

保密★启用前

2019-2020 学年第一学期期中考试

《高等数学 AI》A 卷

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**学号**和考生姓名；在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生**学号**，并涂写考生**学号**信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

（以下信息考生必须认真填写）

考生学号								
考生姓名								

一、选择题：1—15 小题，每小题 3 分，共 45 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将答案涂写在答题卡上。

1. 设 $f(x) = x \sin x$, 则

(A) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, (B) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时为无穷大,

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界, (D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有极限。

2. $f(x)$ 在 x_0 点的左右导数均存在, 但不相等, 则

(A) $f(x)$ 在 x_0 点处连续, (B) $f(x)$ 在 x_0 点处不连续,

(C) $f(x)$ 在 x_0 点处可导, (D) $f(x)$ 在 x_0 点极限不存在,

3. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}$, 则

(A) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(1, f(1))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标

(D) $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(1, f(1))$ 不是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标

4. 设 $f(x) = x^2 \sin x$, 则 $f^{(2019)}(0) =$

(A) 2019; (B) 2018×2019 ; (C) -2018×2019 ; (D) -2019。

5. 设 $f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{x}}$ 则

(A) $x=0$ 与 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点,

(B) $x=0$ 与 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点。

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点。

6. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{2n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

- (A) 处处可导 (B) 恰有 1 个不可导点,
(C) 恰有 2 个不可导点 (D) 至少有 3 个不可导点.

7. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则

- (A) $0 < dy < \Delta y$ (B) $0 < \Delta y < dy$
(C) $\Delta y < dy < 0$ (D) $dy < \Delta y < 0$

8. 曲线 $y = \frac{(1+x)^2}{4(1-x)}$

- (A) 既有垂直又有水平与斜渐近线, (B) 仅有垂直渐近线,
(C) 只有垂直与水平渐近线, (D) 只有垂直与斜渐近线.

9. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小 $(1+x)^{x^2} - 1$, $e^{x^4-2x} - 1$ 和 $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$, 的阶数分别是:

- (A) 1, 2 和 3 阶, (B) 3, 2 和 1 阶,
(C) 3, 1 和 2 阶, (D) 2, 3 和 1 阶

10. 设直线 $y=ax+b$ 同时与曲线 $y=x^2$ 及 $y=\frac{1}{x}$ 相切, 则常数 a, b 应分别取:

- (A) $a=-4, b=-4$. (B) $a=-3, b=-4$.
(C) $a=-4, b=-3$. (D) $a=-3, b=-3$.

11. 下列函数 $f(x)$ 中, 导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续的是:

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad f(x) &= \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} & \text{(B)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \\ \text{(C)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} & \text{(D)} \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

(A) 等于 $e^{-\frac{1}{6}}$. (B) 等于 $e^{\frac{1}{6}}$. (C) 等于 e^{-6} (D) 不存在.

13. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义, 则下述命题中正确的是

- (A) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导且单调增加, 则对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f'(x) > 0$,
- (B) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处取极值, 则 $f'(x_0) = 0$
- (C) 若 $f''(x_0) = 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点坐标
- (D) 若 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, 则 x_0 一定不是 $f(x)$ 的极值点.

14. 摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{3}$ 处的曲率为:

(A) $2a$. (B) $4a$ (C) $\frac{1}{2a}$. (D) $\frac{1}{4a}$.

15. 曲线 $y=x^3$ 的弧微分 ds 等于:

(A) $\sqrt{1+x^6} dx$; (B) $\sqrt{1+x^8} dx$; (C) $\sqrt{1+6x^4} dx$ (D) $\sqrt{1+9x^4} dx$

二、解答题： 16—21 小题，共 55 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本题满分 10 分)

求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{\tan x - \sin x}$$

17. (本题满分 10 分)

求数列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{n\sqrt{n}} \cdot \cos \frac{2a}{n\sqrt{n}} \cdots \cos \frac{na}{n\sqrt{n}} \right)$$

18. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=0$, $f''(0)$ 存在. 若

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ f'(0), & x = 0, \end{cases}$$

求 $F'(x)$, 并证明 $F'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续。

19. (本题满分 10 分)

设可微函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y=2$ 所确定, 试求 $f(x)$ 的极大与极小值。

20. (本题满分 10 分)

设 $y = \sin \left(\ln \sqrt{\frac{x}{1+x^2}} \right) (x > 0)$, 求 y' 。

21. (本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有 n 阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = l$ 。证明 $f^{(n)}(x)$ 在 $x=0$ 点处连续。