第十一讲
柱函数（三）

北京大学物理学院

2007年春

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - ±1/2阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - $\pm 1/2$阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - $\pm 1/2$阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§17.7 — 17.9
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§11.4, 11.5
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§13.3, 13.4

与柱函数有关的函数

讨论两种特殊情形下的柱函数

- 特殊宗量的Bessel函数，例如宗量为纯虚数的Bessel函数
- 特殊阶的Bessel函数，例如阶为半奇数的Bessel函数

与柱函数有关的函数

讨论两种特殊情形下的柱函数

1. 特殊宗量的Bessel函数，例如宗量为纯虚数的Bessel函数
2. 特殊阶的Bessel函数，例如阶为半奇数的Bessel函数

与柱函数有关的函数

讨论两种特殊情形下的柱函数

1. 特殊宗量的Bessel函数，例如宗量为纯虚数的Bessel函数
2. 特殊阶的Bessel函数，例如阶为半奇数的Bessel函数

与柱函数有关的函数

讨论两种特殊情形下的柱函数

1. 特殊宗量的Bessel函数，例如宗量为纯虚数的Bessel函数
2. 特殊阶的Bessel函数，例如阶为半奇数的Bessel函数

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - $\pm 1/2$阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

背景

圆柱体内的Laplace方程边值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

$$u\Big|_{z=0}=0 \qquad u\Big|_{z=h}=0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a}=f(\phi,z)$$

分离变量，$u(r,\phi,z)=R(r)\,\Phi(\phi)\,Z(z)$，就会得到

背景

圆柱体内的Laplace方程边值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

$$u\Big|_{z=0}=0 \qquad u\Big|_{z=h}=0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a}=f(\phi,z)$$

分离变量，$u(r,\phi,z)=R(r)\,\Phi(\phi)\,Z(z)$，就会得到

背景

$$\Phi''(\phi) + \mu\Phi(\phi) = 0$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0$$
$$Z(0) = 0 \qquad Z(h) = 0$$

以及

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left(-\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0$$

背景

$$\Phi''(\phi)+\mu\Phi(\phi)=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)$$
$$\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

$\Rightarrow$

本征值 $\mu=m^2$

本征函数 $\Phi_m(\phi)=\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}$

$$m=0,1,2,\cdots$$

$$Z''(z)+\lambda Z(z)=0$$
$$Z(0)=0$$
$$Z(h)=0$$

$\Rightarrow$

本征值 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2$

本征函数 $Z_n(z)=\sin\frac{n\pi}{h}z$

$$n=1,2,3,\cdots$$

背景

$$\Phi''(\phi)+\mu\Phi(\phi)=0$$
$$\Phi(0)=\Phi(2\pi)$$
$$\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

$\Rightarrow$

本征值 $\mu = m^2$

本征函数 $\Phi_m(\phi)=\begin{cases}\cos m\phi \\ \sin m\phi\end{cases}$

$$m=0,1,2,\cdots$$

$$Z''(z)+\lambda Z(z)=0$$
$$Z(0)=0$$
$$Z(h)=0$$

$\Rightarrow$

本征值 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2$

本征函数 $Z_n(z)=\sin\frac{n\pi}{h}z$

$$n=1,2,3,\cdots$$

遗留的问题

求解常微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2-\frac{m^2}{r^2}\right]R=0$$

- 令$k^2=-(n\pi/h)^2$，可以预料，作变换$z=kr$，能就化为Bessel方程
- 现在分两步走：先令$x=(n\pi/h)r$，然后再作变换$z=\mathrm{i}x$

遗留的问题

求解常微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2-\frac{m^2}{r^2}\right]R=0$$

- 令$k^2=-(n\pi/h)^2$，可以预料，作变换$z=kr$，能就化为Bessel方程
- 现在分两步走：先令$x=(n\pi/h)r$，然后再作变换$z=\mathrm{i}x$

遗留的问题

求解常微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2-\frac{m^2}{r^2}\right]R=0$$

- 作变换$x=(n\pi/h)r$, $y(x)=R(r)$，方程变为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-1-\frac{m^2}{x^2}\right)y(x)=0$$

- 再作变换$z=\mathrm{i}x, w(z)=y(x)$，化为Bessel方程

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)w(z)=0$$

遗留的问题

求解常微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2-\frac{m^2}{r^2}\right]R=0$$

- 作变换$x=(n\pi/h)r$, $y(x)=R(r)$，方程变为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-1-\frac{m^2}{x^2}\right)y(x)=0$$

- 再作变换$z=\mathrm{i}x, w(z)=y(x)$，化为Bessel方程

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)w(z)=0$$

- $\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)w(z)=0$的解是

$$w(z)=C\mathrm{J}_m(z)+D\mathrm{N}_m(z)$$

- $\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-1-\frac{m^2}{x^2}\right)y(x)=0$的解是

$$y(x)=C\mathrm{J}_m(\mathrm{i}x)+D\mathrm{N}_m(\mathrm{i}x)$$

- $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2-\frac{m^2}{r^2}\right]R=0$的解是

$$R(r)=C\mathrm{J}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right)+D\mathrm{N}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right)$$

- $$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)w(z)=0$$的解是

$$w(z)=C\mathrm{J}_m(z)+D\mathrm{N}_m(z)$$

- $$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-1-\frac{m^2}{x^2}\right)y(x)=0$$的解是

$$y(x)=C\mathrm{J}_m(\mathrm{i}x)+D\mathrm{N}_m(\mathrm{i}x)$$

- $$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2-\frac{m^2}{r^2}\right]R=0$$的解是

$$R(r)=C\mathrm{J}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right)+D\mathrm{N}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right)$$

- $$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)w(z)=0$$的解是
$$w(z)=C\mathrm{J}_m(z)+D\mathrm{N}_m(z)$$
- $$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-1-\frac{m^2}{x^2}\right)y(x)=0$$的解是
$$y(x)=C\mathrm{J}_m(\mathrm{i}x)+D\mathrm{N}_m(\mathrm{i}x)$$
- $$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2-\frac{m^2}{r^2}\right]R=0$$的解是
$$R(r)=C\mathrm{J}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right)+D\mathrm{N}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right)$$

- 因为r是实变量，故得到的函数

$$\mathrm{J}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right) \qquad \mathrm{N}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right)$$

$$\mathrm{J}_m(\mathrm{i}x) \qquad \mathrm{N}_m(\mathrm{i}x)$$

都是以纯虚数为宗量的柱函数

- 因为当x为纯虚数时，函数值也是复数

$$\mathrm{J}_\nu(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right)^{2k+\nu}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

- 因为r是实变量，故得到的函数

$$\mathrm{J}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right) \qquad \mathrm{N}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right)$$

$$\mathrm{J}_m(\mathrm{i}x) \qquad \mathrm{N}_m(\mathrm{i}x)$$

都是以纯虚数为宗量的柱函数

- 因为当x为纯虚数时，函数值也是复数

$$\mathrm{J}_\nu(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right)^{2k+\nu}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - ±1/2阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

定义

$$\mathrm{I}_\nu(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu/2}\mathrm{J}_\nu(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

称为第一类虚宗量Bessel函数

相应地，方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(-1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0$$

称为虚宗量Bessel方程

定义

$$\mathrm{I}_\nu(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu/2}\mathrm{J}_\nu\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

称为第一类虚宗量Bessel函数

相应地，方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(-1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0$$

称为虚宗量Bessel方程

当$\nu\neq$整数时，虚宗量Bessel方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0$$

的解$\mathrm{I}_{\pm\nu}(x)$线性无关

当$\nu=$整数n时，$\mathrm{I}_{\pm n}(x)$线性相关

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{-n}(x)&=\mathrm{i}^n\mathrm{J}_{-n}(\mathrm{i}x)=(-\mathrm{i})^n\mathrm{J}_n(x)\\&=\mathrm{i}^{-n}\mathrm{J}_n(x)=\mathrm{I}_n(x)\end{aligned}$$

当$\nu\neq$整数时，虚宗量Bessel方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0$$

的解$\mathrm{I}_{\pm\nu}(x)$线性无关

当$\nu=$整数n时，$\mathrm{I}_{\pm n}(x)$线性相关

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{-n}(x)&=\mathrm{i}^n\mathrm{J}_{-n}(\mathrm{i}x)=(-\mathrm{i})^n\mathrm{J}_n(x)\\&=\mathrm{i}^{-n}\mathrm{J}_n(x)=\mathrm{I}_n(x)\end{aligned}$$

虚宗量Bessel方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0$$

的第二解也可取为

第二类虚宗量Bessel函数(McDonald函数)

$$\mathrm{K}_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(x)-\mathrm{I}_\nu(x)\Big]$$

$\mathrm{K}_n(x)$仍然有意义，且与$\mathrm{I}_n(x)$线性无关

$$\mathrm{K}_n(x)=\lim_{\nu\to n}\mathrm{K}_\nu(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(x)-\mathrm{I}_\nu(x)\Big]$$

虚宗量Bessel方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0$$

的第二解也可取为

第二类虚宗量Bessel函数(McDonald函数)

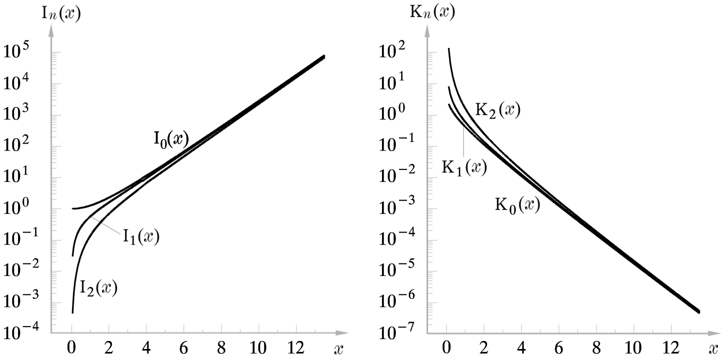
$$\mathsf{K}_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big[\mathsf{I}_{-\nu}(x)-\mathsf{I}_\nu(x)\Big]$$

$\mathsf{K}_n(x)$仍然有意义，且与$\mathsf{I}_n(x)$线性无关

$$\mathsf{K}_n(x)=\lim_{\nu\to n}\mathsf{K}_\nu(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big[\mathsf{I}_{-\nu}(x)-\mathsf{I}_\nu(x)\Big]$$

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_n(x) &= \lim_{\nu\to n}\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(x)-\mathrm{I}_\nu(x)\Big]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-)^k\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\\ &\quad+(-)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(n+k)!}\Big[\ln\frac{x}{2}\\ &\quad-\frac{1}{2}\psi(n+k+1)-\frac{1}{2}\psi(k+1)\Big]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\end{aligned}$$

这里仍约定，当$n=0$时，应去掉右端第一项的有限和



虚宗量Bessel函数$\mathrm{I}_n(x)$和$\mathrm{K}_n(x)$

注意函数在$x \to 0$及$x \to \infty$时的渐近行为

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - ±1/2阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

虚宗量Bessel函数的渐近行为

$x \rightarrow 0$时 （约定$\nu \geq 0$）

$\mathrm{I}_\nu(x)$有界　　　$\mathrm{K}_\nu(x)$无界

$x \rightarrow \infty$时

$$\mathrm{I}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\mathrm{e}^{x} \qquad \mathrm{K}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{e}^{-x}$$

在实用中，常常根据这些渐近行为挑选出所需要的解

虚宗量Bessel函数的渐近行为

$x \to 0$时　　（约定$\nu \geq 0$）

$\mathrm{I}_\nu(x)$有界　　$\mathrm{K}_\nu(x)$无界

$x \to \infty$时

$$\mathrm{I}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\mathrm{e}^x \qquad \mathrm{K}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{e}^{-x}$$

在实用中，常常根据这些渐近行为挑选出所需要的解

虚宗量Bessel函数的渐近行为

$x \longrightarrow 0$时 （约定$\nu \geq 0$）

$\mathsf{I}_\nu(x)$有界　　　　$\mathsf{K}_\nu(x)$无界

$x \longrightarrow \infty$时

$$\mathsf{I}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\mathsf{e}^{x} \qquad \mathsf{K}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathsf{e}^{-x}$$

在实用中，常常根据这些渐近行为挑选出所需要的解

例如，圆柱体内的Laplace方程边值问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}$$

$$u\Big|_{z=0}=0 \qquad u\Big|_{z=h}=0$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad u\Big|_{r=a}=f(\phi,z)$$

的一般解就是

$$u_{mn}(r,\phi,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big[(A_{mn}\cos m\phi+B_{mn}\sin m\phi) \times \mathrm{I}_m\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\sin\frac{n\pi}{h}z\Big]$$

说明

- 以上定义的虚宗量Bessel函数，纯粹是在默认x为实数的条件下引进的
- 这种限制条件并不是必要的．完全可以把$\mathrm{I}_\nu(x)$的定义扩充到带有割线的复平面$|\arg x| < \pi$上
- 相应地，$\mathrm{K}_\nu(x)$的定义也就扩充到了同一区域中

说明

- 以上定义的虚宗量Bessel函数，纯粹是在默认x为实数的条件下引进的
- 这种限制条件并不是必要的．完全可以把$\mathrm{I}_\nu(x)$的定义扩充到带有割线的复平面$|\arg x| < \pi$上
- 相应地，$\mathrm{K}_\nu(x)$的定义也就扩充到了同一区域中

说明

- 以上定义的虚宗量Bessel函数，纯粹是在默认x为实数的条件下引进的
- 这种限制条件并不是必要的．完全可以把$\mathsf{I}_\nu(x)$的定义扩充到带有割线的复平面$|\arg x| < \pi$上
- 相应地，$\mathsf{K}_\nu(x)$的定义也就扩充到了同一区域中

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - $\pm 1/2$阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

$\mathrm{J}_{1/2}(z)$

先讨论最特殊的半奇数阶Bessel函数

$$\mathrm{J}_{1/2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

所以，$\mathrm{J}_{1/2}(z)$是初等函数

$\mathrm{J}_{1/2}(z)$

先讨论最特殊的半奇数阶Bessel函数

$$\mathrm{J}_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$

所以，$\mathrm{J}_{1/2}(z)$是初等函数

$\mathrm{J}_{1/2}(z)$

先讨论最特殊的半奇数阶Bessel函数

$$\mathrm{J}_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$

所以，$\mathrm{J}_{1/2}(z)$是初等函数

$J_{1/2}(z)$

先讨论最特殊的半奇数阶Bessel函数

$$J_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$

所以，$J_{1/2}(z)$是初等函数

$\mathrm{J}_{-1/2}(z)$

将递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z)\right] = z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$

改写为

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z) = z^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$

$\mathrm{J}_{-1/2}(z)$

因此

$$z^{-1/2}\mathrm{J}_{-1/2} = \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) z^{1/2}\mathrm{J}_{1/2}(z)$$

$$= \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos z}{z}$$

所以$\mathrm{J}_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$也是初等函数

$J_{-1/2}(z)$

因此

$$z^{-1/2}J_{-1/2} = \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right) z^{1/2}J_{1/2}(z)$$

$$= \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos z}{z}$$

所以$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$也是初等函数

$\mathrm{J}_{-1/2}(z)$

因此

$$z^{-1/2}\mathrm{J}_{-1/2} = \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) z^{1/2}\mathrm{J}_{1/2}(z)$$
$$= \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos z}{z}$$

所以$\mathrm{J}_{-1/2}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\cos z$也是初等函数

$\mathrm{J}_{-1/2}(z)$

因此

$$
\begin{aligned}
z^{-1/2}\mathrm{J}_{-1/2} &= \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) z^{1/2}\mathrm{J}_{1/2}(z) \\
&= \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos z}{z}
\end{aligned}
$$

所以$\mathrm{J}_{-1/2}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\cos z$也是初等函数

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - $\pm 1/2$阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

$\mathrm{J}_{-n+1/2}(z)$

反复利用递推关系

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) z^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(z) = z^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(z)$$

就能得到

$$z^{-n+1/2}\mathrm{J}_{-n+1/2}(z) = \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z$$

它们也全都是初等函数

$\mathsf{J}_{-n+1/2}(z)$

反复利用递推关系

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) z^{\nu}\mathsf{J}_{\nu}(z) = z^{\nu-1}\mathsf{J}_{\nu-1}(z)$$

就能得到

$$z^{-n+1/2}\mathsf{J}_{-n+1/2}(z) = \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z$$

它们也全都是初等函数

$J_{-n+1/2}(z)$

反复利用递推关系

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu-1} J_{\nu-1}(z)$$

就能得到

$$z^{-n+1/2} J_{-n+1/2}(z) = \left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z$$

它们也全都是初等函数

$\mathsf{J}_{n+1/2}(z)$

将Bessel函数的另一个递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathsf{J}_\nu(z)\right] = -z^{-\nu}\mathsf{J}_{\nu+1}(z)$$

改写为

$$-\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)z^{-\nu}\mathsf{J}_\nu(z) = z^{-\nu-1}\mathsf{J}_{\nu+1}(z)$$

$\mathrm{J}_{n+1/2}(z)$

也能得到

$$z^{-n-1/2}\mathrm{J}_{n+1/2}(z) = \left(-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin z}{z}$$

$\mathrm{J}_{n+1/2}(z)$

也能得到

$$z^{-n-1/2}\mathrm{J}_{n+1/2}(z) = \left(-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin z}{z}$$

它们也全都是初等函数

$\mathrm{J}_{n+1/2}(z)$

也能得到

$$z^{-n-1/2}\mathrm{J}_{n+1/2}(z)=\left(-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{\sin z}{z}}$$

它们也全都是初等函数

半奇数阶Neumann函数$\mathrm{N}_{n+1/2}(z)$的定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{n+1/2}(z)&=\frac{\cos(n+1/2)\pi\cdot\mathrm{J}_{n+1/2}(x)-\mathrm{J}_{-(n+1/2)}(x)}{\sin(n+1/2)\pi}\\&=(-)^{n+1}\mathrm{J}_{-(n+1/2)}(x)\end{aligned}$$

与$\mathrm{J}_{-n-1/2}(z)$线性相关

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - $\pm 1/2$阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

背景

在球坐标系下将Helmholtz方程$\nabla^2 u+k^2 u=0$分离变量时，得到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$$

- 在一般情况下$\lambda_l = l(l+1)$, $l=0,1,2,\cdots$
- $k=0$时，方程的两个线性无关解是r^l和r^{-l-1}
- $k\neq 0$时，方程的解？

背景

在球坐标系下将Helmholtz方程$\nabla^2 u+k^2 u=0$分离变量时，得到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$$

- 在一般情况下$\lambda_l=l(l+1)$, $l=0,1,2,\cdots$
- $k=0$时，方程的两个线性无关解是r^l和r^{-l-1}
- $k\neq 0$时，方程的解?

背景

在球坐标系下将Helmholtz方程$\nabla^2 u+k^2 u=0$分离变量时，得到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$$

- 在一般情况下$\lambda_l=l(l+1)$, $l=0,1,2,\cdots$
- $k=0$时，方程的两个线性无关解是r^l和r^{-l-1}
- $k\neq 0$时，方程的解?

背景

在球坐标系下将Helmholtz方程$\nabla^2 u+k^2 u=0$分离变量时，得到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$$

- 在一般情况下$\lambda_l=l(l+1)$，$l=0,1,2,\cdots$
- $k=0$时，方程的两个线性无关解是r^l和r^{-l-1}
- $k\neq 0$时，方程的解?

背景

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0 \qquad k\neq 0$$

- 可作变换$x=kr$和$y(x)=R(r)$，将方程变为

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y(x)=0$$

- 这个方程称为球Bessel方程，它的形式和Bessel方程非常相似

背景

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0 \qquad k\neq 0$$

- 可作变换$x=kr$和$y(x)=R(r)$，将方程变为

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y(x)=0$$

- 这个方程称为球Bessel方程，它的形式和Bessel方程非常相似

背景

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0 \qquad k\neq 0$$

- 可作变换$x=kr$和$y(x)=R(r)$，将方程变为

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y(x)=0$$

- 这个方程称为球Bessel方程，它的形式和Bessel方程非常相似

背景

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

- 也有两个奇点，一个是$z=0$(正则奇点)，一个是$z=\infty$(非正则奇点)，和Bessel方程相同
- 可以试图将球Bessel方程化为Bessel方程
- 在$z=0$处的指标方程为

$$\rho(\rho-1)+2\rho-l(l+1)=0$$

- 因此指标为$\rho=l, -(l+1)$

背景

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

- 也有两个奇点，一个是$z=0$(正则奇点)，一个是$z=\infty$(非正则奇点)，和Bessel方程相同
- 可以试图将球Bessel方程化为Bessel方程
- 在$z=0$处的指标方程为

$$\rho(\rho-1)+2\rho-l(l+1)=0$$

- 因此指标为$\rho=l,-(l+1)$

背景

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

- 也有两个奇点，一个是$z=0$(正则奇点)，一个是$z=\infty$(非正则奇点)，和Bessel方程相同
- 可以试图将球Bessel方程化为Bessel方程
- 在$z=0$处的指标方程为

$$\rho(\rho-1)+2\rho-l(l+1)=0$$

- 因此指标为$\rho=l,-(l+1)$

背景

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

- 也有两个奇点，一个是$z=0$(正则奇点)，一个是$z=\infty$(非正则奇点)，和Bessel方程相同
- 可以试图将球Bessel方程化为Bessel方程
- 在$z=0$处的指标方程为

$$\rho(\rho-1)+2\rho-l(l+1)=0$$

- 因此指标为$\rho=l,-(l+1)$

背景

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

- 也有两个奇点，一个是$z=0$(正则奇点)，一个是$z=\infty$(非正则奇点)，和Bessel方程相同
- 可以试图将球Bessel方程化为Bessel方程
- 在$z=0$处的指标方程为

$$\rho(\rho-1)+2\rho-l(l+1)=0$$

- 因此指标为$\rho=l,-(l+1)$

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

作变换$w(z)=v(z)/\sqrt{z}$

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

作变换$w(z)=v(z)/\sqrt{z}$

可以预料，$v(z)$的微分方程在$z=0$点的指标将是

$$\rho=\pm(l+1/2)$$

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

作变换$w(z)=v(z)/\sqrt{z}$

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{v(z)}{\sqrt{z}}\right)$$

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

作变换$w(z)=v(z)/\sqrt{z}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)&=\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{v(z)}{\sqrt{z}}\right)\\&=\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{3/2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}-\frac{1}{2}z^{1/2}v\right]\end{aligned}$$

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

作变换$w(z)=v(z)/\sqrt{z}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)&=\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{v(z)}{\sqrt{z}}\right)\\&=\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{3/2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}-\frac{1}{2}z^{1/2}v\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{z}}\left[\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}-\frac{1}{4z^2}v\right]\end{aligned}$$

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

作变换$w(z)=v(z)/\sqrt{z}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)&=\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{v(z)}{\sqrt{z}}\right)\\&=\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{3/2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}-\frac{1}{2}z^{1/2}v\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{z}}\left[\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)-\frac{1}{4z^2}v\right]\end{aligned}$$

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

作变换$w(z)=v(z)/\sqrt{z}$，方程就变为

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{(l+1/2)^2}{z^2}\right]v=0$$

正是$l+1/2$阶的Bessel方程

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

作变换$w(z)=v(z)/\sqrt{z}$，方程就变为

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{(l+1/2)^2}{z^2}\right]v=0$$

相应地，线性无关解就是

$$\mathrm{J}_{l+1/2}(z) \qquad 和 \qquad \mathrm{J}_{-(l+1/2)}(z)$$

或

$$\mathrm{J}_{l+1/2}(z) \qquad 和 \qquad \mathrm{N}_{l+1/2}(z)$$

球Bessel方程

$$\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)+\left[1-\frac{l(l+1)}{z^2}\right]w(z)=0$$

的线性无关解可取为

球Bessel函数

$$\mathrm{j}_l(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{J}_{l+1/2}(z)$$

和

球Neumann函数

$$\mathrm{n}_l(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{N}_{l+1/2}(z)$$

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - ±1/2阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

球Bessel函数

$$\mathrm{j}_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \mathrm{J}_{l+1/2}(z)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!\Gamma(n+l+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+l}$$

$$\mathrm{j}_0(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$$\mathrm{j}_1(z) = \frac{1}{z^2}\left(\sin z - z\cos z\right)$$

$$\mathrm{j}_2(z) = \frac{1}{z^3}\left[\left(3 - z^2\right)\sin z - 3z\cos z\right]$$

球Bessel函数

$$\mathrm{j}_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{J}_{l+1/2}(z)$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\Gamma(n+l+3/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+l}$$

$$\mathrm{j}_0(z) = \frac{\sin z}{z}$$
$$\mathrm{j}_1(z) = \frac{1}{z^2}\left(\sin z - z\cos z\right)$$
$$\mathrm{j}_2(z) = \frac{1}{z^3}\left[\left(3-z^2\right)\sin z - 3z\cos z\right]$$

球Neumann函数

$$\mathrm{n}_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{N}_{l+1/2}(z) = (-)^{l+1}\mathrm{J}_{-l-1/2}(z)$$
$$= (-)^{l+1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\Gamma\left(n-l+1/2\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-l-1}$$

$$\mathrm{n}_0(z) = -\frac{\cos z}{z}$$
$$\mathrm{n}_1(z) = -\frac{1}{z^2}\left(\cos z + z\sin z\right)$$
$$\mathrm{n}_2(z) = -\frac{1}{z^3}\left[\left(3-z^2\right)\cos z + 3z\sin z\right]$$

球Neumann函数

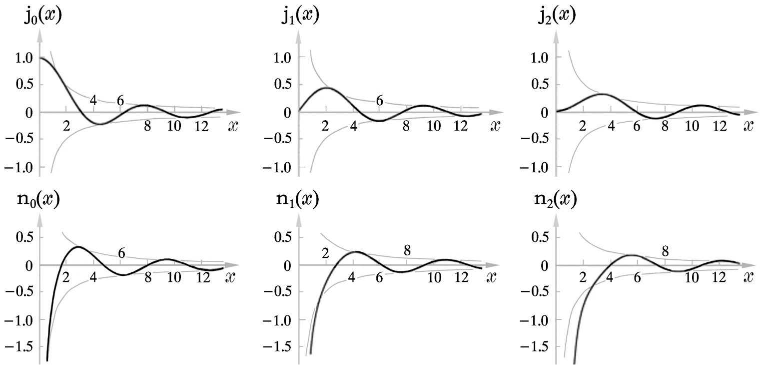
$$\mathsf{n}_l(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathsf{N}_{l+1/2}(z)=(-)^{l+1}\mathsf{J}_{-l-1/2}(z)$$

$$=(-)^{l+1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\Gamma\left(n-l+1/2\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-l-1}$$

$$\mathsf{n}_0(z)=-\frac{\cos z}{z}$$

$$\mathsf{n}_1(z)=-\frac{1}{z^2}\left(\cos z+z\sin z\right)$$

$$\mathsf{n}_2(z)=-\frac{1}{z^3}\left[\left(3-z^2\right)\cos z+3z\sin z\right]$$



球Bessel函数$\mathrm{j}_l(x)$和球Neumann函数$\mathrm{n}_l(x)$

细灰线是它们的渐近线$y = \pm 1/x$

思考题1

设有本征值问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\lambda-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(0)\text{有界}\qquad R(a)=0$$

1. 求解此本征值问题
2. 证明本征函数的正交性

思考题1

设有本征值问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\lambda-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(0)\text{有界}\qquad R(a)=0$$

1. 求解此本征值问题
2. 证明本征函数的正交性

思考题1

设有本征值问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\lambda-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0$$

$$R(0)\text{有界}\qquad R(a)=0$$

1. 求解此本征值问题
2. 证明本征函数的正交性

思考题2

求解Helmholtz方程的球内边值问题

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 < a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = f$$

提示

1. 采用球坐标系
2. 熟练地写出一般解
3. 分别讨论具有轴对称性与不具有轴对称性两种情形

思考题2

求解Helmholtz方程的球内边值问题

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 < a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = f$$

提示

1. 采用球坐标系
2. 熟练地写出一般解
3. 分别讨论具有轴对称性与不具有轴对称性两种情形

思考题2

求解Helmholtz方程的球内边值问题

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad x^2+y^2+z^2<a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = f$$

提示

1. 采用球坐标系
2. 熟练地写出一般解
3. 分别讨论具有轴对称性与不具有轴对称性两种情形

思考题2

求解Helmholtz方程的球内边值问题

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 < a^2$$

$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = f$$

提示

1. 采用球坐标系
2. 熟练地写出一般解
3. 分别讨论具有轴对称性与不具有轴对称性两种情形

思考题3

求解球内的热传导问题

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = 0 && x^2 + y^2 + z^2 < a^2,\ t > 0 \\
&u\Big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 0 && t \geq 0 \\
&u\Big|_{t=0} = f(x, y, z) && x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2
\end{aligned}
$$

提示

1. 采用球坐标系
2. 熟练地写出一般解
3. 分别讨论具有轴对称性与不具有轴对称性两种情形

思考题3

求解球内的热传导问题

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\nabla^2 u = 0 && x^2+y^2+z^2<a^2,\ t>0 \\
&u\Big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 0 && t \geq 0 \\
&u\Big|_{t=0} = f(x,y,z) && x^2+y^2+z^2 \leq a^2
\end{aligned}$$

提示

1. 采用球坐标系
2. 熟练地写出一般解
3. 分别讨论具有轴对称性与不具有轴对称性两种情形

思考题3

求解球内的热传导问题

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\nabla^2 u = 0 && x^2+y^2+z^2<a^2,\ t>0\\
&u\Big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 0 && t\geq 0\\
&u\Big|_{t=0} = f(x,y,z) && x^2+y^2+z^2\leq a^2
\end{aligned}
$$

提示

1. 采用球坐标系
2. 熟练地写出一般解
3. 分别讨论具有轴对称性与不具有轴对称性两种情形

思考题3

求解球内的热传导问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\nabla^2 u = 0 && x^2+y^2+z^2<a^2,\ t>0 \\ &u\Big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 0 && t \geq 0 \\ &u\Big|_{t=0} = f(x,y,z) && x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \end{aligned}$$

提示

1. 采用球坐标系
2. 熟练地写出一般解
3. 分别讨论具有轴对称性与不具有轴对称性两种情形

讲授要点

1. 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel方程
   - 虚宗量Bessel函数
   - 虚宗量Bessel函数的渐近行为
2. 半奇数阶Bessel函数
   - ±1/2阶Bessel函数
   - 其他情形
3. 球Bessel函数
   - 球Bessel方程的解
   - 球Bessel函数
   - 平面波按球面波展开

平面波按球面波展开

例11.1 将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

则展开系数

$$\begin{aligned}c_l(kr)&=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^n}{n!}\int_{-1}^{1}x^n\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

平面波按球面波展开

例11.1 将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

则展开系数

$$c_l(kr)=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^n}{n!}\int_{-1}^{1}x^n\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

则展开系数

$$\begin{aligned}c_l(kr)&=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^n}{n!}\int_{-1}^{1}x^n\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

根据“球函数”中得到的结果

$$c_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\int_{-1}^{1} x^{l+2n}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(l+2n)!}(kr)^{l+2n}$$

$$\times\frac{(l+2n)!}{2^{l+2n}n!}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+l+3/2)}$$

$$= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\Gamma(n+l+3/2)}\left(\frac{kr}{2}\right)^{l+2n}$$

$$= (2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)$$

根据“球函数”中得到的结果

$$c_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\int_{-1}^{1} x^{l+2n}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(l+2n)!}(kr)^{l+2n}$$

$$\times\frac{(l+2n)!}{2^{l+2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+l+3/2\right)}$$

$$= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\Gamma\left(n+l+3/2\right)}\left(\frac{kr}{2}\right)^{l+2n}$$

$$= (2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)$$

根据“球函数”中得到的结果

$$c_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\int_{-1}^{1}x^{l+2n}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(l+2n)!}(kr)^{l+2n}$$

$$\times\frac{(l+2n)!}{2^{l+2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+l+3/2)}$$

$$= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\Gamma(n+l+3/2)}\left(\frac{kr}{2}\right)^{l+2n}$$

$$= (2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)$$

根据“球函数”中得到的结果

$$c_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\int_{-1}^{1} x^{l+2n}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(l+2n)!}(kr)^{l+2n}$$

$$\times\frac{(l+2n)!}{2^{l+2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+l+3/2\right)}$$

$$= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\Gamma\left(n+l+3/2\right)}\left(\frac{kr}{2}\right)^{l+2n}$$

$$= (2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)$$

根据“球函数”中得到的结果

$$
\begin{aligned}
c_l(kr) &= \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\int_{-1}^{1}x^{l+2n}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(l+2n)!}(kr)^{l+2n} \\
&\quad\times\frac{(l+2n)!}{2^{l+2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+l+3/2\right)} \\
&= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\Gamma\left(n+l+3/2\right)}\left(\frac{kr}{2}\right)^{l+2n} \\
&= (2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)
\end{aligned}
$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

物理解释：平面波按球面波展开

- 若规定相位的时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，且$r$和$\theta$为球坐标
- 左端是向正z轴方向传播的平面波，波数为k
- 右端的$\mathrm{j}_l(kr)$则具有球面波的相位因子

$$\mathrm{j}_l(kr)\sim\frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

物理解释：平面波按球面波展开

- 若规定相位的时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，且$r$和$\theta$为球坐标

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$e^{ikr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

物理解释：平面波按球面波展开

- 若规定相位的时间因子为$e^{-i\omega t}$，且r和θ为球坐标
- 左端是向正z轴方向传播的平面波，波数为k

$$j_l(kr)\sim\frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer

$$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

物理解释：平面波按球面波展开

- 若规定相位的时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，且$r$和$\theta$为球坐标
- 左端是向正z轴方向传播的平面波，波数为k
- 右端的$\mathrm{j}_l(kr)$则具有球面波的相位因子

$$\mathrm{j}_l(kr)\sim\frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

物理解释：平面波按球面波展开

- 若规定相位的时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，且$r$和$\theta$为球坐标
- 左端是向正z轴方向传播的平面波，波数为k
- 右端的$\mathrm{j}_l(kr)$则具有球面波的相位因子

$$\mathrm{j}_l(kr)\sim\frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathrm{i}^l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

物理解释：平面波按球面波展开

- 若规定相位的时间因子为$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，且$r$和$\theta$为球坐标
- 左端是向正z轴方向传播的平面波，波数为k
- 右端的$\mathrm{j}_l(kr)$则具有球面波的相位因子

$$\mathrm{j}_l(kr)\sim\frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer (Alternative Way)

因为$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}=\mathrm{e}^{ikz}$是Helmholtz方程的解

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}=0$$

故应有

$$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

如何求出A_l?

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer (Alternative Way)

因为$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}=\mathrm{e}^{ikz}$是Helmholtz方程的解

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}=0$$

故应有

$$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

如何求出A_l?

平面波按球面波展开

例11.1 将函数$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer (Alternative Way)

因为$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}=\mathrm{e}^{ikz}$是Helmholtz方程的解

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}=0$$

故应有

$$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

如何求出A_l?

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer　(Alternative Way)

平面波按球面波展开

例11.1 将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer (Alternative Way)

$$A_l \mathrm{j}_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

平面波按球面波展开

例11.1 将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer (Alternative Way)

$$
\begin{aligned}
A_l \mathrm{j}_l(kr) &= \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2l+1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{i}kr}\mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\Big|_{-1}^{1}\right. \\
&\qquad\left. -\frac{1}{\mathrm{i}kr}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}
$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{ikr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer (Alternative Way)

$$A_l \mathrm{j}_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{ikrx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2l+1}{2}\frac{1}{ikr}\left[\mathrm{e}^{ikr} - (-)^l\mathrm{e}^{-ikr}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer (Alternative Way)

$$A_l \mathrm{j}_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2l+1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}kr}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} - (-)^l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

另一方面

$$\mathrm{j}_l(kr) = \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer (Alternative Way)

$$A_l \mathrm{j}_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2l+1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}kr}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} - (-)^l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

另一方面

$$\mathrm{j}_l(kr) = \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}kr}\left[\mathrm{i}^{-l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} - \mathrm{i}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer (Alternative Way)

$$A_l \mathrm{j}_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2l+1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}kr}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} - (-)^l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

另一方面

$$\mathrm{j}_l(kr) = \frac{1}{kr}\cos\left(kr - \frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2kr}\mathrm{i}^{-l-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} - (-)^l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

平面波按球面波展开

例11.1　将函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$按Legendre多项式展开

Answer (Alternative Way)

$$A_l \mathrm{j}_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2l+1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}kr}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} - (-)^l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

另一方面

$$\mathrm{j}_l(kr) = \frac{1}{kr}\cos\left(kr - \frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2kr}\mathrm{i}^{-l-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} - (-)^l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}\right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

所以也得到　$A_l \dfrac{\mathrm{i}^{-l-1}}{2} = \dfrac{2l+1}{2\mathrm{i}}$　即　$A_l = (2l+1)\mathrm{i}^l$