2019-2020 学年第一学期期中考试

《高等数学 AI》、《微积分 AI》A 答案

一、选择题：1 一 15 小题，每小题 3 分，共 45 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上

1. (C)； 2. (A)； 3. (B)； 4. (B)；5. (C)；

6. (C)； 7. (A)； 8. (D)；9. (C)；10. (A)；

11. (A)；12. (A)；13. (D)；14. (C)；15. (D)；

二 、解答题： 16—21 小题，共 55 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16.（本题满分 10 分）

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\sin x}$$

解 先分解分母：

$$\tan x-\sin x=\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=\sin x\left(1-\cos x\right)\frac{1}{\cos x}$$

当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 为等价无穷小，$1-\cos x$ 与 $\frac{x^2}{2}$ 为等价无穷小，而 $\cos x\to 1$，因此原极限等于

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}\qquad (5\text{ 分})$$

又因为

$$\sin x-\arctan x=x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)-\left(x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)$$

$$=\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\qquad (8\text{ 分})$$

所以原极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{1}{3}\qquad (10\text{ 分})$$

17.（本题满分 10 分）

求数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cdot\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}\right)$$

解　记：

$$x_n=\cos\frac{a}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos\frac{2a}{n^{\frac{3}{2}}}\cdots\cos\frac{na}{n^{\frac{3}{2}}}$$

对上式取对数，得

$$\ln x_n=\ln\left(\cos\frac{a}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos\frac{2a}{n^{\frac{3}{2}}}\cdots\cos\frac{na}{n^{\frac{3}{2}}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n^{\frac{3}{2}}}$$ (2 分)

利用等式 $\cos=1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)$，得

$$\cos\frac{ka}{n^{\frac{3}{2}}}=1-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}+o\left(\frac{k^2}{n^{\frac{9}{2}}}\right)=1-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$ (5 分)

根根据 $\ln(1+x)=x+o(x)$，可得

$$\ln\cos\frac{ka}{n^{\frac{3}{2}}}=\ln\left(1-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$ (7 分)

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n^{\frac{3}{2}}}=-\frac{a^2}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+o\left(1\right)=-\frac{a^2}{2n^3}\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)+o\left(1\right)$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=-\frac{a^2}{6}$$ (9 分)

因而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cdot\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}x_n=e^{-\frac{a^2}{6}}。$$ (10 分)

18.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=0$, $f''(0)$ 存在．若

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$$

求 $F'(x)$，并证明 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续。

【求解与证明】首先求 $F'(x)$，当 $x\neq0$ 时，由求导法则易求 $F'(x)$，而 $F'(0)$ 需按定义计算.

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}\ \underline{\underline{\frac{0}{0}\text{型}}}$$

(3 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

于是

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0,\end{cases}$$ (5 分)

然后讨论 $F'(x)$ 的连续性，当 $x\neq0$ 时由连续性的运算法则得到 $F'(x)$ 连续。

当 $x=0$ 时可按定义证明 $\lim\limits_{x\to0}F'(x)=F'(0)$ 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限问题，可用洛必达法则，

$$\lim_{x\to0}F'(x)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left[f'(x)x-f'(0)x\right]-\left[f(x)-f'(0)x\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2}=f''(0)-\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}$$

$$=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=F'(0)$$ (8 分)

即 $F'(x)$ 在 $x=0$ 也连续，因此，$F'(x)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 连续。 (10 分)

19.（本题满分 10 分）

设可微函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y=2$ 所确定，试求 $f(x)$的极大与极小值。

解　方程两边同时对 x 求导，得

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0 \qquad ①$$

即　$x^2-1+\left(y^2+1\right)y'=0$，从而 $y'=\dfrac{1-x^2}{y^2+1}$

令 $y'=\dfrac{1-x^2}{y^2+1}=0$，得到驻点 $x_1=-1$, $x_2=1$。（2 分）

代入原方程得：

$-1+\left[y(-1)\right]^3+3+3y(-1)=2$，$\left[y(-1)\right]^3+3y(-1)=0$，即得，$y(-1)=0$；

$1+\left[y(1)\right]^3-3+3y(1)=2$，即得，$y(1)=1$，（6 分）

将①两边同时对 x 求导，得

$$6x+6y\left(y'\right)^2+3y^2\cdot y''+3y''=0$$

$x_1=-1$,代入得　$-6+6y(-1)\left(y'(-1)\right)^2+3y^2(-1)\cdot y''(-1)+3y''(-1)=0$

$$-6+3y''(-1)=0$$

$x_2=-1$,代入得　$6+6y(1)\left(y'(1)\right)^2+3y^2(1)\cdot y''(1)+3y''(1)=0$

$6+3y^2(1)\cdot y''(1)+3y''(1)=0$，　$6+6y''(1)=0$　（8 分）

即得 $y''(-1)=2>0$，$y(-1)=0$ 是极小值；$y''(1)=-1<0$，$y(1)=1$，是极大值。（10 分）

20.（本题满分 10 分）

设 $y=\sin\left(\ln\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}\right)$ $(x>0)$，求 y'。

解：

$$y'=\cos\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x}{1+x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x}{1+x^2}\right)'$$ (2 分)

$$=\cos\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x}{1+x^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}\right)'$$ (5 分)

$$=\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{x}{1+x^2}\right)\cdot\left(\frac{2\left(1+x^2\right)}{x}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$ (8 分)

$$=\frac{1-x^2}{x\left(1+x^2\right)}\cdot\cos\left(\ln\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}\right)$$ (10 分)

21.（本题满分 5 分）

设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上有 n 阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}f^{(n)}(x)=l$。证明 $f^{(n)}(x)$ 在 x=0 点处连续。

【证】 设 $0+\triangle x\in(-a,a)$， 将 $f^{(n-1)}(x)$ 在区间 $[0,\triangle x]$ 或 $[\triangle x,\ 0]$ 上应用 Lagrange 中值定理, 即

$$f^{(n-1)}(\Delta x)-f^{(n-1)}(0)=f^{(n)}(\xi)\Delta x,$$ (5 分)

其中 ξ 在 0 与 $\triangle x$ 之间。

$$f^{(n)}(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(\Delta x)-f^{(n-1)}(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f^{(n)}(\xi)=l$$ (8 分)

从而

$$\lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)=l=f^{(n)}(0)。$$

即证明 $f^{(n)}(x)$ 在 x=0 点处连续。 (10 分)