第 2 章 逻辑代数基础

Logic Algebra

§2.1 逻辑代数运算法则

Operations of Logic Algebra

§2.2 逻辑函数的标准形式

Standard Forms of Logic Function

§2.3 逻辑函数的公式化简

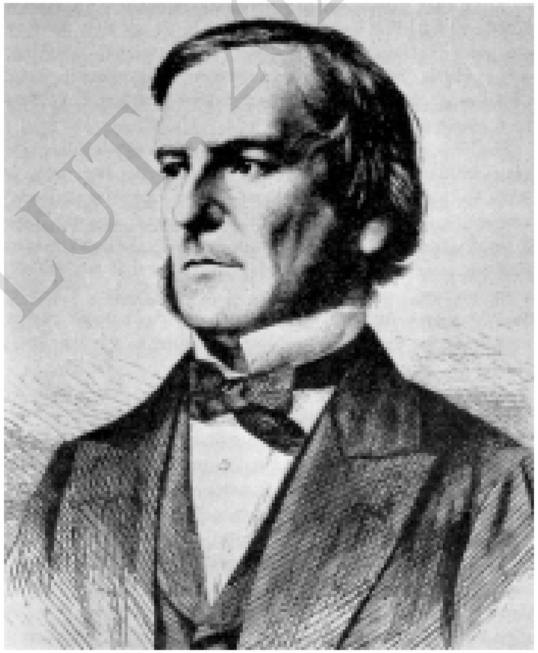
Simplification Using Logic Algebra

§2.4 卡诺图化简逻辑函数

Simplification Using K-Maps

逻辑代数描述了二值变量的运算规律，它是英国数学家布尔于1854年提出的，也称**布尔代数**。

逻辑代数是按逻辑规律进行运算的代数，是分析和设计数字逻辑电路不可缺少的基础数学工具。



George Boole，1815～1864

电路中的信号变量都为二值变量，只能有0、1两种取值。

逻辑代数与算术不同。

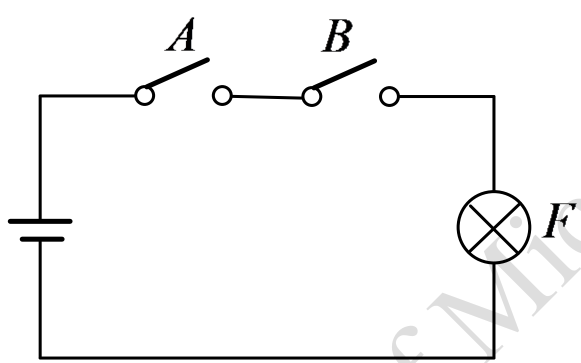
§2.1　逻辑代数运算法则

Operations of Logic Algebra

1. 基本逻辑运算

(1) 与 AND

欲使某事件成立，必须所有条件具备，缺一不可

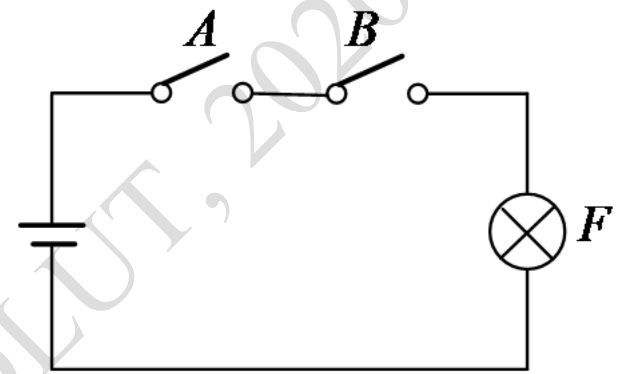


$$\text{开关}\ A, B\ \begin{cases} 1 & \text{闭合} \\ 0 & \text{断开} \end{cases} \qquad F = \begin{cases} 1 & \text{亮} \\ 0 & \text{暗} \end{cases}$$

两个开关串联

只有当 A 和 B 都闭合 (逻辑 1), 灯 (F) 才亮(逻辑 1)

与逻辑真值表
Truth Table



A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

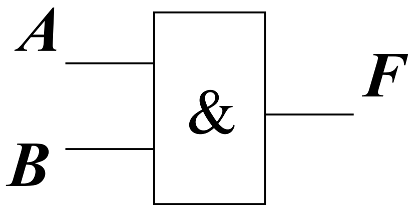
输入的所有可能取值按二进制数大小排列**在左**

对应的**输出**列**在右**

与功能描述：输入只要有低，输出为低；

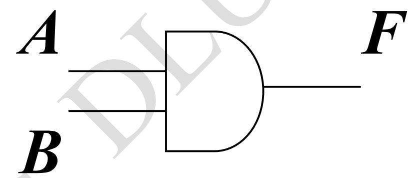
输入都为高时，输出为高。

符号及表达式



IEC标准符号

International Electrotechnical Commitee



ANSI/IEEE 标准符号

American National Standard Institute / Institute of Electrical and Electronics Engineers

最多 8 输入端

表达式: $F = A \cdot B = AB$

(A and B) (逻辑乘)

与运算　AND operation

$$0 \bullet 0 = 0$$

$$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$$

$$1 \bullet 1 = 1$$

$$A \bullet 0 = 0$$

$$A \bullet 1 = A$$

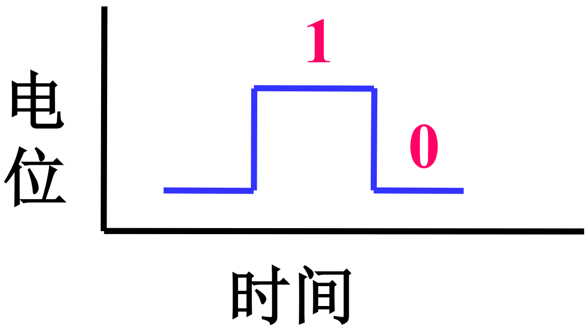
$$A \bullet A = A$$

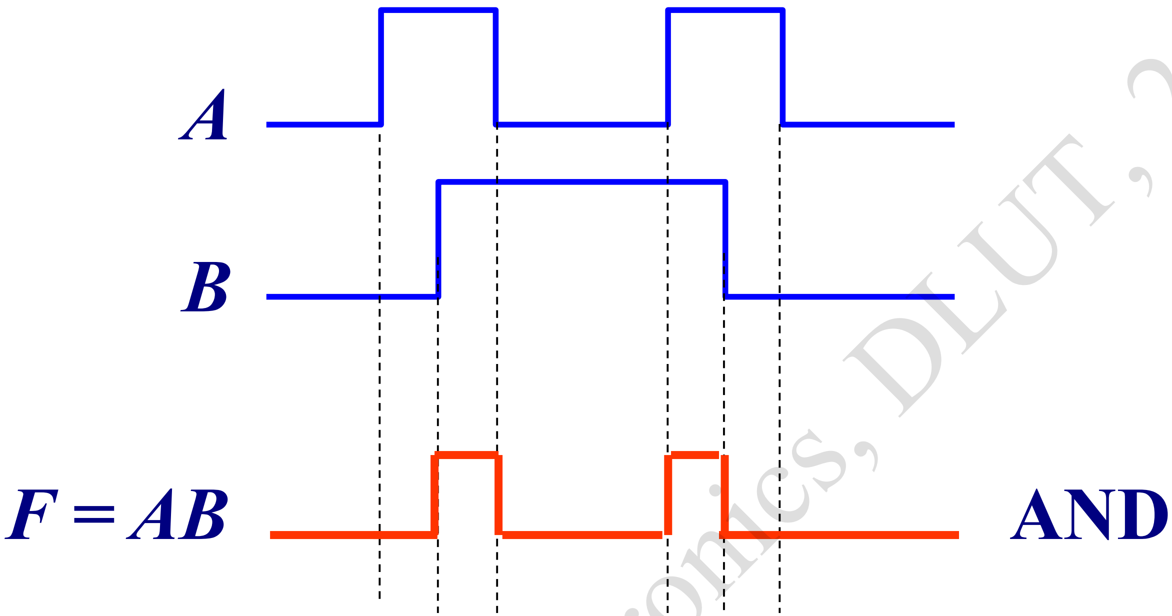
$$A \bullet \overline{A} = 0$$

A: 变量输入

波形图，时序图

Output waveforms
Timing diagrams





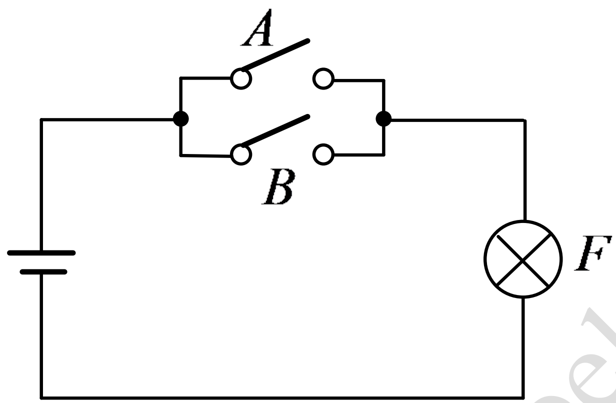
输出波形必须对应输入波形

A	*B*	*F*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

输入只要有低，输出为低；
输入都为高时，输出为高。

(2) 或 OR

使某事件成立的条件有一即可，多也不限。



两个开关 (A, B) 并联

真值表

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

任何一个开关闭合, 灯 F 亮。

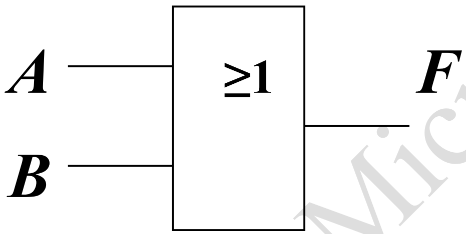
$$\text{开关 } A,B\begin{cases}1 & \text{闭合}\\0 & \text{断开}\end{cases}$$

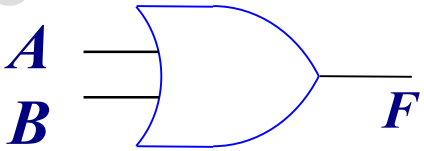
或功能描述

只要有一个输入为高电平1，输出就为高电平1

只有输入全为低电平 0 时， 输出才为低电平0

或门符号及表达式





8 输入

$F = A+B$ **逻辑加**

或运算

$0+0=0$

$0+1=1$

$1+1=1$

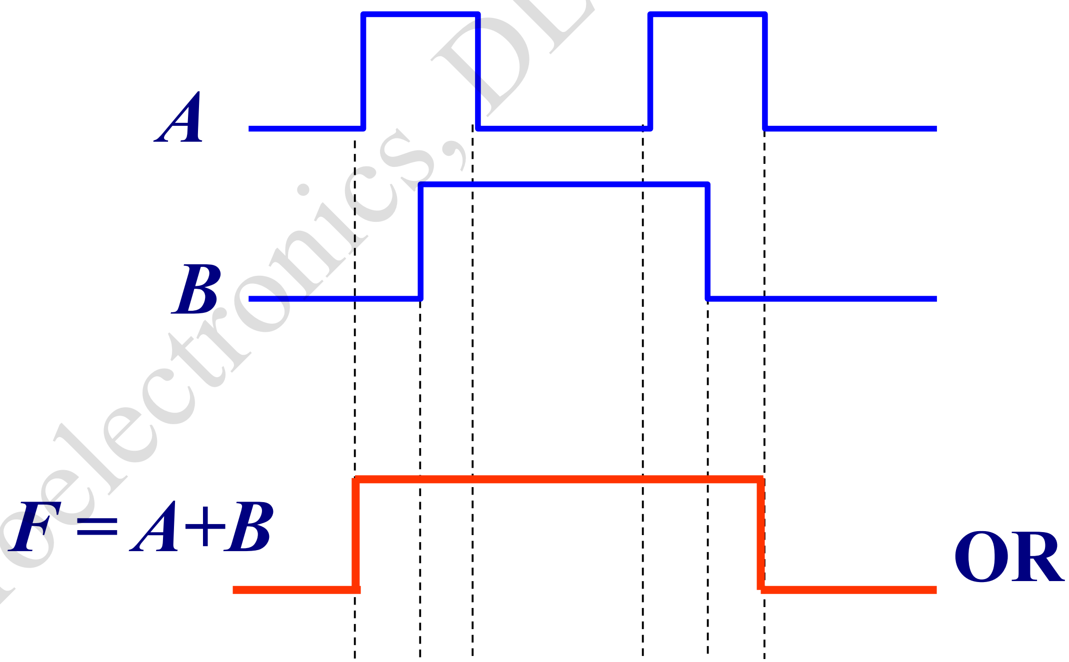
$A+0=A$

$A+1=1$

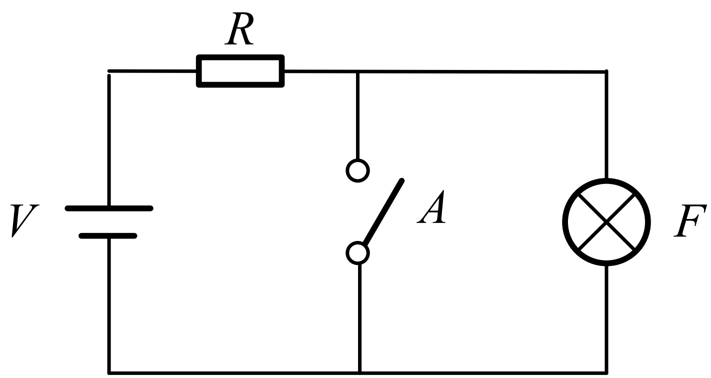
$A+A=A$

$A+\overline{A}=1$

波形图



(3) 非 NOT



如果 *A* 闭合，灯 *F* 灭。

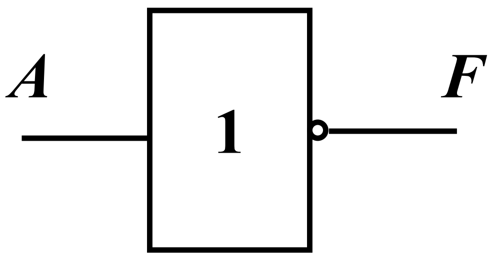
真值表

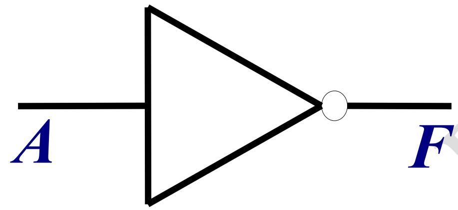
A	*F*
0	1
1	0

非功能描述

输出与输入波形相反，产生反向输出波形。

非门符号及表达式





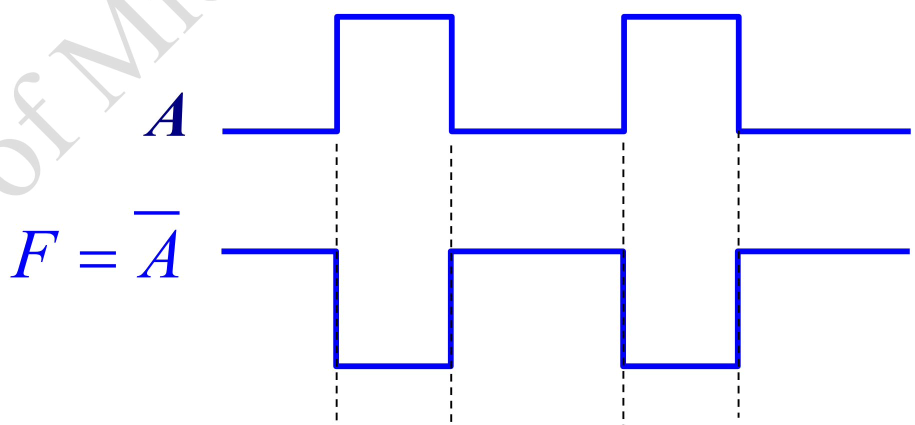
$$F = \overline{A}$$

非运算

$$\overline{0} = 1 \qquad \overline{1} = 0$$

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad A \cdot \overline{A} = 0 \qquad A + \overline{A} = 1$$

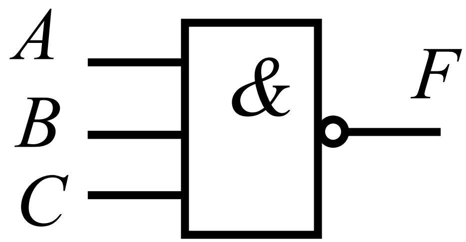
波形图

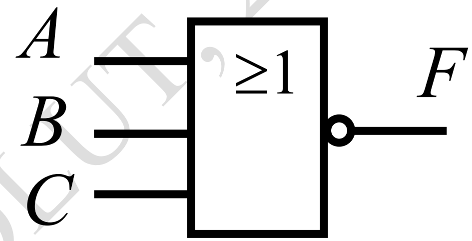
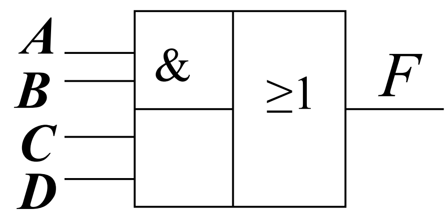
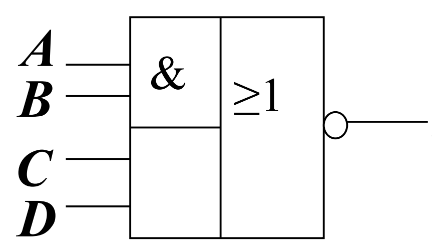


NOT

2. 复合逻辑运算

"与"、"或"、"非"是三种基本的逻辑关系，任何其它的逻辑关系都可以以它们为基础表示。

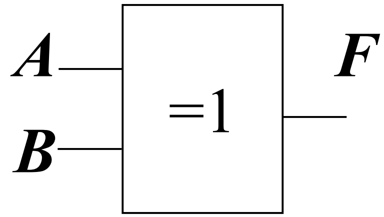
与非门(NAND) 条件A、B、C都具备，则F 不发生	$F=\overline{A\bullet B\bullet C}$	

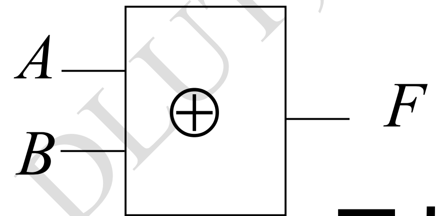
或非门(NOR) **条件A、B、C均不具备，则*F*发生**	$F=\overline{A+B+C}$	
与或门 **(AND-OR)**	$F=AB+CD$	
与或非门 **(AND-OR-NOT)**	$F=\overline{AB+CD}$	

异或 (XOR： Exclusive - OR)

$$F = A \oplus B$$

$$= \overline{A}B + A\overline{B}$$





国内使用

真值表

A	B	F(XOR)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

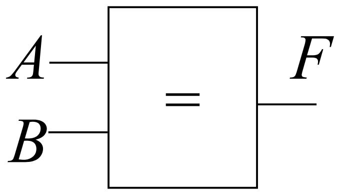
输入端只有2 个且必须 2 个，两输入相异时输出高电平。

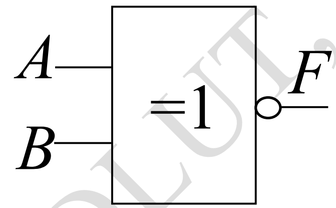
功能：

比较(判断)两输入是否相异

$$\begin{cases} \text{Yes: 1 （肯定）} \\ \text{No: 0 （否定）} \end{cases}$$

同或 （XNOR： Exclusive-NOR)





$$F = A \odot B = AB + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$F = \overline{A \oplus B}$$

真值表

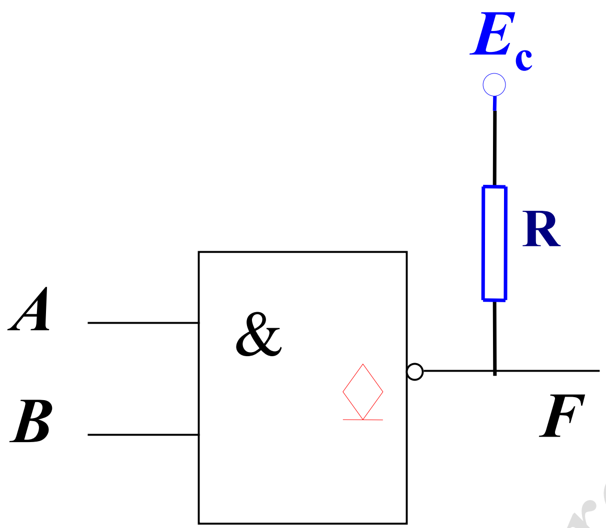
A	*B*	*F* (XOR)	*F*(XNOR)
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

同或门2输入，输出与异或门相反；两输入相同时输出高电平。

功能：比较(判断)两输入是否相同
$$\begin{cases} \text{Yes: } 1 \\ \text{No: } 0 \end{cases}$$

集电极开路与非门

(OC：Open collector NAND Gate)



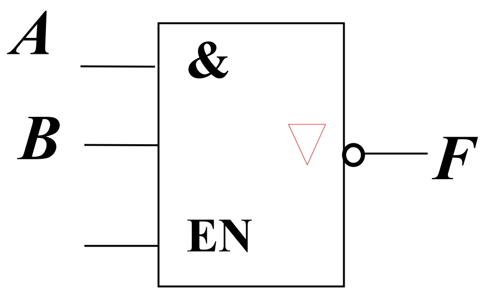
$$F = \overline{AB}$$

实现“线与逻辑”

三态门 (TSL：Three State Logic)

Tristates：1, 0, Hi-Z (高阻态)
impedance

1) 高电平有效 (Active High)

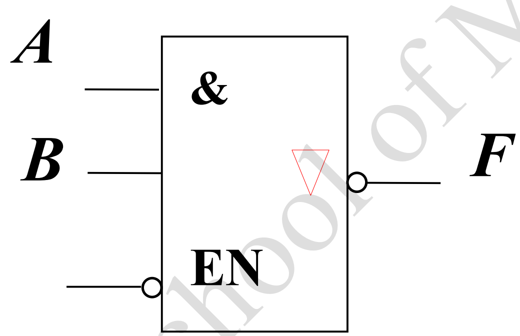


EN: 使能输入端 enable input

EN=1, $F = \overline{AB}$ (与非门)

EN=0, F = Hi-Z (高阻抗)

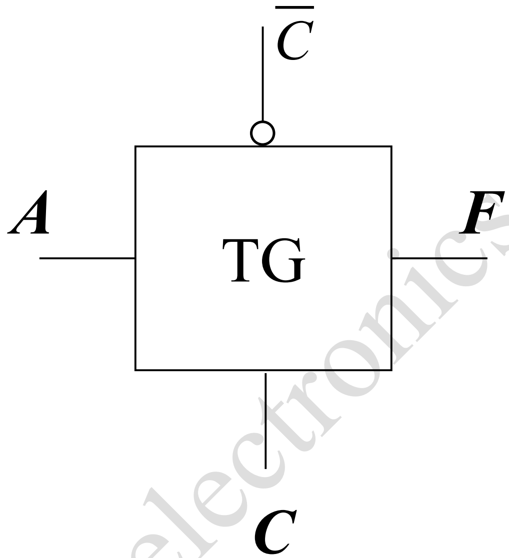
2) 低电平有效 (Active Low)



EN=0, $F = \overline{AB}$ (与非门)

EN=1, F = Hi-Z

传输门（TG： Transmission Gate)



C： Control

C=1, $\overline{\text{C}} = 0$， F=A (开关合上信号传过)

C=0, $\overline{\text{C}} = 1$， (开关断开)

逻辑关系——简单记忆

与逻辑：逻辑乘　$F=A \bullet B$　“有0则0”

或逻辑：逻辑加　$F=A+B$　“有1则1”

非逻辑：逻辑非　$F=\overline{A}$　“求反”

与非逻辑　$F=\overline{A \bullet B}$　“全高出低、一低出高”

或非逻辑　$F=\overline{A+B}$　“全低出高、一高出低”

异或逻辑　$P=A \oplus B=\overline{A}B+A\overline{B}$　“不同为1”

同或逻辑　$P=A \odot B=\overline{A}\,\overline{B}+AB$　“相同为1”

3. 逻辑代数运算基本定律

A的反向运算为$\overline{A}$	或运算 逻辑加	与运算 逻辑乘
	“+”	“•”
$\overline{0}=1$	$0+0=0$	$0\cdot 0=0$
$\overline{1}=0$	$0+1=1$	$0\cdot 1=0$
	$1+0=1$	$1\cdot 0=0$
	$1+1=1$	$1\cdot 1=1$

每一个定律都有两种形式：逻辑加和逻辑乘。这两种形式互为“**对偶式**”（**Dual**）。

	逻辑加 Addition	逻辑乘 Multiplication	
1) 定律 1	$A+B=B+A$;	$AB=BA$	(交换律)
2) 定律 2	$A+(B+C)=(A+B)+C$;	$A(BC)=(AB)C$	(结合律)
3) 定律 3	$A+(BC)=(A+B)(A+C)$;	$A(B+C)=AB+AC$	(分配律)
4) 定律 4	$A+0=A,\ \ A+1=1$;	$A\cdot 0=0,\ A\cdot 1=A$	(0-1律)
5) 定律 5	$A+\overline{A}=1$;	$A\cdot\overline{A}=0$	(互补律)
6) 定律 6	$A+A=A$;	$A\cdot A=A$	(重叠律)
7) 定律 7	$\overline{\overline{A}}=A$		(还原律)

8) De. Morgan Theorum $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$ (摩根定理)

推论 $\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$; $\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

逻辑加 Addition　　逻辑乘 Multiplication

定律 3　$A+(BC)=(A+B)(A+C)$

$=A+AB+AC+BC$

$=A(1+B)+AC+BC$

$=A+AC+BC$

$=A(1+C)+BC$

$=A+BC$

1) ， (交换律)

2))C (结合律)

3) B+AC (分配律)

4) $\cdot 1=A$ (0-1律)

5) (互补律)

6) (重叠律)

7) 定律 7　$\overline{\overline{A}} = A$ (还原律)

8) De. Morgan Theorum $\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$ (摩根定理)

推论　$\overline{A+B+C} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$;　$\overline{ABC} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

4. 逻辑代数运算基本规则

1) 代入规则

等式两侧某一变量都用一个逻辑函数代入，等式仍成立。

例： 摩根定理

若 $\overline{AX} = \overline{A} + \overline{X}$ $\qquad X = BC$

左侧： $\overline{AX} = \overline{ABC}$ $\qquad$ 右侧： $\overline{A} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

有 $\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ $\qquad$ 摩根定理推论

2) 反演规则 Complementary

将一个函数表达式 F 中:

注意: 运算顺序不变

- 所有的“与(·)”换成“或(+)”，“或(+)”换成“与(·)”；
- “0”换成“1”，“1”换成“0”；
- 原变量换成反变量,反变量换成原变量,

则所得到的逻辑函数即F的反函数, 表达式为 $\overline{F}$ 。

如果 F 成立, $\overline{F}$ 也成立。

例 已知 $F = A(B+\overline{C})+CD$，求 $\overline{F}$

解: $\overline{F} = (\overline{A} + \overline{B}\overline{C})(\overline{C}+\overline{D})$

例 已知 $F = A(B+\overline{C}) + CD$，**求** $\overline{F}$

解：

$$\overline{F} = \overline{A(B+\overline{C}) + CD}$$

用摩根定理求解

$$= \overline{A(B+\overline{C})} \bullet \overline{CD}$$

$$= \left(\overline{A} + \overline{(B+\overline{C})}\right) \bullet \left(\overline{C} + \overline{D}\right)$$

$$= \left(\overline{A} + \overline{B} \bullet \overline{\overline{C}}\right) \bullet \left(\overline{C} + \overline{D}\right)$$

$$= \left(\overline{A} + \overline{B}C\right)\left(\overline{C} + \overline{D}\right)$$

3) 对偶规则　Duality

若 F 为一逻辑函数，如果将该函数表达式中所有

$$\begin{cases} \text{“与”} \quad (\cdot) \Longleftrightarrow \text{“或”} \quad (+) \\ \text{“0”} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{“1”} \end{cases}$$

则所得到的逻辑函数即F的对偶式，表达式为 F' 。

如果 F 成立，F' 也成立

例： 已知 $F=A(B+\overline{C})+CD$ ，求 F'

解： $F' = (A + B\overline{C})(C+D)$

$$\overline{F} = (\overline{A}+\overline{B}C)(\overline{C}+\overline{D})$$

用途：化简 $F=\left(A+B+\overline{C}\right)\left(A+B\right)\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)$

$$F'=AB\overline{C}+AB+A\overline{B}\overline{C}$$

化简后再对偶一次，转换为*F*

4. 常用公式

1) $A+AB=A; \quad A(A+B)=A$ **吸收律**

证: $A+AB = A(1+B) = A$

2) $AB+A\overline{B}=A; \quad (A+B)(A+\overline{B})=A$

证: $AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$

3) $A+\overline{A}B=A+B; \quad A(\overline{A}+B)=AB$

证: 分配律 $A+BC=(A+B)(A+C)$

$$A+\overline{A}B=(A+\overline{A})(A+B)=A+B$$

反变量吸收律

4) $AB+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C$;

$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C) = (A+B)(\overline{A}+C)$

冗余定理

证:

$AB+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC = AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$

$= AB+\overline{A}C$

推论: $AB+\overline{A}C+BCDE = AB+\overline{A}C$

5) **异或公式 (XOR)** $A \oplus B = \overline{A \odot B}$

证: $\overline{AB+\overline{A}\,\overline{B}} = \overline{A}B + A\overline{B}$

$A \oplus A = 0,\quad A \oplus \overline{A} = 1,\quad A \oplus 0 = A,\quad A \oplus 1 = \overline{A}$

6) 异或的因果关系 Causality

如果 $A \oplus B \oplus C = D$

则 $\begin{cases} A \oplus B \oplus D = C; \\ A \oplus C \oplus D = B; \\ B \oplus C \oplus D = A; \end{cases}$

多变量异或

- **变量为 1 的个数为奇数，异或结果为 1；1 的个数为偶数，结果为 0；**
- **与变量为 0 的个数无关。**