1. 方法1 $A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

根据数学归纳法可得$A^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

方法2 记$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则有$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$

$$A=E+B$$

$$A^n=(E+B)^n=E^n+C_n^1B=E+nB=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

方法3 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$为倍加矩阵，$A^n=EA^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

2. 设$B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$与$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$可交换，则$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$， $\begin{cases}a+c=a\\b+d=a+b\\c=c\\d=c+d\end{cases}$， $\begin{cases}a=d\\c=0\end{cases}$，

与$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$可交换的所有矩阵为$\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$，其中$a,b$为任意常数

3. 证：充分性. 因为$\boldsymbol{A}$为数量矩阵，所以$\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{E}$,

$\boldsymbol{A}$与任意的同阶方阵都可交换.

必要性. 用$\boldsymbol{E}_{ij}$表示(i, j)元为1，其余元素都为0的n阶方阵

因为$\boldsymbol{A}$与任意n阶方阵都可交换, 所以$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$.

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$,1在第i行的第j个位置

$$=\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow \text{这一行为第}i\text{行的位置} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{j1}} & & \downarrow & & \phantom{a_{jn}} \\ & & \text{第}j\text{列} & & \end{array} & \end{array}$$

$$\boldsymbol{AE}_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},1\text{在第}j\text{列的第}i\text{个位置}$$

$$=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \downarrow \\ \text{这一列为第}j\text{列} \end{array} \to \text{第}i\text{行}$$

$$\text{第}i\text{行} \leftarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \downarrow \\ \text{第 j 列} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \downarrow \\ \text{第 j 列} \end{array} \to \text{第}i\text{行}$$

比较上式两边的对应元素可得$a_{jj}=a_{ii}$, $\boldsymbol{A}$的第j行除了a_{jj}都为0，

由j的任意性可知，$\boldsymbol{A}$为对角矩阵，再由$a_{jj}=a_{ii}$可知$\boldsymbol{A}$为数量矩阵。

4. 方法1：由已知，得 $E_{3,1}(-3)A=C$，$BE_1(-3)=D$

$E_{3,1}(-3)ABE_1(-3)=CD$,

$$AB=E_{3,1}^{-1}(-3)CDE_1^{-1}(-3)=E_{3,1}(3)CDE_1(-\frac{1}{3})$$

$$=E_{3,1}(3)\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&4&3\end{pmatrix}E_1(-\frac{1}{3})$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&7&9\end{pmatrix}E_1(-\frac{1}{3})=\begin{pmatrix}0&1&2\\-\frac{1}{3}&0&1\\-\frac{2}{3}&7&9\end{pmatrix}$$

方法2：参照已知条件对CD做逆变换，

$$CD=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_1}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\times(-\frac{1}{3})}\begin{pmatrix}0&1&2\\-\frac{1}{3}&0&1\\-\frac{2}{3}&7&9\end{pmatrix}$$

5.充分性. 当 $AB=0$时，显然有 $A^TAB=0$.

必要性. 由 $A^TAB=0$，可得 $B^TA^TAB=0$，$(AB)^T(AB)=0$，

AB是一个列向量，设 $AB=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{bmatrix}$，由$(AB)^T(AB)=0$，得

$k_1^2+k_2^2+\cdots+k_m^2=0$, 进一步可得 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,

所以 $AB=0$

6. $\boldsymbol{A}\alpha=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,

$$\beta^T(\boldsymbol{A}\alpha)=\left(2,3,3\right)\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=0$$

$$\boldsymbol{B}^2=(A\alpha\beta^T)(A\alpha\beta^T)=A\alpha(\beta^T A\alpha)\beta^T=\boldsymbol{O}$$

$$\boldsymbol{B}^5=\boldsymbol{O}$$