第七章 离散时间系统的时域分析

§7.1 引言

- 离散时间信号(Discrete-time signal)：是一个离散的数值序列，其仅在一些等间隔的离散的时间点有定义，其余时间点没有定义。

- 离散数值序列中的每一个数值，仍然按照一定的函数规律随离散变量k变化。

- 离散时间信号/函数用$f(k)$表示，其中$k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$。

- 离散时间系统（Discrete-time system）：用来处理离散时间信号的系统。

- 实际工程中，离散时间信号是通过对连续时间信号抽样得到的，然后用离散时间系统进行处理。

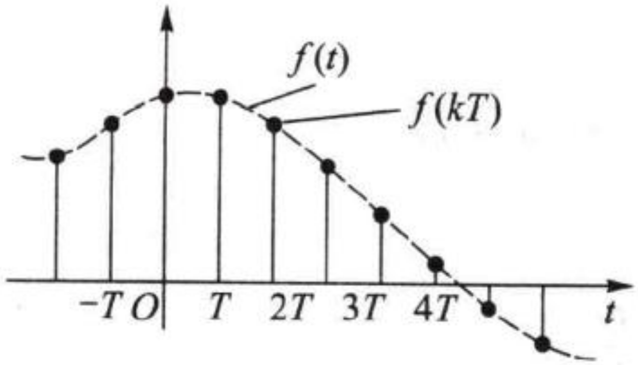
- 与连续时间系统相比，离散时间系统具备的优点：
  (1) 信号处理的速度快；
  (2) 能够达到非常高的处理精度；
  (3) 信号传输过程中的抗干扰能力强。

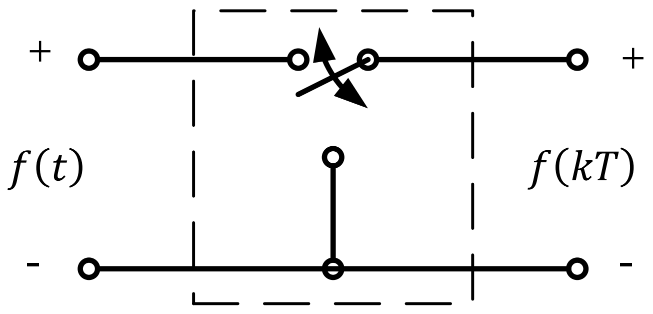
§7.2 抽样信号与抽样定理

- 实际工程中，若想利用离散时间系统的优势处理连续时间信号，需要对连续时间信号进行抽样/采样。

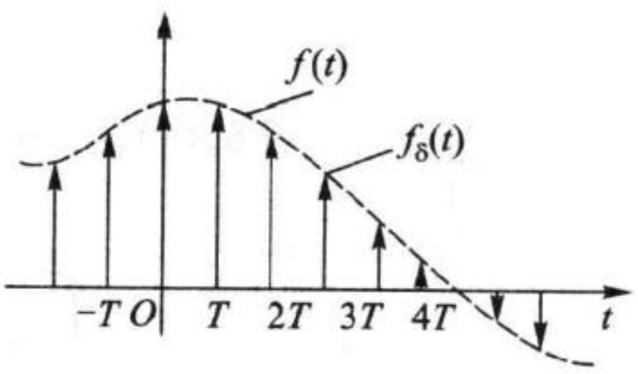
- 抽样涉及到问题：
  (1) 用什么方法进行抽样；
  (2) 如何保证抽样后原信号的信息不损失。

- 首先，对连续时间信号$f(t)$按照抽样间隔T进行离散化，得到离散时间序列$f(kT)$。

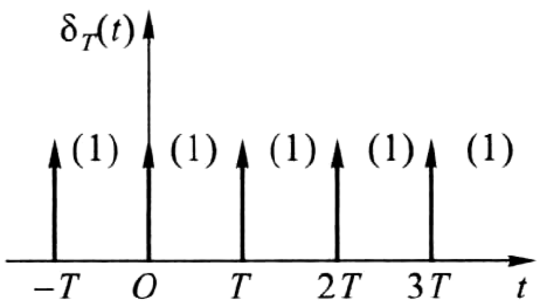


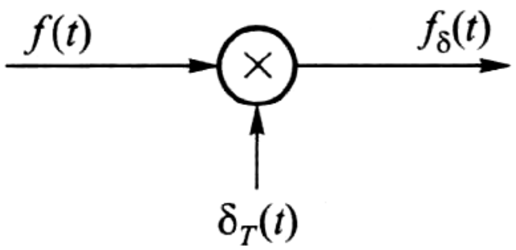


➢ 然后，用$f(kT)$构造另外一个连续时间信号$f_\delta(t)$



$$f_\delta(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-kT)=f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=f(t)\delta_T(t)$$





➢ **这个系统称为理想抽样系统，** $f_\delta(t)$**称为理想抽样信号（Ideal sampled signal）。**

- 理想抽样信号$f_\delta(t)$的频谱：

$$f_\delta(t) = f(t)\delta_T(t)$$

单位冲激序列$\delta_T(t)$的频谱

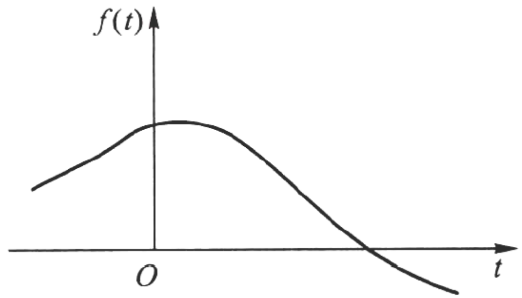
$$F.T.\{\delta_T(t)\} = F.T.\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right\} = \omega_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s) = \omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)$$

其中，$\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$称为抽样角频率。

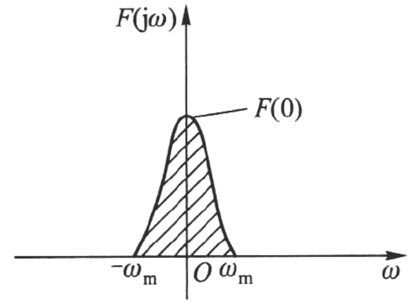
若$f(t)$的傅里叶变换为$F(j\omega)$，则根据卷积定理有

$$\begin{aligned}F_\delta(j\omega) = F.T.\{f_\delta(t)\} &= \frac{1}{2\pi}F(j\omega) * \omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)\\ &= \frac{1}{2\pi}F(j\omega) * \omega_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\\ &= \frac{\omega_s}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(j\omega) * \delta(\omega-k\omega_s)\\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F[j(\omega-k\omega_s)]\end{aligned}$$

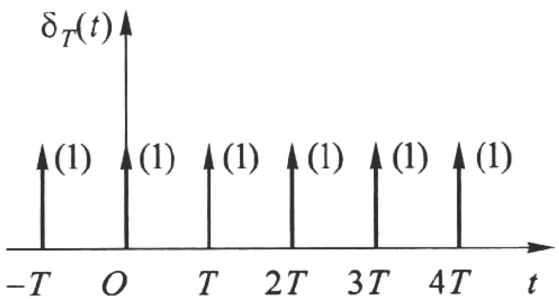
原信号$f(t)$



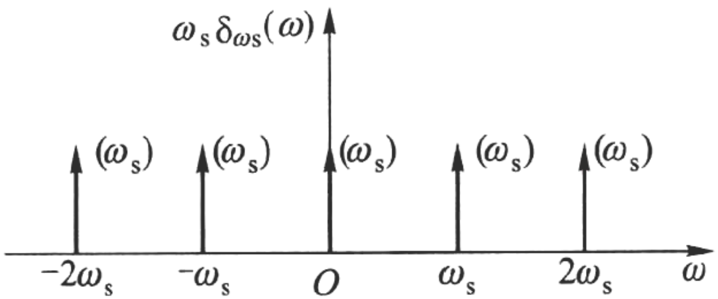
原信号的频谱$F(j\omega)$



单位冲激序列$\delta_T(t)$

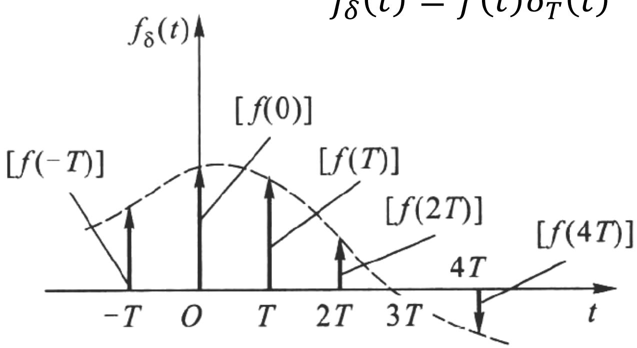


单位冲激序列的频谱$\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)$



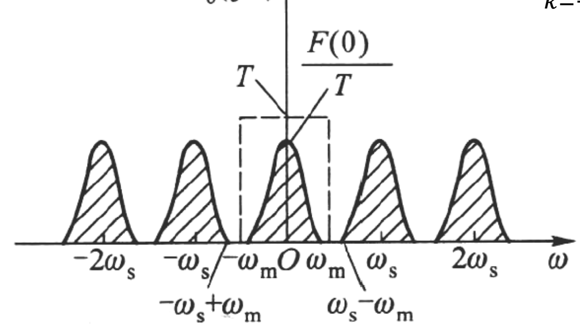
理想抽样信号$f_\delta(t)$

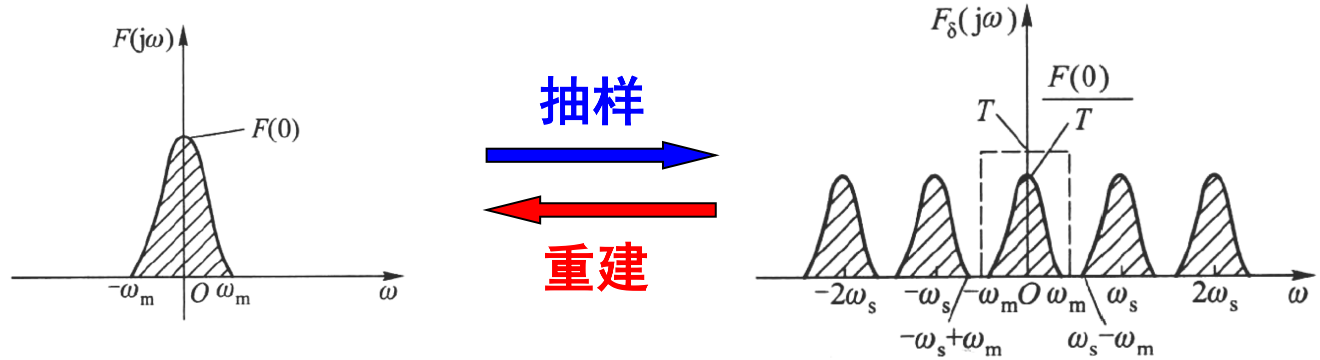
$$f_\delta(t) = f(t)\delta_T(t)$$



理想抽样信号的频谱$F_\delta(j\omega)$

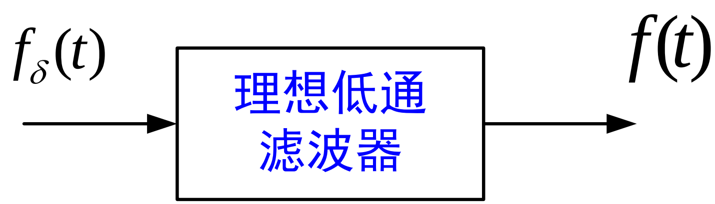
$$F_\delta(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - k\omega_s)]$$





- 理想抽样信号的频谱是被采样信号频谱的**周期延拓**，周期为**抽样角频率**ω_s，两者形状相同，只是大小为原信号的$\frac{1}{T}$倍。

- 由理想抽样信号$f_\delta(t)$**重建原信号**$f(t)$：



- **理想低通滤波器**的要求：通带内系统频率响应的模值为T，且截止频率ω_c需满足$\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m$。

- 由上式可知，**抽样角频率**需要满足$\omega_s \ge 2\omega_m$。

- **香农/奈奎斯特抽样定理**：一个在频谱中不包含有大于频率 f_m 的分量的有限频带的信号，由对该信号以不大于 $\frac{1}{2f_m}$ 的时间间隔进行抽样的抽样值唯一地确定。当这样的抽样信号通过其截止频率 ω_c 满足条件 $\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m$ 的理想低通滤波器后，可以将原信号完全重建。

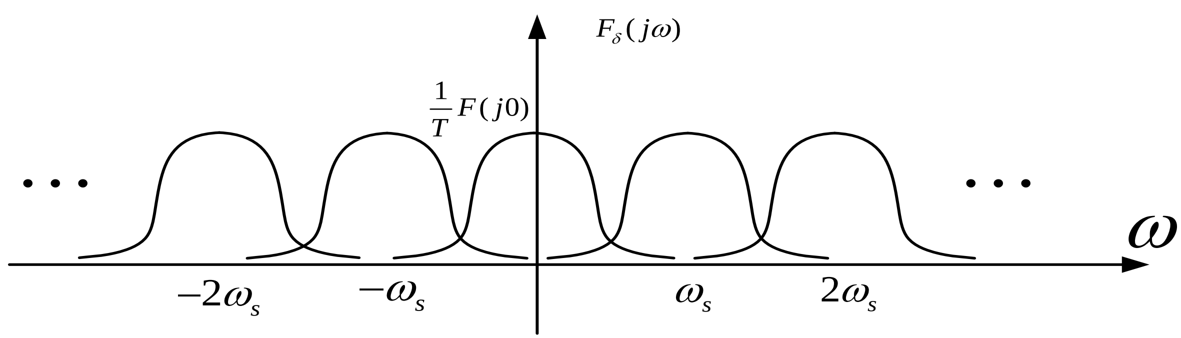
$$\boxed{\omega_s \ge 2\omega_m}$$ 香农抽样角频率/奈奎斯特抽样角频率

$$\boxed{f_s \ge 2f_m}$$ 香农抽样频率/奈奎斯特抽样频率

$$\boxed{T \le \frac{1}{2f_m}}$$ 香农抽样间隔/奈奎斯特抽样间隔

- 能够重建原信号的两个条件：(1) 原信号的频带是有限的，或者说原信号不含有$\omega > \omega_m$的频率分量；(2) 抽样角频率$\omega_s \geq 2\omega_m$，或者说抽样间隔$T \leq \frac{1}{2f_m}$。

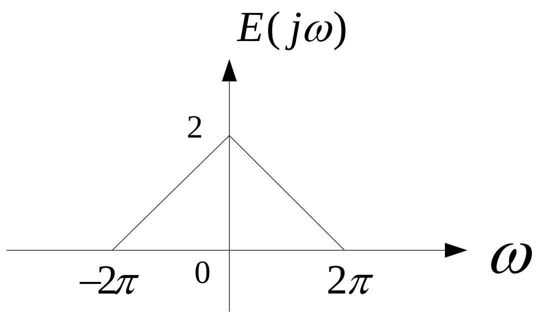
- 若原信号的频带不是有限的，或者抽样角频率ω_s过小，则会出现混叠现象，即无法实现原信号的重建。



- 实际工程中，为了避免混叠现象，抽样频率$\omega_s = 3\omega_m$~$5\omega_m$。

例：已知信号$e(t)$的频谱如图所示，当采用以下两种单位冲激序列对原信号进行抽样时，分别画出所得抽样信号$r(t)$的频谱图。

$$(1)\ \delta_{T1}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{k}{4}\right)\qquad (2)\ \delta_{T2}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k)$$



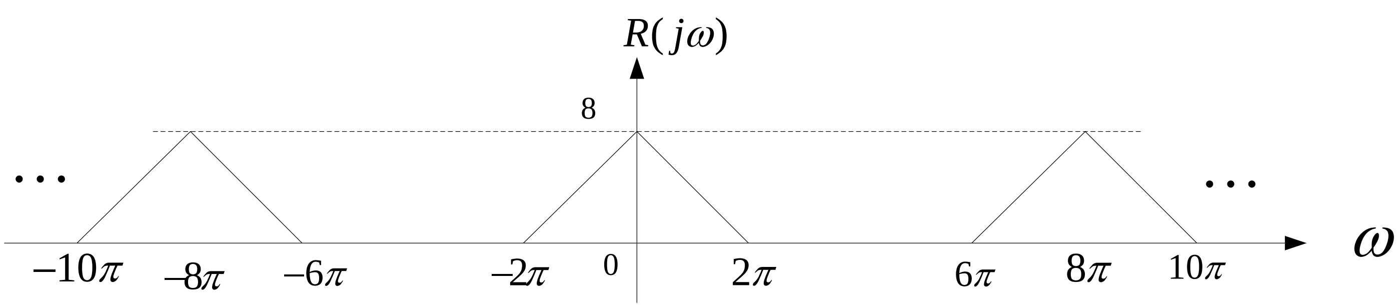
解：(1) 根据单位冲激序列可知，

抽样间隔为 $T=\dfrac{1}{4}$ **抽样角频率为** $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}=8\pi$

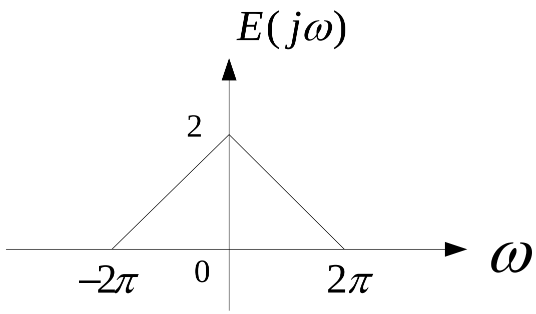
所以抽样信号$r(t)$的频谱为

$$R(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F[j(\omega-k\omega_s)]=4\sum_{k=-\infty}^{\infty}E[j(\omega-k\cdot 8\pi)]$$

故抽样信号$r(t)$的频谱图为



$$(1)\ \delta_{T1}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k}{4}\right) \qquad (2)\ \delta_{T2}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k)$$



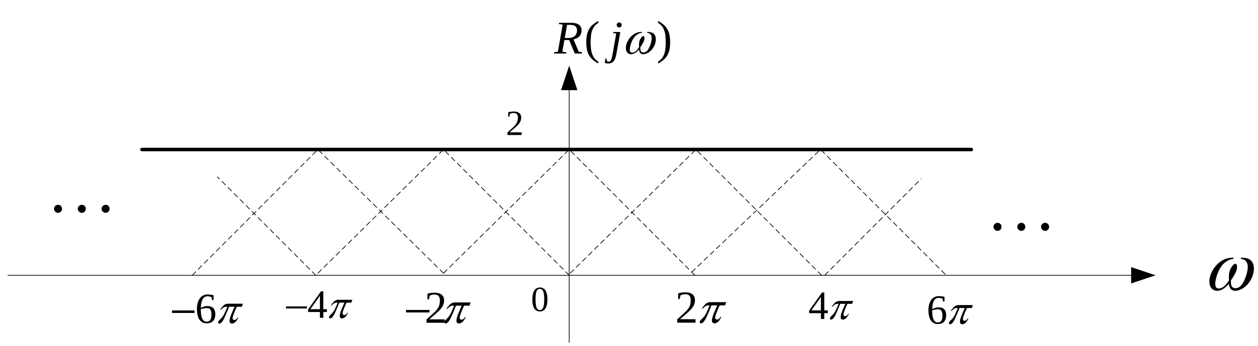
解：(2)根据单位冲激序列可知，

抽样间隔为 $T = 1$ **抽样角频率为** $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi$

所以抽样信号$r(t)$的频谱为

$$R(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - k\omega_s)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[j(\omega - k\cdot 2\pi)]$$

故抽样信号$r(t)$的频谱图为



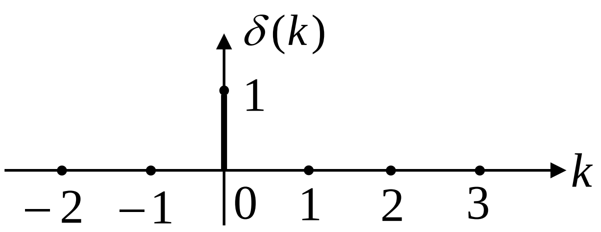
§7.3 离散时间系统的描述和模拟

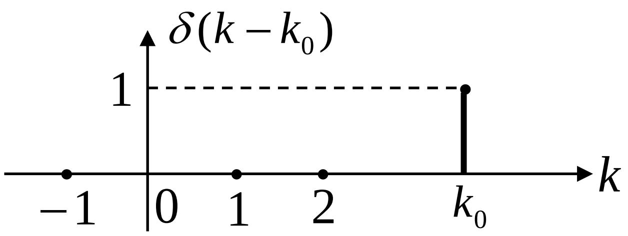
一、常见的离散时间信号

1. 单位函数/单位样值函数

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

$$\delta(k-k_0)=\begin{cases}1 & k=k_0\\ 0 & k\neq k_0\end{cases}$$

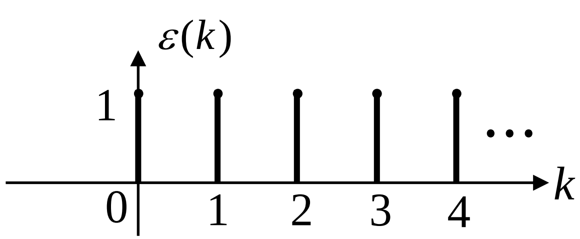


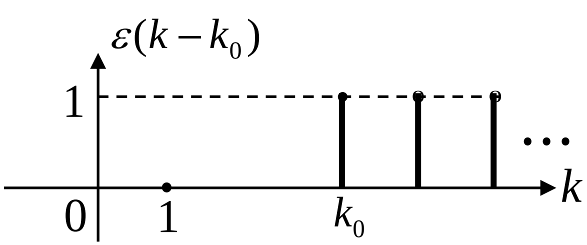


2. 单位阶跃序列

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

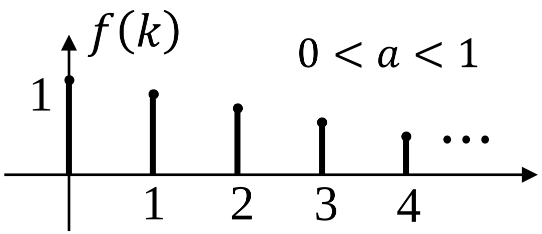
$$\varepsilon(k-k_0)=\begin{cases}1 & k\geq k_0\\ 0 & k<k_0\end{cases}$$





3. 单边指数序列

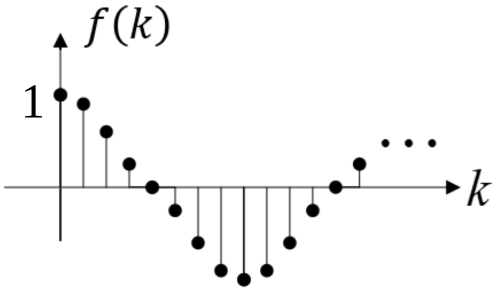
$f(k) = a^k \varepsilon(k)$



$|a| < 1$，收敛；
$|a| > 1$，发散。

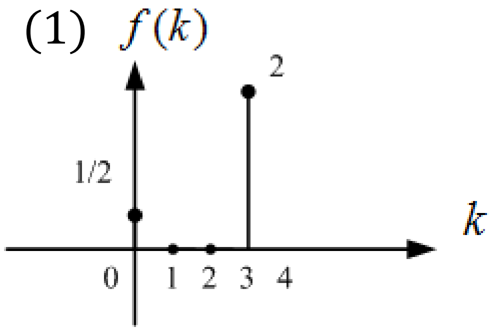
4. 单边余弦（或正弦）序列

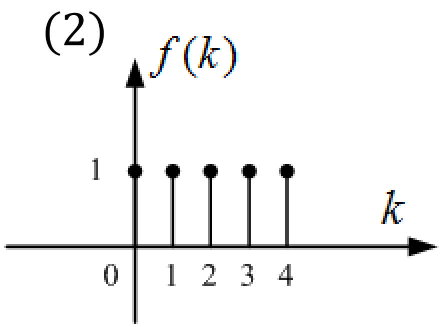
$f(k) = \cos \omega_0 k\, \varepsilon(k)$



其中， $\omega_0 = \omega T$称为**数字角频率**，单位是rad。

例：已知离散时间信号如图所示，写出信号的表达式。





解：根据$f(k)$的波形可知，

$$(1)\ \ f(k)=\frac{1}{2}\delta(k)+2\delta(k-3)$$

$$(2)\ \ f(k)=\delta(k)+\delta(k-1)+\delta(k-2)+\delta(k-3)+\delta(k-4)$$

$$=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-5)$$

例：判断下列信号是否为周期信号，如果是则计算其周期。

$$(1)\ \ f(k)=\cos\frac{1}{4}k \qquad\qquad (2)\ \ f(k)=\sin\frac{\pi}{5}k+\cos\frac{\pi}{10}k$$

解： $(1)\ \ f(k)=\cos\frac{1}{4}k \qquad T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{1/4}=8\pi$ **是非周期信号。**

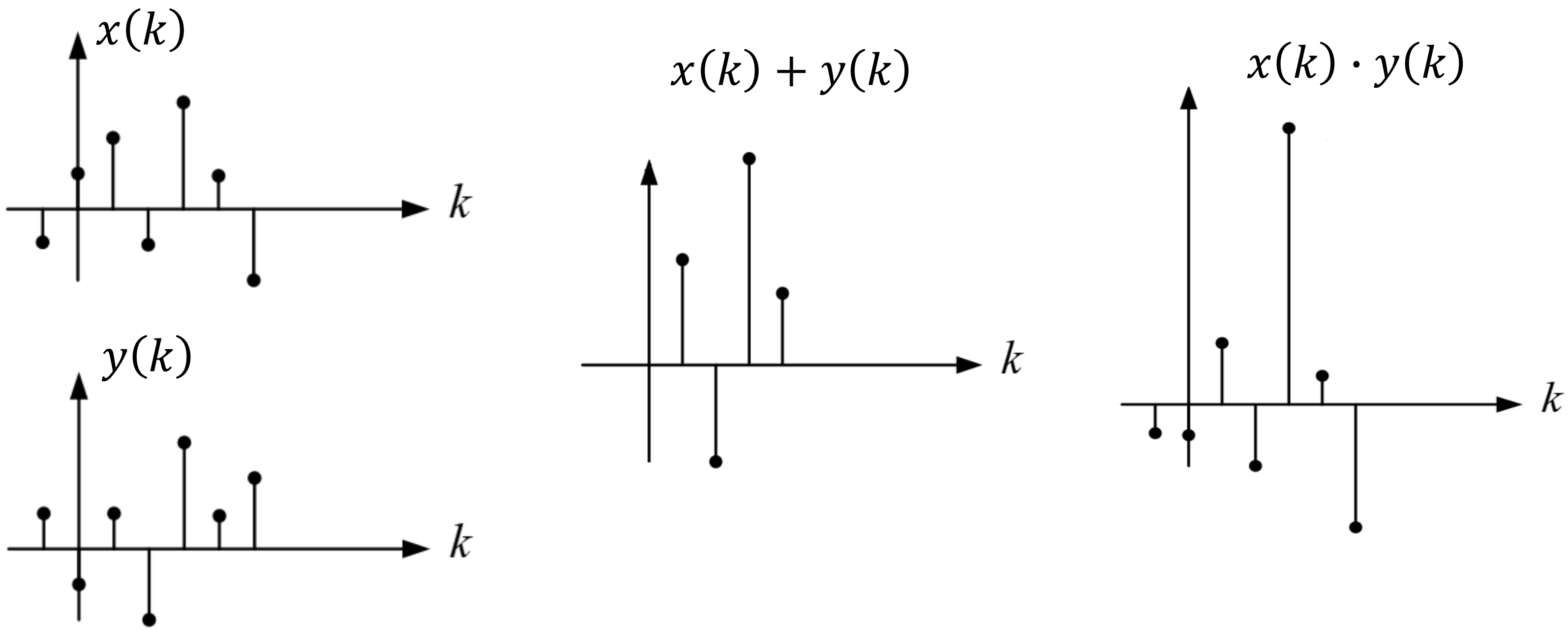
$$(2)\ \ f(k)=\sin\frac{\pi}{5}k+\cos\frac{\pi}{10}k$$

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\pi/5}=10 \qquad T_2=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\pi/10}=20$$

T_1和T_2之间有最小公倍数，所以是周期信号，周期$T=20$**。**

二、离散时间信号的时域运算

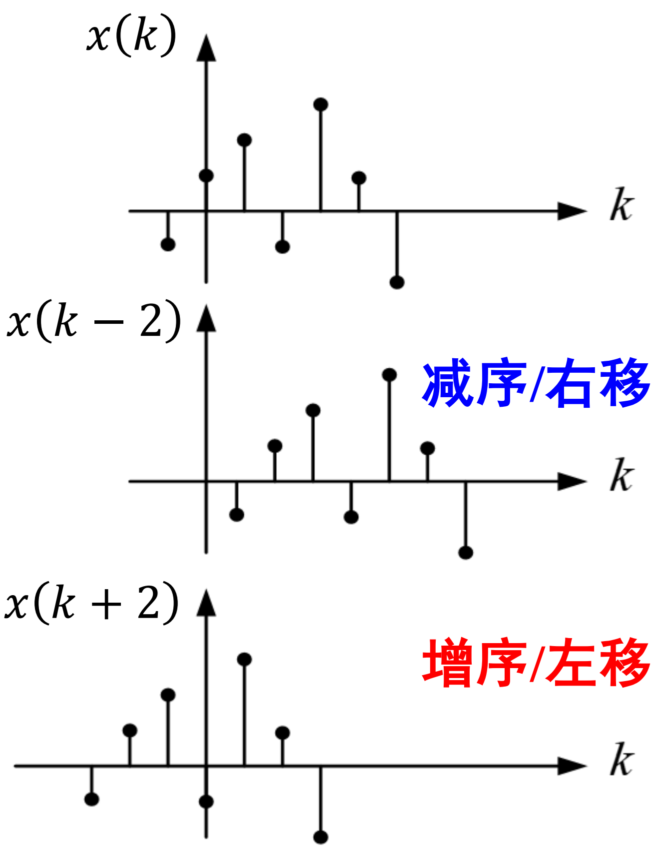
➢ **信号的相加或相乘：坐标原点对齐，对应时刻的信号值相加或相乘。**



➢ 信号的移序：

$$x(k) \rightarrow x(k-k_0)$$

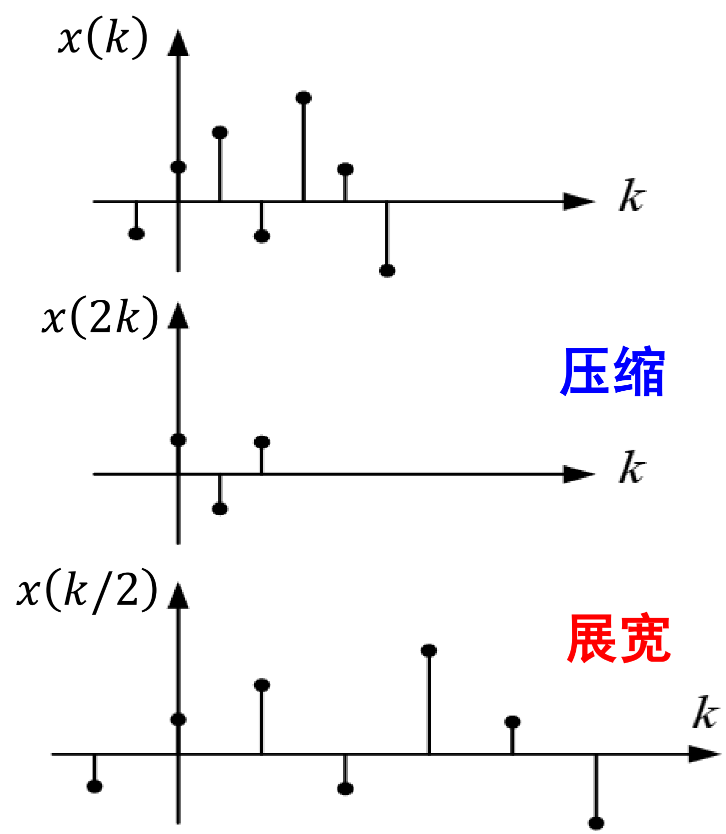
$$\begin{cases} k_0 > 0 & \text{减序/右移} \\ k_0 < 0 & \text{增序/左移} \end{cases}$$



➢ 信号的尺度变换：

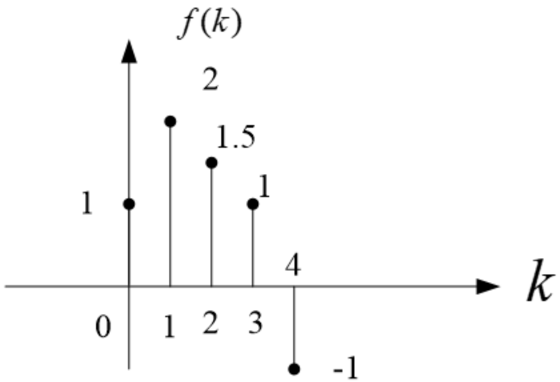
$$x(k) \rightarrow x(ak)$$

$$\begin{cases} a > 1 & \text{压缩} \\ a < 1 & \text{展宽} \end{cases}$$

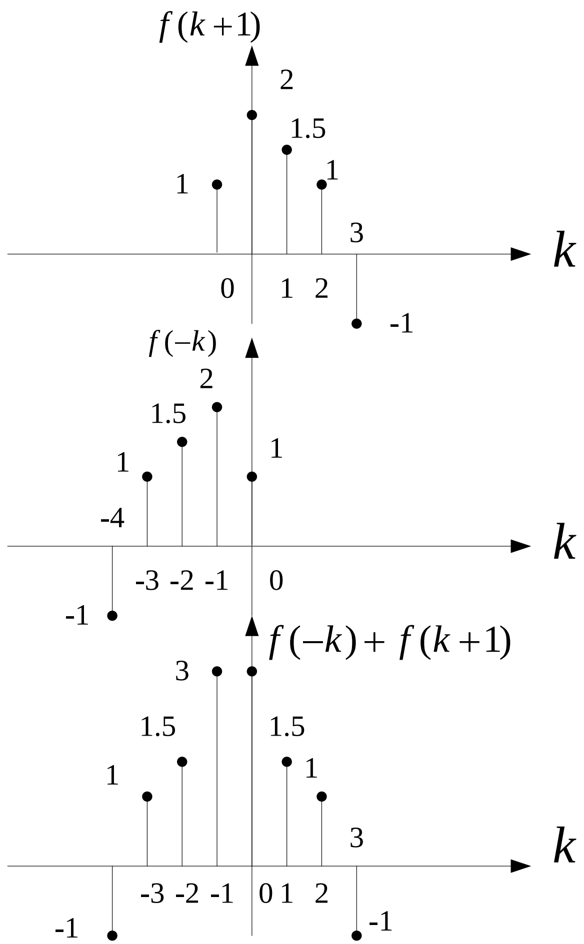


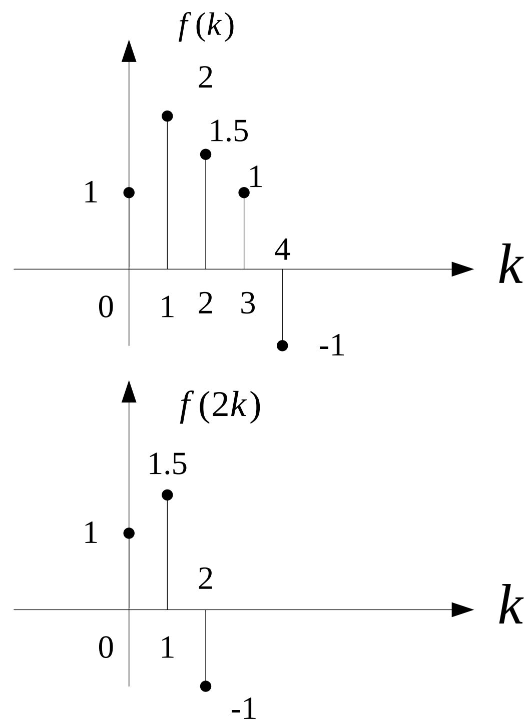
例：已知离散时间信号$f(k)$如图所示，画出下列信号的波形。

(1) $f(k+1)+f(-k)$　　　　(2) $f(2k)$



解：根据$f(k)$的波形可得，





三、离散时间系统

- 离散时间系统用差分方程(Difference equation)来描述，差分方程中包含离散时间函数$f(k)$以及此函数的增序或者减序函数$f(k+1)$、$f(k-1)$等。

- 差分方程的分类：

(1) 后向差分方程：以减序形式出现的差分方程

$$y(k)+ay(k-1)=be(k)$$

(2) 前向差分方程：以增序形式出现的差分方程

$$y(k+1)+cy(k)=de(k)$$

与之对应的微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt}+cy(t)=de(t)$$

- 差分方程中未知变量的最大和最小移序量的差称为方程的阶数，求解差分方程所需的初始条件的个数等于其阶数。

1. 离散时间系统的数学模型

- 线性系统 ——— 线性方程
- 非移变（移不变）系统 —— 常系数方程
- 离散时间系统 ——— 差分方程

线性常系数差分方程 $y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=b_2e(k+2)+b_1e(k+1)+b_0e(k)$

与之对应的微分方程

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0r(t)=b_2\frac{d^2e(t)}{dt^2}+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0e(t)$$

例：某人每年初在银行存款一次，银行利息为β，每年年底所得利息转存到下一年。若第k年初存入银行的存款额为$x(k)$，用差分方程表示第k年初的总存款额$y(k)$。

解：根据题意可得，

$$y(k) = y(k-1) + \beta y(k-1) + x(k)$$

将上式整理成前向差分方程得，

$$y(k+1) - (1+\beta)y(k) = x(k+1)$$

- **由此推广可得n阶线性非移变离散时间系统的前向差分方程为：**

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_0 y(k) = b_m e(k+m) + b_{m-1}e(k+m-1) + \cdots + b_0 e(k)$$

其中，a，b为常数。

- **n阶前向差分方程与n阶微分方程的各项是一一对应的。对于因果离散时间系统而言，必须满足$m \le n$。**

2. 差分方程的算子表示法

➢ 引入**移序算子**（Sequence shift operator），记作S，该算子的作用是使具有离散变量的函数的序号进1，即

$$Sf(k)=f(k+1),\quad S^2f(k)=f(k+2),\quad S^nf(k)=f(k+n)$$

所以，n阶离散时间系统的**差分方程**可以用**移序算子**表示为

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_0y(k)=b_me(k+m)+b_{m-1}e(k+m-1)+\cdots+b_0e(k)$$

$$(S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_0)y(k)=(b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_0)e(k)$$

$$y(k)=\frac{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_0}e(k)=H(S)e(k)$$

其中，$H(S)=\dfrac{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_0}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_0}$ 为离散时间系统的**转移算子**。

3. 线性移不变(非移变)系统的性质(Linear shift-invariant system)

- **线性特性(齐次性和叠加性)**

若 $e_1(k) \to y_1(k) \quad e_2(k) \to y_2(k)$

则 $c_1e_1(k) + c_2e_2(k) \to c_1y_1(k) + c_2y_2(k)$ 其中，c_1，c_2为常数。

- **移不变性**

若 $e(k) \to y(k)$ 则 $e(k-i) \to y(k-i)$

综合以上两个性质有:

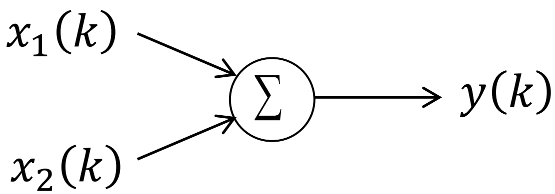
若 $e_1(k) \to y_1(k) \quad e_2(k) \to y_2(k)$

则 $c_1e_1(k-i) + c_2e_2(k-i) \to c_1y_1(k-i) + c_2y_2(k-i)$ 其中，c_1，c_2为常数。

四、离散时间系统的模拟

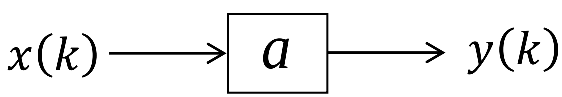
- 线性离散时间系统的模拟框图有三种**基本运算单元**：加法器、乘法器、延时器。

加法器



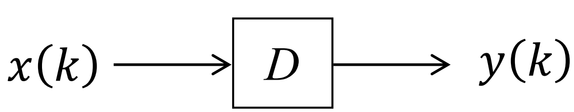
$$y(k) = x_1(k) + x_2(k)$$

乘法器



$$y(k) = ax(k)$$

延时器



$$y(k) = x(k-1)$$

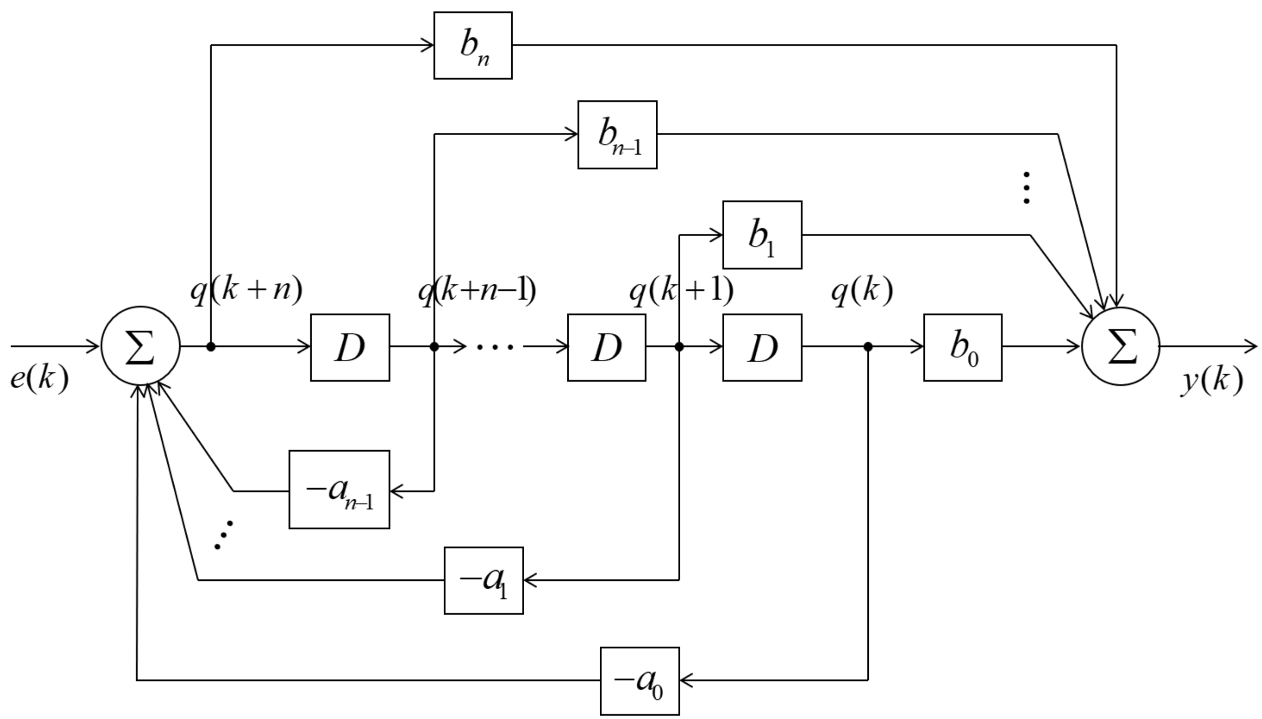
➢ 对于n阶离散时间系统的模拟框图

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_0y(k)=b_ne(k+n)+b_{n-1}e(k+n-1)+\cdots+b_0e(k)$$

➢ 同样需要引入一个辅助函数$q(k)$，使其满足

$$q(k+n)+a_{n-1}q(k+n-1)+\cdots+a_0q(k)=e(k)$$

$$y(k)=b_nq(k+n)+b_{n-1}q(k+n-1)+\cdots+b_0q(k)$$

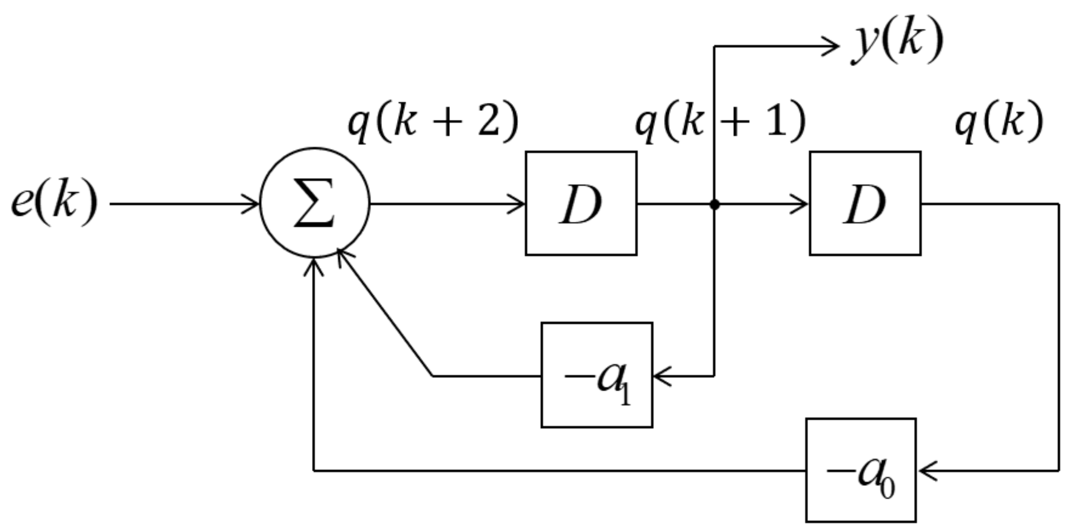


例：画出下列离散时间系统的直接型模拟框图。

$$y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=e(k+1)$$

解：令 $q(k+2)+a_1q(k+1)+a_0q(k)=e(k)$ **则** $y(k)=q(k+1)$

故系统的直接型模拟框图为



§7.4 离散时间系统的零输入响应

➢ 时域内，离散时间系统零输入响应的求解方法：

解法一：递推法

该方法只能求出数值解，很难找到完整的表达式。

解法二：近代时域法

差分方程的解(系统的全响应)= 零输入响应 + 零状态响应

$$\boxed{y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)}$$

- 零输入响应是指当外加激励为0时，仅由系统的初始状态单独作用所产生的响应，记为$y_{zi}(k)$。

- 根据零输入响应的定义，有$e(k)=0$，因此n阶离散时间系统的差分方程就变为：

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_0y(k)=0$$

- 零输入响应就是线性齐次差分方程的解，其解的形式取决于系统的特征根/自然频率。

- n阶离散时间系统的差分方程也可用移序算子表示为

$$(S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_0)y(k)=0$$

故系统的特征方程为 $S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_0=0$

一、特征根为单根的情况

设$S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$的根为$v_1, v_2, \cdots, v_n$，且$v_1 \neq v_2 \neq \cdots \neq v_n$，其特征方程为

$$S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots + a_0 = (S - v_1)(S - v_2)\cdots(S - v_n) = 0$$

则其零输入响应的形式解为

$$\boxed{y_{zi}(k) = c_1 v_1^k + c_2 v_2^k + \cdots + c_n v_n^k}$$

其中，$c_1, c_2, \cdots, c_n$是由系统的初始条件$y(0), y(1), \cdots, y(n-1)$确定的待定系数。

二、特征根有重根的情况

假设v_1是特征方程的m阶重根，其余全部为单根，其特征方程为：

$$S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots + a_0 = (S - v_1)^m (S - v_{m+1}) \cdots (S - v_n) = 0$$

则其零输入响应的形式解为

$$\boxed{\begin{aligned} y_{zi}(k) = (c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + \cdots + c_{m-1}k^{m-1})v_1^k \\ +c_{m+1}v_{m+1}^k + \cdots + c_n v_n^k \end{aligned}}$$

其中，$c_0, c_1, \cdots, c_{m-1}, c_{m+1}, \cdots, c_n$也是由系统的初始条件$y(0)$，$y(1), \cdots, y(n-1)$确定的待定系数。

例：已知一个离散时间系统的初始值为$y(0)$且$y(0)>0$，系统的差分方程为$y(k+1)+a_0y(k)=e(k)$，求其零输入响应$y_{zi}(k)$，并讨论$y_{zi}(k)$随a_0取值不同的变化模式。

解：根据系统的差分方程，可得其特征方程为 $S+a_0=0$

得到特征根为：$v_1=-a_0$

则零输入响应的形式解为：$y_{zi}(k)=c_1v_1^k=c_1(-a_0)^k$

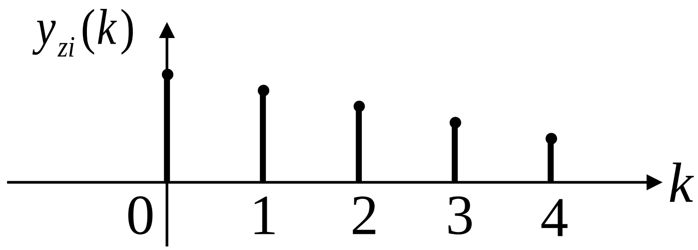
带入初始条件：$y(0)=c_1(-a_0)^0 \Longrightarrow c_1=y(0)$

故系统的零输入响应为：$y_{zi}(k)=y(0)(-a_0)^k$，$k\geq 0$

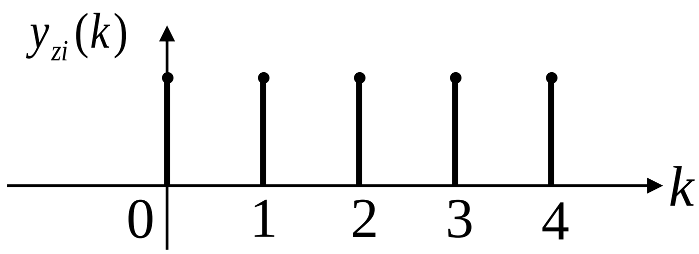
由上式可知，$y_{zi}(k)$的变化模式取决于特征根$v_1=-a_0$的取值。

$$\boxed{y_{zi}(k) = y(0)(-a_0)^k,\ \ k \geq 0}$$

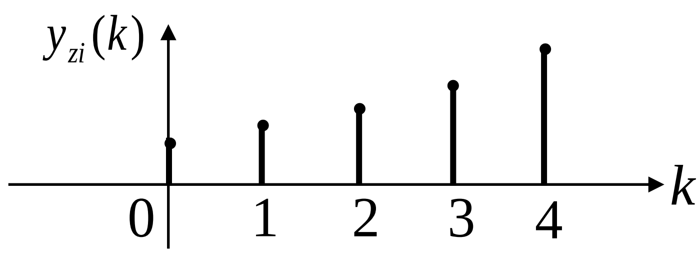
(1) 当a_0为负数且$|a_0| < 1$时，$y_{zi}(k)$随着k的增加而单调减小。



(2) 当a_0为负数且$|a_0| = 1$时，$y_{zi}(k)$随着k的增加而保持不变。

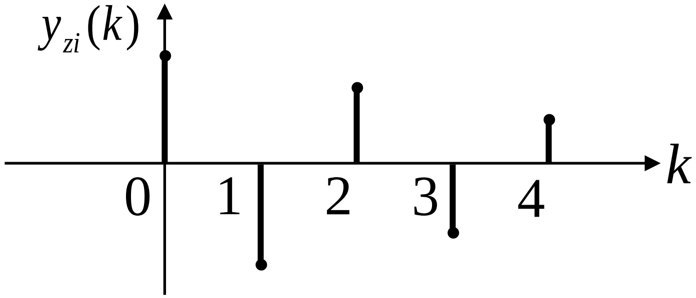


(3) 当a_0为负数且$|a_0| > 1$时，$y_{zi}(k)$随着k的增加而单调增大。

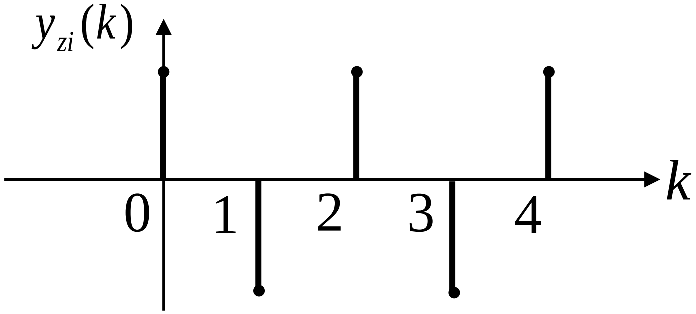


$$\boxed{y_{zi}(k) = y(0)(-a_0)^k，\ k \geq 0}$$

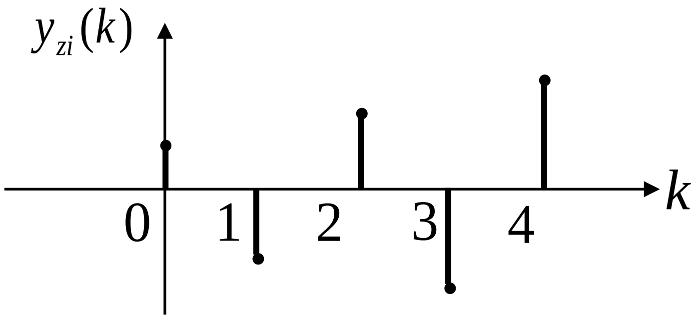
(4) 当a_0为正数且$|a_0| < 1$时，$y_{zi}(k)$随着k的增加而交替减小。



(5) 当a_0为正数且$|a_0| = 1$时，$y_{zi}(k)$随着k的增加而交替不变。



(6) 当a_0为正数且$|a_0| > 1$时，$y_{zi}(k)$随着k的增加而交替增大。



例：一个离散时间系统的初始条件为$y_{zi}(0)=0, y_{zi}(1)=1$，系统的差分方程为 $y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=e(k+1)-2e(k)$ ，求其零输入响应$y_{zi}(k)$。

解：根据系统的差分方程，可得其特征方程为

$$S^2-3S+2=(S-1)(S-2)=0$$

得到特征根为： $v_1=1, v_2=2$

则零输入响应的形式解为： $y_{zi}(k)=c_1v_1^k+c_2v_2^k=c_1+c_22^k$

带入初始条件：

$$\begin{cases} y_{zi}(0)=c_1+c_2=0 \\ y_{zi}(1)=c_1+2c_2=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1=-1 \\ c_2=1 \end{cases}$$

故系统的零输入响应为： $y_{zi}(k)=-1+2^k$， $k\geq 0$

§7.5 离散时间系统的零状态响应

- 求解思路：

  (1) 将激励信号分解为一系列单元信号加权和的形式；

  (2) 求每个单元信号单独作用到系统的响应；

  (3) 运用叠加原理求出系统总的响应。

- 离散时间信号进行时域分解的单元信号是单位函数$\delta(k)$。

- 单位函数响应：以单位函数作为激励信号时，系统的零状态响应，记为$h(k)$。

$$\boxed{\delta(k) \to h(k)}$$

一、单位函数响应的时域求解方法

➢ 对于一个特征根为v的一阶离散时间系统，其差分方程为

$$y(k+1)-vy(k)=Ae(k)$$

系统的转移算子为 $H(S)=\dfrac{A}{S-v}$

当$e(k)=\delta(k)$时，有$y(k)=h(k)$，故

$$h(k+1)=vh(k)+A\delta(k)$$

所以，不同时刻系统的响应为

$$h(0)=vh(-1)+A\delta(-1)=0$$

$$h(1)=vh(0)+A\delta(0)=A$$

$$h(2)=vh(1)+A\delta(1)=Av$$

$$h(3)=vh(2)+A\delta(2)=Av^2$$

$$\cdots\cdots$$

故系统的单位函数响应为

$$h(k)=Av^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

- 由此推广到n阶离散时间系统，其差分方程为

$$(S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots + a_0)y(k) = (b_m S^m + b_{m-1}S^{m-1} + \cdots + b_0)e(k)$$

- 当$\mathbf{n} > m$且系统的特征根均为**单根**$v_1, v_2, \cdots, v_n$时，系统的转移算子为

$$H(S) = \frac{b_m S^m + b_{m-1}S^{m-1} + \cdots + b_0}{S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$= \frac{b_m S^m + b_{m-1}S^{m-1} + \cdots + b_0}{(S - v_1)(S - v_2)\cdots(S - v_n)}$$

$$= \frac{A_1}{S - v_1} + \frac{A_2}{S - v_2} + \cdots + \frac{A_n}{S - v_n}$$

$$\boxed{h(k) = A_1 v_1^{k-1}\varepsilon(k-1) + \cdots + A_n v_n^{k-1}\varepsilon(k-1) = \sum_{i=1}^{n} A_i v_i^{k-1}\varepsilon(k-1)}$$

- 当$\mathbf{n} = m$时，系统的转移算子展开后有$\frac{A_r S}{S - v_r}$的部分分式，其对应的**单位函数响应为**$h(k) = A_r v_r^k \varepsilon(k)$。

例：一个因果离散时间系统的差分方程为$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=2e(k+2)$，求系统的单位函数响应$h(k)$。

解：根据系统的差分方程，可得其转移算子为

$$H(S)=\frac{2S^2}{S^2-5S+6}=S\cdot\frac{2S}{(S-2)(S-3)}$$

$$=S\cdot\left(\frac{-4}{S-2}+\frac{6}{S-3}\right)$$

$$=\frac{-4S}{S-2}+\frac{6S}{S-3}$$

故系统的单位函数响应为

$$h(k)=-4\cdot 2^k\varepsilon(k)+6\cdot 3^k\varepsilon(k)$$

$$=(-4\cdot 2^k+6\cdot 3^k)\varepsilon(k)$$

二、用卷积和求解离散时间系统的零状态响应

➢ 利用单位函数，将任意一个离散时间信号$e(k)$分解为

$$e(k) = \cdots + e(-2)\delta(k+2) + e(-1)\delta(k+1) + e(0)\delta(k) + e(1)\delta(k-1) + \cdots$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} e(j)\delta(k-j)$$

根据线性非移变系统的性质，有

$$y_{zs}(k) = \cdots + e(-2)h(k+2) + e(-1)h(k+1) + e(0)h(k) + e(1)h(k-1) + \cdots$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} e(j)h(k-j)$$

$$\boxed{y_{zs}(k) = e(k) * h(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e(j)h(k-j)}$$

上式称为**卷积和**。

- 若系统为因果系统，激励为因果信号，则有

$$y_{zs}(k) = e(k) * h(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e(j)h(k-j) = \sum_{j=0}^{k} e(j)h(k-j)$$

- 卷积和的性质：

(1) 满足交换律、分配律和结合律；

(2) 任意信号与$\delta(k)$的卷积和仍然为信号本身，即

$$e(k) * \delta(k) = e(k), \qquad e(k) * \delta(k-j) = e(k-j)$$

(3) 卷积和的移序特性与卷积积分的延时特性类似，即

若 $x_1(k) * x_2(k) = y(k)$

则 $x_1(k+m) * x_2(k+n) = y(k+m+n)$

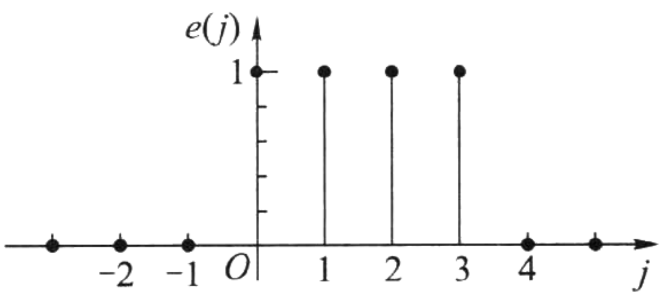
(4) 卷积和的结果可通过查表获得，表7-1 (P. 335)。

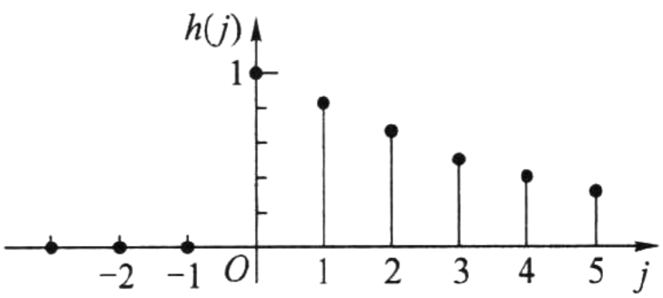
$$y_{zs}(k) = e(k) * h(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e(j)h(k-j)$$

- **卷积和的几何图解法：**

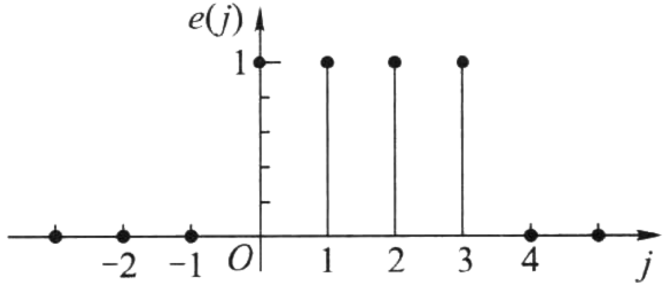
反褶 ⟶ 平移 ⟶ 相乘 ⟶ 求和

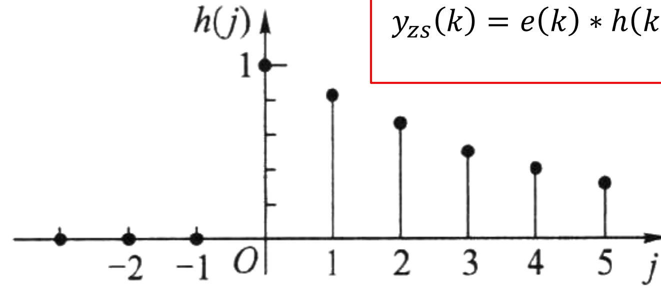
讨论：已知 $e(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-4)$，$h(k) = 0.8^k[\varepsilon(k) - \varepsilon(k-6)]$，**求其卷积和**$y_{zs}(k)$**。**



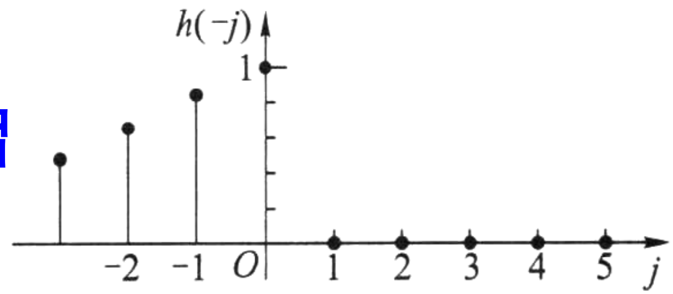


$$y_{zs}(k) = e(k) * h(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} e(j)h(k-j)$$

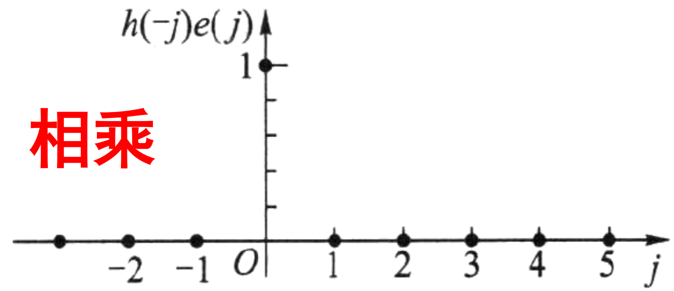




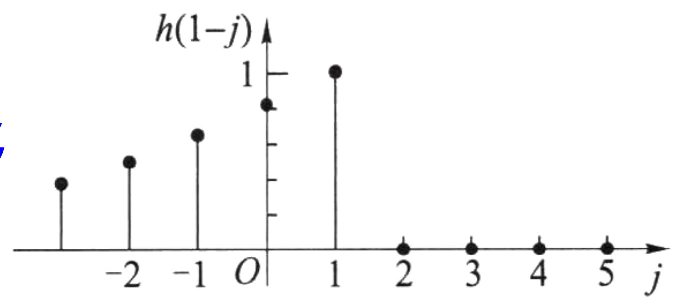
反褶



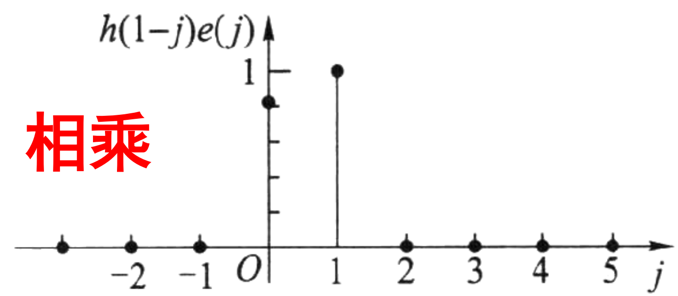
相乘



平移

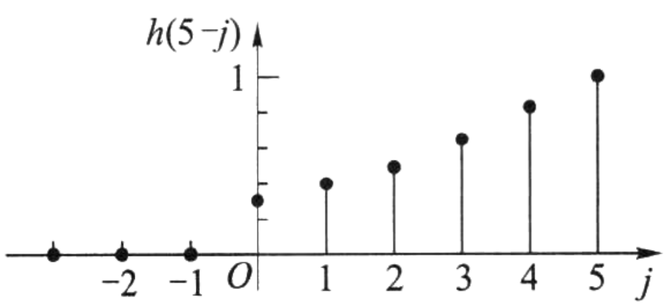


相乘

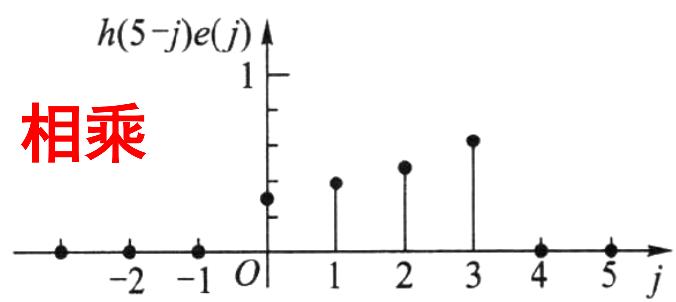


…… ……

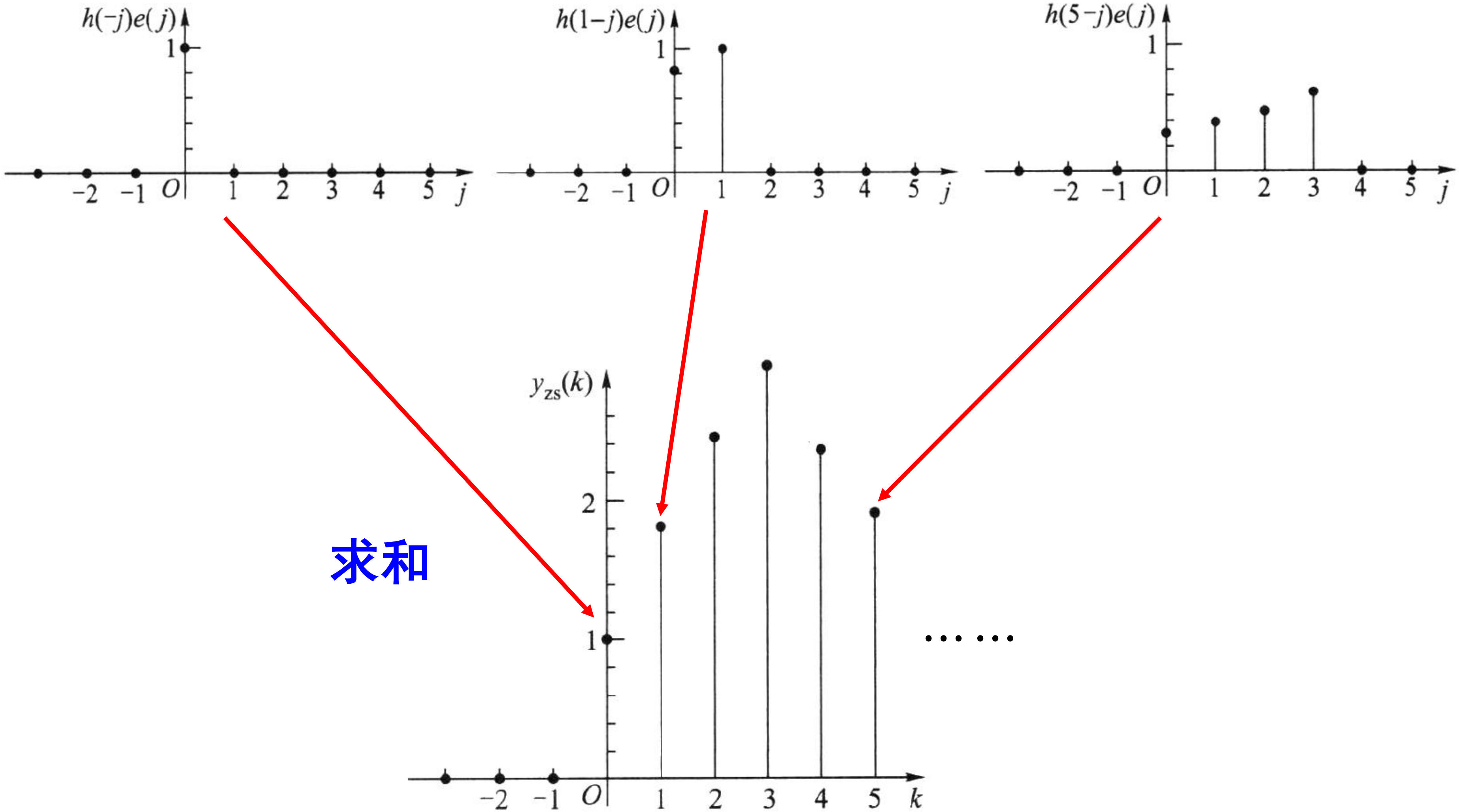
平移



相乘



…… ……



h(−j)e(j)
1
−2 −1 O 1 2 3 4 5 j
h(1−j)e(j)
1
−2 −1 O 1 2 3 4 5 j
h(5−j)e(j)
1
−2 −1 O 1 2 3 4 5 j
求和
y_zs(k)
2
1
−2 −1 O 1 2 3 4 5 k
…… ……

三、系统全响应的求解

例：一个离散时间系统的转移算子为$H(S)=\frac{S(7S-2)}{(S-0.5)(S-0.2)}$**，系统的初始条件为**$y_{zi}(0)=2, y_{zi}(1)=4$**。当系统的输入为单位阶跃序列**$\varepsilon(k)$**时，求系统的响应**$y(k)$**。**

解：（1）求零输入响应$y_{zi}(k)$

根据系统的转移算子，可得其特征方程为 $(S-0.5)(S-0.2)=0$

得到特征根为： $v_1=0.5, v_2=0.2$

则零输入响应的形式解为： $y_{zi}(k)=c_1v_1^k+c_2v_2^k=c_1(0.5)^k+c_2(0.2)^k$

带入初始条件：

$$\begin{cases} y_{zi}(0)=c_1+c_2=2 \\ y_{zi}(1)=0.5c_1+0.2c_2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=12 \\ c_2=-10 \end{cases}$$

故系统的零输入响应为： $y_{zi}(k)=[12(0.5)^k-10(0.2)^k]\varepsilon(k)$

$$y_{zi}(k) = [12(0.5)^k - 10(0.2)^k]\varepsilon(k)$$

(2) 求零状态响应$y_{zs}(k)$

系统转移算子为 $H(S) = \dfrac{S(7S-2)}{(S-0.5)(S-0.2)} = \dfrac{5S}{S-0.5} + \dfrac{2S}{S-0.2}$

故系统的单位函数响应为 $h(k) = 5(0.5)^k\varepsilon(k) + 2(0.2)^k\varepsilon(k)$

当$e(k) = \varepsilon(k)$，系统的零状态响应为

$$y_{zs}(k) = e(k) * h(k) = \varepsilon(k) * [5(0.5)^k\varepsilon(k) + 2(0.2)^k\varepsilon(k)]$$
$$= 5(0.5)^k\varepsilon(k) * \varepsilon(k) + 2(0.2)^k\varepsilon(k) * \varepsilon(k)$$

查表7-1可得，

$$y_{zs}(k) = \frac{5}{1-0.5}[1-(0.5)^{k+1}]\varepsilon(k) + \frac{2}{1-0.2}[1-(0.2)^{k+1}]\varepsilon(k)$$
$$= [12.5 - 5(0.5)^k - 0.5(0.2)^k]\varepsilon(k)$$

故系统的全响应为

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k) = \underbrace{12.5\varepsilon(k)}_{\text{受迫响应分量}} + \underbrace{7(0.5)^k\varepsilon(k) - 10.5(0.2)^k\varepsilon(k)}_{\text{自然响应分量}}$$

受迫响应分量　　自然响应分量

稳态响应分量　　瞬态响应分量

本章小结

基本概念：抽样信号、抽样定理、混叠现象、离散时间信号、离散时间系统、差分方程、单位函数响应、卷积和。

基本运算：理想抽样信号的频谱、抽样定理的应用、离散时间系统的模拟框图、零输入响应的求解、单位函数响应的求解、零状态响应的求解。