作业二十(静电场四)

20.1　先利用高斯定理和球对称性求出空间 P 点的场强大小（其方向沿径向）：

$E_{p1}=0$　（$r<R_1$）

$E_{P2}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$　（$R_1\leqslant r<R_2$）

$E_{P3}=\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$　（$r\ \geqslant R_1$）

$$U_P(r)=\int_r^{\infty}\vec{E}_{\mathrm{p}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{\mathrm{r}}^{R_1}\vec{E}_{\mathrm{p1}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_{\mathrm{p2}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_{\mathrm{p3}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R_1}+\frac{q}{R_2}\right)\quad (r\leqslant R_1)$$

$$U_P(r)=\int_r^{\infty}\vec{E}_{\mathrm{p}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{R_2}\vec{E}_{\mathrm{p2}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_{\mathrm{p3}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}+\frac{q}{R_2}\right)\quad (R_1\leqslant r<R_2)$$

$$U_P(r)=\int_r^{\infty}\vec{E}_{\mathrm{p}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_{\mathrm{p3}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r},\quad (\ r\geqslant \mathrm{R}_2\ )$$

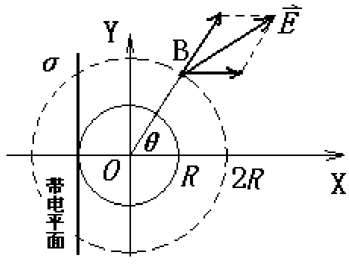
20.2　$U_{内}=\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}[3R^2-r^2]$

20.3　（1）$U_P=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{R^2+x^2}-x]$

（2）$\vec{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\dfrac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}]\vec{i}$

（3）$x=6.0\times10^{-2}\,\mathrm{m}$，$U=4.5\times10^{4}(\mathrm{V/m})$ ；　$E=4.5\times10^{5}(\mathrm{V/m})$

20.4　$\vec{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\dfrac{\alpha}{2}\vec{i}$　；　$U_o=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\alpha$



20.5　（1）　$\vec{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$　$(r<R)$　即球壳内

$\vec{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})$　$(r>R)$　即球壳外

其中 r 为场点到球心的距离，θ为 r 和 x 轴之间的夹角。

（2）见图。

（3）$U_A-U_B=U_{面+球}(A)-U_{面+球}(B)$

$U_{球}(A)=U_{球}(B)$　　$U_A-U_B=U_{面}(A)-U_{面}(B)=\int_{2\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}E\mathrm{d}x=-\dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$

20.6（1）一定；因为 $E=-gradU$，题设三维空间 U 处处为 0，则 E 为 0。

（2）不一定。电势是相对值，可以定义任意点电势为零，场强不一定是零。如：无限

长带电线，可定义任意点（非无限远）电势为零，场强不为零。

作业二十一(静电场五)

21.1　是；否。

21.2　(1)$E_{球感应电荷}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$[SI],方向由球心指向点电荷。

（2）　$U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$[SI]

21.3　（1）$Q_{内}=-q$　$Q_{外}=q$

（2）$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{r}^2}\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r}}$，方向由球心指向 P 点。

21.4　由高斯定理$\oiint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}S=Q/\varepsilon_0$，可得：

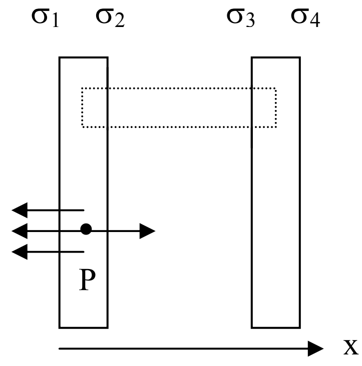
$$\vec{E}_A=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A^2}\frac{\vec{r}_A}{r_A}\quad ;\quad \vec{E}_B=0$$

21.5　两导体球使用导线连接后电势相等，即：$\dfrac{\sigma_r 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\dfrac{\sigma_R 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\ \Rightarrow\ \dfrac{\sigma_R}{\sigma_r}=\dfrac{r}{R}$

21.6 证明: (1)做出如图所示的高斯面 S_1，由于导体内部场强为零，侧面法线方向与场强方向垂直，故由高斯定理有 S_1 面内电荷数为零，即$\sigma_2=-\sigma_3$。

(2) 左板选 P 点场，$\dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0\quad \sigma_1=\sigma_4$

(3) $\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=3\\ \sigma_3+\sigma_4=7\\ \sigma_1=\sigma_4\\ \sigma_2=-\sigma_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1=\sigma_4=5\mathrm{C\cdot m^{-2}}\\ \sigma_2=-\sigma_3=-2\mathrm{C\cdot m^{-2}}\end{cases}$



21.7　(1) 一定相等。是等势体；(2) 不一定。

21.8　(1)方向为垂直导体表面；(2)没有变化；　(3)内部场强不变。

作业二十二(静电场六)

22.1　由高斯定理，$E_A=\dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_A^2}$　　$E_B=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B^2}$

22.2　$\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

22.3 由高斯定理，有 $D\cdot 4\pi r^2=\Sigma Q\Rightarrow D=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{q}{4\pi r^2} & r>R\end{cases}\Rightarrow E=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2} & R<r\le R+d\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r\ge R+d\end{cases}$

$$\begin{aligned}U_1&=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{R}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_R^{R+d}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R+d}^{\infty}\vec{E}_3\cdot\mathrm{d}\vec{r}\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+d}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R+d)}\end{aligned}\qquad (r\leqslant R)$$

$$U_2=\int_r^{R+d}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R+d}^{\infty}\vec{E}_3\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R+d}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R+d}\qquad (R\leqslant r\leqslant R+d)$$

$$U_3=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\qquad (R+d\le r)$$

22.4 $U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

22.5　$F=\dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}=\dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_2^2}$　　$\Rightarrow$　　$\varepsilon_r=\dfrac{r_1^2}{r_2^2}$

22.6　(1)　$D=\varepsilon E=\varepsilon_0\varepsilon_r E=2.655\times10^{-5}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$

(2)　$E=\dfrac{E_0}{\varepsilon_r}=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\Rightarrow\sigma_{e0}=\varepsilon_0\varepsilon_r E=2.655\times10^{-5}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$

(3)　$P=\chi_e\varepsilon_0 E=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E=1.77\times10^{-5}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$

(4)　$\sigma_e'=P=1.77\times10^{-5}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$

(5)　$E_0=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}=3.0\times10^{6}\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，$E'=E_0-E=(\varepsilon_r-1)E=2.0\times10^{6}\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$

22.7　(1) 穿过 S 面的电场强度通量发生改变。因为该通量与面内包围的所有电荷量有关，包括自由电荷+Q_0和电介质 A 上的极化电荷，而后者被 S 面包围的极化电荷数量发生了改变。(2) 电位移通量不发生改变。因为电位移通量仅与面内包围的自由电荷量（+Q_0）有关。

作业二十三(静电场七)

23.1 两球外面的场强相同，分布区域相同，故外面静电能相同；均匀球壳内场为零，无静电能。而球体(并不是导体)内部也有电荷分布，也有场，故也有静电能。所以球体静电能大于球面。

23.2 电源断开后，电量不变， $Q = Q_1 = Q_2$ 而 C_1 因为插入介质，电容增加，

由 $C = \dfrac{Q}{U}$ $\therefore U_1$ 下降而 C_2 不变，$\therefore U_2$ 不变。

23.3 原来：$C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ ， 插入后 $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{\frac{d}{2}} = \varepsilon_0 \dfrac{2S}{d} = 2C_0$

23.4 $W = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 4\pi\varepsilon_0 RU^2 \approx 2\times 3.14\times 8.85\times 10^{-12}\times 10\times 10^{-2}\times 3000^2 \approx 5.0\times 10^{-5}\,\text{J}$

23.5 未并联前，两电容器的总能量为：$W_0 = \dfrac{Q^2}{2C} + \dfrac{(2Q)^2}{2C} = \dfrac{5Q^2}{2C}$

当并联后，总电容为：$C_{总} = 2C$，总电压为：$U = \dfrac{Q_{总}}{C_{总}} = \dfrac{3Q}{2C}$

并联后的总能量为：$W = \dfrac{1}{2}CU^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 2C\cdot(\dfrac{3Q}{2C})^2 = \dfrac{9Q^2}{4C}$

系统的能量变化为：$\Delta W = W - W_0 = \dfrac{9Q^2}{4C} - \dfrac{5Q^2}{2C} = -\dfrac{Q^2}{4C}$

23.6 （1） $Q = C_0 U = C_0 \varepsilon$

（2）因为电源未切断，故电容两端 U 不变，电容器内是均匀电场。

$$E_0 d = E'\cdot 2d \quad \therefore E' = \frac{E_0}{2}$$

$$W' = \Delta V\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_0 E'^2 = \frac{1}{2}W_0 \quad \therefore \Delta W = W' - W_0 = -\frac{1}{2}W_0 = -\frac{1}{4}C_0\varepsilon^2$$

23.7 (1)由导体的静电平衡条件和电荷守恒定律、高斯定理，可分析得：导体球上所带电量在球面，球壳内表面带电量为$-Q$，外表面带电量为$+Q$ ，由高斯定理可

得各个区域的电场分布：

$$E_0 = 0 \quad (r < R_1)$$

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_2 = 0 \quad (R_2 < r < R_3)$$

$$E_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R_3)$$

带电系统所储存的能量为：

$$W_e=\int \mathrm{d}W_e=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0 {E_1}^2\mathrm{d}V+\int_{R_3}^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0 {E_3}^2\mathrm{d}V$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

（2）当内球与球壳连在一起时，两面上的电量中和，只有球壳外表面带$+Q$ 电量，这里电场只分布在 $r>R_3$ 区域，同上一样，可求得：$W_e=\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{R_3}$

23.8 (1)有电介质和无电介质时，电容器的电容间的关系：$C=\varepsilon_r C_0$，切断电源，电容器带电量不变，$\therefore CU=C_0U_0$ ，$\varepsilon_r C_0 U=C_0U_0$ ，$\therefore \varepsilon_\mathrm{r}=\dfrac{\mathrm{U}_0}{\mathrm{U}}=3$

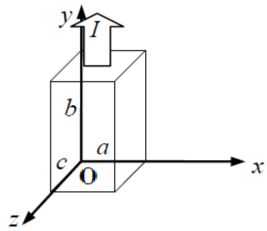
（2） $C_0=\dfrac{C}{\varepsilon_\mathrm{r}}=6.7\times10^{-4}\mu\mathrm{F}$

（3） $W=\dfrac{1}{2}CU^2=1\times10^{-3}\,\mathrm{J}$，$W_0=\dfrac{1}{2}C_0{U_0}^2=3\times10^{-3}\,\mathrm{J}$ $\quad \mathrm{A}_{外}=W_0\text{-}W=2\times10^{-3}\mathrm{J}$

作业二十四(稳恒电流与电场)

24.1 $j=\sigma E\to E=\dfrac{j}{\sigma}\quad E=\dfrac{j}{\gamma}=\dfrac{I/2\pi rl}{\gamma}=\dfrac{I}{2\pi rl\gamma}$

24.2 $I=\dfrac{e}{T}=\dfrac{e}{2\pi/\omega}=\dfrac{e\omega}{2\pi}=\dfrac{ev}{2\pi R}=\dfrac{ev}{4\pi a_0}$



24.3 （1） $j=\dfrac{I}{S}=\dfrac{I}{ac}$

（2） $E=\dfrac{\mathrm{j}}{\sigma}=\rho\mathrm{j}=\dfrac{\rho I}{ac}$

24.4 $I=\dfrac{U}{R}\quad R=\rho\dfrac{L}{S}=\rho\dfrac{L}{\pi(d/2)^2}=\dfrac{4\rho L}{\pi d^2}\quad \therefore I=\dfrac{\pi d^2\cdot U}{4\rho L}\quad N=\dfrac{I}{e}=\dfrac{\pi d^2\cdot U}{4\rho Le}$，

$$j=nev_d\to v_d=\frac{j}{ne}=\frac{I}{Sne}=\frac{U}{\rho\frac{L}{S}Sne}=\frac{U}{n\rho Le}$$

24.5 （1） $J_a=\dfrac{I}{S_1}=10^5\,\mathrm{A/m^2}\qquad J_b=\dfrac{I}{S_2}=2\times10^5\,\mathrm{A/m^2}\qquad J_a=\dfrac{I}{S_3\cos\theta}=J_b=2\times10^5\,\mathrm{A/m^2}$

（2）$\mathrm{d}I_1=J_a=10^5\,\mathrm{A/m^2}\quad \mathrm{d}I_2=J_b=2\times10^5\,\mathrm{A/m^2}\quad \mathrm{d}I_3=J_c\cos60^\circ=\dfrac{J_c}{2}=10^5\,\mathrm{A/m^2}$

24.6 将单位正电荷从电源的负极通过电源内部移到正极时非静电力所做的功定义为该电源的电动势：$\varepsilon=\int_-^+\vec{E}_k\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ 或 $\varepsilon=\oint\vec{E}_k\cdot\mathrm{d}\vec{r}$