第五章 向量代数与空间解析几何

5.1 向量及其运算

5.1.1 向量的概念

即有大小又有方向的量，称为向量（或矢量）。

在数学上，往往以有向线段表示向量，其方向表示向量的方向，其长度表示向量的大小。以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$（图 5－1)。有时也用一个黑体字来表示向量，例如 $\boldsymbol{a}$、**r**、**v**、**F** 或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等等。

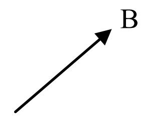


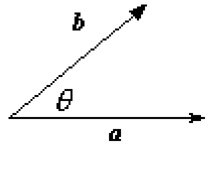
图 5－1

向量的大小称为向量的模。向量 $\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$。

在实际问题中，有些向量与其起点有关（例如质点运动的速度，与该质点的位置有关，力与力的作用点有关），有些向量与其起点无关。由于一切向量的共性是大小和方向，所以在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称为自由向量（简称向量）,即只考虑向量的大小和方向，而不论他的起点在那。

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 大小相同方向一致，就说两个向量相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的。

模等于 1 的向量叫做单位向量。模等于零的向量叫做零向量，记作 0 或 $\vec{0}$。零向量的起点与终点重合，它的方向是任意的。与向量 $\boldsymbol{a}$ 模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记做 $-\boldsymbol{a}$。



若将向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$平移，使它们的起点重合，则表示它们的有向线段的夹角$\theta(0 \le \theta \le \pi)$称为向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角（见图 5-2）,记做$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

两个非零向量如果它们的方向相同或者方向相反，就称这两个向量平行。向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，记作$\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$，零向量平行于任意向量。

图 5－2

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上，称两向量共线。若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{2}$，则称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直或正交，记做$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$。

类似还有向量共面的概念。设有k（$k \ge 3$）个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果k个终点和公共起点在一个平面上，就称这k个向量共面。

5.1.2　向量的线性运算

1．向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，任取一点A，作$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，再以$B$为起点，作$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$，连接$AC$（图 5－3），那么向量$\overrightarrow{AC} = c$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

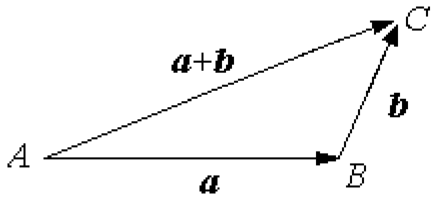


图 5－3

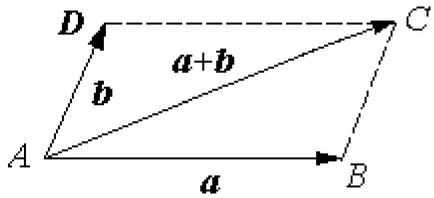


图 5－4

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

此方法称为三角形法则。

向量的平行四边形法则：当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行时，作$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，以$AB, AD$为边作一平行四边形$ABCD$，连接对角线$AC$ (图 5－4)，显然向量$\overrightarrow{AC}$即等于向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

向量加法复合下列运算规律：

（1）　交换率　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

（2）　结合率　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由图 5－4 易得交换率 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$　　$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$

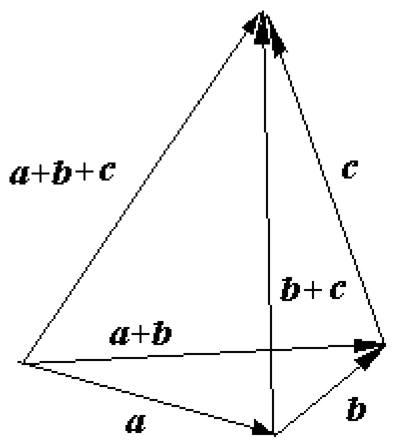


图 5－5

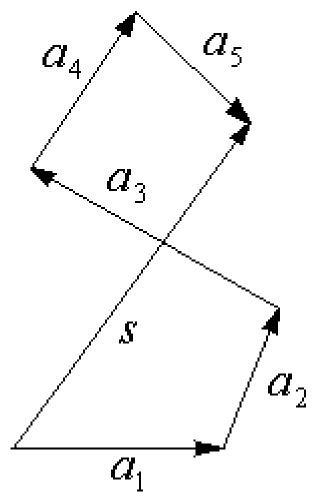


图 5－6

由图 5－5 易证结合率，由加法的交换率和结合率，n 个向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geq 3)$ 相加可以写成 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，由三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这一向量即为所求之和。

我们规定两个向量 ***b*** 与 ***a*** 的差 ***b-a=b***+(-***a***).即把向量-***a*** 加到 ***b*** 上，便得 ***a*** 与 ***b*** 的差 ***b-a***(图 5－7(a)).

特别地，当 ***b=a*** 时，有 ***a-a=a***+(-***a***)=***0***.

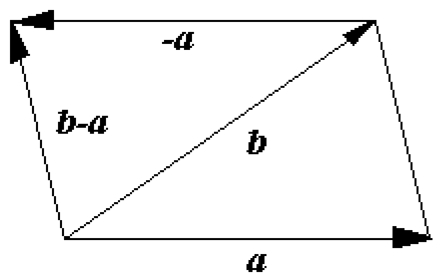


图 5－7（a）

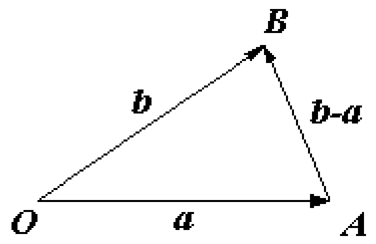


图 5－7（b）

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

因此，若把向量 ***a*** 与 ***b*** 移到同一点 *O*,则从 ***a*** 终点 A 向 ***b*** 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 ***a*** 与 ***b*** 的差 ***b-a***(图 5-7(b)).

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$$

其中等号在 ***a*** 与 ***b*** 同向或反向时成立。

2．向量与数的乘法

向量 ***a*** 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda \boldsymbol{a}$ 规定 $\lambda \boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 ***a*** 相同，当 $\lambda<0$ 时与 ***a*** 相反，当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda \boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda \boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方

向可以是任意的。

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}，（-1）\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积复合下列运算规律：

（1）结合率 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2）分配率 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$。试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点（图 5－8）

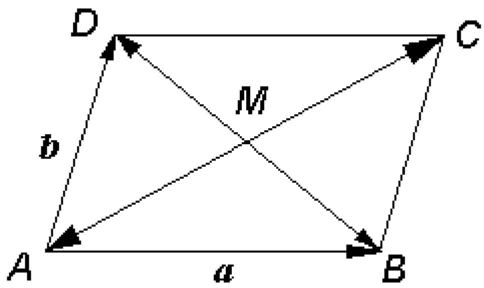


图 5－8

解 由于平行四边形的对角线互相平行，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$

于是 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$。

因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

设 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，则 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 同向，即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，因此，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$。

我们规定，当 $\lambda\neq0$ 时，$\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$，则上式可写为 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a$。即向量除以它的模为与原向量的单位向量。

命题 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq0$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

证：条件的充分性是显然的，下面证必要性

设 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$，设 $|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，故 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

再证数λ的唯一性。设$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式想减，便得$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，即$|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$.因$|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故$|\lambda-\mu|=0$，即$\lambda=\mu$.

命题 2　如向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面，而$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$部共线，则存在实数λ和μ，使得$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

证明　因为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不共线，故可知$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$均为非零向量，过一定点 O 作 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{c}$.由题设 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OC}$ 共面。

过点 C 分别作直线 $\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OA}$ 的平行线，交 $\boldsymbol{OA}$ 与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{OB}$ 与 $\boldsymbol{F}$（图 5-10）,从而 $\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{OE}+\boldsymbol{OF}$，又因 $\boldsymbol{OE}$ 与 $\boldsymbol{OA}$ 共线，由命题 1 知存在实数λ，使得 $\boldsymbol{OE}=\lambda\boldsymbol{OA}=\lambda\boldsymbol{a}$ 同理存在实数μ，使得 $OF=\mu\boldsymbol{OB}=\mu\boldsymbol{b}$，于是 $\boldsymbol{OC}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$。

命题 3 若向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$不共面，则对任一向量 $\boldsymbol{d}$，存在实数λ、μ、ν，使得 $\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$。

5.1.3　向量的数量积（点积、内积）

设一物体在常力作用 $\boldsymbol{F}$ 下沿直线从点M_1移动到点M_2。依 s 表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$。由物理学知道，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为 $W=|\boldsymbol{F}||s|\cos\theta$，其中$\theta$为 $\boldsymbol{F}$ 与 s 的夹角（图 5－9）。

由此，我们可以看到有时要对两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 作这样的运算，其结果为一数值，等于两个向量的模与它们夹角余弦的乘积。我们称这样的运算为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积、点积或内积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$（图 5－10），即　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

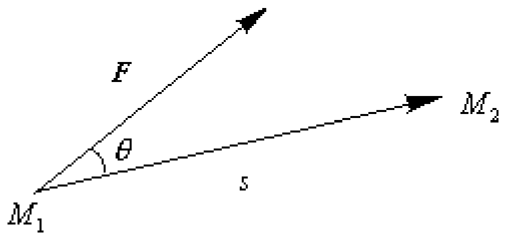


图 5－9

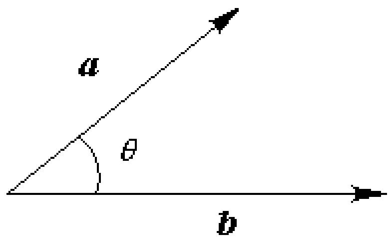


图 5－10

由此定义，力做功可以表示为　$W=F\cdot s$。

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 所在的直线为 l，且$(\hat{a,b})=\theta$。用有限线段 $\boldsymbol{AB}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$，过点 $\boldsymbol{A}$ 和点 $\boldsymbol{B}$ 作平面垂直于直线 l，并与 l 分别交于点 A' 和点 B' 分别是点 $\boldsymbol{A}$ 和点 $\boldsymbol{B}$ 在 l 上的投影，称有向线段 $A'B'$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量。容易看出 $A'B'=(|\boldsymbol{AB}|\cos\theta)e_a=(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)e_a$ 称上式中的实数$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影，并记做 $\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$。当$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$时，$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影向量的长度；当$\dfrac{\pi}{2}<\theta\le\pi$时，$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影向量的长度的相反数；当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$ 等于零。投影具有维一性。由数量积的定义，立即得到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

$=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$

投影具有下列性质：

$$\mathrm{Prj}_a(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}\qquad \mathrm{Prj}_a(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{c}$$

数量积的运算规律

（1） 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$. 由定义显然

（2） 数乘交换率$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

（3） 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

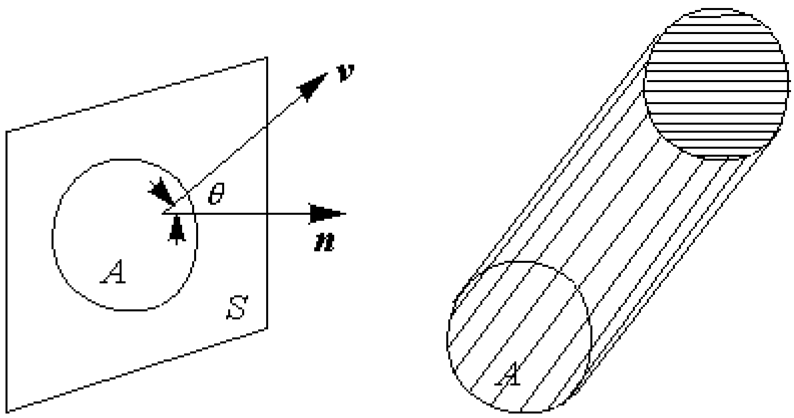
（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$. 这时因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$.或 $|a|=\sqrt{a\cdot a}$。

（2）$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\ (0\le\theta\le\pi)$。

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow$ 是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 这是因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\cos\theta=0\Leftrightarrow$ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

由于零向量的方向可以看作是任意的，故可以认为零向量与任何向量都垂直。因此上述结论可以叙述为：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow$ 是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

例 2 设液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域，液体在这区域上各点处的速度均为（常向量）$\boldsymbol{v}$。设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 S 的单位向量（图 5－11（a）），计算单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指向一侧的液体的质量 P（液体得密度为 ρ）.



（a） （b）

图 5－11

解 该斜柱体的斜高$|\boldsymbol{v}|$，斜高与地面垂线的夹角为 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ，所以这柱体的高为$|\boldsymbol{v}|\cos\theta$,体积为 $A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.

从而，单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指向一侧的液体的质量为

$$P=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

5.1.4 向量的向量积（叉积、外积）

设 O 为一根杠杆 L 的支点.有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处. $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ（图 5－13）.由力学规定，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$，它的模

$$|\boldsymbol{M}|=|OQ||\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

而$\boldsymbol{M}$的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$与$\boldsymbol{F}$所确定的平面，$\boldsymbol{M}$的指向是按右手规则从$\overrightarrow{OP}$以不超过π的角转向$\boldsymbol{F}$来确定的，如图 5－14。

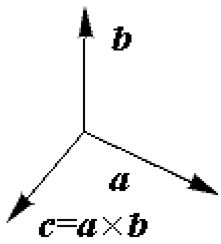


图 5－12

设向量$\boldsymbol{c}$由两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$按下列方式给出：

$\boldsymbol{c}$的模$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中$\theta$为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$间的夹角；

$\boldsymbol{c}$的方向垂直于$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$所决定的平面，$\boldsymbol{c}$的指向按右手规则从$\boldsymbol{a}$转向$\boldsymbol{b}$来决定（图 5－12）

那么向量$\boldsymbol{c}$叫做向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的向量积，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

因此上面的力矩$\boldsymbol{M}$等于$\overrightarrow{OP}$与$\boldsymbol{F}$的向量积，即 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

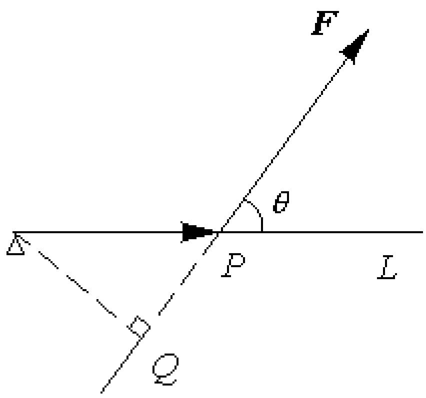


图 5－13

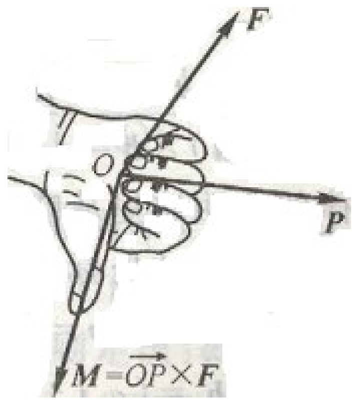


图 5－14

向量积的几何意义：

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的模$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$是以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积

（2）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与一切即平行于$\boldsymbol{a}$又平行于$\boldsymbol{b}$的平面垂直。

向量积的运算规律

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

（3）$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（$\lambda$为数）.

向量积的性质

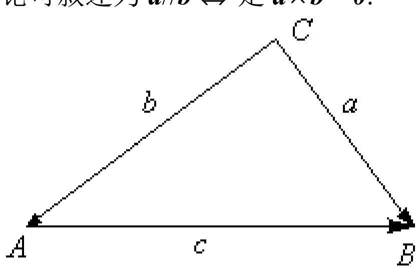
（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。 这是因为夹角$\theta=0$，所以$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}^2|\sin 0=0$.

（2）对于两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$：如果$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，那么$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，如果$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$那么$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

这是因为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，但$|\boldsymbol{a}|\neq\boldsymbol{0}.|\boldsymbol{b}|\neq\boldsymbol{0}$，所以$\sin\theta=0$，于是$\theta=0$或$\theta=\pi$；反之，如果$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那么$\theta=0$或$\pi$，于是$\sin\theta=0$，从而$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\boldsymbol{0}$,即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

由于零向量可以认为与任意向量平行，所以上述结论可叙述为$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

例 3 设ΔABC的三条边分别是a、b、c(图 5－15)，试用向量运算证明正弦定理



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

证明　注意到 $\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB}$,故有

$$\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}=(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB})\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{CA}\times\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}$$
$$=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}$$
$$=\boldsymbol{AB}\times(\boldsymbol{CB}+\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}$$

图 5－15

于是得到　$\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}$

从而　$|\boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{CA}|=|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CA}|=|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CB}|$

即　$ab\sin C＝cb\sin A＝ca\sin B$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

5.1.5 向量的混合积

设已知三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$. 如果先作两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，把所得的向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 再作数量积（$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$）$\cdot\,\boldsymbol{c}$，这样得到的数量叫做三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混和积，记作 $[\boldsymbol{abc}]$.

向量的混和积$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 是这样的一个数，它的绝对值表示以向量 a、b、c 为棱的平行六面体的体积. 如果向量 a、b、c 组成右手系(即 c 的指向按右手规则从 a 转向 b 来确定)，那么混和积的符号是正的；如果 a、b、c 组成左手系(即 c 的指向按左手规则从 a 转向 b 来确定)，那么混和积的符号是负的.

当$[abc]=0$ 时，平行六面体的体积为零，此时该六面体的三条棱落在同一平面上，即 a、b、c 共面；反之，当 a、b、c 共面时，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，此时 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，由混合积的定义，立即得到$[abc]=0$。于是得到三向量 a、b、c 共面的充要条件是$[abc]=0$。

作业　1，3，5，6，7，10，12

5.2 点的坐标与向量的坐标

5.2.1 控件直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）z 轴（竖轴），统称坐标轴。它们构成一个空间直角坐标系。称为 $Oxyz$ 坐标系或 $[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 坐标系(图 5－16)，x 轴、y 轴、z 轴组成右手系。如图 5－17

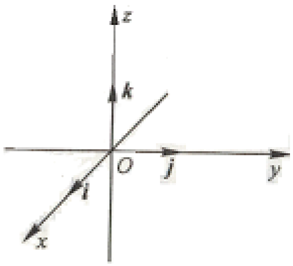


图 5－16

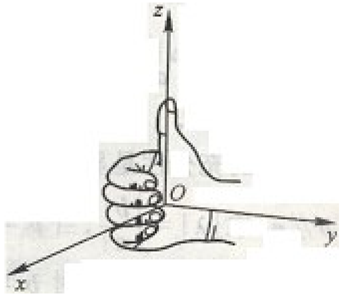


图 5－17

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面。x 轴、y 轴确定的叫 xOy 面，y 轴、z 轴确定的叫 yOz，z 轴、y 轴确定的叫 zOx 面.三个坐标面分空间为八个部分，每一部分叫做一个卦限，含有 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的叫第一卦限，其他第二、第三、第四卦限在 xOy 面上方，按逆时针方向确定。第一卦限下面的为第五，第二下的为第六、第三下的为第七、第四下的为第八。如图 5－18

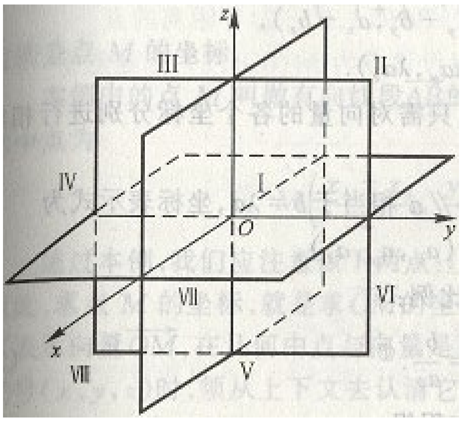


图 5－18

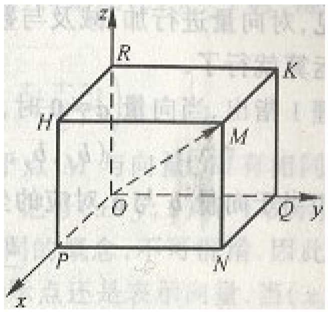


图 5－19

设 M 是空间的一点，过点 M 分别作平面垂直于三条坐标轴，并依次与 x 轴、y 轴、z 轴交于 P、Q、R 三点，P、Q、R 三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y、z，这样点 M 就和有序数组 (x,y,z) 建立了一一对应的关系。我们称有序数组 (x,y,z) 为点 M 的坐标，依次把 x,y,z 称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，并将点 M 记做 $M(x,y,z)$（图 5-19），特别地有 $P(x,0,0)$,$Q(0,y,0)$,$R(0,0,z)$,$O(0,0,0)$.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点。过 M_1 和 M_2 各作三各垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面。这 6 个平面围成一个长方体，M_1M_2 为其对角线，该长方体的三条棱的长度分别为 $|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$、$|z_2-z_1|$，于是得到

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 两点间的距离为

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 于坐标原点 O（0，0，0）的距离为 $|MO|=\sqrt{x^2+y^2+x^2}$ 。

例 1 已知点 $A(4,1,7)$、$B(-3,5,0)$，在 y 轴上求一点 M，使得 $|MA|=|MB|$.

解　因为点在 y 轴上，故设其坐标为 $M(0,y,0)$，则由两点间的距离公式，有

$$\sqrt{(4-0)^2+(1-y)^2+(7-0)^2}=\sqrt{(-3-0)^2+(5-y)^2+(0-0)^2}$$

解得 $y=-4$，故所求点为 $M(0,-4,0)$

例 2　求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解　因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6$$
$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即△$M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

任给向量 r，对应有点 M，使 $\overrightarrow{OM}=r$，以 $\overrightarrow{OM}$ 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$，如图 7－12 所示，有

$$r=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$、$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$、$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，则 $r=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量。

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$ 三个分量，进而确定了 x、y、z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x、y、z 也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M.于是点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x、y、z 之间有一一对应的关系

$$M\leftrightarrow \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\mathrm{x}\boldsymbol{i}+\mathrm{y}\boldsymbol{j}+\mathrm{z}\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x，y，z),$$

据此，定义：有序数 x、y、z 称为向量 $\boldsymbol{r}$(在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x，y，z)$。

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径.上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标。记号$(x，y，z)$即表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

如点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同样，如点 M 在 zOx 面上，则 $y=0$；在 xOy 面上，则 $z=0$。如点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；同样，在 y 轴上的点，则 $z=x=0$；在 z 轴上的点，有 $x=y=0$。如点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

5.2.2 向量运算的坐标表示

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下：

设 $$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)，\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)，$$

即 $$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}，\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

利用向量的运算规律，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}，(\lambda\text{为实数})$$

即 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x，a_y+b_y，a_z+b_z)$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x，a_y-b_y，a_z-b_z)$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x，\lambda a_y，\lambda a_z)$$

由此可见，对向量进行加、减及数乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了，5.1 节命题 1 指出，当向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，向量 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,坐标表示式 $(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$ 这就相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的对应坐标称比例：

即 $$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

例 3 设有点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量 M_1M_2 的坐标表示式。

解 由于 $M_1M_2=OM_2-OM_1$，而 $OM_1=(x_1,y_1,z_1)$，$OM_2=(x_2,y_2,z_2)$，于是

$$OM_2-OM_1=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

即 $M_1M_2=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

例 4 已知两点 A（4，0，5）和 B（7，1，3），求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解 因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(7，1，3)-(4，0，5)=(3，1,-2)，$$

所以 $$\overrightarrow{AB}=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}，$$

于是 $$\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2).$$

例 5　求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{a}$=（2,1,2），$\boldsymbol{b}$=(-1,1,-2).

解　解此方程组得 $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$
以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 代入，即得

$$\boldsymbol{x}=2(2,1,2)-3(-1,1,-2)=(7,-1,10)$$
$$\boldsymbol{y}=3(2,1,2)-5(-1,1,-2)=(11,-2,16).$$

例 6 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求点 M，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 如图 7－13 所示.由于

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$，

因此 $$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

从而 $$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

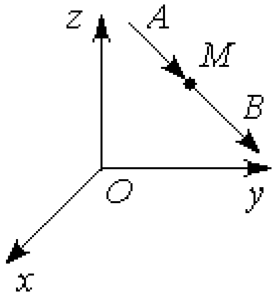


图 7－13

以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的坐标（即点 A、点 B 的坐标）代入

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$

本例中的点 M 称为定比分点，特别地当 $\lambda=1$ 时，得线段 AB 的中点为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

利用向量的坐标运算，计算向量的模、方向角

设向量 $\boldsymbol{r}$=（x，y，z），作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，则点 M 的坐标为 $M(x,y,z)$，由两点间距离公式立即得到　$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。

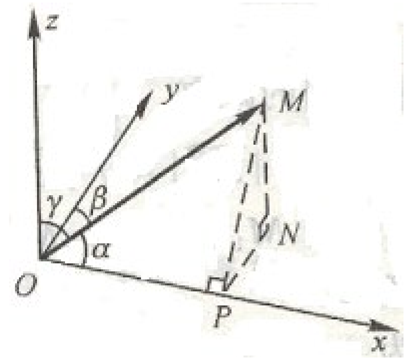


图 5－20

非零向量 **r** 与三条坐标轴的夹角α,β,γ称为向量 **r** 的方向角.从图 5－20 可见，设

r＝（x，y，z），由于 x 是有向线段$\overrightarrow{OP}$的值，$MP\perp OP$，故

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OM|}=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}，类似地\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}，\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

从而
$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e}_r$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$称为向量 **r** 的方向余弦。上式表明，以向量 **r** 的方向余弦为坐标的向量就是与 **r** 同方向的单位向量$\boldsymbol{e}_r$，并由此可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 7　已知两点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2(1,3,0)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})$$

$$=(-1,1,-\sqrt{2});$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2;$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

下面我们来推导数量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$。按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 互相垂直，所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$，又由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的模均为 1，所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$. 因此得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

这就是两个向量数量积的坐标表示式.

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时，有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

将向量的坐标表示式代入上式得

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}+\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

由此可得 $a\perp b$ 的充要条件是 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

例 8 已知三点 $M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$和 $B(2,1,2)$, 求$\angle AMB$.

解 作向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，则$\angle AMB$ 为向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角. 这时 $\overrightarrow{MA}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$，从而

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times1+1\times0+0\times1=1;$$

$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2};$$

$$\overrightarrow{MB}=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

从而

$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

由此得 $\angle AMB = \dfrac{\pi}{3}$.

例 9　设立方体得一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且$|OA|=a$，求$\overrightarrow{OA}$在方向 OM 上的投影 $\mathrm{prj}_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

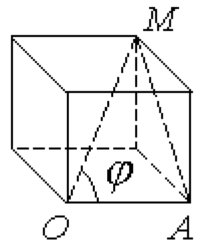


图 5－21

解　如图 5－21 所示，记$\angle MOA=\varphi$，有

$$\cos\varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是 $$\mathrm{prj}_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{OA}\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

下面来推导向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$。按向量积的运算规律可得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$=a_x\boldsymbol{i}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+$$

$$a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+$$

$$a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{I})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}).$$

由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$，所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

为了帮助记忆，利用三阶行列式，上式可以写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

例 10　设 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$，$b=(1,-1,2)$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

例 11 已知三角形 ABC 的顶点分别是 A（1，2，3）、B（3，4，5）、和 C（2，4，7），求三角形 ABC 的面积.

解　由向量积对于，可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A$$
$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

由于$|\overrightarrow{AB}|$＝（2，2，2），$|\overrightarrow{AC}|$＝（1，2，4），因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

于是

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

例 12 设刚体以等角速度ω绕l轴旋转，计算刚体上一点M的线速度.

解　刚体绕l轴旋转时，我们可以用在l轴上的一个向量ω表示角速度，它的大小等于角速度的大小，它的方向由右手规则定出：即以右手握住l轴，当右手的四个手指的转向与刚体的旋转方向一致时，大拇指的指向就是ω的方向（图 5－22）.

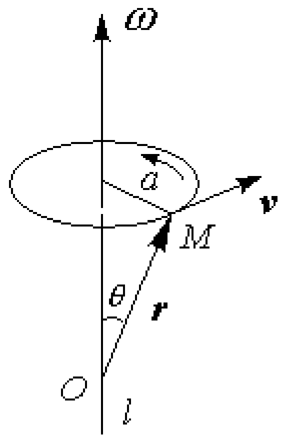


图 5－22

设点M到旋转轴l轴上任取一点O做向量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，并以$\theta$表示$\omega$与$\boldsymbol{r}$的夹角，那么

$$a=|\boldsymbol{r}|\sin\theta.$$

设线速度为$\boldsymbol{v}$，那么由物理学上线速度与角速度的关系可知，$\boldsymbol{v}$的大小为

$$|\boldsymbol{v}|=|\omega|a=|\omega||\boldsymbol{r}|\sin\theta;$$

$\boldsymbol{v}$的方向垂直于通过点M的与l轴的平面，即$\boldsymbol{v}$垂直于ω与$\boldsymbol{r}$；又$\boldsymbol{v}$的指向是使ω、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$符合右手规则，因此有$\boldsymbol{v}=\omega\times\boldsymbol{r}$.

类似可得向量混合积的表达式，设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

例 13　已知不在一平面上的四点：A（x_1,y_1,z_1）、B（x_2,y_2,z_2）、C（x_3,y_3,z_3）、D（x_4,y_4,z_4）. 求四面体$ABCD$的体积.

解　由立体几何知道，四面体的体积V_T等于以向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体的体积的六分之一. 因而

$$V_T=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$,

$$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1),$$

$$\overrightarrow{AD}=(x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1)$$

所以

$$V_T=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

上式中符号的选择必须和行列式的符号一致.

作业 3，4，6，8，10，13，，15

5.3 空间的平面与直线

5.3.1 平面

平面的法线：垂直于平面的任一非零向量称为平面的法线。平面上的任一向量均垂直于平面的法线。

设已知平面上的一点 $M_0(x_0,y_0\,z_0)$ 及其法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$, 下面求平面的方程。

设 M（x，y，z）为平面 Π 上异于 M_0 的任一点（图 5－23），那么向量 $\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$，从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$.由于 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，$\overrightarrow{M_0M}=（x-x_0,y-y_0,z-z_0）$,所以有

$A（x-x_0）+B（y-y_0）+C（z-z_0）=0.$ (1)

这就是平面 Π 上任一点的坐标 x，y，z 满足的方程；反过来不在平面 Π 上点的坐标 x，y，z 显然不满足方程（1）。方程（1）称为平面的点法式方程.

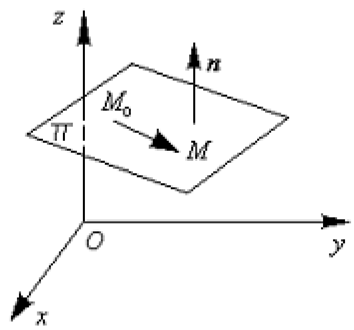


图 5－23

例 1 已知空间两点 $M_1(1,2,-1)$ 和 $M_2(3,-1,2)$，求经过点 M_1 且与直线 M_1M_2 垂直的平面方程。

解 显然 M_1M_2 就是平面的一个法向量

$$M_1M_2=(3-1,-1-2,2+1)=(2,-3,3)$$

由点法式方程可得所求平面的方程为

$$2(x-1)-3(y-2)+3(z+1)=0$$

即 $$2x-3y+3z+7=0$$

例 2 求过三点 M_1（2，－1，4）、M_2（－1，3，－2）和 M_3（0，2，3）的平面的方程。

解 先找出这平面的法线向量 $\boldsymbol{n}$. 由于向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_1M_3}$ 都垂直，而 $\overrightarrow{M_1M_2}$ ＝（－3，4，－6），$\overrightarrow{M_1M_3}$ ＝（－2，3，－1），所以可取它们的向量积为 $\boldsymbol{n}$：

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=14\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

根据平面的点法式方程（1），得所求平面的方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

即 $$14x+9y-z-15=0.$$

本题也可以按下面的方法来解

设 $M(x,y,z)$ 是平面上的任意一点，则向量 M_1M，M_1M_2，M_1M_3 共面，由混合积的几何意义可得 $$[M_1M\ M_1M_2\ M_1M_3]=0$$

即 $$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z-4\\ -1-2 & 3+1 & -2-4\\ 0-2 & 2+1 & 3-4\end{vmatrix}=0$$

化简即得 $$14x+9y-z-15=0$$

一般地，过已知三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

该方程称为平面的三点式方程

由点法式方程可知平面的方程可以使用三元一次方程来表示，反过来，设有一次方程

$$Ax+By+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0. \tag{2}$$

任取满足该方程的一组数 x_0，y_0，z_0，即

$$A\,x_0+B\,y_0+\mathrm{C}\,z_0+\mathrm{D}=0. \tag{3}$$

由（2）－（3）

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+\mathrm{C}(z-z_0)+\mathrm{D}=0. \tag{4}$$

与点法式相比可知（4）为过点 $M_0(x_0,y_0\,z_0)$，法向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$的平面方程。由于（4）

与（2）通解，可知任一三元一次方程（2）的图形总是一个平面。方程（2）称为平面的一般方程，其中 x，y，z 的系数就是该平面的一个法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标，即 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$.

当 $D＝0$ 时，方程（2）成为 $Ax+By+Cz=0$，它表示一个过原点的平面.

当 $A＝0$ 时，方程（2）成为 $By+Cz+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(0, B, C)$垂直于 x 轴，方程表示一个平行于 x 轴的平面.

同样，方程 $Ax+Cz+D=0$ 和 $Ax+By+D=0$，分别表示一个平行于 y 轴和 z 轴的平面.

当 $A＝B＝0$ 时，方程（2）成为 $Cz+D=0$ 或 $z=-\dfrac{D}{C}$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(0,0, C)$同时垂直 x 轴和 y 轴，方程表示一个平行于 xOy 面的平面.

同样，方程 $Ax+D＝0$ 和 $By+D＝0$ 分别表示一个平行于 yOz 面和 xOz 面的平面.

例 3 设一平面与 x，y，z 轴的交点依次为 $P(a，0，0)$、$Q(0，b，0)$、$R(0，0，c)$三点（图 5－24），求这平面的方程（其中 $a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$）.

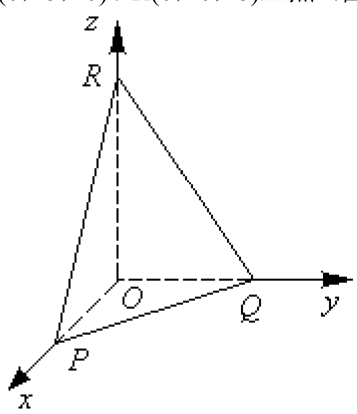


图 5－24

解　设所求的平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因 $P(a，0，0)$、$Q(0，b，0)$、$R(0，0，c)$三点都在平面上，所以点 P、Q、R 的坐标都满足方程（2）；即有

$$\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0, \end{cases}$$

得 $A=-\dfrac{D}{a}, B=-\dfrac{D}{b}, C=-\dfrac{D}{c}$.

以此代入（2）并除以 D（$D\neq0$），便得所求的平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{5}$$

方程（5）叫做平面的截距式方程，而 a、b、c 依次叫做平面在 x、y、z 轴上的截距.

例 4 因平面通过 z 轴及点（1，2，－3）的平面方程。

解 因平面通过 z 轴，故可设其方程为　$Ax＋By＝0$

又因（1，2，－3）点在平面上，将其坐标代入方程，则有

$$A＋2B＝0，即 A＝－2B$$

故所求平面方程为$－2Bx＋By＝0$，即 $2x－y＝0$

例 5 设平面π 的方程为 $3x－2y＋z＋5＝0$，求经过坐标原点且与π 平行的平面方程。

解　显然所求平面与平面π 有相同的法向量 $\boldsymbol{n}$＝（3，－2，1），又所求平面经过原点，故它的方程为　$3x－2y＋z＝0$

5.2.3 空间直线

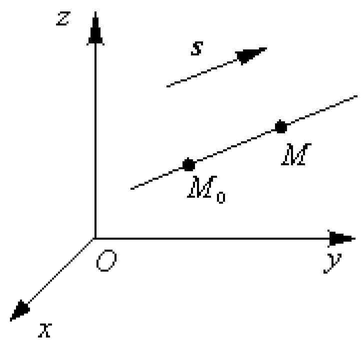
空间直线可以看作是空间两平面的交线，如果两个相交的平面的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，那么直线上的任一点必同时满足这两个平面的方程，即满足方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

反过来，不在直线上的点，不可能同时在两个平面上，所以它的坐标不满足方程组（1）。因此直线可以使用方程组（1）表示。方程组称为空间直线的一般方程.

直线的方向向量：平行于一已知直线的任一向量称为直线的方向向量。易知直线上的任一向量都平行于直线的方向向量.

假设直线过 $M_0(x_0, y_0\ z_0)$，且其方向向量为 **s**=(m，n，p)，下面来求它的方程。



设 M（x，y，z）为直线上的任一异于 $M_0(x_0, y_0\ z_0)$ 的点，则 $\overrightarrow{M_0M}$ //**s**, 如图 5－26，从而两向量的坐标成比例，由于 $\overrightarrow{M_0M}$ =($x-x_0, y-y_0, z-z_0$), **s**=(m，n，p), 从而有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (2)$$

图 5－26

显然，如果点 M 不在直线上，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 不平行于 **s**, 从而两向量的坐标不成比例。因此方程组（2）就是直线的方程，叫做直线的对称式方程或点向式方程.

任一方向向量 **s** 的坐标(m，n，p)叫做这直线的一组方向数，而向量 **s** 的方向余弦叫做该直线的方向余弦.

由直线的对称式方程容易导出直线的参数式方程. 如设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

那么
$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \qquad (3)$$

方程组（3）就是直线的参数式方程.

例 6 求经过两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线方程。

解 该直线的方向向量可取 **n**= $M_1M_2=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$。由点法式方程立即得到所求直线的方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

该方程称为直线的两点式方程。

例 7 用直线的对称式方程及参数式方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases} \qquad (4)$$

解 易得（1，0，－2）为直线上的一点。直线的方向向量为两平面的法线向量的向量

积，从而

$$s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=4i-j-3k.$$

因此，所给直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$

令
$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}=t,$$

得所给直线的参数方程为

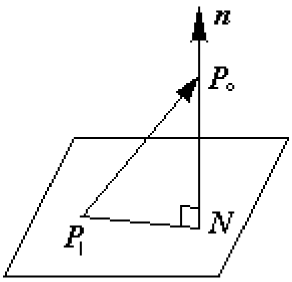
$$\begin{cases} x=1+4t, \\ y=-t, \\ z=-2-3t. \end{cases}$$

5.3.3 点、平面、直线的位置关系

1. 点到平面的距离

设 $P_0(x_0, y_0\ z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$.外一点，求 P_0 到这平面的距离（图 5－26）.

在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，并作一法线向量 $\boldsymbol{n}$，由图 5－26，并考虑到 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角也可能是钝角，得所求距离 $d=|\mathrm{Prj}_n\ \overrightarrow{P_1P_0}|$. 设 e_n 为与向量 $\boldsymbol{n}$ 同法线的单位向量，那么有



$$\mathrm{Prj}_n\ \overrightarrow{P_1P_0}=\overrightarrow{P_1P_0}\cdot e_n,$$

图 5－26

而

$$e_n=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right),$$

$$\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$$

所以 $\mathrm{Prj}_n\ \overrightarrow{P_1P_0}=\dfrac{A(x_0-x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\dfrac{B(y_0-y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\dfrac{C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

由于
$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$

所以 $$\mathrm{Prj}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

由此得点 $P_0(x_0,\ y_0\ z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 得距离公式为：

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例 8 求两个平行平面 $\pi_1: z=2x-2y+1$，$\pi_2: 4x-4y-2z+3=0$ 之间的距离。

解 在平面 π_1 上任取一点 $M(0,0,1)$，则两平面间的距离 d 就是点 M 到 π_2 的距离，于是

$$d = \frac{4\times0-4\times0-2\times1+3}{\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}} = \frac{1}{6}$$

2． 点到直线的距离

设直线 L 的方程是 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$， $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是空间一点，则

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在直线 L 上，且 L 的方向向量 $s=(m,n,p)$。

过 M_0 点作一向量 M_0M，使 $M_0M=s=(m,n,p)$，以，

M_0M_1 和 M_0M 为邻边作以平行四边形（图 5－27），不难看出 M_1 到 L 的距离 d 等于这个平行四边形底边上的高。

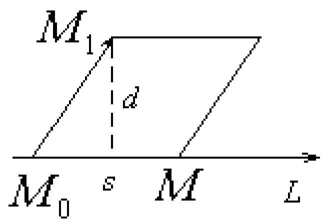


图 5－27

由向量积的定义知，该平行四边形的面积

$S=|M_0M_1\times M_0M|=|M_0M_1\times s|$

又 $S=|M_0M|\cdot d=|s|\cdot d$

于是点 M_1 到直线 L 的距离为 $$d=\frac{|M_0M_1\times s|}{|s|} \qquad (11)$$

例 9 求点 $M(1,2,3)$ 到直线 L：$x-2=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{5}$ 的距离

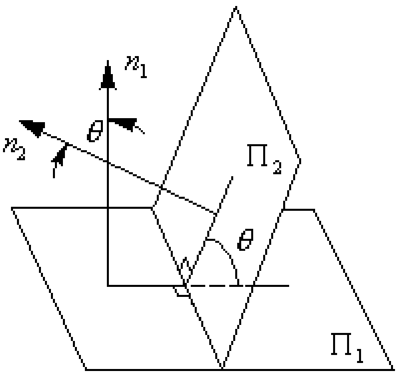
解 由直线方程知点 $M_0(2,2,0)$ 在 L 上，且 L 的方向向量 $s=(1,-3,5)$。从而

$$M_0M=(-1,0,3)$$

$$M_0M\times s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}=9i+8j+3k$$

代入（11），得点 M 到 L 的距离为

$$d=\frac{|M_0M_1\times s|}{|s|}=\frac{\sqrt{9^2+8^2+3^2}}{\sqrt{1^2+(-3)^2+5^2}}=\sqrt{\frac{22}{5}}$$



3. **两平面之间的夹角**

两平面的法线向量的夹角（通常指锐角）称为两平面的夹角.

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量的夹角依次为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，那么平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ（图 5－28）应是$(\widehat{n_1,n_2})$和$(-\widehat{n_1,n_2})=\pi-(\widehat{n_1,n_2})$　　图 5－28

两者中的锐角，因此，$\cos\theta=|\cos(\widehat{n_1,n_2})|$.按两向量夹角余弦的坐标表示式，平面 Π_1 和平面 Π_2 的夹角 θ 可由　图 5－25

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (6)$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论：

Π_1、Π_2 互相垂直相当于 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

Π_1、Π_2 互相平行或重合相当于 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

例 10 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程.

解　设所求平面的一个法线向量为 $\boldsymbol{n}$＝（A，B，C）.

因 $\overrightarrow{M_1M_2}$＝(－1，0，－2)在所求平面上，它必与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，所以有

$$-A-2C=0 \qquad (7)$$

又因所求的平面垂直于已知平面 $x+y+z=0$，所以又有

$$A+B+C=0. \qquad (8)$$

由（7）、（8）得到

$$A=-2C,\qquad B=C.$$

由点法式，平面方程为 $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$.将 $A=-2C$，$B=C$ 代入上式，并约去 $C(C\neq 0)$，便得

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0 \text{ 或 } 2x-y-z=0.$$

这就是所求的平面方程.

4．两直线的夹角

两直线的法线向量的夹角（通常指锐角）叫做两直线的夹角.

设直线L_1和L_2的法线向量依次为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，那么$L_1$和$L_2$的夹角$\varphi$应是$(\widehat{s_1,s_2})$和$(-\widehat{s_1,s_2})=\pi-(\widehat{s_1,s_2})$两者中的锐角，因此$\cos\varphi=|\cos(\widehat{s_1,s_2})|$,从而

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (5)$$

来确定

两直线L_1、L_2互相垂直相当于$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

两直线L_1、L_2互相平行或重合相当于$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

例 11 求直线$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$和$L_2$：$\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$的夹角.

解　直线L_1的方向向量$\boldsymbol{s}_1=(1,-4,1)$，$L_2$的方向向量$\boldsymbol{s}_2=(2,-2,-1)$.设直线$L_1$和$L_2$的夹角为$\varphi$，那么由公式（5）有

$$\cos\varphi=\frac{|1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}，故\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

5. 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线的夹角φ（$0\le\varphi<\frac{\pi}{2}$）称为直线与平面的夹角（图 5－29)，当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为$\frac{\pi}{2}$.

设直线的方向向量为$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面的法线向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，直线与平面的夹角为φ，那么$\varphi=\left|\frac{\pi}{2}\right|-(\widehat{s,n})$，因此$\sin\varphi=|\cos(\widehat{s,n})|$,从而有

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Mn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (6)$$

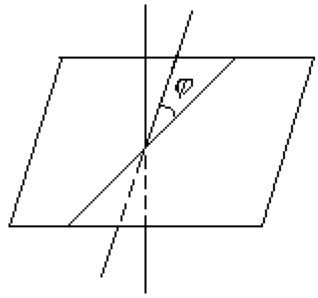


图 5－29

直线垂直于平相当于$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；

直线平行于或直线在平面上相当于 $Am+Bn+Cp=0$.

例 12 求过点（1，－2，4）且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线方程。

解　因为直线垂直于平面，所以平面的法线向量即为直线的方向向量，从而所求直线的

方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

6．平面束

设直线 L 有方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (11) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (12) \end{cases}$$

其中系数 A_1、B_1、C_1 与 A_2、B_2、C_2 不成比例.建立三元依次方程

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{13}$$

因为 A_1、B_1、C_1 与 A_2、B_2、C_2 不成比例，所以 $A_1+\lambda A_2$、$B_1+\lambda B_2$、$C_1+\lambda C_2$ 不全为零，所以（13）表示一个平面，且直线 L 上的点满足（13），反之过直线 L 的平面一定在（13）所表示的平面内，通过定直线的所以平面的全体称为平面束，而方程（13）就作为通过直线 L 的平面束方程.

例 13　求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

解　过直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 的平面束的方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0\,, \tag{14}$$

其中 λ 为待定系数。这平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直的条件是

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0\,,$$

即

$$\lambda=-1.$$

代入（14）式，得投影平面的方程为

$$2y-2z-2=0$$

即

$$y-z-1=0.$$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y-z-1=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

7．杂例

例 14 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点（－3，2，5）得直线方程

解　因为所求直线与两平面的交线平行，所以其方向向量 $\boldsymbol{s}$ 一定同时垂直于两平面的法

向量 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$，所以可以取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=-(4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

例 15　求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

解　所给直线的参数方程为 $x=2+t$，$y=3+t$，$z=4+2t$，
代入平面方程中，得　$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0.$
得 $t=-1$,代入参数方程得交点为

$$x=1，y=2，z=2.$$

例 16　求过点（2，1，3）且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

过点（2，1，3）且垂直于已知直线的平面方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0 \tag{9}$$

已知直线的参数方程为 $x=-1+3t$，$y=1+2t$，$z=-t$.　(10)

将（10）代入（9）求得 $t=\dfrac{3}{7}$，从而求得直线与平面的交点为 $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$.

以点（2，1，3）为起点，点 $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$ 为终点的向量

$$\left(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\right)=-\frac{6}{7}(2,-1,4)$$

这就是所求直线的方向向量，故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

作业　平面 1（2），2（3），3（1），4（1）（3）（5），直线 5（2）（4）点到平面直线距离 7，8，9，10（3），13，14，16，17

5.4 曲面与曲线

5.4.1 曲面、曲线的方程

如果曲面 S 与三元方程　$F(x，y，z)=0$　(1)
有下述关系：

（1）　曲面 S 上任一点的坐标都满足方程（1）；

（2）　不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程（1）

那么，方程（1）就叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 就叫做方程（1）的图形（图 5－30）。

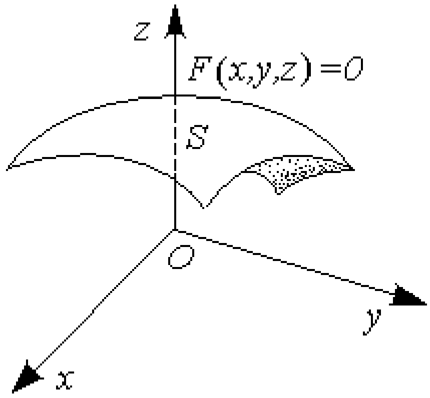


图 5-30

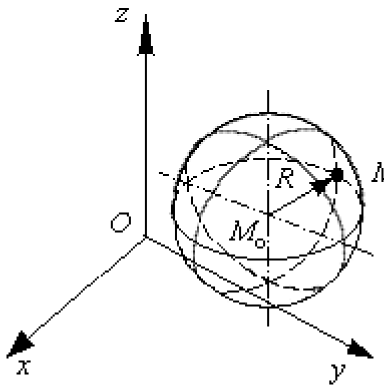


图 5－31

例 1　建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程.

解　设 M（x，y，z）是球面上的任一点（图 5-31），那么 $|M_0M|=R$.

由于　$|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，

所以　$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\mathrm{R}^2 \qquad (2)$$

这就是球心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程。

如果球心在原点，这时 $x_0=y_0=z_0=0$，从而球面方程为　$x^2+y^2+z^2=R^2$.

例 2 设有点 A（1，2，3）和 B（2，-1，4），求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解　由题意知，所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹。设 M（x，y，z）为所求平面上的任一点，由于　$|AM|=|BM|$,

所以　$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

等式两边平方，然后化简便得　$2x-6y+2z-7=0$

在空间几何中关于曲面的研究，有下列两个基本问题

（1）已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立这曲面的方程；

（2）已知坐标 x，y 和 z 间的方程时，研究这方程所表示的曲面的形状.

例 3 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面？

解　通过配方，原方程可以改写成　$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$，与（2）式比较知原方程表示球心在点 $M_0(1,-2,0)$、半径为 $R=\sqrt{5}$ 的球面.

一般地，设有三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0,$$

这个方程的特点是缺 xy，yz，zx 各项，而且平方系数相同，只要将方程经过配方可以化成方程（2）的形式，那么它的图形就是一个球面.

空间曲线可以看作两个曲面的交线。设 $F(x, y, z)=0$ 和 $G(x, y, z)=0$ 是两个曲面的方程，它们的交线为 C（图 5-32）。因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个曲面的方程，所以应满足方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ （1）

反过来，如果点 M 不在曲线 C 上，那么它不可能同时在两个曲面上，所以它的坐标不满足方程组（1）。因此，曲线 C 可以用方程组（1）来表示。方程组（1）叫做空间曲线 C 的一般方程.

例 4　方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=1 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解　方程组中第一个方程表示球心在原点，半径为 2 的球面。而方程组中的第二个方程表示一个垂直于 z 轴的平面，因此他们的交线为一个园，如图 5-33 所示。

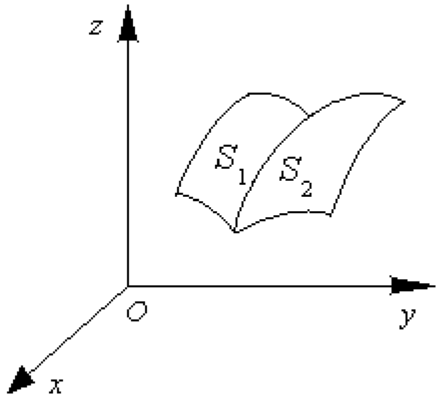


图 5－32

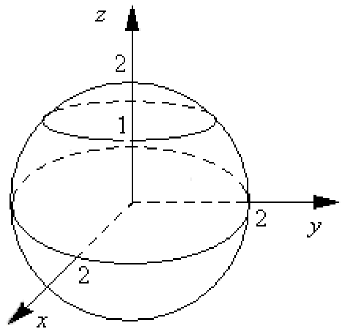


图 5－33

方程组 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$ （2）当给定 $t=t_1$ 时，就得到 C 上的一个点 (x_1, y_1, z_1)；随着 t 得变动便可得曲线 C 上的全部点。方程组（2）叫做空间曲线的参数方程。

例 5 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω、v 都是常数），那么点 M 构成的图形叫做螺旋线. 试建立其参数方程.

解　取时间 t 为参数.设当 $t=0$ 时，动点位于 x 轴上的一点 $A(a, 0, 0)$ 处. 经过时间 t，动点由 A 运动到 $M(x, y, z)$（图 5-34）.记 M 在 xOy 面上的投影为 M' 的坐标为 $x, y, 0$.

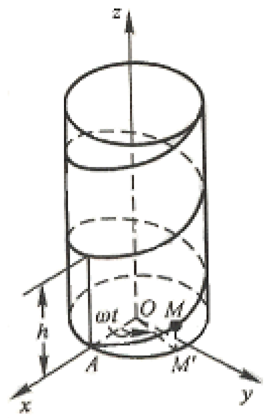
由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，所以经过时间 t，$\angle AOM'=\omega$t。从而

$$x=|OM'|\cos\angle AOM'==a\cos\omega \mathrm{t},\ y=|OM'|\sin\angle AOM'==a\sin\omega \mathrm{t}.$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，所以 $z=\mathrm{M'M}=vt$。

因此螺旋线的参数方程为$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$ 也可以用其他变量作参数；例如令$\theta = \omega t$，则螺旋线的参数方程可写为 $\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$

这里$b = \dfrac{\omega}{v}$，而参数为θ.



当 OM'转过一周时，螺旋线上的点 M 上升固定的高度$h = 2\pi b$.
这个高度在工程技术上叫做螺距.

图 5－34

5.4.2 柱面、旋转面和锥面

1.柱面

例 6 方程$x^2 + y^2 = R^2$在 xOy 面上表示圆心在原点 O、半径为 R 的圆，在空间中表示圆柱面（图 5-35），它可以看作是平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆$x^2 + y^2 = R^2$移动而形成的。这曲面叫做圆柱面（图 5-35），xOy 面上的圆$x^2 + y^2 = R^2$叫做它的准线，这平行于 z 轴的直线 l 叫做它的母线.

一般地，平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面，这曲线 C 叫做柱面的准线，动直线叫做柱面的母线.

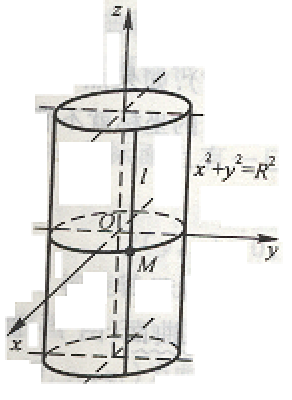


图 5－35

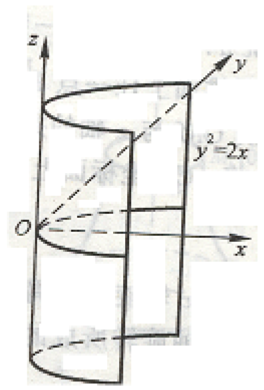


图 5－36

类似地，方程$y^2 = 2x$，称为抛物柱面（图 5-36）

又如，方程$x - y = 0$表示母线平行于 z 轴的柱面，它的准线是 xOy 面上的直线 $x - y = 0$，所以它是过 z 轴的平面（图 5-37）.

一般地，只含 x，y 而缺 z 的方程 $F(x, y)=0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z

轴的柱面，其准线是 xOy 面上的曲线 C：$F(x, y)=0$（图 5-38）.

只含 x，z 而缺 y 的方程 $G(x, z)=0$ 和只含 y、z 而缺 x 的方程 $H(y, x)=0$ 分别母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

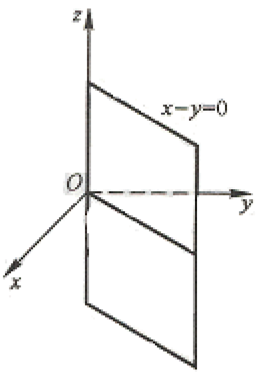


图 5－37

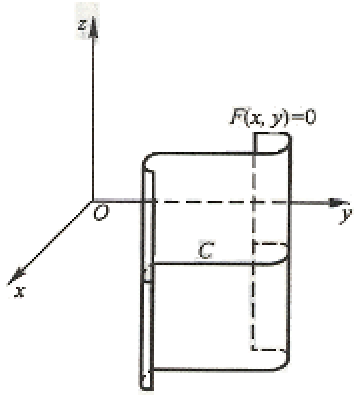


图 5－38

2. 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，它的方程为 $f(y, z)=0$，

把这曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面（图 5-39）.它的方程可以求得如下：

设 $M_1(0, y_1, z_1)$ 为曲线 C 上的任一点，那么有

$$f(y_1, z_1)=0. \qquad (3)$$

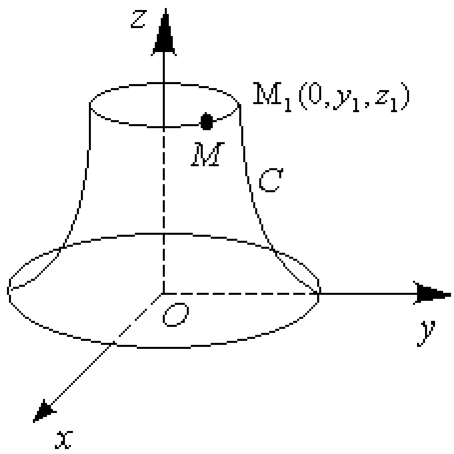


图 5－39

当曲线 C 绕 z 轴旋转时，点 M_1 绕 z 轴转到另一点 $M(x, y, z)$，这时 $z=z_1$ 保持不变，且点 M 到 z 轴的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$。将 $z_1=z$，$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入（3）式，

就有 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$，（4）

这就是所求旋转曲面的方程。

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$ （5）

例 7 将 xOz 坐标面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面叫做旋转单叶双曲面（图 5-41），它的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

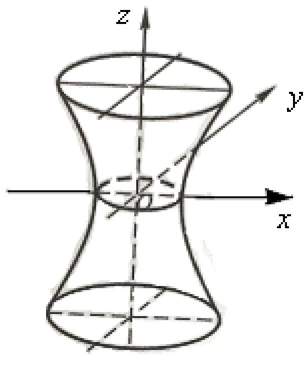


图 5－41

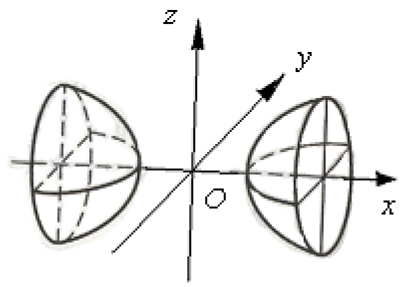


图 5－42

绕 x 轴旋转所成的旋转曲面叫做旋转双叶双曲面（图 5-42），它的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$$

3．锥面

设有一条控件曲线 L 以及 L 外的一点 M_0，由 M_0 和 L 上全体点所在直线构成的曲面称为锥面（cone），M_0 称为该锥面的顶点（vertex），L 称为该锥面的准线（5－43）。

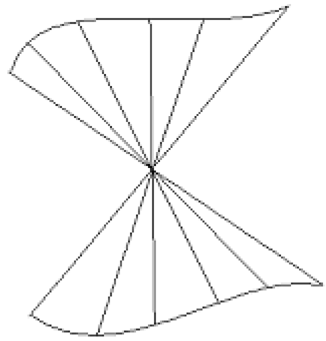


图 5－43

例 9 求顶点在原点，准线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c \quad (c\neq 0)\end{cases}$$

的锥面方程。

解　设 $M(x,y,z)$ 为锥面上任一点，过原点与 M 的直线与平面 $z=c$ 交于点 $M_1(x_1,y_1,c)$（图 5-44），则有

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

由于 OM 与 OM_1 共线，故

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{c}$$

既有 $x_1=\dfrac{cx}{z}$，$y_1=\dfrac{cy}{z}$，代入 $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，整理得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \qquad (6)$$

这就是所求锥面的方程，该锥面称为椭圆锥面

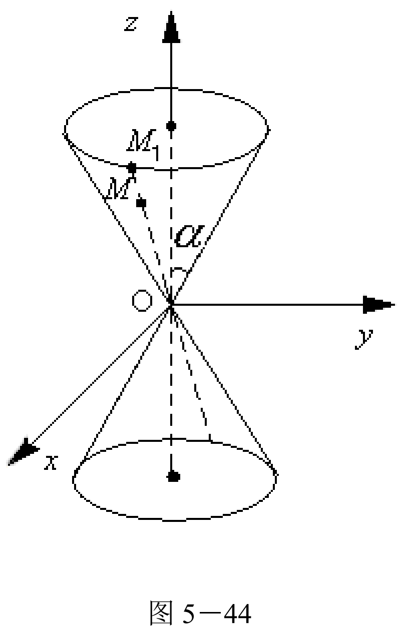


图 5－44

当 $a=b$ 时，式（6）相应变为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

此时锥面称为圆锥面，若记 $k=\frac{c}{a}$，圆锥面的方程为 $z^2=k^2(x^2+y^2)$ （7）

圆锥也可认为是 yOz 平面上经过原点的直线 L：$z=ky(k>0)$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面。只需将 $z=ky$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，即得圆锥面的方程 $z=\pm k\sqrt{x^2+y^2}$。

即 $z^2=k^2(x^2+y^2)$ $\alpha=\arctan\frac{1}{k}$ 称为圆锥面的半顶角。

5.4.3 二次曲面

通常将三元二次方程 F（x，y，z）=0 所表示的曲面称为二次曲面。而把平面称为一次曲面．　二次曲面有九种，它们的标准方程如下

（1）椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$ （图 5－45）（2）椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

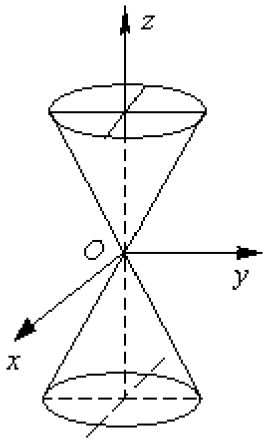


图 5－45

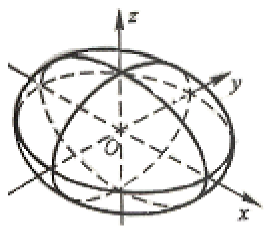


图 5－46

（3）单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ （4）双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

（5）椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$（图 5－46） （6）双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$（图 5－47）

（7）椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （8）双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

（9）抛物柱面 $x^2=ay$

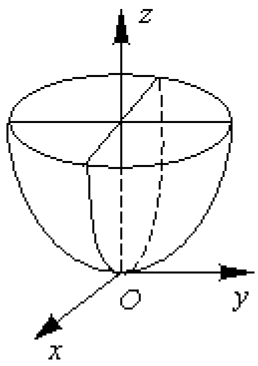


图 5－46

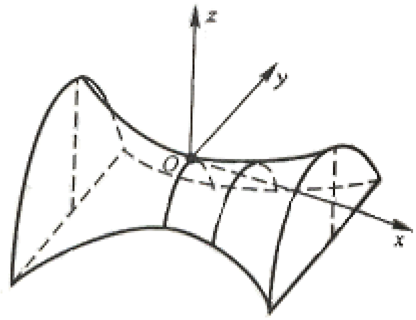


图 5－47

5.4.4 空间几何图形举例

设Γ是一空间曲线，π是一平面，则成以Γ为准线，母线垂直于π的柱面为曲线Γ对平面π的投影柱面，称投影柱面与π的交线为Γ在π上的投影曲线或投影。

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$ （5）

现在来研究由方程组（5）消去 z 后所得的方程 $H(x,y)=0$. （6）

由于方程（6）是由方程（5）消去 z 后所得的结果。因此当 x，y 和 z 满足方程组（5）时，前两个数 x，y 必定满足方程（6），这说明曲线 C 上的所有点都在方程（6）所表示的曲面上。

而方程（6）为母线平行于 z 轴的柱面。该柱面包含 C。以 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面叫做曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面，投影柱面与 xOy 面的交线叫做空间曲线 C 在 xOy 面的投影曲线，或简称投影。因此，方程（6）所表示的柱面必定包含投影柱面，而方程$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$所表示的曲线必定包含空间曲线 C 在 xOy 面上的投影。

同理可得空间曲线 C 在 yOz 及 zOx 面上的投影的曲线方程为

$$\begin{cases} R(x,y)=0, \\ x=0, \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} T(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

例 10 已知两球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad （7）$$

和

$$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \qquad （8）$$

求它们的交线 C 在 xOy 面上的投影方程.

解 （7）-（8）得 $y+z=1$.

将 $z=1-y$ 代入（7）或（8）得所求柱面方程为 $x^2+2y^2-2y=0$. 于是投影方程为

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

例 11　设一个立体由上半球 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成（图 5-48），求它在 xOy 面上的投影.

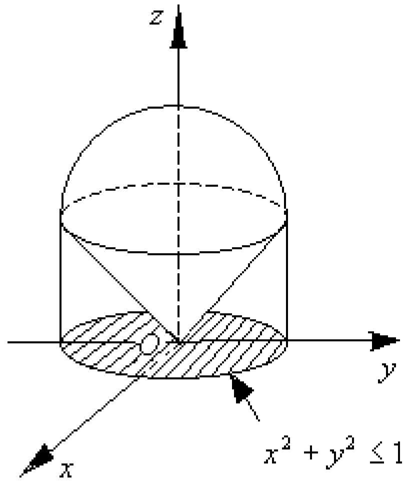


图 5-48

解　半球面和锥面的交线为 C：$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}. \end{cases}$ 由上列方程组消去 z，得到 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$，这是 xOy 面上的一个圆，于是所求立体在 xOy 面上的投影，就是该圆在 xOy 面上的一个圆，

于是所求立体 xOy 面上的投影，就是该圆在 xOy 面上所围的部分：$x^2 + y^2 \le 1$。

作业 3，4，6，8