1.解：$\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]=\begin{bmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda^2-2\lambda & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda & -\lambda^2-2\lambda+3\end{bmatrix}$$

当$\lambda\neq 0$且$-\lambda^2-3\lambda\neq 0$，即$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时，

$r\left(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\right)=r\left(\mathbf{A}\right)=3,$ 该方程组有唯一解；

当$\lambda=0$时，$\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$r\left(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\right)=2, r\left(\mathbf{A}\right)=1, r\left(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\right)\neq r\left(\mathbf{A}\right)$，该方程组无解；

当$\lambda=-3$时，$\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$r\left(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\right)=r\left(\mathbf{A}\right)=2<3,$ 该方程组有无穷多个解。

2.解：$\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&a-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&a-3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-2\end{bmatrix}$$

要使该方程组有解，需$r\left(\left[\mathbf{A},\mathbf{b}\right]\right)=r\left(\mathbf{A}\right),$ 所以$a=0, b=2$

3.解：因为存在三阶矩阵$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,使$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，所以方程组$\boldsymbol{Ax}=0$有非零解。

$$\left|\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1=0,\quad \lambda=1$$

$\left|\boldsymbol{B}\right|$一定为0.

因为：若$\left|\boldsymbol{B}\right|\neq 0$,则$\boldsymbol{B}$可逆. 由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$消去$\boldsymbol{B}$，可得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，这与$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$矛盾。

4. 答案为：ACD

5.解：齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系所含向量的个数为：$n-r(\boldsymbol{A})$,

n为$\boldsymbol{A}$的列数（即未知数的个数）。

在该题中，因为基础解系含两个向量，所以$r(\boldsymbol{A})=1, k=3.$

6.选D

7.选ABD