7.1 向量空间

7.1.1 向量空间的概念

1. 向量空间是线性代数中的一个十分重要而基本的概念，向量空间可看成是具体的几何空间的推广与升华。

2. 定义 7-1 设 V 是 n 元向量的集合，如果 V 非空，并且关于向量的线性运算封闭（即对任意 $\mathbf{v}_1 \in V, \mathbf{v}_2 \in V, k \in \mathbf{R}$, 都有 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 \in V$, $k\mathbf{v}_1 \in V$), 则称 V 是一个向量空间.

注 1：向量的加法和向量与数的乘法合起来称为向量的线性运算。

注 2：V 关于向量的线性运算封闭的意思是：V 中的向量做线性运算，其结果还在 V 中。

注 3：证明 V 是向量空间就是要证明：V 非空、并且 V 关于向量的线性运算封闭。

3. 下面介绍几个例子，这些例子都比较重要，希望同学们重视一下。

例 只含有零向量的集合 $V=\{\mathbf{0}\}$ 是一个向量空间。

注：V 中只含零向量一个向量。这个零向量可以是二元零向量，也可以是三元零向量……

例 若 V 是向量空间，且含非零向量 v，则 V 中一定有无穷多个向量。
证 由 V 是向量空间可知，V 关于向量的线性运算封闭。

于是，对任意的 $k \in \mathbf{R}$, 都有 $kv \in V$, 所以 V 中一定有无穷多个向量。

例 7-1 所有 n 元实向量的集合 $\mathbf{R}^n$ 是一个向量空间.

证明 显然 $\mathbf{R}^n$ 非空.又因为任何两个 n 元实向量的和还是 n 元实向量，任意实数与 n 元实向量之积还是 n 元实向量，它们的运算结果都在 $\mathbf{R}^n$ 中，所以 $\mathbf{R}^n$ 关于向量的线性运算封闭，故 $\mathbf{R}^n$ 是向量空间.

例 7-2 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的所有解向量构成的集合 S 是一个向量空间. 把它叫做这个齐次线性方程组的**解空间**.

证明 因为齐次线性方程组总是有解的，所以 S 非空.

对于 S 中任意两个向量 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 及任一实数 k，由 $\mathbf{Av}_1=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{Av}_2=\mathbf{0}$ 得出

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=\mathbf{0}\ , \qquad \mathbf{A}(k\mathbf{v}_1)=\mathbf{0}\ .$$

于是，$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 \in S, k\mathbf{v}_1 \in S$，$S$ 关于向量的线性运算封闭，故 S 是向量空间.

例 7-3 若 V 是向量空间，则 V 一定含有零向量.
注：含有零向量是 V 为向量空间的必要条件。
证明 因为 V 是向量空间，所以 V 非空.设 $\mathbf{v} \in V$,则有 $\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{v} \in V$，故 V 含有零向量.

由于非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解集不含零向量，所以 **$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解集不是向量空间.**

例 7-4 集合 V={ $\mathbf{v}=[x,y]^T \mid x,y\in\mathbf{R}$ 且 xy=0 }不是向量空间.

注：这里使用了表示集合的描述法。描述法的形式是 $\{x\mid P\}$，x 是该集合的元素的一般形式，P 是该集合的元素的共同特征，也可以说要满足的条件。

证明 因为 $\mathbf{v}_1=[1,0]^T\in V,\mathbf{v}_2=[0,1]^T\in V$, 但是 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=[1,1]^T$ 不满足两个分量的乘积为 0 这个条件， $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\notin V$， 所以 V 关于向量的加法运算不封闭.故 V 不是向量空间.

例 7-5 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 是 m 个已知的 n 元向量，则集合 $V=\left\{\mathbf{v}=\sum_{j=1}^{m}x_j\mathbf{a}_j \mid x_1,x_2,\cdots,x_m\in\mathbf{R}\right\}$ 是一个向量空间. 把它叫做**由向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 所生成的向量空间**.

注 1：**这个例题很重要，要好好掌握。**

注 2：V 中的元素都是 $\mathbf{v}=\sum_{j=1}^{m}x_j\mathbf{a}_j$ 的样子，其中系数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为任意的实数。让 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 每取一组具体的实数可得到 V 中一个具体的向量 $\mathbf{v}$， 让 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 取遍所有的实数可得到 V 中所有的向量。根据刚才的讨论可知， $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 都在 V 中， V 由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 的所有线性组合构成。

证明 显然 V 非空.

设 $\mathbf{v}_1=\sum_{j=1}^{m}x_j\mathbf{a}_j\in V,\mathbf{v}_2=\sum_{j=1}^{m}y_j\mathbf{a}_j\in V,k\in\mathbf{R}$,

由 $x_j\in\mathbf{R},y_j\in\mathbf{R}$ 可知 $x_j+y_j\in\mathbf{R}$ ， 所以 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\sum_{j=1}^{m}(x_j+y_j)\mathbf{a}_j\in V$.

由 $k\in\mathbf{R},x_j\in\mathbf{R}$ 可知 $kx_j\in\mathbf{R}$ ， 所以 $k\mathbf{v}_1=\sum_{j=1}^{m}(kx_j)\mathbf{a}_j\in V$,

【注：只要一个向量能写成 $\mathbf{v}=\sum_{j=1}^{m}x_j\mathbf{a}_j$ 的形式，且系数为实数，那么这个向量就属于 V】

V 关于向量的线性运算封闭，故 V 是向量空间.

4. **定义 7-2** 设 V_1 和 V_2 是两个向量空间.

(1) 若 $V_1\subseteq V_2$， 则称 V_1 是 V_2 的**子空间**.

（2）若 $V_1\subseteq V_2$ 且 $V_2\subseteq V_1$， 则称这两个**向量空间相等**，记作 $V_1=V_2$.

7.1.2 向量空间的基与维数

1. **定义 7-3** 向量空间 V 的一个极大无关组叫做 V 的一个**基**. V 的秩叫做 V 的**维数**，记作 dim(V). 若 dim(V)=r, 则称 V 为 ***r* 维向量空间**.

注：有的书把基称为基底。

2. **例** $V=\left\{\mathbf{v}=[x,y,0]^T \middle| x,y\in\mathbf{R}\right\}$是一个二维向量空间，可看成$\mathbf{R}^3$的一个二维子空间，

$\mathbf{e}_1=[1,0,0]^T,\mathbf{e}_2=[0,1,0]^T$是$V$的一个基。

例 $V=\left\{k[1,1,0]^T \middle| k\in\mathbf{R}\right\}$是一个一维向量空间，可看成$\mathbf{R}^3$的一个一维子空间，

$[1,1,0]^T$是V的一个基。

例 齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\ \quad\ x_2+x_3=0\end{cases}$的解空间$S$的维数就是解空间$S$的秩，为 1.

【注：齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的解空间的维数为$n-r(\mathbf{A})$】

该齐次线性方程组的解空间的基就是解空间的极大无关组，也就是这个齐次线性方程组的基础解系，为$[2,-1,1]^T$.

例 设V是由向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$所生成的向量空间，证明：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$的极大无关组是$V$的基，$V$的维数等于$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$的秩。

证 设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$的秩为$r$，$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$是$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$的极大无关组，根据定理 5-7 可知，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$中的每个向量都能由$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$线性表示。又因为$V$中的向量都能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性表示，所以$V$中的向量都能由$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$线性表示。根据定理 5-12 可知，$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$是$V$的极大无关组，也就是$V$的基，进一步可得，$V$的维数=$V$的秩=$V$的极大无关组所含向量的个数=$r$，所以$V$的维数=$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$的秩.

例 设V是由向量$\mathbf{a}_1=[1,1,0]^T,\mathbf{a}_2=[1,-1,1]^T,\mathbf{a}_3=[3,1,k]^T$所生成的向量空间，

（1）当k取何值时，$\dim(V)=2$？　（2）当k取何值时，$\dim(V)=3$？

解 $$[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&-1&1\\0&1&k\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&3\\0&-2&-2\\0&1&k\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&3\\0&-2&-2\\0&0&k-1\end{bmatrix}$$

（1）当$k=1$时，$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)=2,\quad \dim(V)=2.$

（2）当$k\neq1$时，$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)=3,\quad \dim(V)=3.$

3. 若已知r维向量空间V的基为$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_r$，则向量空间$V$可表示成

$$V=\left\{\mathbf{v}=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_rv_r \middle| x_1,x_2,\cdots,x_r\in\mathbf{R}\right\}$$

的形式.

证 由$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_r$是向量空间$V$的基可知，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_r$是向量空间$V$的极大无关组，根据定理 5-7 可知，$V$中的向量都能由$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_r$线性表示，即$V$中的向量都能表示成$\mathbf{v}=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_rv_r$的形式，所以$V\subseteq\left\{\mathbf{v}=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_rv_r\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_r\in\mathbf{R}\right\}$.

反过来，由$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_r$是向量空间$V$的基可知，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_r$都是$V$中的向量。因为$V$是向量空间，$V$关于向量的线性运算封闭，所以$\mathbf{v}=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_rv_r\in V$，即$\left\{\mathbf{v}=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_rv_r\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_r\in\mathbf{R}\right\}\subseteq V$.

综合上面的证明可得 $V=\left\{\mathbf{v}=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_rv_r\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_r\in\mathbf{R}\right\}$

注：上面的结论给出了表示向量空间的一种方法。根据这一结论，以后可用V的基作为代表来对V进行理论研究. 在研究齐次线性方程组的解时，我们就是按照这样的思路来做的.

4. **定理 7-1** 设V是n维向量空间，$m<n$，则V中任一线性无关的向量组$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m$都可扩充成$V$的一个基.

证明 因为$m<n$，所以一定有$\mathbf{v}_{m+1}\in V$,使$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_{m+1}$线性无关.（否则，对任意的$\mathbf{v}\in V$，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}$均线性相关。由定理 5-4 可知，$\mathbf{v}$可由$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m$线性表示，再由定理 5-12 可知$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m$为$V$的一个基，dim($V$)=$m$，这与$V$的维数为$n$矛盾.）

如果$m+1=n$，定理得证.

如果$m+1<n$，继续上述步骤，必存在$\mathbf{v}_{m+2},\cdots,\mathbf{v}_n$，使$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_m$，$\mathbf{v}_{m+1}$，$\mathbf{v}_{m+2},\cdots,\mathbf{v}_n$线性无关，这就是$V$的一个基.

7.1.3 向量在基下的坐标

1. 在空间解析几何中，如果向量$\vec{a}$按照三个坐标轴上的单位向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$的分解式为

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\ ,$$

则把上式中的三个系数叫做向量$\vec{a}$在该坐标系下的坐标.

按照类似的方法,我们可给出向量在基下的坐标的定义.

注意：向量空间的基的作用就和空间直角坐标系中$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$的作用类似，在向量空间中选定一个基就相当于在向量空间中建立了一个坐标系，只是现在的坐标系是一个普通的坐标系，不是直角坐标系。如果要求基中的向量是两两正交的单位向量，这时就相当于在向量空间中建立了一个直角坐标系。

2. 设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$是$n$维向量空间$V$的一个基（即极大无关组），则由定理 5-7 可知$V$中任一向量$\mathbf{b}$都能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$唯一地线性表示,即存在唯一的一组有序数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得

$$\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n . \qquad (7.1)$$

反之，任给一组有序的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，总有 V 中唯一的向量 $\mathbf{b}$ 按式（7.1)与之对应.

可见，V 中的向量 $\mathbf{b}$ 与有序数组 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 一一对应。于是，我们给出下面的定义。

定义 7-4 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 是 n 维向量空间 V 的一个基，对任意向量 $\mathbf{b}\in V$,把满足 $\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n$ 的有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 所组成的向量 $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$ 叫做向量 $\mathbf{b}$ 在这个基下的**坐标**，又称为向量 $\mathbf{b}$ 在这个基下的**坐标向量**.

3. 令 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$，则 $\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n$ 可表示成矩阵形式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

求向量在一个基下的坐标，就是解线性方程组.

例 7-6 求 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\mathbf{b}=[3,0,10]^T$ 在基 $\mathbf{a}_1=[1,0,2]^T$,$\mathbf{a}_2=[0,1,-1]^T$，$\mathbf{a}_3=[1,1,3]^T$ 下的坐标向量.

解 令 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$，下面来解线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

【注：由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的基可知，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性无关，所以 $\mathbf{A}$ 为可逆矩阵】

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\2&-1&3&10\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\0&-1&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\0&0&2&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\div 2}\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&2\end{bmatrix},$$

所以 $\mathbf{b}$ 在该基下的坐标向量为 $\mathbf{x}=[1,-2,2]^T$.

例 设 $\mathbf{a}_1=[1,1,1]^T$,$\mathbf{a}_2=[0,1,-1]^T$ 是向量空间 V 的基，求 V 中的向量 $\mathbf{b}=[2,3,1]^T$ 在基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 下的坐标向量.

解法 1 令 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]$，求向量 $\mathbf{b}$ 在基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 下的坐标向量就是解方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

化简以后的矩阵对应的方程组为 $\begin{cases}x_1=2\\x_2=1\end{cases}$

向量 $\mathbf{b}$ 在基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 下的坐标向量为 $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

解法 2 求向量 $\mathbf{b}$ 在基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 下的坐标向量就是解方程组 $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2=\mathbf{b}$,

即 $x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$，也即 $\begin{cases}x_1=2\\x_1+x_2=3\\x_1-x_2=1\end{cases}$

该方程组的解为 $\begin{cases}x_1=2\\x_2=1\end{cases}$

向量 $\mathbf{b}$ 在基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 下的坐标向量为 $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

7.1.4 过渡矩阵与坐标变换

1. 同一个向量在不同基下的坐标向量一般是不同的，但是这两个不同的坐标向量却有着内在的联系，现在来讨论这种联系.

【注：一个基代表一个坐标系，一个向量空间有两个基就相当于在这个向量空间中建立了两个坐标系，这里讨论的问题类似于解析几何中的坐标变换问题。】

2. 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 为 n 维向量空间 V 的一个基（称为旧基），则 V 的另一个基（称为新基）

$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 能由旧基线性表示，设

$$\begin{cases}\mathbf{b}_1=p_{11}\mathbf{a}_1+p_{21}\mathbf{a}_2+\cdots+p_{n1}\mathbf{a}_n\\ \mathbf{b}_2=p_{12}\mathbf{a}_1+p_{22}\mathbf{a}_2+\cdots+p_{n2}\mathbf{a}_n\\ \qquad\vdots\\ \mathbf{b}_n=p_{1n}\mathbf{a}_1+p_{2n}\mathbf{a}_2+\cdots+p_{nn}\mathbf{a}_n\end{cases}\tag{7.2}$$

其矩阵形式为 $[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]\mathbf{P}$，（7.3）

其中

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}.$$

式(7.2)或式(7.3)叫做从旧基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 到新基 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 的**基变换公式**，n 阶方阵 $\mathbf{P}$ 叫做从旧基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 到新基 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 的**过渡矩阵**.

【注：上面的讨论与两个向量组之间的线性表示有联系。从旧基到新基的基变换公式就是用旧基表示新基的公式，从旧基到新基的过度矩阵就是用旧基表示新基的公式中的 $\mathbf{P}$】

3. 过渡矩阵 $\mathbf{P}$ 一定是可逆矩阵.

证 因为基中向量的个数等于向量空间的维数，所以同一个向量空间的两个基所含向量的个数一定相等。$\mathbf{P}$ 是 n 阶方阵。

由 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 线性无关可得，$r([\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n])=n$.

$$n=r([\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n])=r([\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]\mathbf{P})\overset{\text{性质5-6}}{\le} r(\mathbf{P})\le n$$

所以 $r(\mathbf{P})=n$，$\mathbf{P}$ 可逆。

4. **定理 7-2** 设 n 维向量空间 V 中的向量 $\mathbf{v}$ 在旧基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 和新基 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 下的坐标向量分别为 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$，从旧基到新基的过渡矩阵为 $\mathbf{P}$，则有坐标变换公式 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$.

【注：要好好记住坐标变换公式 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，搞清楚下面的证明，能够帮助我们记住这个公式】

证明 记 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$, $\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]$.

由已知条件可得

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{P},$$
$$\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{x},$$
$$\mathbf{v}=\mathbf{B}\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}.$$

将关于 $\mathbf{v}$ 的两个式子相减，得 $\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{P}\mathbf{y})=\mathbf{0}$.

由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 为 V 的基可知，$r(\mathbf{A})=n$.再由定理 6-1 可得

$$\mathbf{x}-\mathbf{P}\mathbf{y}=0\text{，即}\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}.,$$

5. **例 7-7** 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基 $\mathbf{a}_1=[1,0,1]^T,\mathbf{a}_2=[0,1,-1]^T,\mathbf{a}_3=[1,1,2]^T$ 和

$$\mathbf{b}_1=[0,1,1]^T,\mathbf{b}_2=[1,1,0]^T,\mathbf{b}_3=[2,-1,3]^T,$$

(1) 求从基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 到基 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 的过渡矩阵 $\mathbf{P}$；

（2）设向量 $\mathbf{v}$ 在基 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 下的坐标向量为 $\mathbf{x}=[4,2,1]^T$，求 $\mathbf{v}$ 在基 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ 下的坐标向量 $\mathbf{y}$.

解 （1）记 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$, $\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]$，则 $\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{P}$.

【注：因为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性无关，并且 $\mathbf{A}$ 为方阵，所以 $\mathbf{A}$ 可逆。求过度矩阵 $\mathbf{P}$，就是解矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$. 可根据公式 $\mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 来求 $\mathbf{P}$， 也可按照下面的方法来求 $\mathbf{P}$.】 .

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\1&-1&2&1&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&-1&1&1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&2&2&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\div 2}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&1&2\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(2)因向量$\mathbf{y}$满足$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，故求$\mathbf{y}$就是解方程组$\mathbf{P}\mathbf{y}=\mathbf{x}$.

$$[\mathbf{P},\mathbf{x}]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\div 3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}=[1,3,1]^T.$$