第 十 九 讲

二阶线性偏微分方程的分类

北京大学 物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 二阶线性偏微分方程
   - 标准形式
   - 自变量变换下的偏微分方程
2. 二阶线性偏微分方程的分类
   - 一个定理
   - 双曲型方程
   - 椭圆型方程
   - 抛物型方程

讲授要点

1. 二阶线性偏微分方程
   - 标准形式
   - 自变量变换下的偏微分方程
2. 二阶线性偏微分方程的分类
   - 一个定理
   - 双曲型方程
   - 椭圆型方程
   - 抛物型方程

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，第22章
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§7.3
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§9.2

本课程总共讨论了三种类型偏微分方程定解问题的解：

- 波动方程
- 热传导方程
- 稳定问题，如Laplace方程，Poisson方程，Helmholtz方程等

本课程总共讨论了三种类型偏微分方程定解问题的解：

- 波动方程
- 热传导方程
- 稳定问题，如Laplace方程，Poisson方程，Helmholtz方程等

本课程总共讨论了三种类型偏微分方程定解问题的解：

- 波动方程
- 热传导方程
- 稳定问题，如Laplace方程，Poisson方程，Helmholtz方程等

本课程总共讨论了三种类型偏微分方程定解问题的解：

- 波动方程
- 热传导方程
- 稳定问题，如Laplace方程，Poisson方程，Helmholtz方程等

- 这三类方程，描写了不同的物理过程，它们的解也都表现出各自不同的特点
- 在数学上，这三类方程也分属双曲型、抛物型和椭圆型三类
- 二阶线性偏微分方程，是否就只有这三种类型？

- 这三类方程，描写了不同的物理过程，它们的解也都表现出各自不同的特点
- 在数学上，这三类方程也分属双曲型、抛物型和椭圆型三类
- 二阶线性偏微分方程，是否就只有这三种类型？

- 这三类方程，描写了不同的物理过程，它们的解也都表现出各自不同的特点
- 在数学上，这三类方程也分属双曲型、抛物型和椭圆型三类
- 二阶线性偏微分方程，是否就只有这三种类型？

讲授要点

1. 二阶线性偏微分方程
   - 标准形式
   - 自变量变换下的偏微分方程
2. 二阶线性偏微分方程的分类
   - 一个定理
   - 双曲型方程
   - 椭圆型方程
   - 抛物型方程

- 以两个自变量的二阶线性偏微分方程为例
- 对于更多个自变量的情形，问题要复杂一些，但讨论的基本方法相同

- 以两个自变量的二阶线性偏微分方程为例
- 对于更多个自变量的情形，问题要复杂一些，但讨论的基本方法相同

标准形式

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0$$

- a, b, c, d, e, f和g是x, y的已知函数
- 通常假设它们连续可微
- 函数a, b, c中，至少有一个不恒为0，否则就不成其为二阶偏微分方程

标准形式

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0$$

- a, b, c, d, e, f和g是x, y的已知函数
- 通常假设它们连续可微
- 函数a, b, c中，至少有一个不恒为0，否则就不成其为二阶偏微分方程

标准形式

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=0$$

- a, b, c, d, e, f和g是x, y的已知函数
- 通常假设它们连续可微
- 函数a, b, c中，至少有一个不恒为0，否则就不成其为二阶偏微 分方程

标准形式

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=0$$

- a, b, c, d, e, f和g是x, y的已知函数
- 通常假设它们连续可微
- 函数a, b, c中，至少有一个不恒为0，否则就不成其为二阶偏微 分方程

讲授要点

1. 二阶线性偏微分方程
   - 标准形式
   - 自变量变换下的偏微分方程
2. 二阶线性偏微分方程的分类
   - 一个定理
   - 双曲型方程
   - 椭圆型方程
   - 抛物型方程

只考虑a和(或)c不恒为0的情形

不妨设$a \neq 0$

作变换

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

为保证ξ和η仍是独立变量，这一组变换必须满足

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

若$a = c = 0$，则已属于下面要导出的情形之一

只考虑a和(或)c不恒为0的情形

不妨设$a \neq 0$

作变换

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

为保证ξ和η仍是独立变量，这一组变换必须满足

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

若$a = c = 0$，则已属于下面要导出的情形之一

只考虑a和(或)c不恒为0的情形

不妨设$a \neq 0$

作变换

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

为保证ξ和η仍是独立变量，这一组变换必须满足

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

若$a = c = 0$，则已属于下面要导出的情形之一

只考虑a和(或)c不恒为0的情形

不妨设$a \neq 0$

作变换

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

为保证ξ和η仍是独立变量，这一组变换必须满足

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

若$a = c = 0$，则已属于下面要导出的情形之一

只考虑a和(或)c不恒为0的情形

不妨设$a \neq 0$

作变换

$$\xi = \phi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

为保证ξ和η仍是独立变量，这一组变换必须满足

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$$

若$a = c = 0$，则已属于下面要导出的情形之一

在这一组变换下，有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

原方程变为 $$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu+G=0$$

$$A=a\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2$$

$$B=a\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+b\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+c\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$C=a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2$$

原方程变为 $$A\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+D\frac{\partial u}{\partial\xi}+E\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu+G=0$$

$$A=a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2$$

$$B=a\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+b\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+c\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$C=a\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2$$

……

原方程变为 $$A\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+D\frac{\partial u}{\partial\xi}+E\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu+G=0$$

$$A=a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2$$

$$B=a\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+b\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+c\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$C=a\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2$$

······

原方程变为
$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$+D\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu+G=0$$

$$A=a\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2$$
$$B=a\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+b\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+c\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$C=a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2$$

$\cdots\cdots$

原方程变为 $$A\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$
$$+D\frac{\partial u}{\partial\xi}+E\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu+G=0$$

$$A=a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2$$
$$B=a\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+b\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+c\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$
$$C=a\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2$$
$\cdots\cdots$

原方程变为 $$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$+D\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu+G=0$$

$$B^2-AC=\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2(b^2-ac)$$
$$=\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right|^2(b^2-ac)$$

原方程变为
$$A\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+D\frac{\partial u}{\partial\xi}+E\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu+G=0$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$$

$$\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\equiv D\frac{\partial u}{\partial\xi}+E\frac{\partial u}{\partial\eta}+Fu+G$$

原方程变为 $$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu+G=0$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$$

$$\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\equiv D\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu+G$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$$

希望适当选择变换，使得A, B, C中有一个或几个为0，达到使方程简化的目的

讲授要点

1. 二阶线性偏微分方程
   - 标准形式
   - 自变量变换下的偏微分方程
2. 二阶线性偏微分方程的分类
   - 一个定理
   - 双曲型方程
   - 椭圆型方程
   - 抛物型方程

定理 （证明从略）

如果$\phi(x, y) = C$是方程

$$a\left(\mathrm{d}y\right)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c\left(\mathrm{d}x\right)^2 = 0$$

的一般积分，则$\xi = \phi(x, y)$是方程

$$a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

的一个特解

这个定理告诉我们，可以选择变换$\xi = \phi(x, y)$使$A = 0$，或者选择变换$\eta = \psi(x, y)$使$C = 0$

定理 （证明从略）

如果$\phi(x,y)=C$是方程

$$a\left(\mathrm{d}y\right)^2-2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x+c\left(\mathrm{d}x\right)^2=0$$

的一般积分，则$\xi=\phi(x,y)$是方程

$$a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2=0$$

的一个特解

这个定理告诉我们，可以选择变换$\xi=\phi(x,y)$使$A=0$，或者选择变换$\eta=\psi(x,y)$使$C=0$

定理 （证明从略）

如果$\phi(x,y)=C$是方程

$$a\big(\mathrm{d}y\big)^2-2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x+c\big(\mathrm{d}x\big)^2=0$$

的一般积分，则$\xi=\phi(x,y)$是方程

$$a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2=0$$

的一个特解

这个定理告诉我们，可以选择变换$\xi=\phi(x,y)$使$A=0$，或者选择变换$\eta=\psi(x,y)$使$C=0$

$$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

- $b^2 - ac > 0$：有两个实函数解——称为特征线
- $b^2 - ac < 0$：有两个共轭复函数解
- $b^2 - ac = 0$：只有一个解

$$a\left(\mathrm{d}y\right)^2 - 2b\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + c\left(\mathrm{d}x\right)^2 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

- $b^2 - ac > 0$：有两个实函数解——称为特征线
- $b^2 - ac < 0$：有两个共轭复函数解
- $b^2 - ac = 0$：只有一个解

$$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

- $b^2 - ac > 0$：有两个实函数解——称为特征线
- $b^2 - ac < 0$：有两个共轭复函数解
- $b^2 - ac = 0$：只有一个解

$$a\big(\mathrm{d}y\big)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c\big(\mathrm{d}x\big)^2 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

- $b^2 - ac > 0$: 有两个实函数解——称为特征线
- $b^2 - ac < 0$: 有两个共轭复函数解
- $b^2 - ac = 0$: 只有一个解

$$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

- $b^2 - ac > 0$：有两个实函数解——称为特征线
- $b^2 - ac < 0$：有两个共轭复函数解
- $b^2 - ac = 0$：只有一个解

讲授要点

1. 二阶线性偏微分方程
   - 标准形式
   - 自变量变换下的偏微分方程
2. 二阶线性偏微分方程的分类
   - 一个定理
   - 双曲型方程
   - 椭圆型方程
   - 抛物型方程

$b^2 - ac > 0$

- 从方程$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$可以求得两个实函数解

$$\phi(x,\, y) = C_1 \qquad \text{及} \qquad \psi(x,\, y) = C_2$$

即偏微分方程有两条实的特征线

- $\xi = \phi(x,\, y) \quad \Rightarrow \quad A = 0$

$\eta = \psi(x,\, y) \quad \Rightarrow \quad C = 0$

- B一定不为0

$b^2 - ac > 0$

- 从方程$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$可以求得两个实函数解

$$\phi(x,\, y) = C_1 \qquad \text{及} \qquad \psi(x,\, y) = C_2$$

即偏微分方程有两条实的特征线

- $\xi = \phi(x,\, y) \quad \Rightarrow \quad A = 0$

$\eta = \psi(x,\, y) \quad \Rightarrow \quad C = 0$

- B一定不为0

$b^2 - ac > 0$

- 从方程$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$可以求得两个实函数解

$$\phi(x, y) = C_1 \qquad 及 \qquad \psi(x, y) = C_2$$

  即偏微分方程有两条实的特征线

- $\xi = \phi(x, y) \quad \Rightarrow \quad A = 0$

  $\eta = \psi(x, y) \quad \Rightarrow \quad C = 0$

- B一定不为0

$b^2 - ac > 0$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

$$\xi = \phi(x, y)$$
$$\eta = \psi(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

$b^2 - ac > 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0$$

$$\rho = \xi + \eta$$
$$\sigma = \xi - \eta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2} + \Phi_2\left(\rho, \sigma, u, \frac{\partial u}{\partial\rho}, \frac{\partial u}{\partial\sigma}\right) = 0$$

双曲型方程

讲授要点

1. 二阶线性偏微分方程
   - 标准形式
   - 自变量变换下的偏微分方程
2. 二阶线性偏微分方程的分类
   - 一个定理
   - 双曲型方程
   - 椭圆型方程
   - 抛物型方程

$b^2 - ac < 0$

- 从方程$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$可以求得两个共轭复函数解

$$\phi(x, y) = C_1 \qquad 及 \qquad \psi(x, y) = C_2$$

- $\xi = \phi(x, y) \quad \Rightarrow \quad A = 0$

  $\eta = \psi(x, y) \quad \Rightarrow \quad C = 0$

- B一定不为0

$b^2 - ac < 0$

- 从方程$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$可以求得两个共轭复函数解

$$\phi(x, y) = C_1 \qquad 及 \qquad \psi(x, y) = C_2$$

- $\xi = \phi(x, y) \quad \Rightarrow \quad A = 0$

  $\eta = \psi(x, y) \quad \Rightarrow \quad C = 0$

- B一定不为0

$b^2 - ac < 0$

- 从方程$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$可以求得两个共轭复函数解

$$\phi(x, y) = C_1 \qquad 及 \qquad \psi(x, y) = C_2$$

- $\xi = \phi(x, y) \quad \Rightarrow \quad A = 0$

  $\eta = \psi(x, y) \quad \Rightarrow \quad C = 0$

- B一定不为0

$b^2 - ac < 0$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

$$\xi = \phi(x, y)$$
$$\eta = \psi(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

$b^2 - ac < 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \Phi_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

$$\rho = \xi + \eta$$
$$\sigma = \mathrm{i}(\xi - \eta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2} + \Phi_4\left(\rho, \sigma, u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \sigma}\right) = 0$$

椭圆型方程

讲授要点

1. 二阶线性偏微分方程
   - 标准形式
   - 自变量变换下的偏微分方程
2. 二阶线性偏微分方程的分类
   - 一个定理
   - 双曲型方程
   - 椭圆型方程
   - 抛物型方程

$b^2 - ac = 0$

- 从方程$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$只能求得一个解$\phi(x, y) = C$
- $\xi = \phi(x, y) \quad \Rightarrow \quad A = 0$
- B一定为0
- 可以任取另一个变换，$\eta = \psi(x, y)$， 只要它和$\xi = \phi(x, y)$彼此独立即可

$b^2 - ac = 0$

- ☞ 从方程$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$只能求得一个解$\phi(x, y) = C$
- ☞ $\xi = \phi(x, y) \quad \Rightarrow \quad A = 0$
- ☞ B一定为0
- ☞ 可以任取另一个变换，$\eta = \psi(x, y)$， 只要它和$\xi = \phi(x, y)$彼此独立即可

$b^2 - ac = 0$

- 从方程$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$只能求得一个解$\phi(x, y) = C$
- $\xi = \phi(x, y) \quad \Rightarrow \quad A = 0$
- B一定为0
- 可以任取另一个变换，$\eta = \psi(x, y)$，只要它和$\xi = \phi(x, y)$彼此独立即可

$b^2 - ac = 0$

- 从方程$a(\mathrm{d}y)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c(\mathrm{d}x)^2 = 0$只能求得一个解$\phi(x, y) = C$
- $\xi = \phi(x, y) \quad \Rightarrow \quad A = 0$
- B一定为0
- 可以任取另一个变换，$\eta = \psi(x, y)$， 只要它和$\xi = \phi(x, y)$彼此独立即可

$b^2 - ac = 0$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

$$\xi = \phi(x, y)$$
$$\eta = \psi(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi_5\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

抛物型方程

结论

☞ 若a, b, c为常数，则偏微分方程一定属于上述三种类型之一

☞ 若a, b, c不为常数，则在(x, y)平面上的一定区域内，偏微分方程属于上述三种类型之一

结论

- ☞ 若a, b, c为常数，则偏微分方程一定属于上述三种类型之一

- ☞ 若a, b, c不为常数，则在(x, y)平面上的一定区域内， 偏微分方程属于上述三种类型之一