第 8 章 曲线积分与曲面积分

8.1 向量值函数在有向曲线上的积分

8.1.1 向量场

若场中每一点对应的物理量是向量，则称该场为向量场。例如力场、流速场等逗属于向量场。

数量场可以用一个数量值函数 $z=f\,(x,\,y)$表示；若 G 是一向量场，则可用定义在 G 上的二元向量值函数表示：$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 其中二元数量值函数 $P(x,\ y)$，$Q(x,\ y)$为 $\boldsymbol{F}(x,y)$的坐标。若 G 是一空间向量场，在引入空间直角坐标系后，G 可用三元向量值函数表示：

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

在数量场中，我们从几何上用等值线（面）描述数量场分布，对于向量场则用向量线来刻画向量场的分布。所谓向量线是位于向量场中这样的曲线：该曲线上每点处的切线与该点的场向量重合。例如静电场中的电力线，磁场中的磁力线都是向量线，它们直观清晰地描绘了向量场中的电场强度与磁场强度的分布情况。

8.1.2 第二型曲线积分的概念

变力沿曲线所作的功 设一个质点在力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 作用下，从点 A 沿一条光滑的平面曲线 L 移动到点 B（如图 8－1），其中函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$在 L 上连续，试求力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功.

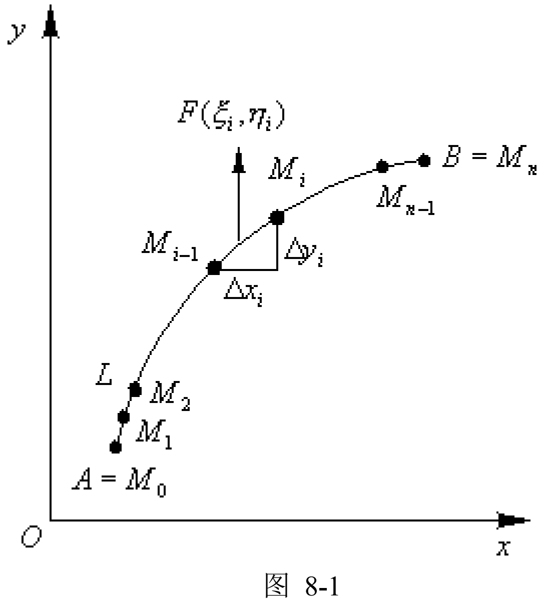


图 8-1

如果力 $\boldsymbol{F}$ 是常力，质点沿直线运动，则 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W=F\cdot\overrightarrow{AB}$.，现在 $\boldsymbol{F}(x,y)$是变力，且质点沿曲线 L 运动，功就不能用上面的公式了.与前面一样，我们仍采用“划分、代替、求和、取极限”的方法来解决这个问题.

使用分点 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),\cdots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ 将 L 分成 n 个小弧段，由于

$\widehat{M_{i-1}M_i}$ 光滑而且很短。可以用有向线段 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i)\boldsymbol{i} + (\Delta y_i)\boldsymbol{j}$ 来近似地代替它，其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$、$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$。又由于函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上连续，可以用 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的一点 (ξ_i,η_i) 处的力 $\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i) = P(\xi_i,\eta_i)\boldsymbol{i} + Q(\xi_i,\eta_i)\boldsymbol{j}$ 来近似代替这小弧段上各点处的力.这样 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 沿有向小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 所作的功 ΔW_i 可以近似地等于常力 $\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i)$ 沿 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 所作的功：$\Delta W_i \approx \boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$

即 $$\Delta W_i \approx P(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_i\,.$$

于是 $$W = \sum_1^n \Delta W_i \approx \sum_1^n [P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]\,.$$

用 λ 表示 n 个小弧段的最大长度，令 $\lambda \to 0$ 取上述和的极限，所得到的极限自然地被认作变力 $\boldsymbol{F}$ 沿有向曲线弧所作的功，即

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n [P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

定义　设 L 为 xOy 面内的从点 A 到点 B 的一条有向光滑面曲线弧，函数 P（x，y）、Q（x，y）在 L 上有界，在 L 上沿 L 的方向任意插入一点列 $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2), \cdots,$ $M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ 把 L 分成 n 个有向小弧段，$\widehat{M_{i-1}M_i}$ $(i = 1,2,\cdots,n; M_0 = A, M_n = B)$. 设 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$、$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. 点 (ξ_i,η_i) 为 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的点.如果当各小弧段长度的最大值 $\lambda \to 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 的极限总存在，则称此极限为函数 $P(x,y)$ 在有向弧段 L 上对坐标 x 的曲线积分，记作 $\int_L P(x,y)dx$. 类似地，如果 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 总存在，则称此极限为函数 $Q(x,y)$ 在有向弧段 L 上对坐标 y 的曲线积分，记作 $\int_L Q(x,y)dy$.即

$$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\,,$$

$$\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\,,$$

其中 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 叫做被积函数，L 叫做积分弧段

以上两个积分也称为第二类曲线积分.

当$P(x,y)$、$Q(x,y)$连续时，上述两个积分总存在，以后我们假定$P(x,y)$、$Q(x,y)$在L上连续.

上述定义可以类似地推广到积分弧段为空间有向曲线弧Γ的情形:

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i ,$$

$$\int_{\Gamma} Q(x,y,z)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i ,$$

$$\int_{\Gamma} R(x,y,z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i .$$

应用上经常出现的是

$$\int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy ,$$

这种合并起来的式子，为简便起见，把上式写成

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

也可以写成向量形式

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y) \cdot d\boldsymbol{r}$$

其中$\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$为向量值函数，$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$.

由此，变力沿曲线做功可以表示为

$$W = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy ,$$

或

$$W = \int_L \boldsymbol{F}(x,y) \cdot d\boldsymbol{r}$$

类似地，把

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + \int_{\Gamma} Q(x,y,z)dy + \int_{\Gamma} R(x,y,z)dz$$

简写成

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

或

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{A}(x,y,z) \cdot d\boldsymbol{r}$$

其中$\boldsymbol{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$.

性质 1　设α、β为常数，则

$$\int_L [\alpha \boldsymbol{F}_1(x,y) + \beta \boldsymbol{F}_2(x,y)] \cdot d\boldsymbol{r} = \alpha \int_L \boldsymbol{F}_1(x,y) \cdot d\boldsymbol{r} + \beta \int_L \boldsymbol{F}_2(x,y) \cdot d\boldsymbol{r}$$

性质 2　若有向曲线弧 L 可分成两段光滑的有向曲线弧 L_1 和 L_2，则

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{L_1} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{L_2} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r}$$

性质 3　设 L 是有向光滑曲线弧，L^- 是 L 的反向曲线弧，则

$$\int_{L^-} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\boldsymbol{r}$$

由性质 3 我们知道对坐标的曲线积分，必须注意积分弧段的方向.

二、对坐标的曲线积分的计算法

定理　设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在有向弧段 L 上有定义且连续，L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases}$$

当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B，$\varphi(t)$、$\phi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 存在，且

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\phi(t)]\phi'(t)\}dt \qquad (1)$$

证　在 L 上取一列点

$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}, M_n = B,$$

它们对应于一列单调变化的参数值

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}, t_n = \beta,$$

由于 $$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \tau_i$ 在 t_{i-1} 与 t_i 之间，取 $\xi_i = \varphi(\tau_i), \eta_i = \phi(\tau_i)$，

由定义，有

$$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P[\varphi(\tau_i),\phi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i)\Delta t_i .$$

上式右端的和的极限就是定积分 $\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t)dt$，由于函数 $P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t)$ 连续，这个定积分时存在的，因此上式右端的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx$ 也存在，并且有

$$\int_L P(x,y)dx = \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t)dt$$

同理可证

$$\int_L Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta Q[\varphi(t),\phi(t)]\phi'(t)dt$$

把以上两式相加，得

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\phi(t)]\phi'(t)\}dt \qquad （1）$$

这里必须注意的是下限α对应于L的起点。上限β对应于L的终点，α不一定小于β.

类似地，当曲线L的方程由$y=\phi(x)$或$x=\varphi(y)$给出时，可看作是参数方程的特例，

比如，当L的方程由$y=\phi(x)$给出时，公式（1）成为

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P[x,\phi(x)] + Q[x,\phi(x)]\phi'(x)\}dx,$$

这里下限a对应于L的起点。上限b对应于L的终点.

公式（1）可推广到空间曲线Γ由参数方程

$$x=\varphi(t),\quad y=\phi(t),\quad z=\omega(t)$$

给出的情形，这样便得到

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \\ &= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)]\varphi'(t) + \\ &\qquad Q[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)]\phi'(t) + R[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt\end{aligned},$$

这里下限α对应于Γ的起点。上限β对应于Γ的终点.

例 1　计算$\int_L xydx$，其中L为抛物线$y^2=x$上从点 A（1，－1）到点 B（1，1）的一段弧（图 8－2）

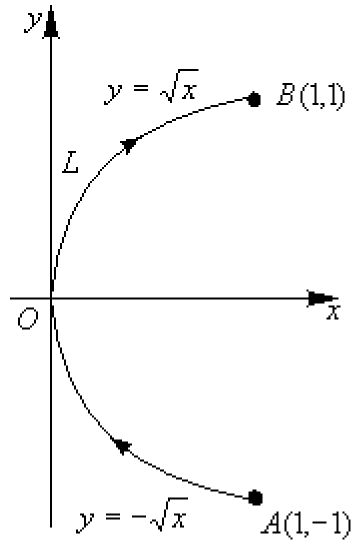


图 8－2

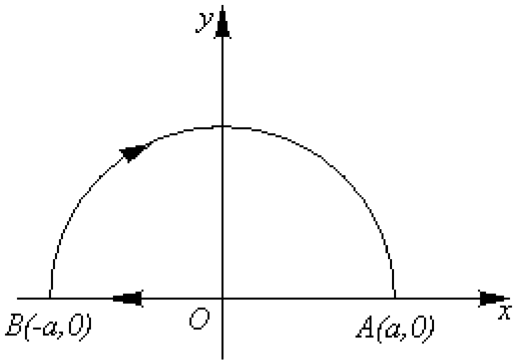


图 8－3

解　将方程看成$x=y^2$，y从－1 变到 1。因此

$$\int_L xydx = \int_{-1}^{1} y^2 y(y^2)' dy = 2\int_{-1}^{1} y^4 dy = 2\left[\frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{5}.$$

例 2　计算$\int_L y^2 dx$其中L为（图 8—3）

（1）　半径为 a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周；

（2）　从点 A（a，0）沿x轴到点 B（—a，0）的直线段.

解　（1）L是参数方程

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta$$

当参数θ从 0 变到π的曲线弧。因此

$$\int_L y^2 dx = \int_0^{\pi} a^2 \sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta = a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)$$

$$= a^3\left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{4}{3}a^3.$$

(2) 现在，L的方程为$y = 0, x$从a变到 $-a$. 所以

$$\int_L y^2 dx = \int_a^{-a} 0dx = 0\text{。}$$

从例 2 可以看出，虽然两个曲线积分的被积函数相同，起点和终点也相同，但沿不同路径得出的值并不相同.

例 3　计算$\int_L 2xydx + x^2 dy$，其中L为（图 8—4）：

（1）　抛物线$y = x^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧；

（2）　抛物线$x = y^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧；

（3）　有向折线OAB，这里 O、A、B 依次是（0，0），（1，0），（1，1）.

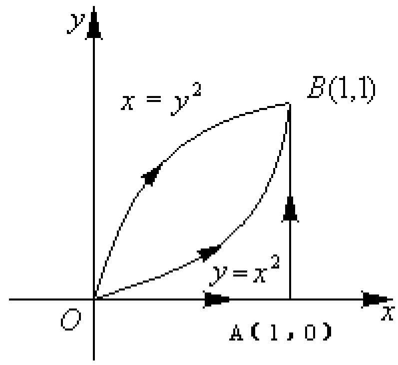


图 8—4

解　（1）化为对x的定积分.$L: y = x^2, x$从 0 变到 1，所以

$$\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx = 4\int_0^1 x^3 dx = 1 。$$

（2）化为对 y 的定积分. $L: x = y^2, y$ 从 0 变到 1，所以

$$\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2y^2 \cdot y \cdot 2y + y^4)dy = 5\int_0^1 y^4 dx = 1 .$$

(3) $\int_L 2xydx + x^2dy = \int_{OA} 2xydx + x^2dy + \int_{AB} 2xydx + x^2dy$

在 OA 上，$y = 0.x$ 从 0 变到 1，所以

$$\int_{OA} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)dx = 0.$$

在 AB 上，$x = 1, y$ 从 0 变到 1，所以

$$\int_{AB} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1)dy = 1.$$

从而

$$\int_L 2xydx + x^2dy = 0 + 1 = 1.$$

从例 3 可以看出，虽然沿不同路径，曲线积分的值可以相等.

例 4 计算曲线积分 $\oint_L x^2y^3dx + zdy + ydz$，其中 L 是抛物面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 与平面 $z = 3$ 的交线，其正向与 z 轴正向成右手系（将右手除拇指外的四个手指依 L 的正向握起时，拇指则指向 z 轴正向）.

解　在方程组

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2, \\ z = 3 \end{cases}$$

中消去 z，得 L（如图 8－5）的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 3 \end{cases}$$

L 的参数方程为

$$x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=3, 0\le\theta\le 2\pi,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\oint_L x^2y^3dx+zdy+ydz\\
&=\int_0^{2\pi}[\cos^2\theta\sin^3\theta(-\sin\theta)+3\cos\theta+0]d\theta\\
&=-\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\sin^4\theta d\theta+3\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\\
&=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)d\theta+0\\
&=-\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

例 5　设一个质点在 $M(x,y)$ 处受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，$\boldsymbol{F}$ 的大小与 M 到原点 O 的距离成正比，$\boldsymbol{F}$ 的方向恒指向原点.此质点由点 A（a，0）沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 按逆时针方向移动到点 B（0，b），求力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W.

解　$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}, |\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}.$

由假设有 $\boldsymbol{F}=-k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$，其中 $k>0$ 是比例常数.于是

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\overset{\frown}{AB}}-kxdx-kydy=-k\int_{\overset{\frown}{AB}}xdx+ydy.$$

利用椭圆的参数方程：$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ 起点 A、终点 B 分别对应参数 0，$\dfrac{\pi}{2}$.于是

$$\begin{aligned}
W&=-k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-a^2\cos t\sin t+b^2\sin t\cos t)dt\\
&=k(a^2-b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin tdt=\frac{k}{2}(a^2-b^2).
\end{aligned}$$

三、两类曲线积分之间的联系

设有向曲线弧 L 的起点为 A，终点为 B.曲线弧 L 有参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\phi(t) \end{cases}$ 给出，起点 A、终点 B 分别对应参数 α、β.不妨设 $\alpha<\beta$（若 $\alpha>\beta$，可令 $s=-t$，A、B 对应 $s=-\alpha, s=-\beta$，就有 $(-\alpha)<(-\beta)$，把下面的讨论对参数 s 进行即可）,并设函数 $\varphi(t)$、$\phi(t)$ 在闭区域 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)\neq 0$，又函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 L 上连续. 于是，由对坐标的曲线积分计算公式（1）有

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t)+Q([\varphi(t),\phi(t)]\phi'(t)\}dt$$

向量 $\tau=\varphi'(t)\boldsymbol{i}+\phi(t)\boldsymbol{j}$ 是曲线弧 L 在点 $M(\varphi(t),\phi(t))$ 处的一个切向量，它的指向与参数 t 增大时点 M 移动的走向一致，当 $\alpha<\beta$ 时，这个走向就是有向曲线弧 L 的走向.以后我们称这种与有向曲线弧的走向一致的切向量为有向曲线弧的切向量.于是有向曲线弧 L 的切向量为 $\tau=\varphi'(t)\boldsymbol{i}+\phi(t)\boldsymbol{j}$，它的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}},\qquad \cos\beta=\frac{\phi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}}$$

由对弧长的曲线积分的计算公式可得

$$\begin{aligned}&\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds\\&=\int_\alpha^\beta\left\{P[\varphi(t),\phi(t)]\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}}+Q(x,y)\frac{\phi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}}\right\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt\\&=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\phi(t)]\phi'(t)]dt.\end{aligned}$$

由此可见，平面曲线 L 上的两类曲线积分之间有如下联系：

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds \qquad （2）$$

其中 $\alpha(x,y)$、$\beta(x,y)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 处的切向量的方向角。

类似地可知，空间曲线Γ上的两类曲线积分之间有如下关系：

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds \qquad (3)$$

其中$\alpha(x,y,z)$、$\beta(x,y,z)$、$\gamma(x,y,z)$为有向曲线弧Γ在点(x,y,z)处的切向量的 方向角.

两类积分曲线之间的联系也可以用向量的形式表达。例如，空间曲线Γ上的两类曲线之间的联系可以写成如下形式：

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

或

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\Gamma} A_{\boldsymbol{\tau}} ds$$

其中$\boldsymbol{A}=(P,Q,R)$,　　$\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为有向曲线弧$\Gamma$在点$(x,y,z)$处的单位切向量，$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\tau}ds=(dx,dy,dz)$，称为有向曲线元，$A_{\boldsymbol{\tau}}$为向量$\boldsymbol{A}$在向量$\boldsymbol{\tau}$上的投影.

作业　1 奇数，2，4，7，8

8.2　向量值函数在有向曲面上的积分

8.2.1 曲面的侧

有向曲面：取定了法向量亦即选定了侧的曲面称为有向曲面。法向量的方向称为曲面的正向，相反的称为反向.

设Σ是有向曲面.在Σ上取一小块曲面ΔS，把ΔS投影到xOy面上得一投影区域，这投影区域的面积为$(\Delta\sigma)_{xy}$.假定ΔS上各点处的法向量与 z 轴的夹角γ的余弦$\cos\gamma$有相同的符号（即$\cos\gamma$都是正的或都是负的）.我们规定ΔS在xOy面上的投影$(\Delta S)_{xy}$为

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}\ , & \cos\gamma>0,\\ -(\Delta\sigma)_{xy}\ , & \cos\gamma<0,\\ 0, & \cos\gamma\equiv 0.\end{cases}$$

其中$\cos\gamma\equiv 0$也就是$(\Delta\sigma)_{xy}=0$ 的情形. ΔS在 xOy 面上的投影$(\Delta S)_{xy}$实际就是ΔS在xOy面上的投影区域的面积附以一定的正负号.类似地可以定义ΔS在yOz面及zOx面上的投影$(\Delta S)_{yz}$及$(\Delta S)_{zx}$.

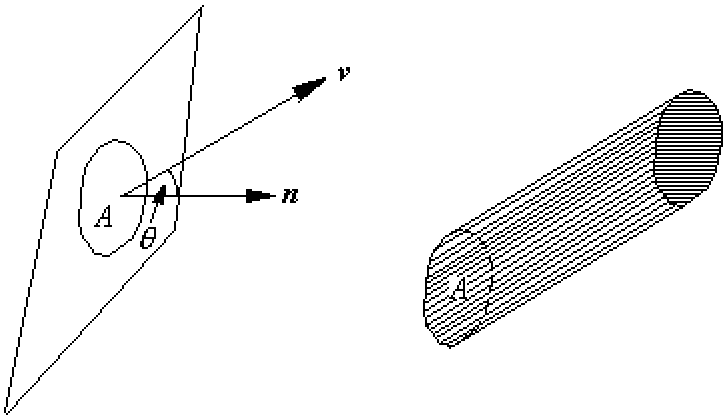
8.2.2 第二型曲面积分的概念

流向曲面一侧的流量　设稳定流动的不可压缩留题（假定密度为 1）的速度场由

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=\{(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出，Σ 是速度场中的一片有向曲面，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 都在 Σ 上连续，求在单位时间内流向 Σ 指定侧的流体的质量，即流量 Φ.

如果流体流过平面上面积为 A 的一个闭区域，且流体在这闭区域上各点处的流速为（常向量）$\boldsymbol{v}$，又设 $\boldsymbol{n}$ 为该平面的单位法向量（图 8－6)），那么在单位时间内流过闭区域的流体组成一个底面积为 A、斜高为$|\boldsymbol{v}|$的斜柱体（图 8－6（b)）.



（a）　　　　　　　　　　　　　　　　（b）

图 8－6

当$(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})=\theta<\dfrac{\pi}{2}$时，这斜柱体的体积为

$$A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

这也就是通过闭区域 A 流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量;

当$(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})=\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，显然流体通过闭区域 A 流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量 Φ 为零，而 $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$，故 $\Phi=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$；

当$(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})=\theta>\dfrac{\pi}{2}$时，$A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}<0$，这时我们仍把 $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ 称为流体通过闭区域 A 流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量，它表示流体通过闭区域 A 实际上流向$-\boldsymbol{n}$ 所指一侧，且流向 $-\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量为$-A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.因此，不论$(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})$为何值，流体通过闭区域 A 流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流量均为 $A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$.

由于现在所考虑的不是平面区域内而是一片曲面，且流速 $\boldsymbol{v}$ 也不是常向量，因此所求流量不能使用上述方法来计算.我们仍然使用前面使用过的方法来解决目前的问题.

把曲面 Σ 分成 n 各小块 ΔS_i（ΔS_i 同时也代表第 i 小块曲面的面积）.在 Σ 是光滑和 $\boldsymbol{v}$ 连续的前提下，只要 ΔS_i 的直径很小，我们就可以用 ΔS_i 上任一点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 处的流速

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)=P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{i}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{j}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{k}$$

代替 ΔS_i 上其他各点处的流速，以该点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 处曲面 Σ 的单位法向量

$$\boldsymbol{n}_i=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$$

代替 ΔS_i 上其他各点处的单位法向量（图 8－7）.

从而得到通过 ΔS_i 流向指定侧流量的近似值为

$$\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

于是，通过 Σ 流向指定侧的流量

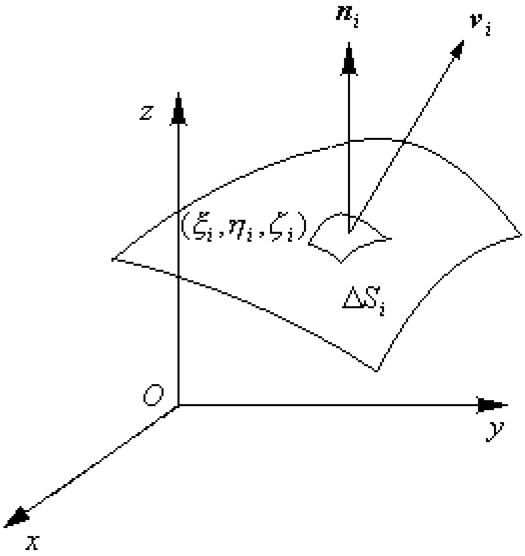


图 8－7

$$\Phi\approx\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

但 $\quad\cos\alpha_i\cdot\Delta S_i\approx(\Delta S_i)_{yz}$，$\cos\beta_i\cdot\Delta S_i\approx(\Delta S_i)_{zx}$，$\cos\gamma_i\cdot\Delta S_i\approx(\Delta S_i)_{xy}$，

因此上式可以写成

$$\Phi\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

令 $\lambda\to 0$ 取上述和的极限，就得到流量 Φ 的精确值.这样的极限还会在其他的问题中遇到.抽取它们的物理意义，就得到下列对坐标的曲面积分的概念.

定义　设 Σ 为光滑的有向曲面，函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上有界.把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i（ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积），ΔS_i 在 xOy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$，(ξ_i,η_i,ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点.如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to 0$ 时，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

总存在，则称此极限为函数 $R(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x、y 的曲面积分记作 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy$，即

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

其中 $R(x,y,z)$ 叫做被积函数，Σ 叫做积分曲面.

类似地可以定义函数 $P(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 y、z 的曲面积分 $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz$，及函数 $Q(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 z、x 的曲面积分 $\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx$ 分别为

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

以上三个曲面积分也称为第二类曲面积分.

当 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在有向光滑曲面 Σ 上连续时，对坐标的曲面积分是存在的，以后总假定 P、Q、R 在 Σ 上连续.

在应用上出现较多的是：

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx + \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$$

这种合并起来的形式，为简便起见，我们把它写成：

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

例如，上述流向 Σ 指定侧的流量 Φ 可表示为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

如果 Σ 是分片光滑的有向曲面，我们规定函数在 Σ 上对坐标的曲面积分等于函数在各片光滑曲面上对坐标的曲面积分之和.

性质 1　如果把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2，则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint_{\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

性质 2 设 Σ 是有向曲面，Σ^- 表示与 Σ 取相反侧的有向曲面，则

$$\iint_{\Sigma^-} P(x,y,z)dydz = -\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz$$

$$\iint_{\Sigma^-} Q(x,y,z)dzdx = -\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx$$

$$\iint_{\Sigma^-} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$$

由性质 2，我们知道对坐标的曲面积分，我们必须注意积分曲面所取的侧.

8.2.3　对坐标的曲面积分的计算法

设积分曲面Σ是由方程$z = z(x,y)$所给出的曲面上侧，Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}，函数$z = z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，被积函数$R(x,y,z)$在Σ上连续.

按对坐标的曲面积分的定义，有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

因为Σ取上侧，$\cos\gamma > 0$，所以

$$(\Delta S_i)_{xy} = (\Delta\sigma_i)_{xy}\text{。}$$

因为(ξ_i,η_i,ζ_i)是Σ上的一点，故$\zeta_i = z(\xi_i,\eta_i)$.从而有

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} = \sum_{i=1}^{n} R[\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i)](\Delta\sigma_i)_{xy}$$

令$\lambda \to 0$取上式两端的极限，就得到

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{Dxy} R(x,y,z(x,y))dxdy. \qquad (3)$$

这就是把对坐标的曲面积分化为二重积分的公式.

必须注意，公式（3）的曲面积分是取在曲面Σ上侧的；如果曲面积分取在Σ的下侧，这时$\cos\gamma < 0$，那么

$$(\Delta S_i)_{xy} = -(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

从而有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{Dxy} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

（3’）

类似地，如果Σ由$x = x(y,z)$给出，则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz, \qquad (4)$$

如果Σ由$y=y(z,x)$给出，则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx\text{，} \tag{5}$$

符号的确定按下列规则：对于曲面的侧 上取正下取负；前取正后取负；右取正左取负.

例 1 计算曲面积分$\iint_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中$\Sigma$是长方体$\Omega$的整个表面的外测，$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le a.0\le y\le b,0\le z\le c\}$.

解　把有向曲面Σ分成一下六部分：

$\Sigma_1: z=c(0\le x\le a,0\le y\le b)$的上侧

$\Sigma_2: z=0(0\le x\le a,0\le y\le b)$的下侧

$\Sigma_3: x=a(0\le y\le b,0\le z\le c)$的前侧

$\Sigma_4: x=0(0\le y\le b,0\le z\le c)$的后侧

$\Sigma_5: y=b(0\le x\le a,0\le z\le c)$的右侧

$\Sigma_6: y=0(0\le x\le a,0\le z\le c)$的左侧

除Σ_3、Σ_4外，其余四片曲面在yOz面上的投影为零，因此

$$\iint_{\Sigma} x^2dydz = \iint_{\Sigma_3} x^2dydz + \iint_{\Sigma_4} x^2dydz$$

右公式（4）就有

$$\iint_{\Sigma} x^2dydz = \iint_{D_{yz}} a^2dydz - \iint_{D_{yz}} 0dydz = a^2bc$$

类似地可得

$$\iint_{\Sigma} y^2dydz = b^2ac$$

$$\iint_{\Sigma} z^2dydz = c^2ab$$

于是所求曲面积分为$(a+b+c)abc$.

例 2　计算曲面积分$\iint_{\Sigma} xyzdxdy$，其中Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$外测在$x\ge 0, y\ge 0$的部分.

解 把Σ分为Σ_1和Σ_2两部分（图 10－23），Σ_1的方程为$z_1=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，Σ_2的方程为$z_2=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\iint_{\Sigma} xyzdxdy = \iint_{\Sigma_2} xyzdxdy + \iint_{\Sigma_1} xyzdxdy .$$

上式右端的第一个积分的积分曲面Σ_2取上侧，第二个积分的积分曲面Σ_1取下侧，因此分别应用公式（3）及（3'），就有

$$\iint_{\Sigma} xyzdxdy = \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy - \iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$
$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy.$$

其中D_{xy}是Σ_1和Σ_2在xOy面上的投影区域，就是位于第一象限内的扇形$x^2+y^2 \le 1$ $(x \ge 0, y \ge 0)$.利用极坐标计算这个二重积分如下：

$$2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = 2\iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 \rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho = 1\cdot\frac{2}{15} = \frac{2}{15},$$

从而

$$\iint_{\Sigma} xyzdxdy = \frac{2}{15}.$$

8.2.4 两类曲面积分之间的联系

设有向曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出，Σ在xOy面上的投影区域为 D $_{xy}$，函数$z=z(x,y)$在 D $_{xy}$上具有一阶连续偏导数，$R(x,y,z)$在Σ上连续.如果Σ取上侧，则由对坐标的曲面积分计算公式（3）有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

另一方面，因上述有向曲面Σ的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2++z_y^2}}, \cos\beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2++z_y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2++z_y^2}}$$

故由对面积的曲面积分计算公式有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

由此可见，有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS \qquad (6)$$

如果Σ取下侧，则由（3'）有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint_{\Sigma} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

但这时 $\cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，因此（6）式仍成立.

类似地可得

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha dS \tag{7}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta dS \tag{8}$$

合并起来有

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta x + R\cos\gamma)dS\,, \tag{9}$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

两类曲面积分之间的联系也可以写成如下的向量形式：

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

或

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}_n dS$$

其中 $A=(P,Q,R).n=(coa\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位法向量，

$d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}dS=(dydz,dzdx,dxdy)$，称为有向曲面元，$A_n$ 为向量 A 在向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影.

例 3 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy$，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.

解 由两类积分曲面之间的联系(9),可得

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz = \iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha dS = \iint_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy$$

在曲面 Σ 上，有

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,,\ \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

故

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy = \iint_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]dxdy.$$

再按对坐标的曲面积分的计算法，便得

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz - zdxdy = -\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right]\cdot(-x) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}dxdy.$$

注意到 $\iint_{D_{xy}}\dfrac{1}{4}x(x^2+y^2)dxdy=0$，故

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(\rho^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}\rho^2)\rho d\rho=8\pi$$

作业　1 偶数，2，4，6，7，9

8.3 各种积分之间的联系

8.3.1 格林公式

牛顿-莱布尼茨公式　$\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$ 表示 $F'(x)$ 的积分可以通过它的原函数 $F(x)$ 在这个区间端点上的值来表示.

那么在平面区域 D 上的二重积分能否可以通过沿闭区域 D 的边界曲线 L 上的曲线积分来表达.格林公式给了我们一个准确的答案.

单连通区域：设 D 为平面区域，如果 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D，则称 D 为平面单连通区域,否则称为复连通区域.

对平面区域 D 的边界曲线 L 我们规定 L 的正向如下：当观察者沿 L 的这个方向行走时，D 内在它近处的那一部分总在它的左边.例如图 8-8，L 的正向为逆时针方向，而 l 的正向是顺时针方向

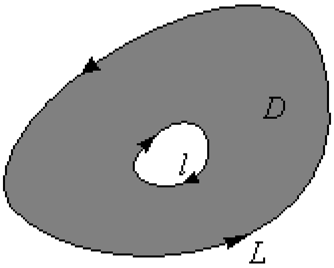


图 8-8

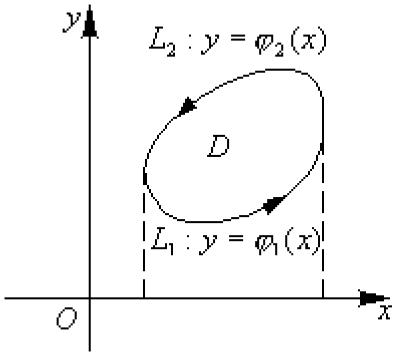


图 8－9

定理 1　设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy\,, \qquad (1)$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

证　假设区域既是 $X-$型又是 $Y-$型 区域（图 8－9）

设 $D=\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$。因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 连续，所以由二重积分的计算法有

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \right\} dx$$

$$\int_a^b \{P[x,\varphi_2(x)] - P[x,\varphi_1(x)]\} dx .$$

另一方面，由对坐标的曲线积分的性质及计算法有

$$\begin{aligned}\oint_L Pdx &= \int_{L_1} Pdx + \int_{L_2} Pdx \\ &= \int_a^b P[x,\varphi_1(x)]dx + \int_b^a P[x,\varphi_2(x)]dx \\ &= \int_a^b \{P[x,\varphi_1(x)] - P[x,\varphi_2(x)]\} dx\end{aligned}$$

因此，

$$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \oint_L Pdx . \qquad (2)$$

设 $D = \{(x,y) \mid \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y),\ c \le y \le d\}$。类似地可证

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint_L Qdy . \qquad (3)$$

由于 D 既是 $X-$型又是 $Y-$型 区域，（2）、（3）同时成立，合并后即得公式（1）

当区域不满足上述条件时，我们可以在 D 内引进一条或几条辅助线把 D 分成有限个部分闭区域，使得每个部分闭区域都满足上述条件.例如，就图 8－10 所示的闭区域 D 来说，它的边界曲线 L 为 $\widehat{MNPM}$ 引进一条辅助线 ABC，把 D 分成 D_1、D_2、D_3 三部分.应用公式（1）于每个部分，得

$$\iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{MCBAM} Pdx + Qdy ,$$

$$\iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{ABPA} Pdx + Qdy ,$$

$$\iint\limits_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{BCNB} Pdx + Qdy ,$$

把三个等式相加，注意到相加时沿辅助线来回的曲线积分相互抵消，便得

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy ,$$

其中 L 的方向对 D 来说为正方向.一般地，公式（1）对于由分段光滑曲线围成的闭区域都成立.证毕

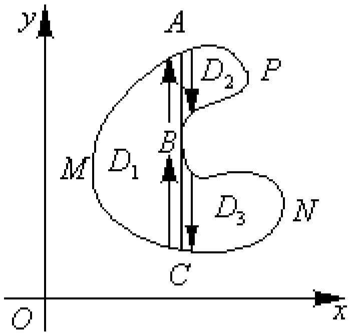


图 8－10

在公式（1）中取$P=-y,Q=x$，即得

$$2\iint\limits_{D} dxdy=\oint\limits_{L} xdy-ydx\,.$$

上式右端是闭区域D的面积 A 的两倍,因此有

$$A=\frac{1}{2}\oint\limits_{L} xdy-ydx\,.$$

例 1　求椭圆$x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$所围成图形的面积 A.

解　根据公式（4）有

$$A=\frac{1}{2}\oint\limits_{L} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(ab\cos^{2}\theta+an\sin^{2}\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_{0}^{2\pi}d\theta=\pi ab.$$

例 2 计算曲线积分$I=\int_{L}(x^{2}-2y)dx+(3x+ye^{y})dy$,其中$L$是由直线$x+y=1$位于第一象限的线段及圆弧$x^{2}+y^{2}=1$位于第二象限的部分组成，方向如图 8－11 所示.

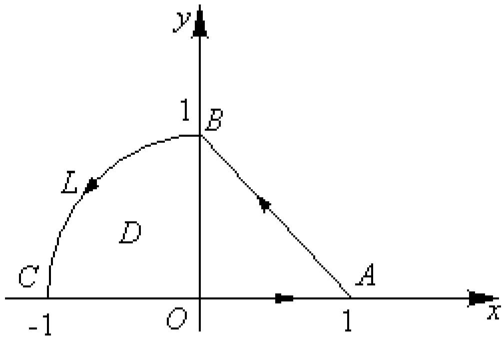


图 8-11

解　作线段CA，则$L\cup CA$构成闭合曲线$\widehat{ABCA}$，并取正向，设它围成的区域为D，

由于　　　　$P=x^{2}-2y$, $Q=3x+ye^{y}$

在D上满足格林公式的条件，所以有

$$\oint_{ABCA}(x^{2}-2y)dx+(3x+ye^{y})dy$$

$$=\iint\limits_{D}(3+2)dxdy=5\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)。$$

又因为CA的方程为

$$y=0,\ -1\le x\le 1,$$

所以$dy=0dx$，从而有

$$\int_{CA}(x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy=\int_{-1}^{1}(x^2-0)dx=\frac{2}{3}.$$

于是

$$I=\oint_{CA}(x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy-\int_{CA}(x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy$$

$$=5\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2}{3}=\frac{5\pi}{4}+\frac{11}{6}.$$

例 3　计算 $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是以 $O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域（图 8－12）.

解　令 $P=0,Q=xe^{-y^2}$,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial Y}=e^{-y^2}.$$

因此，由公式（1）有

$$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy=\int\limits_{OA+AB+BO}xe^{-y^2}dy=\int\limits_{OA}xe^{-y^2}dy=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

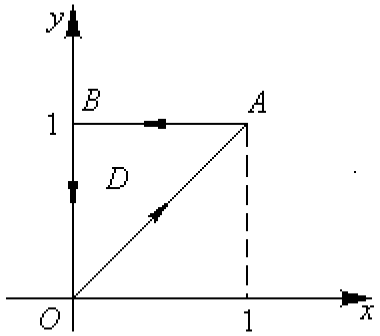


图 8-12

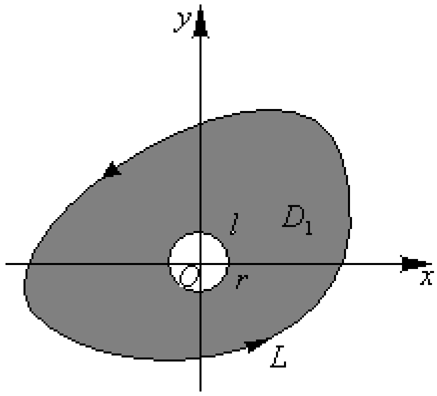


图 8－13

例 4 计算 $\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 为一条无重点，分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L 的方向为逆时针方向.

解　令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，则当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

记 L 所围成的闭区域为 D。当（0，0）$\notin D$ 时，由公式（1）便得 $\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$

当（0，0）$\in D$ 时，选取适当小的 $r>0$，作位于 D 内的圆周 $l:x^2+y^2=r^2$,记 L 和 l 所

围成的区域为D_1（图 10－13）.对复连通区域D_1应用格林公式，得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} - \oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0$$

其中 l 的方向取逆时针方向.于是

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2} d\theta = 2\pi.$$

8.3.2　高斯公式

格林公式表达了平面闭区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系，而高斯公式表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系，这个关系可陈述如下：

定理 1　设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ所围成，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$ $R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \oiint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \qquad (1)$$

或

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \oiint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS, \qquad (1')$$

这里Σ是Ω的整个边界曲面的外测，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$是$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的法向量的方向余弦.公式（1）或（1’）叫做高斯公式.

证　设闭区域Ω为 XY－型区域，在 xOy 面上的投影区域为D_{xy}。这样，可设Σ由Σ_1, Σ_2和Σ_3三部分组成（图 10－24），其中Σ_1和Σ_2分别由方程$z = z_1(x,y)$和$z = z_2(x,y)$给定，这里$z_1(x,y) \le z_2(x,y)$，Σ_1取下侧，Σ_2取上侧；Σ_3是以D_{xy}的边界曲面为准线而母线平行于 z 轴的柱面上的一部分，取外测.

根据三重积分的计算法，有

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} dv = \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right\} dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \{ R[x,y,z_2(x,y)] - R[x,y,z_1(x,y)] \} dxdy \qquad (2)$$

根据曲面积分的计算法，有

$$\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z) dxdy = -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z_1(x,y)] dxdy.$$

$$\iint_{\Sigma_2} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z_2(x,y)]dxdy.$$

因为Σ_3上任意一块曲面在xOy面上的投影为零，所以直接根据对坐标的曲面积分的定义可知

$$\iint_{\Sigma_3} R(x,y,z)dxdy = 0.$$

把以上两式相加，得

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} \{R[x,y,z_2(x,y)] - R[x,y,z_1(x,y)]\}dxdy. \qquad (3)$$

比较（2）、（3）两式，得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \oiint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy.$$

类似地，如果Ω是 YZ－型或者 ZX－型，同理可证

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dv = \oiint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz.$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dv = \oiint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx.$$

把以上三式相加即得高斯公式（1）.

如果Ω不是上述的类型，类似于格林公式证明那样，进行分割即可得证.

例 5　利用高斯公式计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz,$$

其中Σ为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0, z=3$所围成的空间闭区域Ω的整个边界曲面的外测（图 8－14）.

解　现在，$P=(y-z)x, Q=0, R=x-y$，

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y-z,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

利用高斯公式把所给曲面积分化为三重积分，再利用柱面坐标计算三重积分：

$$\oiint_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$
$$=\iiint_{\Omega}(y-z)dxdydz$$
$$=\iiint_{\Omega}(\rho\sin\theta-z)\rho d\rho d\theta dz$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^3(\rho\sin\theta-z)dz$$
$$=-\frac{9\pi}{2}.$$

例 6　利用高斯公式计算曲面积分
$$\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS,$$
其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h(h>0)$ 之间的部分的下侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$coa\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

解　现在，曲面 Σ 不是封闭曲面，不能直接利用高斯公式.若设 Σ_1 为 $z=h(x^2+y^2 \le h^2)$ 的上侧，则 Σ 与 Σ_1 一起构成一个封闭曲面，记它们围成的空间闭区域为 Ω，利用高斯公式，便得
$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$
$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv$$
$$=2\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)dz,$$
其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le h^2\}$，注意到
$$\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y)dz=0,$$
即得
$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=\iint_{D_{xy}}(h^2-x^2-y^2)dxdy=\frac{1}{2}\pi h^4.$$
而
$$\iint_{\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=\iint_{\Sigma_1}z^2dS=\iint_{D_{xy}}h^2ddxdy=\pi h^4.$$
因此

$$\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS=\iint_{\Sigma_1}z^2dS=\frac{1}{2}\pi h^4-\pi h^4=-\frac{1}{2}\pi h^4.$$

例 7 设函数$u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$在闭区域Ω上具有一阶及二阶连续偏导数，证明

$$\iiint_{\Omega}u\Delta v dxdydz=\oiint u\frac{\partial u}{\partial n}dS-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz,$$

其中Σ是闭区域Ω的整个边界曲面，$\dfrac{\partial v}{\partial n}$为函数$v(x,y,z)$沿$\Sigma$的外法线方向的方向导数，符号$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$，称为拉普拉斯（Laplace）算子.这个公式叫做格林第一公式.

证　因为方向导数

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是Σ在点(x,y,z)处的外法线向量的方向余弦.于是曲面积分

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}dS=\oiint_{\Sigma}u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)dS\\&=\oiint_{\Sigma}\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]dS\\&=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\\&=\iiint_{\Omega}u\Delta v dxdydz+\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz\end{aligned}$$

将上式右端第二积分左移,即得所证等式.

8.3.3　斯托克斯公式

斯托克斯公式将格林公式推广到曲面积分上，将曲面Σ上曲面积分转化为Σ的边界曲线积分.

定理 1　设Γ为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面，Γ的正向与Σ的侧符合右手规则，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在曲面Σ（连同边界Γ）上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz.\quad（1）$$

公式（1）叫做斯托克斯公式.

证明　略

为了便于记忆，利用行列式记号把斯托克斯公式（1）写成

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz ,$$

其中$\dfrac{\partial}{\partial y}$与$R$的乘积理解为$\dfrac{\partial R}{\partial y}$，其他类似.斯托克斯的另一形式为

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

其中$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为有向曲面$\Sigma$在点$(x, y, z)$处的单位法向量.

当Σ是xOy面上的一块平面闭区域，斯托克斯公式就变成格林公式.因此，格林公式是斯托克斯公式的一个特殊情形.

例 8　利用斯托克斯公式计算曲线积分$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$，其中$\Gamma$为平面$x + y + z = 1$被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则（图 8－14）.

解　按斯托克斯公式，有

$$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy.$$

由于Σ的法向量的三个方向余弦都为正，又由于对称性，上式右端等于

$$3\iint_{D_{xy}} d\sigma ,$$

其中D_{xy}为xOy面上又直线$x + y = 1$及两条坐标围成的三角形闭区域，因此

$$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \frac{3}{2}$$

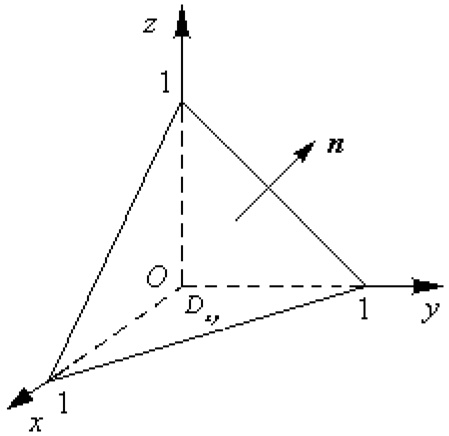


图 8－14

作业　2，3，5 偶数，8，10

8.4 平面曲线积分与路径无关的条件

8.4.1 曲线积分与路径无关的条件

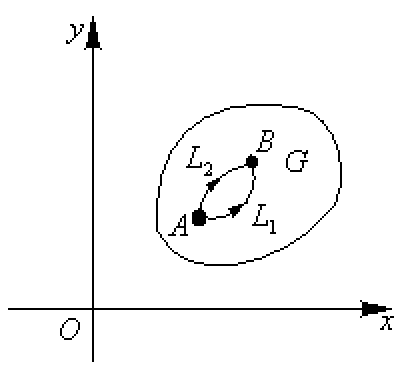


图 8－15

设G是一个区域，$P(x, y)$以及$Q(x, y)$在区域G内具有一阶连续偏导数.如果对于G内任意指定的两个

点 A、B 以及 G 内从点 A 到点 B 的任意两条曲线 L_1, L_2（图 8－15），等式

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

恒成立，就说曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内与路径无关.

在以上叙述中注意到，如果曲线积分与路径无关，那么

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

（图 8－15）。由于

$$\int_{L_2} Pdx + Qdy = -\int_{L_2^-} Pdx + Qdy\text{，}$$

所以

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2^-} Pdx + Qdy = 0\text{，}$$

从而
$$\oint_{L_1+L_2^-} Pdx + Qdy = 0\text{，}$$

这里 $L_1 + L_2^-$ 是一条有向闭曲线.因此，在区域 G 内由曲线积分与路径无关课推得在 G 内沿闭曲线的曲线积分为零.反过来在区域 G 内沿任意闭曲线的曲线积分为零，也可推得在 G 内曲线积分与路径无关.由此得出结论：曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关相当于沿 G 内任意闭曲线 C 的曲线积分 $\oint_C Pdx + Qdy$ 等于零.

定理 2　设区域 G 是一个单连通域，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内域路径无关（或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零）的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{5}$$

在 G 内恒成立.

证　先证这条件是充分的.在 G 内任取一条曲线 C，要证当条件（5）成立时有 $\oint_C Pdx + Qdy = 0$.因为 G 是单连通的,所以闭曲线 C 所围成的闭区域 D 全部在 G 内，于是(5)式在 D 上恒成立.应用格林公式,有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C Pdx + Qdy\,.$$

上式左端的二重积分等于零，从而右端的曲线积分等于零.

再证条件（5）是必要的，现在要证的是：如果沿 G 内的任意闭曲线的曲线积分为零，那么（5）式在 G 内恒成立.用反证法来政.假设上述论断不成立，那么 G 内至少有一点 M_0，

使

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0}\neq 0.$$

不妨假定
$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0}=\eta>0.$$

由于$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$在 G 内连续，可以在 G 内取得一个以M_0为圆心、半径足够小的圆形闭区域 K,使得在 K 上恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\geq\frac{\eta}{2}.$$

于是由格林公式及二重积分的性质就有

$$\oint_r Pdx+Qdy=\iint_K\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\geq\frac{\eta}{2}\cdot\sigma\quad,$$

这里γ是 K 的正向边界曲线，σ是 K 的面积.因为$\eta>0$，$\sigma>0$，从而

$$\oint_\gamma Pdx+Qdy>0.$$

这结果与沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零的假定矛盾，可见 G 内使（5）式不成立的点不可能存在，即（5）式在 G 内处处成立.　　　　证毕.

在定理 2 中，要求区域 G 是单连通区域,且函数$P(x,y)$、$Q(x,y)$在 G 内具有一阶连续偏导数.如果这两个条件之一不能满足，那么定理的结论不能保证成立.例如，在例 4 中我们已经看到，当 L 所围成的区域含有原点时，虽然除去原点外，恒有$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，但沿闭曲线的积分$\oint_L Pdx+Qdy\neq 0$，其原因在于区域含有破坏函数 P、Q 及$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial y}$连续性条件的点 O，这种点通常称为奇点.

定理 3　设区域 G 是一个单连通域，函数$P(x,y)$、$Q(x,y)$在 G 内具有一阶连续偏导数，则$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$在 G 内为某一函数$u(x,y)$的全微分的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad（5）$$

在 G 内恒成立.

证　先证必要性,假设存在着某一函数$u(x,y)$，使得

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

则必有 $$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

从而 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

由于 P、Q 具有一阶连续偏导数，所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 连续，因此 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$，即 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 这就证明了条件（5）是必要的.

再证充分性.设已知条件（5）在 G 内恒成立，则由定理 2 可知，起点为 $M_0(x_0, y_0)$ 终点为 $M(x,y)$ 的曲线积分在区域 G 内域路径无关，于是可把这个曲线积分写作

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

当起点 $M_0(x_0, y_0)$ 固定时，这个积分的值取决于终点 $M(x,y)$，因此，它是 x, y 的函数，把这函数记作 $u(x,y)$，即

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad （6）$$

下面来证明这函数 $u(x,y)$ 的全微分就是 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$，因为 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 都是连续的，因此只要证明

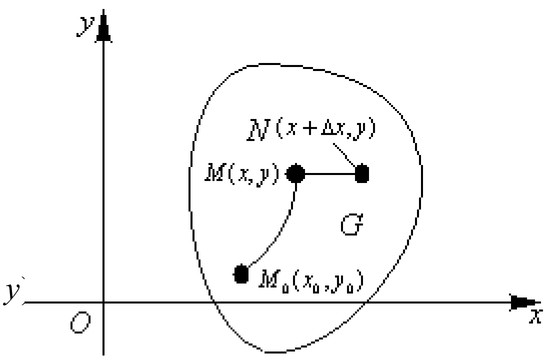
$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

按偏导数的定义，有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x}.$$

由（6）式，得

$$u(x+\Delta x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y$$



由于积分与路径无关，可以取先从 M_0 到 M，

图 8－16

然后沿平行于 x 轴的直线段从 M 到 N 作为上式右端曲线积分的路径（图 8－16）.这样就有

$$u(x+\Delta x, y)=u(x, y)$$
$$+\int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P(x, y) dx+Q(x, y) dy.$$

从而

$$u(x+\Delta x, y)-u(x, y)=\int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P(x, y) dx+Q(x, y) dy.$$

因为直线段 MN 的方程为 $y=$常数，按对坐标的曲线积分的计算法，上式称为

$$u(x+\Delta x, y)-u(x, y)=\int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y) dx.$$

应用积分中值定理，得

$$u(x+\Delta x, y)-u(x, y)=P(x+\theta \Delta x, y) \Delta x \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

上式两边除以 Δx，并令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取极限。由于 $P(x, y)$ 的偏导数在 G 内连续，$P(x, y)$ 本身也一定连续，于是得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y).$$

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y).$$

这就证明理了条件（5）是充分的，证毕.

8.4.2 原函数、全微分方程

定理 3 中的 $u(x, y)$称为 $P(x, y) dx+Q(x, y) dy$ 的一个原函数。$u(x, y)$可用下面公式求得

$$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx+Q(x, y) dy$$

这时 $u(x, y)$ ＋C 就是它的原函数的一般表达式。我们把求 $P(x, y) dx+Q(x, y) dy$ 原函数的过程称为全微分求积。

为简便起见，我们可以选取图 8－17 的路径 M_0RM 或 M_0SM 作为积分路线在公式（6）中取 M_0RM 为积分路线，得

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0) dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y) dy.$$

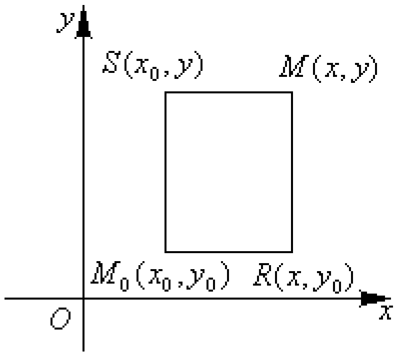


图 8－17

在公式（6）中取 M_0SM 为积分路线，则函数 u 也可表示为

$$u(x, y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y) dy+\int_{x_0}^{x} P(x, y) dx.$$

例 5　验证：$\dfrac{x d y-y d x}{x^{2}+y^{2}}$ 在右半平面 $(x>0)$ 内是某个函数的全微分，并求出一个这样

的函数.

解　在例 4 中已经知道，令

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x}{x^2+y^2},$$

就有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在右半平面恒成立，因此在右半平面内，$\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 是某个函数的全微分.

取积分路径如图 8－18 所示，利用公式（6）的所求函数为

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\int_{AB}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+\int_{BC}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=0+\int_0^y\frac{xdy}{x^2+y^2}=\left[\arctan\frac{y}{x}\right]_0^y=\arctan\frac{y}{x}.$$

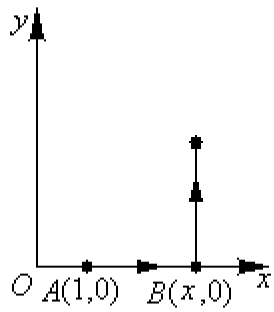


图 8－18

例 6　验证：在整个 xOy 平面内，xy^2dx+x^2ydy 是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数.

解　　现在 $P=xy^2,Q=x^2y$，且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xOy 面内恒成立，因此在整个 xOy 面内，xy^2dx+x^2ydy 是某个函数的全微分.即，存在函数 $u(x,y)$ 使得

$$du＝xy^2dx+x^2ydy$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xy^2.$$

故

$$u=\int xy^2dx=\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的待定函数.由此得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y+\varphi'(y).$$

又 u 必须满足

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2 y$$

故

$$x^2 y+\varphi'(y)=x^2 y.$$

从而 $\varphi'(y)=0,\varphi(y)=C$，所求函数为 $u=\dfrac{x^2y^2}{2}+C$.

如果表达式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是某一个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，则称微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

为一阶全微分方程。可以使用上述方法求解一阶全微分方程。

例 7 求解微分方程 $(x^2-2xy+2y^2)dx-(x^2-4xy)dy=0$

解 因为 $P=x^2-2xy+2y^2, Q=-x^2+4xy$，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x+4y=\frac{\partial P}{\partial y}$$

所以原方程是全微分方程，显然 P、Q 及 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在全平面上连续，故可取 $x_0=0, y_0=0$，于是

$$u(x,y)=\int_0^x x^2dx+\int_0^y -(x^2-4xy)dy=\frac{x^3}{3}-x^2y+2xy^2$$

因此原方程通解为

$$\frac{x^3}{3}-x^2y+2xy=\mathrm{c}$$

其中 c 为任意常数。

作业 2，4（2）（4），5，7

8.5 场论简介

8.5.1 向量场的散度

1．沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

对于曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 在怎样的条件下与曲面 Σ 无关而只取决于 Σ 的边界曲线？这问题相当于在怎样的条件下，沿任意闭曲面的曲面积分为零？

对空间区域 G，如果 G 内任一闭曲面所围成的区域全属于 G，则称 G 是空间二维单连通区域；如果 G 内任一闭曲线总可以张一片完全属于 G 的曲面，则称 G 是空间一维单连通区域.

定理 2 设 G 是空间二二维单连通区域，$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

在 G 内与所取曲面 Σ 无关而只取决于 Σ 的边界曲线(或沿 G 内任一闭曲面的曲面积分为零）的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \qquad （4）$$

在 G 内恒成立.

证　类似于第三节第二目的证明.

2. 通量与散度

设稳定流动的不可压缩流体（假定密度为 1）的速度场由

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出，其中 P、Q、R 假定具有一阶连续偏导数，Σ 是速度场中的一片有向曲面，又

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$$

是 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位法向量，则由第五节第一目知道，单位时间内流体经过 Σ 流向指定侧的流体总质量 Φ 可用曲面积分来表示：

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \\ &= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \\ &= \iint_{\Sigma} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_{\Sigma} v_n dS\end{aligned}$$

其中 $v_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ 表示流体的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 在有向曲面 Σ 的法向量上的投影.如果 Σ 是高斯公式（1）中闭区域 Ω 的边界曲面的外测，那么公式（1）的右侧可解释为单位时间内离开闭区域 Ω 的流体的总质量.由于假定流体是不可压缩的，且流动是稳定的，因此在流体离开 Ω 的同时，Ω 内部必须有产生流体的“源头”产生同样多的流体来进行补充.所以高斯公式左端可解释为分布在 Ω 内的源头在单位时间内所产生的流体的总质量.

为简便起见，把高斯公式（1）改写成

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} v_n dS.$$

以闭区域 Ω 的体积 V 除上式两端，得

$$\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}v_n dS.$$

上式左端表示Ω内的源头在单位时间内所产生的流体质量的平均值。应用积分中值定理于上式左端，得

$$\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_{(\xi,\eta,\zeta)}==\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}v_n dS,$$

这里(ξ,η,ζ)是Ω内的某个点.令Ω缩向一点$M(x,y,z)$，取上式的极限，得

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}v_n dS$$

上式左端称为$\boldsymbol{v}$在点M的散度，记作$\mathrm{div}\boldsymbol{v}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$\mathrm{div}\boldsymbol{v}$在这里可看作稳定流动的不可压缩流体在点$M$的源头强度—在单位时间内所产生的流体质量.如果$\mathrm{div}\boldsymbol{v}$为负，表示点$M$处流体在消失.

一般地，设某向量场由

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出，其中P、Q、R具有一阶连续偏导数，Σ是场内的一片有向曲面，$\boldsymbol{n}$是Σ在点(x,y,z)处的单位法向量，则$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$叫做向量场$\boldsymbol{A}$通过曲面$\Sigma$向着指定侧的通量（或流量），而$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$叫做向量场$\boldsymbol{A}$的散度，记作$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

高斯公式现在可以写成

$$\iint_{\Omega}\mathrm{div}\boldsymbol{A}dv=\oiint_{\Sigma}A_n dS,$$

其中Σ是空间闭区域Ω的边界曲面，而

$$A_n=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}=P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$$

是向量$\boldsymbol{A}$在曲面Σ的外测法向量上的投影.

例 1 设向量场$A(x,y,z)=(xy,ye^x,xz)$，求$A(x,y,z)$在点(0, 1, 0)处的散度 divA。

解 这里$P=xy$, $Q=ye^x$, $R=xz$

$$\text{divA}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=y+e^{x}+x$$

于是

$$\text{div}\,A|_{(0,1,0)}=1+1+0=2$$

8.5.2 向量场的旋度

1．空间曲线积分与路径无关的条件

定理 2　设空间区域 G 是一维单连通域，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则空间曲线积分 $\int_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$ 在 G 内与路径无关（或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零）的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (5)$$

在 G 内恒成立.

证　略

定理 3　设区域 G 是空间一维单连通区域，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则表达式 $Pdx+Qdy+Rdz$ 在 G 内成为某一函数 $u(x,y,z)$ 的全微分的充分必要条件是等式（5）在 G 内恒成立；当条件（5）满足时，这函数（不计一常数之差）可用下式求出：

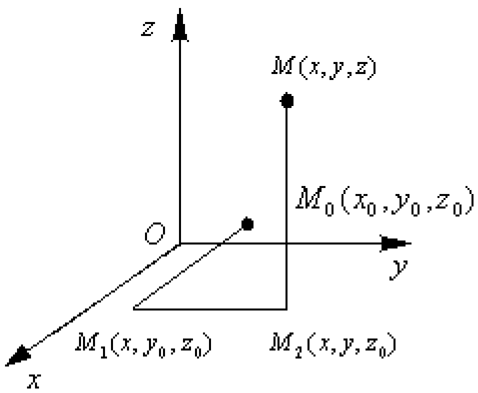
$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy+Rdz \qquad (6)$$

或用定积分表示为（按图 10－29 取积分路径）

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz. \qquad (6')$$

其中 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 G 内某一定点，点 $M(x,y,z)\in G$.

2. 环流量与旋度



设斯托克斯公式中的有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$$

而 Σ 的正向边界曲线 Γ 在点 (x,y,z) 处的单位切向量为

$$\tau=\cos\lambda\boldsymbol{i}+\cos\mu\boldsymbol{j}+\cos\nu\boldsymbol{k}$$

则斯托克斯公式可用对面积的曲面积分及对弧长的曲线积分表示为

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$$

$$=\oint\limits_{\Gamma}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)ds. \qquad（7）$$

设有向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

在坐标轴上的投影分别为

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}$$

的向量叫做向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，记作 $\mathbf{rot\ A}$，即

$$\mathbf{rot\ A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\,. \qquad（8）$$

现在，斯托克斯公式可写成向量的形式

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\oint\limits_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}ds\,,$$

或

$$\iint\limits_{\Sigma}(\mathbf{rot}\boldsymbol{A})_{\boldsymbol{n}}\,dS=\oint\limits_{\Gamma}\boldsymbol{A}_{\tau}ds\,, \qquad（9）$$

其中

$$(\mathbf{rot}\boldsymbol{A})_n=\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

为 $\mathbf{rot\ A}$ 在 Σ 的法向量上的投影，而

$$A_{\tau}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}=P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu$$

为向量 $\boldsymbol{A}$ 在 Γ 的切向量上的投影.

沿有向闭曲线 Γ 的曲线积分

$$\oint\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\oint\limits_{\Gamma}A_{\tau}ds$$

叫做向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭曲面 Γ 的环流量.斯托克斯公式（9）现在可叙述为：向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的环流量等于向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度场通过 Γ 所张的曲面 Σ 的通量,这里 Γ 的正向与 Σ 的侧应符合右手规则.

为便于记忆，$\mathbf{rot\ A}$ 的表达式（8）可利用行列式记号形式地表示为

$$\mathbf{rot\ A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

作业　2，4（2）（4），6