1. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{bmatrix}$

因为该二次型的秩为2，即$r(\mathbf{A})=2$，所以$|\mathbf{A}|=0$

由$|\mathbf{A}|=24a-72=0$，求得$a=3$.

注：也可通过初等变换将$\mathbf{A}$ 化成行阶梯矩阵来求a.

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ \lambda-4 & \lambda-4 & 0 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda^2-9\lambda)=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=9$.

2.答案为3

因为正定二次型对应的实对称矩阵$\mathbf{A}$ 的行列式大于0 ，

所以$r(\mathbf{A})=3$，该二次型的秩为3 .

3.答案为3

正定二次型的正惯性指数为n,在本题中n=3.

4. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 4 & k \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$

该二次型为正定二次型$\Leftrightarrow$各阶顺序主子式都大于0

$$\begin{cases} k>0 \\ 4k>0 \\ k(4-k^2)>0 \end{cases}，解得，0<k<2$$

5. 答案只有D正确

注：虽然$P^{-1}\mathbf{A}P=B$能保持特征值不变，但相似变换会改变对称性。

例如：$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$的特征值都是单特征值，可相似对角化，

$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$相似，

也可以说，能通过相似变换把$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$变成$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$为正定矩阵，$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$不是正定矩阵。

6. 答案为BD

7. 答案为BD

8. 答案为D

9. 答案为B

10. 答案为C

11. 正确

12. 错误，例：设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}$，则$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}$，$\mathbf{A}^2$是正定矩阵，但$\mathbf{A}$不是正定矩阵

13. 错误