概率论与数理统计期末复习题一

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1、设 X 为连续型随机变量，则 P{X=1}=(　　　　).

2、袋中有 50 个球,其编号从 01 到 50,从中任取一球,其编号中有数字 4 的概率为(　　　).

3、若随机变量 X 的分布律为 P{X=k}=C$(2/3)^k$,k=1,2,3,4,则 C=(　　　　　).

4、设 X 服从 N（1，4）分布，Y 服从 P(1)分布，且 X 与 Y 独立，则

E（XY+1-Y）=（　　　　），D（2Y-X+1）=（　　　　）.

5、已知随机变量 X~N(μ,σ^2),(X-5)/4 服从 N(0,1),则μ=(　　　);σ=(　　　).

6、已知随机变量(X,Y)的分布律为：

X \ Y	1	2
3	0.15	0.15
4	A	B

且 X 与 Y 相互独立。

则 A=(　　　　),B=(　　　　).

7、设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是取自均匀分布 U[0,θ]的一个样本，其中θ>0, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是一组观察值，则θ的极大似然估计量为(　　　　　).

二、计算题（每题 12 分，共 48 分）

1、钥匙掉了,落在宿舍中的概率为 40%,这种情况下找到的概率为 0.9; 落在教室里的概率为 35%,这种情况下找到的概率为 0.3; 落在路上的概率为 25%,这种情况下找到的概率为 0.1,求(1)找到钥匙的概率;(2)若钥匙已经找到,则该钥匙落在教室里的概率.

2、已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} A\lambda^2 e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

其中λ>0 为已知参数.(1)求常数 A;　(2)求 P{-1<X<1/λ)};　　(3)F(1).

3、设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

且 $Y = X^2 + 2X$，求(1) $E(X)$；　(2) $E(Y)$；　(3) $D(X)$.

4、若 X~N(μ,σ^2),求μ, σ^2 的矩估计.

三、解答题（12 分）

设某次考试的考生的成绩 X 服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分,标准差为 15 分,问在显著性水平 0.05 下,是否可以认为在这次考试中全体考生的平均成绩为 70 分?

四、综合题（每小题 4 分，共 20 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{3x}y^2, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$$

试求: (1) 常数 C ；(2) $f_X(x)$ ，$f_Y(y)$ ；(3) X 与 Y 是否相互独立?

(4) $E(X),E(Y),E(XY)$；　　(5) $D(X),D(Y)$.

附：Φ（1.96）=0.975；　Φ（1）=0.84；　Φ（2）=0.9772

$t_{0.05}(9)=1.8331$ ； $t_{0.025}(9)=2.262$；$t_{0.05}(8)=1.8595$， $t_{0.025}(8)=2.306$

$t_{0.05}(36)=1.6883$ ； $t_{0.025}(36)=2.0281$；$t_{0.05}(35)=1.6896$， $t_{0.025}(35)=2.0301$

概率论与数理统计期末复习试题一参考答案

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1、0 ； 2、14/50 或 7/25 ；3、81/130 ；4、1，17 ；

5、5，4 ；6、0.35，0.35 ；7、 $X_{(n)}$

二、计算题（每题 12 分，共 48 分）

1、解：(1)以 A_1,A_2,A_3 分别记钥匙落在宿舍中、落在教室里、落在路上，以 B 记找到钥匙.

则

$P(A_1)=0.4,P(A_2)=0.35,P(A_3)=0.25, P(B|A_1)=0.9 ,P(B|A_2)=0.3,P(B|A_3)=0.1$

所以, $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.4\times 0.9+0.35\times 0.3+0.25\times 0.1=0.49$ 6

(2) $P(A_2\mid B)=(0.35\times 0.3)/0.49=0.21$ 12

2、解：（1）由归一性：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}A\lambda^2 e^{-\lambda x}dx=-A\lambda e^{-\lambda x}\mid_0^{+\infty}=A\lambda$,所以$A=1/\lambda$

..........................4

（2） $P\{-1<X<1/\lambda\}=\int_0^{1/\lambda}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-1/e=0.36$ 8

（3） $F(1)=\int_0^1\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda}$ 12

3、解：（1）$E(X)=-1\times0.1+0\times0.2+1\times0.3+2\times0.4=1$ ……………………4

（2）$E(X^2)=1\times0.1+0\times0.2+1\times0.3+4\times0.4=2$

$E(Y)=E(X^2+2X)=E(X^2)+2E(X)=2+2=4$ ……………………8

（3） $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-1=1$ ……………………12

4、解：（1）E(X)=μ　令μ=$\bar{X}$　所以μ的矩估计为$\hat{\mu}=\bar{X}$ ……………………6

（2）D(X)=E(X²)-[E(X)]²　又 E(X²)=$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

D(X)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ - $\bar{X}$ = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sigma^2$

所以σ² 的矩估计为$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ ……………………12

三、解答题（12 分）

解：提出假设检验问题：H_0: μ=70, H_1 ：μ≠70,

$t=\frac{\bar{X}-70}{S/\sqrt{n}}$ ~t(n-1),其中 n=36, $\bar{x}$=66.5,s=15,α=0.05,$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.03$…6

$|t|=\frac{|66.5-70|}{15/\sqrt{36}}=1.4<2.03$ ……………………12

所以,接受 H_0,在显著性水平 0.05 下,可认为在这次考试中全体考生的平均成绩为 70 分.

四、综合题（每小题 4 分，共 20 分）

解：(1)$1=\int_0^1\int_0^1 ce^{3x}y^2dxdy=c\int_0^1 e^{3x}dx\cdot\int_0^1 y^2dy=c\cdot\frac{1}{3}e^{3x}|_0^1\cdot\frac{1}{3}y^3|_0^1=\frac{c}{9}(e^3-1)$

所以,c=9/(e³-1) ……………………4

(2) 当$0\le x\le1, f_X(x)=\int_0^1\frac{9}{e^3-1}e^{3x}y^2dy=\frac{3}{e^3-1}e^{3x}$

当x为其它情况时，$f_X(x)=0$

所以, $f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{e^3-1}e^{3x},0\le x\le1\\0,其它\end{cases}$ ……………………2

同理，$f_Y(y)=\begin{cases}3y^2,0\le y\le1\\0,其它\end{cases}$ ……………………4

(3)因为: $f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{e^3-1}e^{3x}\cdot 3y^2, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, 其它\end{cases}=f(x,y)$

所以,X 与 Y 相互独立. 4

(4)

$$EX=\int_0^1 x\cdot\frac{3}{e^3-1}e^{3x}dx=\frac{1}{e^3-1}\int_0^1 x de^{3x}$$

$$=\frac{1}{e^3-1}(y\cdot e^{3x}|_0^1-\int_0^1 e^{3x}dx)$$ 2

$$=\frac{2e^3+1}{3(e^3-1)}$$

$$EY=\int_0^1 y\cdot 3y^2dx=\frac{3}{4}y^4|_0^1=\frac{3}{4}$$ 3

$$E(XY)=EX\cdot EY=\frac{2e^3+1}{4(e^3-1)}$$ 4

(5) $DX=EX^2-(EX)^2$

$$EX^2=\int_0^1 x^2\cdot\frac{3}{e^3-1}e^{3x}dy=\frac{1}{e^3-1}\left[x^2\cdot e^{3x}|_0^1-\int_0^1 e^{3x}\cdot 2xdx\right]$$

$$=\frac{1}{e^3-1}\left[e^3-\frac{2}{3}(xe^{3x}|_0^1-\int_0^1 e^{3x}dx)\right]$$ 2

$$=\frac{5e^3-2}{9(e^3-1)}$$

$$\therefore\ \begin{aligned}DX&=\frac{5e^3-2}{9(e^3-1)}-\frac{1}{9(e^3-1)^2}(2e^3+1)^2\\&=\frac{e^6-11e^3+1}{9(e^3-1)^2}\end{aligned}$$ 3

$$DY=EY^2-(EY)^2$$

$$EY^2=\int_0^1 y^2\cdot 3y^2dy=\frac{3}{5}y^5|_1^0=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ DY=\frac{3}{5}-(\frac{3}{4})^2=\frac{3}{80}$$ 4

概率论与数理统计期末复习题二

一、计算题（每题10分，共70分）

1、设P（A）=1/3，P（B）=1/4，P（A∪B）=1/2.求P（AB）、P（A-B）.

2、设有甲乙两袋，甲袋中装有3只白球、2只红球，乙袋中装有2只白球、3只红球.今从甲袋中任取一球放入乙袋，再从乙袋中任取两球，问两球都为白球的概率是多少？

3、已知随机变量X的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ 2-Ax & 1<x\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1)求A.（2）X的分布函数$F(x)$.

4、若X，Y为相互独立的分别服从[0，1]上均匀分布的随机变量，试求$Z=X+Y$的分布密度函数.

5、某镇年满18岁的居民中20%受过高等教育.今从中有放回地抽取1600人的随机样本，求样本中19%和21%之间的人受过高等教育的概率.

6、某单位职工每天的医疗费服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现抽查了25天，得$\bar{x}=170$元，$S=30$元，求职工每天医疗费均值μ的双侧0.95置信区间.

7、设总体X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & other \end{cases}$$

其中θ是未知参数，且$\theta>0$。求θ的矩估计与极大的似然估计量。

二、解答题（9分）

某校数学教学从初一开始实行了某项改革。三年后在初中毕业数学考试中，全市平均成绩为80分，从该校抽取的49名学生成绩的平均数为85分。已知该校这次考试分数服从$N(\mu,\ 14^2)$分布。问该校这次考试的平均成绩与全市平均成绩差异如何？（$\alpha=0.05$）

三、综合题（15分）

设随机变量(X,Y)具有下列概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} cx & 0<x\le 1, 0\le y\le x \\ 0 & others \end{cases}$$

(1) 求c。(2) X与Y是否独立？为什么？（3）求$f_{Y|X}(y|x)$。

四、证明题（6 分）

设随机变数ξ具有对称的分布密度函数$p(x)$， $p(x)=p(-x)$, 证明：对任意的$a>0$, 有

$F(-a)=1-F(a)=\frac{1}{2}-\int_0^a p(x)dx$。.

附：$\Phi(1)=0.84$, $\Phi(1.96)=0.975$

$t_{0.05}(24)=1.7109$, $t_{0.025}(24)=2.0639$， $t_{0.05}(25)=1.7081$, $t_{0.025}(25)=2.0595$

概率论与数理统计期末复习试题二答案

一、计算题（每题10分，共70分）

1、解：P（AB）=P（A）+P（B）-P（A∪B）=1/12，

P（A-B）=P（A）-P（AB）=1/4 。

2、解;用 A 表示"从甲袋中任取一球为红球"，B 表示"从乙袋中任取两球都为白球"。则 $P(A)=\frac{2}{5}$。由全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{5}\cdot\frac{C_2^2}{C_6^2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{11}{75}$$

3、解：（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1$ 得 A=1。

（2）$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \int_0^x ydy=\frac{1}{2}x^2 & 0<x\le 1 \\ \int_0^1 ydy+\int_1^x (2-y)dy=2x-\frac{1}{2}x^2-1 & 1<x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

4、解：显然 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=1,\ 0<x<1, 0<y<1$；否则，$f(x,y)=0$。先求 Z 的分布函数 $F(z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$。

当 $z\le 0$ 时，$F(z)=0$

当 $0<z<1$ 时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_0^{z-x} dy=\frac{z^2}{2}$

当 $1\le z<2$ 时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^{z-1} dx\int_0^1 dy+\int_{z-1}^1 dx\int_0^{z-x} dy=2z-\frac{z^2}{2}-1$

当 $z\ge 2$ 时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 dy=1$

所以，Z 的分布密度函数

$$f_Z(z)=F'(z)=\begin{cases} z,\ 0<z<1 \\ 2-z,\ 1<z<2 \\ 0,\ 其他 \end{cases}$$

5、解：设 X 表示抽取的 1600 人中受过高等教育的人数，则 $X\sim B(1600,0.2)$，$EX=320,\mathrm{DX}=16^2$

$$P\{0.19\times 1600\le X\ge 0.21\times 1600\}=P\{\frac{304-320}{16}\le\frac{X-320}{16}<\frac{336-320}{12}\}$$

$$P\{-1\le\frac{X-320}{16}<1\}\approx\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1$$

$$=2\times 0.8413-1=0.6826。$$

6、解：由于σ^2未知，故μ的 0.95 双侧置信区间为

$$[\overline{X}-t_{0.025}(24)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{0.025}(24)\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

代入数据得$\overline{X}=170,\ S=30,\ n=25,\ t_{0.025}(24)=2.0639$，得$\mu$的 0.95 双侧置信区间观测值为$[170-2.0639\times\frac{30}{\sqrt{25}},\ 170+2.0639\times\frac{30}{\sqrt{25}}]=[157.4,\ 182.6]$。

7、解：设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体的样本。因为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\theta x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}$$

令$EX=\overline{X}$解得θ的矩估计为$\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$。由 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta X_i^{\theta-1})=\theta^n\prod_{i=1}^{n}X_i^{\theta-1}$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$，解得$\theta$的极大的似然估计为$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

二、解答题（9 分）

解：$H_0:\mu=80\qquad H_1:\mu\neq 80$

由于σ已知，用Z检验。算得$Z\ =\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}=\frac{85-80}{14}\times 7=2.5$

由表查得$z_{0.025}=1.96$。由于$Z>z_{0.025}$所以拒绝H_0，认为该校这次考试的平均成绩与全市平均成绩差异显著。

三、综合题（15 分）

（1）由$1=\int_0^1dx\int_0^x cxdy=c\int_0^1x^2dx=\frac{c}{3}$得$c=3$。

（2）X的概率密度$f_X(x)=\int_0^x 3xdy=3x^2,0<x<1$，否则$f_X(x)=0$；

Y的边缘概率密度$f_Y(y)=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2),\ 0<y<1$，否则$f_Y(y)=0$。

由于$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以X与Y不独立。

（3）$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x},0\le y\le x\\ 0,\ \ 0ther\end{cases},0<x<1$

四、证明题（6 分）

证：$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}p(x)dx=1-\int_{-a}^{+\infty}p(x)dx$

$$=1+\int_a^{-\infty}p(-x)dx=1-\int_{-\infty}^{a}p(x)dx$$

$$=1-F(a)=1-\int_{-\infty}^{0}p(x)dx-\int_0^a p(x)dx=\frac{1}{2}-\int_0^a p(x)dx$$

概率论与数理统计期末复习题三

一、计算题（每题10分，共70分）

1、设P（A）=1/4，P（A-B）=1/8，且A、B独立。求：P（B）、P（A∪B）。

2、某地有甲乙两种彩票，它们所占份额比3 ：2 。甲的中奖率为0.1，乙的中奖率为0.3 。任购1张彩票，求中奖的概率。

3、设随机变数X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ Ax^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

（1）求常数A。（2）求X的密度函数。

4、某镇年满18岁的居民中受过高等教育的10%年收入超过10万。今从中有放回地抽取1600人的随机样本，求样本中不少于11%的人年收入超过10万的概率。

5、设总体X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta},0<x<1\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

其中θ是未知参数，且$\theta>0$。求θ的矩估计与极大的似然估计量。

6、某银行要测定在业务柜台上处理每笔业务所花费的时间，假设处理每笔业务所需时间服从正态分布，现随机地抽取16笔业务，测得所需时间为$x_1,\cdots,x_{16}$(min)。由此算出$\bar{x}=13$min，$S=5.6$ min，求处理每笔业务平均所需时间的双侧0.95置信区间。

7、设随机变量X与Y独立，且X服从[0，1]上的均匀分布，Y服从参数为1的指数分布，试求$Z=X+Y$的概率密度。

二、解答题（9分）

某校数学教学从初一开始实行了某项改革。三年后在初中毕业数学考试中，全市平均成绩为80分，从该校抽取的49名学生成绩的平均数为85分。已知该校这次考试分数服从$N(\mu,\ 14^2)$分布。问该校这次考试的平均成绩与全市平均成绩差异如何？（$\alpha=0.05$）

三、综合题（15分）

设随机变量(X,Y)具有下列概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & |y|<x,\ 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(1) 求 c。（2）X 与 Y 是否独立？为什么？（3）求 $f_{Y|X}(y|x)$。

四、证明题（6 分）

设随机变数 ξ 具有对称的分布密度函数 $p(x)$，即 $p(x)=p(-x)$, 证明：对任意的 $a>0$, 有 P（$|\xi|<a)=2F(a)-1$。

附:

$\Phi(\frac{4}{3})=0.9082$, $\Phi(1.96)=0.975$

$t_{0.05}(15)=1.7531$, $t_{0.025}(15)=2.1315$, $t_{0.05}(16)=1.7459$, $t_{0.025}(16)=2.1199$

概率论与数理统计期末复习题三参考答案

一、计算题（每题 10 分，共 70 分）

1、解：由 1/8=P（A-B）= P（A）-P（AB）=P（A）-P（A）P（B）得：P（B）=1/2

P（A∪B）==P（A）+P（B）-P（AB）= P（A）+P（B）-P（A）P（B）=5/8 。

2、解：设 A_1="任购 1 张彩票，购到甲两种彩票"， A_2="任购 1 张彩票，购到乙两种彩票"， B="任购 1 张彩票，购到中奖彩票"。则

P（A_1）=3/5， P（A_0）=2/5，P（B|A_1）=0.1， P（B|A_2）=0.3

P（B）= P（A_1）P（B|A_1）+P（A_2）P（B|A_2）=9/50。

3、解：（1）因为 $F(1-0)=F(1)$，所以 $A=1$

$$（2）X 的密度函数\ p(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

4、解:设 X 表示抽取的 1600 人年收入超过 10 万的人数，则

$X\sim B(1600,0.1)$， $EX=160,\mathrm{DX}=16\times 9$

$$P\{X\ge 0.11\times 1600\}=1-P\{X<176\}=1-P\{\frac{X-160}{12}<\frac{16}{12}\}$$

$$\approx 1-\Phi(\frac{4}{3})=1-0.9082=0.0918。$$

5、解：$E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^\theta dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$，令 $\overline{X}=\frac{\theta+1}{\theta+2}$，故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$ 。

$$另，似然函数\ L(\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\prod_{i=1}^n X_i^\theta,0<X_i<1\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n \ln X_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^n \ln X_i=0$$

解得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\frac{1}{\overline{X}}$。

6、解：由于 σ^2 未知，故 μ 的 0.95 双侧置信区间为

$$[13-t_{0.025}(15)\frac{5.6}{\sqrt{16}},\ 13+t_{0.025}(15)\frac{5.6}{\sqrt{16}}]=[10.0159,\ 15.9841]$$

其中 $t_{0.025}(15)=2.1315$ 由表查得。

7、解：显然(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y},\ 0<x<1, y>0 \\ 0,\ 其他 \end{cases}$$

先求Z的分布函数$F(z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$。

当$z\le 0$时，$F(z)=0$

当$0<z<1$时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_0^{z-x} e^{-y}dy=z-1+e^{-z}$

当$z\ge 1$时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{z-x} e^{-y}dy=1-e^{-z}(e-1)$

所以，Z的分布密度函数

二、解答题（9分）

解：$H_0:\mu=80 \qquad H_1:\mu\ne 80$

由于σ已知，用Z检验。算得$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}=\dfrac{85-80}{14}\times 7=2.5$

由表查得$z_{0.025}=1.96$。由于$Z>z_{0.025}$所以拒绝H_0，认为该校这次考试的平均成绩与全市平均成绩差异显著。

三、综合题（15分）

解：（1）由$1=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} c\,dy=c\int_0^1 2x\,dx=c$得$c=1$。

（2）X的概率密度为$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-x}^{x} dx=2x,\ 0<x<1$，

故$f_X(x)=\begin{cases} 2x,\ \ 0<x<1 \\ 0,\ 其他 \end{cases}$。$Y$的概率密度$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

当$0\le y<1$时$f_Y(y)=\int_y^1 dx=1-y=1-|y|$

当$-1<y<0$时$f_Y(y)=\int_{-y}^1 dx=1+y=1-|y|$

故Y的概率密度：$f_Y(y)=\begin{cases} 1-|y|,\ \ |y|<1 \\ 0,\ 其他 \end{cases}$。

由于$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以X与Y不独立。

（3）$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(y)}=\begin{cases} \dfrac{1}{2x},\ |y|<x<1 \\ 0,\ 其他 \end{cases}$

四、证明题（6 分）

证明：$P(|\xi| < a = \int_{-a}^{a} p(x)dx = 2\int_{0}^{a} p(x)dx = 2[F(a) - \frac{1}{2}] = 2F(a) - 1$

概率论与数理统计期末复习题四

一、计算题（共 66 分）

1、（8 分）设事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A) = p, P(B) = q$，求下列事件的概率：$P(AB), P(A \cup B), P(A\overline{B}), P(\overline{A}\,\overline{B})$。

2、（9 分）某地有甲乙两种彩票，它们所占份额比 3 ：2。甲的中奖率为 0.1，　乙的中奖率为 0.3 。任购 1 张彩票，求中奖的概率。

3、（10 分）设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Ax^2 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

（1）求常数 A 。（2）求 X 的密度函数。

4、（12 分）设随机向量 (X,Y) 具有下列概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & |y| < x,\ 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 c 。（2） X 与 Y 是否独立？为什么？（3）求 $f_{Y|X}(y|x)$ 。

5、（11 分）设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & other \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数，且 $\theta > 0$ 。求 θ 的矩估计与极大似然估计量。

6、（8 分）设 X_1, X_2, X_3, X_4 是取自总体 X 的样本。X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

写出 X_1, X_2, X_3, X_4 联合概率密度 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 。

7、（8 分）设随机变量X与Y独立，且X服从$[0，1]$上的均匀分布，Y服从参数为1的指数分布，试求$Z = X + Y$的概率密度。

二、应用题（共 34 分）

1、（9 分）某商店负责供应某地区 10000 人所需商品，其中一商品在一段时间每人需要一件的概率为 0.8，假定在这一段时间内各人购买与否彼此无关，问商店应预备多少件这种商品，才能以 97.5%的概率保证不会脱销？（假定该商品在某一段时间内每人最多可以买一件）。

2、（8 分）若某班某次考试的平均分为 80 分，标准差为 10，试用切比雪夫不等式估计及格率至少为多少？

3、（8 分）某厂生产的灯泡寿命（小时）近似服从正态分布 N(8000, 1600)，抽取 16 个灯泡的样本。求平均寿命小于 7975 小时概率。

4、（9 分）已知维尼纶纤度在正常条件下服从$N(1.405，0.048^2)$。某日抽取 5 根维尼纶，计算得样本均值与样本方差分别为$\bar{x} = 1.414$，$s^2 = 0.03112$。问这一天纤度总体标准差是否正常？（$\alpha = 0.05$）

附: $\Phi(1.96) = 0.975$，$\Phi(2.5) = 0.9938$　$\chi^2_{0.025}(4) = 11.1$，$\chi^2_{0.975}(4) = 0.484$

概率论与数理统计期末复习题四参考答案

一、计算题(共 66 分)

1、（8 分）A 与 B 互不相容，所以 $P(AB)=P(\phi)=0$，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=p+q$；由于 A 与 B 互不相容，这时 $A\overline{B}=A$，从而 $P(A\overline{B})=P(A)=p$；由于 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，从而 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(p+q)$。

2、(9 分) 设 A_1="购到甲种彩票"，A_2="购到乙两种彩票"，B="购到中奖彩票"。则 P（A_1）=3/5， P（A_0）=2/5，P（B|A_1）=0.1， P（B|A_2）=0.3。

P（B）= P（A_1）P（B|A_1）+P（A_2）P（B|A_2）=9/50。

3、(10 分)（1）因为 $F(1-0)=F(1)$，所以 $A=1$

（2）X 的密度函数 $p(x)=F'(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

4、(12 分)

（1）由 $1=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} c dy=c\int_0^1 2xdx=c$ 得 $c=1$。

（2）X 的概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-x}^{x} dx=2x,\ 0<x<1$，

故 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。$Y$ 的概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

当 $0\le y<1$ 时 $f_Y(y)=\int_y^1 dx=1-y=1-|y|$

当 $-1<y<0$ 时 $f_Y(y)=\int_{-y}^{1} dx=1+y=1-|y|$

故 Y 的概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立。

（3） $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

5、(11 分) $E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，令 $\overline{X}=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$。另，似然函数 $L(\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}X_i^{\theta}, 0<X_i<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$$

解得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{1}{\overline{X}}$。

6、（8 分）联合概率密度

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)=\begin{cases}16e^{-2\sum_{i=1}^{4}x_i},x_i>0,i=1,2,3,4\\ \quad 0\quad ,otuhre\end{cases}$$

7、（8 分）显然 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y},\ 0<x<1,y>0\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

先求 Z 的分布函数 $F(z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$。

当 $z\le 0$ 时，$F(z)=0$

当 $0<z<1$ 时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=z-1+e^{-z}$

当 $z\ge 1$ 时，$F(z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=1-e^{-z}(e-1)$

所以，Z 的分布密度函数

$$f(z)=F'(z)=\begin{cases}0,\quad z\le 0\\ 1-e^{-z},0<z\le 1\\ (e-1)e^{-z},z>1\end{cases}$$

二、应用题(共 34 分)

1、（8 分）设应预备 n 件，并设 X 表示某地区 10000 人需要件数，则 X~B（10000，0.8），则由中心极限定理得 $P\{X\le n\}\approx\Phi\left(\frac{n-8000}{40}\right)\ge 0.975$

则 $\frac{n-8000}{40}\ge 1.96,n\ge 8078.4$（件）。

2、（8 分）用随机变量 X 表示学生成绩，则数学期望 E(X) = 80，方差 D(X) = 100，所以 $P\{60\le X\le 100\}\ge P\{60<X<100\}=P\{|X-80|<20\}\ge 1-\frac{100}{400}=0.75$

所以及格率至少为 75%。

3、（8 分）设灯泡寿命总体为 X，因为 X～N(8000，1600), n=16，所以样本均值 $\bar{X}\sim N(8000,\ 100)$，

$$P\{\bar{X}<7975\}=\Phi\left(\frac{7975-8000}{10}\right)=1-\Phi(2.5)=0.0062。$$

4、（9 分）解 $H_0:\sigma=0.048$． $H_1:\sigma\ne 0.048$

计算

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{(5-1)\times 0.03112^2}{0.048^2}=13.5$$

查表得 $\chi^2_{0.025}(4)=11.1$，$\chi^2_{0.975}(4)=0.484$。由于 $\chi^2>\chi^2_{0.025}(4)$，所以拒绝 H_0，即认为这一天纤度总体标准差与 0.048 有显著差异。

概率论与数理统计期末复习题五及答案

一．计算题（本题满分 30 分，共有 5 道小题，每道小题 6 分）．

1．设 A、B 是随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$．

解答：由于 $A=AB\cup A\overline{B}$，所以 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(A-B)$

所以，$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.7-0.3=0.4$，

$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$．

2．设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}\quad(-\infty<x<+\infty)$，求 $E(X)$ 与 $D(X)$．

解：因为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\exp\left\{-\dfrac{(x-1)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}\quad(-\infty<x<+\infty)$

所以，$X\sim N\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，所以，$E(X)=1$，$D(X)=\dfrac{1}{2}$．

3．袋中有红球 4 只，黑球 3 只，从中任意取出 2 只，求这 2 只球的颜色不相同的概率．

解答： 设 $A=\{\text{任取2只球，颜色不相同}\}$，则 $P(A)=\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$．

4．设随机变量 X 服从区间 $(0,\ 2)$ 上的均匀分布，求 $\dfrac{D(X)}{E(X^2)}$．

解答：由于随机变量 X 服从区间 $(0,\ 2)$ 上的均匀分布，所以 $E(X)=1$，

$D(X)=\dfrac{2^2}{12}=\dfrac{1}{3}$．所以，$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\dfrac{1}{3}+1^2=\dfrac{4}{3}$．所以，$\dfrac{D(X)}{E(X^2)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{4}$．

5．设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$\alpha>-1$ 为未知参数，$(X_1,\ \cdots,\ X_n)$ 是从总体 X 中抽取的一个样本，求 α 的矩估计量．

解答： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot(\alpha+1)x^{\alpha}dx=\int_0^1(\alpha+1)x^{\alpha+1}dx=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$.

得方程 $E(X)=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$，解方程，得 $\alpha=\frac{2E(X)-1}{1-E(X)}$.

将 $\overline{X}$ 替换成 $E(X)$，得 α 的矩估计量为 $\hat{\alpha}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

二．计算题（本题满分 40 分，共有 5 道小题，每道小题 8 分）.

6．已知男人中有 5.4%是色盲患者，女人中有 0.27%是色盲患者．并且某学校学生中男、女生的比例为 2∶1，现从这批学生中随机地选出一人，发现此人是色盲患者，试问此人是男生的概率为多少？

解答：设 $A=\{$选出的学生为男生$\}$，$B=\{$选出的学生为色盲患者$\}$，则由 Bayes 公式，得

$$P(A|B)=\frac{P(A)\times P(B|A)}{P(A)\times P(B|A)+P(\overline{A})\times P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\times 0.054}{\frac{2}{3}\times 0.054+\frac{1}{3}\times 0.0027}=0.9756\,.$$

7．设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x \quad (-\infty<x<+\infty)$$

试求：⑴. 系数 A 与 B；⑵. 概率 $P\{-1<X<1\}$；⑶. 随机变量 X 的密度函数.

解：

⑴. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，得

$$1=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(A+B\arctan x)=A+\frac{\pi}{2}B$$

$$0=\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}(A-B\arctan x)=A-\frac{\pi}{2}B$$

解方程组 $\begin{cases} A+\frac{\pi}{2}B=1 \\ A-\frac{\pi}{2}B=0 \end{cases}$，得 $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{\pi}$

所以，

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x \quad (-\infty<x<+\infty)$$

(2). $P\{-1<X<1\}$

$=F(1)-F(-1)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(-1)\right)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=\frac{1}{2}$

(3). X 的密度函数为

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty<x<+\infty).$$

8．设二维随机变量$(X,\ Y)$服从平面区域

$$D=\{(x,\ y):\ \ x^2+y^2\le 1\}$$

上的均匀分布.

(1). 试求二维随机变量$(X,\ Y)$的联合密度函数；

(2). 求随机变量X及Y各自的边缘密度函数；

(3). 求$E(X)$，$E(Y)$及$E(XY)$；

(4) 判断随机变量X与Y是否相互独立？是否不相关？

解：

(1). 平面区域D的面积为π，所以，二维随机变量$(X,\ Y)$的联合密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & (x,\ y)\in D \\ 0 & (x,\ y)\notin D\end{cases}$$

(2). 当$-1\le x\le 1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

所以，随机变量X的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases};$$

同理，随机变量Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}.$$

⑶．由对称性，得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,\quad y)dxdy=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xydxdy=0$$

⑷ 由于$\mathrm{cov}(X,\quad Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，所以，随机变量$X$与$Y$不相关．但是，

$$f(x,\quad y)\ne f_X(x)f_Y(y)\quad \left(x^2+y^2\le 1\right)$$

所以，随机变量X与Y不相互独立．

9．设随机变量$X\sim N(0,\quad 1)$，$Y=X^2+1$，试求随机变量Y的密度函数．

解：

随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

设随机变量Y的分布函数为$F_Y(y)$，则有

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{X^2+1\le y\right\}=P\left\{X^2\le y-1\right\}$$

①．如果$y-1\le 0$，即$y\le 1$，则有$F_Y(y)=0$；

②．如果$y>1$，则有

$$F_Y(y)=P\left\{X^2\le y-1\right\}=P\left\{-\sqrt{y-1}\le X\le\sqrt{y-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\sqrt{y-1}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

即

$$F_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\sqrt{y-1}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx & y>1\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

所以,

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y-1}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y-1}} & y>1\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

即

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y-1}}e^{-\frac{y-1}{2}} & y>1\\ 0 & y\le 0\end{cases}.$$

10．某单位有 200 台分机，每台分机有 5%的时间要使用外线通话．假定每台分机是否使用外线是相互独立的，试用中心极限定理估计该单位至少要装多少条外线，才能以 99%以上的概率保证分机使用外线时不等待．

（已知 $\Phi(2.33)=0.99$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布 $N(0,\ 1)$ 的分布函数．）

解：

设 $A=\{$某台分机使用外线$\}$，则 $P(A)=0.05$

设 X：该单位某时刻使用外线的分机数．则 $X\sim B(200,\ 0.05)$ ．

设需要给单位安装 n 条外线，则要使分机使用外线时不等待，必须 $X\le n$，所以，

$P\{$使用外线时不等待$\}=P\{X\le n\}$

$$=P\left\{\frac{X-200\times0.05}{\sqrt{200\times0.05\times0.95}}\le\frac{n-200\times0.05}{\sqrt{200\times0.05\times0.95}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{n-200\times0.05}{\sqrt{200\times0.05\times0.95}}\right)=\Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right)$$

由题意，$P\{$使用外线时不等待$\}\ge0.99$，即

$$\Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right)\geq 0.99$$

查表，得$\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\geq 2.33$

所以，$n\geq 2.33\times\sqrt{9.5}+10=17.18$

因此，至少要装 18 条外线，才能满足要求．

三．计算题（本题满分 30 分，共有 3 道小题，每道小题 10 分）．

11．设总体X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x) & 0<x<\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

其中$\theta>0$是未知参数，$(X_1,\ \cdots,\ X_n)$是从该总体中抽取的一个样本．

(1)．求未知参数θ的矩估计$\hat{\theta}$；

(2)．求$D(\hat{\theta})$．

解：

(1)．$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\theta}\frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)dx=\frac{\theta}{2}$ ，

所以，$\theta=2E(X)$ ，将$E(X)$用样本均值$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$来替换，得未知参数$\theta$的矩估计为

$$\hat{\theta}=2\overline{X}$$

(2)．$D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}D(X)$，而

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\int_0^{\theta}\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)dx-\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{20}$

所以，$D(\hat{\theta})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{4}{n}\times\frac{\theta^2}{20}=\frac{\theta^2}{5n}$

12．设随机变量X与Y相互独立，且都服从标准正态分布$N(0,\ 1)$．令随机变量

$$Z=\sqrt{X^2+Y^2}.$$

(1) 试求随机变量Z的密度函数$f_Z(z)$．(2) 试求$E(Z)$．

解：

(1) 由题意，得

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad(-\infty<x<\infty),$$

$$f_y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \qquad (-\infty<y<\infty).$$

设随机变量$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的分布函数为$F_Z(z)$，则

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}$

当$z\le 0$时，$F_Z(z)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=P(\varnothing)=0$；

当$z>0$时，$F_Z(z)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

作极坐标变换$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$，则有

$$F_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr$$

所以，随机变量$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的分布函数为$F_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

所以，随机变量$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的密度函数为$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}ze^{-\frac{z^2}{2}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

(2) $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_z(z)dz=\int_0^{+\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

13．已知总体X的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$0<\theta<1$是未知参数，$(X_1,\quad X_2,\quad X_3)$是从中抽取的一个样本，试求当样本观测值为$(x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=1)$时，参数$\theta$的最大似然估计值.

解：

$$P(X_1=1,\quad X_2=2,\quad X_3=1)=P(X_1=1)P(X_2=2)P(X_3=1)$$

$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta).$$

所以当样本观测值为$(x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=1)$时，似然函数为

$$L(\theta)=2\theta^5(1-\theta)$$

所以，$L'(\theta)=5\theta^4(5-6\theta)$.

令 $L'(\theta)=0$，得 $5\theta^4(5-6\theta)=0$，由此得似然函数 $L(\theta)$ 在区间 $(0,\quad 1)$ 上的驻点为 $\theta_0=\dfrac{5}{6}$. 并且θ_0是似然函数$L(\theta)$在区间$(0,\quad 1)$上的唯一驻点. 因此此时似然函数$L(\theta)$的最大值点为$\theta_0=\dfrac{5}{6}$. 即当样本观测值为$(x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=1)$时，参数$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$.

概率论与数理统计期末复习题六及答案

一．（本题满分 35 分，共有 5 道小题，每道小题 7 分）．

1．掷 2 颗均匀的骰子，令：

$$A=\{第一颗骰子出现4点\},\quad B=\{两颗骰子出现的点数之和为7\}.$$

(1) 试求 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$；(2) 判断随机事件 A 与 B 是否相互独立？

解：(1) 掷 2 颗骰子，共有 $6^2=36$ 种情况（样本点总数）．

A 事件含有 6 个样本点，故 $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$．

B 事件含有 6 个样本点，故 $P(B)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$．

AB 事件含有 1 个样本点，故 $P(AB)=\dfrac{1}{36}$．

(2) 由于 $P(AB)=\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=P(A)P(B)$，所以随机事件 A 与 B 相互独立．

2．设连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} cx & 0\le x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2} & 3\le x\le 4 \\ 0 & 其它 \end{cases},$$

求：(1) 常数 c；(2) 概率 $P\{2<X<6\}$．

解：(1) 由密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{+\infty} f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{3} cxdx+\int_{3}^{4}\left(2-\frac{x}{2}\right)dx+\int_{4}^{+\infty} 0dx$$

$$=\frac{c}{2}x^2\Big|_0^3+\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_3^4=\frac{9}{2}c+\left(2-\frac{7}{4}\right)=\frac{9}{2}c+\frac{1}{4}$$

所以，得 $c=\dfrac{1}{6}$．即随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6} & 0\le x<3\\ 2-\dfrac{x}{2} & 3\le x\le 4\\ 0 & 其它\end{cases}.$$

(2) $P\{2<X<6\}=\int_2^6 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$

$=\int_2^3 \frac{x}{6}dx+\int_3^4\left(2-\frac{x}{2}\right)dx+\int_4^6 0\,dx$

$=\left.\frac{x^2}{12}\right|_2^3+\left.\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)\right|_3^4=\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$.

3．设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别是 -2 和 2，方差分别是 1 和 4，而相关系数为 -0.5.

(1) 求 $E(X+Y)$ 及 $D(X+Y)$；(2) 试用切比雪夫（Chebyshev）不等式估计概率 $P\{|X+Y|\ge 6\}$.

解：(1) 令 $Z=X+Y$，则有

$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-2+2=0$

$D(Z)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\text{cov}(X,\ Y)$

$=D(X)+D(Y)+2\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\cdot\rho_{X,\ Y}$

$=1+4+2\sqrt{1}\times\sqrt{4}\times(-0.5)=3$

(2) 根据切比雪夫不等式，有

$P\{|X+Y|\ge 6\}=P\{|Z|\ge 6\}=P\{|Z-E(Z)|\ge 6\}\le\frac{D(Z)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

4．在总体 $X\sim N(52,\ 6.3^2)$ 中随机抽取一个容量为 36 的样本，求 $P\{50.8\le\overline{X}\le 53.8\}$.

（附，标准正态分布 $N(0,\ 1)$ 的分布函数 $\Phi(x)$ 的部分值：

x	0.19	0.29	1.14	1.09	1.63	1.71
$\Phi(x)$	0.5753	0.6141	0.8729	0.8621	0.9484	0.9564

解 由于总体$X \sim N(52,\ 6.3^2)$，而且样本量$n=36$，所以$\overline{X} \sim N\left(52,\ \dfrac{6.3^2}{36}\right)$.

所以，$P\{50.8 \le \overline{X} \le 53.8\} = P\left\{\dfrac{50.8-52}{\frac{6.3}{6}} \le \dfrac{\overline{X}-52}{\frac{6.3}{6}} \le \dfrac{53.8-52}{\frac{6.3}{6}}\right\}$

$$= \Phi\left(\dfrac{53.8-52}{\frac{6.3}{6}}\right) - \Phi\left(\dfrac{50.8-52}{\frac{6.3}{6}}\right) = \Phi(1.71) - \Phi(-1.14)$$

$$= \Phi(1.71) + \Phi(1.14) - 1 = 0.9564 + 0.8729 - 1 = 0.8293.$$

5．设总体X的二阶矩存在，记$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，且μ与σ^2都未知，$-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma^2>0$．$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$是从总体$X$中抽取的一个样本，求$\mu$与$\sigma^2$的矩估计量.

解：记$\alpha_k = E(X^k)\quad (k=1,\ 2)$．则有

$$\begin{cases}\mu=\alpha_1\\ \sigma^2=\alpha_2-\alpha_1^2\end{cases},$$

将α_1与α_2分别用样本$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$的样本均值$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$与样本的二阶原点矩$A_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$来替换，得到$\mu$与$\sigma^2$的矩估计量为

$$\hat{\mu}=\overline{X},$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - (\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - (\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = B_2.$$

二．(本题满分45分，共有5道小题，每道小题9分).

6．甲、乙、丙三人独立地破译一份密码．已知甲、乙、丙三人能译出的概率分别为$\dfrac{1}{5}$、$\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{1}{4}$.

(1) 求密码能被破译的概率．(2) 已知密码已经被破译，求破译密码的人恰是甲、乙、丙三人中的一个人的概率.

解 (1) 设$A=\{甲破译出密码\}$，$B=\{乙破译出密码\}$，$C=\{丙破译出密码\}$.

$D=\{密码被破译\}$.

则 $D=A\cup B\cup C$，因此，

$$P(D)=P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$$

$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

(2) $D_1=\{破译密码的人恰是甲、乙、丙三人中的一个人\}$，则

$D_1=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$，所以

$$P(D_1)=P(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{13}{30}$$

注意到 $D_1\subset D$，所求概率为 $P(D_1|D)=\dfrac{P(D_1D)}{P(D)}=\dfrac{P(D_1)}{P(D)}=\dfrac{\frac{13}{30}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{13}{18}$.

7．某学生参加一项考试，他可以决定聘请 5 名或者 7 名考官．各位考官独立地对他的成绩做出判断，并且每位考官判断他通过考试的概率均为 0.3，如果至少有 3 位考官判断他通过，他便通过该考试．试问该考生聘请 5 名还是 7 名考官，能使得他通过考试的概率较大？

解：设 $A=\{一位考官判断他通过考试\}$，则 $P(A)=0.3$.

$B=\{该考生通过考试\}$.

由于各位考官独立地对他的成绩做出判断，因此考生聘请 n 位考官，相当于做一个 n 重 Bernoulli 试验．令 X 表示判断他通过考试的考试人数，则 $X\sim B(n,\ 0.3)$，因此

$$P\{X=k\}=C_n^k\times0.3^k\times0.7^{n-k},\qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

(1) 若考生聘请 5 位考官，相当于做一个 5 重 Bernoulli 试验．所以，

$$P(B)=P\{X\geq3\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}$$

$$=C_5^3\times0.3^3\times0.7^2+C_5^4\times0.3^4\times0.7^1+C_5^5\times0.3^5\times0.7^0=0.16308.$$

(2) 若考生聘请 7 位考官，相当于做一个 7 重 Bernoulli 试验．所以，

$$P(B)=P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}=1-\sum_{k=0}^{2}P\{X=k\}$$

$$=1-\left(C_7^0\times 0.3^0\times 0.7^7+C_7^1\times 0.3^1\times 0.7^6+C_7^2\times 0.3^2\times 0.7^5\right)=0.3529305\ .$$

所以聘请7位考官，可以使该考生通过考试的概率较大.

8．设二维随机变量$(X,\ \ Y)$的联合密度函数为

$$f(x,\ \ y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y & x^2\leq y\leq 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

⑴．求$E(X)$，$E(Y)$及$E(XY)$；

⑵．分别求出求X与Y的边缘密度函数；

⑶．判断随机变量X与Y是否相关？是否相互独立？

解：⑴．$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\ \ y)dxdy=\dfrac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^3ydy=\dfrac{21}{8}\int_{-1}^{1}x^3\left(1-x^4\right)dx=0$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,\ \ y)dxdy=\frac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^2y^2dy=\frac{7}{4}\int_{-1}^{1}x^2\left(1-x^6\right)dx=\frac{7}{2}\int_{0}^{1}x^2\left(1-x^6\right)dx=\frac{7}{9}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,\ \ y)dxdy=\frac{21}{4}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}x^3y^2dy=\frac{7}{4}\int_{-1}^{1}x^3\left(1-x^6\right)dx=0$$

⑵．当$-1\leq x\leq 1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ \ y)dy=\frac{21}{4}\int_{x^2}^{1}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right)$$

所以，随机变量X的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right) & -1\leq x\leq 1\\ 0 & 其它\end{cases}\ ;$$

当$0\leq y\leq 1$时，

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ \ y)dx=\frac{21}{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x^2ydx=\frac{7}{2}yx^3\Big|_0^{\sqrt{y}}=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}$$

所以，随机变量X的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}=\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(3). 由于$\operatorname{cov}(X,\ Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，所以$X$与$Y$不相关.

$f(x,\ y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以$X$与$Y$不独立.

9. 设随机变量X与Y相互独立，都服从标准正态分布$N(0,\ 1)$，令$Z=X+Y$.

(1) 用求独立随机变量和的密度函数的计算公式（卷积公式），求出随机变量Z的密度函数. (2) 判断随机变量Z是否服从正态分布，并指出$E(Z)$与$D(Z)$.

解：随机变量X与Y的密度函数分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\qquad(-\infty<y<+\infty)$$

设随机变量Y的密度函数为$f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{2x^2+z^2-2xz}{2}\right\}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\left(x^2-xz+\frac{1}{2}z^2\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx$$

作变换$x-\dfrac{z}{2}=\dfrac{u}{\sqrt{2}}$，则$dx=\dfrac{du}{\sqrt{2}}$，当$x\to-\infty$时，$u\to-\infty$；当$x\to+\infty$时，$u\to+\infty$. 所以

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

因此，$f_Z(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}$，$(-\infty<z<+\infty)$.

所以$Z=X+Y$服从正态分布，且$E(X)=0$，$D(X)=2$.

10．某快餐店出售四种快餐套餐，这四种快餐套餐的价格分别为6元、10元、15元和18元．并且这4种快餐套餐售出的概率分别为0.2、0.45、0.25和0.1．若某天该快餐店售出套餐500份，试用中心极限定理计算：⑴ 该快餐店这天收入至少为5500元的概率．⑵ 15元套餐至少售出140份的概率．

（附，标准正态分布$N(0,\ 1)$的分布函数$\Phi(x)$的部分值：

x	0.39	0.48	1.48	1.55
$\Phi(x)$	0.6517	0.6844	0.9306	0.9394

解：

⑴ 设X表示售出一份套餐的收入，则X的分布律为

X	6	10	15	18
P	0.2	0.45	0.25	0.1

则 $E(X)=6\times0.2+10\times0.45+15\times0.25+18\times0.1=11.25$，

$E(X^2)=6^2\times0.2+10^2\times0.45+15^2\times0.25+18^2\times0.1=140.85$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=140.85-11.25^2=14.2875$．

令X_i表示出售的第i套快餐套餐的收入，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 500)$．则$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{500}$独立同分布，且$X_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 500)$的分布都与$X$的分布相同．则

$$P\left\{\sum_{i=1}^{500}X_i\geq5500\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{500}X_i-11.25\times500}{\sqrt{500\times14.2875}}\geq\frac{5500-11.25\times500}{\sqrt{500\times14.2875}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{500}X_i-11.25\times500}{\sqrt{500\times14.2875}}<-1.48\right\}\approx1-\Phi(-1.48)=\Phi(1.48)=0.9306$$

⑵ 设Y表示售出的500份套餐中15套餐的份数，则$Y\sim B(500,\ 0.25)$．则

$$P\{Y\geq140\}=P\left\{\frac{Y-500\times0.25}{\sqrt{500\times0.25\times0.75}}\geq\frac{140-500\times0.25}{\sqrt{500\times0.25\times0.75}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{Y-500\times 0.25}{\sqrt{500\times 0.25\times 0.75}}<1.55\right\}\approx 1-\Phi(1.55)=1-0.9394=0.0606 .$$

三．（本题满分 20 分，共有 2 道小题，每道小题 10 分）．

11．设随机变量ξ与η相互独立，且服从同一分布．ξ的分布律为

$$P\{\xi=i\}=\frac{1}{3}\qquad (i=1,\quad 2,\quad 3).$$

又设$X=\max(\xi,\quad \eta)$，$Y=\min(\xi,\quad \eta)$．(1) 求出二维随机变量$(X,\quad Y)$的联合分布律及随机变量X及Y各自的边缘分布律；(2) 求$E(X)$、$E(Y)$及$E(XY)$．

解：(1) 由ξ与η的取值都是$1,\quad 2,\quad 3$，可知$X=\max(\xi,\quad \eta)$与$Y=\min(\xi,\quad \eta)$的取值也是$1,\quad 2,\quad 3$．

$$P\{X=1,\quad Y=1\}=P\{\xi=1,\quad \eta=1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9};$$

$$P\{X=1,\quad Y=2\}=P(\varnothing)=0;\quad P\{X=1,\quad Y=3\}=P(\varnothing)=0;$$

$$P\{X=2,\quad Y=1\}=P\{\xi=1,\quad \eta=2\}+P\{\xi=2,\quad \eta=1\}$$

$$=P\{\xi=1\}P\{\eta=2\}+P\{\xi=2\}P\{\eta=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9};$$

$$P\{X=2,\quad Y=2\}=P\{\xi=2,\quad \eta=2\}=P\{\xi=2\}P\{\eta=2\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9};$$

$$P\{X=2,\quad Y=3\}=P(\varnothing)=0;$$

$$P\{X=3,\quad Y=1\}=P\{\xi=3,\quad \eta=1\}+P\{\xi=1,\quad \eta=3\}$$

$$=P\{\xi=3\}P\{\eta=1\}+P\{\xi=1\}P\{\eta=3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9};$$

$$P\{X=3,\quad Y=2\}=P\{\xi=3,\quad \eta=2\}+P\{\xi=2,\quad \eta=3\}$$

$$=P\{\xi=3\}P\{\eta=2\}+P\{\xi=2\}P\{\eta=3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9};$$

$$P\{X=3,\quad Y=3\}=P\{\xi=3,\quad \eta=3\}=P\{\xi=3\}P\{\eta=3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9};$$

联合分布律表格略因此二维随机变量$(X,\quad Y)$的联合分布律及X的边缘分布律为

(2) $E(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{3}{9}+3\times\frac{5}{9}=\frac{22}{9}$，$E(Y)=1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{3}{9}+3\times\frac{1}{9}=\frac{14}{9}$，

$$E(XY)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}+6\times\frac{2}{9}+9\times\frac{1}{9}=4 .$$

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{3}{9}$
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	

12．设总体$X \sim N(0, \sigma^2)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自该总体中的一个样本．

⑴ 求σ^2的极大似然估计量；⑵ 求$p = P\{X \le 1\}$的极大似然估计量．

解：

⑴．总体X的密度函数为

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

所以似然函数为

$$L(\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\} \qquad (-\infty < x_i < +\infty, \quad i = 1, \quad 2, \quad \cdots, \quad n)$$

所以，取对数，得

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad (-\infty < x_i < +\infty, \quad i = 1, \quad 2, \quad \cdots, \quad n)$$

所以，

$$\frac{d}{d(\sigma^2)}\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(n - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

解方程$\frac{d}{d(\sigma^2)}\ln L(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(n - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = 0$，得$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$，所以$\sigma^2$的极大似然估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 .$$

(2) 由于 $\lambda = P\{X \le 1\} = P\left\{\frac{X}{\sigma} \le \frac{1}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$，并且 σ^2 的极大似然估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 .$$

又函数 $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ 具有单值反函数，因此 σ 的极大似然估计量为

$$\sqrt{\hat{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} .$$

又函数 $\lambda = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ 具有单值反函数，因此 λ 的极大似然估计量为

$$\hat{\lambda} = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}\right).$$