信号与系统

信号

什么是信号？

如何分析信号？

系统

什么是系统？

如何分析系统？

信号作用到系统之后如何变？

第一章　　绪　　论

§1.1 信号传输系统

- 人们在互相传告某种事件时，是在互相传递着相应的信息(information)（信息具有客观性，它存在于一切事物之中，事物的一切变化和运动都伴随着信息的交换和传送。同时，信息具有抽象性，只有通过一定的形式才能把它表现出来。）。
- 信息的物理表达方式：语音、文字、图片及双方约定的编码等,称为消息(message)，信息是消息的内容。
- 信号是随时间变化的某种物理量，是消息的载体。

古代时的烽火台；

信鸽；

击鼓鸣金。。。。。。

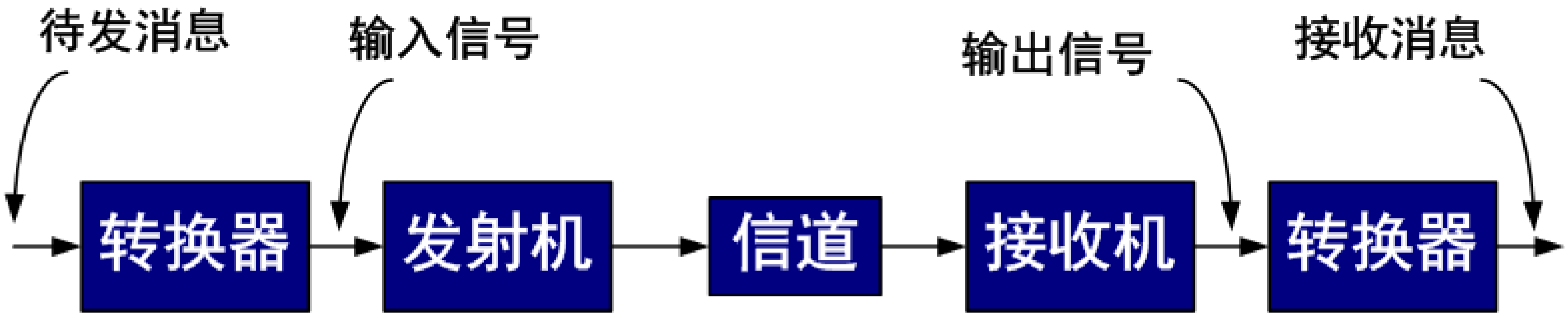
天气预报：

2019-09-2， 星期一， 晴，$21^0C/28^0C$，南风4-5级




信息传递的过程构成了一个通信过程。要传递的信息首先转换为便于传输的信号，然后将此信号在通信平台上（系统）上传输，接收端再还原便于理解 的消息形式，从而构成了整个通信系统。

通信系统主要包括消息到信号的转换、信号的处理和信号的传输。



通信系统(Communication System)的组成

我们的任务：

1. 保证通过信道传输后的输出信号能够尽量保持输入信号的原来样子——信号无失真传输；

2. 达到某种需要的变换，以便信息的提取和有效传输。

信号和系统的基本原理和方法是必须具备的知识，本课程就是为研究信号和系统这方面的基本理论而设置的。

§1.2 信号的概念

一、信号(Signals)的定义

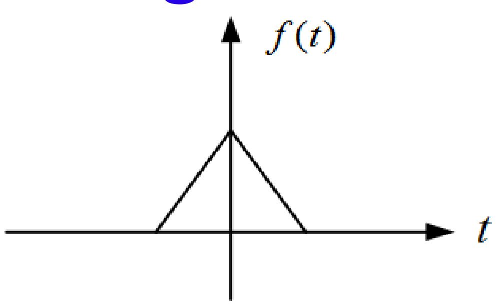
- 信号：随着时间变化的某种物理量。
- 电信号：随着时间变化的电压或电流，在某些情况下，也可以是电荷或磁通。
- 信号表示为一个时间的函数，所以在信号分析中，信号和函数二词常通用。

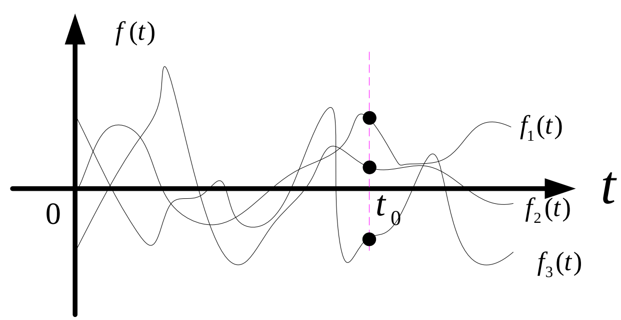
$$f(t), i(t), v(t), \ldots$$

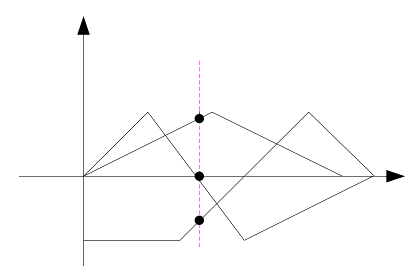
二、信号的分类

1. 从函数形式上划分

- **确定性信号**——（Determinate Signals） 是一个确定的时间函数，给定一时间值，有一个确定函数值与之对应。
- **随机信号** ——（Random Signals） 不是一个确定的时间函数，当给定某一时间值时，其函数值并不确定，而只知道此信号取某一数值的概率。







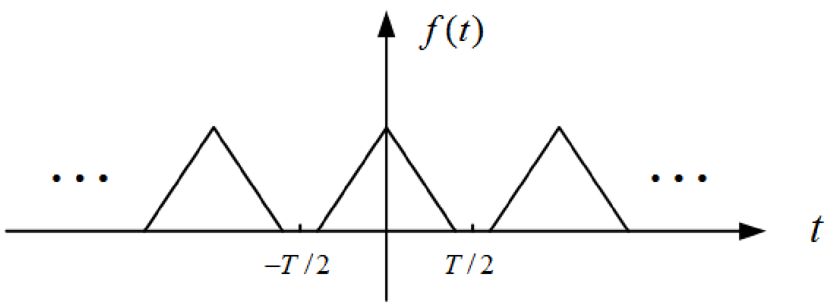
确定信号不含有信息，随机信号含有信息。

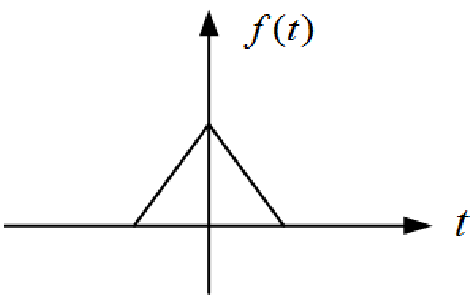
确定信号

周期信号 periodic signals —— 依一定时间间隔周而复始且无始无终的信号。

$$f(t) = f(t+nT) \quad n = \ldots, -1, 0, 1 \ldots$$

非周期信号 Nonperiodic signals —— 在时间上不具备周而复始特性的信号。





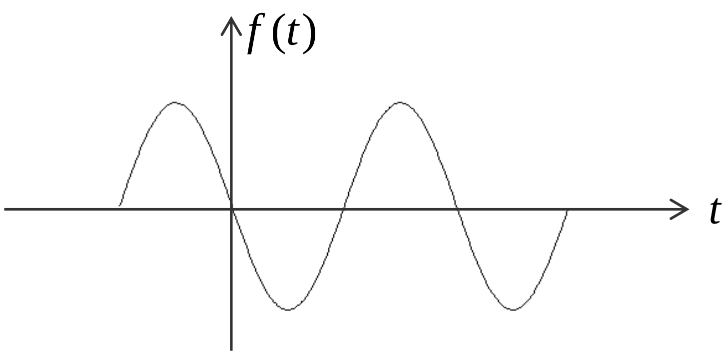
（非周期信号＝ T→∞ 时的周期信号）

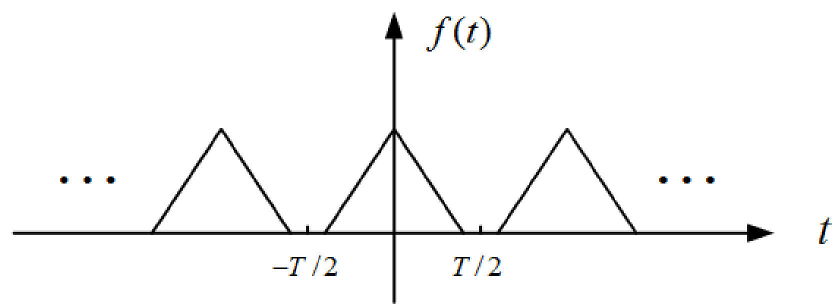
周期信号

简谐周期信号 —— 只含有一个频率分量的周期信号。

如：$\sin \omega t$

非简谐周期信号 —— 含有多个频率分量的周期信号。

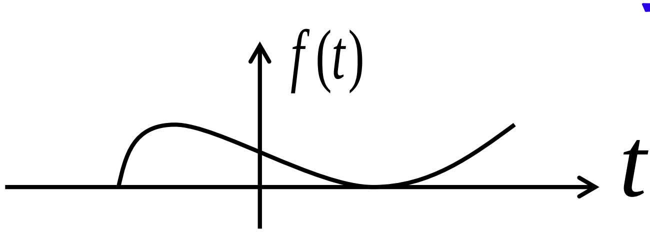


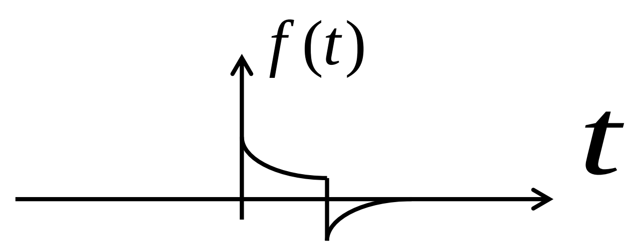


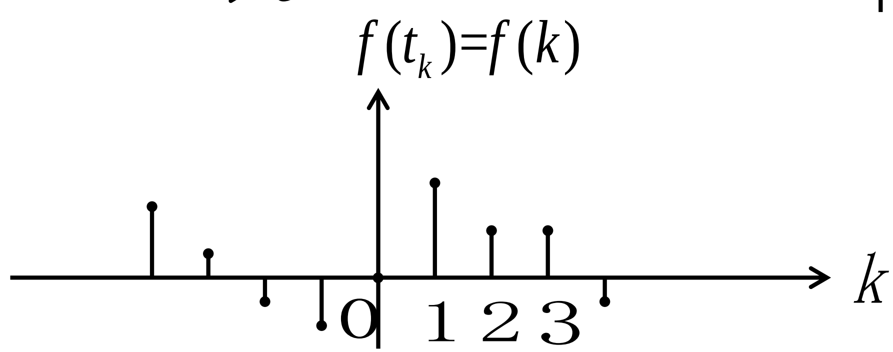
实际中不存在无始无终的理想周期信号，只要在相当长的时间内符合周期变化规律，就认为是周期信号。

2. 从时间取值的连续性划分

- **连续时间信号**（continuous-time signals）—— 在某一时间间隔内，对于一切时间值，除了若干不连续点外，函数都能给出确定的函数值。
- **离散时间信号**（discrete-time signals）—— 只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，其它时间没有定义的信号。



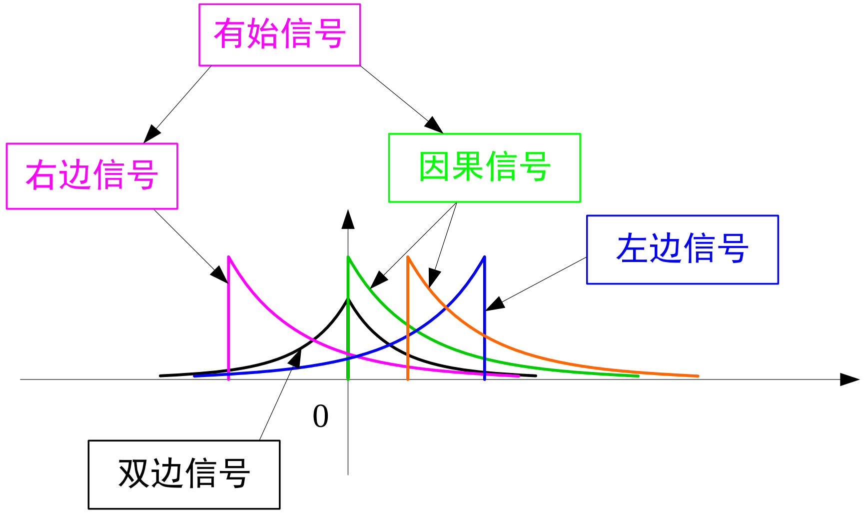




•所谓连续信号是指它的时间变量 是连续的。因此，常把这种信号称做连续时间信号。

•离散信号可以看作是时间上取值是离散的，离散取值的间隔可以是均匀的或非均匀的。

•若$t<0$，或$t_k<0$时，信号或函数值为零，则这种信号称为有始信号（因果信号）。



$t<0,\ f(t)=0$

因果信号

3. 从能量上划分 （energy, power）

能量信号 —— 能量有限，平均功率为0。

(energy signal)

功率信号 —— 能量无限，平均功率有限。

(power signal)

- **信号能量：** 信号在全部时间内消耗于1欧姆电阻上的总能量。

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

- **信号功率：** 信号在单位时间内消耗于1欧姆电阻上的总能量。

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 \, dt$$

离散时间信号能量和功率的定义：

能量：

$$E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f(k)\right|^2$$

功率：

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\left|f(k)\right|^2$$

三、信号的特性

1. **时间特性：** 主要表现为信号随时间变化快慢的特性。

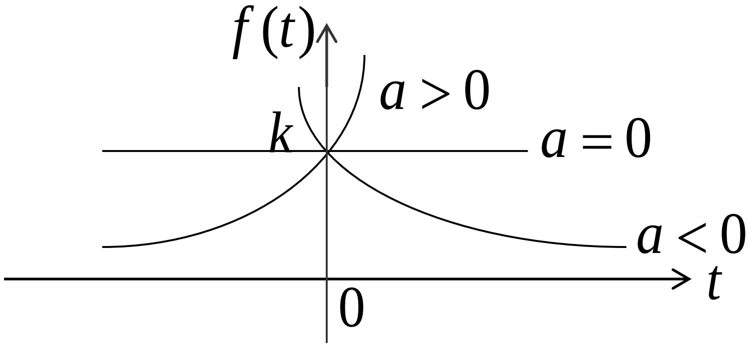
   如周期大小、幅度高低、上升下降沿的快慢，脉冲持续时间长短等。

2. **频率特性：** 主要表现为信号包含有哪些频率分量，各频率分量幅度大小、相位多少、信号占有的频带宽度等。

四、几种典型信号的表达式和波形

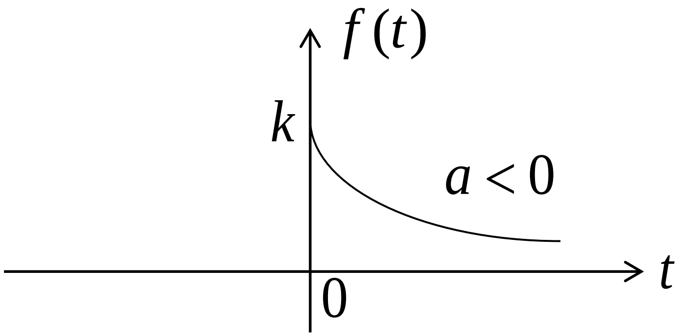
1. 指数函数（exponential）

$$f(t)=ke^{at}\qquad -\infty<t<+\infty$$



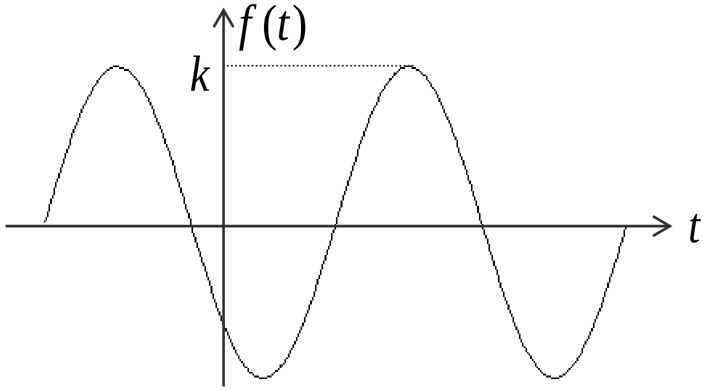
单边指数信号

$$f(t)=\begin{cases}ke^{at} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



这是因果信号

2. 正弦信号（sinusoidal）



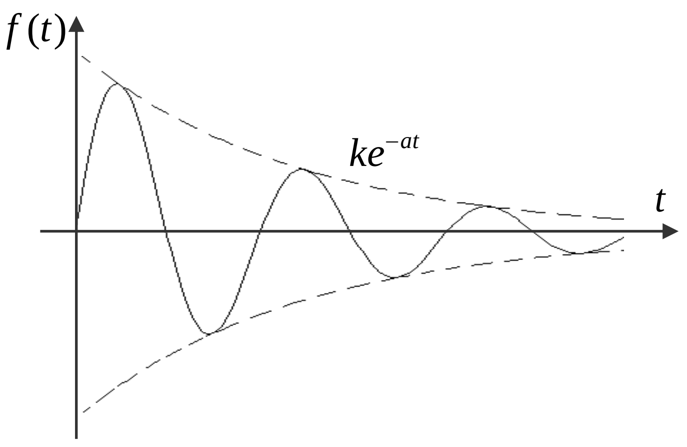
$$f(t) = k\sin(\omega t + \theta)$$

或 $$f(t) = k\cos(\omega t + \theta)$$

正弦信号的周期T与角频率ω 频率f的关系为：

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

单边衰减正弦信号（decaying）



$$f(t) = \begin{cases} ke^{-at}\sin\omega t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

3．复指数信号 （complex exponential）

$$f(t)=Ke^{st}$$

其中，s为一复数，$s=\sigma+j\omega$，这样

$$f(t)=Ke^{(\sigma+j\omega)t}$$

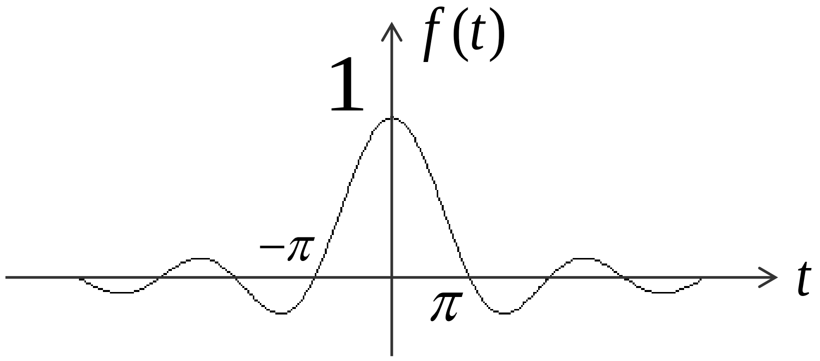
$$=Ke^{\sigma t}e^{j\omega t}$$

$$=Ke^{\sigma t}(\cos\omega t+j\sin\omega t)$$

$$=Ke^{\sigma t}\cos\omega t+jKe^{\sigma t}\sin\omega t$$

4. 抽样函数(sampling)

$$f(t) = Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$



$Sa(t)$是偶函数，$t = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ 时，函数值为0。

$Sa(t)$具有以下性质：

$$\int_0^{\infty} Sa(t)dt = \frac{\pi}{2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} Sa(t)dt = \pi$$

另一种类似的表示形式为

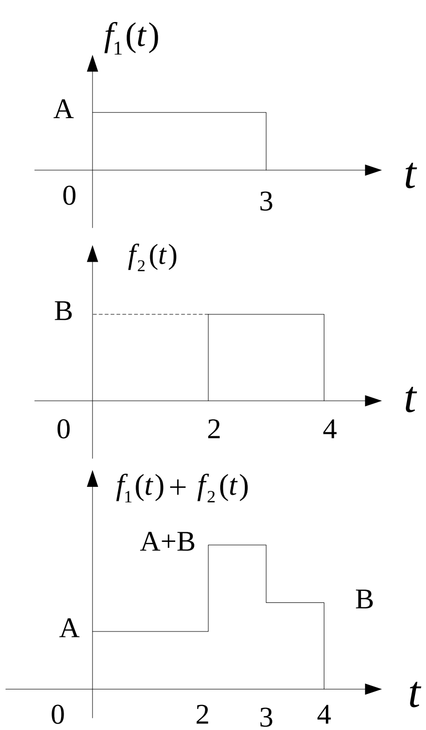
$$Sinc(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} = Sa(\pi t)$$

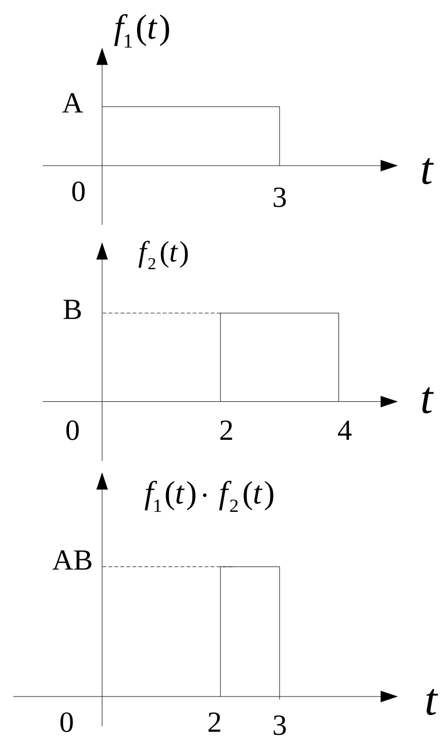
五、信号时域运算

1. 信号求和与相乘

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t),\qquad g(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)$$

坐标原点对齐，对应时刻的信号值相加或相乘。

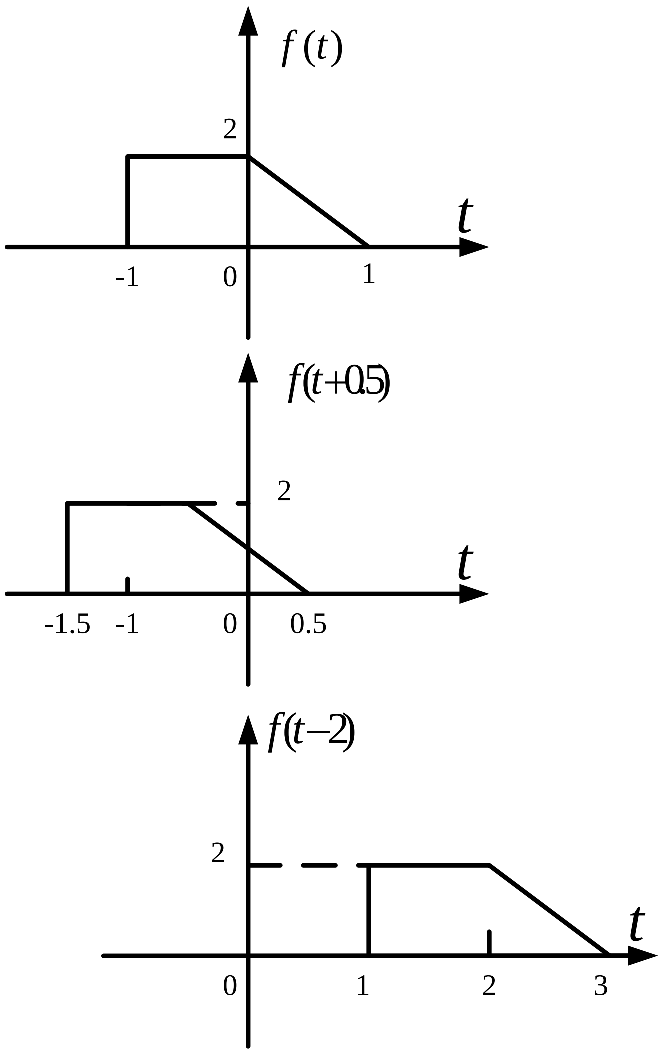




2. 时移(time shift — delayed, advanced)

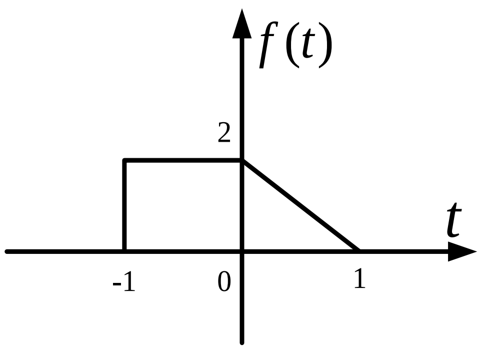
$$f(t) \rightarrow f(t-t_0)$$

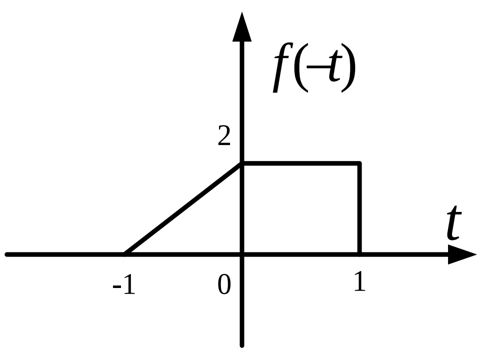
$$\begin{cases} t_0 > 0 & \text{右移} \\ t_0 < 0 & \text{左移} \end{cases}$$



3. 时间反转 (time reversal)

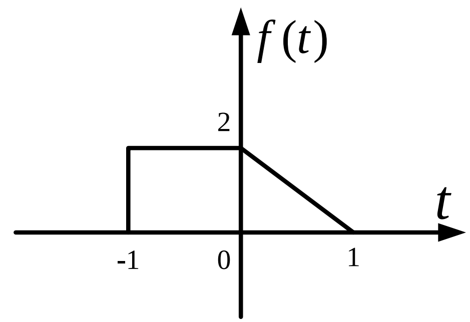
$$f(t) \quad \rightarrow \quad f(-t)$$

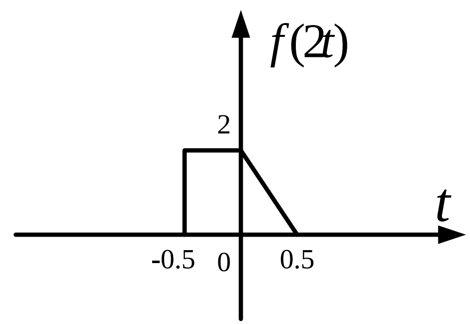




4. 尺度变换 (time scaling)

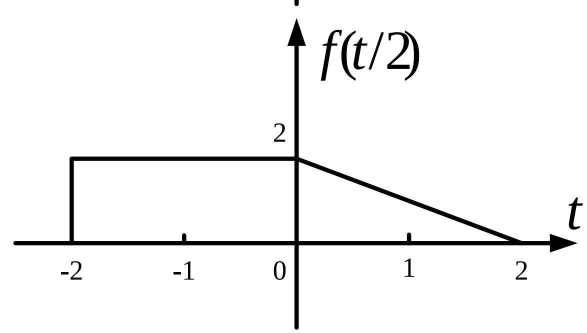
$$f(t) \quad \rightarrow \quad f(at)$$





$|a|>1$

压缩



$|a|<1$

展宽

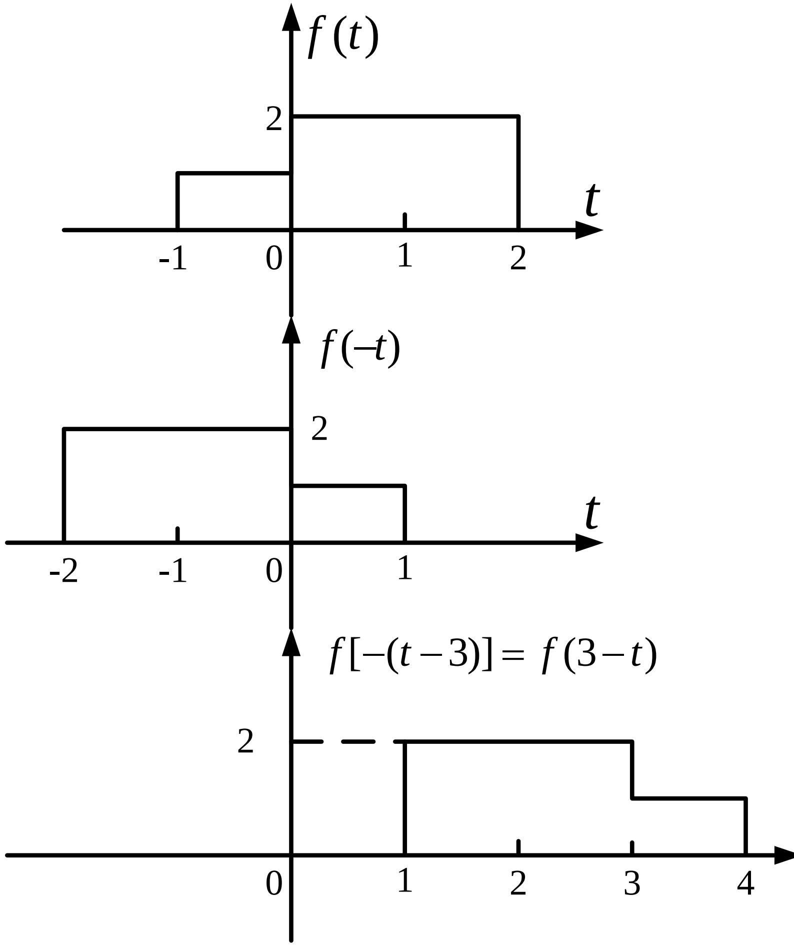
5. 微分与积分

$$g_1(t)=\frac{df(t)}{dt},\quad g_2(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

几种运算组合：

$f(t)$ 如图，

绘出 $f(3-t),\ f(2t+3)$ 波形图。

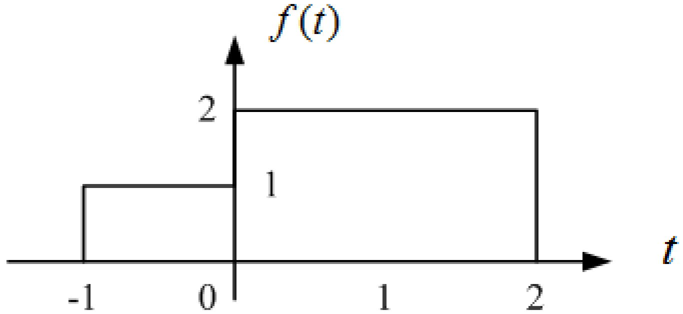


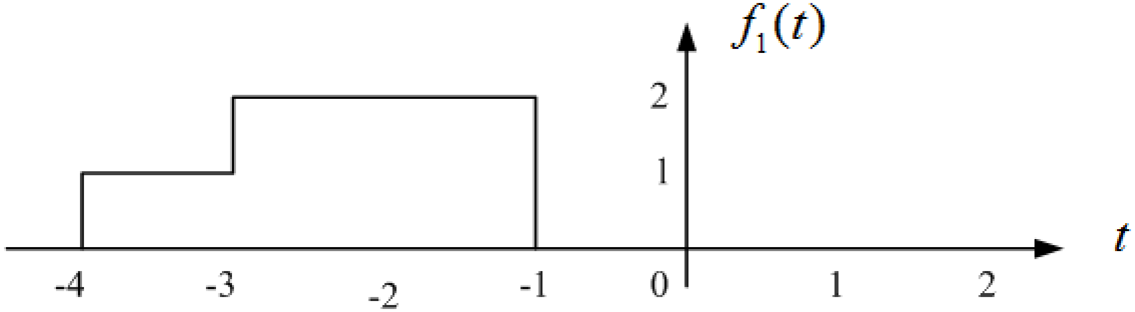
$$f(3-t)=f[-(t-3)]$$

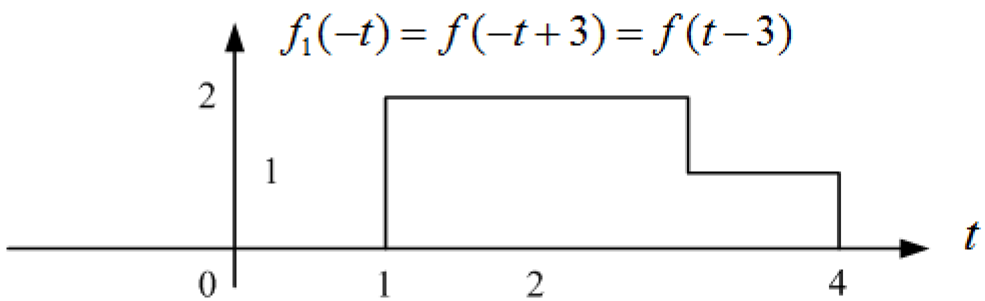
$$\rightarrow\quad (1)\,f(-t)\quad\rightarrow\quad (2)\,f[-(t-3)]$$

反转 — 右移：

$$f(3-t)=f(-t+3) \quad \rightarrow \quad (1)\, f(t+3)=f_1(t) \quad \rightarrow \quad (2)\, f(-t+3)=f_1(-t)$$

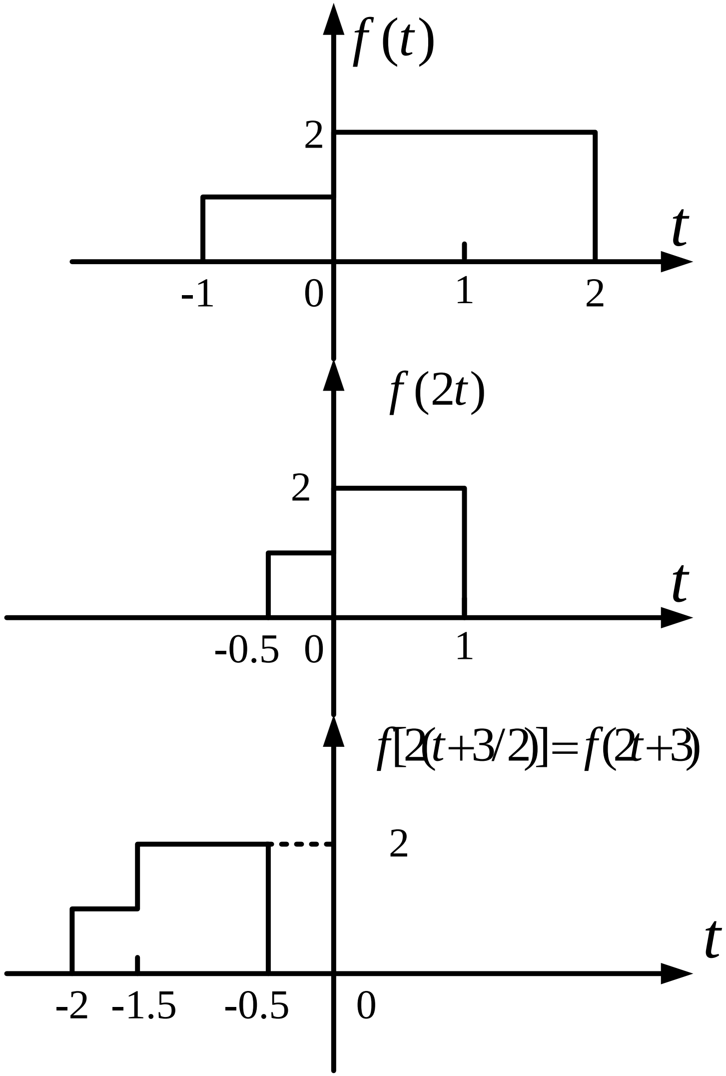






$$f(2t+3) = f[2(t+3/2)] \quad \rightarrow \quad (1)\, f(2t) = f_1(t) \quad \rightarrow \quad (2)\, f_1(t+3/2) = f[2(t+3/2)]$$

压缩 —— 左移：



5. 偶信号(even signal)与奇信号(odd signal)

任何一个信号均可以分解成一个偶信号和一个奇信号和的形式。

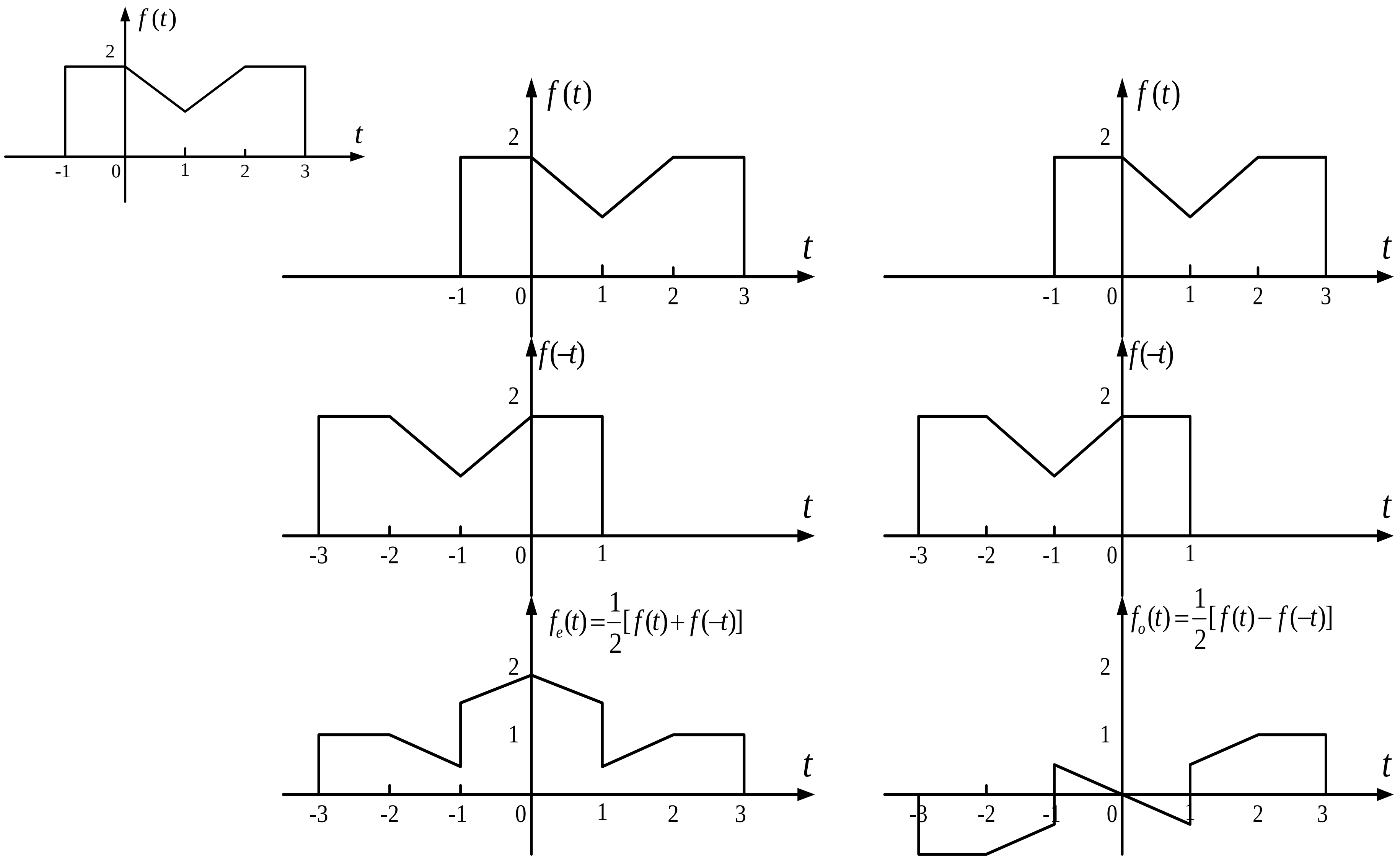
$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

其中

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$$ 偶分量

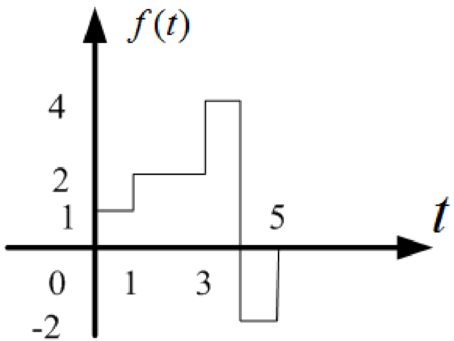
$$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$ 奇分量

例：信号如图示，绘出信号的奇、偶分量波形图。

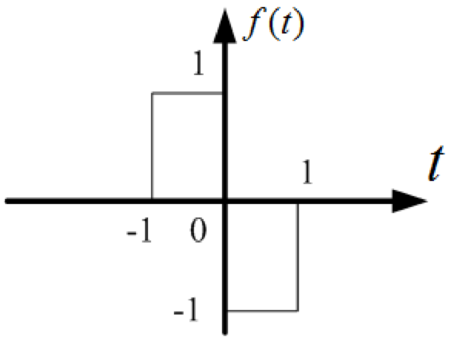


例题

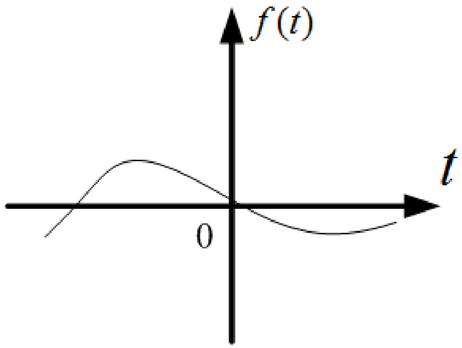
例1：判断下列信号是连续时间信号还是离散时间信号？



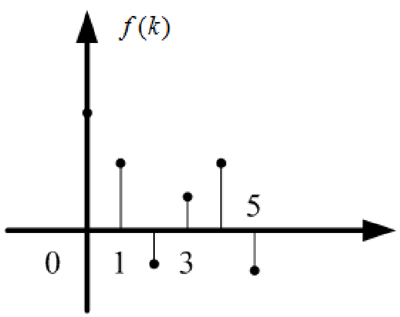
（1）



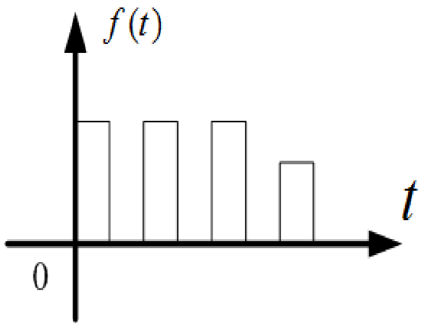
（2）



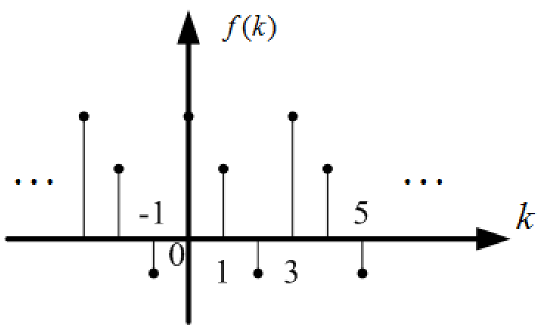
（3）



（4）



（5）



（6）

解：　（1）、（2）、（3）、（5）是连续时间信号；

（4）、（6）是离散时间信号。

例2：判断下列信号是周期信号还是非周期信号？

(1) $e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)$;　　(2) $\sin(100t)+2\cos(\pi t+\pi/4)$

(3) $\cos(2\pi t)\cos(\pi t)$;

(4) $2+\sin^2(\pi t)$;　　(5) $\sin(\pi t)+\mathrm{j}\cos(2\pi t)$

解：(1) $e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)$　非周期信号；

(2) $\sin(100t)+2\cos(\pi t+\pi/4)$　非周期信号；

$T_1=2\pi/100=\pi/50$　$T_2=2\pi/\pi=2$　找不到它们的公倍数

(3) $\cos(2\pi t)\cos(\pi t)=\dfrac{1}{2}\cos(\pi t)+\dfrac{1}{2}\cos(3\pi t)$　周期信号；

$T_1=2\pi/\pi=2$　$T_2=2\pi/3\pi=2/3$　它们的最小公倍数为2，所以周期为2.

(4) $2+\sin^2(\pi t)$　周期信号，周期为1.

(5) $\sin(\pi t)+\mathrm{j}\cos(2\pi t)$　周期信号，周期为2.

例3：判断下列信号是能量信号还是功率信号？或者都不是。

$$(1)\ f(t)=\begin{cases}5\cos(10\pi t) & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases};\qquad (2)\ f(t)=\begin{cases}4e^{-2t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$(3)\ 5\cos(2\pi t)+10\sin(3\pi t)$$

解： （1）是有始周期信号，周期为 T=1/5

能量： $E=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,dt=\int_{0}^{+\infty}[5\cos(10\pi t)]^2\,dt\to\infty$

功率： $P=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)^2\,dt=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{0}^{T} f(t)^2\,dt$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T[5\cos(10\pi t)]^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T\frac{25}{2}[1-\cos(20\pi t)]\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{25}{2}\left(T-\frac{\sin(20\pi T)}{20\pi}\right)=\frac{25}{4}-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\frac{25}{2}\frac{\sin(20\pi T)}{20\pi T}=6.25(W)$$

功率信号

（2）是收敛的单边指数信号

能量： $E=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,dt=\int_{0}^{+\infty}[4e^{-2t}]^2\,dt=4(J)$ **能量信号**

（3）是周期信号，周期为 T=2

功率：$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)^2 dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{+T} f(t)^2 dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2[5\cos(2\pi t)+10\sin(3\pi t)]^2 dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2[25\cos^2(2\pi t)+100\cos(2\pi t)\sin(3\pi t)+100\sin^2(3\pi t)]dt$$

$$=62.5(W)$$

$\Rightarrow$ **功率信号**

例4：用极坐标表示下列各数：

$$-3j,\quad 1+j,\quad (1-j)^2,\quad j(1-j),\quad (\sqrt{2}+j\sqrt{2})/(\sqrt{3}+j),2,-2$$

解：

$$-3j = 3e^{-j\pi/2} \qquad 1+j=\sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

$$(1-j)^2 = (\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^2 = 2e^{-j\pi/2}$$

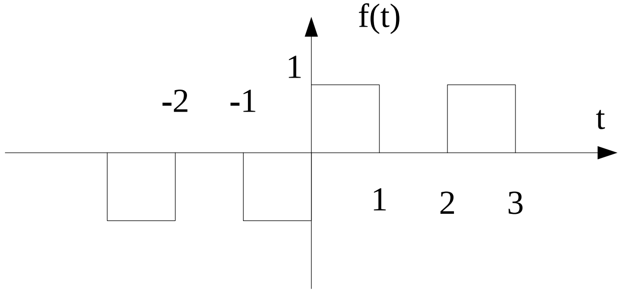
$$j(1-j) = e^{j\pi/2}\cdot\sqrt{2}e^{-j\pi/4} = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

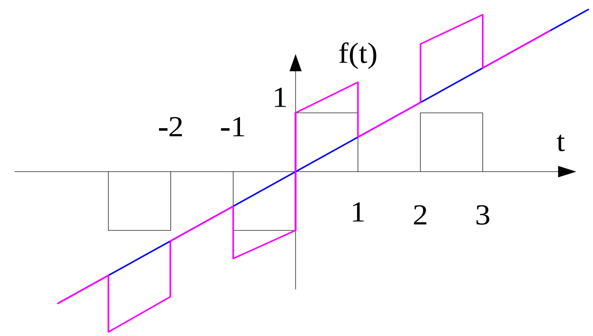
$$(\sqrt{2}+j\sqrt{2})/(\sqrt{3}+j) = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}e^{j\pi/4}/\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}e^{j\arctan(1/\sqrt{3})}$$

$$= 2e^{j\pi/4}/2e^{j\pi/6} = e^{j\pi/12}$$

$$2 = 2e^{j0} \qquad -2 = 2e^{j\pi} = 2e^{-j\pi}$$

例题：信号 $f(t)$ 如图示，画出 $f(t)+\pi t$ 的波形图：





练习题：画出 $$f(t)=\frac{\sin(10t)}{t}$$ 的波形图。

§1.3　系统的概念

一、系统(Systems)的定义

- 一般而言，系统是一个由若干相互关联的事物构成的，用以达到某些特定目的的有机整体。
- 本课主要以电路系统为例进行讨论。
- 电路系统 —— 处理信号的电路之组合。

- 系统与网络、电路的区别：主要在于分析问题的着眼点，而不在于组成的复杂程度。

- 系统 —— 着重在输入输出间的关系，或者运算功能上。

- 电路 —— 着重在电路中各支路或回路的电流及各节点的电压上。

- 系统的功能，可以用下面的方框图来表示

$e(t)$ 是输入信号，也称为<u>激励信号</u>；
（excitation）

$r(t)$ 是输出信号，也称为<u>响应信号</u>。
（response）

表示激励信号与响应信号之间关系的方法为：

$$\boxed{e(t) \rightarrow r(t)} \quad \text{或} \quad r(t) = T[e(t)]$$

二、系统的分类

1．从系统特性上划分(linear, nonlinear)

线性系统 —— 同时满足齐次性和叠加性的系统。

非线性系统 ——不同时满足齐次性和叠加性的系统。

2．从系统参数上划分（time-varying, time-invariant）

时变系统 —— 系统参数随时间变化的系统。

非时变系统 —— 系统参数不随时间变化的系统。

3. 从处理的信号上划分

(continuous-time, discrete-time)

- **连续时间系统** — 激励信号与响应信号都是连续时间信号。
- **离散时间系统** — 激励信号与响应信号都是离散时间信号。

4. 从因果性上划分(causality, non-causal)

- **因果系统** — 系统的输入输出信号之间满足因果关系的系统。
- **非因果系统** — 系统的输入输出信号之间不满足因果关系的系统。

5．从稳定性上划分(stabilization, unstable)

稳定系统 —— 能够稳定工作的系统。(不严格)

不稳定系统 —— 不能够稳定工作的系统。

6．其他划分

有记忆系统

无记忆系统

可逆系统

不可逆系统

集总参数系统

分布参数系统

三、系统的数学模型 （方程：equation）

线性系统 —— 线性方程（linear）

非线性系统 —— 非线性方程（nonlinear）

时变系统 – 变参数方程(Variable coefficient)

非时变系统 – 常参数方程(Constant coefficient)

连续时间系统 —— 微分方程(differential)

离散时间系统 —— 差分方程(difference)

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0r(t)=b_2\frac{d^2e(t)}{dt^2}+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0e(t)$$

$$y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=b_2e(k+2)+b_1e(k+1)+b_0e(k)$$

五、线性非时变（时不变）系统的性质

(Linear time-invariant systems-LTI)

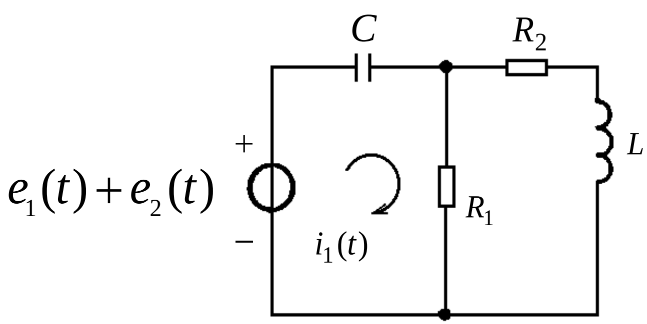
1. 齐次性（homogeneity，均匀性、比例性scaling）

注意：这里“+”的两层含义。

若 $e(t) \rightarrow r(t)$

则 $ke(t) \rightarrow kr(t)$

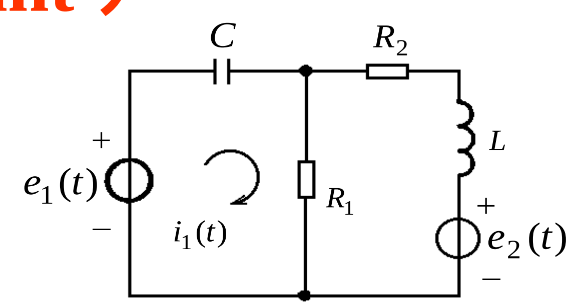
2. 叠加性（可加性additivity）



若 $e_1(t) \rightarrow r_1(t)$，$e_2(t) \rightarrow r_2(t)$

则 $e_1(t)+e_2(t) \rightarrow r_1(t)+r_2(t)$

3. 时不变性（非时变性time-invariant ）



若 $e(t) \rightarrow r(t)$

则 $e(t-t_0) \rightarrow r(t-t_0)$

综合1、2、3性质有:

若 $e_1(t) \to r_1(t),\ e_2(t) \to r_2(t)$

则

$$k_1e_1(t-t_0)+k_2e_2(t-t_0)\to k_1r_1(t-t_0)+k_2r_2(t-t_0)$$

或

$$k_1e_1(t-t_0)+k_2e_2(t-t_1)\to k_1r_1(t-t_0)+k_2r_2(t-t_1)$$

由线性时不变系统的性质还可以引出如下性质

4．微分与积分性(integral)

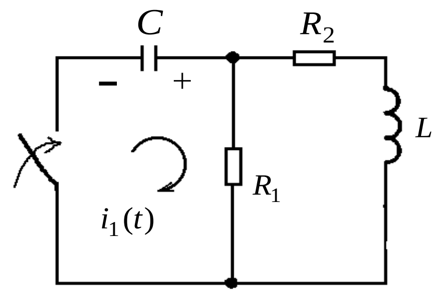
若 $e(t) \rightarrow r(t)$ ，则

$$\frac{de(t)}{dt} \rightarrow \frac{dr(t)}{dt}$$

$$\int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{t} r(\tau)d\tau$$

零输入响应 —— 外加激励信号为0，仅仅由初始条件所产生的响应，记为 $r_{zi}(t)$

(zero-input response)



零状态响应 —— 初始条件为0，仅仅由外加激励信号所产生的响应，叫，记为 $r_{zs}(t)$

(zero-state response)

- 全响应 $r(t)$ 为：

$$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$$

§1.4　线性非时变系统的分析

在进行系统分析时，需要进行以下几个步骤：

1．把系统的工作表达为数学形式，即所谓建立系统的数学模型。

2．运用数学方法处理，即求解方程。

3．对所求得的数学解给以物理解释，赋予物理意义。

例1：　已知连续时间系统输入与输出的关系如下：

$$\frac{dr(t)}{dt}+r(t)=e(t)+5 \qquad \boxed{e(t)\rightarrow r(t)}$$

试判断系统的线性和时不变性。

解：凡是方程中包含输出的导数或微分项时，通常采用的方法是将齐次性、叠加性或时不变性的关系结论分别代入方程的两边，观察方程是否成立，从而得出结果。即：

齐次性： $ae(t)\rightarrow ar(t)$ **是否成立？**

将 $ae(t), ar(t)$ **分别代入方程两边：**

左边 $=\dfrac{dar(t)}{dt}+ar(t)=a[\dfrac{dr(t)}{dt}+r(t)]=a[e(t)+5]=ae(t)+5a$

右边 $=ae(t)+5 \neq$ **左边　即** $ae(t) \nRightarrow ar(t)$

系统不满足齐次性。

叠加性： $e_1(t)+e_2(t)\rightarrow r_1(t)+r_2(t)$ 是否成立？ $\frac{dr(t)}{dt}+r(t)=e(t)+5$

将 $e_1(t)+e_2(t),\quad r_1(t)+r_2(t)$ 分别代入方程两边：

左边 $=\frac{d[r_1(t)+r_2(t)]}{dt}+[r_1(t)+r_2(t)]$

$=\frac{dr_1(t)}{dt}+r_1(t)+\frac{dr_2(t)}{dt}+r_2(t) \quad =e_1(t)+5+e_2(t)+5$

右边 $=e_1(t)+e_2(t)+5$ $\neq$ 左边

即 $e_1(t)+e_2(t) \not\Rightarrow r_1(t)+r_2(t)$ 不满足叠加性

所以系统是非线性系统。

非时变性： $e(t-t_0)\rightarrow r(t-t_0)$ 是否成立？

将 $e(t-t_0), r(t-t_0)$ 分别代入方程两边：

左边 $=\frac{dr(t-t_0)}{dt}+r(t-t_0) \quad =e(t-t_0)+5$

右边 $=e(t-t_0)+5$ $=$ 左边 所以系统是时不变系统

结论：系统是非线性、时不变系统。

例2： 已知连续时间系统输入与输出的关系如下：

$$r(t)=e(t-1)+e(1-t)$$

试判断系统的线性、时不变性、因果性和稳定性。

解：齐次性： $e(t)\to r(t)$

令： $e_1(t)=ae(t)\to r_1(t)$

$$r_1(t)=e_1(t-1)+e_1(1-t)=ae(t-1)+ae(1-t)=ar(t)$$

即： $ae(t)\to ar(t)$ 满足齐次性。

叠加性：

令： $e_3(t)=e_1(t)+e_2(t)\to r_3(t)$

$$\begin{aligned}r_3(t)&=e_3(t-1)+e_3(1-t)\\&=e_1(t-1)+e_2(t-1)+e_1(1-t)+e_2(1-t)\\&=r_1(t)+r_2(t)\end{aligned}$$

满足叠加性，所以系统是线性的。

$$r(t) = e(t-1) + e(1-t)$$

时不变性：

令： $e_4(t) = e(t-t_0) \rightarrow r_4(t)$

$$r_4(t) = e_4(t-1) + e_4(1-t)$$

又因为： $e_4(t-1) = e(t-1-t_0), \quad e_4(1-t) = e(1-t-t_0)$

$$r_4(t) = e(t-1-t_0) + e(1-t-t_0)$$

而： $r(t-t_0) = e(t-t_0-1) + e(1-(t-t_0)) \quad \neq r_4(t)$

即： $e(t-t_0) \;\cancel{\Rightarrow}\; r(t-t_0)$ **不满足时不变性，所以系统是时变的。**

因果性：

令： $t = 0 \;\Rightarrow\; r(0) = e(-1) + e(1)$

说明0时刻的输出与未来1时刻的输入有关，所以系统是非因果的。

稳定性： $r(t)=e(t-1)+e(1-t)$

有界的输入产生有界的输出？

系统仅仅是输入信号的自变量做了某种变换后叠加而来，且是有限个信号的叠加。有限个有界信号的和仍是有界信号，所以系统是BIBO稳定系统。

结论：系统是线性、时变、非因果、稳定系统。

例3： 某连续时间系统输入 $e(t)$ 与输出 $r(t)$ 的关系如下，请判断系统的线性、时不变性、因果性、稳定性。

$$r(t)=e(\cos(t))$$

解：线性：

$$e(t)\to r(t)=e(\cos(t))$$

$$e_1(t)=ae(t)\to r_1(t)=e_1(\cos(t))=ae(\cos(t))=ar(t)$$ 满足齐次性

$$e_3(t)=e_1(t)+e_2(t)\to r_3(t)=e_3(\cos(t))=e_1(\cos(t))+e_2(\cos(t))$$

$$=r_1(t)+r_2(t)$$ 满足叠加性 系统是线性的

时变性：

$$r(t)=e(\cos(t))$$

$$e_4(t)=e(t-t_0)\rightarrow r_4(t)=e_4(\cos(t))=e(\cos(t)-t_0)$$

而 $r(t-t_0)=e(\cos(t-t_0))\neq e(\cos(t)-t_0)$

显然：$e(t-t_0)\not\Rightarrow r(t-t_0)$ 所以系统是时变的。

因果性：

令：$t=0$ $r(0)=e(\cos(0))=e(1)$

说明：0时刻的输出取决于1时刻的输入，不满足因果性，所以是非因果的。

稳定性：

$$r(t)=e(\cos(t))$$

满足输入有界输出有界的条件的，所以是稳定系统。

结论：系统是线性、时变、非因果、稳定系统。

例　若某连续时间系统的输入输出关系如下，

$$r(t)=\int_{-\infty}^{2t-1} e(\tau)d\tau$$

试判断该系统的线性和时不变性。

齐次性：　$e_1(t)=ae(t)\rightarrow r_1(t)$

$$r_1(t)=\int_{-\infty}^{2t-1} e_1(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{2t-1} ae(\tau)d\tau=a\int_{-\infty}^{2t-1} e(\tau)d\tau=ar(t)$$

系统满足齐次性。

叠加性：　$e_3(t)=e_1(t)+e_2(t)\rightarrow r_3(t)$

$$r_3(t)=\int_{-\infty}^{2t-1} e_3(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{2t-1} [e_1(\tau)+e_2(\tau)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{2t-1} e_1(\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{2t-1} e_2(\tau)d\tau=r_1(t)+r_2(t)$$

系统满足叠加性。

$$r(t)=\int_{-\infty}^{2t-1} e(\tau)d\tau$$

时不变性： $e_4(t)=e(t-t_0)\rightarrow r_4(t)$

$$r_4(t)=\int_{-\infty}^{2t-1} e_4(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{2t-1} e(\tau-t_0)d\tau \overset{\tau-t_0=\tau'}{=} \int_{-\infty}^{2t-1-t_0} e(\tau')d\tau'$$

而 $r(t-t_0)=\int_{-\infty}^{2(t-t_0)-1} e(\tau)d\tau \neq r_4(t)$

系统是时变系统。

综上，系统是线性时变系统。

注意：零输入线性和零状态线性，全响应不具备线性特性。

课后题：1. 11　一具有两个初始条件 $x_1(0), x_2(0)$ 的线性非时变系统，其激励为 $e(t)$ ，响应为 $r(t)$ ，已知：

（1）当 $e(t)=0, \boxed{x_1(0)=5, x_2(0)=2}$ 时，$\boxed{r_1(t)=e^{-t}(7t+5), t\geq 0}$

（2）当 $e(t)=0, \boxed{x_1(0)=1, x_2(0)=4}$ 时，$\boxed{r_2(t)=e^{-t}(5t+1), t\geq 0}$

（3）当 $e(t)=\begin{cases}1, t>0\\0, t<0\end{cases}, \boxed{x_1(0)=1, x_2(0)=1}$ 时，$r(t)=e^{-t}(t+1), t\geq 0$

$\boxed{=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)}$

求 $e(t)=\begin{cases}3, t>0\\0, t<0\end{cases}$ 时的零状态响应。

解：由已知条件：$\boxed{r_1(t)=e^{-t}(7t+5)=r_{1zi}(t), r_2(t)=e^{-t}(5t+1)=r_{2zi}(t)}$

根据叠加性：$e(t)=0, x_1(0)=6, x_2(0)=6 \Rightarrow r_{12}(t)=e^{-t}(12t+6), t\geq 0$

根据齐次性： $e(t)=0, \boxed{x_1(0)=1, x_2(0)=1} \Rightarrow \boxed{r_{zi}(t)=e^{-t}(2t+1), t\ge 0}$

$$e(t)=\begin{cases}1, t>0\\ 0, t<0\end{cases}, x_1(0)=1, x_2(0)=1 \qquad r(t)==r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=e^{-t}(t+1), t\ge 0$$

$$e(t)=\begin{cases}1, t>0\\ 0, t<0\end{cases} \Rightarrow r_{zs}(t)=r(t)-r_{zi}(t) \quad =-te^{-t}, t\ge 0$$

再根据齐次性：

$$e(t)=\begin{cases}3, t>0\\ 0, t<0\end{cases} \Rightarrow 3r_{zs}(t)=-3te^{-t}, t\ge 0$$