8.3 实对称矩阵的相似对角化

在可相似对角化的矩阵中，实对称矩阵是非常重要的一类. 很多问题都可归结为实对称矩阵的性质，例如，后面要讨论的二次型的标准化，特别是二次曲线和二次曲面的研究、多元函数的极值的判断以及线性偏微分方程的分类等问题都涉及到实对称矩阵. 因此，弄清实对称矩阵有哪些特性是很有必要的.本节我们将主要介绍实对称矩阵的特征值、特征向量及可相似对角化的性质.

8.3.1 共轭矩阵

1. 为了研究实对称矩阵的特征值的性质，我们先简单介绍共轭矩阵的概念及性质.

2. 复数一般写成 $z=a+bi$， z 的共轭复数为 $\bar{z}=a-bi$， z 为实数 $\Leftrightarrow \bar{z}=z$，

   z 的模为 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$， $z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2$， $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

3. **定义 8-4** 把复矩阵 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 的每个元素用其共轭复数代替所得的矩阵

   叫做 $\mathbf{A}$ 的**共轭矩阵**，记作 $\overline{\mathbf{A}}=\left[\overline{a_{ij}}\right]_{m\times n}$.

   注： $\mathbf{A}$ 为实矩阵 $\Leftrightarrow \overline{\mathbf{A}}=\mathbf{A}$.

4. 根据共轭矩阵的定义及共轭复数的运算性质，容易验证共轭矩阵具有下列性质：

   （1） $\overline{\overline{\mathbf{A}}}=\mathbf{A}$；　（2） $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}$；　（3） $\overline{k\mathbf{A}}=\bar{k}\overline{\mathbf{A}}$；

   （4） $\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}}$；　（5） $\overline{\mathbf{A}^T}=\overline{\mathbf{A}}^T$

   注：把每个式子的左右两边写出来，马上可以验证它们都相等。

5. 对于任一复向量 $\mathbf{x}=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]^T$，

$$\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}=\left[\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n}\right]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\overline{x_1}x_1+\overline{x_2}x_2+\cdots+\overline{x_n}x_n=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2,$$

   所以 $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}\geq 0$;　　**当 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 时， $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}>0$.**

8.3.2 实对称阵的性质

1. **定理 8-6** 实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值都是实数.

   证明 由 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵可得， $\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{A}$， $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$. 故 $\overline{\mathbf{A}}^T=\mathbf{A}$.

   【注： $\mathbf{A}$ 为实矩阵 $\Rightarrow \overline{\mathbf{A}}=\mathbf{A}$， $\mathbf{A}$ 为对称矩阵 $\Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$，两个式子相结合可得 $\overline{\mathbf{A}}^T=\mathbf{A}$.】

   设 λ 是 $\mathbf{A}$ 的任一特征值， $\mathbf{p}$ 为 λ 对应的特征向量，则有 $\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$ 且 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$.

   由 $\overline{\lambda\mathbf{p}}^T\mathbf{p}=(\overline{\lambda\mathbf{p}})^T\mathbf{p}=(\overline{\mathbf{Ap}})^T\mathbf{p}=\overline{\mathbf{p}}^T\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{p}=\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{Ap}=\lambda\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}$，得 $(\bar{\lambda}-\lambda)\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}=0$.

   因为 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{p}>0$，所以 $\bar{\lambda}-\lambda=0$，即 $\bar{\lambda}=\lambda$， λ 为实数。

2. 注意　若 λ_i 是实对称阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 λ_i 为实数，$\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 为实矩阵，$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$

的基础解系可取为实向量，故 λ_i 对应的特征向量可取为实向量.

如无特别注明，下面所讲的实对称矩阵的特征向量均为实向量.

3. **定理 8-7**　实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的相异特征值 λ 和 μ 分别对应的特征向量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 一定正交.

【注：这个结论非常重要，要好好记住】

证明　由题意，得 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A},\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p},\mathbf{Aq}=\mu\mathbf{q},\lambda\neq\mu.$

于是，有 $\lambda\mathbf{p}^T\mathbf{q}=(\lambda\mathbf{p})^T\mathbf{q}=(\mathbf{Ap})^T\mathbf{q}=\mathbf{p}^T\mathbf{A}^T\mathbf{q}=\mathbf{p}^T\mathbf{Aq}=\mu\mathbf{p}^T\mathbf{q}$，即 $(\lambda-\mu)\mathbf{p}^T\mathbf{q}=0$.

因为 $\lambda\neq\mu$,所以 $\mathbf{p}^T\mathbf{q}=0$,即 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{q}$ 正交.

4. 上一节我们研究了方阵可相似对角化的条件，并给出了不可相似对角化的例子.
下面的定理告诉我们，实对称矩阵都可相似对角化，并且可用正交相似变换将其相似对角化，这是实对称矩阵的一个非常重要的性质.

5. **定理 8-8**　对于任意 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$，都存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值.

【该定理的结论要好好掌握，证明过程不做要求】

6. 由定理 8-5 和定理 8-8 可得：
推论 8-4　实对称矩阵的每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数都恰好等于其重数.

7. **例**　若存在正交阵 $\mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\mathbf{\Lambda}$ 为对角矩阵，则 $\mathbf{A}$ 一定是对称矩阵。

证　由 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，可知 $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$.

由 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\mathbf{\Lambda}$，得 $\mathbf{A}=\mathbf{Q\Lambda Q}^{-1}=\mathbf{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}$.

因为 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=(\mathbf{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}=\mathbf{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$，所以 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵。

注意：普通方阵不能用正交相似变换化为对角矩阵，原因是普通方阵的相异特征值对应的特征向量不一定正交。

8. 普通方阵与实对称阵的对比：
（1）普通方阵的特征值不一定为实数，相异特征值对应的特征向量是无关的（注：不一定正交），不一定可相似对角化。即使可相似对角化，也只能用普通的可逆矩阵做相似变换来化为对角矩阵。
（2）实对称矩阵的特征值一定为实数，相异特征值对应的特征向量是正交的，一定可相似对角化。并且可用正交相似变换来化为对角矩阵。

9. **例 8-7**　两个同阶的实对称矩阵相似的充要条件是它们的特征值相同.

证明　充分性　设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为同阶的实对称矩阵，且特征值都是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

因为实对称矩阵都可正交相似对角化，所以存在正交矩阵 $\mathbf{Q}_1$ 和 $\mathbf{Q}_2$，使

$$\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{AQ}_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{BQ}_2,$$

【注：因为$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$的特征值相同，所以能化成同样的对角矩阵】

通过上式可得$\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^{-1}=\mathbf{B}$，$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^{-1})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^{-1}=\mathbf{B}$，所以$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相似.

必要性在相似矩阵的性质中已证明.

10. 判别两个矩阵是否相似的方法：

（1）相似于同一个对角阵的矩阵是相似的。

（2）当$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$都可相似对角化时，$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相似的充要条件是特征值相同。

（3）两个实对称阵相似的充要条件是特征值相同。注：实对称阵都可相似对角化。

（4）若两个矩阵的特征值不同，则它们一定不相似。

注意：对于普通矩阵，特征值相同时，不一定相似。

例如：$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$与$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$的特征值相同，但不相似。

8.3.3 正交相似变换矩阵的求法

1. 下面的结论对理解这一部分的内容非常重要。

（1）相似对角化公式为$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$，其中$\mathbf{P}$是以$\mathbf{A}$的 n 个线性无关的特征向量为列所构成的矩阵， 对角矩阵$\mathbf{\Lambda}$的对角元恰为$\mathbf{A}$的n个特征值，并且特征值在$\mathbf{\Lambda}$中的排列次序与特征向量在$\mathbf{P}$中的排列次序相对应.

（2）第七章定理 7-4　实方阵$\mathbf{A}$为正交矩阵的充要条件是$\mathbf{A}$的列向量组为标准正交向量组.

注：由单位向量组成的正交向量组称为标准正交向量组.

（3）第七章定理 7-3　正交向量组一定线性无关.

（4）施密特正交化公式：

设p_1,p_2是线性无关的列向量组，若取$u_1=p_1$，$u_2=p_2-\dfrac{u_1^T p_2}{\|u_1\|^2}u_1$，

则u_1,u_2是与p_1,p_2等价的正交向量组.

2. 对于实对称矩阵$\mathbf{A}$，如果让$\mathbf{Q}$的列向量是两两正交的单位特征向量，则$\mathbf{Q}$既满足正交矩阵的要求，也满足相似对角化公式$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$中对$\mathbf{P}$的要求。

因而$\mathbf{Q}$为正交矩阵，并且$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$为对角矩阵。

3. 当实对称矩阵$\mathbf{A}$的特征值都是单特征值时，求出每个特征值λ_i对应的方程组$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系，然后将它们单位化，可得到$\mathbf{A}$的两两正交的单位特征向量【注：实对称矩阵的相异特征值对应的特征向量一定正交】，把它们作为$\mathbf{Q}$的列向量，则$\mathbf{Q}$就是所求的正交相似变换矩阵.

例 8-8　设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求一个正交矩阵$\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$为对角矩阵.

解　由$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0\\-2&\lambda&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+1)=0$，

求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=-1$.

对于 $\lambda_1=2$，$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\-2&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}-1&-2&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 化成 $\begin{cases}x_1+2x_2=0\\ \quad 6x_2=0\end{cases}$

（注：x_3 没有出现，意味着 x_3 可以随便取值，也可以说 x_3 是自由未知数）

求得齐次线性方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\mathbf{p}_1=[0,0,1]^T$.

对于 $\lambda_2=4$， $\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，

方程组 $(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 化成 $\begin{cases}x_1-2x_2=0\\ \quad 2x_3=0\end{cases}$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\mathbf{p}_2=[2,1,0]^T$.

对于 $\lambda_3=-1$，$\lambda_3\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4&-2&0\\-2&-1&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&-1&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$，

方程组 $(\lambda_3\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 化成 $\begin{cases}2x_1-x_2=0\\ \quad -3x_3=0\end{cases}$

求得齐次线性方程组 $(\lambda_3\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\mathbf{p}_3=[1,-2,0]^T$.

注：$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ 分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 对应的特征向量，由定理 8-7 可知，$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ 两两正交。

将 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ 单位化，得 $\mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\\ 0\end{bmatrix},\mathbf{q}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ -\frac{2}{\sqrt5}\\ 0\end{bmatrix}$.

注：$\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$ 是两两正交的单位特征向量，当然它们也是线性无关的。

令 $\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3]=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\0&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，且 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\mathrm{diag}(2,4,-1)$。

注意：若令 $\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3]=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&1&-2\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{P}$ 为普通的可逆矩阵，$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}2&&\\&4&\\&&-1\end{bmatrix}$.

既然用可逆矩阵做相似变换也能把对称矩阵化成对角矩阵，那为什么还要学正交相似变换的方法呢？在下一章会看到，正交相似变换的用处更多一些，有些问题必须用正交相似变换才能解决。

4. 当实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 有重特征值时，求正交相似变换矩阵 $\mathbf{Q}$ 的步骤如下：

（1）求出 $\mathbf{A}$ 的全部特征值；

（2）对于**重特征值** λ_i，求出 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系，要将其先正交化、再单位化；

对于**单特征值** λ_i，求出 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系，只需单位化；

【注：实对称矩阵的相异特征值对应的特征向量一定正交】

（3）以上面所得的两两正交的单位特征向量为列的矩阵就是所求的正交相似变换矩阵 $\mathbf{Q}$.

例 8-9 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$，求一个正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ 为对角矩阵.

解 由
$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{\underset{r_3+r_1}{=}}\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\\lambda-1&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),,$$

求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=-2$（单）.

对于 $\lambda_1=1$，$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，

方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 化成 $x_1-x_2-x_3=0$，即 $x_1=x_2+x_3$

求得方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\mathbf{p}_1=[1,1,0]^T$，$\mathbf{p}_2=[1,0,1]^T$.

【注：$\mathbf{p}_1$,$\mathbf{p}_2$ 是 λ_1 对应的线性无关特征向量，为了求出正交矩阵 $\mathbf{Q}$，需要将 $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ 先正交化，再单位化。】

将 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$ 正交化，取 $\mathbf{u}_1=\mathbf{p}_1$，$\mathbf{u}_2=\mathbf{p}_2-\dfrac{\mathbf{u}_1^T\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$.

【注：$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ 是 λ_1 对应的正交特征向量。记 $l=-\dfrac{\mathbf{u}_1^T\mathbf{p}_2}{\|\mathbf{u}_1\|^2}$, 则 $\mathbf{u}_2=\mathbf{p}_2-l\mathbf{P}_1$. 因为 $\mathbf{p}_1$,$\mathbf{p}_2$ 是 λ_1 对应的线性无关特征向量，所以可验证 $\mathbf{u}_2$ 也是 λ_1 对应的特征向量.】

再将 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 单位化，得 $\mathbf{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{q}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$.　注：将 $\mathbf{u}_2$ 单位化时，只需将 $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ 单位化

注：$\mathbf{q}_1$，$\mathbf{q}_2$ 是 λ_1 对应的正交的单位特征向量。

对于 $\lambda_2=-2$，$\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_2-r_3}\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-2&1\\0&3&-3\end{bmatrix}$，

方程组 $(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 化成 $\begin{cases}-x_1-2x_2+x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=-2x_2+x_3\\x_2=x_3\end{cases}$

求得方程组 $(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\mathbf{p}_3=[-1,1,1]^T$.

注：根据定理 8-7，λ_2 对应的特征向量一定与 λ_1 对应的特征向量正交，所以只需将 $\mathbf{p}_3$ 单位化即可。

将 $\mathbf{p}_3$ 单位化，得 $\mathbf{q}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$.

令 $\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，且 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(1,1,-2)$.

注意：若令 $\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3]=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{P}$ 为普通的可逆矩阵，$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$.

对于二重特征值 $\lambda_1=1$，也可按照下面方法直接求出两个正交的特征向量，按这种方法做，就不用再正交化了。

根据前面的计算，方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 化成 $x_1-x_2-x_3=0$，

通过上式先求出 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一个解 $\mathbf{p}_1=[1,1,0]^T$.

现在设 $\mathbf{p}_2=[x_1,x_2,x_3]^T$ 是方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的另外一个与 $\mathbf{p}_1$ 正交的解，

则 $\mathbf{p}_2$ 满足 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\x_1+x_2=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_3=x_1-x_2\\x_2=-x_1\end{cases}$

令 $x_1=1$，求得 $\mathbf{p}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$.

$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2$ 就是 $\lambda_1=1$ 对应的正交的特征向量。注：不要忘记单位化。

5. **例** 已知 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=0$ 是三阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mathbf{p}_3=[1,-1,-1]^T$ 是 λ_3 对应的一个特征向量，求实对称矩阵 $\mathbf{A}$.

解：设 $\mathbf{p}_1=[x_1,x_2,x_3]^T$ 是 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的特征向量，根据定理 8-7 可知，$\mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_3$ 正交，

$\mathbf{p}_1^T\mathbf{p}_3=0$ ，即 $x_1-x_2-x_3=0.$

求得基础解系为 $\mathbf{p}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{p}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$

【注：$x_1-x_2-x_3=0$ 的非零解向量都是 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的的特征向量. 理由是：对于实对称矩阵 $\mathbf{A}$，二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 一定能对应出两个线性无关的特征向量（不妨记作 α_1,α_2）. 根据定理 8-7，α_1,α_2 都与 $\mathbf{p}_3$ 正交，因而 α_1,α_2 都满足 $x_1-x_2-x_3=0,$ 这说明 α_1,α_2 是 $x_1-x_2-x_3=0$ 的基础解系，进一步可知，$x_1-x_2-x_3=0$ 的通解为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$. 前面讲过，当 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\neq 0$ 时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 也是 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的特征向量，所以 $x_1-x_2-x_3=0$ 的非零解向量都是 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的的特征向量.】

令 $\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix},\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{\Lambda}$.

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&-1&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&-1&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}.$$

6. （1）当 $\mathbf{A}$ 可相似对角化时，$\mathbf{A}$ 的非零特征值的个数等于 $\mathbf{A}$ 的秩。

证：设 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，$\mathbf{A}$ 的非零特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，则存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$，$\mathbf{A}$ 的秩等于对角矩阵 $diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$ 的秩，即非零特征值的个数。

（2）因为实对称矩阵都可相似对角化，所以实对称矩阵的非零特征值的个数总是等于它的秩。

（3）当 $\mathbf{A}$ 不可相似对角化时，上面结论不成立。例如，$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 的秩为 2，但一个非零特征值都没有。

习题 8-3 第 5 题

5.设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$ 为单位向量.求：

（1）矩阵 $\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 的秩、迹和特征值.

（2）矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 的秩、迹和特征值.

提示：（1） $r(\mathbf{A}) = r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T) = r(\boldsymbol{\alpha}) = 1$

注：前面讲过公式 $r(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = r(\mathbf{A})$

向量可看成特殊的矩阵，所以 $r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T) = r(\boldsymbol{\alpha})$

从列向量组的秩来想，可知 $r(\boldsymbol{\alpha}) = 1$。

由 $r(\mathbf{A}) = 1$ 可知，$\mathbf{A}$ 只有一个非零特征值，0 应该是 $\mathbf{A}$ 的 n-1 重特征值。

由 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = 1 \cdot \boldsymbol{\alpha}$ 可知，1 是 $\mathbf{A}$ 的非零特征值。

（2）$\mathbf{B} = \mathbf{E} - \mathbf{A}$，$\mathbf{B}$可看成$\mathbf{A}$的多项式，根据 A 的特征值可求出 B 的特征值，B 的秩等于它的非零特征值的个数。