6.2 线性方程组解的性质、结构与解法

6.2.1 线性方程组解的性质

【注：要记住下面的结论】

设 $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$,通过代入方程组进行验证的方法可以证明方程组的解具有下列性质：

（1）若 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 都是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，则 $k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s$ 也是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数.

证： 因为 $\mathbf{A}(k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s)=k_1(\mathbf{Av}_1)+k_2(\mathbf{Av}_2)+\cdots+k_s(\mathbf{Av}_s)$

$$=k_1\cdot 0+k_2\cdot 0+\cdots+k_s\cdot 0=0$$

所以 $k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s$ 也是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解

（2） $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解 $\mathbf{v}$ 的**和** $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解.

证： 因为 $\mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{Au}+\mathbf{Av}=\mathbf{b}+0=\mathbf{b}$ ， 所以 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解.

（3） $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的两个解 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 的**差** $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解.

证： 因为 $\mathbf{A}(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)=\mathbf{Au}_1-\mathbf{Au}_2=\mathbf{b}-\mathbf{b}=0$ ， 所以 $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$ 是 $\mathbf{Ax}=0$ 的解.

（4）若 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_s$ 都是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解，则

① $k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\cdots+k_s\mathbf{u}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解 $\Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_n=0$；

② $k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\cdots+k_s\mathbf{u}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解 $\Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_n=1$.

证： $\mathbf{A}(k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\cdots+k_s\mathbf{u}_s)=k_1\mathbf{Au}_1+k_2\mathbf{Au}_2+\cdots+k_s\mathbf{Au}_s=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\mathbf{b}$

① $k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\cdots+k_s\mathbf{u}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解 $\Leftrightarrow \mathbf{A}(k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\cdots+k_s\mathbf{u}_s)=0$

$$\Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_n=0$$

② $k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\cdots+k_s\mathbf{u}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解 $\Leftrightarrow \mathbf{A}(k_1\mathbf{u}_1+k_2\mathbf{u}_2+\cdots+k_s\mathbf{u}_s)=\mathbf{b}$

$$\Leftrightarrow k_1+k_2+\cdots+k_n=1$$

6.2.2 齐次线性方程组解的结构

1. **定义：** 一个方程组的所有解的一般表达式叫做这个方程组的**通解**.
研究方程组解的结构就是研究其通解的表达形式.

2. **定义 6-1** 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的**解集** S **（即全部解向量的集合）的极大无关组**叫做该齐次线性方程组的**基础解系**.

注意： 基础解系这个概念是针对齐次线性方程组来说的，非齐次线性方程组没有基础解系这个概念。

3. 若已知 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$，则由定理 5-7 及解的性质（1）可知，**$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为** $\mathbf{x}=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数.

证：因为 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，所以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的所有解向量所构成的集合 S 的极大无关组。根据定理 5-7 可知，$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的所有解向量都能由 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 线性表示，即 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的所有解向量都可写成 $k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s$ 的样子。

反过来，因为 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 都是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，根据解的性质（1）又知，$k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s$ 表示出来的向量都是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解。

综合上面的讨论可知，$k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s$ 正好把 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的所有解向量都表示出来了，也可以说，$k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的所有解向量的一个一般表达形式，因而 $\mathbf{x}=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解。证毕

注 1：要记住 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解的公式。

注 2：每次让 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 取一组具体的数，通过 $\mathbf{x}=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s$ 都可算出 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个具体的解。让 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 取遍所有可能的数，通过 $\mathbf{x}=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_s\mathbf{v}_s$ 能得到 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的所有解。这就是通解的含义。

4. 为了讲下面的定理，我们先补充一点内容。

（1）注意：矩阵 $\mathbf{A}$ 与方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 是一一对应的，矩阵 $\mathbf{A}$ 中的行对应于方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 中的方程，对矩阵 $\mathbf{A}$ 做行变换和对方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 做变换相对应。请同学们观察下面的例子。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\1&3&-3\end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_2-x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+3x_2-3x_3=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\1&3&-3\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0\\ x_2-x_3=0\\ x_1+3x_2-3x_3=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&4&-4\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0\\ x_2-x_3=0\\ 4x_2-4x_3=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3\div 4}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0\\ x_2-x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$$

（2）从上面的讨论可以看出：**若用行变换将矩阵 $\mathbf{A}$ 化成矩阵 $\mathbf{B}$，则方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 与方程组 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 同解。**

（3）将 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 中的 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{O}$ 按列分块，可得 $\mathbf{A}[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]=[0,0,\cdots,0]$，

$$\mathbf{Ab}_1=0,\mathbf{Ab}_2=0,\cdots,\mathbf{Ab}_n=0$$

这说明：若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{B}$ 的列向量都是方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解。

5. 为了确定齐次线性方程组的基础解系，我们给出下面的定理.

定理 6-3 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解集 S 的秩为 $r(S)=n-r(\mathbf{A})$,即 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系所含向量的个数为 $n-r(\mathbf{A})$，其中，n 为未知数的个数，即 $\mathbf{A}$ 的列数.

注 1： 定理 6-3 的结论非常重要，同学们要好好掌握。

注 2： 根据极大无关组的定义可知，$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解集 S 的秩等于解集 S 的极大无关组中所含向量的个数。解集 S 的极大无关组就是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，所以 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系所含向量的个数也为 $n-r(\mathbf{A})$。

证明 若 $r(\mathbf{A})=n$,则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解，没有基础解系，$r(S)=0$，$n-r(\mathbf{A})=0$，结论正确.

若 $r(\mathbf{A})=r<n$,不妨设用行变换将 $\mathbf{A}$ 化成的行最简形为 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{B}_1\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}$，其中 $\mathbf{B}_1$ 为 $r\times(n\text{-}r)$型矩阵，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 同解.

令 $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}-\mathbf{B}_1\\ \mathbf{E}_{n-r}\end{bmatrix}$,由定理 5-6 及 $\mathbf{E}_{n-r}$ 的列向量组线性无关可知，$\mathbf{Y}$ 的列向量组也线性无关; 由 $\mathbf{BY}=\mathbf{O}$ 可知，$\mathbf{Y}$ 的列向量都是 $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ 的解（即 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解），所以 $\mathbf{Y}$ 的列向量组是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解，因而可得 $r(S)\geq n-r=n-r(\mathbf{A})$.

【注：由 $\mathbf{Y}$ 的列向量组是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解，可知 S 的秩至少为 $n-r$】

设 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，令 $\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s]$,则 $\mathbf{AV}=\mathbf{O}$ 且 $r(\mathbf{V})=s$.

由性质 5-6 可得 $r(\mathbf{A})+r(\mathbf{V})-n\leq r(\mathbf{AV})=0$，即 $r(\mathbf{V})\leq n-r(\mathbf{A})$，$r(S)=r(\mathbf{V})\leq n-r(\mathbf{A})$.

【注：因为解集 S 的秩等于解集 S 的极大无关组（即 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系）所含向量的个数，所以 $r(S)=s$. 又因为 $r(\mathbf{V})=s$，所以 $r(S)=r(\mathbf{V})$.】

综合上面的讨论可得 $r(S)=n-r(\mathbf{A})$.

6. 若向量组 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 为 $m\times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系,则 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的**解集**的**极大无关组**，因而 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 都是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解、线性无关、并且 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 所含向量个数等于 S 的秩 $n-r(\mathbf{A})$.

反过来，如果 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 都是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解、线性无关、并且 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 所含向量

个数等于 S 的秩 $n-r(\mathbf{A})$，则 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 一定是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解集的极大无关组（即 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系。

从上面的讨论可得结论：

向量组 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 为 $m\times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系的充要条件是 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_s$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解、线性无关且 $s=n-r(\mathbf{A})$.

【注：基础解系是这一节中的一个重要内容，讨论基础解系时要用到这个结论。】

7. 设 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 为方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，证明：$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$，$\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$，$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3$ 也是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

证；因为 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 为方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，所以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 是方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，线性无关，且 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系含 3 个向量。

记 $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_3=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3$，则有

$$[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3]=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]\mathbf{P}，\text{其中 }\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

因为 $|\mathbf{P}|=2\neq 0$，所以 $\mathbf{P}$ 可逆.

$r([\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3])=r([\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]\mathbf{P})=r([\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3])=3$，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ 线性无关。

显然，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ 也是方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，也是 3 个向量，因而 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

8. **例 6-3** 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 型实矩阵，证明：$r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})$.

【注：要记住公式 $r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})$ 】

证明 先证明方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 同解。

若 $\mathbf{u}\in\mathbf{R}^n$ 为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的任一解，则 $\mathbf{Au}=\mathbf{0}$. 在 $\mathbf{Au}=\mathbf{0}$ 的两边左乘 $\mathbf{A}^T$，得 $\mathbf{A}^T\mathbf{Au}=\mathbf{0}$，这说明 $\mathbf{u}$ 也是 $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解.

若 $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n$ 为 $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的任一解，则 $\mathbf{A}^T\mathbf{Av}=\mathbf{0}$. **用 $\mathbf{v}^T$ 乘以上式两边**，得

$$\mathbf{v}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Av}=\mathbf{0},\quad \text{即 } (\mathbf{Av})^T(\mathbf{Av})=\mathbf{0}.$$

设 $\mathbf{Av}=[c_1,c_2,\cdots,c_m]^T$，则有 $c_1^2+c_2^2+\cdots+c_m^2=0$. 故 $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$，$\mathbf{Av}=\mathbf{0}$，$\mathbf{v}$ 也是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解.

综上可知,方程组 $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 同解，它们的解集的秩相等，

所以 $n-r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=n-r(\mathbf{A})$， 即 $r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=r(\mathbf{A})$.

根据公式 $r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=r(\mathbf{A})$，进一步可得

$$r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=r((\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A}).$$

9. 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 型实矩阵，

（1） $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=n.$

证： 注意：$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=r(\mathbf{A})$.

$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=n\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=n$

（2）若 $r(\mathbf{A})=n$, $\mathbf{AX}=\mathbf{AY}$，则 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

证： 若 $r(\mathbf{A})=n$, 则 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 为**可逆矩阵**。

在 $\mathbf{AX}=\mathbf{AY}$ 的两边左乘 $\mathbf{A}^T$，得 $\mathbf{A}^T\mathbf{AX}=\mathbf{A}^T\mathbf{AY}$.

因为 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 可逆，可消去，所以 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

（3）若 $r(\mathbf{A})=n$, 则 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B})$.

证：若 $r(\mathbf{A})=n$, 则 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 为**可逆矩阵**。

根据性质 5-3（乘可逆矩阵秩不变）可得，$r(\mathbf{B})=r((\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{B})$.

$$r(\mathbf{B})=r((\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{B})\overset{\text{矩阵乘法的结合律}}{=}r(\mathbf{A}^T(\mathbf{AB}))\overset{\text{性质5-6}}{\le}r(\mathbf{AB})\text{ ，即 }r(\mathbf{AB})\ge r(\mathbf{B}).$$

由性质 5-6 还可得 $r(\mathbf{AB})\le r(\mathbf{B})$，所以 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{B})$.

10. 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 型实矩阵，

（1） $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 可逆 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=m.$

证： 注意：$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 为 m 阶方阵，$r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})$.

$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 可逆 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=m\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=m$

（2）若 $r(\mathbf{A})=m$, $\mathbf{XA}=\mathbf{YA}$，则 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

证： 若 $r(\mathbf{A})=m$, 则 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 为**可逆矩阵**。

在 $\mathbf{XA}=\mathbf{YA}$ 的两边右乘 $\mathbf{A}^T$，得 $\mathbf{XA}\mathbf{A}^T=\mathbf{YA}\mathbf{A}^T$.

因为 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 可逆，可消去，所以 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

（3） 若 $r(\mathbf{A})=m$, 则 $r(\mathbf{CA})=r(\mathbf{C})$.

证：若 $r(\mathbf{A})=m$, 则 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 为**可逆矩阵**。

根据性质 5-3（乘可逆矩阵秩不变）可得，$r(\mathbf{C})=r(\mathbf{C}(\mathbf{AA}^T))$.

$$r(\mathbf{C})=r(\mathbf{C}(\mathbf{AA}^T))\overset{\text{矩阵乘法的结合律}}{=}r((\mathbf{CA})\mathbf{A}^T)\overset{\text{性质5-6}}{\le}r(\mathbf{CA})\quad，即\ r(\mathbf{CA})\ge r(\mathbf{C}).$$

由性质 5-6 还可得 $r(\mathbf{CA})\le r(\mathbf{C})$，所以 $r(\mathbf{CA})=r(\mathbf{C})$.

6.2.3 非齐次线性方程组解的结构

1. 当 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解时，解的结构不需讨论.
   下面对 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有无穷多个解的情况加以讨论.

定理 6-4 设 $\mathbf{u}$ 为非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个已知解（称为**特解**），$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_{n-r}$ 为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解为 $\mathbf{x}=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\cdots+k_{n-r}\mathbf{v}_{n-r}+\mathbf{u}$ (6. 1)

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

【注：$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的每一个已知的解都可称为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的特解】

证明 由解的性质可知，对于任意的 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$，式(6.1)所表示的向量都是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解.

另一方面，设 $\mathbf{c}$ 为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的任一解，则 $\mathbf{c}-\mathbf{u}$ 为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，于是存在数 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-r}$，使得 $\mathbf{c}-\mathbf{u}=l_1\mathbf{v}_1+l_2\mathbf{v}_2+\cdots+l_{n-r}\mathbf{v}_{n-r}$， 即 $\mathbf{c}=l_1\mathbf{v}_1+l_2\mathbf{v}_2+\cdots+l_{n-r}\mathbf{v}_{n-r}+\mathbf{u}$，
这说明 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的任一解都可表示成式(6.1)的形式，故式(6.1)为 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解.

2. **注意** “非齐次线性方程组的通解”=“对应的齐次线性方程组的通解”+“该非齐次线性方程组的一个特解”.

3. **例 6-4** 设 $r(\mathbf{A}_{4\times3})=2,\ \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ 为非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解，$\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=[2,-2,2]^T$，$\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_3=[1,0,-1]^T$，求 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解.

解 由 $r(\mathbf{A}_{4\times3})=2$ 可知，$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系只含一个向量，因而，$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的任意一个非零解都可作为它的基础解系.下面来求 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系和 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个特解.

由 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解，可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=\mathbf{Au}_1+\mathbf{Au}_2=\mathbf{b}+\mathbf{b}=2\mathbf{b},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_3)=\mathbf{Au}_1+2\mathbf{Au}_3=\mathbf{b}+2\mathbf{b}=3\mathbf{b}.$$

根据上面两个式子，可得

$$\mathbf{A}[3(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)-2(\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_3)]=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}\frac{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2}{2}=\mathbf{b}.$$

因而，$3(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)-2(\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_3)$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，$\dfrac{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2}{2}$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的一个特解。

通过计算，可得

$$3(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)-2(\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_3)=(4,-6,8)^T,$$

$$\frac{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2}{2}=(1,-1,1)^T.$$

$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解为 $\mathbf{x}=k[4,-6,8]^T+[1,-1,1]^T$， 其中 k 为任意实数.

4. 例 设 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2]$ 为三阶方阵，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 线性无关，$\mathbf{b}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$，求 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解.

解：因为 $\mathbf{A}$ 的第三列能由前两列线性表示，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 线性无关，所以 $r(\mathbf{A})=2$，$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系只含一个向量。

$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的向量形式为 $\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)x_3=0$，显然 $x_1=1,x_2=-1,x_3=-1$ 满足上式，

所以 $[1,-1,-1]^T$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系。

$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的向量形式为 $\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)x_3=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$，$x_1=1,x_2=1,x_3=0$ 满足上式，所以 $[1,1,0]^T$ 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的特解。

故 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的通解为 $\mathbf{x}=k[1,-1,-1]^T+[1,1,0]^T$，$k$ 为任意常数。

6.2.4 利用矩阵的初等行变换解线性方程组

1. 注意 现在解线性方程组的做法是：用矩阵代替方程组通过初等行变换对矩阵进行化简，化简以后再返回到方程组进行求解。

这和直接对方程组进行化简是一样的，只是形式变化了一下。

2. **例 6-5** 求解方程组
$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0\\ -x_1+x_2+2x_3-3x_4=0.\\ x_1-x_2+x_3-3x_4=0\end{cases}\qquad (6.2)$$

解 首先用初等行变换将该方程组的系数矩阵化为行最简形.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&2&-3\\1&-1&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&1&-2\\0&0&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

该行最简形对应的方程组为 $\begin{cases}x_1-x_2\qquad -x_4=0\\ \qquad x_3-2x_4=0\end{cases}$； 即 $\begin{cases}x_1=x_2+x_4\\ x_3=\quad 2x_4\end{cases}$. （6.3）

方程组（6.3）与方程组（6.2）同解.

【注：对矩阵 A 做行变换和直接对方程组化简是一样的】

在方程组（6.3）中，把 x_2 和 x_4 看作可以取任意实数的自由未知数.

【注 1：非自由未知数的个数为 $r(\mathbf{A})$ 个，自由未知数的个数为 $n-r(\mathbf{A})$ 个，n 为未知数的个数】

【注 2：一般取行最简形的每个非零行的第一个非零元素所在列对应的未知数为非自由未知

数，取其余的未知数为自由未知数. 这样做的好处是，马上就能用自由未知数表示非自由未知数】

令 $x_2=k_1,x_4=k_2$,得 $\begin{cases}x_1=k_1+k_2\\x_2=k_1\\x_3=\quad 2k_2\\x_4=\quad k_2\end{cases}$.

写成向量形式为 $\mathbf{x}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意实数.

这就是方程组（6.2）的通解.

3. 容易验证，$\mathbf{v}_1=[1,1,0,0]^T,\mathbf{v}_2=[1,0,2,1]^T$ 线性无关且都是方程组(6.2)的解.由 $r(\mathbf{A})=2$ 可知方程组（6.2）的基础解系含 $4-r(\mathbf{A})=2$ 个向量，所以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 为方程组（6.2）的基础解系，上面所求得的结果确实是通解.

4. 如果不需要求通解，只需要求基础解系，这时可这样做：逐次令自由未知数中的一个为 1，其余的自由未知数为 0，可求得一组解，这组解就是基础解系.

例如，在方程组（6.3）中，令 $x_2=1,x_4=0$，求得一个解为 $\mathbf{v}_1=[1,1,0,0]^T$;令 $x_2=0,x_4=1$，又求得一个解为 $\mathbf{v}_2=[1,0,2,1]^T$，则 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 就是方程组（6.2）的基础解系.

5. **例 6-6** 求解方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=2\\-x_1+x_2+2x_3-3x_4=-1\\x_1-x_2+x_3-3x_4=4\end{cases}$.

解 首先用初等行变换将该方程组的增广矩阵化为行最简形.

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&2\\-1&1&2&-3&-1\\1&-1&1&-3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&2\\0&0&1&-2&1\\0&0&2&-4&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&3\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

该行最简形对应的方程组为 $\begin{cases}x_1-x_2\qquad -x_4=3\\\qquad x_3-2x_4=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=x_2+x_4+3\\x_3=\quad 2x_4+1\end{cases}$.

取 x_2 和 x_4 为自由未知数，并令 $x_2=k_1,x_4=k_2$,得

$$\begin{cases}x_1=k_1+k_2+3\\x_2=k_1\\x_3=\quad 2k_2+1\\x_4=\quad k_2\end{cases}.$$

写成向量形式为 $\mathbf{x}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\0\\1\\0\end{bmatrix}$,其中 k_1,k_2 为任意实数.

这就是该方程组的通解.

6. 最后强调一下，解方程组时不允许做倍乘列变换和倍加列变换，可以做对调列变换。但是要注意：如果做了对调列变换，化简以后写出方程组时一定要把未知数的位置再换回去。

例 求解方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2\\3x_1+2x_2-x_3=-1\\5x_1+x_2\qquad\ =1\end{cases}$.

解： $[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}2&-1&1&2\\3&2&-1&-1\\5&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}1&-1&2&2\\-1&2&3&-1\\0&1&5&1\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-1&2&2\\0&1&5&1\\0&1&5&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&7&3\\0&1&5&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

原方程组化为 $\begin{cases}7x_1+x_3=3\\5x_1+x_2=1\end{cases}$ 注意 x_1 和 x_3 的系数。

让 x_1 为自由未知数，令 $x_1=k$, 得 $\begin{cases}x_1=k\\x_2=-5k+1\\x_3=-7k+3\end{cases}$

该方程组的通解为 $\mathbf{x}=k\begin{bmatrix}1\\-5\\-7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$, k 为任意常数。