

保密★启用前

2019-2020 学年第一学期期中考试  
《工科数学数学分析基础 I》A 卷

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**学号**和考生姓名；在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生**学号**，并涂写考生**学号**信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

（以下信息考生必须认真填写）

考生学号								
考生姓名								

一、选择题：1—15 小题，每小题 3 分，共 45 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上。

1. 设  $f(x) = x \sin x$ , 则

(A) 在  $(-\infty, +\infty)$  内有界, (B) 当  $x \rightarrow +\infty$  时为无穷大,

(C) 在  $(-\infty, +\infty)$  内无界, (D) 当  $x \rightarrow \infty$  时有极限。

2. 设  $f(x)$ ,  $g(x)$  都在  $R$  上一致连续, 则  $f(g(x))$  在  $R$  上 ( )

(A) 连续且一致连续 (B) 连续但不一致连续

(C) 一致连续但不连续 (D) 无法判别

3. 设  $f(x)$  具有二阶连续导数, 且  $f'(1) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$ , 则

(A)  $f(1)$  是  $f(x)$  的极大值 (B)  $f(1)$  是  $f(x)$  的极小值

(C)  $(1, f(1))$  是曲线  $f(x)$  的拐点坐标

(D)  $f(1)$  不是  $f(x)$  的极值点,  $(1, f(1))$  不是曲线  $f(x)$  的拐点坐标

4. 设  $f(x) = x^2 \sin x$ , 则  $f^{(2019)}(0) =$

(A) 2019; (B)  $2018 \times 2019$ ; (C)  $-2018 \times 2019$ ; (D) -2019。

5. 设  $f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{x}}$  则

(A)  $x=0$  与  $x=1$  都是  $f(x)$  的第一类间断点,

(B)  $x=0$  与  $x=1$  都是  $f(x)$  的第二类间断点。

(C)  $x=0$  是  $f(x)$  的第一类间断点,  $x=1$  是  $f(x)$  的第二类间断点。

(D)  $x=0$  是  $f(x)$  的第二类间断点,  $x=1$  是  $f(x)$  的第一类间断点。

6. 设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{2n}}$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内

- (A) 处处可导 (B) 恰有 1 个不可导点,  
(C) 恰有 2 个不可导点 (D) 至少有 3 个不可导点.

7. 设函数  $y=f(x)$  具有二阶导数, 且  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ ,  $\Delta x$  为自变量  $x$  在点  $x_0$  处的增量,  $\Delta y$  与  $dy$  分别为  $f(x)$  在点  $x_0$  处对应的增量与微分, 若  $\Delta x > 0$ , 则

- (A)  $0 < dy < \Delta y$  (B)  $0 < \Delta y < dy$   
(C)  $\Delta y < dy < 0$  (D)  $dy < \Delta y < 0$

8. 曲线  $y = \frac{(1+x)^2}{4(1-x)}$

- (A) 既有垂直又有水平与斜渐近线, (B) 仅有垂直渐近线,  
(C) 只有垂直与水平渐近线, (D) 只有垂直与斜渐近线.

9. 当  $x \rightarrow 0$  时, 无穷小  $(1+x)^{x^2} - 1$ ,  $e^{x^4-2x} - 1$  和  $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ , 的阶数分别是:

- (A) 1, 2 和 3 阶, (B) 3, 2 和 1 阶,  
(C) 3, 1 和 2 阶, (D) 2, 3 和 1 阶

10. 设直线  $y=ax+b$  同时与曲线  $y=x^2$  及  $y = \frac{1}{x}$  相切, 则常数  $a, b$  应分别取:

- (A)  $a=-4, b=-4$ . (B)  $a=-3, b=-4$ .  
(C)  $a=-4, b=-3$ . (D)  $a=-3, b=-3$ .

11. 下列函数  $f(x)$  中, 导函数  $f'(x)$  在  $x=0$  处不连续的是:

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad f(x) &= \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} & \text{(B)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \\ \text{(C)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} & \text{(D)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

12. 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在。则  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上

- (A) 存在最大值 (B) 存在最小值  
(C) 最大值和最小值至少存在一个 (D) 可能最大值和最小值均不存在

13. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  有定义, 则下述命题中正确的是

- (A) 若  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  可导且单调增加, 则对一切  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有  $f'(x) > 0$ ,  
(B) 若  $f(x)$  在点  $x_0$  处取极值, 则  $f'(x_0) = 0$   
(C) 若  $f''(x_0) = 0$ , 则  $(x_0, f(x_0))$  是曲线  $y=f(x)$  的拐点坐标  
(D) 若  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) = 0$ ,  $f'''(x_0) \neq 0$ , 则  $x_0$  一定不是  $f(x)$  的极值点.

14. 摆线  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  在  $t = \frac{\pi}{3}$  处的曲率为:

- (A)  $2a$  . (B)  $4a$  (C)  $\frac{1}{2a}$  . (D)  $\frac{1}{4a}$  .

15. 曲线  $y=x^3$  的弧微分  $ds$  等于:

- (A)  $\sqrt{1+x^6} dx$  ; (B)  $\sqrt{1+x^8} dx$  ; (C)  $\sqrt{1+6x^4} dx$  ; (D)  $\sqrt{1+9x^4} dx$

二、解答题： 16—21 小题，共 55 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本题满分 10 分)

求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{\tan x - \sin x}$$

17. (本题满分 10 分)

求数列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{n\sqrt{n}} \cdot \cos \frac{2a}{n\sqrt{n}} \cdots \cos \frac{na}{n\sqrt{n}} \right)$$

18. (本题满分 10 分)

设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  有一阶连续导数，且  $f(0)=0$ ,  $f''(0)$  存在. 若

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0, \end{cases}$$

求  $F'(x)$ , 并证明  $F'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  连续。

19. (本题满分 10 分)

设可微函数  $y=f(x)$  由方程  $x^3+y^3-3x+3y=2$  所确定, 试求  $f(x)$  的极大与极小值。

20. (本题满分 10 分)

设  $y = \sin \left( \ln \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \right) (x > 0)$ , 求  $y'$ 。

21. (本题满分 5 分)

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a) < 0 < f(b)$ 。证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$f(\xi)=0$ , 且  $f(x) > 0$ , 当  $x \in (\xi, b]$  时。