第 2 章　方阵的行列式

2.1　*n* 阶行列式的定义

1. 余子阵的定义：从方阵 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 中去掉 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列所余下的 n-1 阶方阵称为 a_{ij} 的余子阵,记作 $\mathbf{A}(i,j)$.

2. 余子式、代数余子式的定义：

把 a_{ij} 的余子阵 $\mathbf{A}(i,j)$ 的行列式 $\det(\mathbf{A}(i,j))$ 叫做 a_{ij} 的**余子式.**

把 $(-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}(i,j))$ 叫做 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 A_{ij}，　即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}(i,j))$

注意：代数余子式很重要，要好好掌握。

3. *n* 阶行列式的定义:

设 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，把 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 叫做**方阵 A 的行列式**(也叫做 ***n* 阶行列式**),

记作 $\det(\mathbf{A})$ 或 $|\mathbf{A}|$.规定它是按下述运算法则所表达的一个算式：

当 n=1 时，$\mathbf{A}=\left[a_{11}\right]$, $\det(\mathbf{A})=a_{11}$.

当 n>1 时，$\det(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{n}a_{k1}(-1)^{k+1}\det(\mathbf{A}(k,1))$.

利用代数余子式的符号表示：　$\det(\mathbf{A})=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$

上式称为 $\det(\mathbf{A})$ 按第 1 列的展开式.

4. 注意：　(1)只有方阵才有行列式,行列式的运算结果是一个数.
(2)行列式的两侧是竖线,矩阵的两侧是方括号或圆括号.

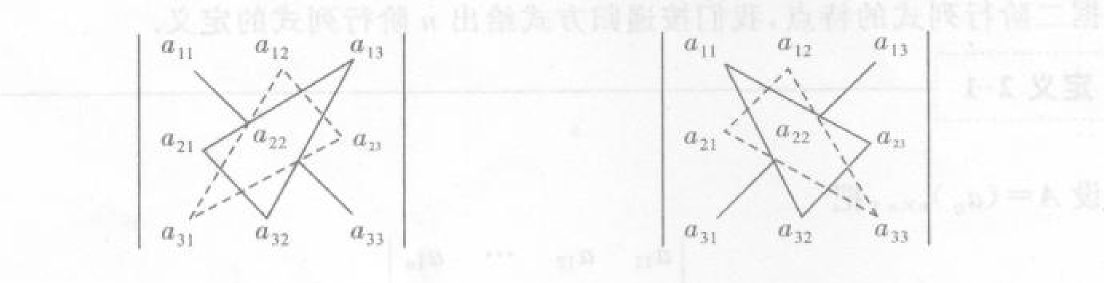
将来用行列式讨论问题时，一定要先看一下所给矩阵是否为方阵。

5. 三阶行列式的公式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}\ .$$

注意:　三阶行列式中共有 6 项，3 项为加的项，3 项为减的项。加的 3 项是由主对角线带出的两个三角形构成的，两个三角形的底边与主对角线平行，见下面左图，主对角线上的三个数的乘积、三角形顶点处的三个数的乘积构成加的三个项；减的 3 项是由副对角线带出的两个三角形构成的,两个三角形的底边与副对角线平行,见下面右图，副对角线上的三个数的乘积、三角形顶点处的三个数的乘积

构成减的三个项.



6. 若想类似于三阶行列式的公式那样，也将 n 阶行列式写成元素的乘积之和的形式，则共有 n!项。

当 n≥4 时,项数非常多，就不要想这样的公式了。

2.2　行列式的性质

1. 性质 2-1　$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$.　　　**转置不改变行列式的值**

2. 根据性质 2-1,通过转置，行列式的行和列的位置可以互换,所以行列式对列成立的性质对行也成立.

我们下面主要对列的情况讨论行列式的性质.

3. **性质 2-2**　行列式 $|\mathbf{A}|$ 可按其任一列或任一行展开,即

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$ **（按第 *j* 列的展开式）**

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$ **（按第 *i* 行的展开式）**

4. **推论 2-1**　若方阵 **A** 的某列(行)的元素全为零, 则 $|\mathbf{A}| = 0$.

注：（1）将 **A** 的行列式按照全为 0 的列（或全为 0 的行）展开，就可证明。**（2）所有行列式为 0 的情况都可通过初等变换化成某行（或某列）全为 0 的情况。**

5. 设 a_j 为 **A** 的第 j 个列向量,把向量 $\tilde{a}_j = [A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}]^T$ 称为 a_j 的**代数余子式向量**.

利用代数余子式向量, 性质 2-2 中的第一个式子可写成：$|\mathbf{A}| = \tilde{a}_j^T a_j$.

6. 根据代数余子式及代数余子式向量的定义，可得：

引理 2-1 若方阵 **A** 和 **B** 只有第 j 列不同,则 **A** 和 **B** 的第 j 列的代数余子式向量相同。

也可说成：若方阵 **A** 和 **B** 只有第 j 列不同,则 **A** 和 **B** 的第 j 列对应元素的代数余子式相同。

7. **性质 2-3** (行列式的线性性质)

（1）$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **（行列式可往外提公因式）**

（2）$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

（这个公式通常称为拆分公式）

注：将上面两个公式的左右两边按照第 j 列展开就可证明。性质 2-3 的结论对于行的情况也成立。

性质 2-3 的结论用按列分块的形式写出来是下面的样子：

（1）$|\boldsymbol{a}_1,\cdots,k\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n| = k|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n|$

（2）$|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j+\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{a}_n| = |\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n| + |\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{a}_n|$

注意： $|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n|$ 为 $|\mathbf{A}|$ 的**按列分块形式**，$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$ **是列向量。**

8. **推论 2-2** $|k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$ (n 为方阵 **A** 的阶数).

$$|-\mathbf{A}| = (-1)^n|\mathbf{A}|$$

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$,

则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + |\boldsymbol{B}|$

可见：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10. **性质 2-4** 若方阵 **A** 中有两列（行）相同，则 $|\mathbf{A}|=0$.

推论 2-3 若 $|\mathbf{A}|$ 中有两列(行)成比例,则 $|\mathbf{A}|=0$.

推论 2-4 若 $|\mathbf{A}|$ 中有一列(行)是另两列(行)之和,则 $|\mathbf{A}|=0$.

注：上面的三个结论通过倍加变换都可化成有一列（或有一行）全为 0 的情况。

11. **性质 2-5**　若对方阵 $\mathbf{A}$ 进行一次**倍加列（行）变换**得到 $\mathbf{B}$,则 $|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$.即**倍加变换不改变行列式的值**.

12. **性质 2-6** 若对方阵 $\mathbf{A}$ 进行一次对调列（行）变换得到方阵 $\mathbf{B}$,则 $|\mathbf{A}|=-|\mathbf{B}|$.

注：若对方阵 $\mathbf{A}$ 进行了 k 次对调列（行）变换得到方阵 $\mathbf{B}$，则 $|\mathbf{A}|=(-1)^k|\mathbf{B}|$.

13. **性质 2-7**　**（1）**行列式某一列的每个元素**乘以另一列对应元素的代数余子式**之和等于零，即 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j)$.

（2）行列式某一行的每个元素乘以另一行对应元素的代数余子式之和等于零，即 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j)$.

证明　设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$,　　令 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$.

注意：$\mathbf{B}$ 是把 $\mathbf{A}$ 的第 j 列换成 $\boldsymbol{a}_i$ 所得到的矩阵，这时 $\mathbf{B}$ 中有两列相同。

由于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 只有第 j 列不同,所以它们的第 j 列各元素对应的代数余子式相同.

将 $|\mathbf{B}|$ 按第 j 列展开，得 $|\mathbf{B}|=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}$.

又因为 $|\mathbf{B}|$ 中第 i 列和第 j 列相同,所以 $|\mathbf{B}|=0,\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0.$

为了搞清楚性质 2-7 的含义，我们来看下面的例子.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$

上式是一个恒等式，第三列是什么样的数都成立。现在把第三列换成第一列的数，结论仍然成立。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}$$

$$a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}=0$$

注：第一列的数乘第三列的代数余子式之和，相当于把原来行列式的第三列换成了第一列，结果一定为 0。

本节主要结论的总结：

（1）性质 2-1，讲的是“转置不改变行列式的值。

（2）性质 2-2 和性质 2-7，这两个性质都与代数余子式有关。

（3）拆分公式，使用时要注意：一次只能拆开一个行（或一个列）

（4）与初等变换有关的三个结论：性质 2-3 的（1）、性质 2-5、性质 2-6.

这三个结论分别对应于：倍乘变换、倍加变换、对调变换。

（5）行列式等于 0 的情况，重点掌握推论 2-1

（6）记住公式：$|k\mathbf{A}|=k^n|\mathbf{A}|$,　　$|-\mathbf{A}|=(-1)^n|\mathbf{A}|$