第一篇　高等数学

第一章　函数　极限　连续

基础单项训练

难度 ★☆　通关称号 ⇨ 菜鸟

1. 设 $f(x)=\dfrac{(1-\cos x)(x^3+x+1)}{x^3+x^2}$,则

(A) 存在 $\delta>0$ 及 $X>0$,$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界,在 $(X,+\infty)$ 内无界.

(B) 存在 $\delta>0$ 及 $X>0$,$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内无界,在 $(X,+\infty)$ 内有界.

(C) 对任意 $X>0$,$f(x)$ 在 $(0,X)$ 内有界,在 $(X,+\infty)$ 内无界.

(D) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界.

2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在,则

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 必不存在.　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 必存在.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 必不存在.　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 必存在.

3. 下列命题

① 设 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 连续,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 必连续.

② 设 $\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 必连续.

③ 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,$g(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续,则 $f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 必不连续.

④ 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 都不连续,则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=x_0$ 必不连续.

其中正确的命题个数为

(A)0 个.　(B)1 个.　(C)2 个.　(D) 至少 3 个.

4. 设当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 $(x-x_0)$ 的同阶无穷小,则

(A) $f(x)-g(x)$ 必是 $x-x_0$ 的同阶无穷小.　(B) $f(x)-g(x)$ 必是 $x-x_0$ 的高阶无穷小.

(C) $f(x)g(x)$ 必是 $x-x_0$ 的高阶无穷小.　(D) $f(x)g(x)$ 必是 $x-x_0$ 的同阶无穷小.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\geqslant 0\\ \dfrac{1}{1-x}, & x<0\end{cases}$,则 $f(f(x))=$ ________.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=$ ________.

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+e^{\frac{1}{x}})^{\ln(1+x)}=$ ________.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin^2\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=$ ________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 2x}=$ ________.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

11. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

基础综合训练

难度 ★★☆　通关称号 ⇨ 小达人

1. 下述命题正确的是

(A) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 x_0 处不连续,则 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处必不连续.

(B) 设 $g(x)$ 在 x_0 处连续,$f(x_0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$.

(C) 设在 $x=x_0$ 的去心左邻域内 $f(x)<g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=b$，则必有 $a<b$.

(D) 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=b$，$a<b$，则必存在 $x=x_0$ 的去心左邻域，使 $f(x)<g(x)$.

2. 设 $f(x)$ 为当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$，且 $f(0)=-1$，则

(A) 有可去间断点.　　(B) 有跳跃间断点.

(C) 有无穷间断点.　　(D) 连续.

3. 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^{x}$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq 0\\ 0, & \text{当 } x=0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0\\ 1, & \text{当 } x=0\end{cases}$，则在点 $x=0$ 处有间断点的函数是

(A) $\max\{f(x),g(x)\}$.　　(B) $\min\{f(x),g(x)\}$.

(C) $f(x)-g(x)$.　　(D) $f(x)+g(x)$.

5. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$

(A) 不存在间断点.　　(B) 存在间断点 $x=1$.

(C) 存在间断点 $x=0$.　　(D) 存在间断点 $x=-1$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ________.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=$ ________.

8. 在区间 $[0,1]$ 上函数 $f(x)=nx(1-x)^n$ 的最大值记为 $M(n)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=$ ________.

9. 设 $y=y(x)$ 满足 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$ 且 $y(0)=0$，$y'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=$ ________.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{-1}^{2}\arctan(nx)\,dx=$ ________.

11. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$，则 $f(x)$ 有间断点 $x=$ ______，是______型，间断点 $x=$ ______，是______型.

12. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-\sin(x-1)}{\sqrt[3]{2x-x^2}-1}$.

13. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\cos 3x}{e^x-1-x}$.

14. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x-\sin x}$.

15. 设 $u_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

16. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

★17. 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)$.

18. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$.

19. 已知常数 $a>0,b\neq0$,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}-2}{x^2}=-\dfrac{3}{2}$,求 a 与 b.

20. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(1+bx+cx^2)-1-ax}{x^4}$ 存在,求常数 a,b,c 的值,并求此极限值.

21. 设对任意 x 和 y,函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,并且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. 试证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

思维拓展训练　　难度★★★★　　通关称号⇨小牛人

1. 设 $f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0, a_i\neq 1, i=1,2\cdots,n; n\geqslant 2$ 为确定的整数. 求

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$；　② $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$；　③ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+k)(n+k+1)}$.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x^2}-1}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

4. 设当 $0<x\leqslant 1$ 时 $f(x)=x^{\sin x}$，对于其它 x，$f(x)$ 满足 $f(x)+k=2f(x+1)$，求常数 k 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

5. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n} (n = 1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限值.

6. 设常数 $a \neq -1$，$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1} + ax^n - 1}{x^{2n} - (a+1)x^n - 1}$，讨论 a 的取值，确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

7. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数，证明：方程 $f(x) - f(x-1) = 0$ 在任何一个长度为 1 的闭区间 $[a, a+1]$ 上至少有一个实根.