第 5 章　向量组的线性相关性与矩阵的秩

这一章是本课程中最难也是最重要的部分，原因是：本章的内容很抽象、结论很多，有些地方不好想、不好理解，刚开始会很不适应。建议同学们节奏放慢一点，把学过的概念、结论好好记住，典型的例子、重要的习题也要记住，经常通过一些具体的例子来帮助我们思考一些问题，脑子要活一些，别学的太死，要好好理解，慢慢就会好起来。

5.1　向量组的线性相关性和秩

1. 向量组的定义.

分量个数相同的一组行向量称为一个**行向量组。**

分量个数相同的一组列向量称为一个**列向量组。**

2. 线性代数中很多重要的概念产生于对线性方程组研究的需要，本章要介绍的一些主要概念也都与线性方程组的研究有着密切的联系.

对于一般的线性方程组，我们需要解决这样一些问题：何时有解？有解时是有唯一解还是有无穷多个解？当有无穷多个解时，怎样求出和表达方程组的全部解？为此，我们先介绍线性方程组的向量形式.

3. 线性方程组的矩阵形式为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，将 $\mathbf{A}$ 按列分块为 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$，

由 $\mathbf{Ax}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n$ 可知，

线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 又可以写成向量形式：$\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{b}$.

注意：方程组的向量形式在本章中非常重要，经常要通过方程组的向量形式来思考一些问题。

例： 方程组 $\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_1+2x_2=3\end{cases}$ 的矩阵形式为 $\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$，可记为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，

其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\end{bmatrix},\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$.

该方程组的向量形式为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}x_2=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$，可记为 $\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2=\mathbf{b}$

其中 $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$.

$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 分别是 x_1,x_2 的系数构成的列向量，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 也是 $\mathbf{A}$ 的列向量。

4. 由方程组的向量形式可知，

方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{b}$ 有解

$\Leftrightarrow$ 存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{b}$.

注：满足 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{b}$ 的系数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 就是方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个解。

注意，可以把 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 这样一组数叫方程组的一个解，也可以把 $[k_1,k_2,\cdots,k_n]^T$ 叫方程组的一个解。

5. 根据上面的结论，我们给出下面的定义.

定义 5-1 对于向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$ ，若存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$\mathbf{b}=k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n,$$

则称向量 $\mathbf{b}$ 是向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 的**线性组合**，或称向量 $\mathbf{b}$ 能由向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ **线性表示**.

注：（1）定义 5-1 中所讲向量组可以是列向量组，也可以是行向量组。
（2）定义 5-1 中的系数**可以全为 0，也可以不全为 0。**

例：（1）设 $\mathbf{0},\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$ 都是 n 元列向量，显然有 $\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\cdots+0\cdot\mathbf{a}_k$.

可见,当 $\mathbf{0}$ 是 n 元列向量时， $\mathbf{0}$ 可由任意的 n 元列向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$ 线性表示.

（2）向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$ 中的每个向量都可由该向量组线性表示，例如，

$\mathbf{a}_1=1\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\cdots+0\cdot\mathbf{a}_k$.

（3）设 $\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}$，显然 $\mathbf{a}=k_1\mathbf{e}_1+k_2\mathbf{e}_2+k_3\mathbf{e}_3$. 可见，

任意的三元列向量 $\mathbf{a}$ 都可由三元列向量 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 线性表示。类似地，同学们可以想一下 n 元向量的情况。

6. 由定义 5-1 及前面关于方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解的讨论可得下面的定理.

定理 5-1 （1）方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow$ 向量 $\mathbf{b}$ 能由 $\mathbf{A}$ 的列向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示.

（2）方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 向量 $\mathbf{b}$ 能由 $\mathbf{A}$ 的列向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示且表达式唯一.

注：方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{b}$ 有唯一解

$\Leftrightarrow$ 存在唯一的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{b}$.

由定理 5-1 可知，方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 是否有解，就在于向量 $\mathbf{b}$ 能否由 $\mathbf{A}$ 的列向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示，因而我们需要对向量之间的线性关系进行深入的研究。

5.1.1 向量组的线性相关性

1. 我们现在对齐次线性方程组有非零解的条件加以分析，引出向量组线性相关的概念.

齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 存在 n 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$.

2. 针对上面结论,我们给出下面的定义.

定义 5-2 对于向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$，

(1)若存在 n 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$，则称该向量组**线性相关**.

（2）若仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全为零时，才使 $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ 成立，则称该向量组**线性无关**.

注 1：关于线性无关，可以这样来想。向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 不是线性相关时，称为线性无关。不是线性相关，也就是找不到不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$. 换句话说就是，要使 $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ 成立，系数必须全为 0.

注 2：向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 是线性相关还是线性无关，取决于线性表达式 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ 成立时，其系数的取值情况：**可以不全为零还是必须全为零。**

注 3：定义 5-2 中的向量组可以是列向量组，也可以是行向量组。

注 4：一个向量组是否线性相关，反映了向量组的一种重要性质，这种性质称为向量组的线性相关性. 课后习题中会出现“讨论向量组的线性相关性”这样的标题，意思就是“讨论所给向量组是线性相关？还是线性无关？”

例：（1）对于向量组 $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$, 由于存在不全为 0 的数 $2,-1$，使得 $2\mathbf{a}_1+(-1)\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$，所以该向量组线性相关。

（2）对于向量组 $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}2\\2\\6\end{bmatrix}$，由于存在不全为 0 的数 $2,0,-1$，使得 $2\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+(-1)\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$，所以该向量组线性相关。

（3）对于向量组 $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, 要使 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$ 成立，需 $k_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,

即 $\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_1-k_2=0\end{cases}$. 通过解方程组可知，只有 k_1,k_2 都为 0 时，$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$ 才成立，所以该向量组线性无关。

3.根据齐次线性方程组有非零解的讨论及定义 5-2 可给出下面的定理.

定理 5-2 设 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$.

（1）向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关（无关）$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=0$ 有非零解（只有零解）.

（2）当 $\mathbf{A}$ 为方阵时，向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关（无关）$\Leftrightarrow$ $|\mathbf{A}|=0\ (|\mathbf{A}|\neq 0)$.

(3)可逆矩阵的列向量组一定线性无关.

证：（1） 向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在 n 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{0}$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解

向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 必须全为 0 时, $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ 才成立

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{0}$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解

（2）根据在第 3 章学过的**定理 3-5** 可知，

当 $\mathbf{A}$ 为方阵时，齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=0$ 有非零解（只有零解） $\Leftrightarrow$ $|\mathbf{A}|=0\ (|\mathbf{A}|\neq 0)$.

将定理 3-5 和刚才证明的（1）的结论结合起来，就可证明（2）的结论。

（3）当 $\mathbf{A}$ 可逆时， $|\mathbf{A}|\neq 0$，根据（2）的结论可知， $\mathbf{A}$ 的列向量组一定线性无关.

3. 注意：当所给向量组构成的矩阵为方阵时，通过行列式来讨论向量组的线性相关性是一种很重要的方法。希望同学们记住这种方法。

对于不能组成方阵的向量组，可通过后面讲的其它方法来讨论。

例 当 k 为何值时，向量组 $\mathbf{a}_1=[1,1,1]^T,\mathbf{a}_2=[0,2,5]^T,\mathbf{a}_3=[1,k,6]^T$ 线性相关?

解 由于以所给向量为列所构成的矩阵为**方阵**，所以可通过**行列式**来讨论该向量组的线性相关性。

由 $|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&k\\1&5&6\end{vmatrix}=15-5k=0$，求得 k=3. 所以，当 k=3 时向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性相关.

6. **例** 证明：单个向量 $\mathbf{a}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

单个向量 $\mathbf{a}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$.

注：这里讲的是一个特殊向量组的情况，这个向量组里边只含单个向量 $\mathbf{a}$.

证 我们仅对线性相关的情况加以证明.

充分性 由 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 知，存在不为零的数 1，使得 $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$，所以 $\mathbf{a}$ 线性相关.

必要性 由 $\mathbf{a}$ 线性相关知，存在不为零的数 k，使得 $k\mathbf{a}=\mathbf{0}$.因为 $k\neq 0$, 所以 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

例 证明：含有零向量的向量组一定线性相关. **（注：要记住这个结论）**

证明 不妨设向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 中有一个向量 $\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$,则有

$$1\mathbf{a}_1+0\mathbf{a}_2+\cdots+0\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

因为上式中的系数不全为零，所以该向量组线性相关.

例 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 元列向量，$\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 而 $\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证：（利用线性无关的定义来证）

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}+k_3\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ (1)

用 $\mathbf{A}^2$ 乘（1）式，得 $k_1\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}+k_2\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}+k_3\mathbf{A}^4\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ (2)

由 $\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 可得，$\mathbf{A}^4\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. （2）式成为 $k_1\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

因为 $\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, 所以 $k_1=0$.

这时，（1）式变成 $k_2\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}+k_3\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ (3)

因为 $\mathbf{A}^3\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，所以**用 $\mathbf{A}$ 乘（3）式**，可得 $k_2\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

由 $\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 可知，$k_2=0$.

因为已证明 $k_1=0,k_2=0$, 所以（1）式变成 $k_3\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

由 $\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 又可知，$k_3=0$.

综合上面的证明可知，要使（1）式成立，k_1,k_2,k_3 必须都为 0，

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

注 该例题的证明思路是：先设 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}+k_3\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ ，然后通过已知条件证明该式成立时，系数 k_1,k_2,k_3 必须都为 0.

这种证明方法经常会用到的，希望同学们好好掌握。

7. **定理 5-3** 向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n(n\geq 2)$ 线性相关的充要条件是该向量组中至少有一个向量可由其余的 $n-1$ 个向量线性表示.

注：定理 5-3 使用频率特别高，希望同学们重视。

证 充分性 不妨设 $\mathbf{a}_n$ 可由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1}$ 线性表示，并设 $\mathbf{a}_n=k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_{n-1}\mathbf{a}_{n-1}$，

则有 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_{n-1}\mathbf{a}_{n-1}+(-1)\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$.

因为上式不全为零，所以向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关.

必要性 因为向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关，所以存在不全为零的数 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 使得

$$l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+\cdots+l_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

不妨设 $l_1\neq 0$,则有 $\mathbf{a}_1=(-\frac{l_2}{l_1})\mathbf{a}_2+\cdots+(-\frac{l_n}{l_1})\mathbf{a}_n$， $\mathbf{a}_1$ 可由其余 $n-1$ 个向量线性表示.证毕.

注：要学着使用“不妨设”的表达。

对于充分性的证明，知道该向量组中至少有一个向量可由其余的 $n-1$ 个向量线性表示，但是并不知道具体是哪一个向量，所以要采用不妨设的方式来表达。

对于必要性的证明，知道 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 不全为 0，但是不知道具体是哪一个不为 0，所以也要采用不妨设的方式来表达。

8. 用反证法可证明：向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性无关的充要条件是该向量组中任何一个向量都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

定理 5-3 揭示了线性相关与线性表示之间的关系，从上面讨论中可以看到，线性相关的向量之间有线性表示关系，线性无关的向量之间没有线性表示关系，这正反映了线性相关的含义.

9. 由定理 5-3 可知：

两个向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中一个可由另一个线性表示 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{a}_2$ 之间成倍数关系.

10. **定理 5-4** 若向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性无关，而向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$ 线性相关，则向量 $\mathbf{b}$ 可由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示且表达式唯一.

注：（1）定理 5-4 与极大无关组有关系，做题时也经常会用到定理 5-4，希望同学们重视。

（2）向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$ 线性相关的原因是由于往 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 中添加向量 $\mathbf{b}$ 引起来的，所以结论也与 $\mathbf{b}$ 有关系。

证 由向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}$ 线性相关可知，存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n,k$，使得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n+k\mathbf{b}=\mathbf{0} \qquad ①$$

我们用反证法来证明 $k\neq 0$.（注：$k\neq 0$ 是需要证出来的,不是随便设出来的）

设 k=0, 则 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 不全为零，且 $k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$.（注：该式是由 ①式得来的）

根据刚才的讨论可知，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 是线性相关的，与向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性无关矛盾，故 $k\neq 0$.

由①式可得 $\mathbf{b}=(-\frac{k_1}{k})\mathbf{a}_1+(-\frac{k_2}{k})\mathbf{a}_2+\cdots+(-\frac{k_n}{k})\mathbf{a}_n$，

即向量 $\mathbf{b}$ 可由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性表示.

下面证明表达式唯一. 设

$$\mathbf{b}=l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+\cdots+l_n\mathbf{a}_n,$$

$$\mathbf{b}=s_1\mathbf{a}_1+s_2\mathbf{a}_2+\cdots+s_n\mathbf{a}_n,$$

将这两个式子相减，得

$$(l_1-s_1)\mathbf{a}_1+(l_2-s_2)\mathbf{a}_2+\cdots+(l_n-s_n)\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

因为向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性无关，所以上式成立时系数必须全为 0，

$$l_i-s_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)，\quad 即\ l_i=s_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

故向量 $\mathbf{b}$ 可由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 唯一地线性表示.

11. 当两个向量组之间有某种联系时，其线性相关性也有一定的联系。

定理 5-5 设向量组 I 为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$，向量组 II 为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r,\mathbf{a}_{r+1},\cdots,\mathbf{a}_n$.

（1） 若向量组 I 线性相关，则向量组 II 也线性相关；
（2） 若向量组 II 线性无关，则向量组 I 也线性无关。

证明 [(2)是(1)的逆否命题，只需证(1)]

由向量组 I 线性相关可知，存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$,使得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_r\mathbf{a}_r=\mathbf{0}.$$

进一步，可得

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_r\mathbf{a}_r+0\mathbf{a}_{r+1}+\cdots+0\mathbf{a}_n=\mathbf{0}。$$

由于上式中的系数仍然不全为零，所以向量组 II 也线性相关.证毕.

注：（1）定理 5-5 的意思是：线性相关的向量组中添加向量后，所得的向量组仍然线性相关；线性无关的向量组中的一部分向量还是线性无关的。

（2）向量组 I 可看成向量组 II 的一部分，定理 5-5 的结论也可叙述为“部分相关，整体也相关；整体无关，部分也无关”.

12. **定理 5-6** 设 r 元列向量组 I 为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$；$s$ 元列向量组 II 为 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$；$r+s$ 元列向量组 III 为 $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\cdots,\mathbf{c}_m$，其中，$\mathbf{c}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i\\ \mathbf{b}_i\end{bmatrix}$ $(i=1,2,\cdots,m)$.

（1）若向量组 I 和 II 中有一个线性无关，则向量组III也线性无关.
（2）若向量组III线性相关，则向量组 I 和 II 都线性相关.

注 这里提到的向量都是列向量，三个向量组之间的关系是：将向量组 I 和向量组 II 上下拼接在一起可得向量组 III；反过来，将向量组 III 去掉下半截可得向量组 I，将向量组 III 去掉上半截可得向量组 II。

证明　[(2)是(1)的逆否命题，故只需证(1)]

不妨设向量组 I 线性无关,另设

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_m\mathbf{c}_m = \mathbf{0}_{r+s}\,, \qquad ①$$

即 $x_1\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{b}_1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}\mathbf{a}_2\\ \mathbf{b}_2\end{bmatrix} + \cdots + x_m\begin{bmatrix}\mathbf{a}_m\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}_r\\ \mathbf{0}_s\end{bmatrix}$,

由上式可得 $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}_r$.

由于向量组 I 线性无关，所以上式成立时 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 必须全为零. 这说明只有 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 全为零时①式才成立，由线性无关的定义可知，向量组 III 线性无关.证毕

为了方便记忆，定理 5-6 可概述为“**线性无关的向量组**在相同位置**添加分量**后仍然线性无关，**线性相关的向量组**在相同位置**删去分量**后仍然线性相关”.

例　（1）由于 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 不成倍数关系，所以向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 线性无关。

添加分量后所得向量 $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$ 也不成倍数关系，所以向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 也线性无关。

同学们可以自己来试一下，只要是同时在同样的位置添加分量，添加几个都行，添加什么数也都行，所得向量组也都线性无关。

（2）因为 $2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} = \mathbf{0}$，所以向量组 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$ 线性相关。

去掉第 2 个分量后得到 $2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = \mathbf{0}$，所以向量组 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ 也线性相关。

注意：对于线性相关的向量组，只要是同时在同样的位置去掉分量，去掉几个都行，所得向量组也还线性相关。

请同学们注意，学习数学需要多动脑子，用心去体会，好好找感觉，才能真正学明白的。

5.1.2　向量组的秩和极大无关组

1. 方程组与其增广矩阵是一一对应的，增广矩阵的每个行向量对应于方程组中的一个方程，我们可以将向量组的线性表示、线性相关和线性无关的概念推广到方程组上. 当增广矩阵的行向量组线性相关时，其中至少有一个行向量可由其余的行向量线性表示，这意味着方程组中至少有一个方程可由其余的方程线性表示，通过消元法可将这个方程消掉，也可以说这个方程是“多余”的. 我们研究方程组时，希望去掉“多余”的方程，只保留“最大个数”的线性无关的那些方程，对于增广矩阵就是要保留“最大个数”的线性无关的行向量.

这是为什么要研究极大无关组的其中一个原因，极大无关组还有其它重要应用，在后面会慢慢学到。

2. **定义 5-3** 在向量组V中，若有含r个向量的子向量组线性无关，并且V中任何含$r+1$个向量的子向量组（当V中的向量多于r个时）都线性相关，则把r叫做**向量组V的秩**.

若向量组V的秩为r，则V中含r个向量的线性无关的子向量组叫做**V的极大线性无关组（简称极大无关组，或称最大无关组）**.

注 1 如果向量组V中只含r个向量，并且这r个向量是线性无关的，则向量组V的秩就是r.

当向量组V中所含向量的个数超过r个时，向量组V的秩是r需满足：V中有含r个向量的子向量组线性无关，并且V中任何含$r+1$个向量的子向量组都线性相关。

注 2 向量组V的秩反映的是向量组V中所含线性无关向量的最大个数。也可以说，向量组V的秩反映的是V中最多能找出多少个向量放在一起看是线性无关的。

3. 由定义 5-3 可知，

向量组V **线性无关** $\Leftrightarrow$ 向量组V的**秩等于其所含向量的个数.**

向量组V **线性相关** $\Leftrightarrow$ 向量组V的**秩小于其所含向量的个数**.

请同学们注意：这个结论是很重要的。根据这一结论，只要求出向量组的秩，马上就可知道该向量组的线性相关性.

4. 只含零向量的向量组的秩规定为零，它没有极大无关组.

对于含非零向量的向量组，它的秩存在且唯一；它的极大无关组存在，但一般不唯一.

5. **例** 求向量组$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix},\mathbf{a}_4=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$的秩和一个极大无关组.

注：由于极大无关组一般不唯一，所以通常只要求求出其中的一个极大无关组就可以了。

解 由于$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$不成倍数关系，所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性无关。

【 注意：找到两个向量线性无关以后，为了求出所给向量组的秩，下一步需要看一看能否找到含三个向量的子向量组线性无关。】

含三个向量的子向量组总共有四个：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$； $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$； $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$； $\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$.

对于上面这四个子向量组，可通过相关、无关的定义来讨论，也可通过定理 5-3 来讨论，还可通过行列式来讨论。我们下面通过线性相关的定义来讨论。

通过观察可得：$\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$，$2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_4=\mathbf{0}$，$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3+0\cdot\mathbf{a}_4=\mathbf{0}$， $\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4=\mathbf{0}$

根据线性相关的定义可知，所给向量组中的任三个向量都是线性相关的，所以所给向量组的秩为 2， $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$是所给向量组的一个极大无关组。

注：一般来说，根据定义 5-3 来求向量组的秩和极大无关组都是比较麻烦的，我们将在后面给出一种简便的求法.

6. 由定义 5-3 及定理 5-4 可得下面的定理.

定理 5-7 向量组V中的每个向量都可由其极大无关组唯一地线性表示.

证 设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$是向量组$V$的极大无关组。

首先，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$中的每个向量一定能由这个极大无关组唯一地线性表示。例如，

$\mathbf{a}_1=1\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\cdots+0\cdot\mathbf{a}_r$. 按照定理 5-4 的证明还可知，这个表达式一定是唯一的。

因为$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$是向量组$V$的极大无关组，所以根据定义 5-3 可知，$V$中任意$r+1$个向量都是线性相关的。

于是，对于V中任一个不在极大无关组中的向量$\mathbf{b}$来说，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r,\mathbf{b}$都是线性相关的。根据定理 5-4 可知，$\mathbf{b}$可由极大无关组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$唯一地线性表示。证毕

注：定理 5-7 反映了极大无关组的一个非常重要的特性，这个特性给我们的感觉是：极大无关组可看成是从向量组V中选出来的“一组不可或缺的代表”，“这组代表”能把向量组V中的所有向量唯一地表示出来。

根据定理 5-7，当一个方程组有无穷多个解时，找到该方程组的所有解向量所构成集合的一个极大无关组，就可用它将该方程组的所有解表示出来，这样我们就找到了表达方程组的解的方法.

7. 向量组的线性相关、线性无关、秩和极大无关组的概念对于行向量组和列向量组都适合，可重点掌握列向量组的情况，对于行向量组可仿照列向量组的情况进行讨论，也可通过转置化为列向量组来讨论.