第九章　无穷级数

9.1 常数项级数的概念和基本性质

9.1.1 级数的概念

求半径为R的球的面积：首先作圆的内接正六边形，设其面积a_1为圆的面积A的一个粗糙近似值。为了能够精确地计算A的值，我们以这个正六边形的每个边为底分别作一个顶点在圆上的等腰三角形，算出它们的面积之和a_2。那么a_1+a_2（即内接正十二边形的面积）就是A的一个较好的近似值。同样地以这个正十二边形的边为底作分别作一个顶点在圆上的等腰三角形，算出它们的面积之和a_3. 那么$a_1+a_2+a_3$（即内接正二十四边形的面积）就是A的一个更好的近似值. 如此继续下去，内接正3×2^n边形的面积就逐步逼近圆面积：

$$A\approx a_1, A\approx a_1+a_2, A\approx a_1+a_2+a_3,\cdots,, A\approx a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

如果内接正多边形的边数无限增多，即n无限增大，则和$a_1+a_2+\cdots+a_n$的极限就是所要求的圆面积A. 这时和式中的项数无限增多，于是出现了无穷多个数量依次相加的数学式子.

一般地，如果给定一个数列

$$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots,$$

则由这数列构成的表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

叫做（常数项）无穷级数，简称（常数项）级数，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

其中第n项u_n叫做级数的一般项.

作级数（1）的前n项和

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$$

s_n称为级数（1）的部分和. 当n依次取 1, 2, 3, …时, 它们构成一个新的数列:

$$s_1=u_1, s_2=u_1+u_2, s_3=u_1+u_2+u_3,\cdots, s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\cdots.$$

根据这个数列有没有极限. 引进无穷级数(1)的收敛与发散的概念.

定义　如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$\{s_n\}$有极限s, 即$\lim_{n\to\infty} s_n = s$, 则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 这时极限$s$叫做这级数的和, 并写成

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots;$$

如果$\{s_n\}$没有极限, 则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

称　$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$　为级数的余项. 用s_n来代替s所产生的误差是这个余项的绝对值$|r_n|$.

例 1　无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

叫做等比级数(又称几何级数), 其中$a \neq 0, q$叫做级数的公比. 试讨论该级数的收敛性.

解　因为该级数的部分和为

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1, \\ na, \qquad\quad q = 1. \end{cases}$$

当$|q|<1$时, $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$, 故级数收敛, 且和为$\dfrac{a}{1-q}$;

当$|q|>1$时, $\lim_{n\to\infty} s_n$不存在, 故级数发散;

当$q=1$时, $\lim_{n\to\infty} s_n$也不存在, 故级数也发散;

当$q=-1$时, 级数变成

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots,$$

易知级数也发散.

综上, 当$|q|<1$时, 等比级数收敛, 且其和为$\dfrac{a}{1-q}$; 当$|q|\geq 1$时, 等比级数发散.

例 2　讨论级数　$\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots$　的收敛性.

解　由于
$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$
因此
$$\begin{aligned}s_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$
从而
$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)=1,$$
所以这级数收敛,它的和是 1.

9.1.2 收敛级数的基本性质

性质 1 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于和$s$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$也收敛,且其和为$ks$.

性质 2　如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛于和$s,\sigma$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛,且其和为$s\pm\sigma$.

性质 3　在级数中去掉,加上或改变有限项,不会改变级数的收敛性.

证　只证在级数的前面去掉,加上或改变有限项,不会改变级数的收敛性.

设将级数
$$u_1+u_2+\cdots+u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$$
的前k项去掉,则得级数
$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}+\cdots.$$
于是新得的级数的部分和为
$$\sigma_n=u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}=s_{k+n}-s_k,$$
其中s_{k+n}是原来级数的前$k+n$项的和. 因为s_k是常数,所以当$n\to\infty$时,σ_n与s_{k+n}或者同时收敛或者同时发散.

性质 4 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则对这级数的项任意加括号后所成的级数
$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots \tag{4}$$
仍收敛,且其和不变.

证　设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$（相应于前 n 项）的部分和为s_n, 加括号后所成的级数(4)(相应于前k项)的部分和为A_k, 则

$$A_1 = u_1 + \cdots + u_{n_1} = s_{n_1},$$

$$A_2 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) = s_{n_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = s_{n_k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

可见, 数列$\{A_k\}$是数列$\{s_n\}$的一个子数列. 由数列$\{s_n\}$的收敛性以及收敛数列与其子数列的关系可知, 数列$\{A_k\}$必定收敛, 且有　$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} s_n$,
即加括号后所成的级数收敛, 且其和不变.

如果加括号后所成的级数收敛, 则不能断定去括号后原来的级数也收敛. 例如, 级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

收敛于零, 但级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的.

性质 5（级数收敛的必要条件）　如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则它的一般项u_n趋于零, 即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

证 略

级数的一般项收敛于零并不是级数收敛的充分条件. 有些级数虽然一般项趋于零, 但仍然是发散的. 例如, 调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{5}$$

虽然它的一般项趋于零, 但它是发散的.

例 3 证明调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$是发散的.

证　将原级数的第一项和第二项括起来, 然后将第2^m+1项到第2^{m+1}（$m=1,2,\cdots$）括起来, 的以新级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}\right)+\cdots.$$

注意这个级数的一般项$\dfrac{1}{2^m+1}+\dfrac{1}{2^m+2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{m+1}}$中共有$2^m\,(m=1,2,\cdots)$项, 所以

$$\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}>\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}=\frac{1}{2}.$$

说明新级数的一般项不趋于零, 故不收敛, 从而原调和级数发散.

作业　1,2,5,7

9.2 正项级数及其敛散性的判别法

9.2.1 正项级数收敛的基本定理

对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$u_n\geq 0$，则称此级数为正项级数，这时部分和数列$\{s_n\}$显然是单调增加数列，若$\{s_n\}$有界，即$s_n\leq M$，由单调有界原理，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛于$s$，且$s_n\leq s\leq M$。反之，若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则有$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，从而$\{s_n\}$有界。

基本定理 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是：它的部分和数列$\{s_n\}$有界。

例 1 讨论$p-$级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \qquad（2）$$

的收敛性，其中常数$p>0$.

解　设$p\leq 1$，这时级数的各项不小于调和级数的对应项：$\dfrac{1}{n^p}\geq\dfrac{1}{n}$，但调和级数发散,其部分和为无穷大，因而该级数的部分和数列无界,由基本定理，当$p\leq 1$时级数（2）发散.

设 $p>1$，因为当$k-1\leq x\leq k$时，有$\dfrac{1}{k^p}\leq\dfrac{1}{x^p}$，所以

$$\frac{1}{k^p}=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^p}dx\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}dx,(k=2,3,\cdots)$$

从而级数（2）的部分和

$$s_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}dx=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x^p}dx$$

$$=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1},\quad(n=2,3,\cdots)$$

这说明数列$\{s_n\}$有界，因此级数（2）收敛.

综上所述，$p-$级数（2）当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散.

9.2.2 比较判别法

比较审敛法 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，且$u_n\le v_n(n=1,2,\cdots)$，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；反之，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$也发散；

证 若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛于和σ，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\le v_1+v_2+\cdots+v_n\le\sigma(n=1,2,\cdots),$$

即部分和数列$\{s_n\}$有界，由基本定理知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

反之，设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$必发散，因为若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则由上面的证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛，显然于假设矛盾.

推论 1 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，且存在自然数N，使当$n\ge N$时有$u_n\le kv_n(k>0)$成立，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，且当$n\ge N$时有$u_n\ge kv_n(k>0)$成立，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

例 2 研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$的敛散性。

解 显然这时正项级数，而且$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n,n=1,2,\cdots,$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$是以$\frac{1}{2}$为公比的等比级数，故收敛，再由比较法即知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$收敛.

推论 2 （比较审敛法的极限形式） 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，(其中

$v_n \neq 0, n=1,2,\cdots$),如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$$

则

（1） 当$0<l<\infty$时，两个级数同时敛散；

（2） 当 l=0 时,若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛,若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.

（3） 当$l=+\infty$时,若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散;若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.

证 由推论 1 易证。

例 3 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$的收敛性.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1>0,$ 而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，根据推论 2 知此级数发散.

9.2.3 比值判别法

定理（比值审敛法，达朗贝尔（D'Alembert）判别法）设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，如果

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$ 则当$\rho<1$时级数收敛；$\rho>1$(或$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$)时级数发散；$\rho=1$时级数可能收敛也可能发散.

证 （i）当$\rho<1$。取一个适当小的正数ε，使得$\rho+\varepsilon=r<1$，根据极限定义，存在自然数m，当$n\geq m$时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon=r.$$

因此 $u_{m+1}<ru_m, u_{m+2}<ru_{m+1}<r^2u_m,\cdots,u_{m+k}<r^ku_m,\cdots$. 而级数$\sum_{k=1}^{\infty}r^ku_m$ 收敛（公比$r<1$），根据定理 2 的推论，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(ii)当$\rho>1$。取一个适当小的正数ε，使得$p-\varepsilon>1$。根据极限定义，当$n\geq m$时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon > 1,$$

也就是
$$u_{n+1} > u_n.$$

所以当$n \geq m$时，级数的一般项u_n时逐渐增大的，从而$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.根据级数收敛的充要条件可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

类似地，可以证明当$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

(iii)当$\rho = 1$时级数可能收敛也可能发散.例如$p-$级数（2），不论p为何值都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{n^p}}=1.$$

但$p-$级数，当$p>1$时收敛，当$p \leq 1$时发散.因此只根据$\rho=1$不能判定级数的收敛性.

例 4　证明级数

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots 1$$

是收敛的，并估计以级数的部分和s_n近似代替和s所产生的误差.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1,$$

根据比值审敛法可知所给级数收敛.

以这级数的部分和s_n近似代替和s所产生的误差为

$$\begin{aligned}|r_n| &= \frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots \\ &= \frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right) \\ &< \frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)=\frac{1}{n!}\frac{1}{1-\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{(n-1)(n-1)!}.\end{aligned}$$

例 5　判定级数$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\cdots+\frac{n!}{10^n}+\cdots$的收敛性.

解　因为 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\frac{n+1}{10},\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty.$

根据比值审敛法可知所给级数发散.

9.2.4 根值判别法

定理（根值判别法，柯西判别法）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则当$\rho<1$时级数收敛，$\rho>1$（或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$）时级数发散，$\rho=1$时级数可能收敛有可能发散.

类似于比值判别法

例 6　讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$的收敛性，其中$a_n\to a\neq 0,a_n,b,a$皆为正数。

解　因为$\sqrt[n]{u_n}=\frac{b}{a_n}\to\frac{b}{a}(n\to\infty)$，所以当$b<a$时级数收敛，当$b>a$时级数发散。当$b=a$时，$\rho=1$根式法失效，未定.

定理（极限审敛法）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，

（1）　如果$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l>0$（或），则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

（2）　如果$p>1$，而$\lim\limits_{n\to\infty}n^p u_n=l\,(0\le l<+\infty)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证　（1）在极限形式的比较审敛法中，取$v_n=\frac{1}{n}$，由调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，知结论成立。

（2）在极限形式的比较审敛法中，取$v_n=\frac{1}{n^p}$，当$p>1$时，$p-$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，故结论成立。

例 7　判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$的收敛性.

解　因$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$，故

$$\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1,$$

根据极限审敛法，知所给级数收敛.

9.2.5 积分判别法

定理(积分判别法) 设非负函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调减少,则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$与反常积分$\int_1^{+\infty} f(x)dx$的敛散性相同.

证明 由于$f(x)$单调减少,且$f(x)\ge 0$,则当$x\in[n-1,n]$时,有

$$f(n)\le f(x)\le f(n-1)$$

从而
$$f(n)\le \int_{n-1}^{n} f(x)dx \le f(n-1)\ n=2,3,\cdots$$

相加得
$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)\le \int_1^{m} f(x)dx \le 1+\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

即$\{s_m\}$有界,故级数收敛.

若反常积分收敛,由函数$f(x)$的非负性,即知$\int_1^{+\infty} f(x)dx=+\infty$,级数的部分和

$$\sum_{n=1}^{m} f(n)\ge \int_1^{m+1} f(x)dx$$

显然,$\lim\limits_{m\to\infty} S_m=+\infty$,故级数发散.

例 8 讨论级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$的敛散性,其中$p>0$.

解 $p>0$时,函数$f(x)=\frac{1}{x\ln^p x}$在$[2,+\infty)$上是非负递减函数.由于反常积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}=\begin{cases} +\infty\quad, & 当p\le 1时 \\ \frac{1}{(p-1)\ln^{p-1}2}, & 当p>1时 \end{cases}$$

故当$p\le 1$时级数发散,当$p>1$时级数发散.

作业 1 偶数, 2 偶数,3 偶数,4 偶数,5 偶数,8,9,12

9.3 任意项级数及其敛散性的判别法

9.3.1 交错级数及其审敛法

所谓交错级数是这样的级数，它的各项是正负交错的，从而可以写成下面的形式：

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots, \tag{3}$$

或

$$-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots, \tag{4}$$

其中$u_1,u_2,\cdots$都是正数。按级数（3）的形式来证明关于交错级数的一个审敛法

定理 7（莱布尼茨定理）　如果交错级数$\sum\limits_{你=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件：

（1）$u_n \geq u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$;　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

则级数收敛，且其和$s\leq u_1$，其余项r_n的绝对值$|r_n|\leq u_{n+1}$。

证　先证明前$2n$项的和s_{2n}的极限存在。为此把s_{2n}写成两种形式：

$$s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

及

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}.$$

根据条件（1）知道括弧内中的差都是非负的.由第一种形式可见数列$\{s_{2n}\}$是单调增加的，由第二种形式可见$s_{2n}<u_1$。于是，根据单调有界数列必有极限的准则知道，当n无限增大时，s_{2n}趋于一个极限s，并且s不大于u_1：$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}=s\leq u_1$.

再证明前$2n+1$项的和s_{2n+1}的极限也是s。事实上，我们有

$$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}.$$

由条件（2）知$\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n+1}=0$，因此

$$\lim_{n\to\infty}s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(s_{2n}+u_{2n+1})=s.$$

由于级数的前偶数项的和与奇数项的和趋于同一极限s，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$的部分和$s_n$当$n\to\infty$时具有极限$s$。这就证明了级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛于和$s$，且$s\leq u_1$。

这时余项$r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)$，其绝对值$|r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots$,
上式右端也是一个交错级数，它也满足收敛的两个条件，所以其和小于级数的第一项，也就是说$|r_n|\leq u_{n+1}$.证明完毕.

例如，交错级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$
满足条件

（1）$u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$

及

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$

所以它是收敛的，且其和 $s<1$。如果取前 n 项的和

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

作为 s 的近似值，所产生的误差 $|r_n|\le\frac{1}{n+1}(=u_{n+1})$.

例 2 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\frac{\pi}{3n}$ 的敛散性.

解　由于 $0<\frac{\pi}{3n}<\frac{\pi}{2}$,对于一切 $n\ge1$,故

$$u_n=\tan\frac{\pi}{3n}>0\quad(n=1,2,\cdots)$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\frac{\pi}{3n}$ 是交错级数,并满足

$$u_n>\tan\frac{\pi}{3n}>\tan\frac{\pi}{3(n+1)}=u_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\frac{\pi}{3n}=0$,故由莱布尼兹判别法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\frac{\pi}{3n}$ 收敛.

9.3.2 绝对收敛与条件收敛

现在我们讨论一般的级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

它的各项为任意实数。如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 各项的绝对值所构成的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛。容易知道，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 是绝对收敛级数,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是条件收敛级数.

定理　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定收敛.

证　令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1,2,\cdots)$$

显然 $v_n \geq 0$ 且 $v_n \leq |u_n|\ (n = 1,2,\cdots)$。因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故由比较审敛法知道，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2v_n$ 也收敛。而 $u_n = 2v_n - |u_n|$，由收敛级数的基本性质可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}2v_n - \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，定理证毕.

例 3　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 的收敛性.

解　因为 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ 也收敛。由定理 8 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛.

一般说来，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，我们不能断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散，但是，如果是用比值审敛法或根值审敛法根据 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho > 1$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho > 1$ 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则我们可以断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定发散.这是因为从 $\rho > 1$ 可推知 $|u_n|$ 不趋于零 $(n \to \infty)$，从而 u_n 不趋于零 $(n \to \infty)$，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的.

例 4　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n^s}\ (s > 0, \alpha > 0)$ 是绝对收敛、条件收敛还是发散的？

解　考虑绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-\alpha)^n}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^s}$，因为 $\lim_{n\to\infty} = \dfrac{\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{\alpha^n}{n^s}} = \alpha$，故由比值判别法

知当$\alpha<1$时级数绝对收敛，当$\alpha>1$时级数发散。当$\alpha=1$时级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}$，其绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^s}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，故由比较判别法知当$s>1$时级数绝对收敛，当$0<s\le 1$时由莱布尼兹判别法知级数条件收敛，总结如下：

当$0<\alpha<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n^s}\,(s>0,\alpha>0)$绝对收敛；

当$\alpha>1$时级数发散；

当$\alpha=1$，且$s>1$时，级数绝对收敛；

当$\alpha=1$，且$0<s\le 1$时，级数条件收敛。

作业　1 偶数，3，5，6

9.4 幂级数

9.4.1 函数项级数的概念

如果给定一个定义在区间I上的函数列

$$u_1(x),u_2(x),u_3(x),\cdots,u_n(x),\cdots,$$

则由这函数列构成的表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad (1)$$

称为定义在区间I上的（函数项）无穷级数，简称（函数项）级数。

对于每一个确定的值$x_0\in I$，函数项级数（1）成为常数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots. \qquad (2)$$

这个级数（2）可能收敛也可能发散。如果（2）收敛，称点x_0是函数项级数（1）的收敛点；如果（2）发散，称点x_0是函数项级数（1）的发散点。函数项级数（1）的所以收敛点的全体称为它的收敛域，所有发散点的全体称为它的发散域.

对应于收敛域内的任意一个数x，函数项级数称为一收敛的常数项级数，因而有一确定的和s。这样，在收敛域上函数项级数的和是x的函数$s(x)$，通常称$s(x)$为函数项级数的和函数，这函数的定义域就是级数的收敛域，并写成

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

把函数项级数（1）的前 n 项的部分和记为$s_n(x)$，则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=s(x).$$

仍把$r_n(x)=s(x)-s_n(x)$叫做函数项级数的余项（当然，只有x在收敛域上$r_n(x)$才有意义），于是有　$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0.$

例 1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，是定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数项级数，当$|x|<1$时级数收敛；其他情况级数发散。

9.4.2 幂级数及其收敛性

型为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \qquad （3）$$

的函数项级数称为幂级数，其中常数$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$称为幂级数的系数.

定理 1 （阿贝尔（Abel）定理）　如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_0 x^n$当$x=x_0\ (x_0\neq 0)$时收敛，则适合不等式的$|x|<|x_0|$的一切$x$使这幂级数绝对收敛。反之，如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x=x_0$时发散，则适合不等式$|x|>|x_0|$的一切$x$使这幂级数发散.

证　先设x_0是幂级数（3）的收敛点，及级数

$$= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots,$$

收敛。根据级数三类的必要条件，这时有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$

于是存在一个常数M，使得　$|a_n x_0^n| \le M \quad (n=0,1,2,\cdots).$

这样级数（3）的一般项的绝对值

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

因为当$|x|<|x_0|$时，等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$收敛（公比$\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$），所以级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛，也就是级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛。

第二部分用反证法，若幂级数当$x=x_0$时发散而有一点x_1适合$|x_1|>|x_0|$使级数收敛，则根据本定理的第一部分，级数当$x=x_0$时应收敛，这与所设矛盾。定理得证。

有定理我们知道，如果幂级数在 $x=x_0$ 收敛，则对于开区间 $(-|x_0|,|x_0|)$ 内的任何 x 都收敛；如果幂级数在 $x=x_0$ 发散，则对于闭区间 $[-|x_0|,|x_0|]$ 外的任何 x 都发散。

推论　如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个确定的正数 R 存在，使得

当 $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛；

当 $|x|>R$ 时，幂级数发散；

当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时幂级数可能收敛也可能发散。

正数 R 通常叫做幂级数（3）的收敛半径。开区间 $(-R,R)$ 叫做幂级数（3）的收敛区间。再由幂级数在 $x=\pm R$ 处的收敛性就可以决定它的收敛域是 $(-R,R)$、$[-R,R)$、$(-R,R]$ 或 $[-R,R]$ 这四个区间之一。

如果幂级数（3）只在 $x=0$ 处收敛，这时收敛域只有一点 $x=0$，但为了方便起见，规定这时收敛半径 $R=0$；如果幂级数（3）对一切 x 都收敛，则规定收敛半径 $R=\pm\infty$，这时收敛域是 $(-\infty,+\infty)$，这两种情形确实都是存在的。

定理(收敛半径计算法)　如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中 a_n、a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项的系数，则这幂级数的收敛半径

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

证　考察幂级数（3）的各项取绝对值所成的级数

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots \tag{4}$$

这级数相邻两项之比为

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|.$$

（1）如果 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\ (\rho\neq 0)$ 存在，根据比值审敛法，则当 $\rho|x|<1$ 即 $|x|<\frac{1}{\rho}$ 时，

级数（4）收敛，从而级数（3）绝对收敛；当$\rho|x|>1$即$|x|>\dfrac{1}{\rho}$时，级数（4）发散并且从某一个n开始

$$|a_{n+1}x^{n+1}|>|a_nx^n|,$$

因此一般项$|a_nx^n|$不能趋于零，所以a_nx^n也不能趋于零，从而级数（3）发散。于是收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}$。

（2）如果$\rho=0$，则对任何$x\neq 0$，有$\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}\to 0\ (n\to\infty)$，所以级数（4）收敛，从而级数（3）绝对收敛。于是$R=+\infty.$

（3）如果$\rho=+\infty,$则对于除$x=0$外的其他一切x值，级数（3）必发散，否则由定理1知道将有点$x\neq 0$使级数（4）收敛。于是$R=0.$

例2　求幂级数 $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径与收敛域。

解　因为　$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|=1,$ 所以收敛半径　$R=\dfrac{1}{\rho}=1.$

对于端点$x=1,$级数称为交错级数 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}+\cdots,$级数收敛；

对于端点$x=-1,$级数称为 $-1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\cdots+-\dfrac{1}{n}-\cdots,$级数发散。因此，收敛域是$(-1,1].$

例3　求幂级数　$1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots$ 的收敛域。

解　因为　$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n+1}\right|=0,$

所以收敛半径$R=+\infty,$从而收敛域是$(-\infty,+\infty).$

例4 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$的收敛半径（规定$0!=1$）。

解　因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=+\infty,$

所以收敛半径 $R=0$，即级数仅在 $x=0$ 收敛。

例 5 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径。

解　级数缺少奇次幂的项，定理 2 不能直接应用。根据比值审敛法来求收敛半径：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}}\right|=4\,|\,x\,|^2 .$$

当 $4\,|\,x\,|^2<1$ 即 $|\,x\,|<\frac{1}{2}$ 时级数收敛；当 $4\,|\,x\,|^2>1$ 即 $|\,x\,|>\frac{1}{2}$ 时级数发散。所以收敛半径 $R=\frac{1}{2}.$

例 6　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛域.

解　令 $t=x-1$，上述级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\cdot n}$。

因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n}{2^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{2},$

所以收敛半径 $R=2$。收敛区间为 $|\,t\,|<2$，即 $-1<x<3.$

当 $x=3$ 时，级数称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，这级数发散；当 $x=-1$ 时级数称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，这级数收敛。因此原级数的收敛域为 $[-1,3).$

9.4.3 幂级数的运算与性质

1．代数运算

设幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

及

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

分别在区间 $(-R,R)$ 及 $(-R',R')$ 内收敛，对于这两个幂级数，可以进行下列四则运算：

（1）加减法运算

加法：

（$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$）＋（$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$）

$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots.$

减法：

（$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$）－（$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$）

$=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots+(a_n-b_n)x^n+\cdots.$

根据收敛级数的基本性质 2，上面两式在$(-R,R)$与$(-R',R')$中较小的区间内成立。

（2）乘法除法运算

乘法：

（ $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ ）•（ $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$ ）

$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots.$

这时两个幂级数的柯西乘积，可以证明上式在$(-R,R)$与$(-R',R')$中较小的区间内成立.

除法：

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$$

这里假设$b_0\neq 0$。为了决定系数$c_0,c_1c_2,\cdots,c_n,\cdots$，可以将级数$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$与$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$相乘，

并令乘积中各项的系数分别等于级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$中同次幂的系数，即得：

$$\begin{aligned}&a_0=b_0c_0,\\&a_1=b_1c_0+b_0c_1,\\&a_1=b_1c_0+b_0c_1,\\&a_2=b_2c_0+b_1c_1+b_0c_2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

由这些方程就可以顺序地求出$c_0,c_1c_2,\cdots,c_n,\cdots$。

相除后所得的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$的收敛区间可能比原来两级数的收敛区间小的多。

2．分析运算

性质 1　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$s(x)$在其收敛域$I$上连续。

性质 2　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数$s(x)$在其收敛域I上可积，并有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x)dx = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n]dx \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (x \in I)$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

性质 3　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数$s(x)$在其收敛域$(-R,R)$上可积，且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R). \tag{6}$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

例 7 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$的和函数.

解　先求收敛域。由

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1,$$

得收敛半径$R=1$。在端点$x=-1$处，幂级数称为$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$，是收敛的交错级数；在端点$x=1$处，幂级数称为$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$，是发散的。因此收敛域为$I=[-1,1)$.

设和函数为$s(x)$，及

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

于是

$$xs(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

利用性质 3，逐项求导，并由

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \ (-1 < x < 1)$$

得

$$[xs(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1).$$

对上式从 0 到x积分，得

$$xs(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\qquad(-1\le x\le 1).$$

于是，当 $x\ne 0$ 时，有 $s(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$.

而 $s(0)$ 可由 $s(0)=a_0=1$ 得出，也可由和函数的连续性得到

$$s(0)=\lim_{x\to 0}s(x)=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x}\ln(1-x)\right]=1.$$

故
$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

作业　1（1）（3）（5）（7），2

9.4.4　泰勒级数(函数展开称幂级数)

给定函数 $f(x)$，能否在某个区间内将其“展开称幂级数”，或者说，是否能找到这样一个幂级数，它在某区间内收敛，且其和恰好就时给定的函数 $f(x)$。如果这样的幂级数存在，我们就说，函数 $f(x)$ 在该区间内能展开称幂级数，而这个幂级数在该区间内就表达了函数 $f(x)$。前面我们曾经给出过泰勒级数

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)\quad（1）$$

即在 x_0 的邻域内 $f(x)$ 可以用 n 次多项式

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\quad（2）$$

来近似表示，并且误差等于余项的绝对值 $|R_n|$。如果 $|R_n|$ 随 n 增大而减小，那么我们就可以用增加多项式 P_n 的项数的办法来提高精度。

如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有各阶导数 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x),\cdots$，这时我们可以设想多项式 P_n 的项数趋向无穷而成为幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots\quad（3）$$

幂级数（3）称为函数 $f(x)$）的泰勒级数。显然，当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 发的泰勒级数收敛于

$f(x_0)$，但除 $x=x_0$ 外，它是否一定收敛？如果它收敛，它是否一定收敛于 $f(x)$？关于这些问题，有下述定理。

定理　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开称泰勒级数的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零，即　$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0 \quad (x\in U(x_0)).$

证　先证必要性。设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内能展开为幂级数，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$

对一切 $x\in U(x_0)$ 成立。我们把 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式（1）写成

$$f(x)=s_{n+1}(x)+R_n(x), \tag{1'}$$

其中 $s_{n+1}(x)$ 是 $f(x)$ 的泰勒级数（3）的前 $(n+1)$ 项之和，因为由（4）式有

$$\lim_{n\to\infty}s_{n+1}(x)=f(x),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=f(x)-f(x)=0.$$

这就证明了条件是必要的。

再证充分性，设 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 对一切 $x\in U(x_0)$ 成立。由 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式(1’)有

$$s_{n+1}(x)=f(x)-R_n(x),$$

令 $n\to\infty$ 取上式的极限，得

$$\lim_{n\to\infty}s_{n+1}(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-R_n(x)]=f(x),$$

即 $f(x)$ 的泰勒级数（3）在 $U(x_0)$ 内收敛，并且收敛于 $f(x)$。因此条件充分的。定理证毕

在（3）式中取 $x_0=0$，得

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots, \tag{5}$$

级数（5）称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

下面我们证明如果函数能展开成 x 的幂级数，则展开式是唯一的，并且就是 $f(x)$ 的麦

克劳林级数

如果 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 的某邻域内 $(-R,R)$ 内能展开成 x 的幂级数，即

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{6}$$

对一切 $x\in(-R,R)$ 成立，那么根据幂级数在收敛区间内可以逐项求导，有

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

$$f''(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots,$$

$$f'''(x)=3!a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\cdots,$$

………

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x+\cdots,$$

………

把 $x=0$ 代入以上各式，得

$$a_0=f(0),a_1=f'(0),a_2=\frac{f''(0)}{2!},\cdots,a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\cdots.$$

这就是所要证明的。

由此可知，如果 $f(x)$ 能展开成 x 的幂级数选，则这个幂级数就是 $f(x)$ 的麦克劳林级数。但是，反过来如果 $f(x)$ 的麦克劳林级数在点 $x_0=0$ 的某邻域内收敛，它却不一定收敛于 $f(x)$。因此如果 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处具有各阶导数，则 $f(x)$ 的麦克劳林级数（5）虽能作出来，但这个级数是否能在某个区间内收敛，以及是否收敛于 $f(x)$ 却需要进一步考查。下面将具体讨论把函数 $f(x)$ 展开为 x 得幂级数的方法.

9.4.5 常用的初等函数的幂级数展开式及其应用举例

要把函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，可以按照下列步骤进行：

第一步　求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x),\cdots$ 如果在 $x=0$ 处某阶导数不存在，就停止进行。

第二步　求函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值：

$$f'(0),f''(0),\cdots,f^{(n)}(0),\cdots$$

第三步　求出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

并求出收敛半径 R.

第四步　考查当 x 在区间 $(-R,R)$ 内时余项 $R_n(x)$ 的极限

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

是否为零，如果为零，则函数 $f(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 内的幂级数展开式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,\qquad(-R<x<R).$$

例 8　将函数 $f(x)=e^x0$ 展开成 x 的幂级数。

解　所给函数的各阶导数为 $f^{(n)}(x)=e^x\ (n=1,2,\cdots)$, 因此 $f^{(n)}(0)=1\,(n=0,1,2,\cdots)$，这里 $f^{(0)}=f(0)$.于是得级数

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

它的收敛半径 $R=+\infty$ 。

对于任何有限的 x、ξ(ξ 在 0 与 x 之间)，余项的绝对值为

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

因 $e^{|x|}$ 有限，而 $\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 时收敛级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项，所以当 $n\to\infty$ 时，$e^{|x|}\bullet\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to$ 0，即当 $n\to\infty$ 时，有 $|R_n(x)|\to 0$ 。于是得展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\qquad(-\infty<x<+\infty)\qquad（7）$$

例 9　将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解　所给函数的各阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})\quad(n=1,2,\cdots),$$

$f^{(n)}(0)$ 顺序循环地取 $0,1,0,-1,\cdots(n=0,1,2,3,\cdots)$, 于是得级数

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

它的收敛半径$R=+\infty$。

对于任何有限的x、ξ(ξ在0与x之间)，余项的绝对值当$n\to\infty$时的极限为零：

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin\left[\xi+\dfrac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\ \ (n\to\infty).$$

因此得展开式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\qquad(-\infty<x<+\infty)\qquad（8）$$

上面将函数展开成幂级数的方法称为直接法，大家看到运算量很大，并且研究余项在初等函数中也不是意见容易的事。下面利用间接展开法，即利用已知的函数的展开式、幂级数的运算以及变量代换等，将函数展开成幂级数.

例 10　将函数$\cos x$展开成幂级数。

解　对$\sin x$的展开式逐项求导就得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty).\qquad（9）$$

例 11　将函数$\dfrac{1}{1+x^2}$展开成幂级数。

解　因为

$$\frac{1}{1-x}+1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\qquad(-1<x<1),$$

把x换成$-x^2$，得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\qquad(-1<x<1).$$

如果幂级数在收敛区间的端点$x=R$（或$x=-R$）仍收敛，而函数$f(x)$在$x=R$（或$x=-R$）处有定义且连续，那么根据幂级数的和函数的连续性，该展开式对$x=R$（或$x=-R$）也成立.

例 12　将函数$f(x)=\ln(1+x)$展开成x的幂级数.

解　因为　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，

而$\dfrac{1}{1+x}$是收敛的等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$的和函数;

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\quad(-1<x<1),$$

所以将上式从0到x逐项积分，得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots\quad(-1<x\le 1).\qquad（10）$$

上式对 $x=1$ 也成立，因为级数在该点收敛，而函数在该点连续。

例 13　将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数，其中 m 为任意常数.

解　$f(x)$ 的各阶导数为

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},$$

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

…………

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

…………

所以　$f(0)=1, f'(0)=m, f''(0)=m(m-1),\cdots, f^{(n)}(0)=m(m-1)\cdots(m-n+1),$

……,

于是的级数

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

这级数相邻两项的系数之比的绝对值

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{m-n}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty),\right|$$

因此，对于任何常数 m 这级数在开区间 $(-1,1)$ 内收敛.

设其和为 $F(x)$，即

$$F(x)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

逐项微分得

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\right],$$

由此得

$$(1+x)F'(x)=m\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\right]$$

$$=mF(x)\qquad(-1<x<1).$$

现在令　$$\varphi(x)=\frac{F(x)}{(1+x)^m},$$

于是$\varphi(0)=F(0)=1$，且

$$\varphi'(x)=\frac{(1+x)^m F'(x)-m(1+x)^{m-1}F(x)}{(1+x)^{2m}}$$

$$=\frac{(1+x)^{m-1}[(1+x)F'(x)-mF(x)]}{(1+x)^{2m}}=0,$$

所以$\varphi(x)=c$（常数）.但是$\varphi(0)=1$，从而$\varphi(x)=1$，即

$$F(x)=(1+x)^m.$$

因此在区间$(-1,1)$内，

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

$$(-1<x<1). \qquad (11)$$

在区间的端点，展开式是否成立要看m的数值而定.

公式（11）叫做二项展开式.特殊地，当m为正整数时，级数为x的m次多项式，就称为代数学中的二项式定理.

例 14　将函数$\sin x$展开成$\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的幂级数.

解　因为

$$\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

由$\sin x$、$\cos x$的展开式

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}-\cdots \qquad (-\infty<x<\infty),$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\cdots \qquad (-\infty<x<\infty),$$

所以

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\cdots\right] \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

例 15　将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解　因为

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}$$
$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)},$$

而

$$\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n \qquad (-1<x<3),$$
$$\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n \qquad (-3<x<5),$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \qquad (-1<x<3).$$

例 16　计算积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ 的近似值，要求误差不超过 0.0001.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，因此所给的积分不是反常积分.如果定义被积函数在 $x=0$ 处的值为 1，则它的积分区间 $[0,1]$ 上连续.

展开被积函数，有

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

在区间 $[0,1]$ 上逐项积分，得

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots.$$

因为第四项的绝对值

$$\frac{1}{7\cdot 7!}<\frac{1}{30000},$$

所以取前三项的和作为积分的近似值:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\approx 0.9461.$$

9.5 傅里叶级数

9.5.1 三角级数　三角函数系的正交性

在自然界和工程技术中周期现象是经常出现的,如振动、电磁波等,当用函数来描述这些现象时出现的就是周期函数.描述简谐振动的正弦函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 是一种简单而又为人们所熟悉的周期函数,其中 y 表示动点的位置, t 表示时间, A 为振幅, ω 为角频率, φ 为初相.周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$.现在类似于将函数展开成幂级数,我们也想将周期函数展开成由简单的三角函数组成的级数.具体的说,希望将以 $T\left(=\frac{2\pi}{\omega}\right)$ 的周期函数 $f(t)$ 表示为

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n), \tag{1}$$

其中 A_0, A_n, φ_n $(n=1,2,3,\cdots)$ 都是常数.

在利用三角恒等式,变形为

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t);$$

令 $\frac{a_0}{2}=A_0, a_n=A_n\sin\varphi_n, b_n=A_n\cos\varphi_n, \omega t=x$,则得到级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{2}$$

称(2)式的级数为三角级数,其中 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,3,\cdots)$ 都是常数.

称三角函数系 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ (3)

在区间 $[-\pi,\pi]$ 上正交,就是指在三角函数系(3)中任何不同的两个函数的乘积在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于零,即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx=0 \qquad (k,n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx=0 \qquad (k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nxdx=0 \qquad (k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\pi \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{1}^2 dx=2\pi,$$

9.5.2　以 2π 为周期的函数的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,且能展开成三角级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{4}$$

我们进一步假设级数(4)可以逐项积分.在此假设条件下我们讨论 $a_0,b_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots$ 与 $f(x)$ 的关系.

由三角函数系的正交性,有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=\pi a_0$$

即得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

以 $\cos nx$ 乘(4)两端,再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分,同样由三角函数系的正交性我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\pi a_n, \qquad n=1,2,\cdots,$$

即

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, \qquad n=1,2,\cdots,$$

同理可得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, \qquad n=1,2,\cdots,$$

由于当 $n=0$ 时, a_n 的表达式正好给出 a_0,因此,已得结果可以合并写成

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, & n=0,1,2,\cdots, \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, & n=1,2,\cdots, \end{cases} \tag{5}$$

这样,不论 $f(x)$ 能否表示为三角函数,只要 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,就可按公式(5)计算出 a_n 和 b_n,称 a_n 和 b_n 为函数 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier)系数,将这些系数代入(4)式右端,所得的三角

级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{6}$$

叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶级数.

那么, $f(x)$ 在怎样的条件下,它的傅里叶级数不仅收敛,而且收敛于 $f(x)$?

定理(收敛定理,狄利克雷(Dirichlet)充分条件)　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,如果它满足:

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点,

(2) 在一个周期内至多只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛,并且

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时,级数收敛于 $f(x)$;

当 x 是 $f(x)$ 的间断点时,级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

$$C=\left\{x\mid f(x)=\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]\right\},$$

在 C 上就成立 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad ,x\in C. \tag{7}$$

例 1　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解　所给函数满足收敛定理的条件,它在点 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不连续,在其他点处连续,从而由收敛定理知道 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛,并且当 $x=k\pi$ 时级数收敛于

$$\frac{-1+1}{2}=0,$$

当 $x\ne k\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$.和函数的图形如图 9-1 所示

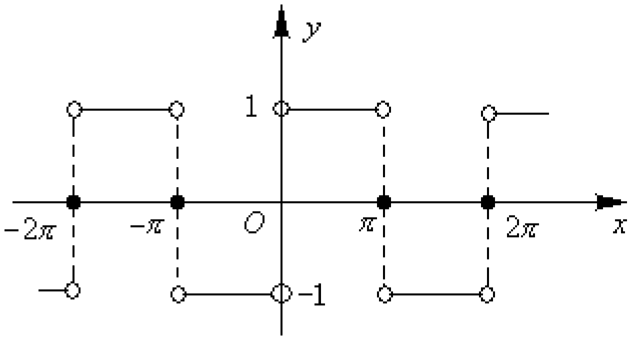

图 9-1

计算傅里叶级数如下:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nxdx \\ &= 0\ (n = 0,1,2,\cdots);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nxdx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{x}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n] \\ &= \begin{cases}\frac{4}{n\pi}, & n = 1,3,5,\cdots, \\ 0, & n = 2,4,6,\cdots.\end{cases}\end{aligned}$$

将求得的系数代入(7)式,就得到 $f(x)$ 的傅里叶级数的展开式为

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]\ (-\infty < x < +\infty; x \neq 0. \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots).$$

例 2　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases}x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解　所给函数满足收敛定理的条件,它在点 $x = (2k+1)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 处不连续,在其他点处连续,从而由收敛定理知道 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛,并且当 $x = (2k+1)\pi$ 时级数收

敛于

$$\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{0-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

在连续点 $x(x\neq(2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$.和函数的图形如图 9-2 所示.

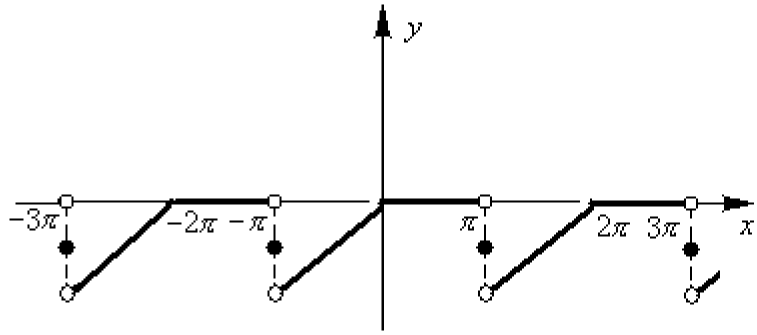

图 9-2

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}\\&=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)\\&=\begin{cases}\dfrac{2}{n^2\pi},n=1,3,5,\cdots,\\0,\qquad n=2,4,6,\cdots;\end{cases}\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xdx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx\\&=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}\\&=-\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.\end{aligned}$$

将求得的系数代入(7)式,得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$
\begin{aligned}
f(x) = &-\frac{\pi}{4}+\left(\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right) \\
&-\frac{1}{2}\sin 2x+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right) \\
&-\frac{1}{4}\sin 4x+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)-\cdots
\end{aligned}
$$

$$(-\infty < x < +\infty; x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots).$$

如果函数 $f(x)$ 只定义在 $[-\pi,\pi]$ 且满足收敛定理的条件,则 $f(x)$ 也可以展开成傅里叶级数,只要在 $[-\pi,\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$ 外补充函数的定义,使它拓广成周期为 2π 的周期函数 $F(x)$. 按这种方式拓广函数的定义域的过程称为周期延拓.再将 $F(x)$ 展开成傅里叶级数.最后限制 x 在 $(-\pi,\pi)$ 内,此时 $F(x)\equiv f(x)$,这样便得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式.根据收敛定理,这级数在区间端点 $x=\pm\pi$ 处收敛于 $\dfrac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}$.

例 3　将函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$$

展开成傅里叶级数.

解　所给函数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上满足收敛定理的条件,并且拓广成周期函数时,它在每一点 x 处都连续(图 9-3),因此拓广的周期函数的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1) \\
&= \begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi}, n=1,3,5,\cdots, \\ 0, \qquad n=2,4,6,\cdots;\end{cases}
\end{aligned}
$$

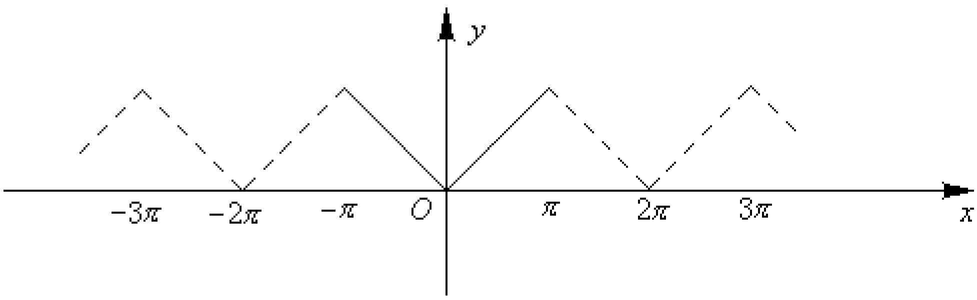

图 9-3

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}=\pi;$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx\\&=-\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi}\\&=0\ \ (n=1,2,3,\cdots).\end{aligned}$$

将求得的系数代入(6)式,得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)\qquad(-\pi\le x\le\pi).$$

利用这个展开式,我们可以求出几个特殊级数的和.当 $x=0$ 时, $f(0)=0$,于是又这个展开式得出

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots.$$

设

$$\sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,$$
$$\sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\left(=\frac{\pi^2}{8}\right),$$
$$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots,$$
$$\sigma_3=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots,$$

因为

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}.$$

所以

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}.$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6},$$

又 $$\sigma_3 = 2\sigma_1 - \sigma = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

正弦级数和余弦级数

当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(x)\cos nx$ 是奇函数, $f(x)\sin nx$ 是偶函数,故

$$a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots), \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1,2,3,\cdots). \tag{8}$$

即知奇函数的傅里叶级数是只含有正弦项的正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$ (9)

当 $f(x)$ 为偶函数时, $f(x)\cos nx$ 是偶函数, $f(x)\sin nx$ 是奇函数,故

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0,1,2,\cdots), \quad b_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots). \tag{10}$$

即知偶函数的傅里叶级数是只含有余弦项的余弦级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx.$ (11)

例 4 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x$.将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 首先所给函数满足收敛定理的条件,它在点

$$x = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

处不连续,因此 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x = (2k+1)\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0,$$

在连续点 $x(x \neq (2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$.和函数的图形如图 9-4 所示

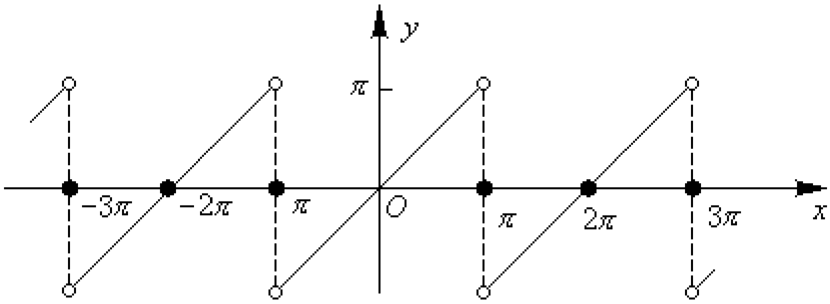

图 9-4

其次若不计 $x=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数.显然,此时(8)式仍成立.按公式(8)有 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$,而

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots).
\end{aligned}
$$

将求得的 b_n 代入正弦级数(9),得 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$
f(x)=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx+\cdots\right)
$$
$$
(-\infty<x<\infty; x\neq\pm\pi,\pm3\pi,\cdots).
$$

对于定义在区间 $[0,\pi]$ 上并且满足收敛定理的条件的函数 $f(x)$,我们在开区间 $(-\pi,0)$ 内补充函数 $f(x)$ 的定义,得到定义在 $(-\pi,\pi]$ 上的函数 $F(x)$,使它在 $(-\pi,\pi)$ 上成为奇函数(偶函数).按这种方式拓广函数定义域的过程称为奇延拓(偶延拓).然后将奇延拓(偶延拓)后的函数展开成傅里叶级数,这个级数必定是正弦级数(余弦级数).再限制 x 在 $(0,\pi]$ 上,此时 $F(x)\equiv f(x)$,这样便得到 $f(x)$ 的正弦级数(余弦级数)展开式.

例 6　将函数 $f(x)=x+1 \quad (0\le x\le\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解　先求正弦级数.为此对函数 $f(x)$ 进行奇延拓(图 9-5).按公式(8)有

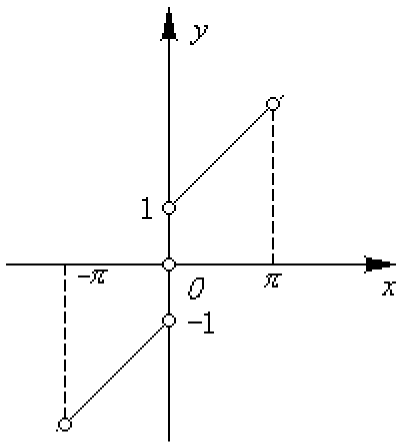

图 9-5

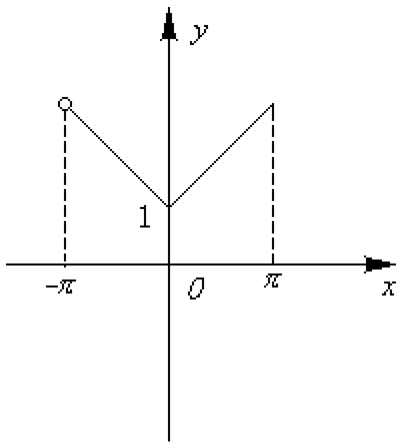

图 9-6

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nxdx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(x+1)\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{n\pi}(1-(\pi+1)\cos n\pi) \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{n}, n = 1,3,5,\cdots, \\ -\dfrac{2}{n}, n = 2,4,6,\cdots. \end{cases}
\end{aligned}
$$

将求得的b_n代入正弦级数(9),得

$$x+1 = \frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots\right]\ (0 < x < \pi)$$

在端点$x = 0$及$x = \pi$处,级数的和显然为零,它不代表原来函数$f(x)$的值.

再求余弦级数,为此对对函数$f(x)$进行偶延拓(图 9-6).按公式(10)有

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(x+1)\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^3}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2,4,6,\cdots, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n = 1,3,5,\cdots. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{\pi} = \pi + 2\,;$$

将求得的 a_n 代入余弦级数(11),得

$$x+1 = \frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right) \qquad (0 \le x \le \pi)\,.$$

9.5.3 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

定理　设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),(x\in C) \tag{1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=1,2,3,\cdots). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$C = \{x \mid f(x) = \frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]\}$$

当 $f(x)$ 为奇函数时,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (x\in C), \tag{3}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=1,2,3,\cdots). \tag{4}$$

当 $f(x)$ 为偶函数时,

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (x\in C), \tag{5}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=0,1,2,\cdots). \tag{6}$$

证　作变量代换 $z=\frac{\pi x}{l}$,于是区间 $-l\le x\le l$ 就变换成 $-\pi\le z\le\pi$.设函数 $f(x)=f(\frac{lz}{\pi})=F(z)$,从而 $F(z)$ 是周期为 2π 的周期函数,并且它满足收敛定理的条件,将 $F(z)$ 展开成傅里叶级数:

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz),$$

其中 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nzdz, b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\sin nzdz.$$

在以上式子中令 $z=\frac{\pi x}{l}$,并注意到 $F(z)=f(x)$,于是有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

而且

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ ,\ \ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

类似地,可以证明定理的其余部分.

例 7　设 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,它在 $[-2,2)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0,\\ k, & 0\le x<2\end{cases}\ (常数 k\ne 0).$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解　这时 $l=2$,按公式(2)有

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 k\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left[\frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=0\quad (n\ne 0);$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_0^2 kdx=k;$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 k\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left[-\frac{k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=\frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\frac{2k}{n\pi}, n=1,3,5,\cdots,\\ 0,\quad n=2,4,6,\cdots.\end{cases}$$

将求得的系数 a_n,b_n 代入(1)式,得

$$f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right).$$

$$(-\infty<x<+\infty; x\ne 0,\pm 2,\pm 4,\cdots)$$

$f(x)$ 的傅里叶级数的和函数的图形如图 9-7 所示.

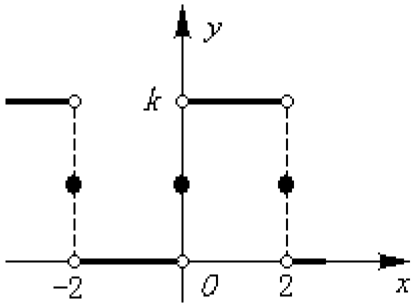

图 9-7

9.5.4　在[-l , l]上有定义的函数的傅里叶展开

定义在[-l , l]上的函数$f(x)$，可以通过延拓而成为一个在数轴上有对于的一个以 $2l$ 为周期的函数$F(x)$，从而可以展开成傅立叶级数，然后再将自变量限制回(-l, l),即得$f(x)$的傅立叶展开式。

例 8 将函数 $f(x)=2+|x|\,(-1\le x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅立叶级数。

解　由于 $f(x)=2+|x|\,(-1\le x\le 1)$ 是偶函数，所以

$$a_0=2\int_0^t(2+x)=5$$

$$a_n=2\int_0^t(2+x)\cos n\pi x dx=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}$$

$$=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}=\begin{cases}\dfrac{-4}{n^2\pi^2}, n=1,3,5,\cdots\\ 0\quad\ \ , n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$b_n=0, n=1,2,\cdots$$

因所给函数在区间[-1, 1]上满足收敛定理条件，并注意到周期延拓后的函数处处连续图 9-8，故

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}, x\in[-1,1]$$

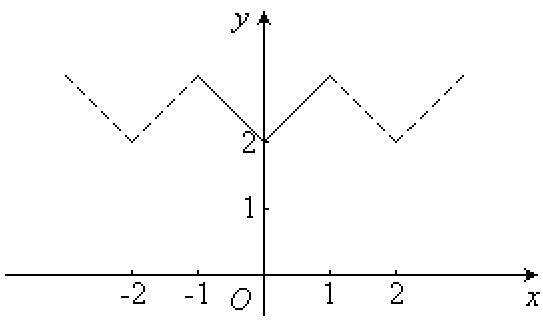

图 9－8

9.5.5 在[0 , l]上定义的函数的傅里叶展开

对于定义在[0 , l]上定义的函数$f(x)$,我们可以将其进行奇延拓或偶延拓从而展开成(-l, l)

上的函数，然后使用 9.5.4 的方法将其展成正弦或余弦级数，最后再限制回（0，l）即可得到$[0\,,l]$上的函数$f(x)$的傅立叶展开。

例 9 将函数 $f(x)=x-1$ 在[0,2]上展开为（1）正弦级数；（2）余弦级数。

解 （1）为将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数，需对 $f(x)$ 作奇延拓（图 9-9）,于是 $2l=4$,从而

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{2}{n\pi}-(-1)^n\frac{2}{n\pi}=\begin{cases}0, & n=1,3,5,\cdots\\ -\dfrac{4}{n\pi}, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

由收敛定理知

$$x-1=-\frac{4}{\pi}(\sin\pi x+\sin 2\pi x+\sin 3\pi x+\cdots),x\in(0,2)$$

（2）对 $f(x)$ 作偶延拓（图 9-9），从而

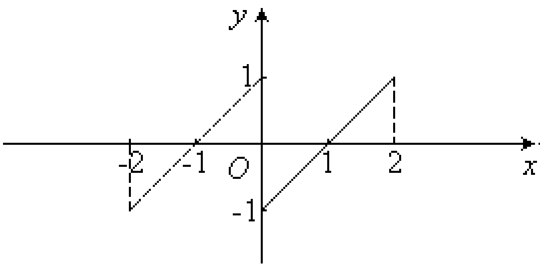

图 9-9

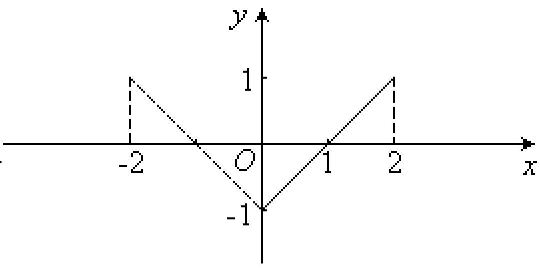

图 9-10

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)dx=0$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{-8}{n^2\pi^2}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

由收敛定理知

$$x-1=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2},x\in[0,2]$$

作业 2(1)(3),4,6,9,10