\|\mathbf{a}\|=0\Leftrightarrow \mathbf{a}=\mathbf{0}$

(2) 齐次性　$\|k\mathbf{a}\|=|k|\cdot\|\mathbf{a}\|$

（3）三角不等式　$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|\leq\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|$

(4)柯西-施瓦茨不等式　$|(\mathbf{a},\mathbf{b})|\leq\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$

根据长度的定义，性质(1)和(2)显然成立．性质(3)可利用性质(4)来证明，下面仅给出性质(4)的证明.

当$\mathbf{a}=\mathbf{0}$时，$|(\mathbf{a},\mathbf{b})|=0,\ \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|=0,\ |(\mathbf{a},\mathbf{b})|=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$，结论成立.

当$\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$时，对任意实数x,恒有$(x\mathbf{a}+\mathbf{b},x\mathbf{a}+\mathbf{b})\geq 0$，

根据数量积的性质可得　$(\mathbf{a},\mathbf{a})x^2+2x(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{b},\mathbf{b})\geq 0$，

即　$\|\mathbf{a}\|^2x^2+2(\mathbf{a},\mathbf{b})x+\|\mathbf{b}\|^2\geq 0$,

上式左端是关于x的二次函数，由于它非负，所以判别式$\Delta\leq 0$，

$$4(\mathbf{a},\mathbf{b})^2-4\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\leq 0,$$

即$|(\mathbf{a},\mathbf{b})|\leq\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$.

7. 【了解】**定义 7-8**　当$\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$时，把$\theta=\arccos\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$叫做**向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角**.

【注：由柯西-施瓦茨不等式可知$\left|\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\right|\leq 1$，所以$\arccos\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$总是有意义的】

8. 【重点】当$(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$,即$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=0$时，称向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$**正交.**

【注：当$(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$,即$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=0$时，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$确实是正交的】

7.2.2　正交向量组与施密特正交化方法

1. **定义 7-9**　由**两两正交**的**非零向量**组成的向量组称为**正交向量组.**
由**单位向量**组成的**正交向量组**称为**标准正交向量组.**

2. **定理 7-3**　正交向量组一定线性无关.

证明 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 是正交向量组，且 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_m\mathbf{a}_m=\mathbf{0}$. ①

用 $\mathbf{a}_1^T$ 乘上式两端，得 $k_1\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2+\cdots+k_m\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_m=\mathbf{0}$.

由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 是正交向量组，可知 $\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1=\|\mathbf{a}_1\|^2\neq 0$，$\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_j=0\quad(j=2,\cdots,m)$.

于是，有 $k_1\|\mathbf{a}_1\|^2=0$，故 $k_1=0$.

这时， ①式成为 $k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_m\mathbf{a}_m=\mathbf{0}$

通过用 $\mathbf{a}_2^T$ 乘上式两端可证 $k_2=0$.

同理可证 $k_3=\cdots=k_n=0$.

所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性无关.

3. 定理 7-3 的逆命题不成立，但是可以通过下面方法将一个线性无关的向量组变成一个与之等价的正交向量组.

设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 是一个线性无关的向量组，若令

$$\begin{cases}\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1\\ \mathbf{b}_j=\mathbf{a}_j-\sum\limits_{i=1}^{j-1}\dfrac{\mathbf{b}_i^T\mathbf{a}_j}{\|\mathbf{b}_i\|^2}\mathbf{b}_i\end{cases},\qquad (7.4)$$

则 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$ 是与 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 等价的正交向量组.

该方法称为施密特正交化方法.

将 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$ 单位化以后，可得到一个与 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 等价的标准正交向量组.

上面的方法来自于下面的几何观察.

从图 7.1 可以看出，若取 $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1$，$\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-l\mathbf{b}_1$，则只要 l 选的合适，就能保证 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 正交.

令 $\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_2=0$，得 $\mathbf{b}_1^T(\mathbf{a}_2-l\mathbf{b}_1)=0$，即 $\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_2-l\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1=0$, 也即 $\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_2-l\|\mathbf{b}_1\|^2=0$,

求得 $l=\dfrac{\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{b}_1\|^2}$，所以 $\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-\dfrac{\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1$. 【注：$\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_2=0\Leftrightarrow\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 正交】

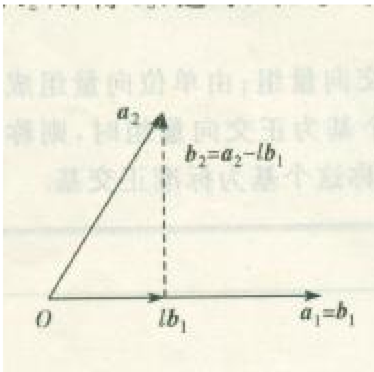

图 7.1

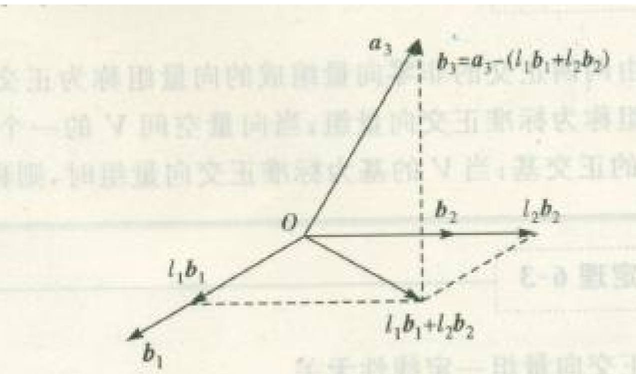

图 7.2

由 $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-l\mathbf{b}_1$ 可知，$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 能由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 线性表示。由 $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-l\mathbf{b}_1$ 又可得，$\mathbf{a}_1=\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2=l\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$，可见 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 也能由 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 线性表示。所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 与 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 等价。

注：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 与 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 在同一个平面里边。

求出 $\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{b}_2$ 以后，下面利用 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 和 $\mathbf{a}_3$ 来构造 $\mathbf{b}_3$，使 $\mathbf{b}_3$ 与 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 都正交. 按图 7.2 所示取 $\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_3-(l_1\mathbf{b}_1+l_2\mathbf{b}_2)$，只要 l_1,l_2 选的合适，就能保证 $\mathbf{b}_3$ 与 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$ 都正交。

令 $\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_3=0$，得 $\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_3-l_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1-l_2\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_2=0$.　【注：$\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_3=0 \Leftrightarrow \mathbf{b}_1,\mathbf{b}_3$ 正交】

因为 $\mathbf{b}_1$ 与 $\mathbf{b}_2$ 正交，所以 $\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_2=0$. 又因为 $\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1=\|\mathbf{b}_1\|^2$，所以 $l_1=\dfrac{\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_3}{\|\mathbf{b}_1\|^2}$.

令 $\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_3=0$，得 $\mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_3-l_1\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_1-l_2\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2=0$.【注：$\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_3=0 \Leftrightarrow \mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 正交】

因为 $\mathbf{b}_1$ 与 $\mathbf{b}_2$ 正交，所以 $\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_1=0$. 又因为 $\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_2=\|\mathbf{b}_2\|^2$，所以 $l_2=\dfrac{\mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_3}{\|\mathbf{b}_2\|^2}$.

故 $\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_3-\dfrac{\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_3}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1-\dfrac{\mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_3}{\|\mathbf{b}_2\|^2}\mathbf{b}_2$.

可以验证 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 与 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 等价.

将上面的过程加以推广可得到施密特正交化公式。

注：通过 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 和 $\mathbf{a}_4$ 可进一步得到 $\mathbf{b}_4$，使 $\mathbf{b}_4$ 与 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 都正交。

这时，要取 $\mathbf{b}_4=\mathbf{a}_4-(k_1\mathbf{b}_1+k_2\mathbf{b}_2+k_3\mathbf{b}_3)$，通过 $\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_4=0,\ \mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_4=0,\ \mathbf{b}_3^T\mathbf{b}_4=0$ 可求得

$k_1=\dfrac{\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_4}{\|\mathbf{b}_1\|^2}, k_2=\dfrac{\mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_4}{\|\mathbf{b}_2\|^2}, k_3=\dfrac{\mathbf{b}_3^T\mathbf{a}_4}{\|\mathbf{b}_3\|^2}$，　　$\mathbf{b}_4=\mathbf{a}_4-\dfrac{\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_4}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1-\dfrac{\mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_4}{\|\mathbf{b}_2\|^2}\mathbf{b}_2-\dfrac{\mathbf{b}_3^T\mathbf{a}_4}{\|\mathbf{b}_3\|^2}\mathbf{b}_3$

4. 为了平时做题和考试，能记住三个向量的情况就可以。

设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 是线性无关的列向量组，若取 $\begin{cases}\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1\\ \mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-\dfrac{\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_3=\mathbf{a}_3-\dfrac{\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_3}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1-\dfrac{\mathbf{b}_2^T\mathbf{a}_3}{\|\mathbf{b}_2\|^2}\mathbf{b}_2\end{cases}$，

则 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 是与 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 等价的正交向量组.

5. **定义 7-10**　当向量空间 V 的一个基为正交向量组时，则称这个基为 V 的**正交基**；当 V 的基为标准正交向量组时，则称这个基为**标准正交基**.

注：当向量空间 V 的基选为标准正交向量组时，就相当于在向量空间 V 中建立了一个直角坐标系。

7.2.3 正交矩阵

1. 正交矩阵是一类非常重要的可逆矩阵，在几何上有着很重要的应用.

2. **定义 7-11** 若实方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$，则称 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵.

3. 当 $\mathbf{A}$ 为方阵时，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{E}$.

证： 先证 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$

($\Rightarrow$) 根据推论 3-1，若方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$, 则 $\mathbf{A}$ 可逆，且 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$.

($\Leftarrow$) 由 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$ 可得，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

类似地可证，$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{E}$.

注：当 $\mathbf{A}$ 为方阵时，上面三个等价的式子中的任一个成立，都可断定 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵。
反过来，若 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵，则上面的三个式子都成立，做题时可以有所选择。

4. 正交矩阵具有如下性质：

（1）若 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵，则 $\mathbf{A}$ 可逆，且 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$

【注：当 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵时，$\mathbf{A}$ 的逆矩阵马上就能写出来】

证：$\mathbf{A}$ 为正交矩阵 $\Rightarrow \mathbf{A}$为方阵且$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A}$可逆且$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}$

（2）若 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵，则 $\mathbf{A}^T$ 和 $\mathbf{A}^{-1}$ 都为正交矩阵.

证：$\mathbf{A}$ 为正交矩阵 $\Rightarrow \mathbf{A}$为实方阵且$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A}^T$为实方阵且 $(\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T=\mathbf{E}$

根据定义 7-11 可知，$\mathbf{A}^T$ 为正交矩阵.
当 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵时，$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$，所以 $\mathbf{A}^{-1}$ 也是正交矩阵.

（3）若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为同阶正交矩阵，则 $\mathbf{AB}$ 也为正交矩阵.

证：$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为同阶正交矩阵 $\Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{E}$，$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}=\mathbf{E}$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}(\mathbf{AB})=(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})(\mathbf{AB})=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{B}=\mathbf{E}$$

根据定义 7-11 可知，$\mathbf{AB}$ 为正交矩阵.

（4）若 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵，则 $|\mathbf{A}|=\pm 1$.

证：$\mathbf{A}$ 为正交矩阵 $\Rightarrow \mathbf{A}$为实方阵且$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E} \Rightarrow |\mathbf{A}^T\mathbf{A}|=|\mathbf{E}| \Rightarrow |\mathbf{A}^T|\cdot|\mathbf{A}|=1 \Rightarrow |\mathbf{A}|^2=1 \Rightarrow |\mathbf{A}|=\pm 1$

5. **定理 7-4** 实方阵 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\mathbf{A}$ 的列向量组为标准正交向量组.

【注：该定理刻画了正交矩阵的列向量组所具有的特性，这在正交矩阵的研究中起着非常重要的作用】

证明 设 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$为 $\mathbf{A}$ 的按列分块矩阵，则

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T\\ \mathbf{a}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n^T\end{bmatrix}[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_n\\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_n\end{bmatrix}$$

实方阵$\mathbf{A}$为正交矩阵$\Leftrightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{E}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T\mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_i = 1 \\ i \neq j\text{时}\mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|\mathbf{a}_i\| = 1 \\ i \neq j\text{时}\mathbf{a}_i\text{与}\mathbf{a}_j\text{正交} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$是标准正交向量组.

6. 定义 7-11 和定理 7-4 在正交矩阵的研究中起着非常重要的作用。

例 7-8 设$\mathbf{a}$为n元单位向量，$\mathbf{A}=\mathbf{E}-k\mathbf{a}\mathbf{a}^T$是正交矩阵,求$k$.

解 直接计算可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{A} &= (\mathbf{E}-k\mathbf{a}\mathbf{a}^T)(\mathbf{E}-k\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \\ &= \mathbf{E}-2k\mathbf{a}\mathbf{a}^T+k^2(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)(\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \\ &= \mathbf{E}-2k\mathbf{a}\mathbf{a}^T+k^2\mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{a}^T \\ &= \mathbf{E}-2k\mathbf{a}\mathbf{a}^T+k^2\mathbf{a}\|\mathbf{a}\|^2\mathbf{a}^T \end{aligned}$$

由$\mathbf{a}$是单位向量可知，$\|\mathbf{a}\|=1$,所以

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}+(k^2-2k)\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

又因为$\mathbf{A}$为正交矩阵，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$，所以 $k^2-2k=0$.

解得 $k=0$或 2.

例 7-9 已知$\mathbf{A}=a\begin{bmatrix} b & 8 & 4 \\ 8 & b & 4 \\ 4 & 4 & c \end{bmatrix}$为正交矩阵，求$a,b,c$.

解 由定理 7-4 可知，$\mathbf{A}$的列向量组为标准正交向量组.

由$\mathbf{A}$的列向量两两正交，可得$\begin{cases} 8b+8b+16=0 \\ 32+4b+4c=0 \end{cases}$,

解得 $b=-1, c=-7$.

由于$\mathbf{A}$的列向量为单位向量，所以通过$\mathbf{A}$的第一列的长度等于 1 可得

$$\sqrt{(-a)^2+(8a)^2+(4a)^2}=1$$

解得$a=\pm\dfrac{1}{9}$.