《高等数学》，《工科数学分析基础》和《微积分》A卷参考答案

一、**1.** $1,0$；**2.** $1, y=x+1$ ；**3.** $2,0$；**4.** $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2, \ln(1+\sqrt{2})$ ； **5．** $\dfrac{\pi}{2}$

二、1.A ， 2. B， 3. C， 4. A，5.A

三、 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^3+\ln(1+x^4)}}$

解：原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t\right)}{x^3+\ln(1+x^4)}}$ （2 分）

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}}$ （4 分）

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)^2\cos x}{3x^2}}$ （6 分）

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}}$ （8 分）

$=e^{\frac{1}{3}}$ （10 分）

四、(**《高等数学》和《微积分》**) 设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程：$y''-4y'+3y=xe^x$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线：$y=x^2-\dfrac{1}{4}x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$。

解：特征方程 $r^2-4r+3=0$，特征根 $r_1=1$，$r_2=3$，齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^x+c_2e^{3x}$ （4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=x(ax+b)e^x$ （6 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$-4ax+2a-2b=x$，所以有 $-4a=1, 2a-2b=0$，

解得 $a=b=-\dfrac{1}{4}$，$\therefore$ 通解 $y(x)=c_1e^x+c_2e^{3x}+(-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}x)e^x$。 （8 分）

又已知有公切线，得：$y(0)=1, y'(0)=-\dfrac{1}{4}$，即 $c_1+c_2=1, c_1+3c_2-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$，解得

$c_1=\frac{3}{2},c_2=-\frac{1}{2}$，所以 $y(x)=\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}+(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x)e^x$。（10 分）

（《工科数学分析基础》）设函数 $y=y(x)(x>0)$ 满足微分方程：$xy'=xe^x-y$，且 $y(1)=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$，求函数 $y=y(x)$。

解： $y'+\frac{1}{x}y=e^x$，

$$y(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int e^x e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c)$$（4 分）

$$=\frac{1}{x}(\int xe^x dx+c)$$

$$=\frac{1}{x}(xe^x-e^x+c)$$（6 分）

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx$$（7 分）

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx=4(\sqrt{2}-1)$$（9 分）

再由 $y(1)=c=4(\sqrt{2}-1)$，所以 $y=\frac{1}{x}(xe^x-e^x+4(\sqrt{2}-1))$。（10 分）

（《盘锦高数》） 设对于任意的实数 s,t，有 $f(s+t)=f(s)+f(t)+2st$，且 $f'(0)=2$，1、求 $f'(x)$ ；2、求 $f(x)$。

解：1、令：$s=t=0$，代入 $f(s+t)=f(s)+f(t)+2st$，得 $f(0)=0$ （2 分）

而 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=2$ **（4 分）**

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)+2x\Delta x}{\Delta x}=2+2x$ **（7 分）**

2、$f(x)=2x+x^2+c$，又 $f(0)=0$，得 $c=0$，所以 $f(x)=2x+x^2$ （10 分）

五、一容器的内侧是由曲线 $x^2+y^2=a^2(y\le\frac{a}{2})$ 绕 y 轴旋转一周而成的曲面 $(a>0)$，1、求容器的容积；2、若将容器内盛满的水从容器中全部抽出，至少需做多少功？（长度单位：m，重力加速度 $g(m/s^2)$，水的密度 $\rho(kg/m^3)$）

解：1、$V=\pi\int_{-a}^{\frac{a}{2}}(a^2-y^2)\,\mathrm{dy}=\pi(a^2y-\frac{y^3}{3})_{-a}^{\frac{a}{2}}=\frac{9}{8}\pi a^3(m^3)$；（4 分）

2、$W=\int_{-a}^{\frac{a}{2}}(\frac{a}{2}-y)\bullet\rho\bullet g\bullet\pi\bullet(a^2-y^2)\,\mathrm{dy}$（8 分）

$=\rho g\pi(\frac{a^3}{2}y-\frac{a}{6}y^3-\frac{a^2}{2}y^2+\frac{y^4}{4})_{-a}^{\frac{a}{2}}=\frac{45}{64}\rho g\pi a^4$（J）（10 分）

六、设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$。证明：

1、对任意的 $a,b(a<b)$，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$；

2、若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

3、若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，则 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少。

证明：1、令 $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,x\in[a,b]$，则 $G'(x)=f(x),x\in[a,b]$，故 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，所以 $G(b)-G(a)=G'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$，

即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$（2 分）

2、因为 $f(-x)=f(x)$，令 $t=-u$，

$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt=\int_0^x(-x+2u)f(-u)(-du)=F(x)$（6 分）

3、$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$

$F'(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=f(\xi)x-xf(x)=(f(\xi)-f(x))x<0,\xi\in(0,x)$（10 分）

七、设函数 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(\frac{1}{2})=1$，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=0$，$\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-x)dx=0$，证明：

1、存在$\eta \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$，使$f(\eta)=\eta$；

2、存在$\xi \in (0,\ \eta)$，使$f'(\xi)(f(\xi)-\xi)+f'(\xi)=1$。

证明：1、由$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=0$及$f(x)$在[0，1]连续，得$f(1)=0$ （2 分）

令$\varphi(x)=f(x)-x$，$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，$\varphi(1)=f(1)-1=-1<0$，由连续函数介值定理知存在$\eta\in(\frac{1}{2},\ 1)$使$\varphi(\eta)=0$，即$f(\eta)=\eta$。 （5 分）

2、令$F(x)=e^{f(x)}(f(x)-x)$，对$\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-x)dx=0$应用积分中值定理得存在$x_0\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$，使$\frac{1}{2}(f(x_0)-x_0)=0$，即$f(x_0)-x_0=0$， （7 分）

因此$F(x)$在$[x_0,\eta]$连续，$(x_0,\ \eta)$可导，$F(x_0)=F(\eta)=0$，由罗尔定理，至少存在$\xi\in(x_0,\ \eta)$，当然$\xi\in(0,\eta)$使$F'(\xi)=0$，

即 $$e^{f(\xi)}(f'(\xi)(f(\xi)-\xi)+f'(\xi)-1)=0$$

又$e^{f(\xi)}\neq 0$，故$f'(\xi)(f(\xi)-\xi)+f'(\xi)=1$ （10 分）

《高等数学》，《工科数学分析基础》和《微积分》B 卷参考答案

一、1. $\frac{1}{2},0$；**2.** $0, y=1$ ；**3.** $6,0$；**4.** $2\ln 2-1,\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$ ； **5．** 2π

二、1.B 2. C 3. D 4. D 5.B

三、 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\int_0^{\sin x}\tan(t^2)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^3+\ln(1+x^5)}}$

解：原式$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\int_0^{\sin x}\tan t^2\,\mathrm{d}t\right)}{x^3+\ln(1+x^5)}}$ （2 分）

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\tan t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}}$ （4 分）

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)^2\cos x}{3x^2}}$$ （6 分）

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}}$$ （8 分）

$$= e^{\frac{1}{3}}$$ （10 分）

四、（**《高等数学》和《微积分》**）设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程：$y'' - 5y' + 4y = 6xe^x$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线：$y = x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ 在该点的切线重合，求函数 $y = y(x)$。

解：特征方程 $r^2 - 5r + 4 = 0$，特征根 $r_1 = 1$，$r_2 = 4$，齐次方程通解 $Y(x) = c_1e^x + c_2e^{4x}$ （4 分）

特解形式 $y^*(x) = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{\lambda x} = x(ax+b)e^x$ （6 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$-6ax + 2a - 3b = 6x$，所以有 $-6a = 6, 2a - 3b = 0$，

解得 $a = -1, b = -\frac{2}{3}$，$\therefore$ 通解 $y(x) = c_1e^x + c_2e^{4x} + (-x^2 - \frac{2}{3}x)e^x$。 （8 分）

又已知有公切线，得：$y(0) = 1, y'(0) = -\frac{2}{3}$，即 $c_1 + c_2 = 1, c_1 + 4c_2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$，解得 $c_1 = \frac{4}{3}, c_2 = -\frac{1}{3}$，所以 $y(x) = \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{4x} + (-x^2 - \frac{2}{3}x)e^x$。 （10 分）

（**《工科数学分析基础》**）函数 $y = y(x)(x > 0)$ 满足微分方程：$xy' = x\cos x - y$，且 $y(\pi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$，求函数 $y = y(x)$。

解：$y' + \frac{1}{x}y = \cos x$，

$$y(x) = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int \cos x \cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx + c\right)$$ （4 分）

$$=\frac{1}{x}(\int x\cos x dx+c)$$

$$=\frac{1}{x}(x\sin x+\cos x+c)$$ （6 分）

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx$$ （7 分）

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx=4(\sqrt{2}-1)$$ （9 分）

再由 $y(\pi)=\frac{c-1}{\pi}=\frac{4(\sqrt{2}-1)}{4\pi},c=\sqrt{2}$，所以 $y=\frac{1}{x}(x\sin x+\cos x+\sqrt{2})$。 （10 分）

《盘锦高数》设对于任意的实数 s,t，有 $f(s+t)=f(s)+f(t)+2st$，且 $f'(0)=1$，

1、求 $f'(x)$ ；2、求 $f(x)$。

解：1、**令：** $s=t=0$，代入 $f(s+t)=f(s)+f(t)+2st$，得 $f(0)=0$ （2 分）

而 $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=1$ **（4 分）**

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)+2x\Delta x}{\Delta x}=1+2x$$ **（7 分）**

2、$f(x)=x+x^2+c$，又 $f(0)=0$，得 $c=0$，所以 $f(x)=x+x^2$ （10 分）

五、一容器的内侧是由曲线 $x^2+y^2=b^2(y\le\frac{b}{2})$ 绕 y 轴旋转一周而成的曲面 $(b>0)$，1、求容器的容积；2、若将容器内盛满的水从容器中全部抽出，至少需做多少功？（长度单位：m，重力加速度 $g(m/s^2)$，水的密度 $\rho(kg/m^3)$）

解：1、$V=\pi\int_{-b}^{\frac{b}{2}}(b^2-y^2)\mathrm{d}y=\pi(b^2y-\frac{y^3}{3})\Big|_{-b}^{\frac{b}{2}}=\frac{9}{8}\pi b^3(m^3)$； （4 分）

2、$W=\int_{-b}^{\frac{b}{2}}(\frac{b}{2}-y)\bullet\rho\bullet g\bullet\pi\bullet(b^2-y^2)\mathrm{d}y$ （8 分）

$$=\rho g\pi(\frac{b^3}{2}y-\frac{b}{6}y^3-\frac{b^2}{2}y^2+\frac{y^4}{4})\Big|_{-b}^{\frac{b}{2}}=\frac{45}{64}\rho g\pi b^4$$ （J） （10 分）

六、设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$ 。证明：

1、对任意的 $a,b(a<b)$ ，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$ ；

2、若 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 也是奇函数；

3、若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少，则 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

证明：1、令 $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, x\in[a,b]$，则 $G'(x)=f(x), x\in[a,b]$，故 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，所以 $G(b)-G(a)=G'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$ ，

即 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$$ （2 分）

2、因为 $f(-x)=-f(x)$ ，令 $t=-u$ ，

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt=\int_0^x(-x+2u)f(-u)(-du)=-F(x)$$ （6 分）

3、$F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - 2\int_0^x tf(t)dt$

$$F'(x)=\int_0^x f(t)dt - xf(x) = f(\xi)x - xf(x) = (f(\xi)-f(x))x>0,\xi\in(0,x)$$ （10 分）

七、同 A 卷

《高等数学》，《工科数学分析基础》和《微积分》A 卷参考答案

一、1. $1,-3$ ；2. $3,3$；3. $\frac{\pi}{4}, y=e^{-x}\sin x$；**4.** $\frac{3}{8}\pi,\frac{1}{8}\pi$ ； **5.** $1, x=1$

二、1. C　　2. D　　3. B　　4. D　　5. A

三、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x(e^x-1)}\ln\frac{\sin x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\frac{\sin x}{x}-1)$$ （4 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$ （6 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$ （8 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$ （10 分）

四、（高等数学和微积分）

解：特征方程$r^2-3r+2=0$，特征根$r_1=1$， $r_2=2$， （2 分）

齐次方程通解$Y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}$ （4 分）

特解形式$y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=x(ax+b)e^x$ （7 分）

将 $y^*(x)$代入原方程并整理得：$-2ax+2a-b=-2x$，

所以有$-2a=-2,2a-b=0$，解得$a=1,b=2$ （9 分）

∴通解$y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+(x^2+2x)e^x$。 （10 分）

（工科数学分析基础）

解：方程变形为$xy^{-2}y'-y^{-1}=-xe^x$ （2 分）

令$y^{-1}=z,-y^{-2}y'=z'$，代入上式并整理得$z'+\frac{1}{x}z=e^x$ （5 分）

通解$y^{-1}=z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int e^xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c)$ （8 分）

$$=\frac{1}{x}(\int e^x\bullet xdx+c)=\frac{1}{x}(xe^x-e^x+c)$$ （10 分）

五、解：1、设切点为$(x_0,\ln x_0)$，则切线方程为$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$,由切线过点（0,1），得$x_0=e^2$，切点为$A(e^2,2)$ （3 分）

切线方程：$y=\dfrac{1}{e^2}x+1$ （5 分）

2、点$B(1,0)$，D的面积为$S=\int_1^{e^2}\ln x dx-\frac{1}{2}(e^2-1)\bullet 2$。 （8 分）

$$=2e^2-\int_1^{e^2}x\bullet\frac{1}{x}dx-(e^2-1)$$

$$=2$$ （10 分）

六、解：**1**、$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\,g(x)\mathrm{d}x$

其中，$\int_{-a}^{0}f(x)\,g(x)\mathrm{d}x\overset{x=-t}{=}-\int_a^0 f(-t)g(-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(-x)\,g(x)\mathrm{d}x$ （3 分）

所以，$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=\int_0^a(f(x)+f(-x))g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$。 （5 分）

2、令$g(x)=\cos^4 x$，$f(x)=\arctan e^x$，则

$\because(f(x)+f(-x))'=(\arctan e^x+\arctan e^{-x})'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}+\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0,\therefore f(x)+f(-x)=A$

令$x=0,A=\dfrac{\pi}{2}$,即：$f(x)+f(-x)=\dfrac{\pi}{2}$ （8 分）

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\bullet\arctan e^x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\bullet\dfrac{3}{4}\bullet\dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{32}\pi^2$ （10 分）

七、解：1、$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$，$\xi$在$x$与$c$之间。（2 分）

2、证明：$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(0-c)^2$，$\xi_1$在 0 与$c$之间

$f(2)=f(c)+f'(c)(2-c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(2-c)^2$，$\xi_2$在$c$与 2 之间 （5 分）

$\therefore$ $f(2)-f(0)=2f'(c)+\dfrac{1}{2}\left[f''(\xi_2)(2-c)^2-f''(\xi_1)c^2\right]$ （7 分）

即 $$2f'(c)=f(2)-f(0)+\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)c^2-f''(\xi_2)(2-c)^2\right]$$

$$\therefore\quad 2|f'(c)|\le|f(2)|+|f(0)|+\frac{1}{2}\left[|f''(\xi_1)|c^2+|f''(\xi_2)|(2-c)^2\right]$$

$$\le 2+\frac{1}{2}(c^2+(2-c)^2)\le 2+\frac{4}{2}=4$$

$\therefore\ |f'(c)|\le 2$。 （10 分）

《高等数学》，《工科数学分析基础》和《微积分》B 卷参考答案

一、1. $\frac{\pi}{4}, y=e^{-x}\sin x$；**2.** $1,-3$ ；3. $3,3$；**4.** $1, x=1$;**5.** $\frac{3}{8}\pi,\frac{1}{8}\pi$.

二、1. D　　2. B　　3. D　　4. A　　5.C

三、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\sin x}\ln\frac{x}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\frac{x}{\sin x}-1)$ （4 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ （6 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ （8 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\frac{1}{6}$ （10 分）

四、（高等数学和微积分）

解：特征方程 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=1$， $r_2=2$， （2 分）

齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}$ （4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=x(ax+b)e^x$ （7 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$-2ax+2a-b=2x$，

所以有 $-2a=2,2a-b=0$，解得 $a=-1,b=-2$ （9 分）

∴通解 $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+(-x^2-2x)e^x$。 （10 分）

（工科数学分析基础）

解：方程变形为 $xy^{-2}y'-y^{-1}=-xe^{-x}$ （2 分）

令 $y^{-1}=z,-y^{-2}y'=z'$，代入上式并整理得 $z'+\frac{1}{x}z=e^{-x}$ （5 分）

通解 $y^{-1}=z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int e^{-x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c)$ （8 分）

$$=\frac{1}{x}(\int e^{-x}\bullet xdx+c)=\frac{1}{x}(-xe^{-x}-e^{-x}+c)$$ （10 分）

五、同 A 卷。

六、解：1、$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)\,g(x)\mathrm{d}x$

其中，$\int_{-a}^{0}f(x)\,g(x)\mathrm{d}x\overset{x=-t}{=}-\int_{a}^{0}f(-t)g(-t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{a}f(-x)\,g(x)\mathrm{d}x$ （3 分）

所以，$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=\int_{0}^{a}(f(x)+f(-x))g(x)dx=A\int_{0}^{a}g(x)dx$。 （5 分）

2、令 $g(x)=\sin^4 x$，$f(x)=\arctan e^x$，则

$$\because (f(x)+f(-x))'=(\arctan e^x+\arctan e^{-x})'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0,\therefore f(x)+f(-x)=A$$

令 $x=0,A=\frac{\pi}{2}$,即：$f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$ （8 分）

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\bullet\arctan e^x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2}=\frac{3}{32}\pi^2$ （10 分）

七、同 A 卷。

《高等数学》，《工科数学分析基础》和《微积分》A 卷参考答案

一、1. $\frac{t}{2},\frac{1+t^2}{4t}$ ；2. $-e, y=1-ex$；3. $\sin 1-\cos 1, e^{2x}$；**4.** $x=0, y=x$ ；

5． $0, 2014\bullet 2015$。

二、1. B　　2. A　　3. B　　4. C　　5. A

三、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\tan x}{x}}$$ （2 分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x^2}{2}}(\frac{\tan x}{x}-1)}$$ （4 分）

$$=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}}$$ （6 分）

$$=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}}$$ （8 分）

$$=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}}=e^{\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})^2}=e^{\frac{2}{3}}$$ （10 分）

四、（高等数学和微积分）

解：特征方程$r^2+2r+1=0$，特征根$r_1=r_2=-1$ （2 分）

齐次方程通解$Y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}$ （4 分）

特解形式$y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=(ax+b)e^x$ （6 分）

将 $y^*(x)$代入原方程并整理得：$4ax+4a+4b=x$，

所以有$4a=1, 4a+4b=0$，解得$a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{4}$ （9 分）

∴通解$y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}+(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4})e^x$。 （10 分）

（工科数学分析基础）

解：方程变形为$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}$ （2 分）

令$\frac{y}{x}=u, y=xu, y'=u+x\frac{du}{dx}$，代入上式并整理得$udu=\frac{dx}{x}$ （5 分）

$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+c$，将$u=\frac{y}{x}$代入上式得通解：$y^2=2x^2(\ln|x|+c)$ （9 分）

由条件$y(1)=0$，得$c=0$，故特解为：$y^2=2x^2\ln|x|$ （10 分）

五、解：1、令 $x=\pi/2-t$，则 $dx=-dt$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$；（4 分）

2、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx \underline{\underline{x=\pi/2-t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)dx$

$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{\pi-1}{4}$。 （10 分）

六、解：**1**、$S=\frac{\pi}{4}-\int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x \underline{\underline{x=\cos^3 t}} \frac{\pi}{4}-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t\bullet 3\cos^2 t\bullet(-\sin t)\,\mathrm{d}t$

$=\frac{\pi}{4}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\bullet\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-3(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t\,\mathrm{d}t)$

$=\frac{\pi}{4}-3(\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2})=\frac{5\pi}{32}$。 （5 分）

2、$V=\frac{2\pi}{3}-\pi\int_0^1 y^2(x)\,\mathrm{d}x \underline{\underline{x=\cos^3 t}} \frac{2\pi}{3}-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t\bullet 3\cos^2 t\bullet(-\sin t)\,\mathrm{d}t$

$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\bullet\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}-3\pi(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t\,\mathrm{d}t)$

$=\frac{2\pi}{3}-3\pi(\frac{6}{7}\bullet\frac{4}{5}\bullet\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\bullet\frac{6}{7}\bullet\frac{4}{5}\bullet\frac{2}{3})=\frac{18\pi}{35}$。 （10 分）

七、解：1、因 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，**由定积分中值定理得，**存在点 $\eta\in(0,2)$，使 $\int_0^2 f(x)dx=2f(\eta)$，又有已知条件 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx$，即得 $f(\eta)=f(0)$。（4 分）

2、由已知条件：$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$ 及 1 中的结论：$\int_0^2 f(x)dx=2f(\eta)$，有 $f(0)=f(\eta)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$，因函数 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，由介值定理知：存在 $x_0\in[2,3]$，使 $f(x_0)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$，即 $f(0)=f(\eta)=f(x_0)$。函数 $f(x)$ 分别在 $[0,\eta]$ 和 $[\eta,x_0]$ 上满足罗尔定理条件，则由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,\eta)$ 和 $\xi_2\in(\eta,x_0)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，又 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset(0,3)$ 上也满足罗尔定理条件，故再由罗

尔定理，存在点$\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0,3)$，使得$f''(\xi)=0$。　　　　（10 分）

《高等数学》，《工科数学分析基础》和《微积分》B 卷参考答案

一、1．$-e, y=1-ex$ ；2．$\dfrac{t}{2}, \dfrac{1+t^2}{4t}$；3．$x=0, y=x$；**4.** $0, 2014\bullet 2015$ ；

5． $\sin 1-\cos 1, e^{2x}$ 。

二、1. A　　2. B　　3. C　　4. A　　5.B

三、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\tan x}{x})^{\frac{1}{x\tan x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\tan x}\ln\frac{\tan x}{x}}$$　　（2 分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\frac{\tan x}{x}-1)}$$　　（4 分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}}$$　　（6 分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}}$$　　（8 分）

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})^2}=e^{\frac{1}{3}}$$　　（10 分）

四、（高等数学和微积分）

解：特征方程$r^2+4r+4=0$，特征根$r_1=r_2=-2$　　（2 分）

齐次方程通解$Y(x)=(c_1+c_2x)e^{-2x}$　　（4 分）

特解形式$y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=(ax+b)e^x$　　（6 分）

将 $y^*(x)$代入原方程并整理得：$9ax+6a+9b=x$，

所以有$9a=1, 6a+9b=0$，解得$a=\dfrac{1}{9}, b=-\dfrac{2}{27}$　　（9 分）

$\therefore$通解$y(x)=(c_1+c_2x)e^{-2x}+(\dfrac{1}{9}x-\dfrac{2}{27})e^x$。　　（10 分）

（工科数学分析基础）

解：方程变形为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2}{xy}=\dfrac{(\frac{y}{x})^2-1}{\frac{y}{x}}$　　（2 分）

令$\dfrac{y}{x}=u, y=xu, y'=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入上式并整理得$udu=-\dfrac{dx}{x}$　　（5 分）

$\dfrac{1}{2}u^2=c-\ln|x|$，将$u=\dfrac{y}{x}$代入上式得通解： $y^2=2x^2(c-\ln|x|)$　　（9 分）

由条件 $y(1)=0$，得 $c=0$，故特解为： $y^2=-2x^2\ln|x|$ （10 分）

五、解：1、令 $x=\pi/2-t$，则 $dx=-dt$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$ ；（4 分）

2、$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx \underline{\underline{x=\pi/2-t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=\frac{\pi-1}{4}$$ 。 （10 分）

六、七、同 A 卷。

《高等数学》，《工科数学分析基础》和《微积分》A 卷参考答案

一、1. $-\frac{1}{e}, y=1-\frac{1}{e}x$；2. $\frac{1}{2},-\frac{1}{8}$；3. $1,\frac{\pi}{4}$；**4.** $x=1, y=x+2$ ；**5.** $2,\frac{3\pi}{16}$。

二、1. A　　2. B　　3. D　　4. D　　5. C

三、解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{\frac{(x^2)^2}{2}} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3} \qquad (5\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x^2} \qquad (7\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{2} \qquad (10\text{ 分})$$

四、（高等数学和微积分）求微分方程 $y''-2y'-3y=e^{3x}$ 的通解。

解：特征方程 $r^2-2r-3=0$，特征根 $r_1=3, r_2=-1$　　（2 分）

齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$　　（4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=axe^{3x}$　　（6 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$4a=1$，解得 $a=\frac{1}{4}$　　（9 分）

∴通解 $y(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{4}xe^{3x}$。　　（10 分）

（工科数学分析基础）求微分方程 $(y+x\cot x)dx-\cot x dy=0$ 的通解。

解：方程变形为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y+x\cot x}{\cot x}=\tan x\bullet y+x$，即 $y'-\tan x\bullet y=x$　（2 分）

通解 $y=e^{\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}(\int xe^{-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}dx+c)$　　（5 分）

$$=\frac{1}{\cos x}(\int x\cos x dx+c) \qquad (8\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{\cos x}(x\sin x+\cos x+c) \qquad (10\text{ 分})$$

五、求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值。

解：$f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}te^{-t^2}\mathrm{d}t$，

$f'(x)=2x\int_1^{x^2} e^{-t^2}\mathrm{dt}+x^2e^{-x^4}2x-x^2e^{-x^4}2x=2x\int_1^{x^2} e^{-t^2}\mathrm{dt}$，（3 分）

令 $f'(x)=0$，得 $x=0,x=\pm1$。列表讨论如下：（5 分）

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗

因此，函数 $f(x)$ 的单调减区间是：$(-\infty,-1)$，$(0,1)$；单调增区间是：$(-1,0)$，$(1,+\infty)$。

极小值 $f(\pm1)=0$；极大值 $f(0)=\int_0^1 te^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$。（10 分）

六、设常数 $A>0$，D 是由曲线段 $y=A\sin x(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0,x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面图形，V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积。

1、求 V_1 和 V_2；2、若 $V_1=V_2$，求 A 的值。

解：**1**、$V_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\pi A^2\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2A^2}{4}$（4 分）

$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\,\mathrm{d}x=2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x=2\pi A$（8 分）

或 $V_2=\pi(\frac{\pi}{2})^2A-\pi\int_0^A(\arcsin\frac{y}{A})^2\,\mathrm{dy}$

$$=\frac{\pi^3}{4}A-\pi(y(\arcsin\frac{y}{A})^2\Big|_0^A-\int_0^A 2y\arcsin\frac{y}{A}\bullet\frac{1}{\sqrt{A^2-y^2}}\mathrm{dy})$$

$$=\frac{\pi^3}{4}A-\pi(\frac{\pi^2}{4}A+2\int_0^A\arcsin\frac{y}{A}\mathrm{d}\sqrt{A^2-y^2})$$

$$=-2\pi(\sqrt{A^2-y^2}\arcsin\frac{y}{A}\Big|_0^A-\int_0^A\sqrt{A^2-y^2}\bullet\frac{1}{\sqrt{A^2-y^2}}\mathrm{dy})=2\pi A$$

2、由 $V_1=V_2$，得 $\frac{\pi^2A^2}{4}=2\pi A$，解得 $A=\frac{8}{\pi}$。（10 分）

七、函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上二阶可导，$f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$。证明：1、至少 $\exists\eta\in(0,1)$，使 $f(\eta)=0$；2、至少 $\exists\xi_1,\xi_2\in(0,1),\xi_1\ne\xi_2$，使

$f(\xi_1)f''(\xi_1)+(f'(\xi_1))^2=f(\xi_2)f''(\xi_2)+(f'(\xi_2))^2=0$。

解：1、因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，由极限的保号性定理，$\exists\delta>0,\forall x\in(0,\delta)$，有 $\frac{f(x)}{x}<0, f(x)<0$，取 $x_1\in(0,\delta), f(x_1)<0, f(1)>0$，由介值定理知，至少 $\exists\eta\in(0,1)$，使 $f(\eta)=0$。（4 分）

2、因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\exists$，知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，由函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$。又函数 $f(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理条件，由罗尔定理，存在 $x_0\in(0,\eta)$，使 $f'(x_0)=0$。（6 分）

再令函数 $F(x)=f(x)f'(x)$，很容易验证 $F(x)=f(x)f'(x)$ 分别在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,\eta]$ 上满足罗尔定理条件，由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,x_0)$ 和 $\xi_2\in(x_0,\eta)$，使 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)f''(\xi_1)+(f'(\xi_1))^2=f(\xi_2)f''(\xi_2)+(f'(\xi_2))^2=0$。（10 分）

《高等数学》，《工科数学分析基础》和《微积分》B 卷参考答案

一、1. $1,\frac{\pi}{4}$；2. $-\frac{1}{e}, y=1-\frac{1}{e}x$；3. $\frac{1}{2},-\frac{1}{8}$；4. $2,\frac{3\pi}{16}$；5. $x=1, y=x+2$。

二、1. D　2. A　3. B　4. C　5. D

三、解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\tan 2t)dt}{1-\cos x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\tan 2t)dt}{\frac{(x^2)^2}{2}} \quad （2 分）$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x\tan 2x)}{2x^3} \quad （5 分）$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\tan 2x}{2x^2} \quad （7 分）$$

$$=1 \quad （10 分）$$

四、（高等数学和微积分）求微分方程 $y''-2y'-3y=e^{-x}$ 的通解。

解：特征方程 $r^2-2r-3=0$，特征根 $r_1=3, r_2=-1$（2 分）

齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$（4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=axe^{-x}$（6 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$-4a=1$，解得 $a=-\frac{1}{4}$ （9 分）

∴通解 $y(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{4}xe^{-x}$ 。 （10 分）

（工科数学分析基础）求微分方程 $(x\tan x-y)dx-\tan xdy=0$ 的通解。

解：方程变形为 $\frac{dy}{dx}=\frac{x\tan x-y}{\tan x}=-\cot x\bullet y+x$，即 $y'+\cot\bullet y=x$ （2 分）

通解 $y=e^{-\int\frac{\cos x}{\sin x}dx}(\int xe^{\int\frac{\cos}{\sin x}dx}dx+c)$ （5 分）

$=\frac{1}{\sin x}(\int x\sin xdx+c)$ （8 分）

$=\frac{1}{\sin x}(\sin x-x\cos x+c)$ （10 分）

五、求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{t^2}\mathrm{dt}$ **的单调区间与极值。**

解： $f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{t^2}\mathrm{dt}$ - $\int_1^{x^2}te^{t^2}\mathrm{dt}$，

$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{t^2}\mathrm{dt}+x^2e^{x^4}2x-x^2e^{x^4}2x=2x\int_1^{x^2}e^{t^2}\mathrm{dt}$， （3 分）

令 $f'(x)=0$，得 $x=0,x=\pm1$ 。列表讨论如下： （5 分）

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗

因此，函数 $f(x)$ 的单调减区间是：$(-\infty,-1)$，$(0,1)$；单调增区间是：$(-1,0)$，$(1,+\infty)$ 。

极小值 $f(\pm1)=0$；极大值 $f(0)=\int_0^1te^{t^2}dt=\frac{1}{2}e^{t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$ 。 （10 分）

六、七、同 A 卷。

一、填空题 **(共 30 分，每填对一个空得 3 分)**

A 卷 1、e^2；0． 2、25，-10． 3、$6(t+1)^2$，$\dfrac{12(t+1)^2}{t}$．

4、$\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|-\dfrac{1}{x}$；$\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x$． 5、$\dfrac{15}{8}\pi$；$0$．

B 卷 1、e^3；0． 2、9，-6． 3、$6(t-1)^2$，$\dfrac{12(t-1)^2}{t}$．

4、$\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+\dfrac{1}{x}$；$\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x$． 5、$\dfrac{35}{16}\pi$；$0$．

二、单选题**(共 20 分，每小题 4 分)**

A 卷 1、(D)．2、(B)．3、(C)．4、(C)．5、(C)．

B 卷 1、(D)．2、(D)．3、(D)．4、(C)．5、(B)．

A 卷 三、（**10** 分）（高数、微积分）求微分方程 $y''-2y'=2e^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2-2\lambda=0$，特征根 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$. 对应的齐次方程的通解为 $\tilde{y}=c_1+c_2e^{2x}$.（**3** 分）

设原方程的特解 $y^*=Axe^{2x}$，（**6** 分）

则 $y^{*\prime}=A(1+2x)e^{2x}$，$y^{*\prime\prime}=A(4+4x)e^{2x}$，代入原方程，解得 $A=1$，$y^*=xe^{2x}$.（**9** 分）

所以，通解为 $y=c_1+c_2e^{2x}+xe^{2x}$.（**10** 分）

B 卷 三、（**10** 分） （高数、微积分）求微分方程 $y''+2y'=2e^{-2x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2+2\lambda=0$，特征根 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-2$. 对应的齐次方程的通解为 $\tilde{y}=c_1+c_2e^{-2x}$.（3 分）

设原方程的特解 $y^*=Axe^{-2x}$，（**6** 分）

则 $y^{*\prime}=A(1-2x)e^{-2x}$，$y^{*\prime\prime}=A(-4+4x)e^{-2x}$，代入原方程，解得 $A=-1$，$y^*=-xe^{2x}$.（**9** 分）

所以，通解为 $y=c_1+c_2e^{-2x}-xe^{-2x}$.（**10** 分）

<u>A 卷</u> 三、（10 分）（<u>工数</u>）求微分方程初值问题 $\begin{cases} xy' + y = 4xe^{2x} \\ y(\frac{1}{2}) = 2 \end{cases}$ **的解.**

解 $y' + \frac{1}{x}y = 4e^{2x}$， （2 分）

$y = e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int 4e^{2x}e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c)$ （6 分）

$= \frac{1}{x}(\int 4xe^{2x}\,\mathrm{d}x + c) = \frac{1}{x}(\int 2x\,\mathrm{d}e^{2x} + c) = \frac{1}{x}(2xe^{2x} - \int 2e^{2x}\,\mathrm{d}x + c) = \frac{2xe^{2x} - e^{2x} + c}{x}$ （9 分）

$y(\frac{1}{2}) = 2$，$c = 1$，$y = \frac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{x}$. （10 分）

<u>B 卷</u> 三、（10 分）（<u>工数</u>）求微分方程初值问题 $\begin{cases} xy' + y = 9xe^{3x} \\ y(\frac{1}{3}) = 3 \end{cases}$ **的解.**

解 $y' + \frac{1}{x}y = 9e^{3x}$， （2 分）

$y = e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int 9e^{3x}e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c)$ （6 分）

$= \frac{1}{x}(\int 9xe^{3x}\,\mathrm{d}x + c) = \frac{1}{x}(\int 3x\,\mathrm{d}e^{3x} + c) = \frac{1}{x}(3xe^{3x} - \int 3e^{3x}\,\mathrm{d}x + c) = \frac{3xe^{3x} - e^{3x} + c}{x}$ （9 分）

$y(\frac{1}{3}) = 3$，$c = 1$，$y = \frac{3xe^{3x} - e^{3x} + 1}{x}$. （10 分）

<u>A 卷</u> 四、（10 分）设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t = 1 - \cos x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 左端做积分变量替换 $u = x - t$，

则 $\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$，

$x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u = 1 - \cos x$ （5 分）

两端对 x 求导，得 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x) = \sin x$，即 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = \sin x$ （8 分）

令 $x = \frac{\pi}{2}$，得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. （10 分）

B 卷 四、（**10 分**）设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t = 1-\cos 2x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 左端做积分变量替换 $u = x-t$，

则 $\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u$，

$x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u = 1-\cos 2x$ （5 分）

两端对 x 求导，得 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x) = 2\sin 2x$，即 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 2\sin 2x$ （8 分）

令 $x = \frac{\pi}{4}$，得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$. （10 分）

A 卷 六、（**10 分**）设 $x_0 = 1$， $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

证 易证，$1 \le x_n \le 2$，$\{x_n\}$ 有上界； （3 分）

$x_1 = \frac{3}{2} > 1 = x_0$，且 $n \ge 1$ 时， $x_n = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}}$，用归纳法可证数列 $\{x_n\}$ 单增. （7 分）

综上，由单调有界原理，$\{x_n\}$ 收敛.

设 $\{x_n\}$ 极限为 a，则由 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，得 $a = 1 + \frac{a}{1+a}$，解得 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. （10 分）

B 卷 六、（**10 分**）设 $x_0 = 2$， $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

证 易证，$1 \le x_n \le 2$，$\{x_n\}$ 有下界； （3 分）

$x_1 = \frac{5}{3} < 2 = x_0$，且 $n \ge 1$ 时， $x_n = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}}$，用归纳法可证数列 $\{x_n\}$ 单减. （7 分）

综上，由单调有界原理，$\{x_n\}$ 收敛.

设 $\{x_n\}$ 极限为 a，则由 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，得 $a = 1 + \frac{a}{1+a}$，解得 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. （10 分）

A卷 五、(**10**分)(1)求曲线$L_1: 2y=-1+xy^3$在点$P(1,-1)$处的切线L_2的方程；

(2)已知曲线$L_3: y=x^2+ax+b$在点$P(1,-1)$处与L_1相切，求常数a和b；

(3)求由L_2、L_3及y轴围成的平面图形D绕y轴旋转所成旋转体的体积.

解(1)$2y'=y^3+3xy^2y'$，解得$y'(1)=1$， (**3**分)

所以，$L_2: y+1=x-1$，即$y=x-2$. (**5**分)

(2)由$\begin{cases}1+a+b=-1\\2+a=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ (**7**分)

所以，$L_3: y=x^2-x-1$.

(3)$V=\int_0^1 2\pi x\cdot[(x^2-x-1)-(x-2)]\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1(x^3-2x^2+x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{6}$. (**10**分)

B卷 五、(**10**分)(1)求曲线$L_1: 1+xy^3-2y=0$在点$P(1,1)$处的切线L_2的方程；

(2)已知曲线$L_3: y=-x^2+ax+b$在点$P(1,1)$处与L_1相切，求常数a和b；

(3)求由L_2、L_3及y轴围成的平面图形D绕y轴旋转所成旋转体的体积.

解(1)$y^3+3xy^2y'-2y'=0$，解得$y'(1)=-1$， (**3**分)

所以，$L_2: y-1=-(x-1)$，即$y=2-x$. (**5**分)

(2)由$\begin{cases}-1+a+b=1\\-2+a=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ (**7**分)

所以，$L_3: y=-x^2+x+1$.

(3)$V=\int_0^1 2\pi x\cdot[(2-x)-(-x^2+x+1)]\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1(x^3-2x^2+x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{6}$. (**10**分)

A卷 七、（**10**分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-1}{x-1}=1$. 证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=f(\xi)$.

证 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-1}{x-1}=1$，$f(1)=1$，$f'(1)=1$. （**4**分）

令$g(x)=e^x(f'(x)-f(x))\ (x\in[0,1])$，（**6**分）

则$g(x)$在$[0,1]$上可导，且$g(0)=g(1)=0$，由 Rolle 定理，

存在$\xi\in(0,1)$，使得$g'(\xi)=0$，即$f''(\xi)=f(\xi)$. （**10**分）

B卷 七、（**10**分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)+1}{x-1}=1$.

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=f(\xi)$.

证 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)+1}{x-1}=1$，$f(1)=-1$，$f'(1)=1$. （**4**分）

令$g(x)=e^{-x}(f'(x)+f(x))\ (x\in[0,1])$，（**6**分）

则$g(x)$在$[0,1]$上可导，且$g(0)=g(1)=0$，由 Rolle 定理，

存在$\xi\in(0,1)$，使得$g'(\xi)=0$，即$f''(\xi)=f(\xi)$. （**10**分）

《高等数学》,《工科数学分析基础》和《微积分》A 卷参考答案

一、1、$1, y=0$;2、$-1,2$;3、$\frac{1}{2},1$;**4**、$6,0$;**5** 、$\frac{1}{e}, y=x$。

1、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-y+1=e^y$ 确定,则 $y''(0)=$__________,

曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,0)$ 处切线方程是:__________。

2、设曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx-\frac{1}{3}$ 有拐点 $(1,1)$,则 $a=$____$,b=$____ 。

3、若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0$,则 $a=$____$,b=$____ 。

4、设函数 $f(x)=x^3\cos x$,则 $f'''(0)=$___________, $f^{(2018)}(0)=$______________。

5、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+...+\frac{1}{n(n+1)})^n=$__________;

曲线 $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$ 的斜渐近线是_____________。

二、1、C ;2、D; 3、B ;4、A;5、C。

1、设函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$,则 $f(x)$ 有( )

(A)一个可去和一个跳跃间断点;(B)一个跳跃和一个无穷间断点;

(C)一个可去和一个无穷间断点;(D)两个无穷间断点。

2、下列反常积分中发散的是( )

(A)$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$;(B)$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$;(C)$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;(D)$\int_0^1\frac{\ln x}{x}dx$。

3、若方程 $y'+p(x)\bullet y=0$ 的一个特解是 $y=\cos 2x$,则满足初始条件 $y(0)=2$ 的特解 $y=$( )

(A) $2\cos x$; (B) $2\cos 2x$; (C) $\cos 2x+1$; (D) $\sin 2x+2$。

4、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2...(1+\frac{n}{n})^2}=$( )

$(A)\ 2\int_1^2\ln xdx$;$(B)\ \int_1^2\ln^2 xdx$;$(C)\ 2\int_1^2\ln(1+x)dx$;$(D)\ \int_1^2\ln^2(1+x)dx$。

5、"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\ge N$ 时,恒有 $|x_n-a|\le 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的( )

(A)充分条件但非必要条件;(B)必要条件但非充分条件;

（C）充分必要条件；　　　　（D）即非充分条件又非必要条件。

三、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\bullet\frac{x-\sin x}{x^3}$　　（4 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\bullet\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$　　（6 分）

$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$　　（8 分）

$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}$

$=\frac{1}{3}$　　（10 分）

四、（高等数学和微积分）求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解。

解：特征方程 $r^2+2r+1=0$，特征根 $r_1=r_2=-1$　　（2 分）

齐次方程通解 $Y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}$　　（4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=(ax+b)e^x$　　（6 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$4a=1,4a+4b=0$，解得 $a=\frac{1}{4},b=-\frac{1}{4}$。（9 分）

∴通解 $y(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}+(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4})e^x$。　　（10 分）

（工科数学分析基础）求微分方程 $x^2y'+xy=y^2,\mathrm{y}(1)=1$ 的特解。

解：令 $\frac{y}{x}=u,y=xu,y'=u+x\frac{du}{dx}=u^2-u$，　　（2 分）

化为：$\frac{2du}{u^2-2u}=\frac{2dx}{x}$　　（4 分）

积分得：$\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln x^2+\ln c_1=\ln c_1x^2$　　（6 分）

$\frac{u-2}{u}=\pm c_1x^2=cx^2,\frac{y-2x}{y}=cx^2$　　（8 分）

$y(1)=1,c=-1,y=\frac{2x}{1+x^2}$。　　（10 分）

五、设直线 $y=ax\left(0<a<1\right)$ 与曲线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2。

1、求 a，使 S_1+S_2 最小，并求最小值；

2、求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

解：1、交点 $O(0,0),A(a,a^2)$，由题意，有：

$$S=S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)dx+\int_a^1(x^2-ax)dx=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

令：$S'(a)=a^2-\frac{1}{2}=0,a=\frac{1}{\sqrt{2}},S''(\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}>0,S(\frac{1}{\sqrt{2}})$ 是极小值即最小值，

最小值 $S(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$。（6 分）

2、$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}((\frac{x}{\sqrt{2}})^2-(x^2)^2)dx+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1((x^2)^2-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2)dx$

$=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$。（10 分）

六、1、设函数 $f(t)$ 是以 T 为周期的连续函数，证明：对任意实数 a，都有：

$$\int_a^{a+T}f(t)dt=\int_0^T f(t)dt。$$

2、求定积分 $\int_0^{2018\pi}(\sin x+\cos^2 x)\cos^2 xdx$。

解：1、

$\int_a^{a+T}f(t)dt=\int_a^0 f(t)dt+\int_0^T f(t)dt+\int_T^{a+T}f(t)dt=-\int_0^a f(t)dt+\int_0^T f(t)dt+\int_T^{a+T}f(t)dt$，

仅需证明：$\int_0^a f(t)dt=\int_T^{a+T}f(t)dt$ 即可。

令 $t=x+T,\int_T^{a+T}f(t)dt=\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(t)dt$，所以 $\int_a^{a+T}f(t)dt=\int_0^T f(t)dt$。（5 分）

2、原式 $=1009\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x\bullet\cos^2 x+\cos^4 x)dx$

$=1009\cdot 2\cdot\int_0^{\pi}\cos^4 xdx$

$=2018\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx$

$$= 2018 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3027}{4}\pi 。$$ （10 分）

七、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界且导数连续。

1、设 $a<b$，且 $f(a)=f(b)=0$，证明至少 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$；

2、若对任何实数 x，都有 $|f(x)+f'(x)|\le 1$，证明 $|f(x)|\le 1$。

解： 1、令 $F(x)=e^x f(x)$，则 $F(x)$ 满足在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，且 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理知至少 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=e^{\xi}(f(\xi)+f'(\xi))=0$，

而 $e^{\xi}\ne 0$，故 $f(\xi)+f'(\xi)=0$。 （5 分）

2、$F(x)=e^x f(x)$，$F'(x)=e^x(f(x)+f'(x))$，由 $|f(x)+f'(x)|\le 1$，知 $|F'(x)|\le e^x$，

即 $$-e^x\le F'(x)\le e^x，\quad -\int_{-\infty}^{x}e^x dx\le\int_{-\infty}^{x}F'(x)dx\le\int_{-\infty}^{x}e^x dx，$$

即 $$-e^x\le F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x)\le e^x, \lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}e^x\bullet f(x)=0，$$

故 $$-e^x\le f(x)e^x\le e^x$$

所以 $$-1\le f(x)\le 1，\quad |f(x)|\le 1。$$ （10 分）

《高等数学》，《工科数学分析基础》和《微积分》B 卷参考答案

一、1、$\frac{1}{2},1$；2、$1, y=0$；3、$-1,2$；**4**、$\frac{1}{e}, y=x$ ；**5** 、$6,0$。

二、1、C ；2、B； 3、D ；4、C；5、A。

三、同 A 卷第四题。

四、同 A 卷第三题。

五、同 A 卷第五题。

六、同 A 卷第七题。

七、同 A 卷第六题。

A卷

一、选择题：每小题 3 分，共 24 分，下列每题给出的三个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上.

1、$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}=$（A）.

A. e^3.　　B. $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.　　C. 1.

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}=$（B）.

A. 0.　　B. $\dfrac{1}{6}$.　　C. $\dfrac{1}{5}$.

3、设 $f(x)=xe^{-x}$，则 $f^{(2019)}(0)=$（A）.

A. 2019.　　B. $\dfrac{1}{2019}$.　　C. 0.

4、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & x>0\end{cases}$，则在点 $x=0$ 处（A）.

A. $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.　　B. $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.　　C. $f(x)$ 不可导.

5、设 $\begin{cases}x=\tan t\\ y=\sec t\end{cases}(0<t<\dfrac{\pi}{2})$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$（C）.

A. $\cos t$.　　B. $\cos^2 t$.　　C. $\cos^3 t$.

6、定积分 $\int_0^{2\pi}\sin^4 x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x=$（C）.

A. $\dfrac{\pi}{32}$.　　B. $\dfrac{\pi}{16}$.　　C. $\dfrac{\pi}{8}$.

7、以下三个反常积分中，发散的是（B）.

A. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.　　B. $\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}x$.　　C. $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

8、方程 $x^5+x-1=0$，（A）.

A. 只有一个实根.　　B. 只有三个实根.　　C. 有五个实根.

二、选择题：每小题 4 分，共 16 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上.

1、函数 $f(x)$满足 $f(0)=0, f'(0)>0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}=$ （B）.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 不存在.

2、$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<x-x_0<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-a|<\varepsilon$，则（B）.

A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$. B. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$.

C. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$. D. $f(x)$ 在 x_0 点处连续.

3、设存在常数 $L>0$，使得 $|f(x_2)-f(x_1)|\le L|x_2-x_1|^2$ $(\forall x_1, x_2\in(a,b))$，则(D).

A. $f(x)$ 在 (a,b) 内有间断点.

B. $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，但有不可导点.

C. $f(x)$ 在 (a,b) 内可导， $f'(x)\neq 0$.

D. $f(x)$ 在 (a,b) 内可导， $f'(x)\equiv 0$.

4、方程 $y''-3y'+2y=1+e^x\cos 2x$, 则其特解形式为（D）. （高数、微积分）

A. $y=b+e^x A\cos 2x$.

B. $y=b+e^x\left((a_0x+a_1)\cos 2x+(c_0x+c_1)\sin 2x\right)$.

C. $y=b+xe^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

D. $y=b+e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

4、以下四个函数中，在指定的区间上不一致连续的是（ B ）. （工数）

A. $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上.

B. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上.

C. $f(x)=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上.

D. $f(x)=\ln x$ 在 $(1,2)$ 上.

三、判断题（每小题 2 分，共 10 分）（正确的涂 T，错误的涂 F）

1、设 $f(x)$ 可积，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 必为 $f(x)$ 的一个原函数. （F）

2、设非负函数 $f(x)$ 有连续的导数，由曲线 $y=f(x)\,(a\le x\le b)$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面的面积微元为：$\mathrm{d}S=2\pi f(x)\,\mathrm{d}x$. （F）

3、设 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数，则 $f'(x)$ 仍以 T 为周期. （T）

4、设 $x\to a$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是 $x-a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小，$n<m$，那么 $f(x)+g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小. （T）

5、设 $x_n\le z_n\le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$. （F）

四、（10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x\ln(1+x)}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2-x\ln(1+x))(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{\tan x-\sin x}$ （2 分）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2-x\ln(1+x))\bullet 2}{\tan x\bullet(1-\cos x)}$ （4 分）

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{\frac{x^2}{2}}$ （7 分）

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{x}$

$=2$. （10 分）

五、（10 分）求微分方程 $y''-3y'+2y=-2xe^x$ 的通解. （高数、微积分）

解：特征方程 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=1,r_2=2$， （2 分）

齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}$. （4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=x\bullet(ax+b)\bullet e^x$， （6 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$-2a=-2,2a-b=0$，解得 $a=1,b=2$.

∴通解 $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+(x^2+2x)e^x$. （10 分）

五、求解微分方程初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=x^3\\ y(0)=-1\end{cases}$. （工数）

解 $y=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}(\int x^3\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c)$ （5 分）

$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(\int x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+c)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(-\int x^2\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+c)$ （7 分）

$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(-x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+\int 2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+c)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(-x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+c)$

$=c\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-x^2-2$ （9 分）

由 $y(0)=-1$，得 $c=1$，故 $y=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-x^2-2$. （10 分）

六、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，1、证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$；

2、求 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$.

1、令 $x=a+b-t$，$\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=\int_a^b f(a+b-x)dx$. （5 分）

2、由 1 得，$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\dfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{x(\pi-2x)}dx$

$=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{x}{\pi-2x}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\pi}\ln 2$. （10 分）

七、（10 分）已知摆线：$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\left(0\le t\le 2\pi\right)$，常数 $a>0$.

求：1、摆线的弧长；2、摆线和 x 轴围成图形的面积.

解：1、$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt$

$=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\dfrac{t}{2}dt=4a(-\cos\dfrac{t}{2})\Big|_0^{2\pi}=8a$. （5 分）

2、$A=\int_0^{2\pi a}y(x)dx\underline{\underline{x=a(t-\sin t)}}\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\bullet a(1-\cos t)dt=3\pi a^2$. （10 分）

八、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，又 $a<b$ 且 $f(a)=0$，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴相交于 $(x_0,0)$ 点，证明 $a<x_0<b$.

解：切线方程：$y-f(b)=f'(b)(x-b)$，

$\therefore x_0=x\big|_{y=0}=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$，

$\therefore x_0<b$ 显然成立. （4 分）

法 1，证 $x_0>a$ 时，仅需证：$f(x_0)>0$ 即可。由泰勒公式，

$$f(x_0)=f(b)+f'(b)(-\frac{f(b)}{f'(b)})+\frac{f''(\xi)}{2}(-\frac{f(b)}{f'(b)})^2$$

$=\dfrac{f''(\xi)}{2}(\dfrac{f(b)}{f'(b)})^2>0$，$\xi$ 在 x_0 和 b 之间. （10 分）

法 2，证 $x_0>a$ 时，仅需证：$x_0-a>0$ 即可。由拉格朗日中值定理，

$$x_0-a=b-\frac{f(b)}{f'(b)}-a=(b-a)-\frac{f(b)-f(a)}{f'(b)}$$

$=(b-a)-\dfrac{f'(\xi)(b-a)}{f'(b)}=(b-a)(1-\dfrac{f'(\xi)}{f'(b)})>0, a<\xi<b$. （10 分）

A 卷

一、1、B. 2、D. 3、A. 4、A. 5、A.
6、D. 7、B. 8、D. 9、D. 10、C.
11、B. 12、B. 13、C. 14、C. 15、A.

二、(15 分)求解微分方程初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2x^2+y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

解 令 $u = \frac{y}{x}$,则 $x\frac{du}{dx} + u = \frac{2u}{2+u^2}$,即 $x\frac{du}{dx} = \frac{-u^3}{2+u^2}$, (5 分)

积分,$\int \frac{2+u^2}{u^3} du = -\int \frac{dx}{x}$,

解得 $-\frac{1}{u^2} + \ln|u| + \ln|x| = c_1$, $-\frac{x^2}{y^2} + \ln|y| = c_1$, (10 分)

通解 $y = ce^{\frac{x^2}{y^2}}$. (13 分)

由初值条件解得 $c = 1$.

所以,所求特解 $y = e^{\frac{x^2}{y^2}}$. (15 分)

三、(15 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1+\sin^2 x)}{(e^x-1)\sin^3 x}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^4(1+\sin^2 x)}$ (6 分)

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$ (8 分)

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$ (12 分)

$= \frac{1}{3}$. (15 分)

四、(15 分)设函数$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上连续.

(1) 证明:$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$.

(2) 当 $f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx$ 时,利用(1)的结论求$f(x)$.

(1) 证 令 $x = \pi - t$,则 (2 分)

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = -\int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$$

所以，$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$ （8 分）

(2) 解 设 $A = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$, 则

$$A = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x + A\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \quad （10 分）$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \quad （12 分）$$

$$= \pi\ \arctan(\cos x)\big|_{\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{2}\ . \quad （14 分）$$

所以 $f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + \frac{\pi^2}{2}$. （15 分）

五、（10 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$|f''(x)| \le 1$. 已知$f(x)$在$(0,1)$内取到最大值 $\frac{1}{4}$. 证明：$|f(0)| + |f(1)| \le 1$.

证 设最大值点为x_0 ，则 $f(x_0) = \frac{1}{4}$, $f'(x_0) = 0$. 由泰勒公式， （2 分）

$$f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(0 - x_0)^2 = \frac{1}{4} + \frac{f''(\xi)}{2!}x_0^2,$$

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{f''(\eta)}{2!}(1 - x_0)^2 = \frac{1}{4} + \frac{f''(\eta)}{2!}(1 - x_0)^2, \quad （6 分）$$

所以, $|f(0)| + |f(1)| \le \frac{1}{2} + \left|\frac{f''(\xi)}{2!}\right|x_0^2 + \left|\frac{f''(\eta)}{2!}\right|(1 - x_0)^2$ （7 分）

$$\le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x_0^2 + (1 - x_0)^2\right) \quad （8 分）$$

$$\le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \le 1. \quad （10 分）$$

B 卷

一、	1、A.	2、A.	3、D.	4、B.	5、A.
	6、D.	7、D.	8、B.	9、A.	10、D.
	11、B.	12、B.	13、C.	14、C.	15、C.

B 二　同　A 三.
B 三　同　A 四.
B 四　同　A 二.
B 五　同　A 五.

191级队工科数学第一次模拟测试参考答案

一．1.（1）（2）　；0　　2. $\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left(\frac{1}{2(x+2)}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+1}\right)$　；$-\frac{1+t^2}{t^3}$

3. −1, 0

解　原式 $=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-1}-a-\frac{b}{x^2}\right]=0$，由此，有 $a=-1$

回代原式　$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}+x^2)=\lim_{x\to\infty}x^2(\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-1}+1)=\lim_{x\to\infty}-x^2\left[(1-\frac{1}{x^6})^{\frac{1}{3}}-1\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}-x^2\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^6}\right)=0$$

4. $e^{\frac{1}{2}}$;6

8. $e^{\frac{1}{2}}$　【解析】　$\left(\sin^2\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{x^2\ln(\sin^2\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})}$，

$\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(\sin^2\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0}\frac{\ln(\sin^2t+\cos t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2t+\cos t-1}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t(1-\cos t)}{t^2}=\frac{1}{2}$，

所以原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

3.【解】　因为当 $x\to0$ 时，有 $e^{3x^2}-1\sim3x^2$，于是 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{3x^2}=2$，由极限与无穷小的关系，有 $f(x)\sin2x=((2+\alpha)3x^2+1)^2-1\xrightarrow{\text{当 }x\to0\text{ 时}}0$，

所以当 $x\to0$ 时 $\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\sin2x$，于是可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{6}\frac{f(x)\cdot2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\frac{f(x)}{x}=2,$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=6.$$

5. 1　；$\frac{1}{e}$

9. 1　【解析】　由题设有 $y''=-(x-1)y'-x^2y+e^x$. 因为 $y(0)=0,y'(0)=1$，所以 $y''(0)=2$. 由 y'' 的表达式知，y'' 在 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{y(x)-x}{x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{y'(x)-1}{2x}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{y''(x)}{2}=1.$$

8. $\frac{1}{e}$　【解析】　因为在[0,1]上 $f(x)=nx(1-x)^n$ 可取最大值，最大值 >0. 但在端点处 $f(0)=f(1)=0$. 故存在 $x_0\in(0,1)$ 使 $f(x)$ 在 x_0 取最大值，故 $f'(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=n(1-x_0)^n-n^2x_0(1-x_0)^{n-1}=0$，解得 $x_0=\frac{1}{n+1}$，故 $M(n)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$，

$\lim_{n\to\infty}M(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}$.

二．1.A

2.D

1.D 【解析】 因 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$，存在 $\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时 $f(x)$ 有界. 因 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^3+x^2}=1$，存在 $X>0$，当 $x\in(X,+\infty)$ 时，$\frac{x^3+x+1}{x^3+x^2}$ 有界，又 $|1-\cos x|\leqslant 2$，所以当 $x\in(X,+\infty)$ 时 $f(x)$ 有界. 又 $f(x)$ 在 $[\delta,X]$ 上连续，从而有界. 综合之，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界. 选(D).

1.D 【解析】 由 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)=b$，$a<b$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^-}(g(x)-f(x))=b-a>0$. 由保号性定理知，存在去心邻域 $\mathring{U}_\delta(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，有 $g(x)-f(x)>0$. 选(D). 其他均可举出反例.

3.D

4.B　　提示：端点特殊，单独考虑

5.A

3.A 【解析】 ①、②、③、④ 都不正确. 选(A).

① 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\geqslant 0,\\ -1, & 当\ x<0.\end{cases}$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断，而 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处连续.

② 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, x\neq x_0,\\ 0, x=x_0.\end{cases}$ 有 $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0-h)=1$，而 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处并不连续.

③ 的反例：设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续且 $f(x_0)=0$，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域有定义且有界但不连续，则显然有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0=f(x_0)g(x_0)$，$f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续.

④ 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $f(x)+g(x)\equiv 0$，它在 $x=0$ 是连续的.

三 (1)

证 (1) 因为 $\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2|x|^3}$，要使 $\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$，即 $|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时，就有 $\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

(2)

(2) 因 $\frac{n}{n+\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\frac{n^2}{n^2+\pi}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\pi}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$，由夹逼准则，即得证.

四．略

五．$a=2, b=-3$

19.【解】 方法一：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}-2}{x^2} \xlongequal{洛} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{a}{2}(1+ax)^{-\frac{1}{2}}+\frac{b}{3}(1+bx)^{-\frac{2}{3}}}{2x}$. 当 $x\to 0$ 时分子 $\to \frac{a}{2}+\frac{b}{3}$. 若 $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\neq 0$，则由洛必达法则知，上式右边 $\to\infty$，从而左边 $\to\infty$，矛盾，故 $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=0$.

再由洛必达法则，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^2}{2}(-\frac{1}{2})(1+ax)^{-\frac{3}{2}}+\frac{b^2}{3}(-\frac{2}{3})(1+bx)^{-\frac{5}{3}}}{2}=-\frac{a^2}{8}-\frac{b^2}{9}\xlongequal{题设}-\frac{3}{2},$$

由 $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=0$ 及 $-\frac{a^2}{8}-\frac{b^2}{9}=-\frac{3}{2}$，解得 $a=2, b=-3$.

六.(1)

证 取函数 $f(x)=x^5+x-1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

$$f(0)=-1<0, f(1)=1>0,$$

由零点定理知至少存在点 $x_1\in(0,1)$ 使 $f(x_1)=0$，即方程 $x^5+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个正根.

若方程 $x^5+x-1=0$ 还有一个正根 x_2，即 $f(x_2)=0$. 则由 $f(x)=x^5+x-1$ 在 $[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）上连续，在 (x_1,x_2)（或 (x_2,x_1)）内可导知 $f(x)$ 满足罗尔定理条件，故至少存在点 $\xi\in(x_1,x_2)$（或 (x_2,x_1)），使

$$f'(\xi)=0.$$

但 $f'(\xi)=5\xi^4+1>0$，矛盾. 因此方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

(2)

(2) 取函数 $f(t)=e^t$，$f(t)$ 在 $[1,x]$ 上连续，在 $(1,x)$ 内可导. 由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(1,x)$，使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1),$$

即 $$e^x-e=e^\xi(x-1).$$

又，$1<\xi<x$，故 $e^\xi>e$，因此

$$e^x-e>e(x-1),$$

即 $$e^x>x\cdot e.$$

七．(1) 2

14.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(e^{\tan x-x}-1)}{x-\sin x}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}\xlongequal{洛}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=2.$

(2) $-\frac{1}{6}$

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x(2+\cos x)}=-\frac{1}{6}$$

.