

一. 填空题

1. 写出三维泊松方程(直角坐标)
2. 在杆振动问题中, 若杆一端固定, 另一端不受力, 写出不受力一端的边界条件.
3. 三维拉普拉斯方程的基本解为
4. 写出三维热传导方程
5. 写出一般线性常微分方程 $A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$ 的特征方程
6. 写出一维达朗贝尔公式.

二. 简答题.

1. 长为 l 的弦在初始时刻的位移为 0, 一端固定, 另一端为自由端. 初始时刻之后弦开始振动. 试写出相应的定解问题.
2. 长为 l 的杆材质均匀, 无外热源作用下, 杆的两端温度为 0, 在初始时刻杆的温度分布均匀, 温度为 a , 请写出相应定解问题.

三. 解答题.

1. 请利用分离变量法求解以下定解问题.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < l \quad t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = l(\frac{1}{2}x^2 + x) & 0 < x < l \end{cases}$$

2. 请求解以下定解问题.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x & 0 < x < l \quad t > 0 \\ u|_{x=0} = m, \quad u|_{x=l} = 0 & t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin nx & 0 < x < l \end{cases}$$

3. 求解下列方程的解.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + 15 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$t \in (-\infty, +\infty), \quad x > 0.$$

$$u|_{x=0} = \frac{1}{2}t^2 \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \cos 2x$$

4. 根据留数定理求解下列方程的拉普拉斯逆变换

$$F(p) = \frac{x-1}{(x^2-2x+1)(x+2)}$$

5. 求下列式子的拉普拉斯变换.

$$f(t) = \cos \omega t$$

6. 求下列式子的傅里叶逆变换.

$$F(\omega) = \sin \omega + \cos 3\omega$$

7. 设 α_1 是方程 $J_0(x) = 0$ 的正根, 将函数 $f(x) = x \quad x \in (0, 1)$ 展成 $J_0(\alpha_1 x)$ 的级数.

8. 利用积分变换法求解下列定解问题