第六章 多元函数微分学及其应用

DIFFERENTIAL CALCULUS OF MULTIVARIABLE FUNCTIONS AND ITS APPLICATIONS

导言

上册中我们讨论的函数都只有一个自变量,这种函数叫做一元函数,但在很多实际问题中往往牵涉到多方面的因素。例如，在经济理论中,一个商品的供给和需求往往不仅取决于商品的价格，而且也与其他相关的商品的价格、时间和有关的其他因素有着很大的关系。又如利润并非取决于一种商品的产出，也取决于几种商品的产出水平和几种投入的组合。这种关系反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的情形.这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题.本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分法及其应用.讨论中我们以二元函数为主,因为从一元函数到二元函数会产生新的问题,而从二元函数到二元以上的多元函数只有形式和技巧上的差别，并无本质的不同

6.1 多元函数的基本概念

6.1.1 n 维点集

空间直角坐标系的建立，使空间中的点及向量与一个三元有序数组(x,y,z)形成一一对应，可以赋予三元有序数组之间的加法、数乘等运算。我们把这种有序实数组的全体称为**三维空间**，记做$\boldsymbol{R}^3$并称这些数组为$\boldsymbol{R}^3$中的**三维点**。

一般地，按照上面作法，对n元有序数组之间同样赋予加法、数乘等运算由n元有序数组的全体所组成的集合称为 ***n* 为空间**，记做$\boldsymbol{R}^n$，并称每一个 $\boldsymbol{n}$ 元数组为$\boldsymbol{R}^n$中一个 ***n* 维点**。

这样，全体实数构成的集合 $\boldsymbol{R}$，或数轴上一切点的集合称为**一维空间**，并记做$\boldsymbol{R}^1$；全体有序数组(x,y)构成的集合，或xOy平面上一切点的集合称为二维空间并记做$\boldsymbol{R}^2$。

在讨论一元函数时，常用R^1中的点集、区间和邻域等概念描述变量的变化范围，在讨论二元函数有关概念时，则需用到平面点集与区域等概念。我们先介绍平面点集与区域的基本知识，然后推广到一般的R^n中。

1．平面点集

当在平面上建立了一个直角坐标系后，平面上的点P与有序二元实数组（x，y）之间就建立了一一对应。于是，我们常将有序实数组（x，y）与平面上的点P视作是等同的，这种建立了坐标系的平面称为坐标平面。二元有序实数组(x,y)的全体，即

$\boldsymbol{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in R\}$就表示坐标平面。

坐标平面上具有某种条件的点的集合，称为平面点集，记作

$$E = \{(x,y) \mid (x,y)\text{ 具有某种条件}\}$$

例如，平面上以坐标原点为中心、r 为半径的圆内（图 6－1）所有点的集合是

$$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}$$

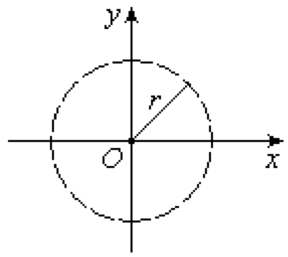


图 6－1

如果我们以点 P 表示 (x,y), $|OP|$ 表示点 P 到原点 O 的距离，那么集合 C 也可表成

$$C = \{P \mid |OP| < r\}$$

再如，集合 $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$ 表示一个矩形上点的全体，这一集合通常记做 $D = [a,b] \times [c,d]$。

现在我们来引入 $\boldsymbol{R}^2$ 中邻域的概念。

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数，与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ **邻域**，记作 $U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}.\ \text{或}\quad U(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

若点 P_o 不包括在该邻域内，则称该领域为点 P_o 的**去心 δ 邻域**，记作 $\overset{o}{U}(P_0,\delta)$，即

$$\overset{o}{U}(P_0,\delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}.$$

或 $\overset{o}{U}(P_0,\delta) = \{(x,y) \mid 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$

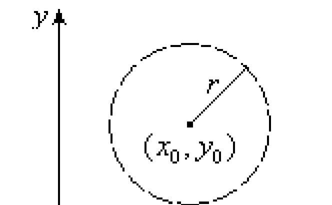


图 6－2

在几何上 $U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心，$\delta > 0$ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体（图 6－2）。

如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，用 $\overset{0}{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某个去心邻域。

邻域在数轴上为开区间，在平面内为开圆，在空间中为开球。

下面种用邻域来描述点和点集之间的关系。

任意一点 $P \in \boldsymbol{R}^2$ 与任意一个点集 $E \subset \boldsymbol{R}^2$ 之间必有以下三种关系中的一种：

（1）如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的**内点**（如图 6－3 中，P_1 为 E 的内点）；

（2）如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\Phi$，则称 P 为 E 的**外点**（如图 6－3 中，P_2 为 E 的外点）。

(3) 如果点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的**边界点**（如图 6－3 中，P_3 为 E 的边界点）。

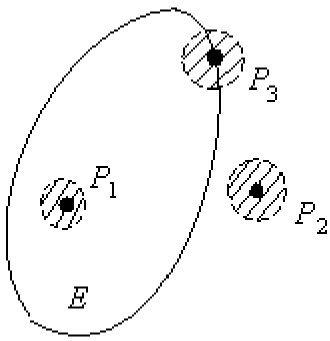


图 6－3

E 的边界点的全体，称为 E 为**边界**，记作 ∂E 。

E 的内点必属于 E ； E 得外点必定不属于 E ；而Ｅ的边界点可能属于Ｅ，也可能不属于Ｅ.

如果对于任意给定的 $\delta>0,$ 点 P 的去心邻域 $\overset{0}{U}(P,\delta)$ 内总有Ｅ中的点，则称 P 是Ｅ的聚点。

由聚点定义可知，点集Ｅ的聚点Ｐ本身，可以属于Ｅ，也可以不属于Ｅ。

例如，设平面点集

$$E=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2\le 2\}.$$

满足 $1<x^2+y^2<2$ 的一切点 (x,y) 都是Ｅ的内点；满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的边界点，它们都不属于Ｅ；满足 $x^2+y^2=2$ 的一切点 (x,y) 也是Ｅ的边界点，它们属于Ｅ，点集Ｅ以及它的边界 ∂E 上的一切点都是Ｅ的聚点。

聚点与维数无关，内点与维数有关，比如在一维空间 E=（a,b）内的点都是 E 的内点，也是 E 的聚点，但在二维空间中，它们只是 E 的聚点，不再是内点了。

根据点集所属点的特征，我们再来定主一些重要的平面点集。

如果点集Ｅ的点都是Ｅ的内点，则称Ｅ为**开集**。

如果点集 E 的所有聚点都属于Ｅ，则称Ｅ为**闭集**。

例如，集合 $\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<2\}$ 是开集；集合 $\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2\}$ 是闭集；而集合 $\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2\le 2\}$ 既非开集，也非闭集

如果点集 E 内的任何两点，都可以用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集。

连通的开集称为**区域**或**开区域**.

开区域连同它的边界一起所构成的点集称为**闭区域。**

对于平面点集Ｅ，如果存在某一正数 r ，使得 $E\subset U(O,r),$

其中 O 是坐标原点，则称Ｅ为**有界集**，否则称为无界集

例如，集合$\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2\}$是有界闭区域；集合$\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$是无界开区域，集合$\{(x,y)\,|\,x+y\ge 0\}$是无界闭区域。

上面我们仅在$\boldsymbol{R}^2$中给出了平面点集的一些概念，这些概念可以自然地推广到n维空间$\boldsymbol{R}^2$中。相应于平面上两点间的距离公式，对于$\boldsymbol{R}^n$中点$M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和点$N(y_1,y_2,\cdots,y_n)$规定M，N两点间的距离

$$|MN|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\,.$$

显然，$n=1,2,3$时，上述规定与数轴上、平面上及空间中两点间的距离公式一致。

在$\boldsymbol{R}^n$中规定两点间距离之后，就可使前面讨论的有关平面点集的一系列概念，方便地推广到$n(n\ge 3)$维空间中来。例如，

设$P_0\in\boldsymbol{R}^n$，δ是某一正数，则n维空间内的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|\boldsymbol{PP_0}|<\delta;\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{R^n}\}$$

就定义为$\boldsymbol{R}^n$中点P_0的δ邻域。以邻域为基础，可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点，以及开集、闭集、区域等一系列概念，这里不再赘述.

6.1.2 多元函数的定义

自然科学与工程技术的许多问题，往往与多种因素有关，反映在数学上，就是一个变量依赖于多个变量的关系。例如灼热的铸件在冷却过程中，它的温度 I 与铸件内部点的位置x,y,z和时间t，以及外界环境温度 I。空气流动的速度 v 等 6 个变量有关。因此需要研究多个变量之间的依赖关系。先看下面几个例子。

例 1　一定量的理想气体的压强p、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系$p=\dfrac{RT}{V}$，其中 R 为常数. 这里，当 V、T 在集合$\{(V,T)|V>0,T>T_0\}$内取定一对值(V，T)时，p 的对应值就随之确定.

例 2 平行四边形的面积S由它的相邻两边的长a,b与夹角θ所决定，即

$$S=ab\sin\theta\qquad(a>0,b>0,0<\theta<\pi)$$

这个关系式反映了对每一个三维点(a,b,θ)，变量S有确定的值与之对应。

例 3　沙石运输问题.

假设有体积为 $V(\text{m}^3)$的沙石用长方体形状的有底无盖且在底部装有滑行器的木箱运输，这种木箱可以反复使用（假设木箱永不损坏）。木箱的各部分造价是，箱底与两端的材料费用为 a（元/m^2），另外两个侧面的材料费用为 b（元/m^2），箱底两个滑行器与箱子同长，材料费为 c（元/m）.又不论箱子中沙石是否装满（一般情况下，最后一箱沙石不会装满），每装一箱沙石需支付费用 d（元）.

若设木箱的长、宽、高分别为 x，y，z（m），则运输沙石的总费用 u 与 x，y，z 的关系为

$$u=axy+2ayz+2bxz+2cx+\left(\left[\frac{Vd}{xyz}\right]+1\right)d$$

显然 u 依赖于 x，y，z（$x>0$，$y>0$，$z>0$），当 x，y，z 的值确定后，u 的值也随之确定。

上面 3 个例子的具体意义各不相同，但它们却有共同的性征，抽出这些共性就可得出多元函数的定义。

定义 设 D 是 n 维空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的点集，R 为实数集，如果按照某一确定的对应法则 f，对 D 内每一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，均有唯一的一个实数 $u\in R$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的 n **元函数，**它在点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处的函数值是 u，并记

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

或简记为

$$u=f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

也可记为

$$u=f(P),\ P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D.$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为**自变量**，u 称为**因变量**。D 称为**定义域**，函数值 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为**值域**记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{u\mid u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}.$$

和一元函数相仿，习惯上我们也称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 元函数。

表示 n 元函数的记号 f 也是可以任意选取的，例如也可以记为 $u=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 等.

多远函数的概念也可以使用映射的术语表述：对于 n 维空间 R^n 内的点集 D，映射 f：$D\to\boldsymbol{R}$ 就称为定义在 D 上的 n 元函数。

当$n=2$时，n元函数通常称为**二元函数**记为

$$z=f(x, y),\ (x, y)\in D\subseteq R^2$$

或

$$z=f(P),\ P\in D,$$

当$n=3$时，n元函数通常称为**三元函数**，记为$u=f(x, y, z)$，$(x, y, z)\in D\subseteq R^3$。

当n=1 时，n元函数就是一元函数。当$n\geqslant 2$时，n元函数统称为**多元函数**.

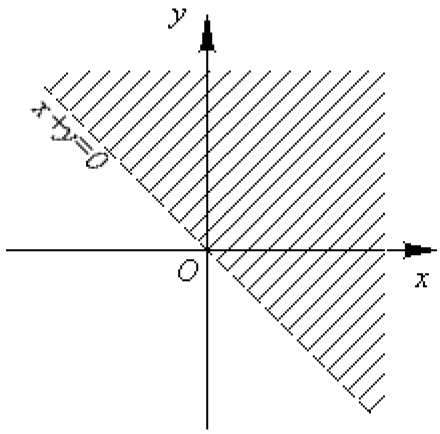


图 6－4

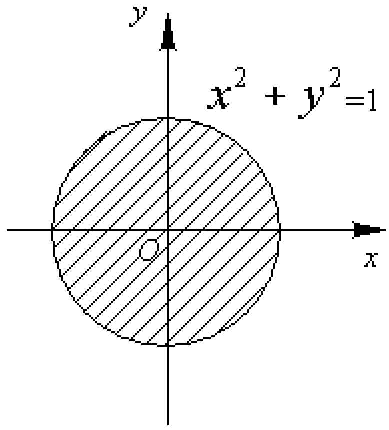


图 6－5

关于多元函数的定义域，与一元函数相类似，我们作如下约定：在讨论用算式表示的多元函数$u=f(\boldsymbol{x})$时，使算式有意义的全体变元$\boldsymbol{x}$的值所组成的点集为这个多元函数的**自然定义域**，以后对这类函数的定义域也不再特别标出.例如，函数$z=\ln(x+y)$的定义域为

$$\{(x, y)\mid x+y>0\}$$

（图 6－4）这是一个无界开区域。又如，函数$z=\arcsin(x^2+y^2)$的定义域为

$$\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

（图 6－5），这是一个有界的闭圆域。

设二元函数$z=f(x, y)$的定义域为D. 对于任意取定的点$P(x, y)\in D$, 对应的函数值为$z=f(x, y)$. 这样，在三维空间中就确定出以x为横坐标、y为纵坐标、$z=f(x, y)$为竖坐标的点$M(x, y, z)$. 当(x, y)遍取D上的一切点时，就得到一个空间点集

$$\{(x, y, z)\mid z=f(x, y), (x, y)\in D\},$$

这个点集称为二元函数$z=f(x, y)$的图形（图 6－6）

通常二元函数的图形是一张曲面

例如，由空间解析几何知道，线性函数$z=ax+by+c$的图形是一张平面，而函数$z=x^2+y^2$的图形是旋转抛物面。

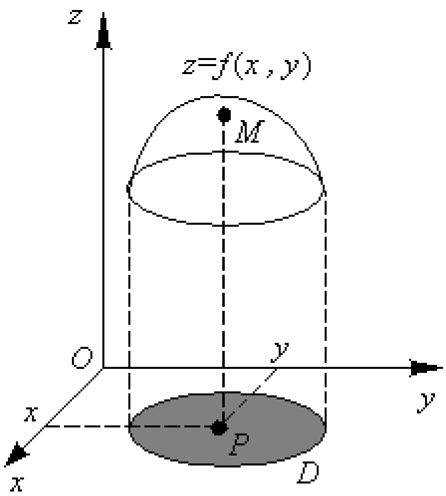


图 6－6

与一元初等函数类似，也可以定义多远初等函数，它是指能用一个算式表示的多元函数，这个算式由不同变量的一元基本初等函数与常数经过有限次四则运算和复合而得到的，例如

$\frac{x+y^2-1}{1+x^2}, \sin(2x+y), e^{x^2+y^2+z^2}$ 等，都是多元初等函数。

6.1.3 二元函数的极限

由于 $\boldsymbol{R}^n$ 中点的变化情况要比 $\boldsymbol{R}^1$ 上的变化情况复杂得多，所以从一元函数推广到二元函数，虽有一些共性之处，但也会出出现某些实质性的差异。但是从二元函数推广至三元或更多元，只是只是形式和技巧上的差别，而并无本质上的不同，因此我们重点讨论二元函数，二元以上的情况依此类推。

我们先讨论二元函数 $z=f(x, y)$ 当 $(x, y)\to(x_0, y_0)$，即 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 时的极限。这里 $P\to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0，也就是点 P 与点 P_0 间的距离趋于零，即

$$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$$

与一元函数的极限概念类似，如果在 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 的过程中，对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近于一个确定的常数值 A，我们就说 A 是函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y)\to(x_0, y_0)$ 时的极限. 下面用“$\varepsilon-\delta$”语言描述个极限概念.

定义 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当点 $P(x, y)\in D\cap\overset{o}{U}(P_0,\delta)$，即

$$0<|P_0P|<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时，都有

$$|f(P)-A|=|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y)\to(x_0, y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x, y)\to A((x, y)\to(x_0, y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad \text{或} \quad f(P)\to A\ (P\to P_0)$$

为了区别于一元函数的极限，上述二元函数的极限也称做二重极限.

例 4 设 $f(x, y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$，求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

证 函数的定义域 $D=R^2\setminus\{(0,0)\}$，点 $O(0,0)$ 为 D 的聚点.因为

$$|f(x, y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le x^2+y^2,$$

可见,对于任意给定的$\varepsilon>0$,取$\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta,$$

即 $P(x, y)\in D\cap\overset{o}{U}(O,\delta)$时,总有

$$|f(x, y)-0|<\varepsilon$$

成立，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

根据二元函数极限的定义，所谓二重极限存在，是指 $P(x, y)$以任何方式趋于$P_0\,(x_0,y_0)$时，$f(x, y)$都无限接近于 A. 这里特别注意“任何方式”，如果 $P(x, y)$以某一特殊方式，例如沿着某一条定直线或定曲线趋于$P_0\,(x_0,y_0)$时，即使$f(x, y)$无限接近于某一确定值，我们还不能由此断定函数的极限存在。但是反过来，如果当 $P(x, y)$以不同方式趋于$P_0\,(x_0,y_0)$时， $f(x, y)$趋于不同的值，那么就可以断定这函数的极限不存在. 下面用例子来说明这种情形.

考察函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然，当点 $P(x, y)$沿 x 轴趋于点(0,0)时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{x\to 0}0=0;$$

又当点 $P(x, y)$沿 y 趋于点(0,0)时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{y\to 0}0=0;$$

虽然点 $P(x, y)$以上述两种特殊方式（沿 x 轴或沿 y 轴）趋于原点时函数的极限存在并且相等，但是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$并不存在，这是因为当点 $P(x, y)$沿着直线 $y=kx$ 趋于点(0,0)时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然，当(x,y)沿不同斜率的直线趋于（0，0）时，$f(x,y)$趋于不同的值。

上面的两个例子说明了二重极限要比一元函数的极限复杂得多，其主要原因是由$(x,y)\to(x_0,y_0)$方式的任意性所导致。

由于多元函数极限定义与一元函数极限的定义在形式上和内容上完全类似，所以一元函数极限的性质，如唯一性、局部有界性、局部保号性和夹逼定理，以及运算法则都可以对应地移至到多元函数，这里不再一一赘述。

例 5 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解 这里函数 $\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x\neq0, y\in\boldsymbol{R}\}$, $P_0(0,2)$ 为 D 的聚点.

由极限运算法则，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right]=\lim_{xy\to0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to2}y=1\cdot2=2.$$

例 6 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

解 对任意的 $x\neq0, y\neq0$，有 $\left|\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq1$，故 $x\to0, y\to0$ 时，$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 为有界变量。

又因 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x=0$$

故由无穷小与有界变量之积仍为无穷小，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

例 7 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$。

解 因为 $0\leq\left|\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right|\leq\dfrac{|x^2y|}{x^2+y^2}=|x|\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\leq\dfrac{1}{2}|x|$

当 $x\to0$ 时，$\dfrac{1}{2}|x|\to0$，故由极限的夹逼准则，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$$

6.1.4 二元函数的连续性

有了多元函数极限的概念，与讨论一元函数的连续性相仿，可以讨论多元函数的连续性。

定义 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$.如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0), \qquad (1)$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ **连续**，并称 $P_0(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的连续点。

上面关于连续性的定义也可以使用增量的说法来表达，记 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$，分别称为变量 x, y 在 x_0 与 y_0 处的**增量**，相应地，称 $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ 为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的**全增量**。于是

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)。$$

与一元函数一样，可用增量的形式来描述极限（1），则有

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \Delta z = 0$$

如果函数 $f(x, y)$ 在 D 的每一点都连续，那么就称函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续，或者称 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数.二元连续函数的图形是一个无洞无缝的连锦曲面。

设函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点，如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 不连续，则称 $P_0(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的间断点. 与一元函数不同，二元函数的间断点不一定是孤立的点的集合，可能是一条或几条曲线。

例如前面讨论过的函数

$$f(x，y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

其定义域 $D = \boldsymbol{R}^2$，$O(0,0)$ 是 D 的聚点.$f(x，y)$ 当 $(x，y)\to 0$ 时的极限不存在，所以点 $O(0,0)$ 是该函数的一个间断点；又如函数

$$\sin\frac{x+y}{x-y}$$

其定义域为

$$D=\{(x, y) \mid y \neq x\}$$

$y=x$ 的点都是 D 的聚点，而 $f(x, y)$ 在 $y=x$ 在上没定义，当然 $f(x, y)$ 在 $y=x$ 上各点都不连续，所以直线 $y=x$ 上各点都是该函数的间断点。

前面我们已经指出：一元函数中关于极限的运算法则,对于多元函数仍然适用.根据多元函数的极限运算法则,可以证明**多元连续函数的和、差、积仍为连续.函数；连续函数的商在分母不为零处仍连续；多元连续函数的复合函数也是连续函数。**进一步可以得出如下结论：

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由多元初等函数的连续性，如果要求它在点 P_0 处的极限，而该点又在此函数的定义区域内，则极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{p \to p_0} f(P) = f(P_0).$$

例 8 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x+y}{xy}$.

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是初等函数，它的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\neq 0, y\neq 0\}$$

$P_0(1,2)$为 D 的内点，故存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0)\subseteq D$，而任何邻域都是区域，所以 $U(P_0)$ 是 $f(x,y)$的一个定义区域，因此

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x+y}{xy}=f(1,2)=\frac{3}{2}.$$

一般地，求 $\lim\limits_{p\to p_0}f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是初等函数，且 P_0 是 $f(P)$ 的定义域的内点，则 $f(P)$ 在点 P_0 处连续，于是

$$\lim_{p\to p_0}f(P)=f(P_0).$$

例 9 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$。

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(\sqrt{1+xy}-1)(\sqrt{1+xy}+1)}{xy(\sqrt{1+xy}+1)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{xy(\sqrt{1+xy}+1)}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{1+xy}+1}=\frac{1}{2}$$

以上运算的最后一步用到了二元函数在点(0,0)的连续性。

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上连续的多元函数，具有如下性质。

有界性与最大值最小值定理 在有界闭区域 D 上的多元连续函数，必定在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.

介值定理 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取复介于最大值和最小值之间的任何值。

一致连续性定理 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续。

该性质是说，若 $f(P)$在有界闭区域 D 上连续，则对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于 D 上的任意二点 P_1,P_2，只要当 $|P_1P_2|<\delta$ 时，都有

$$|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$$

成立。

作业 （定义域）1，4，（极限）6 奇数 7，8

6.2 偏导数与高阶导数

6.2.1 偏导数

1. 偏导数的定义

我们已经知道，一元函数的导数刻画了函数对于自变量的变化率，在研究函数性态中具有极为重要的作用。对于多元函数同样需要讨论它的变化率，由于多元函数的自变量不止一个，因而因变量与自变时的关系要比一元函数复杂得多。 在实际问题中，经常需要了解一个受多种因素制约的量，当其他因素固定不变的情况下，随一种因素变化的变化率问题。例如，由物理学知，一定量理想气体的体积 V、压强 P、与绝对温度 T 之间存在着函数关系

$$V = R\frac{T}{P}$$

其中 R 为常数。我们可以讨论在等温条件下（视 T 为常数），体积 V 对于压强 P 的变化率，也可以分析在等压过程中（视 P 为常数）体积 V 对于温度 T 的变化率。

像这样，在多元函数中只对某一个变量求变化率，而将其他变量视为常数的方法就是多元函数的求偏导数问题。下面我们以二元函数 $z = f(x,y)$ 为例，给出偏导数的概念。

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 $\triangle x$ 时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\triangle x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 处对 x 的偏导数（partial derivative），记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，\left.z'_x\right|_{(x_0,y_0)} \text{ 或 } f'_x(x_0,y_0)\text{等.}$$

称 $f(x_0+\triangle x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ **关于 x 的偏增量**。

类似地，如果固定 $x=x_0$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{2}$$

存在，则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}，\left.z'_y\right|_{(x_0,y_0)} \text{ 或 } f'_x(x_0, y_0).$$

称 $\boldsymbol{f}(x_0, y_0+\triangle \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(x_0, y_0)$ **为函数** $z = f(x, y)$ **关于** $\boldsymbol{y}$ **的偏增量。**

当函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处同时存在对 $\boldsymbol{x}$ 及对 $\boldsymbol{y}$ 的偏导数时，可简称 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可偏导。如果函数 $z=f(x, y)$在区域 D 内每一点(x, y)处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就 是(x, y)的函数，它就称为函数 $z=f(x, y)$对自变量 x 的**偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x \text{ 或 } f'_x(x, y).$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x, y)$对自变量 y 的**偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y \text{ 或 } f'_y(x, y).$$

由偏导函数的概念可知，$f(x, y)$在点（x_0, y_0）处对 x 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$，就是偏导函数 $f_x(x, y)$ 在点（x_0, y_0）处的函数值；$f_y(x_0, y_0)$ 就是偏导函数 $f_y(x, y)$ 在点（x_0, y_0）处的函数值。就像一元函数的导函数一样，以后在不至于混淆的情况下，也把偏导函数简称为偏导数。

偏导数的概念还可推广到二元以上的函数，例如三元函数 $u=f(x, y, z)$在点(x, y, z)处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

2. 偏导数的计算法

由偏导数的定义可知，对具体的二元函数 $z=f(x, y)$1 求偏导数时，并不需要引进新的方法，因为这里只有一个自变量在变动，另一个自变量是看作固定的，所以仍旧是一元函数的微分法问题.求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把 y 暂时看作常量而对 x 求导数；而求 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 时，则只要把 x 暂时看作常量对 y 求导数。

例 1 设 $z = x^2 + xy + y^3$，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 和 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}$.

解 将 y 看作常量，对 x 求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=1.$$

把 x 看作常量，对 y 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+3y^2, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=3.$$

例 2 设 $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}$，求 z_x 和 z_y.

解

$$z_x=\frac{1}{2(x^2+y^2)}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)+\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

$$z_y=\frac{1}{2(x^2+y^2)}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)+\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{x+y}{x^2+y^2}$$

例 3 设 $u=x^{\frac{z}{y}}\ (x>0,x\neq 1,y\neq 0)$，求证：$\frac{yx}{z}u_x+yu_y+zu_z=u$

证 因为将 y 和 z 视为常量，对 x 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{y}x^{\frac{z}{y}-1};$$

将 x 和 z 视为常量，对 y 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{z}{y}}\ln x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{y}\right)=-\frac{z}{y^2}x^{\frac{z}{y}}\ln x;$$

将 x 和 y 视为常量，对 z 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{z}{y}}\ln x\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{y}\right)=\frac{1}{y}x^{\frac{z}{y}}\ln x.$$

从而 $$\frac{yx}{z}u_x+yu_y+zu_z$$

$$=\frac{yx}{z}\frac{z}{y}x^{\frac{z}{y}-1}+y\cdot(-\frac{z}{y^2})x^{\frac{z}{y}}\ln x+z\frac{1}{y}x^{\frac{z}{y}}\ln x$$

$$=x^{\frac{z}{y}}=u.$$

例 4 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$;

由于所给函数关于自变量的对称性，立即可求出

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

例 5 己知一定量的理想气体的状态方程 $pV=RT$（R 为常量），推证热力学中的公式

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

证 因为 $p=\frac{RT}{V},\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$; $V=\frac{RT}{p},\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$; $T=\frac{pV}{R},\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$;

所以 $$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-1.$$

我们知道，对一元函数来说，$\frac{dy}{dx}$ 可看作函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商。而例 5 表明，偏导数的记号 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 都是整体记号，不能看作分子与分母之商。

3. 偏导数的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$在点 $M_0(x_0,y_0)$的偏导数有下述几何意义.

在 $z=f(x,y)$ 中，固定 $y=y_0$ 就是一个变量的函数。偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $z=f(x,y_0)$在 $x=x_0$ 处的导数，所以几何上偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，就是曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率(见图 6－7).同样，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

我们已经知道，如果一元函数在某点具有导数，则它在该点必定连续，但对于多元函数来说，即使在某点可偏导，也不能保证函数在该点连续。这是因为各偏导数存在只能保证点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$趋于 $f(P_0)$，但不能保证点 P 按任何方式

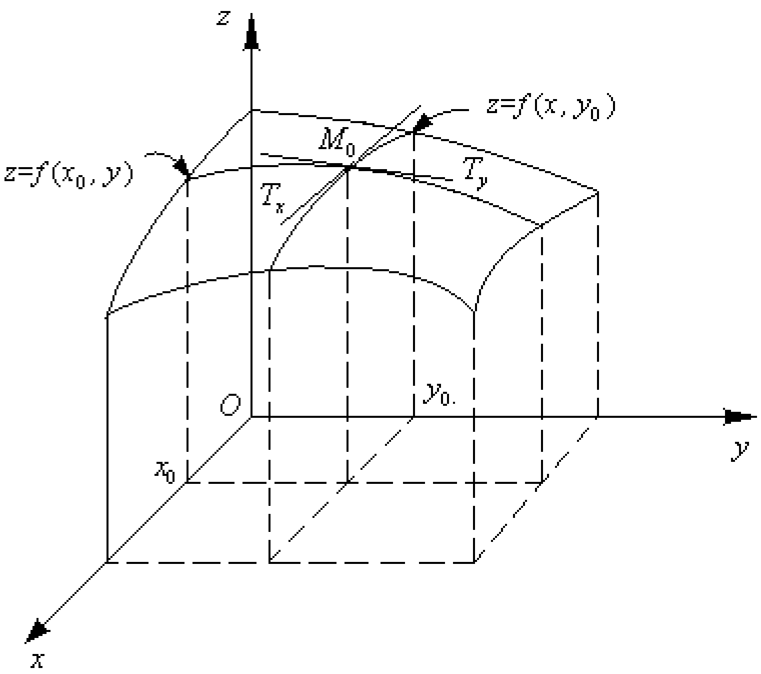


图 6—7

趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$，例如，函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)对 x 和对 y 的偏导数都存在

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0$$

但是我们在第一节中已经知道这函数在点(0,0)并不连续.

6.2.2 高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)\,,$$

那么在 D 内 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 都是 x、y 的函数。如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数 $z=f(x,y)$的**二阶偏导数**。按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中第二、三两个偏导数称为**混合二阶偏导数**。同样可得三阶、四阶、…以及 n 阶偏导数.二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**。

例 6 求函数 $z=e^{xy}+\sin(x+y)$ 的二阶偏导数，及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

解 先求一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+\cos(x+y),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+\cos(x+y)$$

再求二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}-\sin(x+y),$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=y^3e^{xy}-\cos(x+y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+xy)e^{xy}-\sin(x+y),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(1+xy)e^{xy}-\sin(x+y),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}-\sin(x+y)$$

我们看到例 6 中两个二阶混合偏导数相等，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.这不是偶然的，事实上，我们有下述定理。

定理 如果函数 $z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续,那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等。

换句话说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关，这定理的证明从略。

对于二元以上的函数，我们也可以类似地定义高阶偏导数，而且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导的次序无关

例 7 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

证 因为 $$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

例 8 证明函数 $u=\frac{1}{r}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{r^3-x\cdot 3r^2\cdot\left(\frac{x}{r}\right)}{r^6}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

由于函数关于自变量的对称性，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0.$$

例 7 和例 8 中的两个方程都叫拉普拉斯方程，它是数学物理方程中一种很重要的方程。

例 9 设

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\ , & |x|\ge|y|,\\ -xy, & |x|<|y|,\end{cases}$$ 求 $f_{xy}(0,0),f_{yx}(0,0)$。

解 当 $y\neq 0$ 时

$$f_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-xy}{x}=-y$$

而

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

总之有 $$f_x(0,y)=-y$$

类似易得　　　　　　　$f_y(x,0)=x$

从而立即得到　　　　　$f_{xy}(0,0)=-1$

$$f_{yx}(0,0)=1$$

我们看到　　　　　　　$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

这从另一个方面说明了 f_{xy} 和 f_{yx} 在点 $(0,0)$ 处不连续。

作业 1，4，6，7，9，11，14，15

6.3 全微分及其应用

6.3.1 全微分概念

通过前面的讨论，我们知道，二元函数对某个自变量的偏导数表示当另一个自变量固定时，因变量相对于该自变量的变化率，根据一元函数微分学中增量与微分的关系，可得

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+o(\Delta x)$$
$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_y(x,y)\Delta y+o(\Delta y)$$

这里 $f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$ 与 $f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 分别称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 x 与对 y 的**偏增量**， $f_x(x,y)\Delta x$ 与 $f_y(x,y)\Delta y$ 分别称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 x 与对 y 的**偏微分**。

在实际问题中，有时需要研究多元函数中各个自变量都取得增量时因变量所获得的增量，即所谓**全增量**的问题。

例如 设矩形的边长分别为 x,y，当边长分别增加 $\Delta x,\Delta y$ 时，面积的改变量是多少？（图6－8）

这时，矩形的面积为　　　　　$A=xy$

$$\Delta A=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$$

上式右边第一部分 $y\Delta x+x\Delta y$ 表示图 6－8 中带有斜线的两块小长方形面积之和，它与 ΔA 的差仅为一块带有双斜线的面积 $\Delta x\Delta y$ 很小时，就有

$$\Delta A\approx y\Delta x+x\Delta y$$

称 $y\Delta x+x\Delta y$ 为面积 A 的全微分。

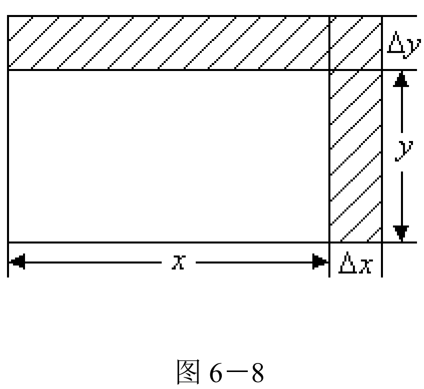


图 6－8

下面以二元函数为例进行讨论。

一般来说,计算全增量Δz比较复杂。与一元函数的情形一样，我们希望用自变量的增量Δx、Δy的线性函数来近似地代替函数的全增量Δz，从而引入如下定义.

定义 如果函数$z=f(x, y)$在点 (x, y) 的全增量

$$\Delta z= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+_{o}(\rho), \tag{2}$$

其中A、B不依赖于Δx、Δy而仅与x、y有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数$z=f(x, y)$在点$(x, y)$可微，而$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x, y)$在点$(x, y)$的**全微分**（total differential），记作dz，即

$$dz= A\Delta x+B\Delta y.$$

如果函数在区域D内各点处都可微，那么称函数$z=f(x,y)$为D内可微函数。

在第二节曾经指出，多元函数在某点的偏导数存在，并不能保证函数在该点连续，但是，由上述定义可知，如果函数$z=f(x, y)$在点(x, y)处可微分，那么这函数在该点必定连续.事实上，这时由(2)式可得

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta z=0,$$

从而

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x+\Delta x, y+\Delta y)=\lim_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z]=f(x,y).$$

因此函数$z=f(x, y)$在点(x, y)处连续.

6.3.2 可微与可偏导的关系

下面讨论函数$z=f(x, y)$在点(x, y)可微的条件.

定理 1（必要条件）如果函数$z=f(x, y)$在点(x, y)可微分，则该函数在点(x, y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$必定存在，且函数$z=f(x, y)$在点$(x, y)$的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{3}$$

证 设函数$z=f(x, y)$在点$P(x, y)$可微。于是，对于点P的某个邻域内的任意一点$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$，（2）式总成立。特别当$\triangle y=0$时（2）式也应成立，这时$\rho=|\Delta x|$，所以（2）式成为

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+_{o}(|\Delta x|).$$

上式两边各除以$\triangle x$，再令$\triangle x\to 0$而取极限，就得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A,$$

从而偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 存在，且等于 A.同样可证 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=B$.所以（3）式成立.

由一元函数微分学可知，一元函数在某点的导数存在是微分存在的充分必要条件。但对于多元函数来说，情况就不一样了。当函数的各偏导数都存在时，虽然能形式地写出 $\dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$，但它与 $\triangle z$ 之差并不一定是比 ρ 高阶的无穷小，因此它不一定是函数的全微分.换句话说，各偏导数的存在只是全微分存在的必要条件而不是充分条件。例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处有 $f_x(0,0)=0$ 及 $f_y(0,0)=0$，所以

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

如果考虑点 $P'(\Delta x,\Delta y)$ 沿着直线 $y=x$ 趋于(0,0)则

$$\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\frac{1}{2},$$

它不能随 $\rho\to 0$ 而趋于 0，这表示 $\rho\to 0$ 时，

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]$$

并不是比 ρ 高阶的无穷小，因此函数在点(0,0)处的全微分并不存在，即函数在点(0,0)处是不可微的.

由定理 1 及这个例子可知，偏导数存在是可微分的必要条件而不是充分条件。但是，如果再假定函数的各个偏导数连续，则可以证明函数是可微的，即有下面的定理。

定理 2 （充分条件）如果函数 $z=f(x,y)$的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点(x,y)连续，则函数在该点可微分。

证 因为我们只限于讨论在某一区域内有定义的函数（对于偏导数也如此），所以假定偏导数在点 $P(x,y)$连续，就含有偏导数在该点的某一邻域内必然存在的意思（以后凡说到偏导数在某一点连续均应如此理解）。设点$(x+\triangle x,y+\triangle y)$为这邻域内任意一点，考察函数的全增量

$$\begin{aligned}\triangle z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=[f(x+\triangle x,y+\triangle y)-f(x,y+\triangle y)]\\&\quad+[f(x,y+\triangle y)-f(x,y)].\end{aligned}$$

在第一个括号内的表达式，由于 $y+\triangle y$ 不变，因而可以看作是 x 的一元函数 $f(x, y+\triangle y)$ 的增量。于是，应用拉格朗日中值定理，得到

$$[f(x+\triangle x, y+\triangle y)-f(x, y+\triangle y)]=f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x \quad (0<\theta_1<1).$$

又依假设，$f_x(x,y)$ 在点 (x, y) 连续，所以上式可写为

$$[f(x+\triangle x, y+\triangle y)-f(x, y+\triangle y)]=f_x(x,y)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x \tag{4}$$

其中 ε_1 为 Δx、Δy 的函数，且当 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ 时，$\varepsilon_1\to 0$.

同理可证第二个括号内的表达式可写为

$$[f(x, y+\triangle y)-f(x, y)]=f_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_2\Delta y \tag{5}$$

其中 ε_2 为 Δy 的函数，且当 $\Delta y\to 0$ 时，$\varepsilon_2\to 0$.

由（4）、（5）两式可见，在偏导数连续的假定下，全增量 Δz 可以表示为

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y \tag{6}$$

容易看出

$$\left|\frac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right|\le\left|\frac{\varepsilon_1\Delta x}{\rho}\right|+\left|\frac{\varepsilon_2\Delta x}{\rho}\right|\le|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|,$$

它随着 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$，即 $\rho\to 0$ 时而趋于零.

这就证明了 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 是可微的.

以上关于二元函数全微分的定义及可微的必要条件和充分条件，可以完全类似地推广到三元和三元以上的多元函数。

习惯上，我们将自变量的增量 Δx、Δy 分别记作 dx、dy，并分别称为自变量 x、y 的微分。这样，函数 $z=f(x, y)$ 的全微分就可写为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{7}$$

这里我们看到函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 初等全微分等于它关于 x,y 的偏微分 $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 之和，这一事实称为二元函数微分的叠加原理。

叠加原理也适用于二元以上的函数的情形。例如，如果三元函数 $u=f(x, y, z)$ 可微，那么它的全微分就等于它的三个偏微分之和，即

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

例 1 计算 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分。

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$$

因而 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=e^2\ ,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=2e^2$$

所以 $$dz=e^2dx+2e^2dy\text{。}$$

例 2 计算函数$u=x+\sin\frac{y}{2}+e^{yz}$的全微分.

解 因为 $$\frac{\partial u}{\partial x}=1\,,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}\,,\frac{\partial u}{\partial z}=ye^{yz},$$

所以 $$du=dx+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}\right)dy+ye^{yz}dz\,.$$

6.3.3 全微分几何意义

我们知道，在一元函数中，对于可微函数$y=f(x)$，当Δy时曲线$y=f(x)$上的点M的纵坐标的增量时，微分dy就是曲线的切线在该点相应处的增量。由于$\Delta y\approx dy$，因而在点M的附近，可用切线段来近似地代替曲线段。对于二元函数来说，全微分则反映了曲面与通过某点的切平面之间的类似关系。

设二元函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，则在(x_0,y_0)的附近有

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

记 $$z=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

在几何上，它表示经过曲面$S:z=f(x,y)$上的点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$并以$(f'_x(x_0,y_0),$ $f'_y(x_0,y_0)-1)$为法向量的平面，记其为Π。

由偏导数的几何意义可知，曲面S与平面$y=y_0$的交线在点M_0的切线方程为

$$\begin{cases}z-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)\\ y=y_0\end{cases}$$

而曲面S与平面$x=x_0$的交线在点M_0的切线方程为

$$\begin{cases}z-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\ x=x_0\end{cases}$$

由此可推知，这两条相交的切线所确定的平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-f(x_0,y_0))=0$$

这正是平面Π。

我们把平面Π称为曲面S在点M_0处的切平面（切平面的确切定义将在6.6.2节中给出）。这说明如果$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微，则曲面$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$存在切平面，并且在$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$附近可用切平面近似代替曲面（图6－9）

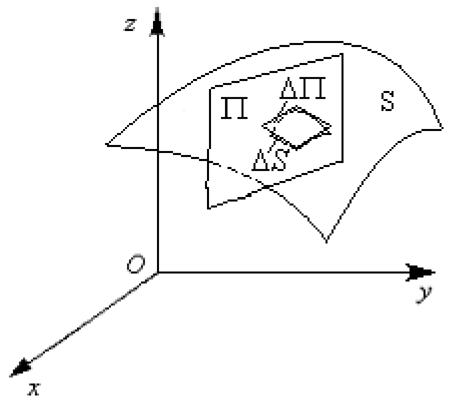


图 6－9

6.3.4 全微分的应用

由全微分的定义可知，当二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$处可微，并且$|\Delta x|,|\Delta y|$都较小时，就有近似公式

$$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y. \qquad (8)$$

上式也可以写成

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y \qquad (9)$$

与一元函数的情形相类似，我们可以利用（8）式或（9）式对二元函数作近似计算和误差估计。

例 3 计算$(1.04)^{2.02}$的近似值。

解 设函数$f(x,y)=x^y$.显然，要计算的值就是函数在x=1.04, y=2.02 时的函数值$f(1.04,2.02)$.

取x=1，y=2，$\Delta x=0.04,\Delta y=0.02$.由于 $f(1,2)$=1,

$$f_x(x,y)=yx^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\ln x,$$

$$f_x(1,2)=2,\quad f_y(1,2)=0,$$

所以，应用公式（9）便有

$$(1.04)^{2.02}\approx 1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08.$$

例 4 利用单摆摆动测定重力加速度g的公式是

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

现测得单摆摆长l与振动周期T分别为$l=100\pm0.1$cm、$T=2\pm0.004$s。问由于测定l与T的误差而引起g的绝对误差和相对误差各为多少？

解　如果把测量 l 与 T 时所产生的误差当作 $|\Delta l|$ 与 $|\Delta T|$，则利用上述计算公式所产生的误差就是二元函数 $g=\dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$ 的全增量的绝对值 $|\Delta g|$。由于 $|\Delta l|$、$|\Delta T|$ 都很小，因此我们可以用 $\mathrm{d}g$ 来近似地代替 Δg。这样就得到 g 的误差为

$$|\Delta g| \approx |dg| = \left|\frac{\partial g}{\partial l}\Delta l + \frac{\partial g}{\partial T}\Delta T\right| \le \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right| \cdot \delta_l + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right| \cdot \delta_T = 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}\delta_l + \frac{2l}{T^3}\delta_T\right)$$

其中 δ_l 与 δ_T 为 l 与 T 的绝对误差。把 $l=100$，$T=2$，$\delta_l=0.1$，$\delta_T=0.004$ 代入上式，得 g 的绝对误差约为

$$\delta_g = 4\pi^2\left(\frac{0.1}{2^2} + \frac{2\times 100}{2^3}\times 0.004\right) = 0.5\pi^2 \approx 4.93(cm/s^2)\text{。}$$

从而 g 的相对误差约为

$$\frac{\delta_g}{g} = \frac{0.5\pi^2}{\dfrac{4\pi^2\times 100}{2^2}} = 0.5\%$$

例 5 某城市的大气污染指数 P 取决于两个因素，即空气中固体废物的数量 x 和空气中有害气体的数量 y.它们之间的关系可表示成

$$P(x,y) = x^2 + 2xy + 4xy^2 \qquad (0 \le x, y \le +\infty).$$

（1）计算 $P'_x(10,5)$ 和 $P'_y(10,5)$，并说明它们的实际意义；

（2）当 x 增长 10%，y=5 不变或 x=10 不变，y 增长 10%，该城市的空气污染的情况怎样？

（3）当 x 增长 10%，y 减少 10%，该城市的空气污染是否有所改善？

解　（1）由 $P'_x(x,y)=2x+2y+4y^2$，$P'_y(x,y)=2x+8xy$，得

$$P'_x(10,5)=130, \qquad P'_y(10,5)=420.$$

根据偏导数定义，$P'_x(10,5)$ 表示当空气中有害气体 y＝5，且固定不变，空气中的固体废物量 x＝10 时，P 对 x 的变化率，也就是说 y＝5 是常量，x 是变量，且 x 自 10 发生一个单位的改变时，大气污染指数 P 大约改变 $P'_x(10,5)$ 个单位.

同理，$P'_y(10,5)$ 表示当空气中固体废物 x＝10 不改变时，P 对 y（当 y＝5）的变化率，或者说，当 x＝10 不变，y 自 5 发生一个单位的改变时，大气污染指数 P 大约改变 $P'_y(10,5)$ 个单位.

(2) 显然 $P_x'(x,y),P_y'(x,y)$ 在点（10，5）处连续，根据增量公式，有

$$\triangle P=P(10+\triangle x,5+\triangle y)-P(10,5$$

$$=P_x'(10,5)\triangle x+P_y'(10,5)\triangle y+{}_o(\rho)$$

$$=130\triangle x+420\triangle y+{}_o(\rho)$$

$$\approx 130\triangle x+420\triangle y$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

当 y=5 ,x 增长 10%时，$\triangle x$=10×10%=1, $\triangle y$=0,则有

$$\Delta_x P=P_x'(10,5)\Delta x+{}_o(|\Delta x|)\approx P_x'(10,5)=130\text{；}$$

当 x=10，y=5 ,$\triangle y$=5×10%=0.5 时,有

$$\Delta_y P=P_y'(10,5)\Delta y+{}_o(|\Delta y|)\approx 420\times 0.5=210\,.$$

由此可见，当自变量 x、y 在点（10，5）处一个保持不变，另一个增加 10%时，引起大气污染的程度是不同的，有害气体对大气污染的程度较严重.

（3）由于 x=10，y=5，x 增长 10%，即$\triangle x$=1；y 减少 10%，即$\triangle y$=－0.5，此时大气污染指数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta P&=P(10+1,5-0.5)-P(10,5)\\&\approx P_x'(10,5)\Delta x+P_y'(10,5)\Delta y\\&=-80,\end{aligned}$$

即大气污染得到一定的治理，空气状况有所改变.

作业 2，，4，9，10，11

6.4 多元复合函数的微分法

6.4.1 链式法则

在一元函数微分学中链式法则是最重要的求导法则之一。现将这一重要求导法则推广到多元复合函数的情形。多元复合函数的求导法则在多元函数微分学中也起着重要作用。

和一元复合函数相比较，多远复合函数的结构更为复杂。为了便于掌握，下面按照多元复合函数不同的复合情形，分三种情形讨论。

1．复合函数的中间变量均为一元函数的情形。

如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\phi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(u,v)$在对应点(u,v)处可微，则

复合函数 $z=f[\varphi(t),\phi(t)]$ 在点 t 可导，且有

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}}\qquad（1）$$

证 设 t 获得增量 $\triangle t$ ，这时 $u=\varphi(t)$ 、 $v=\phi(t)$ 的对应增量为 $\triangle u$、$\triangle v$，由此，函数 $z=f(u,v)$相应地活的增量 $\triangle z$。按假设，函数 $z=f(u,v)$在点(u,v)可微，于是有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+{}_{o}\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right),$$

将上式两边同除 Δt ，得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}+\frac{{}_{o}(\rho)}{\rho}\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2}\cdot\frac{|\Delta t|}{\Delta t} \qquad (2)$$

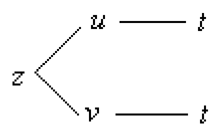
当 $\triangle t\to 0$ 时，由 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\phi(t)$ 都在点 t 可导，有 $\triangle u\to 0$，$\triangle v\to 0$，从而 $\rho\to 0$ ，从而

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{{}_{o}(\rho)}{\rho}=0$ ，而 $\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2}\cdot\frac{|\Delta t|}{\Delta t}$ 为有界变量，从而（2）式第三项极限为 0

又因为当 $\triangle t\to 0$ 时， $\frac{\Delta u}{\Delta t}\to\frac{du}{dt},\frac{\Delta v}{\Delta t}\to\frac{dv}{dt}$ ，所以

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

这就证明了复合函数 $z=f[\varphi(t),\phi(t)]$ 在点 t 可导，且其导数可用公式（1）计算。



为了便于记忆求导公式（1），我们画以 z,u,v,t 的依赖关系的示意图（图 6－10)。

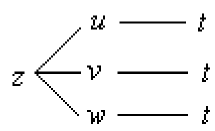
图 6-11

用同样的方法，可把定理推广到复合函数的中间变量多于两个的情形。例如，设 $z=f(u,v,w)$， $u=\varphi(t)$ 、 $v=\phi(t)$ ， $w=\omega(t)$ ，由此复合而得复合函数

$$z=f[\varphi(t)、\phi(t)，\omega(t)],$$

则在与定理相类似的条件下，这个复合函数在点 t 可导，且其导数可用下列公式计算：

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt} \qquad (2)$$



在公式（1）及（2）中的导数 $\frac{dz}{dt}$ 称为全导数。

其关系图如图 6－11 所示　　　　　　　　　　　　　　　　　　　图 6－11

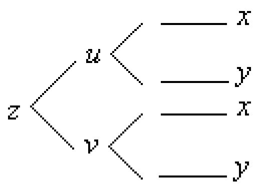
2．复合函数的中间变量均为多元函数的情形。

如果函数$u=\varphi(x,y)$及$v=\phi(x,y)$都在点(x,y)具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$在对应点(u,v)处可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\phi(x,y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数存在，且有

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad (3)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}} \qquad (4)$$

其变量关系图如图 6－12



类似地，设$u=\varphi(x,y)$、$v=\phi(x,y)$及$w=\omega(x,y)$都在点(x,y)具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v,w)$在对应点(u,v,w)具有连续偏导数，则复合函数

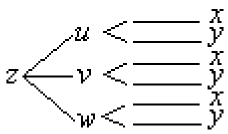
图 6－12

$$z=f[\varphi(x,y),\phi(x,y),\omega(x,y)]$$

在点(x,y)的两个偏导数都存在，且可用下列公式计算：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$



（6）

其变量关系图如图 6－13 所示　　　　　　　　　　　　　　　　图 6－13

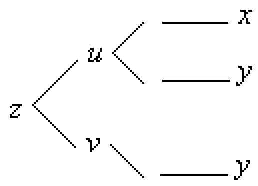
3．复合函数的中间变量既有一元函数，又有多元函数的情形。

如果函数$u=\varphi(x,y)$在点(x,y)具有对 x 及对 y 的偏导数，函数$v=\phi(y)$在点 y 可导，函数 $z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\phi(y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数存在，且有

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},} \qquad (7)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}} \qquad (8)$$

上述情形实际上是情形 2 的一种特例。即在情形 2 中，如变量 v 与 x 无关，从而 $\frac{\partial v}{\partial x}=0$； 在 v 对 y 求导时，由于 v 是 y 的一元函数，故 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 换成了 $\frac{dv}{dy}$，这就得上述结果。



其关系图如图 6－14 所示

图 6－14

在情形 3 中，还会遇到这样的情形：复合函数的某些中间变量本身又是复合函数的自变量。例如，设 $z=f(u,x,y)$具有连续偏导数，而 $u=\varphi(x,y)$ 具有偏导数，则复合函数

$z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 可看作情形 2 中当 $v=x,w=y$ 的特殊情形。因此

$$\frac{\partial v}{\partial x}=1 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y}=1.$$

从而复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 具有对自变量 x 及 y 的偏导数，且由公式（5）、（6）得

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y},}$$

注意 这里 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是不同的，$\frac{\partial z}{\partial x}$ 是把复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 中所有的 y 看作不变而对 x 的偏导数，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 则是把 $f(u,x,y)$中的 u（尽管 u 中包含 y）及 y 看作不变而对其余的 x 的偏导数. $\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 也有类似的区别。

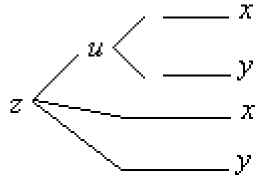


图 6－15

其关系图如图 6－15 所示

以上我们对多元复合函数中有代表性的三种情形，给出了求偏导数的**链式法则**。所谓链式法则反映的是复合函数的链式结构。例如图 6－10 表明了是 u，v 的函数，而 u，v 又都是 x，y 的函数。从图中可知，从 z 到 x 有两条链：

$$f \to u \to x,\quad f \to v \to x,$$

而求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 的过程反映了由 z 到 x 的这两条链：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad 或\quad z_x=f_u u_x+f_v v_x$$

求偏导的法则可简称为 “同链相乘，分链相加”。

同样，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的过程也有类似的结果。

多元复合函数的结构是多种多样的，但掌握了以上链式法则，求偏导的特点，对于其他情形就不难解决了。

例 1 设 $z=\sin\dfrac{x}{y}$，而 $x=e^t, y=t^2$ 。求全导数 $\dfrac{dz}{dt}$ 。

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y},\dfrac{dx}{dt}=e^t,\dfrac{dy}{dt}=2t$

$$\frac{dz}{dt}=\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\right)e^t-\left(\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)(2t)$$
$$=\frac{(t-2)e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}$$

例 2 求函数 $z=e^{xy}\sin(x+y)+e^{x+y}\cos xy$ 的偏导数.

解 引入中间变量 $u=xy$，$v=x+y$，则 $z=e^u\sin v+e^v\cos u$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1$$

于是，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(e^u\sin v-e^v\sin u)\cdot y+(e^u\cos v+e^v\cos u)\cdot 1$$
$$=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]+e^{x+y}(\cos xy-y\sin xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=(e^u\sin v-e^v\sin u)\cdot x+(e^u\cos v+e^v\cos u)\cdot 1$$

$$=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]+e^{x+y}(\cos xy-x\sin xy)$$

例 3 设 $z=e^u\sin v+x^2$，$u=x+y$，$v=xy$。求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}=e^u\sin v+e^u\cos v\cdot y+2x$$

$$=e^{x+y}[\sin(xy)+y\cos(xy)]+2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v+xe^u\cos v$$

$$=e^{x+y}[\sin(xy)+x\cos(xy)]$$

例 4 设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

解 令 $u=x+y+z$，$v=xyz$，则 $w=f(u,v)$.

为表达简便起见，引入以下记号：

$$f_1'=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},\qquad f_{12}''=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}$$

这里下标 1 表示对第一个变量求偏导数，下标 2 表示对第二个变量求偏导数，同理有 $f_2',f_{11}'',f_{21}'',f_{22}''$ 等等。

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'+yzf_2'$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(f_1'+yzf_2')=f_{11}''+xyf_{12}''+yf_2'+yz(f_{21}''+xyf_{22}'')$$

$$=yf_2'+f_{11}''+y(x+z)f_{12}''++xy^2zf_{22}''$$

例 5 设 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$，其中 φ,ψ 均有二阶导数，证明 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

证 $$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\varphi'+a\psi'\quad,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''+a^2\psi'',$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'+\psi'\quad,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''+\psi'',$$

从而有 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

例 6 1mol 理想气体的压强 P（单位：kPa），体积 V（单位：L）、温度 T（单位：K）满足方程 PV＝8.31T。当温度为 300K，温度的增加率为 0.1K/s，体积为 100L 以及体积的增加率为 0.2L/s 时，求压强的变化率。

解　依题意即求压强 P 对时间 t 的变化率 $\frac{dP}{dt}$，由已知 $P=8.31\frac{T}{V}$

$T=300,\frac{\partial T}{\partial t}=0,V=100,\frac{\partial V}{\partial t}=0.2$，利用链式法则（1）有

$$\frac{dP}{dt}=\frac{\partial P}{\partial T}\cdot\frac{dT}{dt}+\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{dV}{dt}=8.31\left(\frac{1}{V}\cdot\frac{dT}{dt}-\frac{T}{V^2}\frac{dV}{dt}\right)$$

$$=8.31\left(\frac{1}{100}\times0.1-\frac{30}{100^2}\times0.2\right)=-0.04155$$

即压强的减少率为 0.04155kPa/s。

从以上例子可看出，求多元复合函数偏导数的关键是分清函数的复合结构：哪些变量是自变量，哪些变量是中间变量，以及它们之间的关系（是一元函数，还是多元函数，从而用不同的记号）。在求高阶偏导数时要注意的是，偏导函数仍是多元复合函数。

6.4.2 全微分形式不变性

与一元函数微分的形式不变性类似，多元函数也有全微分形式的不变性。以二元函数为例，设函数 $z=f(u,v)$可微，则有全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

如果 u、v 又是 x、y 的函数 $u=\varphi(x,y)$、$v=\phi(x,y)$，且这两个函数也是可微函数，则复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\phi(x,y)]$$

的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 分别由公式（3）及（4）给出。把公式（3）及（4）中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入上式，得

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

由此可见在二元函数 $z=f(u,v)$ 中，无论 u、v 是中间变量，还是自变量，它的全微分形式是一样的。这个性质叫做**全微分形式的不变性**。

利用这一性质，可得到多元函数全微分与一元函数微分相同的运算法则：

（1） $d(u \pm v) = du \pm dv$

（2） $d(uv) = udv + vdu$

（3） $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}(v \neq 0)$

恰当地利用这些结果，常会得到很好的效果。

例 7　设 $z = e^u \sin v$，尔 $u = xy, v = x + y$。利用全微分形式不变性求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

解　$dz = d(e^u \sin v) = e^u \sin v du + e^u \cos v dv$

因

$$du=d(xy)=ydx+xdy$$
$$dv=d(x+y)=dx+dy$$

代入后归并含 dx 及 dy 的项，得

$$dz = (e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v)dx + (e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v)dy$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = e^{xy}[y\sin(x+y) + \cos(x+y)]dx + e^{xy}[x\sin(x+y) + \cos(x+y)]dy.$$

比较上式两边的 dx、dy 的系数，就同时得到两个偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}[y\sin(x+y) + \cos(x+y)]$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy}[x\sin(x+y) + \cos(x+y)]$$

6.4.3 隐函数的求导法则

1．一个方程的情形

前面我们已经提出了隐函数的概念，并且介绍了不经过显化直接由方程

$$F(x, y)=0 \qquad (1)$$

求它所确定的隐函数的导数的方法，前提是假定该隐函数存在且可导。现在我们来讨论在什么条件下，方程 $F(x, y) = 0$ 可以惟一地确定隐函数 $y=y(x)$，即隐函数存在定理，并根据多元复合函数的求导法来建立隐函数的导数公式。

隐函数存在定理 1　设函数 $F(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0, y_0) = 0, F_y(x_0, y_0) \neq 0$，则方程 $F(x, y)=0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内可以唯一确定一

个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}. \qquad (2)$$

公式（2）就是隐函数的求导公式。

这个定理中存在性的证明从略。现仅就公式（2）作如下推导。

将方程（1）所确定的函数 $y=f(x)$代入（1），得恒等式

$$F(x,f(x))\equiv 0$$

其左端可以看作是 x 的一个复合函数，利用符合函数的链式法则求这个函数的全导数，由于恒等式两端求导后仍然恒等，即得

$$F_x+F_y\frac{dy}{dx}=0,$$

由于 F_y 连续，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以存在 (x_0,y_0) 的一个邻域，在这个邻域内 $F_y\neq 0$，于是得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

如果 $F(x,y)$ 得二阶偏导数也都连续，我们可以把等式（2）的两端看作 x 的复合函数而再一次求导，即得隐函数 $y=f(x)$ 的二阶导数

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=-\frac{(F_{xx}+F_{xy}y')F_y-F_x(F_{yx}+F_{yy}y')}{F_y^2}\\&=-\frac{(F_{xx}+F_{xy}(-\frac{F_x}{F_y}))F_y-F_x(F_{yx}+F_{yy}(-\frac{F_x}{F_y}))}{F_y^2}\\&=-\frac{(F_{xx}F_y-F_{xy}F_x)F_y-F_x(F_{yx}F_y-F_xF_{yy})}{F_y^3}\\&=-\frac{F_{xx}{F_y}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}{F_x}^2}{F_y^3}.\end{aligned}$$

例 1 验证方程 $F(x,y)=xy+e^x-e^y=0$ 在点（0，0）的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数 $y=f(x)$，并求这函数的一阶导数在 $x=0$ 的值.

解 $F_x=y+e^x, F_y=x-e^y, F(0,0)=0, F_y(0,0)=-1\neq 0$。因此由定理 1 可知，方程 $F(x,y)=xy+e^x-e^y=0$ 在点(0,0)的某邻域内能惟一确定一个有连续导数、当 $x=0$ 时 $y=0$ 的函数 $y=f(x)$.

下面求这函数的一阶导数。

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{y+e^x}{x-e^y} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$$

隐函数存在定理还可以推广到多元函数。既然一个二元方程（1）可以确定一个一元隐函数，那么一个三元方程

$$F(x\,,\,y\,,\,z)=0 \tag{3}$$

就有可能确定一个二元隐函数。

与定理 1 一样，我们同样可以由三元函数 $F(x\,,\,y\,,\,z)$的性质来断定由方程 $F(x\,,\,y\,,\,z)=0$ 所确定的二元函数 $z=f\,(x\,,\,y)$的存在，以及这个函数的性质。这就是下面的定理。

隐函数存在定理 2 设函数 $F(x\,,\,y\,,\,z)$在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x\,,\,y\,,\,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f\,(x\,,\,y)$,它满足条件 $z_0=f\,(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_y}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z} \tag{4}$$

这个定理我们不证，仅就（4）式作如下推导：

由于 $$F(x,y,f\,(x,y))\equiv 0\,,$$

将上式两端分别对 x 和 y 求导，应用复合函数求导法则得

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \ F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0\,.$$

因为 F_z 连续，且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，所以存在点 (x_0,y_0,z_0) 的一个邻域，在这个邻域内 $F_z\neq 0$，于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 2 设 $z=f\,(x\,,\,y)$是由方程 $e^{-xy}-2z+e^z=0$ 所确定的隐函数，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 设 $F(x\,,\,y\,,\,z)=\ e^{-xy}-2z+e^z$，则

$$F_x=-ye^{-xy}\,,\qquad F_y=-xe^{-xy}\,,\qquad F_z=e^z-2\,,$$

当 $z\neq\ln 2$ 时，应用公式（4）得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2}\,,\qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}\,.$$

再一次由$\frac{\partial z}{\partial x}$对$y$求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{(e^{-xy}-xye^{-xy})(e^z-2)-ye^{-xy}e^z\frac{\partial z}{\partial y}}{(e^z-2)^2}$$

$$=\frac{(e^{-xy}-xye^{-xy})(e^z-2)-ye^{-xy}e^z\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}}{(e^z-2)^2}$$

$$=\frac{(e^{-xy}-xye^{-xy})(e^z-2)^2-ye^{-xy}e^z xe^{-xy}}{(e^z-2)^3}$$

$$=\frac{e^{-xy}[(1-xy)(e^z-2)^2-xye^{z-xy}]}{(e^z-2)^3}$$

例 3 求由方程$F(y-z,yz)=0$所确定的函数$z=z(x,y)$的偏导数，其中F_1,F_2均连续且$F_2\neq 0$。

解　把原方程两边对x,y分别求偏导，并注意$z=z(x,y)$，由链法则得

$$F_1\cdot(-1)+F_2\cdot y\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$F_1+F_2\left(z+y\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0.$$

从中解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1}{yF_2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F+zF_{21}}{yF_2}$$

二、 方程组得情形

下面将隐函数存在定理作另一方面的推广。我们不仅增加方程中变量得个数，而且增加方程的个数。例如，考虑方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0.\end{cases} \tag{5}$$

这时，在四个变量中，一般只能由两个变量独立变化，因此方程组（5）就有可能确定两个二元函数。在这种情况下，我们可以由函数F、G的性质来断定由方程组（5）所确定的两个二元函数的存在，以及它们的性质。我们有下面的定理。

隐函数存在定理 3 设$F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,且偏导数所组成的函数行列式或称雅可比（Jacobi 德国，1804－1851）行列式：

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零，则方程组(5)在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某一邻域内可唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ ，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$ 并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}} \qquad (6)$$

与前了两个定理一样，我们仅推导求偏导数的公式

因隐函数满足

$$\begin{cases}F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0,\\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0.\end{cases}$$

将上面两恒等式两端对 x 求偏导数，有

$$\begin{cases} F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0 \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0 \end{cases}$$

这是一个关于u_x, v_x的线性方程组，

由于$J \neq 0$，可解得

$$u_x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad v_x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

同理可得

$$u_y = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}, \quad v_y = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

在求这类偏导数问题时，可直接使用公式（6），但一般情况下，用推导公式（6）的方法，即用复合函数的链式法则较为方便。

例 设$\begin{cases} u^3 + xv = y \\ v^3 + yu = x \end{cases}$，求$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$及$\frac{\partial v}{\partial y}$

解 将方程组两边对x求偏导数，得

$$\begin{cases} 3u^2\frac{\partial u}{\partial x} + v + x\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 3v^2\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{3v^2 + x}{9u^2v^2 - xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3u^2 + vy}{9u^2v^2 - xy}$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3v^2 + ux}{9u^2v^2 - xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{3u^2 + y}{9u^2v^2 - xy}$$

本题也可用全微分的形式不变性求解：在方程组的两端求全微分，得

$$\begin{cases} 3u^2du + xdv + vdx = dy \\ 3v^2dv + ydu + udy = dx \end{cases}$$

解出

$$du = -\frac{3v^2 + x}{9u^2v^2 - xy}dx + \frac{3v^2 + ux}{9u^2v^2 - xy}dy$$

$$dv = \frac{3u^2 + vy}{9u^2v^2 - xy}dx - \frac{3u^2 + y}{9u^2v^2 - xy}dy$$

于是立即得出所求的偏导数，其结果与前面用链式法则所得结果相同。

作业 2，3，6，7，10，12，13，14

6.5 偏导数的几何应用

6.5.1 空间曲线的切线与法平面

首先将平面曲线的切线概念推广到空间曲线，并给出空间曲线的法平面概念。

设 M_0 是空间曲线 Γ 上的一定点，在 Γ 上 M_0 的附近任取一点 M，过 M_0，M 两点的直线称为 Γ 的割线。

如果当点 M 沿曲线 Γ 趋于 M_0 时，割线 M_0M 存在极限位置 M_0T，则称直线 M_0T 为曲线 Γ 在 M_0 点的切线（tangent line）。过 M_0 点且与切线 M_0T 垂直的平面 Π 称为曲线 Γ 在 M_0 点的法平面（normal plane）（如图 6－16）。

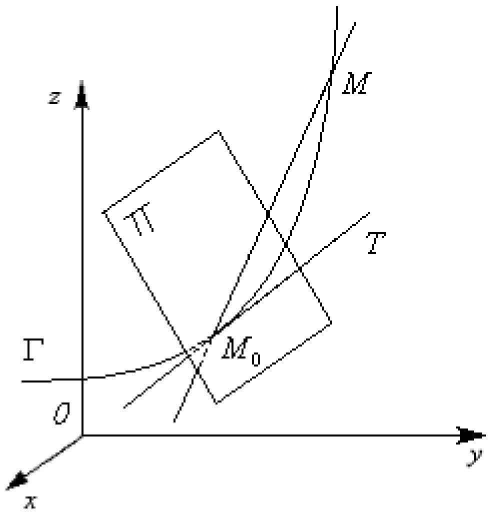


图 6－16

现在来建立 Γ 在 M_0 点的切线与法平面方程。

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \phi(t), z = \omega(t) \ \ (\alpha \le t \le \beta), \tag{1}$$

这里假设(1)式的三个函数都在$[\alpha,\beta]$上可导

在曲线Γ上取对应于$t=t_0$的一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$及对应于$t=t_0+\Delta t$的邻近一点M $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$.根据解析几何,曲线的割线$M_0M$的方程是

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

用Δt除上式的各分母,得

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

令$M\to M$(这时$\Delta t\to 0$),通过对上式取极限,即得曲线在点M_0处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t)}=\frac{y-y_0}{\phi'(t)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t)}. \qquad (2)$$

这里当然要假定$\varphi'(t_0)$、$\phi'(t_0)$及$\omega'(t)$不能全为零.如果个别为零,则应按空间解析几何中有关直线的对称式方程的说明来理解.

称切线的方向向量为曲线的**切向量**(tangent vector),记做$\underset{\sim}{s}$,则

$$\underset{\sim}{s}=(\varphi'(t_0),\phi'(t_0),\omega'(t))$$

进而得到曲线Γ在点M_0处的法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\phi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t)(z-z_0)=0 \qquad (3)$$

例 1 求曲线$x=t$,$y=t^2$,$z=e^t$在点(1,1,e)处的切线及法平面方程。

解 点(1,1,e)所对应的参数为$t=1$,又

$$\frac{dx}{dt}=1, \quad \frac{dy}{dt}=2t, \quad \frac{dz}{dt}=e^t,$$

当 t=1 时，切线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$=(1,2,e),故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-e}{e},$$

法平面方程为

$$x+2y+ez-3-e^2=0,$$

现在我们再来讨论空间曲线 Γ 的方程以另外两种形式给出的情形.

如果空间曲线 Γ 的方程以

$$\begin{cases} y=\varphi(x), \\ z=\phi(x) \end{cases}$$

的形式给出，则取 x 为参数，它就可以表为参数方程的形式

$$\begin{cases} x=x, \\ y=\varphi(x), \\ z=\phi(x). \end{cases}$$

若 $\varphi(x)$, $\phi(x)$ 都在 $x=x_0$ 处可导，那么根据上面的讨论可知，$\underset{\sim}{s}=(1,\varphi'(x_0),\phi'(x_0))$ 因此曲线 Γ 在点 $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\phi'(x_0)}, \tag{5}$$

在点 $M(x_0,y_0,z_0)$处的法平面方程为

$$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\phi'(x_0)(z-z_0)=0. \tag{6}$$

若空间曲线 Γ 的方程以一般形式

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{7}$$

给出，只要满足隐函数存在定理的条件，

那么方程组（7）在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内可确定惟一的隐函数组

$y=\varphi(x)\,, z=\psi(x)$，此时可认为曲线方程是以$x$为参数，再利用隐函数求导法求出曲线在

M_0处的切向量$(1,\varphi'(t_0),\psi'(t_0))$，进而可得切线与法平面方程。

例 2　求球面$x^2+y^2+z^2-4=0$与圆柱面$x^2+y^2-2x=0$的交线Γ在点$P_0(1,1,\sqrt{2})$处的切线方程与法平面方程。

解　对两个曲面方程式两端求全微分，得

$$2xdx+2ydy+2zdz=0\text{，}\quad 2xdx+sydy-2dx=0$$

在点$P_0\,(1,1,\sqrt{2})$处，有

$$2dx+2dy+2\sqrt{2}dz=0\text{，}\quad 2dx+2dy-2dx=0$$

解得　　$\dfrac{dy}{dx}=0\,,\qquad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

于是Γ在点P_0的切向量为　　$\underset{\sim}{s}=(1,0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

从而求得所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\sqrt{2}}{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-\sqrt{2}}=z-2, \\ y=0\end{cases}$$

法平面方程为

$$(x-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}(z-\sqrt{2})=0,$$

即

$$\sqrt{2}x-z=0$$

6.5.2 曲面的切平面与法线

我们先讨论曲面方程由隐式给出的情形，设曲面Σ的方程为

$$F(x,y,z)=0 \qquad (10)$$

然后把由显式给出的曲面方程作为它的特例。

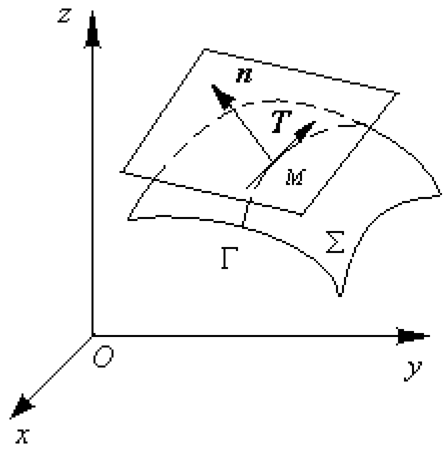


图 6－17

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面Σ上的一点，并设函数$F(x,y,z)$的偏导数在该点连续且不同时为零，在曲面Σ上，通过点M_0任意引一条曲线(图 6-17)，假定曲线Γ的参数方程为

$$x=\varphi(t),y=\phi(t),z=\omega(t)\ ,(\alpha\le t\le\beta) \qquad (11)$$

$t=t_0$对应于点$M_0(x_0,y_0,z_0)$且$\varphi'(t_0),\phi'(t_0),\omega(t_0)$不全为零，则由(2)式可得这曲线的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\phi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

切向量为 $\underset{\sim}{s}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

我们现在要证明，在曲面Σ上通过点M_0且在点M_0处具有切线的任何曲线，它们在点M_0处的切线都在同一个平面上。事实上，因为曲线Γ完全在曲面Σ上，所以有恒等式

$$F[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)]\equiv 0\ ,$$

又因$F(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)处有连续偏导数，且$\varphi'(t_0),\phi'(t_0),\omega(t_0)$存在，所以这恒等式

左边的复合函数在$t=t_0$处有全导数，且这全导数等于零：

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)]\Big|_{t=t_0}=0 \text{，}$$

即有

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\phi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0 \tag{12}$$

先引入向量

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} = (F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)),$$

则（12）式又可写作

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}=0$$

这表明曲面Σ上过点M_0点的任一条曲线在这一点的切向量，

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}=(\varphi'(t_0),\phi'(t_0),\omega(t_0))$$

都与同一个向量$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}}$垂直，所以曲面上通过点$M_0$的一切曲线在点$M_0$的切线都在同一个平面上（图 6－17）.这个平面称为曲面Σ在点M_0的**切平面**（tangent plane）.而$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}}$就是切平面的一个**法向量**（normal vector），于是切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \tag{13}$$

通过点M_0而垂直于切平面(13)的直线称为曲面在该点的法线（normal line）,它以法向量$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}}$作为方向向量，因此其方程是

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}. \tag{14}$$

现在来考虑曲面由显示给出的情形，设曲面Σ的方程为

$$z = f(x, y). \tag{15}$$

令 $$F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

可见 $$F_x(x,y,z) = f_x(x,y), F_y(x,y,z) = f_y(x,y), F_z(x,y,z) = -1.$$

于是，当函数 f((x , y)的偏导数 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续时，曲面（15）在点 $M(x_0, y_0, z_0)$处的法向量为

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1),$$

于是得到其切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

或

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{16}$$

而法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

这里顺便指出，方程（16）右端恰好是函数 $z = f(x, y)$是在点(x_0, y_0)的全微分,而左端是切平面在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处竖坐标的增量，因此，函数 $z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处的全微分，在几何上表示曲面 $z = f(x, y)$在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面上点的竖坐标的增量。

如果用α, β, γ 表示曲面$\Sigma: z = f(x,y)$ 的法向量子的方向角，并假定法向量$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}}$ 的方向向上，即它与 z 轴的正向所成的角γ 是一锐角，则法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

这里，把 $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 分别简记为 f_x,f_y。

例 3 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点(1,1,1)处的切平面及法线方程.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6$，$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,6z)$，

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}}\Big|_{(1,1,1)}=（2，4，6）$$

所以在点（1，1，1）处此曲面的切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-1)+6(z-1)=0$$

即 $$x+2y+3z-6=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

显然 $(0,0,0)$ 满足法线方程，由此可见，法线经过原点（即球心）。

例 4 求旋转抛物面 z= x^2+y^2-1 在点(2,1,4)处的切平面及法线方程。

解 $f(x,y)=x^2+y^2-1$,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} = (f_x,f_y,z-1)=(2x,2y,-1)$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}}|_{(2,1,4)}=(4,2,-1).$$

所以在点(2,1,4)处的切平面方程为

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$$

即 $$4x+2y-z-6=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

例 5 证明曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=a\ (a>0)$上任一点处的切平面在三个坐标轴上截距之和为一个常数。

证 设$F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-a$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$为曲面上任一点，则

$$(F_x,F_y,F_z)=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}})$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}})$$

从而切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

从而

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}$$

由于点M_0在曲面上，所有$\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=a$，

于是切平面在x,y,z轴上的截距分别为 $a\sqrt{x_0},a\sqrt{y_0},a\sqrt{z_0}$

其和为 $a\sqrt{x_0}+a\sqrt{y_0}+a\sqrt{z_0}=a^2$

作业 （切线与法平面）1 偶数，（切平面与法线）3，5，8，10

6.6 多元函数的极值

6.6.1 多元函数的极值及最大值、最小值

寻求多元函数的极值以及最大值、最小值，是多元函数微分学的一个重要应用。下面就二元函数来讨论这个问题。

定义　设二元函数 $z=f(x,y)$的在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，若在此邻域内有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\text{（}f(x,y)\ge f(x_0,y_0)\text{）}$$

则称函数 $f(x,y)$在点 (x_0,y_0) 取得**极大值**（**极小值**）$f(x_0,y_0)$；点 (x_0,y_0) 称为函数 $f(x,y)$ 的**极大值点**（**极小值点**）；极大值、极小值统称为**极值**。使得函数取得极值的点称为**极值点**。

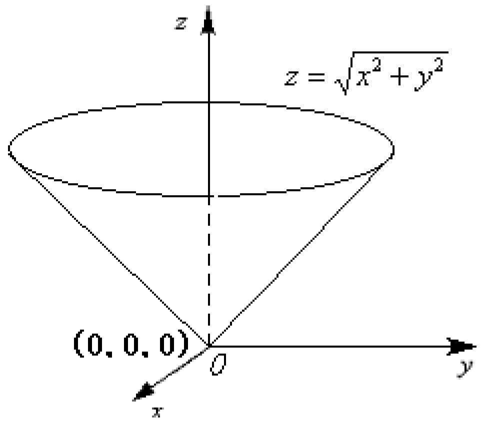


图 6-18

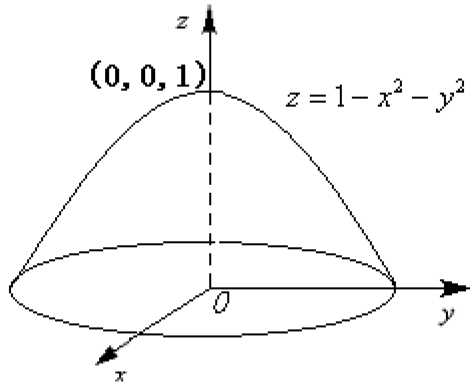


图 6－19

如果定义中的不等式是严格不等式，则得到严格极值的概念。和一元函数类似，多元函数的极值是一个局部的概念。如果和 $z=f(x,y)$的图形联系起来，则函数的极大值和极小值分别是曲面的“高峰”和“低谷”。

例如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，（0，0，0）为极小值，为曲面的“低谷”（图 6－18），而 $z=1-x^2-y^2$，（0，0，1）为极大值，为曲面的“高峰”（图 6－19）。

以上关于二元函数的极值概念，很容易推广到 n 元函数。

与倒数在一元函数极值研究中的作用一样，偏导数是研究多元函数极值的主要手段。下面两个定理就是关于这个问题的结论。

定理（**二元函数极值的必要条件**）设函数 $z=f(x,y)$在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处取得极值，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,\qquad f_y(x_0,y_0)=0.$$

证　因为 $f(x,y)$在点 (x_0,y_0) 处取得极值，所以一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 x_0 处也取得极值，又 $f(x,y)$在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数，从而由可导的一元函数取得极值的必要条件（费马引理），可得到

$$f_x(x_0,y_0)=0.$$

同理，有

$$f_y(x_0,y_0)=0.$$

从几何上看，这时如果曲面 $z=f(x,y)$在点 (x_0,y_0,z_0) 处有切平面，则切平面

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

成为平行于 xOy 坐标面的平面

$$z-z_0=0.$$

该定理可以推广至 n（n>2）元函数，例如，如果三元函数 $u=f(x,y,z)$在点 (x_0,y_0,z_0) 具有偏导数，则它在点 (x_0,y_0,z_0) 具有极值的必要条件为

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\qquad f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\qquad f_z(x_0,y_0,z_0)=0.$$

类似一元函数，使 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$ 同时成立的点 (x_0,y_0) 称为函数 $z=f(x,y)$的**驻点**。从上面定理可知，具有偏导数的函数的极值点必定是驻点。但函数的驻点不一定是极值点，例如，易知点（0，0）是函数 $z=xy$ 的驻点，但函数在该点并不取得极值.

怎样判定一个驻点是否是极值点呢？下面的定理部分地回答了这个问题

定理（二元函数极值的充分条件） 设二元函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0\,(x_0,y_0)$ 的某邻域内有连续的二阶偏导数，且 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的驻点，记

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\qquad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\qquad f_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极值，且当 $A<0$ 时为极大值，当 $A>0$ 时为极小值；

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值;

（3）当 $AC-B^2=0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是否为极值，还需另作讨论.

定理的证明从略。下面举例说明寻求二元函数极值的步骤。

例 4 求函数 $f(x,y)=3axy-x^3-y^3$ 的极值.

解 先解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3ay-2x^2=0, \\ f_y(x,y)=3ax-3y^2=0, \end{cases}$$

求得驻点为(0,0)、(a,a)。

再求出二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y)=-6x,\quad f_{xy}(x,y)=3a\quad,\quad f_{yy}(x,y)=-6y.$$

在点(0,0)处，$AC-B^2=-9a^2<0$，所以(0,0)不是极值点；

在点(a,a)处，$AC-B^2=27a^2>0$,又$A<0$，因此$f(a,a)=a^3$为极大值。

讨论函数的极值问题时，如果函数在所讨论的区域内具有偏导数，则由函数极值的必要条件可知，极值只可能在驻点处取得。然而如果函数在个别点处的偏导数不存在，这些点当然不是驻点，但也可能是极值点。例如函数$z=-\sqrt{x^2+y^2}$在点(0,0)处的偏导数不存在，但该函数在点（0，0）处却取得极大值。因此，在考虑函数的极值问题时，除了考虑函数的驻点外，如果有偏导数不存在的点，那么对这些点也应当考虑。

与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值。我们知道，如果$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则$f(x,y)$在D上必定能取得最大和最小值。如果函数在D的内部取得最大值（最小值)，则这个最大值（最小值）也是函数的极大值（极小值)。另外函数的最大值（最小值）还可能在D的边界上取得。因此，求函数最大值和最小值的一般方法是：将函数$f(x,y)$在D内所有驻点处的函数值及在D的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大者就是最大值，最小者就是最小值。但是，要求出$f(x,y)$在D的边界上的最大值和最小值，往往相当复杂。在通常遇到的实际问题中，如果根据问题的性质，知道函数$f(x,y)$的最大值（最小值）一定在D的内部取得，而函数在D内又只有一个驻点，那么可以肯定该驻点处的函数值就是最大值或最小值。

例 5 一厂商通过电视和报纸两种方式做销售某种产品的广告。据统计资料，销售收入R（万元）与电视广告费用x（万元）及报纸广告费用y（万元）之间的关系有如下的经验公式：

$$R=15+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2$$

试在广告费用不限的前提下，求最优广告策略.

解　所谓最优广告策略是指，如何分配两种不同传媒方式的广告费用，使产品的销售利润达到最大。设利润函数为$f(x,y)$，则

$$\begin{aligned}f(x,y)&=R-(x+y)\\&=15+13x+31y-8xy-2x^2-10y^2,\qquad (x,y)\in R^2\end{aligned}$$

由

$$\begin{cases}f_x=13-8y-4x=0,\\f_y=31-8x-20y=0,\end{cases}$$

解得唯一驻点（0.75，1.25),根据实际意义知，利润$f(x,y)$一定有最大值，且在定义域内有唯一的驻点，因此可以断定，该点就是利润的最大值点。因此当$x=0.75$（万元），$y=1.25$

（万元）时，厂商获得最大利润 $f(0.75,1.25)=39.25$（万元）.

例 6 有一宽为 24cm 的长方形铁板，把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽,问怎样折法才能使断面的面积最大?

解 设折起来的边长为 x cm,倾角为 α (图 6－20),那么梯形断面的下底长为 $24-2x$,上底长为 $24-2x+2x\cos\alpha$,高为 $x\sin\alpha$, 所以断面面积

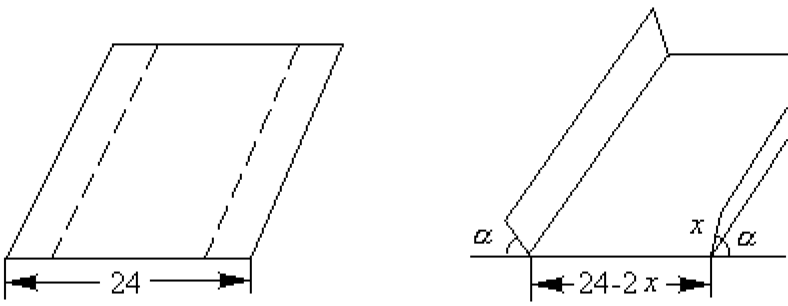


图 6－20

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha,$$

即
$$A=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\left(0<x<12,0<\alpha\le\frac{\pi}{2}\right).$$

从而

$$\begin{cases}A_x=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha=0,\\ A_\alpha=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0\end{cases}$$

由于 $\sin\alpha\ne0$、$x\ne0$ 上述方程组可化为

$$\begin{cases}12-2x+x\cos\alpha=0,\\ 24\cos\alpha-2x\cos\alpha+x(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0.\end{cases}$$

解这方程组,得

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\ x=8(\text{cm}).$$

根据题意可知断面面积的最大值一定存在,并且在 $D=\{(x\,,\,y)\mid 0<x<12,0<\alpha\le\frac{\pi}{2}\}$ 内取得.通过计算得知 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时的函数值比 $\alpha=\frac{\pi}{3}$,x =8(cm)时的函数值小.又函数在 D 内只有唯一的驻点,因此可以断定,当 x=8(cm), $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时,就能使断面的面积最大.

6.6.2 条件极值 拉格朗日乘数法

上面所讨论的极值问题，对于函数的自变量，除了限制在函数的定义域内以外，没有附加其它条件，所以有时称为**无条件极值**或**自由极值**.然而在许多实际问题中往往对自变量提出一些约束条件。例如，求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积问题。设长方体三条

棱的长为 x，y，z，则体积 $V=xyz$.又因假定表面积为 a^2，所以自变量 x，y，z 还必须满足附加条件 $2(xy+yz+zx)=a^2$。像这种对自变量有附加条件的极值称为**条件极值**。对于有些实际问题，可以把条件极值化为无条件极值，然后利用 6.7.1 节中的方法加以解决。例如上述问题可由条件 $2(xy+yz+zx)=a^2$，将 z 表成 x，y 的函数

$$z=\frac{a^2-2xy}{2(x+y)}.$$

再把它代入 $V=xyz$ 中，于是问题就化为求

$$V=\frac{xy}{2}\left(\frac{a^2-2xy}{x+y}\right)$$

但是在很多情况下，将条件极值化为无条件极值并非这样简单。下面介绍一种直接寻求条件极值的方法，即拉格朗日乘数法.

一般的条件极值问题可表述为：求函数

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

在条件

$$\varphi(x,y)=0 \tag{2}$$

下的极值。这里 $f(x,y)$ 称为目标函数，$\varphi(x,y)=0$ 称为**约束条件**。

首先我们讨论函数 $z=f(x,y)$在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下取得极值的必要条件。

如果函数(1)在 (x_0,y_0) 取得所求的极值，那么首先有

$$\varphi(x_0,y_0)=0 \tag{3}$$

我们假定在 (x_0,y_0) 的某一邻域内 $f(x,y)$与 $\varphi(x,y)$均有连续的一阶偏导数，而 $\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$。由隐函数存在定理可知，方程（2）确定一个具有连续导数的函数 $y=\phi(x)$，将其代入（1）式，则得到一个关于 x 的一元函数

$$z=f(x,\phi(x)]. \tag{4}$$

这样函数（1）在 (x_0,y_0) 处取得极值，也就是相当于函数（4）在 $x=x_0$ 处取得极值。由一元可导函数取得极值的必要条件，可知

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=0 \tag{5}$$

对于方程（2），用隐函数求导公式，有

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}.$$

把上式代入(5)式，得

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=0\,. \tag{6}$$

（3）、（6）两式就是目标函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下在点 (x_0,y_0) 取得极值的必要条件。

设 $\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=-\lambda$，则由（6）知 $\dfrac{f_x(x_0,y_0)}{\varphi_x(x_0,y_0)}=-\lambda$，这样上述必要条件可改写为

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0, \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0, \\ \varphi(x_0,y_0)=0. \end{cases} \tag{7}$$

若引进辅助函数

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\,\varphi(x,y),$$

则不难看出，（7）中前两式就是

$$L_x(x_0,y_0)=0, \qquad L_y(x_0,y_0)=0\,.$$

函数 $L(x,y)$称为**拉格朗日函数**，参数 λ 称为**拉格朗日乘子**（Lagrange multiplier）.

由以上讨论，我们得到以下结论。

拉格朗日乘数法　要找函数 $z=f(x,y)$在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点，可以先作拉格朗日函数

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\,\varphi(x,y),$$

其中 λ 为参数。求其对 x 与 y 的一阶偏导数，并使之为零，然后与方程（2）联立起来：

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{8}$$

由这方程组解出 x，y 及 λ，这样得到的(x,y)就是函数 $f(x,y)$在附加条件 $\varphi(x,y)$=0 下的可能极值点.

这一方法还可以推广到自变量多于两个及约束条件多于一个的情形.例如,要求目标函数

$$u=f(x,y,z,t)$$

在约束条件

$$\varphi(x,y,z,t)=0 \qquad 与 \qquad \phi(x,y,z,t)=0 \tag{9}$$

下的极值，可以先作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda\varphi(x,y,z,t)+\mu\phi(x,y,z,t),$$

其中 λ,μ 均为参数，求其所有的偏导数，并使之为零，然后与(9)中的两个方程联立起来求

解，这样得出的(x, y, z, t)就是函数$f(x, y, z, t)$在附加条件(9)下的可能极值点。

至于如何确定所求得的点是否极值点，在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定.

例 7 制作一个体积为V的无盖长方体，问如何制造才能使用料最省。

解 设长方体的长、宽、高分别为x, y, z，则问题就是在条件

$$\varphi(x,y,z) = xyz - V = 0 \tag{10}$$

下，求函数

$$S = xy + 2xz + 2yz \qquad (x>0, y>0, z>0)$$

的最小值，作拉格朗日函数

$$L(x,y,z) = xy + 2z(x+y) + \lambda(xyz - V),$$

求其对x, y, z的偏导数，并使之为零，得到

$$\begin{aligned} y + 2z + \lambda yz = 0, \\ x + 2z + \lambda xz = 0, \\ x + y + \lambda yz = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

再与（10）联立求解。

由（11）可得

$$x=y=2z$$

将此代入(10)式，便得

$$x=y=2z=\sqrt[3]{2V},$$

这是唯一可能的极值点，因为由问题本身可知最小值一定存在，所以使长、宽、高比例为 2:2:1 时用料最省。

例 8 在空间直角坐标系的原点处，有一单位正电荷，设另一单位负电荷在旋转抛物面$z = x^2 + y^2$与平面$x + y + z = 1$的交线上移动。问负电荷位于何处时，两电荷间的引力最大？何时又最小？

解 由电学知识知，当负电荷位于曲线上(x,y,z)处时，两电荷间的引力为

$f = \dfrac{k}{x^2+y^2+z^2}$($k>0$为常数)。为计算方便，设函数$g(x,y,z) = \dfrac{k}{f} = x^2+y^2+z^2$为目标函数。这样$f$的最大（或最小）值就是$g$的最小（或最大）值。于是问题转化为求函数$g(x,y,z)$在条件$x^2+y^2-z=0$及$x+y+z-1=0$之下的最小值和最大值。作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1),$$

求F的各阶偏导数，并令其为零，得

$$\begin{cases} 2x+2\lambda x+\mu=0 \\ 2y+2\lambda y+\mu=0 \\ 2z-\lambda+\mu=0 \\ x^2+y^2-z=0 \\ x+y+z-=0 \end{cases}$$

解得两点

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right) 及 M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)$$

于是 $g(M_1)=9-5\sqrt{3}$， $g(M_2)=9+5\sqrt{3}$

即 $g(x,y,z)$ 在点 M_1 和 M_2 处分别取得最小值和最大值，即当负电荷位于 M_1 和 M_2 时，两电荷间的引力分别最大和最小。

作业　（极值）2，3，（最值）4（2）（4），（条件极值），5，7，8

6.7 方向导数与梯度

在物理学中，某一物理量随着它在空间或空间中的部分区域的分布情况不同，所产生的物理现象也不尽相同。为了研究某一物理现象，就必须了解产生这个物理现象的各种物理量的分布情况。例如要预报某一地区在某一时间段内的气候，就必须掌握附近各地区的气压、气温等分布情况以及该时间段内的变化规律。要研究电场的变化。就必须知道电位，电场的强度等分布情况及变化规律。我们把分布着某种物理量的空间或局部空间称为该物理量的**场**（field）。物理量为数量的场称为**数量场**（data field），物理量为向量的的场称为**向量场**（vector field）。例如密度、温度、电位形成的场都是数量场；速度、电场强度、力形成的场则是向量场。如果场中的物理量仅与位置有关，而不随着时间变化，则称这种场为**稳定场**，否则称为不稳定场。

在稳定的数量场中，物理量 u 的分布是点 P 的数量值函数 $u=f(P)$，例如场是一空间区域，则可用三元函数 $u=f(x,y,z)$ 表示；场位于一平面区域，则可用二元函数 $z=f(x,y)$ 描述。

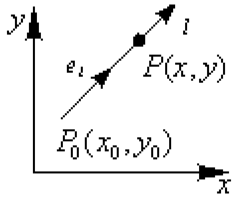
本节将介绍稳定的数量场的两个重要概念－方向导数与梯度

6.7.1 方向导数的概念

我们知道无论导数还是偏导数，都是函数对自变量的变化率。本节在讨论一种特殊的变化率，即方向导数。如何再从方向导数引出梯度的概念，它在应用中非常重要。

偏导数反映的是函数沿坐标轴方向的变化率，但在许多物理问题中，需要考虑函数在某一点沿某一方向或任意方向的变化率问题。例如，在热传导问题中，需研究温度在各个方向上的变化率；要进行气象预报，就要确定大气温度、气压沿着某些方向的变化率。

设 l 是 xOy 平面上以 $P_0(x_0,y_0)$ 为始点的一条射线，它的方向用向量 $\underset{\sim}{l}$ 表示，$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与 l 同方向的单位向量（图 6－21）。射线 l 的参数方程为



$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\cos\beta. \end{cases} \qquad (t\geq 0)$$

图 6－21

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内有定义，$P(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$ 为 l 上另一点，且 $P\in U(P_0)$.如果函数增量 $f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)$ 与 P 到 P_0 的距离 $|PP_0|=t$ 的比值。

$$\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

当 P 沿着 l 趋于 P_0（即 $t\to 0^+$）时的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数（directional derivatice），记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{l}}\right|_{(x_0,y_0)}$，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t} \qquad (1)$$

显然，方向导数也可由下式表示

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}，\ (\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

从方向导数的定义可知，方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{l}}\right|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率。

需要注意的是，方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{l}}$ 与偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 是两个不同的概念。偏导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=f_x(x_0,y_0)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f_y(x_0,y_0)$$

分别是函数在某点沿平行于坐标轴的直线的变化率，其中Δx，Δy可正可负，而方向导数定义中，则要求$t \geq 0$，即方向导数是沿一个方向的变化率。

因而函数在某点即使方向导数存在，也不能保证偏导数一定存在。例如对于圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$，在顶点$O(0,0)$处沿任何方向的方向导数都存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\rho \to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+(0+\Delta y)^2}-0}{\rho} = \lim_{\rho \to 0}\frac{\rho}{\rho} = 1$$

但在（0，0）点的两个偏导数都不存在，如

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

故$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$不存在。

关于方向导数的存在及计算，我们有以下定理.

定理　如果函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微，那么函数在该点沿任一方向$\boldsymbol{l}$的方向导数存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta, \tag{2}$$

其中$\cos\alpha$,$\cos\beta$是方向l的方向余弦.

证　由假设，$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微，故有

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + {}_o\,(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}).\end{aligned}$$

但点$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$在以$(x_0,y_0)$为始点的射线$l$上时，应有

$\Delta x = t\cos\alpha$,$\Delta y = t\cos\beta$,$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=t$.所以

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}\\&= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta\end{aligned}$$

这就证明了方向导数存在，且其值为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

类似地，如果函数$f(x, y, z)$在点(x_0, y_0, z_0)可微，那么函数在该点沿着方向

$\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} = f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma$$

例 1 求函数 $z = ye^{2x}$ 在点 $P(0,1)$ 处沿着从点 $P(0,1)$ 到点 $Q(-1,2)$ 的方向的方向导数。

解 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,1)} = 2ye^{2x}\Big|_{(0,1)} = 2$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,1)} = e^{2x}\Big|_{(0,1)} = 1$

方向 $\boldsymbol{l}$ 即向量 $\overrightarrow{PQ} = \{-1,1\}$ 的方向，其方向余弦为 $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

于是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,0)} = 2\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\text{。}$$

例 2 设曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$，求函数

$u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数。

解 令 $F(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6$，则 $\underset{\sim}{n} = \{4x, 6y, 2z\}\big|_{(1,1,1)} = \{4,6,2\}$，故

$\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}},$$

u 在点 P 的偏导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P = \left.\frac{1}{z}\frac{6x}{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}\right|_P = \frac{6}{\sqrt{14}}, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P = \left.\frac{1}{z}\frac{8y}{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}\right|_P = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P = \left.\frac{-1}{z^2}\sqrt{6x^2 + 8y^2}\right|_P = -\sqrt{14}\text{。}$$

所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P \cos\gamma$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}}\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}}\frac{3}{\sqrt{14}} - \sqrt{14}\frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}$$

6.7.2 梯度、向量值函数与场

1．梯度

多元函数在一点的方向导数依赖于方向、

一般来说，沿不同的方向其方向导数不尽相同。这就很自然提出一个问题：沿哪一个方向其方向导数最大？其最大值是多少？为解决这一问题，我们引入梯度的概念。

在二元函数的情形，设函数$f(x,y)$在平面区域D内具有一阶连续偏导数，则对于每一点$P_0(x_0,y_0)\in D$，都可确定一个向量

$$f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j},$$

这向量称为函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的梯度（gradient），记作 $\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)$, 即

$$\boxed{\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}.}$$

如果函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微，$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$是与方向$\boldsymbol{l}$同向的单位向量，则方向导数可写成梯度与$\underset{\sim}{e_l}$的数量积形式

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$
$$=\mathrm{grad}\,f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e}_l$$

由于$\underset{\sim}{e_l}$是单位向量，故又有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=|\,\mathrm{grad}\,f(x_0,y_0)\,||\,e_l\,|\cos\theta=|\,\mathrm{grad}\,f(x_0,y_0)\,|\cos\theta$$

其中$\theta=(\widehat{\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0),\boldsymbol{e}_l})$.

这一关系式表明了函数在一点梯度与函数在这点的方向导数间的关系.特别，当向量$\boldsymbol{e}_l$与$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)$的夹角$\theta=0$，即沿梯度方向时，方向导数$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$取得最大值，这个最大值就是梯度的模$|\,\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)\,|$.这就是说，

> 函数在一点的梯度是个向量，它的方向是函数在这点的方向导数取最大值的方向，它的模就等于方向导数的最大值.

梯度的概念也可以推广到二元以上的多元函数。如三元函数$u=f(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$具有连续的偏导数，则向量

$$f_x(x_0,y_0,z_0)\underset{\sim}{i}+f_Y(x_0,y_0,z_0)\underset{\sim}{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\underset{\sim}{k}$$

即为函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度 $gradf(x_0,y_0,z_0)$。

例 3 求函数 $u=3x^2+2y^2-z^2$ 在点 $P(1,2,-1)$ 处分别沿什么方向时方向导数取得最大值和最小值？并求出其最大值和最小值。

解　该函数在点 P 处的梯度

$$gradu\big|_P=(6x\underset{\sim}{i}+4y\underset{\sim}{j}-2z\underset{\sim}{k})\big|_P=6\underset{\sim}{i}+8\underset{\sim}{j}+2\underset{\sim}{k}$$

由梯度的定义可知，函数沿向量 $(6,8,2)$ 的方向，方向导数取得最大值：

$$|\,gradu\big|_P=\sqrt{6^2+8^2+2^2}=2\sqrt{26}$$

而沿梯度 $grad\,u\big|_P$ 的反方向 $(-6,-8,-2)$，方向导数取得最小值：

$$-|\,grad\,u\big|_P=-2\sqrt{26}$$

例 4　由物理学知，点电荷 q 在点 (x,y,z) 处的电位为

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\ ,\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

求　$grad\,U$

解　$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{x}{r^3}\,,$$

同理　$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{y}{r^3}\,,\ \frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{z}{r^3}$$

故　$$grad\,U=\frac{\partial U}{\partial x}\underset{\sim}{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\underset{\sim}{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\underset{\sim}{k}$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}(x\underset{\sim}{i}+y\underset{\sim}{j}+z\underset{\sim}{k})=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\underset{\sim}{r}$$

其中　$\underset{\sim}{r}=x\underset{\sim}{i}+y\underset{\sim}{j}+z\underset{\sim}{k}$，而 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\underset{\sim}{r}$ 正是点电荷 q 在点 (x,y,z) 处的电场强度 $\underset{\sim}{E}$，于是 $\underset{\sim}{E}$ 和电位 U 之间的关系是

$$\underset{\sim}{E}=-grad\,U$$

这说明，电位在电场强度相反的方向增加得最快。

前面已经指出，在稳定的数量场中，物理量的分布，可以用数量值函数 $u=f(P)$ 表示。在对数量场的研究中，我们经常需要考察在场中具有相同物理量的点，即使函数 $u=f(P)$ 取

相同数值的各点

$$f(P)=C$$

其中C为常数。例如，在一个空间的数量场$u=f(x,y,z)$中，$f(x,y,z)=C$表示一个曲面，其上各点的函数值均相等，我们称该曲面为**等值面**，如气象学中的等温面、等压面，电学中的等位面等。而对于平面上的数量场 $z=f(x,y)$，则称曲线$f(x,y)=C$位**等值线**，如地图中上的等高线等。

为了进一步说明梯度的意义，我们结合等值面（线）从几何上来看梯度的方向。

由于等值线$f(x,y)=C$上任一点$P(x,y)$的法线斜率为

$$K_{法}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{1}{-\frac{f_x}{f_y}}=\frac{f_y}{f_x}$$

可见法线与向量(f_x,f_y)平行。因而梯度$\underline{\mathrm{grad}}\, f(x,y)=(f_x,f_y)$就是等值线上点$P$处的法向量。所以$z=f(x,y)$在点$P$处的梯度方向与过点$P$的等值线在该点的法线方向相同，并且从数值较低的等值线指向数值较高的等值线，如图 6－22 所示。

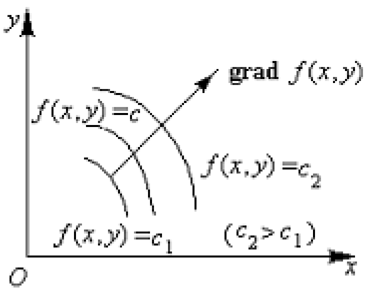


图 6－22

例 5 某处地下埋有物品E，以该处为坐标原点建立平面直角坐标系。已知E在大气中散发着特有气味，设气味的浓度在地表xOy平面上的分布为

$$v=e^{-k(x^2+y^2)} \quad (k\text{ 为正的常数})$$

一条警犬在点(x_0,y_0)处嗅到气味后，沿着气味最浓的方向搜索，求警犬搜索的路线。

解 设警犬搜索路线为$y=y(x)$，在点(x,y)处前进的方向为曲线$y=y(x)$的切向量$\underset{\sim}{S}=\{1,\frac{dy}{dx}\}$方向。而气味最浓的方向是$v$的梯度方向。解得

$$\underline{\mathrm{grad}}v=e^{-k(x^2+y^2)}(-k)(2x\underset{\sim}{i}+4y\underset{\sim}{j})$$

因为$\underset{\sim}{s}\,//\,\underline{\mathrm{grad}}v$，于是

$$\frac{1}{2x}=\frac{1}{4y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

得搜索路线 $y = \dfrac{y_0}{x_0^2} x^2 \qquad (x_0 \neq 0)$

若 $x_0 = 0$，搜索路线为 $x = 0$。

本题也可按下列方法求解：

气味的等值线为 $x^2 + 2y^2 = C$，两边求导，得等值线满足的微分方程

$$x + 2yy' = 0，即 \quad y' = -\frac{x}{2y}$$

由于警犬沿气味的梯度方向搜索，所以搜寻曲线与气味等值线正交，即搜寻曲线的切线的斜率与等值线的斜率为负倒数关系。故搜寻曲线满足初值问题

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} 。$$

（以下略）

作业 （方向导数）2，4，（梯度）5，8