第四章 连续时间系统的频域分析

§4.1 引 言

- 将激励信号分解成一系列单元信号和的形式，单元信号的选择应具有以下两个特点：

  (1)一系列单元信号能够构成相当广泛的实用信号；

  (2)线性时不变系统对每个单元信号响应的求解简单。

- 频域分析方法中所采用的单元信号是等幅正弦信号，所得到系统的响应是零状态响应$r_{zs}(t)$。

周期信号：余弦形式的傅里叶级数

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \\
&= \frac{a_0}{2} + A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2) + \cdots + A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) + \cdots
\end{aligned}
$$

周期信号：指数形式的傅里叶级数

$$
\begin{aligned}
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} &= c_0 + c_1 e^{j\Omega t} + c_{-1} e^{-j\Omega t} + c_2 e^{j2\Omega t} + c_{-2} e^{-j2\Omega t} \\
&\quad + \cdots + c_n e^{jn\Omega t} + c_{-n} e^{-jn\Omega t} + \cdots
\end{aligned}
$$

非周期信号：傅里叶反变换

$$
f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega
$$

讨论：若线性时不变系统的单位冲激响应$h(t)$的傅里叶变换为$H(j\omega)$，(1) 当激励信号$e(t)=e^{j\omega_0 t}$时，求其零状态响应$r_{zs1}(t)$；(2) 当激励信号$e(t)=A\cos\omega_0 t$时，求其零状态响应$r_{zs2}(t)$。

解：(1) 根据傅里叶变换的定义可知

$$F.T.\{h(t)\}=H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

故其零状态响应$r_{zs1}(t)$为

$$r_{zs1}(t)=e(t)*h(t)=h(t)*e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j\omega_0 t}\cdot e^{-j\omega_0\tau}d\tau$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t}\rightarrow H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}}$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau\right]e^{j\omega_0 t}=H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

结论：系统对复指数信号的响应是同频率的复指数信号，只是相差一个复数常数$H(j\omega_0)$，此常数与系统的参数和激励信号的频率有关。

(2) 因为$h(t)$是实信号，故$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$中$|H(j\omega)|$是偶函数，$\varphi(\omega)$是奇函数；并且$e^{j\omega_0 t}\rightarrow H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$。

利用欧拉公式有 $A\cos\omega_0 t=\frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)$

根据线性系统的齐次性和叠加性可得其零状态响应$r_{zs2}(t)$为

$$
\begin{aligned}
r_{zs2}(t)&=\frac{A}{2}\left[H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}+H(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t}\right]\\
&=\frac{A}{2}\left[|H(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}e^{j\omega_0 t}+|H(-j\omega_0)|e^{j\varphi(-\omega_0)}e^{-j\omega_0 t}\right]\\
&=\frac{A}{2}\left[|H(j\omega_0)|e^{j\varphi(\omega_0)}e^{j\omega_0 t}+|H(j\omega_0)|e^{-j\varphi(\omega_0)}e^{-j\omega_0 t}\right]\\
&=\frac{A}{2}|H(j\omega_0)|\left\{e^{j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}+e^{-j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}\right\}\\
&=A|H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]
\end{aligned}
$$

$$\boxed{A\cos\omega_0 t\rightarrow A|H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}$$

结论：系统对实正弦信号的响应是同频率的实正弦信号，只是幅度上乘以一个系数$|H(j\omega_0)|$，相位上增加一个相移$\varphi(\omega_0)$。

- 系统对正弦信号的稳态响应随频率的变化规律称为系统的**频率响应函数**，简称**频响**（**Frequency response**），记作

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

- 描述$H(j\omega)$的模$|H(j\omega)|$随频率变化的曲线称为**幅频特性曲线**。
- 描述$H(j\omega)$的相角$\varphi(\omega)$随频率变化的曲线称为**相频特性曲线**。

- 系统对周期性激励信号响应的**求解步骤**：

(1) 运用傅里叶级数将激励信号分解成多个正弦分量；

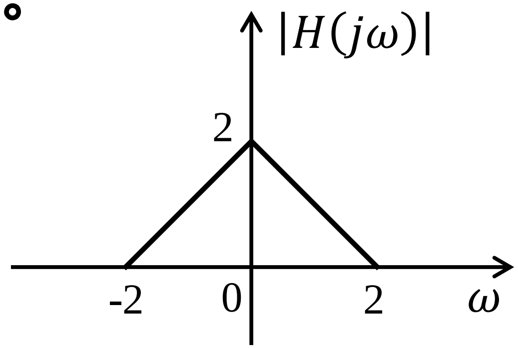
(2) 求系统的频率响应函数$H(j\omega)$；

(3) 求每一个频率分量单独作用的响应；

(4) 将各个响应叠加得到总的时域响应$r_{zs}(t)$。

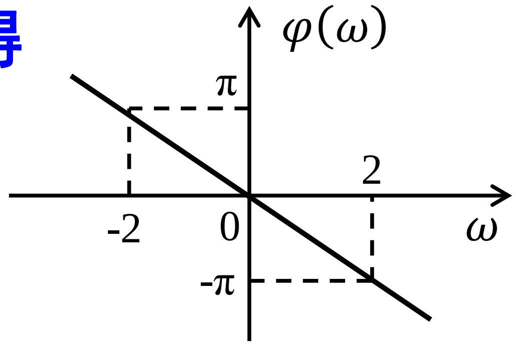
例：已知一个线性系统的频响曲线如图所示，若激励信号为 $e(t) = 2 + 3\cos t + 4\cos 2t$，求其零状态响应。

$$\boxed{A\cos\omega_0 t \to A|H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}$$



解：(1) 运用傅里叶级数将激励信号分解成多个正弦分量， $e(t) = 2 + 3\cos t + 4\cos 2t$

(2) 求系统的频率响应函数，根据频响曲线可得



$$|H(j0)| = 2, \varphi(0) = 0;$$
$$|H(j1)| = 1, \varphi(1) = -\frac{\pi}{2};$$
$$|H(j2)| = 0, \varphi(2) = -\pi.$$

(3) 求每一个频率分量单独作用的响应，即

$$|R(j0)| = 2 * 2 = 4, \varphi(0) = 0 + 0 = 0;$$
$$|R(j1)| = 3 * 1 = 3, \varphi(1) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2};$$
$$|R(j2)| = 4 * 0 = 0, \varphi(2) = 0 - \pi = -\pi.$$

(4) 将各个响应叠加得到总的时域响应，即

$$r(t) = 4 + 3\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 4 + 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 4 + 3\sin t$$

§4.2 信号通过系统的频域分析方法

已知系统的零状态响应是激励信号与单位冲激响应的卷积，即

$$r_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

若响应信号$r_{zs}(t)$和激励信号$e(t)$的傅里叶变换分别为$R_{zs}(j\omega)$和$E(j\omega)$，则根据卷积定理有

$$R_{zs}(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

- 系统对非周期性激励信号响应的求解步骤：

(1) 求激励信号的傅里叶变换$E(j\omega)$；

(2) 求系统频率响应函数$H(j\omega)$；

(3) 计算响应的傅里叶变换$R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$；

(4) 通过傅里叶反变换求时域响应$r_{zs}(t)$。

➢ **求解$H(j\omega)$的方法：**

(1) 运用单位冲激响应的傅里叶变换： $H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$

(2) 直接在电路结构上运用欧姆定律：当$E(j\omega)=1$时，
$R_{zs}(j\omega)=H(j\omega)$

电阻： $u_R(t)=Ri_R(t)\rightarrow\dfrac{U_R(j\omega)}{I_R(j\omega)}=R$ **频域阻抗为**R

电容： $i_C(t)=C\dfrac{du_C(t)}{dt}\rightarrow\dfrac{U_C(j\omega)}{I_C(j\omega)}=\dfrac{1}{j\omega C}$ **频域阻抗为**$\dfrac{1}{j\omega C}$

电感： $u_L(t)=L\dfrac{di_L(t)}{dt}\rightarrow\dfrac{U_L(j\omega)}{I_L(j\omega)}=j\omega L$ **频域阻抗为**$j\omega L$

(3) 通过系统的微分方程求解：

当$e(t)=\delta(t)$时，有$r(t)=h(t)$，即

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}+a_1\frac{dh(t)}{dt}+a_0h(t)=b_2\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}+b_1\frac{d\delta(t)}{dt}+b_0\delta(t)$$

方程两边求傅里叶变换得：

$$(j\omega)^2H(j\omega)+a_1(j\omega)H(j\omega)+a_0H(j\omega)=b_2(j\omega)^2+b_1(j\omega)+b_0$$

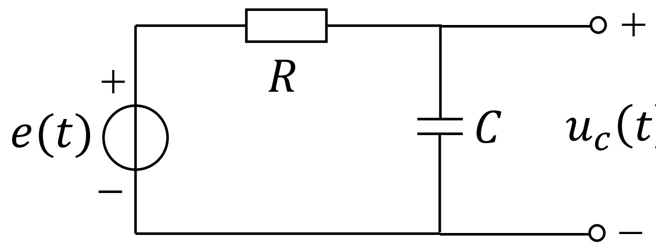
$$H(j\omega)=\frac{b_2(j\omega)^2+b_1(j\omega)+b_0}{(j\omega)^2+a_1(j\omega)+a_0}$$

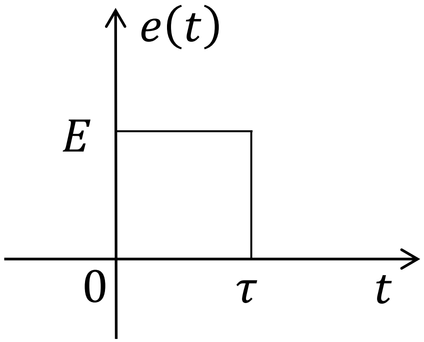
由此推广到n阶系统：

$$H(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\cdots+b_1(j\omega)+b_0}{(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_1(j\omega)+a_0}$$

也就是将转移算子$H(p)$中的微分算子p全部改成$j\omega$。

例：一个电路系统如图所示，其输入端的激励信号为$e(t)=E[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)]$，求响应信号$u_c(t)$。





解：(1) 求激励信号的傅里叶变换，即

$$E(j\omega)=F.T.\{e(t)\}=E\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]-E\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]e^{-j\omega\tau}$$

$$=E\pi\delta(\omega)+\frac{E}{j\omega}-E\pi\delta(\omega)e^{-j\omega\tau}-\frac{E}{j\omega}e^{-j\omega\tau}=\frac{E}{j\omega}\left(1-e^{-j\omega\tau}\right)$$

(2) 求系统频率响应函数，根据电路可得

$$H(j\omega)=\frac{U_C(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{j\omega RC+1}=\frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC}+j\omega}=\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}$$

其中$\alpha=\frac{1}{RC}$

(3) 计算响应的傅里叶变换，即

$$U_C(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega) = \frac{E}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega\tau}\right)\frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$$

$$= E\left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\alpha + j\omega}\right)\left(1 - e^{-j\omega\tau}\right)$$

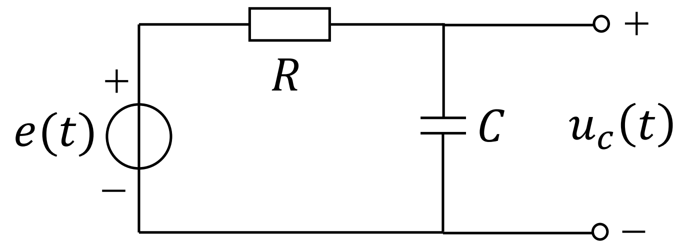
$$= \frac{E}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega\tau}\right) - \frac{E}{\alpha + j\omega}\left(1 - e^{-j\omega\tau}\right)$$

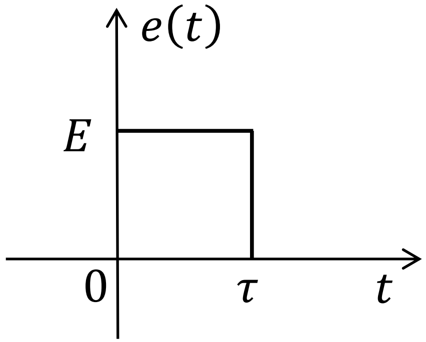
(4) 通过傅里叶反变换求时域响应，即

$$u_c(t) = I.F.T.\{U_C(j\omega)\}$$

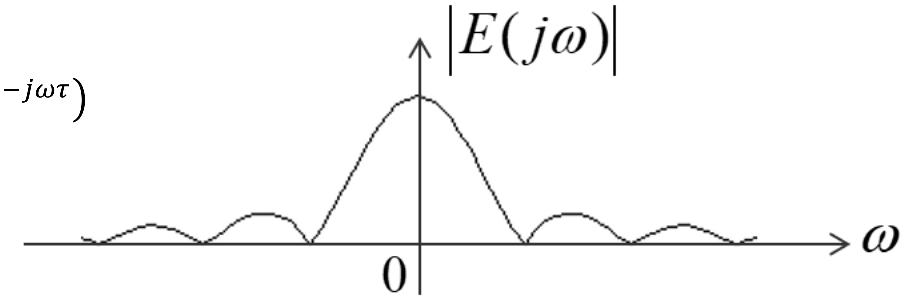
$$= E[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)] - E\left[e^{-\alpha t}\varepsilon(t) - e^{-\alpha(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)\right]$$

$$= E(1 - e^{-\alpha t})\varepsilon(t) - E\left[1 - e^{-\alpha(t-\tau)}\right]\varepsilon(t-\tau)$$

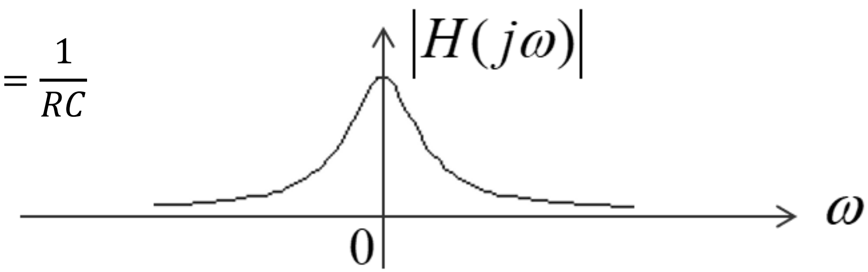


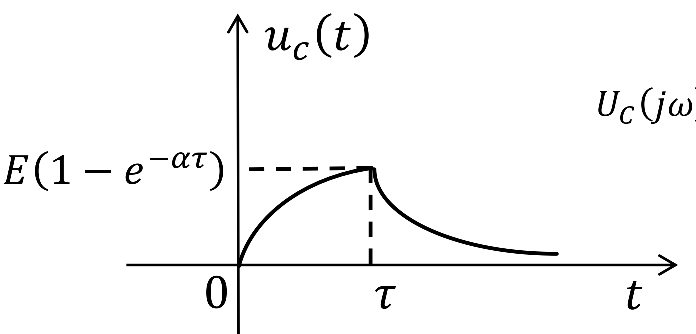


$$E(j\omega) = \frac{E}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega\tau}\right)$$

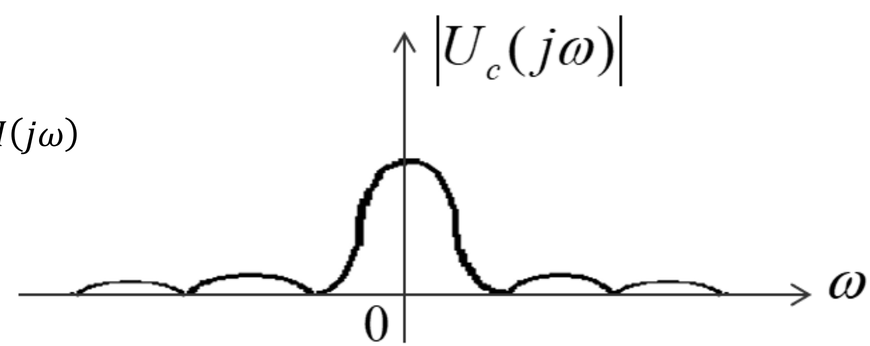


$$H(j\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega},\ \ \alpha = \frac{1}{RC}$$





$$U_C(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

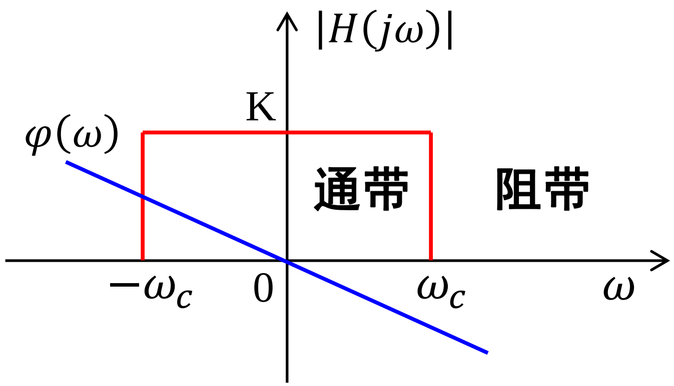


§4.3 理想低通滤波器

- **滤波器**(**Filter**)：为了保证有效信号的传输和处理，从带有噪声和干扰的信号中将有用的信号分离出来的系统。
- **理想滤波器**(**Ideal filter**)：频率响应特性被理想化的滤波器。
- **理想低通滤波器**(**Ideal low-pass filter**)：通带内频率响应函数$H(j\omega)$的模量为常数且辐角与频率成正比，通带外(阻带内)频率响应函数的模量为0。

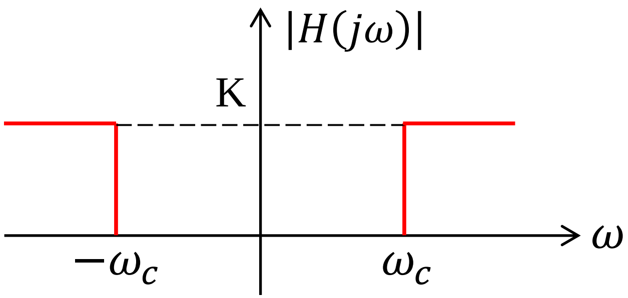
$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=\begin{cases}Ke^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中，ω_c为截止频率。

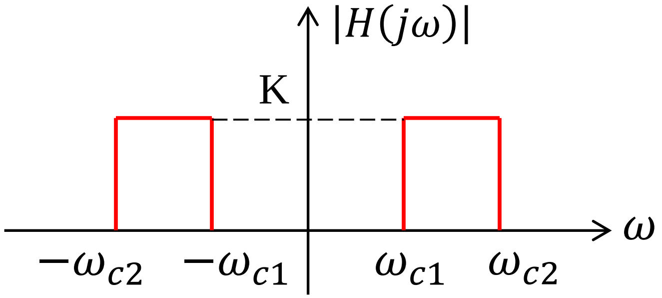


即激励信号中**低于频率ω_c**的各分量可**全部通过**，并且在时间上**延迟t_0**，而**高于频率ω_c**的各分量一律**不能通过**。

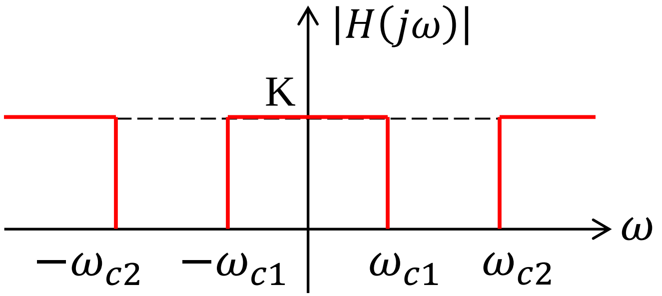
➢ **理想高通滤波器**（**Ideal high-pass filter**）：只允许高于某指定频率的信号通过的系统。



➢ **理想带通滤波器**（**Ideal band-pass filter**）：只允许指定频率范围内的信号通过的系统。



➢ **理想带阻滤波器**（**Ideal band-stop filter**）：阻止指定频率范围内的信号通过的系统。



一、理想低通滤波器的单位冲激响应

(1) 求激励信号的傅里叶变换，即 $E(j\omega) = F.T.\{\delta(t)\} = 1$

(2) 求系统的频率响应函数，即 $H(j\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(3) 计算响应的傅里叶变换，即

$$R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega) = 1 \cdot H(j\omega) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

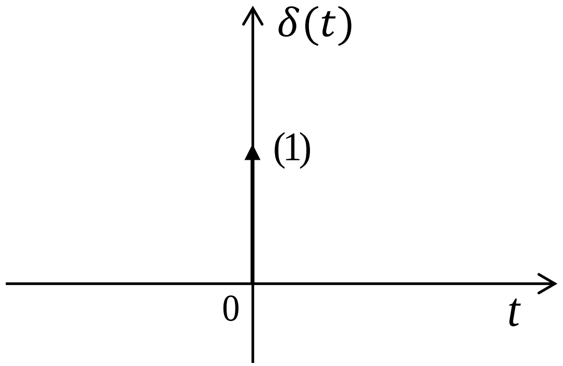
(4) 通过傅里叶反变换求时域响应，即

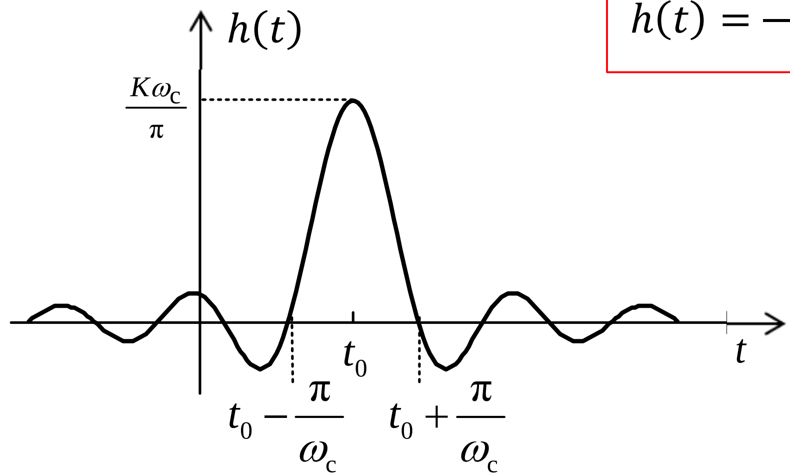
$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} Ke^{-j\omega t_0}\, e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{K}{2\pi} \cdot \frac{1}{j(t-t_0)} \cdot \left[e^{j\omega(t-t_0)}\right]\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{K}{\pi(t-t_0)} \sin[\omega_c(t-t_0)]$$

$$= \frac{K\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)} = \frac{K\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t-t_0)]$$

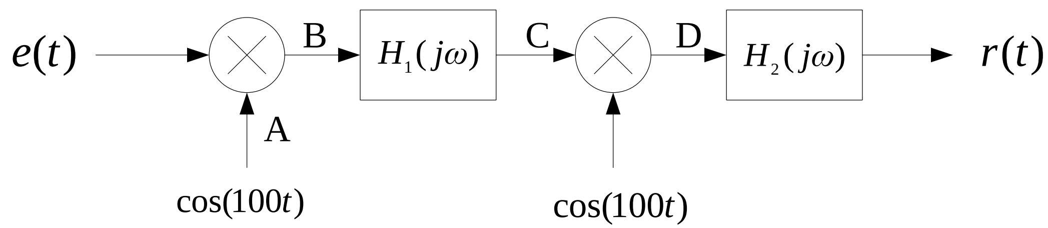
$$\boxed{h(t)=\frac{K\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(t-t_0)]}$$

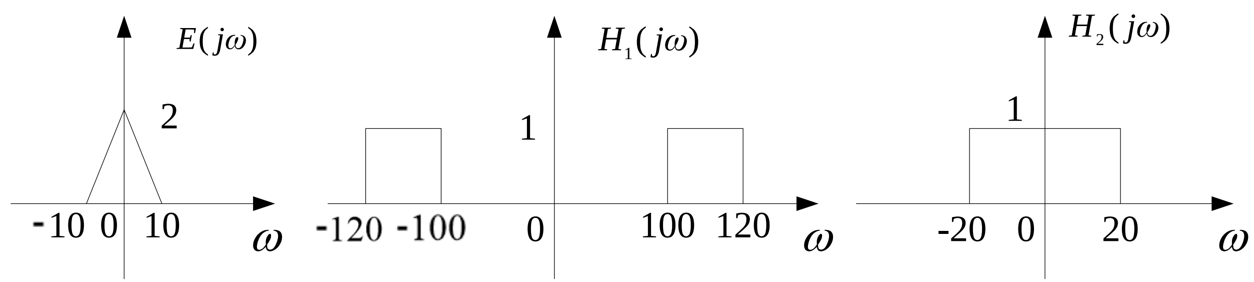




- 输入$\delta(t)$的波形是一个冲激函数，输出$h(t)$的波形是一个抽样函数。可见经过理想低通滤波器后信号有失真。
- 造成失真的原因：理想低通滤波器是一个带限系统，而冲激信号的频带宽度为无穷大。减小失真的方法是增大截止频率ω_c。当$\omega_c\to\infty$时，输出$h(t)$会变成冲激函数，此时是一个无失真的传输系统。
- 当$t<0$时，$h(t)\neq 0$，说明理想低通滤波器系统违反了因果律，是一个物理不可实现的系统。

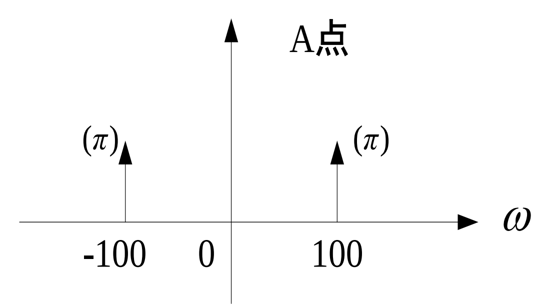
例：一个线性系统的框图如图所示，已知输入信号$e(t)$的频谱为$E(j\omega)$，画出系统中A, B, C, D各点和$r(t)$的频谱图，求出$r(t)$与$e(t)$的关系。





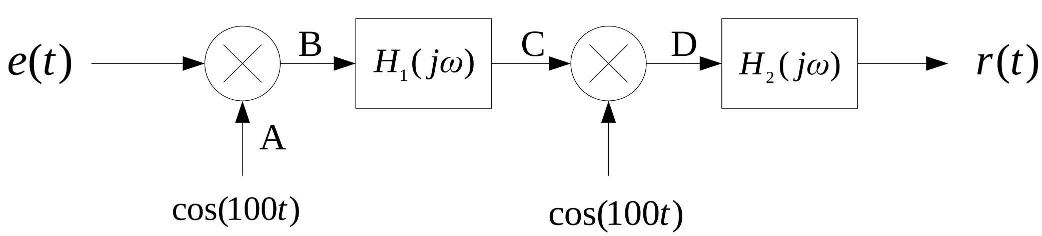
解：由图可知，A点的信号为

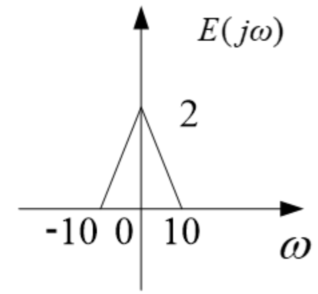
$$e_A(t) = \cos 100t$$



故A点的频谱为

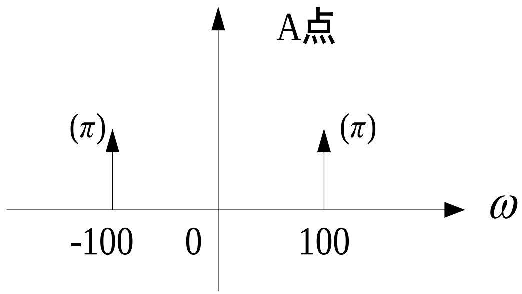
$$E_A(j\omega) = \pi[\delta(\omega + 100) + \delta(\omega - 100)]$$





由图可知，B点的信号为

$$e_B(t) = e(t)e_A(t) = e(t)\cos 100t$$



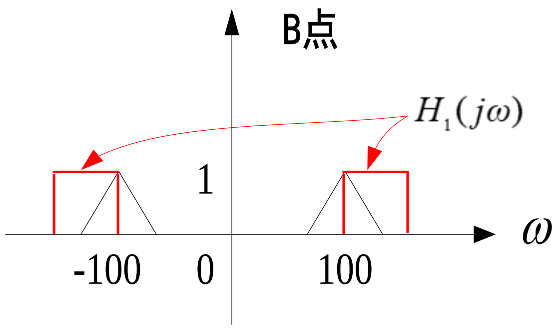
故B点的频谱为

$$E_B(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[E(j\omega) * E_A(j\omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\{E(j\omega) * \pi[\delta(\omega + 100) + \delta(\omega - 100)]\}$$

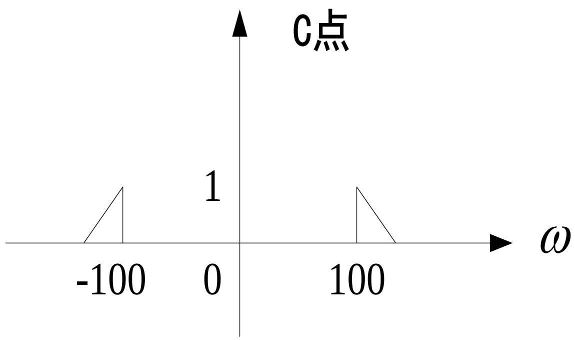
$$= \frac{1}{2}[E(j\omega) * \delta(\omega + 100)] + \frac{1}{2}[E(j\omega) * \delta(\omega - 100)]$$

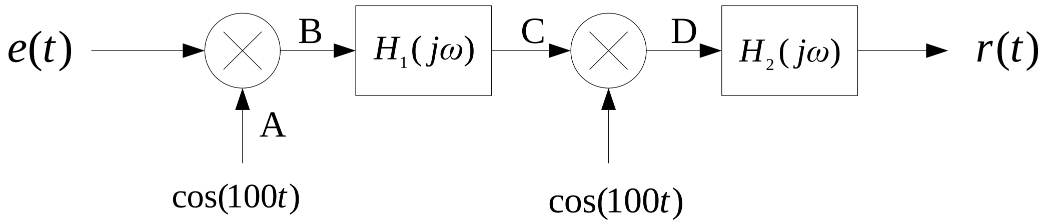
$$= \frac{1}{2}E[j(\omega + 100)] + \frac{1}{2}E[j(\omega - 100)]$$

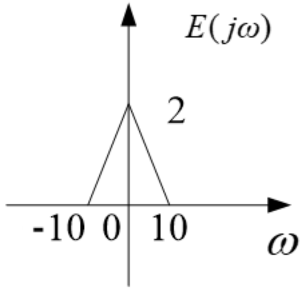


由图可知，C点的频谱为

$$E_C(j\omega) = E_B(j\omega)H_1(j\omega)$$

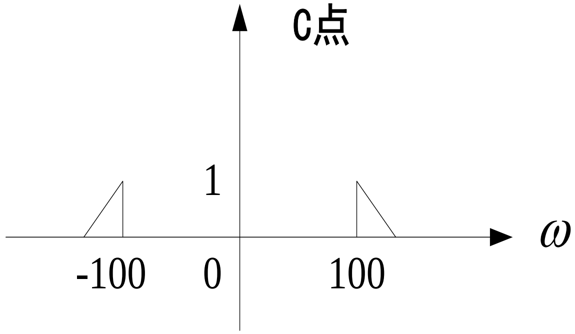






由图可知，D点的信号为

$$e_D(t)=e_C(t)\cos 100t$$

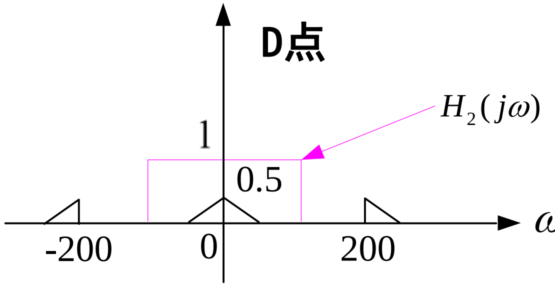


故D点的频谱为

$$E_D(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\{E_C(j\omega)*\pi[\delta(\omega+100)+\delta(\omega-100)]\}$$

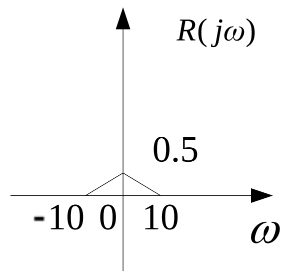
$$=\frac{1}{2}[E_C(j\omega)*\delta(\omega+100)]+\frac{1}{2}[E_C(j\omega)*\delta(\omega-100)]$$

$$=\frac{1}{2}E_C[j(\omega+100)]+\frac{1}{2}E_C[j(\omega-100)]$$



由图可知，输出信号$r(t)$的频谱为

$$R(j\omega)=E_D(j\omega)H_2(j\omega)$$



故$r(t)$与$e(t)$的关系为

$$r(\mathrm{t})=0.25e(t)$$

§4.4 佩利–维纳准则

- 理想滤波器都是非因果的、物理不可实现的系统。对于任何一个系统，可以从两方面判断其因果性/物理可实现性：

  (1) 时域：$t<0,\ h(t)=0$是物理可实现系统的充分必要条件；

  (2) 频域：佩利–维纳(Paley-Wiener)准则。

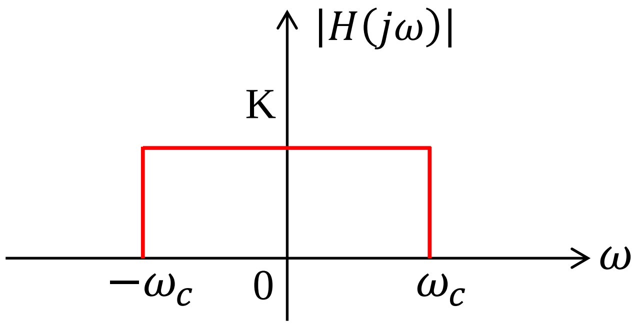
- 佩利–维纳准则：若系统的频率响应函数满足$\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2 d\omega<\infty$，则该系统是一个物理可实现系统的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|ln|H(j\omega)|\right|}{1+\omega^2}d\omega<\infty$$

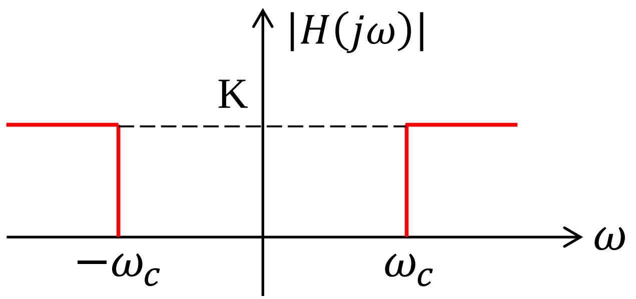
  也就是说$|H(j\omega)|$只能在某些不连续的频率点上为0，不可以在一段频带内都为0。

物理不可实现的滤波器

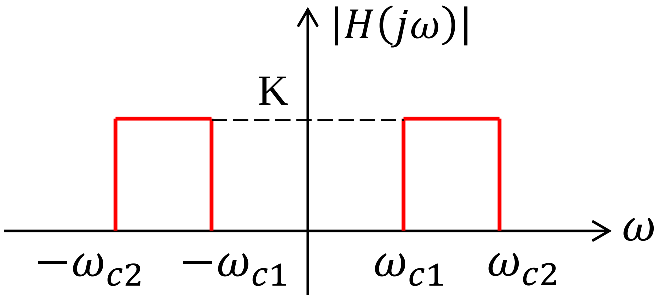
理想低通滤波器



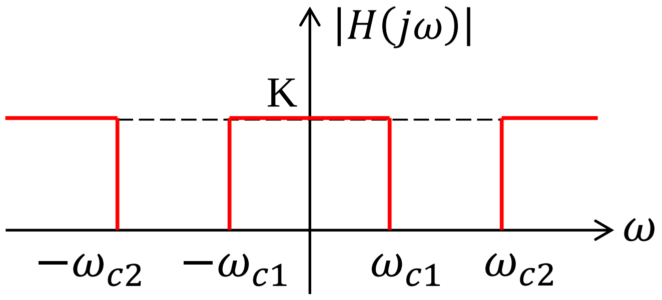
理想高通滤波器



理想带通滤波器

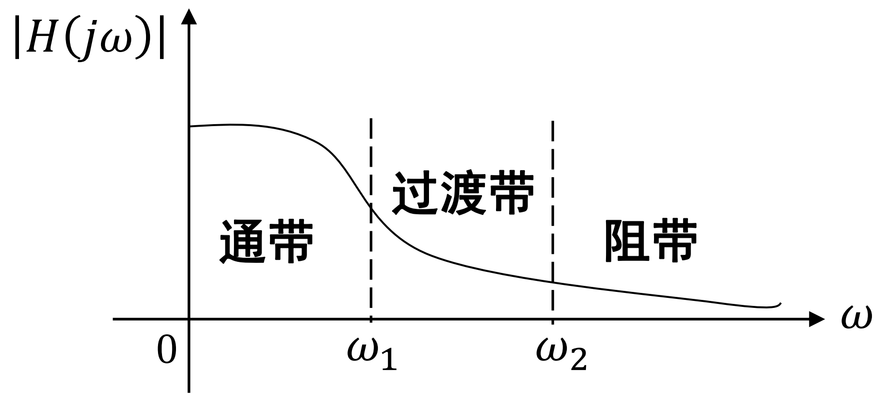


理想带阻滤波器

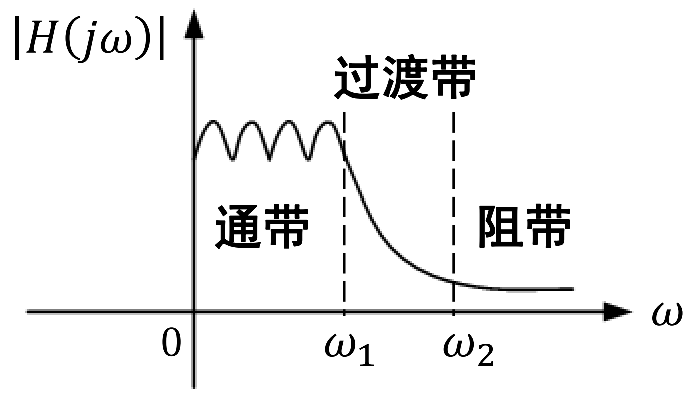


物理可实现的滤波器

➢ 最平坦型滤波器——巴特沃思滤波器



➢ 通带等起伏型滤波器——切比雪夫滤波器



§4.4 信号通过线性系统不产生失真的条件

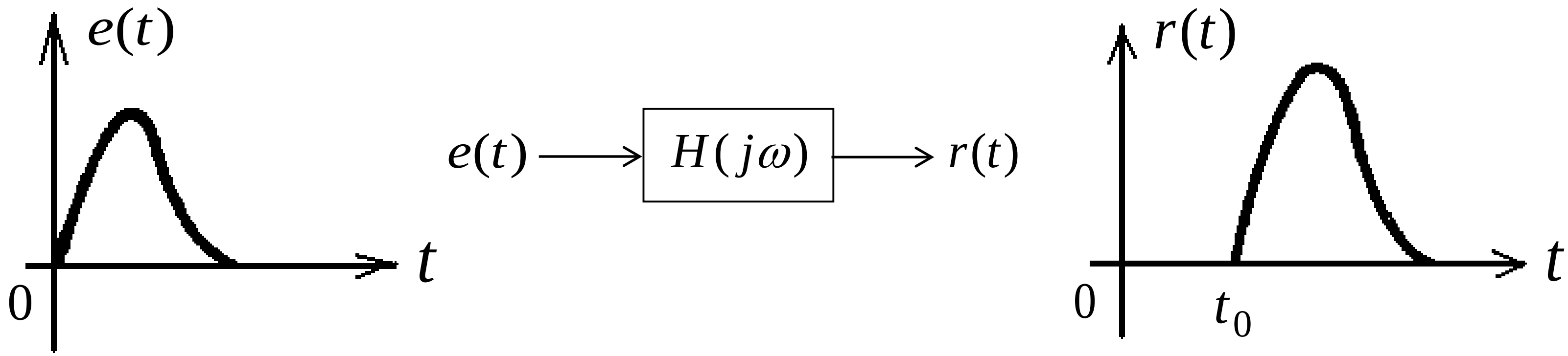
- 激励信号通过线性系统后的响应波形与激励波形不同，即为失真（Distortion）。失真可能由两方面因素造成的：

  (1) 幅度失真（Amplitude distortion）：系统对输入信号各频率分量的幅度产生不同程度的衰减，导致各频率分量幅度的相对比例产生了变化。

  (2) 相位失真（Phase distortion）：系统对输入信号各频率分量产生的相移不与频率成正比，导致各频率分量在时间轴上的相对位置产生了变化。

- 幅度失真和相位失真不产生新的频率分量，都是线性失真。

- **不失真传输**：系统响应信号的波形与激励信号的波形相同，只是大小可能相差一个因子K，时间上可能延迟t_0。

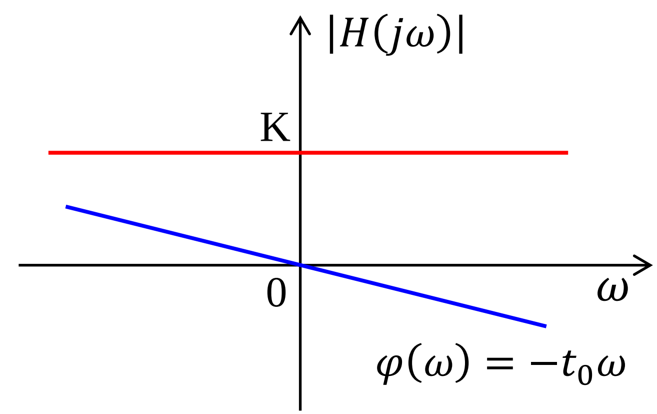


系统不失真传输时，激励与响应的关系为

$$r(\mathrm{t}) = Ke(t - t_0)$$

根据延时特性可知，$R(j\omega) = KE(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

所以，$H(j\omega) = \dfrac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = Ke^{-j\omega t_0}$



即幅频特性是常量，相频特性是一条通过原点的直线。

本章小结

基本概念：频率响应函数、幅频特性曲线、相频特性曲线、理想滤波器、物理可实现系统、幅度失真、相位失真。

基本运算：系统对周期信号和非周期信号的零状态响应求解、系统的频域分析方法、理想滤波器的应用、不失真传输的应用。