1.1 映射与函数

1. 求函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数。

2. 设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$, 求函数 $f(1+x)\cdot f(1-x)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0 \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

4. 设 $f(x)$ 是定义中 $(-l,l)$ 上的任意函数。
证明：$\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数；$\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数。

1.4 无穷小与无穷大 & 1.5 极限运算法则

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的图形的水平渐近线和铅直渐近线。

2. 已知 $f(x)=\dfrac{px^2-2}{x^2+1}+2qx+3$，当 $x\to\infty$ 时，p,q 取何值 $f(x)$ 为
①无穷小？②无穷大？

3. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=2$，求 a 和 b.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{3x+1}-2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x})$;

(5) $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{2019^n+2020^{n+1}}{2020^n+2021^n}$;

(6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(3x+1)^{100}(5x-2)^{200}}{(3x-1)^{300}}$;

1.6 极限收敛准则 两个重要极限

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1-2x}{1+3x})^{\dfrac{1}{x}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\dfrac{1}{n}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x+2x}{\sin 2x+3x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\tan 2x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$

(6) $\lim\limits_{x\to +\infty}x[\ln(x+1)-\ln(x-1)]$

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=4$，求 a.

3. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且 $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^3-3}+(1+x\sin\dfrac{1}{x})\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

4. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件：$x_1 > 1$，$x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限。

1.7 无穷小的比较

利用等价无穷小代换求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\tan x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan 3x}{\ln(2x+1)}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{(\sin 2x)^2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}$

1.8 函数的连续性与间断点

求下列函数的间断点，并说明间断点的类型。

(1) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

(2) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$

(3) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

(4) $f(x) = \frac{\tan x}{x} + \sin\frac{1}{x-2}$

1.10 闭区间上连续函数的性质

1. 证明方程 $x = \sin x + 2$ 至少有一个小于 3 的正根。

2. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) < a$, $f(b) > b$.
   试证：至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \xi$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0 \leq f(x) \leq 1$，证明方程 $x = f(x)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个根。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a < c < d < b$，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $p \cdot f(c) + q \cdot f(d) = (p+q) \cdot f(\xi)$，其中 p, q 为任意正常数。