第 1 章第 1 节　矩阵及其运算

矩阵是线性代数的主要研究对象，线性代数的大部分时间都是在研究矩阵的问题。线性代数研究问题的基本思想是：将所研究的主要问题转化为矩阵形式，重点对矩阵进行研究，最后将所研究的问题作为矩阵理论的应用来加以解决。

第 1 章是线性代数中最基础的内容，这些内容在后面是要反复用到的，希望大家在理解的基础上把学过的概念、符号、公式、结论好好记住，越熟练越好。

（一）本节共有 9 个视频，**第一个视频**从两个实例开始讲起，引出矩阵的定义。这两个实例稍作了解即可。关于第一个视频还有这样几点要给同学们强调一下。

1.矩阵的两侧为圆括号或方括号，圆括号（或方括号）必须写出来。同时，希望大家注意，行列式的两侧为竖线。一定要把矩阵和行列式加以区分。

2.通常用黑体大写英文字母表示矩阵。

3.元素 a_{ij} 的第一个下标一般称为行标，标志着这个元素在矩阵的第 i 行；元素 a_{ij} 的第二个下标一般称为列标，标志着这个元素在矩阵的第 j 列。

注意：$a_{10,12}$ 和 $a_{n,n-1}$ 中下标的写法都是正确的，对于这两种情况，下标需要加逗号分隔。

（二）**第二个视频**主要讲授特殊矩阵，关于这一部分内容，有这样几个方面再给同学们强调一下。

1. 行矩阵也叫行向量，列矩阵也叫列向量。
2. 行矩阵一般都用逗号把里边的元素分隔一下，**其它矩阵里边不允许有逗号。**
3. $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 也可写成

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注意：只有主对角线（或副对角线）上方或下方的三角形部分全为 0 时，这一部分中的 0 才可以整体省略不写。

4.对角元都为 1 的对角矩阵叫做单位矩阵，专用 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{I}$ 表示。如果需明确其阶数，则用 $\mathbf{E}_n$ 或 $\mathbf{I}_n$ 表示 n 阶单位矩阵。

5.本章在证明矩阵的某些公式时，有时会从矩阵相等的定义出发来给出证明。但是，同学们在做课后习题时，一般都是从现成的公式出发来加以证明的。

（三）**矩阵的线性运算（对应于第三个视频）**，这一部分内容比较简单，重点掌握矩阵的加法、矩阵的减法、数与矩阵相乘的定义。

矩阵的加法和数与矩阵的乘法这两种运算合起来称为**矩阵的线性运算**。

矩阵线性运算的一般形式为 $k\mathbf{A}+l\mathbf{B}$，其中 k,l 为数， $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为同型矩阵.

（四） **矩阵的乘法**是第一节的重点，也是难点，同学们在学习的时候要格外重视。 关于矩阵的乘法共有四个视频，前两个视频是从线性变换的实例开始讲起，然后给出矩阵乘法的定义，学习的重点放在矩阵乘法的定义和矩阵乘法的计算上。

例 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，求 $\mathbf{AB}$.

解 $\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+2\times2+1\times3 & 1\times3+2\times2+1\times1\\ 0\times1+3\times2+1\times3 & 0\times3+3\times2+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 8\\ 9 & 7\end{bmatrix}$.

注意：计算 $\mathbf{AB}$ 有两种思考模式，第一种思考模式是：先计算 $\mathbf{AB}$ 的第一行，再计算 $\mathbf{AB}$ 的第二行；计算 $\mathbf{AB}$ 的第一行，就是用 $\mathbf{A}$ 的第一行分别与 $\mathbf{B}$ 的两列对应的元素相乘再相加；计算 $\mathbf{AB}$ 的第二行，就是用 $\mathbf{A}$ 的第二行分别与 $\mathbf{B}$ 的两列对应的元素相乘再相加。

第二种思考模式是：先计算 $\mathbf{AB}$ 的第一列，再计算 $\mathbf{AB}$ 的第二列；计算 $\mathbf{AB}$ 的第一列，就是用 $\mathbf{A}$ 的两行分别与 $\mathbf{B}$ 的第一列对应的元素相乘再相加；计算 $\mathbf{AB}$ 的第二列，就是用 $\mathbf{A}$ 的两行分别与 $\mathbf{B}$ 的第二列对应的元素相乘再相加。

做作业和考试时，$\begin{bmatrix}1\times1+2\times2+1\times3 & 1\times3+2\times2+1\times1\\ 0\times1+3\times2+1\times3 & 0\times3+3\times2+1\times1\end{bmatrix}$ 不用写，在草纸上算一下即可。

（五）**矩阵乘法的运算法则**（对应于矩阵乘法部分的第三个视频）

学习这一部分时，同学们要格外注意，不然，后面做题时会经常出错。

1.**矩阵的乘法不满足交换律**，即一般 $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$.在进行矩阵的乘法运算时，应注意不要随意交换矩阵的前后位置，否则会出错.

若矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可交换。

由矩阵乘法的定义可以证明， $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可交换的必要条件是 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为同阶方阵。至于何时两个矩阵相乘可交换，没有一般性的结论，但是在后面会讲到一些可交换的特殊情况。

2. **矩阵乘法不满足消去律**，具体表现为：

① $\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$ 时，由 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$ 一般得不到 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$；

②由 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 一般得不到 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ 或 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$；

③ $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都不是零矩阵时， $\mathbf{AB}$ 有可能为零矩阵。

3. **矩阵的乘法虽然不满足交换律和消去律，但满足结合律和分配律**（假设运算都可行）：

（1） $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$；

（2）$k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B})$，其中 k 为数；

（3）$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$；

（4）$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$.

4.单位矩阵总满足 $\mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n=\mathbf{A}_{m\times n}$，这和数1在数的乘法中的作用类似。

5.很多关于数的涉及到乘法的运算公式，如果把数换成矩阵，只有矩阵相乘可交换时才成立。例如，只有当 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可交换时，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$ 和 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$ 才成立。

由于单位矩阵 $\mathbf{E}$ 与同阶方阵相乘时都可交换，所以 $(\mathbf{A}+\mathbf{E})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}+\mathbf{E}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E})=\mathbf{A}^2-\mathbf{E}$ 这样的公式都成立。

（六）矩阵乘法中的第 4 个视频

重点观看视频。关于下面的例题再给出一个稍微详细一点的证明。

例 设 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 和 $\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ 都是上三角形矩阵，$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$，证明 $\mathbf{C}$ 也是上三角形矩阵，并且 $\mathbf{C}$ 的对角元 $c_{ii}=a_{ii}b_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$.

注：方阵 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 为上三角形矩阵 $\Leftrightarrow$ 当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$.

证明：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & b_{jj} & \cdots & b_{jn} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

（1）当 $i>j$ 时

第j个数的位置

$$c_{ij}=(0,\cdots,0,a_{ii},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$=0$

所以C为上三角形矩阵

(2) C的对角元

$$c_{ii}=(0,\cdots,0,a_{ii},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$=a_{ii}b_{ii}$

（七）线性方程组的矩阵形式

对应于第一节第 8 个视频，关于这一部分，再做下面的补充。

常数项全为 0 的线性方程组称为齐次线性方程组，常数项不全为 0 的线性方程组称为非齐次线性方程组。例如：

$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ 是齐次线性方程组，矩阵形式为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$，$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix},\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ 是非齐次线性方程组，矩阵形式为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix},\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$.

注 线性代数起源于线性方程组的研究，矩阵是由于研究线性方程组的需要而产生的，线性代数中的很多概念都是由于研究线性方程组的需要而产生的，认识到这一点能帮助我们理解后面讲到的一些概念。

（八）矩阵的转置

对应于第一节第 9 个视频，关于这一部分内容，除了观看视频，再做下面的强调。

1.注： $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元为 $\mathbf{A}$ 中的 (j,i) 元 a_{ji}.

2.**例** $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$， $[1,2,3]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

注：（1）对于方阵，转置就是绕着主对角线做了一个上下翻转。

（2）经常用 $[1,2,3]^{\mathrm{T}}$ 这样的形式表示列向量。

3. 矩阵的转置具有下列运算性质（其中，k 是数）：

（1）$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$；

（2）$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$；

（3）$(k\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$；

（4）$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ **（注意这个公式的右边，$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ 在 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的前面）**

4. 上面第 4 个结论可以推广到有限个矩阵相乘的情况：

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}\cdots\mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

$$(\mathbf{A}^k)^{\mathrm{T}}=(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^k.$$

注：$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^{\mathrm{T}}=(\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k))^{\mathrm{T}}=(\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}$，逐步做下去就可证明第一个公式。

第二个式子是第一个式子的特例。

（九）对称矩阵与反称矩阵

对应于第一节第 9 个视频，关于这一部分内容，除了观看视频，再做下面的强调。

1. **定义** 设 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，若 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$，则称 $\mathbf{A}$ 为**对称矩阵**；若 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=-\mathbf{A}$，则称 $\mathbf{A}$ 为**反称矩阵**。

注：这个定义主要用于对称矩阵、反称矩阵的证明。

2. （1）因为转置可看成方阵绕着主对角线上下翻转，对称矩阵满足 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$，这说明对称矩阵上下翻转以后矩阵没变，所以对称矩阵的特点是：关于主对角线对称的元素两两相等。

注：对称矩阵的特点主要用于观察具体的矩阵是否为对称矩阵。

（2）$\mathbf{A}$为对称矩阵 $\Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j)元=$\mathbf{A}$ 的 (i,j)元$\Rightarrow a_{ji}=a_{ij}$，

a_{ji}和a_{ij}在$\mathbf{A}$中关于主对角线对称的位置上，

所以按照这种方法也能得知对称矩阵的特点是：关于主对角线对称的元素两两相等。

（3）$\mathbf{A}$为对称矩阵 $\Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的第$i$行=$\mathbf{A}$ 的第i 行，

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的第i行是由$\mathbf{A}$的第i列转置得到的，

所以对称矩阵的第 i 行与第 i 列的对应元素相等。

3. $\mathbf{A}$为反称矩阵 $\Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=-\mathbf{A} \Rightarrow a_{ji}=-a_{ij}$，

由$a_{ji}=-a_{ij}$可得，$a_{ii}=-a_{ii}, a_{ii}=0$

所以反称矩阵的特点是：对角元都为 0，并且关于主对角线对称的元素互为相反数。

最后强调一点，有些例题、思考题、习题的结论是需要记住的，大家要注意积累。比如，下面这些结论都应该记住的。

（1） 两个上（下）三角形矩阵的乘积还是上（下）三角形矩阵。

（2）若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶对称矩阵，则 $\mathbf{AB}$ 是对称矩阵 $\Leftrightarrow \mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.

（3）对于任意矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{A}^{T}\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{AA}^{T}$ 都是对称矩阵

（4）若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶对称矩阵，$\mathbf{P}$ 是 n 阶方阵，则 $\mathbf{P}^{T}\mathbf{AP}$ 也是对称矩阵；