第 2 章 逻辑代数基础

Logic Algebra

§2.1 逻辑代数运算法则

Operations of Logic Algebra

§2.2 逻辑函数的标准形式

Standard Forms of Logic Function

§2.3 逻辑函数的公式化简

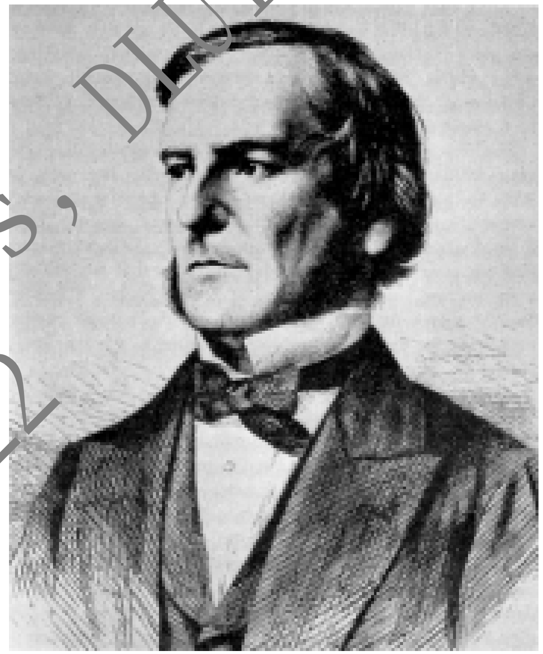
Simplification Using Logic Algebra

§2.4 卡诺图化简逻辑函数

Simplification Using K-Maps

逻辑代数描述了二值变量的运算规律，它是英国数学家布尔于1854年提出的，也称布尔代数。

逻辑代数是按逻辑规律进行运算的代数，是分析和设计数字逻辑电路不可缺少的基础数学工具。



George Boole，1815～1864

数字电路中的信号变量都为二值变量，只有0、1两种取值。

逻辑代数与算术不同。

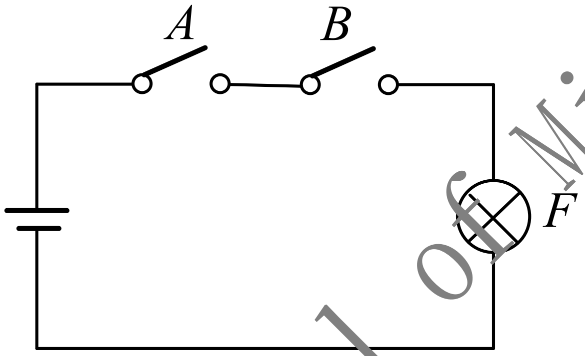
§2.1　逻辑代数运算法则

Operations of Logic Algebra

1. 基本逻辑运算及逻辑门

(1) 与 AND

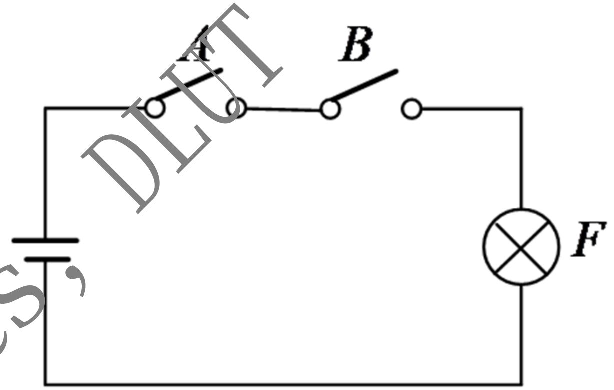
欲使某事件成立，必须所有条件具备，缺一不可



$$\text{开关 } A,B \begin{cases} 1 & \text{闭合} \\ 0 & \text{断开} \end{cases} \qquad F = \begin{cases} 1 & \text{亮} \\ 0 & \text{暗} \end{cases}$$

两个开关串联

只有当 A 和 B 都闭合 (逻辑 1), 灯 (F) 才亮(逻辑 1)



与逻辑真值表

Truth Table

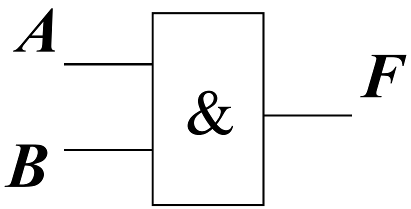
A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

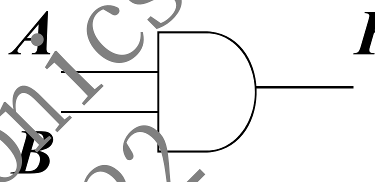
输入的所有可能取值按二进制数大小排列**在左**

对应的**输出**列**在右**

与功能描述：输入只要有低，输出为低；
输入都为高时，输出为高。

符号及表达式





IEC标准符号

International Electrotechnical Commitee

ANSI/IEEE 标准符号

American National Standard Institute / Institute of Electrical and Electronics Engineers

最多 8 输入端

表达式: $F = A \cdot B = AB$

(A and B) (逻辑乘)

与运算 AND operation

$0 \bullet 0 = 0$

$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$

$1 \bullet 1 = 1$

$A \bullet 0 = 0$

$A \bullet 1 = A$

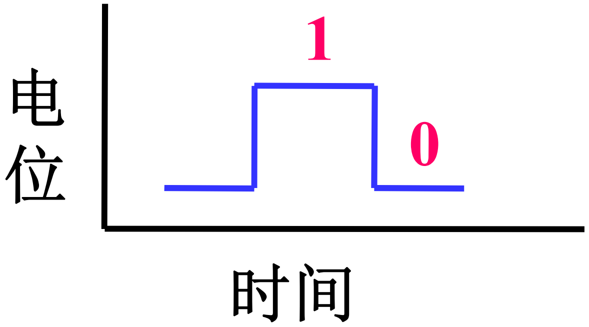
$A \bullet A = A$

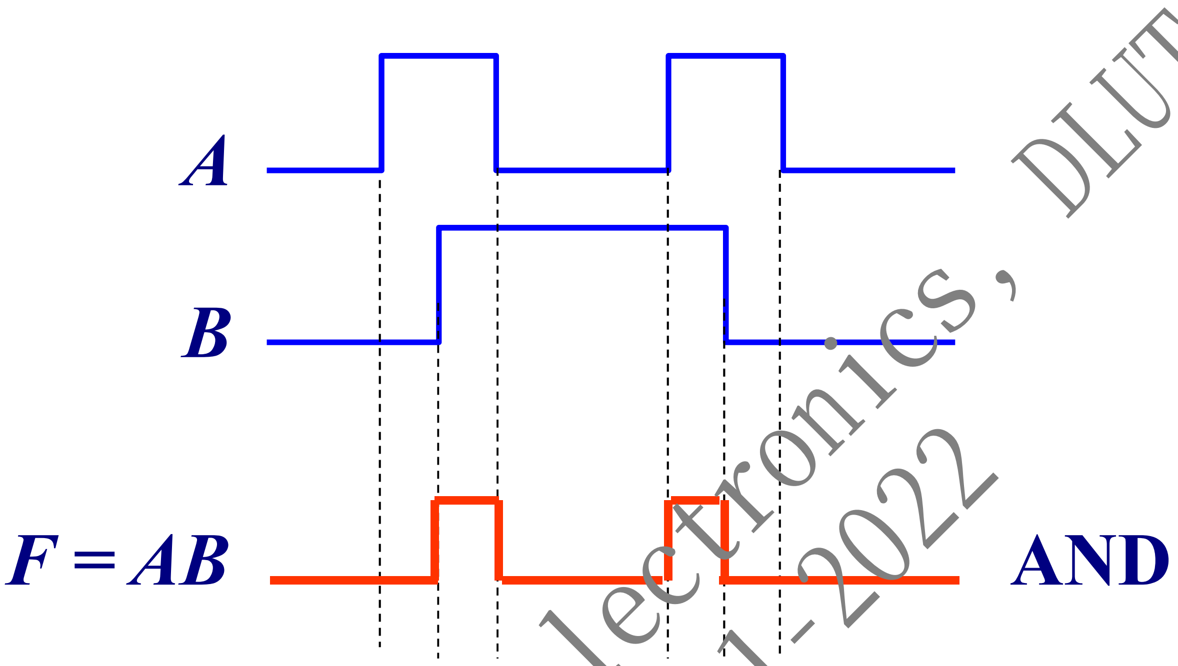
$A \bullet \overline{A} = 0$

A: 变量输入

波形图，时序图

Output waveforms
Timing diagrams





输出波形必须对应输入波形

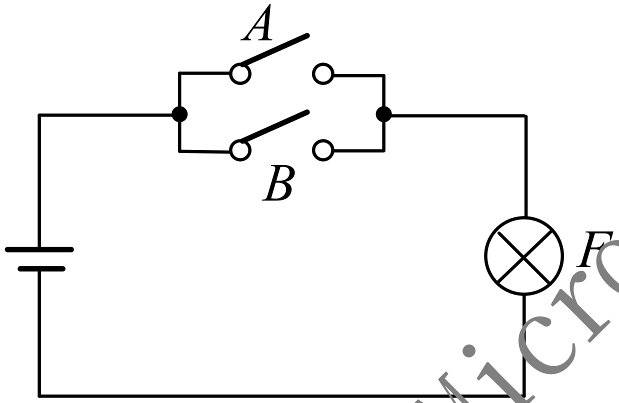
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

输入只要有低，输出为低；

输入都为高时，输出为高。

(2) 或 OR

使某事件成立的条件**有一即可**，多也不限



两个开关 (*A*, *B*) 并联

任何一个开关闭合, 灯 *F* 亮。

真值表

A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

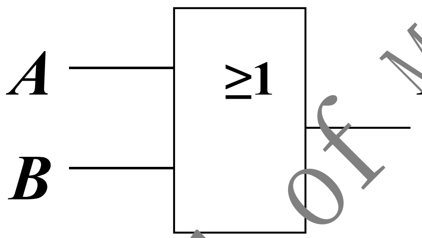
$$\text{开关 } A,B \begin{cases} 1 & \text{闭合} \\ 0 & \text{断开} \end{cases}$$

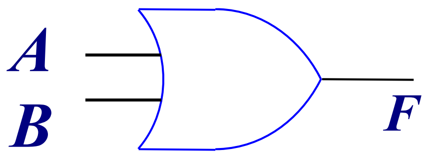
或功能描述

只要有一个输入为高电平1，输出就为高电平1

只有输入全为低电平 0 时，输出才为低电平0

或门符号及表达式





8 输入

$F = A+B$ **逻辑加**

或运算

$0+0=0$

$0+1=1$

$1+1=1$

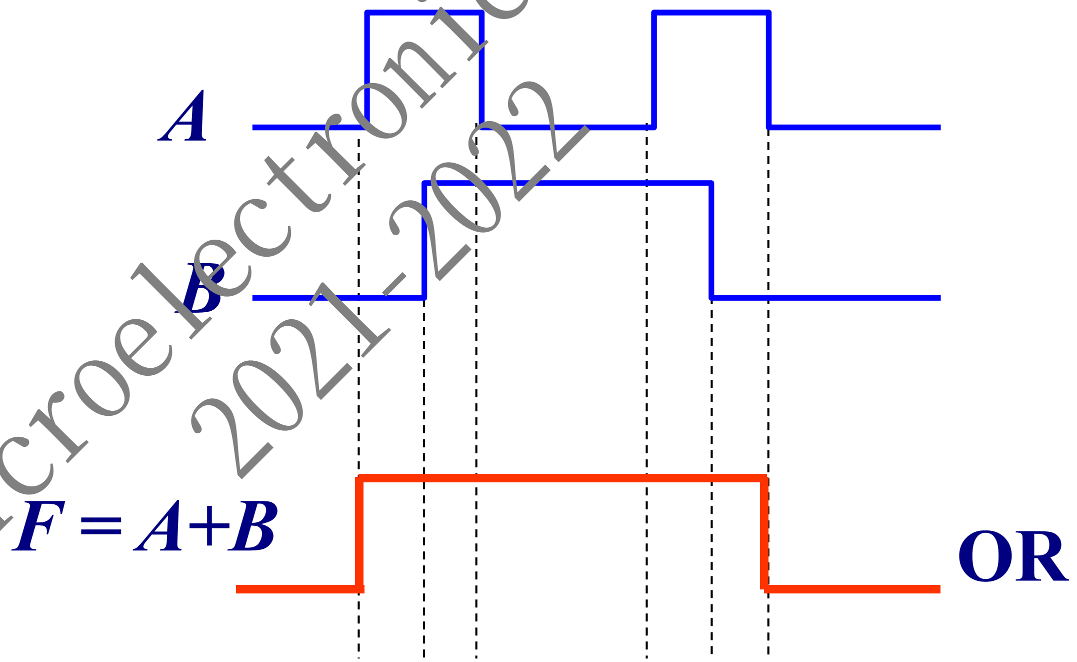
$A+0=A$

$A+1=1$

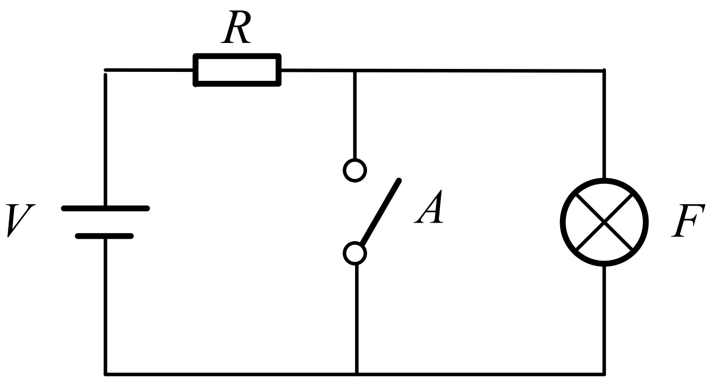
$A+A=A$

$A+\overline{A}=1$

波形图



(3) 非 NOT



如果 A 闭合，灯 F 灭。

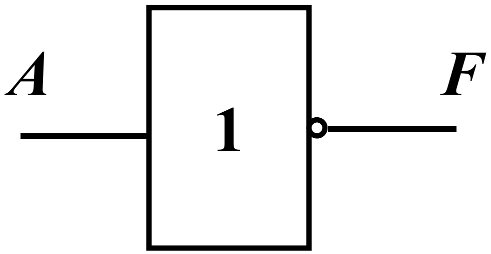
真值表

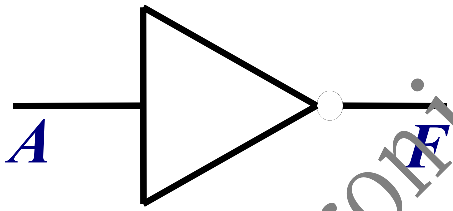
A	F
0	1
1	0

非功能描述

输出与输入波形相反，产生**反向**输出波形。

非门符号及表达式





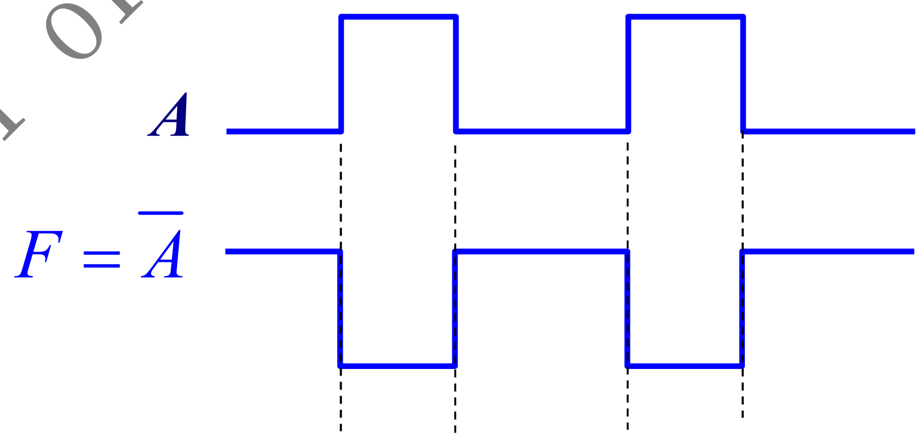
$$F=\overline{A}$$

非运算

$$\overline{0}=1 \qquad \overline{1}=0$$

$$\overline{\overline{A}}=A \qquad A\cdot\overline{A}=0 \qquad A+\overline{A}=1$$

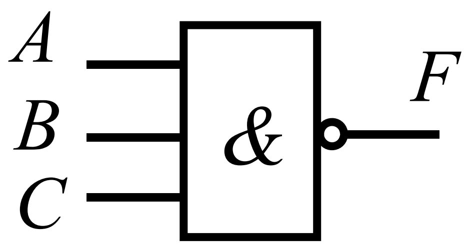
波形图

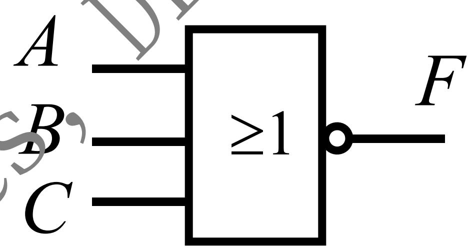
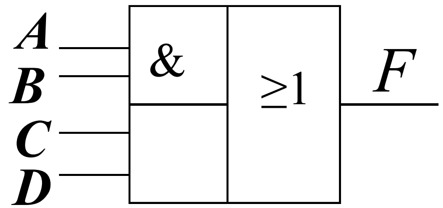
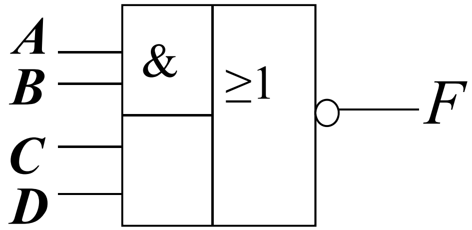


NOT

2. 复合逻辑运算及逻辑门

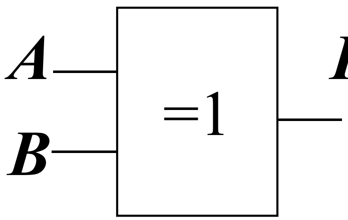
“与”、“或”、“非”是三种基本的逻辑关系，任何其它的逻辑关系都可以以它们为基础表示。

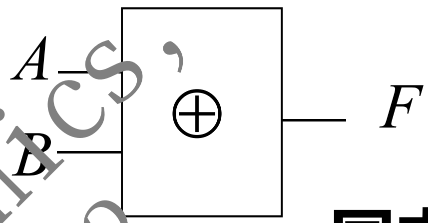
与非门(NAND) 条件A、B、C都具备，则F不发生	$F=\overline{A\bullet B\bullet C}$	

或非门(NOR) 条件A、B、C均不具备，则F发生	$F=\overline{A+B+C}$	
与或门 (AND-OR)	$F=AB+CD$	
与或非门 (AND-OR-NOT)	$F=\overline{AB+CD}$	

异或 (XOR： Exclusive - OR)

$$F = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$





国内使用

真值表

A	B	F(XOR)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

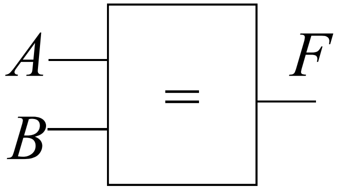
输入端只有2 个且必须 2 个，两输入相异时输出高电平

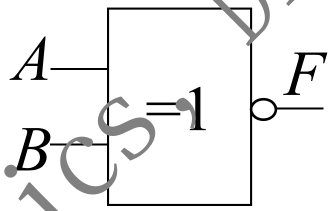
功能：

比较(判断)两输入是否相异

$$\begin{cases} \text{Yes: 1 (肯定)} \\ \text{No: 0 (否定)} \end{cases}$$

同或 (XNOR： Exclusive-NOR)





$$F = A \odot B = AB + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$F = \overline{A \oplus B}$$

真值表

A	B	F (XOR)	F(XNOR)
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

同或门2输入，两输入相同时输出高电平

输出与异或门相反

功能：比较(判断)两输入是否相同 $\begin{cases} \text{Yes: } 1 \\ \text{No: } 0 \end{cases}$

逻辑关系——简单记忆

与逻辑：逻辑乘 $F=A \bullet B$ “有0则0”

或逻辑：逻辑加 $F=A+B$ “有1则1”

非逻辑：逻辑非 $F=\overline{A}$ “求反”

与非逻辑 $F=\overline{A \bullet B}$ “全高出低、一低出高”

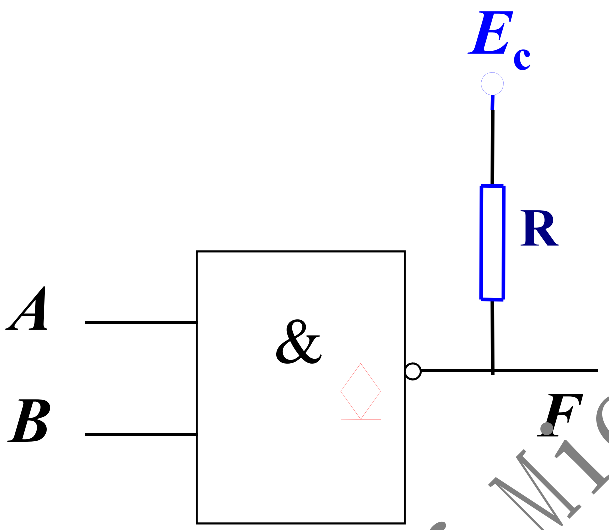
或非逻辑 $F=\overline{A+B}$ “全低出高、一高出低”

异或逻辑 $P=A \oplus B=\overline{A}B+A\overline{B}$ “不同为1”

同或逻辑 $P=A \odot B=\overline{A}\,\overline{B}+AB$ “相同为1”

集电极开路与非门

(OC：Open collector NAND Gate)



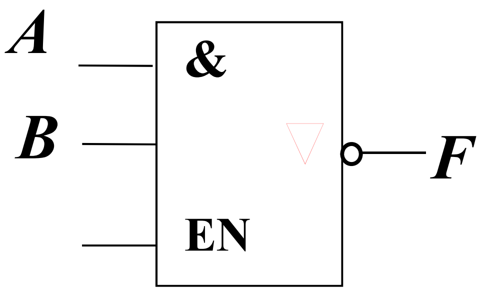
实现"线与逻辑"

$$F = \overline{AB}$$

三态门 (TSL：Three State Logic)

Tristates：1, 0, Hi-Z (高阻态)
impedance

1) 高电平有效 (Active High)

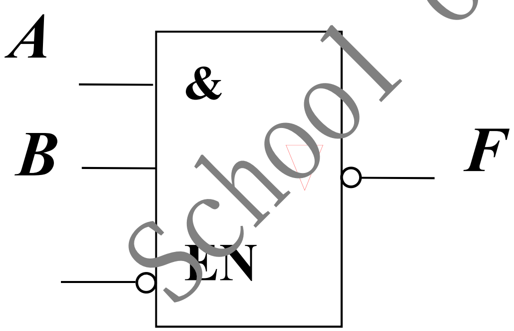


EN: 使能输入端 enable input

EN=1, $F=\overline{AB}$ (与非门)

EN=0, F = Hi-Z (高阻抗)

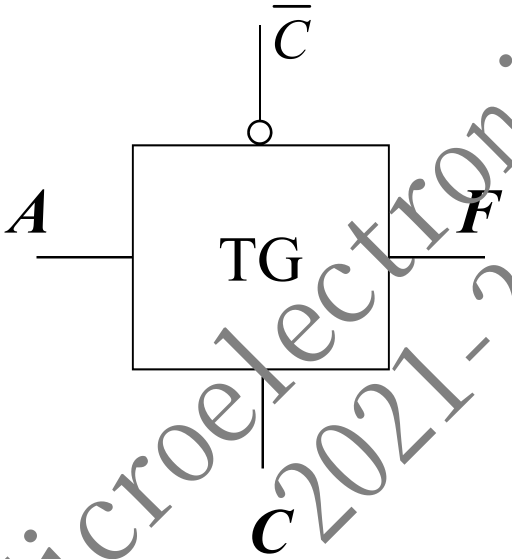
2) 低电平有效 (Active Low)



EN=0, $F=\overline{AB}$ (与非门)

EN=1, F = Hi-Z

传输门（TG： Transmission Gate)



C： Control

C=1, $\overline{\mathrm{C}} = 0$ ，F=A **(开关合上信号传过)**

C=0, $\overline{\mathrm{C}} = 1$ ， **(开关断开)**

3. 逻辑代数运算基本定律

A的反向运算为 $\overline{A}$	或运算 逻辑加 “+”	与运算 逻辑乘 “•”
$\overline{0}=1$	$0+0=0$	$0\cdot 0=0$
$\overline{1}=0$	$0+1=1$	$0\cdot 1=0$
	$1+0=1$	$1\cdot 0=0$
	$1+1=1$	$1\cdot 1=1$

每一个定律都有两种形式：逻辑加和逻辑乘。这两种形式互为“**对偶式**”(Dual)。

		逻辑加 Addition	逻辑乘 Multiplication	
1)	定律 1	A+B=B+A;	AB=BA	(交换律)
2)	定律 2	A+(B+C)=(A+B)+C;	A(BC)=(AB)C	(结合律)
3)	定律 3	A+(BC)=(A+B)(A+C);	A(B+C)=AB+AC	(分配律)
4)	定律 4	A+0=A, A+1=1;	$A\cdot 0=0$, $A\cdot 1=A$	(0-1律)
5)	定律 5	$A+\overline{A}=1$;	$A\cdot\overline{A}=0$	(互补律)
6)	定律 6	A+A=A;	A·A=A	(重叠律)
7)	定律 7	$\overline{\overline{A}}=A$		(还原律)

8) De. Morgan Theorum $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$ (摩根定理)

推论 $\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$; $\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

逻辑加 Addition **逻辑乘 Multiplication**

1) (交换律)

2))C (结合律)

3) B+AC (分配律)

4) ·1=A (0-1律)

5) (互补律)

6) (重叠律)

定律 3 $A+(BC)=(A+B)(A+C)$

$=A+AB+AC+BC$

$=A(1+B)+AC+BC$

$=A+AC+BC$

$=A(1+C)+BC$

$=A+BC$

7) **定律 7** $\overline{\overline{A}} = A$ (还原律)

8) De. Morgan Theorum $\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$ (摩根定理)

推论 $\overline{A+B+C} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$; $\overline{ABC} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

4. 逻辑代数运算基本规则

1) 代入规则

等式两侧某一变量都用一个逻辑函数代入，等式仍成立

例: 摩根定理

若 $\overline{AX} = \overline{A} + \overline{X}$ $X = BC$

左侧: $\overline{AX} = \overline{ABC}$ 右侧: $\overline{A} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

有 $\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ 摩根定理推论

2) 反演规则 Complementary

将一个函数表达式 F 中:

注意: 运算顺序不变

- 所有的“与(·)”换成“或(+)”,“或(+)”换成“与(·)”;
- “0”换成“1”,“1”换成“0”;
- 原变量换成反变量,反变量换成原变量,

则所得到的逻辑函数即 F 的反函数, 表达式为 $\overline{F}$

如果 F 成立, $\overline{F}$ 也成立

例 已知 $F = A(B+\overline{C})+CD$, 求 $\overline{F}$

解: $\overline{F} = (\overline{A} + \overline{B}C)(\overline{C}+\overline{D})$

例 已知 $F = A(B+\overline{C}) + CD$，**求** $\overline{F}$

用摩根定理求解

解： $\overline{F} = \overline{A(B+\overline{C}) + CD}$

$$= \overline{A(B+\overline{C})} \bullet \overline{CD}$$

$$= \left(\overline{A} + \overline{(B+\overline{C})}\right) \bullet \left(\overline{C} + \overline{D}\right)$$

$$= \left(\overline{A} + \overline{B} \bullet \overline{\overline{C}}\right) \bullet \left(\overline{C} + \overline{D}\right)$$

$$= \left(\overline{A} + \overline{B}C\right)\left(\overline{C} + \overline{D}\right)$$

3) 对偶规则 Duality

若 F 为一逻辑函数，如果将该函数表达式中所有

$$\begin{cases} \text{“与”} \ (\cdot) \Longleftrightarrow \text{“或”} \ (+) \\ \text{“0”} \Longleftrightarrow \text{“1”} \end{cases}$$

则所得到的逻辑函数即F的对偶式，表达式为 F'

如果 F 成立，F' 也成立

例： 已知 $F=A(B+\overline{C})+CD$ ，求 F’

解： $F' = (A + \overline{BC})(C+D)$

$$\overline{F} = (\overline{A}+\overline{B}C)(\overline{C}+\overline{D})$$

用途：化简 $F=\left(A+B+\overline{C}\right)\left(A+B\right)\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)$

$$F'=AB\overline{C}+AB+A\overline{B}\,\overline{C}$$

化简后再对偶一次，转换为*F*

4. 常用公式

1) $A+AB=A$;　$A(A+B)=A$　**吸收律**

证: $A+AB = A(1+B) = A$

2) $AB + A\overline{B} = A$;　$(A+B)(A+\overline{B}) = A$

证: $AB + A\overline{B} = A(B+\overline{B}) = A$

3) $A+\overline{A}B = A+B$;　$A(\overline{A}+B)=AB$

证: 分配律 $A+BC=(A+B)(A+C)$

$$A + \overline{A}B = (A+\overline{A})(A+B) = A + B$$

反变量吸收律

4) $AB+\bar{A}C+BC = AB+\bar{A}C$;

$$(A+B)(\bar{A}+C)(B+C) = (A+B)(\bar{A}+C)$$

冗余定理

证:

$$AB+\bar{A}C+BC = AB+\bar{A}C+(A+\bar{A})BC = AB+\bar{A}C+ABC+\bar{A}BC$$

$$= AB+\bar{A}C$$

推论: $AB+\bar{A}C+BCDE = AB+\bar{A}C$

5) 异或公式 (XOR) $A\oplus B = \overline{A\odot B}$

证: $\overline{AB+\bar{A}\bar{B}} = \bar{A}B+A\bar{B}$

$A\oplus A=0$, $A\oplus\bar{A}=1$, $A\oplus 0=A$, $A\oplus 1=\bar{A}$