3.1.3　求逆矩阵的初等行变换法

1. 前面讲过，可以根据公式$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$来求$\mathbf{A}^{-1}$. 但是，当 **A** 的阶数较大时，计算量太大。下面来介绍求逆矩阵的另一种方法——— **初等行变换法**。

2. 在第 1 章第 3 节性质 1-3 中讲过，当 $k\neq 0$ 时，

$$\mathbf{E}_{i,j}\mathbf{E}_{i,j}=\mathbf{E},\quad \mathbf{E}_i(k)\mathbf{E}_i(k^{-1})=\mathbf{E},\quad \mathbf{E}_{i,j}(k)\mathbf{E}_{i,j}(-k)=\mathbf{E}\ .$$

由推论 3-1 可知，三种初等矩阵都可逆，并且其逆矩阵还是同类型的初等矩阵：

$$\mathbf{E}_{i,j}^{-1}=\mathbf{E}_{i,j}\quad ,\mathbf{E}_i^{-1}(k)=\mathbf{E}_i(k^{-1}),\qquad \mathbf{E}_{i,j}^{-1}(k)=\mathbf{E}_{i,j}(-k).$$

注：上面这三个公式需要记住，做题时会用到的。

3. **定理 3-4**　方阵 **A** 可逆的充要条件是 **A** 能表示成有限个初等矩阵的乘积。

证明　充分性　因为 **A** 能表示成有限个初等矩阵的乘积，初等矩阵都可逆，可逆矩阵的乘积还可逆，所以 **A** 可逆.

必要性　由定理 1-2 可知，存在初等矩阵$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_k$和初等矩阵$\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2,\cdots,\mathbf{Q}_l$，使得$\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l=\mathbf{F}$，其中 **F** 是对角元为1或0的对角矩阵.

因为 **A** 可逆，初等矩阵都可逆，所以 **F** 可逆.于是，**F=E**. 因此

$$\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l=\mathbf{E}\ .$$

在上式两边同时从左侧乘$(\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)^{-1}$、从右侧乘$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l)^{-1}$，得

$$(\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)^{-1}(\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)\mathbf{A}(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l)(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l)^{-1}=(\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l)^{-1}$$

$$\mathbf{A}=(\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1)^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l)^{-1}=\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\cdots\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_l^{-1}\cdots\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{Q}_1^{-1}$$

由于初等矩阵的逆矩阵还是初等矩阵，所以 **A** 能表示成有限个初等矩阵的乘积.

4. **推论 3-2**　方阵 **A** 可逆的充要条件是 **A** 与 **E** 等价.

注：从定理 3-4 的证明可以看出，可逆矩阵的等价标准形是单位矩阵 **E**.

反过来，若 **A** 与 **E** 等价，则$|\mathbf{A}|\neq 0$，**A** 可逆.

5. **推论 3-3**　**设 P,Q 可逆，**

（1）$\mathbf{P}\mathbf{A}=\mathbf{B}\Leftrightarrow$做有限次行变换将**A**化成**B**.

注：由 **P** 可逆及定理 3-4 可知，存在初等矩阵$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_k$，使得$\mathbf{P}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_k$.

$$\mathbf{P}\mathbf{A}=\mathbf{B}\Leftrightarrow\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_k\mathbf{A}=\mathbf{B}\Leftrightarrow\text{做有限次行变换将}\mathbf{A}\text{化成}\mathbf{B}.$$

注意：“左乘可逆矩阵”相当于“做有限次行变换”

（2）$\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{B}\Leftrightarrow$做有限次列变换将**A**化成**B**.

注：由 **Q** 可逆及定理 3-4 可知，存在初等矩阵$\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2,\cdots,\mathbf{Q}_l$，使得$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l$.

$$\mathbf{AQ}=\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{AQ}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l=\mathbf{B} \Leftrightarrow \text{做有限次列变换将}\mathbf{A}\text{化成}\mathbf{B}.$$

注意："右乘可逆矩阵"相当于"做有限次列变换"

6. **推论 3-4** 矩阵 **A** 与 **B** 等价的充要条件是存在可逆矩阵 **P** 和 **Q**，使得 **PAQ=B.**

7. 下面我们来研究求逆矩阵的初等行变换法。

当 **A** 可逆时，$\mathbf{A}^{-1}$ **也可逆**，由 $\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{A},\mathbf{E}]=[\mathbf{E},\mathbf{A}^{-1}]$ 可知，用**有限次初等行变换**能把 $[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ 化为 $[\mathbf{E},\mathbf{A}^{-1}]$.

反过来，若用**有限次初等行变换**把 $[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ 化为 $[\mathbf{E},\mathbf{B}]$，则存在可逆矩阵 **P**，使得 $\mathbf{P}[\mathbf{A},\mathbf{E}]=[\mathbf{E},\mathbf{B}]$.

由上式可得 **PA=E**，**PE=B**，所以，$\mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1},\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$. 这说明只要能用初等行变换把 $[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ 化为 $[\mathbf{E},\mathbf{B}]$ 的形式，则 **B** 一定是 $\mathbf{A}^{-1}$.

因此，可用初等行变换来求可逆矩阵 A 的逆矩阵. 做法是：对 $[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ 进行初等行变换，目标是把 A 化为 E，当把 A 化为 E 时，$[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ 中的 E 就化为了 $\mathbf{A}^{-1}$.

例 用初等行变换求 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解法 1 $[\mathbf{A},\mathbf{E}]=\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}\begin{bmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

所以 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{bmatrix}$.

解法 2 $[\mathbf{A},\mathbf{E}]=\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1+3r_3}\begin{bmatrix}1&2&0&-2&-3&3\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-2)}\begin{bmatrix}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

所以 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\dfrac{3}{2}&-3&\dfrac{5}{2}\\1&1&-1\end{bmatrix}$.

例 用初等行变换求 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $[\mathbf{A},\mathbf{E}]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\2&2&3&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&0&1&-2&1&0\\0&1&2&-1&0&1\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&0&1\\0&0&1&-2&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&2&0&-1\\0&1&2&-1&0&1\\0&0&1&-2&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&3&-2&1\\0&0&1&-2&1&0\end{bmatrix},$$

所以 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\3&-2&1\\-2&1&0\end{bmatrix}$.

8. **注意** (1)当 $\mathbf{A}$ 的阶数 $n\geqslant 3$ 时，一般用初等行变换的方法求 $\mathbf{A}^{-1}$ 比用伴随矩阵的方法求 $\mathbf{A}^{-1}$ 方便. 同时希望大家注意，初等行变换的方法便于用计算机进行运算.

(2)也可用初等列变换求 $\mathbf{A}^{-1}$，方法是：$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\mathbf{E}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{A}^{-1}\end{bmatrix}$.

(3) 求 $\mathbf{A}^{-1}$ 时，对 $[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ **要做行变换.** 原因是：$\mathbf{E}$ 的行与 $\mathbf{A}$ 的行连在一起，将 $\mathbf{A}$ 化成 $\mathbf{E}$ 时，右边的 $\mathbf{E}$ 要跟着一起做行变换，在 $\mathbf{E}$ 上能反映出 $\mathbf{A}$ 化成 $\mathbf{E}$ 的过程。

设将 $\mathbf{A}$ 化成 $\mathbf{E}$ 所做行变换对应的初等矩阵为 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_k$，则有 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_k\mathbf{A}=\mathbf{E}$，

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_k=\mathbf{A}^{-1}$.

因为 $[\mathbf{A},\mathbf{E}]$ 中的 $\mathbf{E}$ 要跟着 $\mathbf{A}$ 做同样的行变换，所以将 $\mathbf{E}$ 化成 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_k\mathbf{E}=\mathbf{A}^{-1}$.

9. **例**　设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，求 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解　设 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2\\ \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_4\end{bmatrix}$，则 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2\\ \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}\end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{AX}_1+\mathbf{CX}_3 & \mathbf{AX}_2+\mathbf{CX}_4\\ \mathbf{BX}_3 & \mathbf{BX}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}\end{bmatrix},$$

于是，有 $\begin{cases}\mathbf{AX}_1+\mathbf{CX}_3=\mathbf{E}\\ \mathbf{AX}_2+\mathbf{CX}_4=\mathbf{O}\\ \mathbf{BX}_3=\mathbf{O}\\ \mathbf{BX}_4=\mathbf{E}\end{cases}$，　　解得 $\begin{cases}\mathbf{X}_1=\mathbf{A}^{-1}\\ \mathbf{X}_2=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}\\ \mathbf{X}_3=\mathbf{O}\\ \mathbf{X}_4=\mathbf{B}^{-1}\end{cases}$.

故 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1}\end{bmatrix}$.

类似地，可得

$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1}\end{bmatrix}$，　　$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{C} & \mathbf{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}\\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{B}^{-1}\end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1}\\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$，　　$\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1}\\ \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}\end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{A}\\ \mathbf{B} & \mathbf{C}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{B}^{-1}\\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$

3.1.4　矩阵方程

矩阵方程是本章中的一种重要的计算问题，希望同学们好好掌握。

1. **矩阵方程的标准形式为：** $\mathbf{AX}=\mathbf{C},\mathbf{YB}=\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{AZB}=\mathbf{C}$，其中，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ **可逆**.

它们的解依次为： $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C},\mathbf{Y}=\mathbf{CB}^{-1}$ 和 $\mathbf{Z}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}$，求出 $\mathbf{A}^{-1}$ 和 $\mathbf{B}^{-1}$ 就可求出矩阵方程的解.

2. **注意：解矩阵方程时，一般都要先对所给方程进行整理和化简。**

例　设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$，$\mathbf{ABA}^*=8\mathbf{BA}^{-1}+\mathbf{E}$，求 $\mathbf{B}$.

解　$|\mathbf{A}|=4$

在 $\mathbf{ABA}^*=8\mathbf{BA}^{-1}+\mathbf{E}$ 的两边同时右乘 $\mathbf{A}$，得 $\mathbf{ABA}^*\mathbf{A}=8\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{A}$，

$\mathbf{AB}|\mathbf{A}|=8\mathbf{B}+\mathbf{A}$，　　$4\mathbf{AB}=8\mathbf{B}+\mathbf{A}$，　　$4(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{B}=\mathbf{A}$，

$$\mathbf{B}=\frac{1}{4}(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\quad (\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\end{bmatrix}$$

3. 对于 $\mathbf{AX}=\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{YB}=\mathbf{C}$，也可用初等变换来求它们的解. 做法是：

$$[\mathbf{A},\mathbf{C}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\mathbf{E}，\mathbf{X}],$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\\mathbf{C}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{Y}\end{bmatrix}.$$

4. 注意　若所给矩阵方程整理不成三种标准形式之一，或者能，但是 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 不可逆，则需转化为方程组的形式进行求解.

*例　解矩阵方程 $\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\mathbf{X}=\mathbf{X}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&7\\-1&3\end{bmatrix}$.

注意　该矩阵方程不能整理成 $\mathbf{AX}=\mathbf{C},\mathbf{YB}=\mathbf{C}$ ，$\mathbf{AZB}=\mathbf{C}$ 的形式。

解　设 $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$，则有 $\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&7\\-1&3\end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix}2x_1+x_3&2x_2+x_4\\3x_1+2x_3&3x_2+2x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&2x_1+x_2\\x_3&2x_3+x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&7\\-1&3\end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases}2x_1+x_3=x_1+1\\2x_2+x_4=2x_1+x_2+7\\3x_1+2x_3=x_3-1\\3x_2+2x_4=2x_3+x_4+3\end{cases},\quad \text{解得}\begin{cases}x_1=-1\\x_2=1\\x_3=2\\x_4=4\end{cases}.\quad \text{故 }\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&4\end{bmatrix}.$$

5. 对于矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{C}$，将 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{C}$ 写成按列分块矩阵，得 $\mathbf{A}[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_s]=[\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\cdots,\mathbf{c}_s]$.

进一步，可得 $\mathbf{Ax}_i=\mathbf{c}_i(i=1,2,\cdots,s)$. 因此，**当 A 不可逆时**，求解矩阵方程 **AX=C** 可转化为

求解 s 个具有相同系数矩阵的方程组 $\mathbf{Ax}_i=\mathbf{c}_i(i=1,2,\cdots,s)$.