2.4 分块三角行列式及矩阵乘积的行列式

（一）分块三角行列式

1. **定理 2-1** 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶方阵， $\mathbf{C}$ 为 $m\times n$ 型矩阵, 则

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

证明 由定理 1-1 可知, 只用倍加行变换可把任一方阵化为上三角矩阵, 因而可设

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{倍加行变换}} \mathbf{S} \quad (\text{上三角矩阵}),$$

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\text{倍加行变换}} \mathbf{T} \quad (\text{上三角矩阵}).$$

由于倍加变换不改变行列式的值, 所以

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{S}| = s_{11}s_{22}\cdots s_{mm},$$

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{T}| = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}\text{。}$$

其中 $s_{11},s_{22},\cdots,s_{mm}$ 为 $\mathbf{S}$ 的对角元， $t_{11},t_{22},\cdots,t_{nn}$ 为 $\mathbf{T}$ 的对角元.

对分块上三角矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ 作类同于上面的倍加行变换也可将它化为上三角矩阵, 设对 $\mathbf{C}$ 作与 $\mathbf{A}$ 同样的倍加行变换后化为 $\mathbf{H}$, 则有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{作类同于上面的倍加行变换}} \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{H} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (\text{上三角矩阵}).$$

于是, 有 $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{H} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T} \end{vmatrix} = s_{11}s_{22}\cdots s_{mm}t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}$， 所以

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

2. 定理 2-1 的结论可推广到**分块下三角行列式**和**分块对角行列式**的情况：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$$

3. 注意：一般 $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \neq |\mathbf{A}||\mathbf{D}|-|\mathbf{B}||\mathbf{C}|$。

例 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$， $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$， $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$， $\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$， 则

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 而 |\mathbf{A}||\mathbf{D}| - |\mathbf{B}||\mathbf{C}| = 1, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \neq |\mathbf{A}||\mathbf{D}| - |\mathbf{B}||\mathbf{C}|.$$

4. **知识拓展：下面讨论按副对角线看的分块对角行列式、分块下三角行列式、分块上三角行列式。**

例：设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵，$\mathbf{B}$ 为 n 阶方阵，则 $\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = (-1)^{3n} |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

证：

$$\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将$\mathbf{A}$的第一行所在的行依次与上面n个行对调，将其换到整个行列式的第一行，总共要做n次对调。这时，可得下式

$$=(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将$\mathbf{A}$的第二行所在的行依次与$\mathbf{B}$的部分所在的行对调，将其换到整个行列式的第二行，还是要做n次对调。这时，可得下式

$$=(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将$\mathbf{A}$的第三行所在的行依次与$\mathbf{B}$的部分所在的行对调，将其换到整个行列式的第三行，还是要做n次对调。这时，可得下式

$$=(-1)^{n+n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3n} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^{3n} |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

将这个结论推广到一般情况可得：

定理 设 $\mathbf{A}$ 为 m 阶方阵，$\mathbf{B}$ 为 n 阶方阵，则 $\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$，

按照上面的对调方式，可将分块行列式的上下两部分的位置互换，这对于下面的两个公式也是正确的。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|,\quad \begin{vmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|,\quad \begin{vmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$$

（二）方阵乘积的行列式

1. **定理** 2-2 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 n 阶方阵，则 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$.

证明 由定理 1-1 可知,只用倍加行变换或只用倍加列变换都能把方阵化成上三角矩阵,因此存在倍加矩阵 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_k$ 和 $\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_1,\cdots,\mathbf{Q}_l$，使得

$$\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{S}\ \text{（做倍加行变换将}\mathbf{A}\text{化成上三角矩阵}\mathbf{S}\text{）}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l = \mathbf{T}\ \text{（做倍加列变换将}\mathbf{B}\text{化成上三角矩阵}\mathbf{T}\text{）}$$

由性质 2-5(倍加变换不改变行列式的值)及例 2-2(上三角行列式等于其对角元的乘积)可得

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{S}| = s_{11}s_{22}\cdots s_{nn},\qquad |\mathbf{B}| = |\mathbf{T}| = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}..$$

因为矩阵乘法满足结合律，所以

$$\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1(\mathbf{AB})\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l = (\mathbf{P}_k\cdots\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A})(\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_l) = \mathbf{ST}$$

上式表明通过倍加行变换和倍加列变换可将 $\mathbf{AB}$ 化成 $\mathbf{ST}$.

因为倍加变换不改变行列式的值，所以 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{ST}|$.

由第一章例 1-5 可知,上三角矩阵 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{T}$ 的乘积 $\mathbf{ST}$ 仍为上三角矩阵,并且 $\mathbf{ST}$ 的对角元为 $s_{11}t_{11}, s_{22}t_{22},\cdots,s_{nn}t_{nn}$,所以

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{ST}| = (s_{11}t_{11})(s_{22}t_{22})\cdots(s_{nn}t_{nn})$$

$$= (s_{11}s_{22}\cdots s_{nn})(t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}) = |\mathbf{S}||\mathbf{T}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

即 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$.

2. **根据定理 2-2 可得**

推论 2-5 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, k 为正整数,则

$$\left|\mathbf{A}^k\right| = \left|\mathbf{A}\right|^k.$$

3. 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为同阶方阵，则 $\left|\mathbf{AB}\right| = \left|\mathbf{BA}\right|$.

证：因为 $\left|\mathbf{AB}\right| = \left|\mathbf{A}\right| \cdot \left|\mathbf{B}\right|$, $\left|\mathbf{BA}\right| = \left|\mathbf{B}\right| \cdot \left|\mathbf{A}\right|$，所以 $\left|\mathbf{AB}\right| = \left|\mathbf{BA}\right|$.

4. 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 不是同阶方阵，则 $\left|\mathbf{AB}\right|$ 不一定等于 $\left|\mathbf{BA}\right|$.

例 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\mathbf{AB}\right| = 1, \left|\mathbf{BA}\right| = 0, \left|\mathbf{AB}\right| \neq \left|\mathbf{BA}\right|$$