9.2　正定二次型与正定矩阵

1. **定义 9-5**　对于 n 元二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，若**对任意 n 元非零实的列向量** $\mathbf{x}$ 都有 $f(\mathbf{x})>0$（即 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}>0$），则称该二次型为**正定二次型**，并称 $\mathbf{A}$ 为**正定矩阵**；若对任意 n 元非零实的列向量 $\mathbf{x}$ 都有 $f(\mathbf{x})<0$（即 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}<0$），则称该二次型为**负定二次型**，并称 $\mathbf{A}$ 为**负定矩阵**.

2. 注意　**正（负）定矩阵都要求是实对称矩阵**，要判断一个矩阵是否为正（负）定矩阵，首先要判断它是否为实对称矩阵.

3. 由于 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}>0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^T(-\mathbf{A})\mathbf{x}<0$，所以 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow -\mathbf{A}$ 为负定矩阵.

由于 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}<0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^T(-\mathbf{A})\mathbf{x}>0$，所以 $\mathbf{A}$ 为负定矩阵 $\Leftrightarrow -\mathbf{A}$ 为正定矩阵.

基于正定矩阵与负定矩阵之间的这种关系，我们下面重点研究正定矩阵的性质，作为推论可得出负定矩阵相应的性质.

4. **定理 9-3**　设 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 为 n 元二次型，则下列命题互为充要条件.

（1）$f(\mathbf{x})$ 为正定二次型，即 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵；

（2）$\mathbf{A}$ 的**特征值都为正数**；

（3）$\mathbf{A}$ 的正惯性指数为 n；

（4）$\mathbf{A}$ 相合于单位矩阵（即存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{E}$）；

（5）存在 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{B}$，使 $\mathbf{A}=\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

【注：（2）和（3）可看成一样的，（4）和（5）可看成一样的。】

证明　采用循环证法.

$(1)\Rightarrow(2)$　设 λ 为 $\mathbf{A}$ 的任一特征值，$\mathbf{p}$ 为对应的**实特征向量**，则有 $\mathbf{A}\mathbf{p}=\lambda\mathbf{p}$ 且 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$.

由 $f(\mathbf{x})$ 为正定二次型，可得 $f(\mathbf{p})>0$，

$$\lambda\mathbf{p}^T\mathbf{p}=\mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{p}=f(\mathbf{p})>0,$$

因为 $\mathbf{p}^T\mathbf{p}=\|\mathbf{p}\|^2>0$，所以 $\lambda>0$.

$(2)\Rightarrow(3)$ 因为 $\mathbf{A}$ 的正惯性指数等于 $\mathbf{A}$ 的正特征值的个数，所以结论成立.

$(3)\Rightarrow(4)$　由推论 9-1′ 可知 $\mathbf{A}$ 的相合标准形为 $\mathbf{E}$，所以结论正确.

$(4)\Rightarrow(5)$　$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{E}\Rightarrow\mathbf{A}=(\mathbf{P}^T)^{-1}\mathbf{E}\mathbf{P}^{-1}=(\mathbf{P}^{-1})^T\mathbf{P}^{-1}$，令 $\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}$，则有 $\mathbf{A}=\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

$(5)\Rightarrow(1)$ 对任意 n 元非零实向量 $\mathbf{x}$，**由 $\mathbf{B}$ 可逆可得 $\mathbf{B}\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$**.【注：因为 $\mathbf{B}$ 可逆，所以方程组 $\mathbf{B}y=0$ 只有零解，因而非零的向量 $\mathbf{x}$ 不满足 $\mathbf{B}y=0$，$\mathbf{B}\mathbf{x}\neq 0$. 另外注意，$\mathbf{B}\mathbf{x}$ 是 n 元列向量】

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{x}=(\mathbf{B}\mathbf{x})^T(\mathbf{B}\mathbf{x})=\|\mathbf{B}\mathbf{x}\|^2>0,$$ 故 $f(\mathbf{x})$ 为正定二次型.

5. **推论 9-2** 若 n 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵，则

（1） $\mathbf{A}$ 的对角元 $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$；

（2） $|\mathbf{A}|>0$.

证明 （1）由定义 9-5 及 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵可知，对于 $\mathbf{e}_i\in\mathbf{R}^n(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$a_{ii}=\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{e}_i>0.$$ 【注：在第一章第二节讲过 $a_{ij}=\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{e}_j$ 】

（2）由定理 9-3 及 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵可知， $\mathbf{A}$ 的特征值都大于零.

因为 $|\mathbf{A}|$ 等于 $\mathbf{A}$ 的 n 个特征值之积，所以 $|\mathbf{A}|>0$.

注意 推论 9-2 是 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵的必要条件，不是充分条件. 根据推论 9-2，当 $\mathbf{A}$ 的对角元不全为正数时， $\mathbf{A}$ 一定不是正定矩阵. 但是，当 $\mathbf{A}$ 的对角元全为正数时，不能肯定 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵，需做进一步的论证才能判断.下面给出一种非常有效的判断 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵的方法.

6. **定义 9-6** 矩阵 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 的左上角 k 阶子阵称为 $\mathbf{A}$ 的 k 阶**顺序主子阵**，记作 $\mathbf{A}_k$，即 $\mathbf{A}_k=\left[a_{ij}\right]_{k\times k}$. $\mathbf{A}_k$ 的行列式叫做 $\mathbf{A}$ 的 k 阶**顺序主子式**.

例如， $\mathbf{A}_1=[a_{11}]$为一阶顺序主子阵, $|\mathbf{A}_1|=a_{11}$ 为一阶顺序主子式

$$\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\text{为二阶顺序主子阵,}\ |\mathbf{A}_2|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\text{为二阶顺序主子式}$$

$$\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\text{为三阶顺序主子阵,}\ |\mathbf{A}_3|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\text{为三阶顺序主子式}$$

7. **定理 9-4** 实对称矩阵 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 为正定矩阵的充要条件是 $\mathbf{A}$ 的**各阶顺序主子式都大于零**.

【注：记住结论就行，证明不做要求】

***证明** 必要性 设 $\mathbf{A}_k$ 为 $\mathbf{A}$ 的 k 阶顺序主子阵，由 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵可知， $\mathbf{A}_k$ 也为实对称矩阵.

将 $\mathbf{A}$ 分块为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_k&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$.

对任意 k 元非零实向量 $\mathbf{x}$,令 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^n$.

由 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵，得

$$0<\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y}=\left[\mathbf{x}^T,\mathbf{0}^T\right]\begin{bmatrix}\mathbf{A}_k&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}=\mathbf{x}^T\mathbf{A}_k\mathbf{x}\ ,$$

所以 $\mathbf{A}_k$ 为正定矩阵.由推论 9-2 可知， $|\mathbf{A}_k|>0$.由 k 的任意性可知必要性正确.

充分性 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时， $\mathbf{A}=[a_{11}],|\mathbf{A}|=a_{11}>0$，结论成立.

假设结论对 n-1 阶实对称矩阵成立，下面证明结论对 n 阶实对称矩阵也成立.将 $\mathbf{A}$ 分块为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^T & a_{nn}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=\left[a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{n-1,n}\right]^T$.由于 $\mathbf{A}_{n-1}$ 为实对称矩阵且 $\mathbf{A}_{n-1}$ 的各阶顺序主子式都大于零，故由归纳假设可知 $\mathbf{A}_{n-1}$ 为正定矩阵.由定理 9-3（4）可知，存在可逆阵 $\mathbf{G}$，使 $\mathbf{G}^T\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{G}=\mathbf{E}_{n-1}$. 由 $\mathbf{A}_{n-1}$ 为正定矩阵可知，$\mathbf{A}_{n-1}$ 可逆. 取 $\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0}^T & 1\end{bmatrix}$,则 $\mathbf{P}_1$ 可逆.这时，有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1&=\begin{bmatrix}\mathbf{G}^T & \mathbf{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}_{n-1}^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^T & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0}^T & 1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\mathbf{G}^T\mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{G}^T\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0}^T & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \mathbf{0}^T & 1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}^T & b\end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中,$b=a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.由 $\left|\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1\right|=\left|\mathbf{P}_1\right|^2\left|\mathbf{A}\right|>0$，可知 $b>0$.再取 $\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}^T & \dfrac{1}{\sqrt{b}}\end{bmatrix}$,则 $\mathbf{P}_2$ 可逆，且有 $\mathbf{P}_2^T\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{E}$，即 $\mathbf{A}$ 相合于单位矩阵，故 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵.

8. **判断 A 为正定矩阵的方法：**

方法 1：通过顺序主子式来判断。

方法 2：通过特征值来判断。

证明 A 为正定矩阵的方法：

方法 1：证明对于任意 n 元非零实的列向量 $\mathbf{x}$，都有 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}>0$.

方法 2：证明特征值都大于 0。

方法 3：根据定理 9-3 的(4)或(5)来证。

例 9-5 判断 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 9\end{bmatrix}$ 是否为正定矩阵.

解 $\left|\mathbf{A}_1\right|=1>0,\ \left|\mathbf{A}_2\right|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=3>0$

$$\left|\mathbf{A}_3\right|=\left|\mathbf{A}\right|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6>0$$

因为 $\mathbf{A}$ 的各阶顺序主子式都大于 0，所以 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵.

例 9-6 试确定 k 的取值范围，使二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$$

为正定二次型.

解 该二次型的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & k & 1\\ k & 4 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，

根据定理 9-4，该二次型为正定二次型的充要条件是 $\mathbf{A}$ 的各阶顺序主子式都大于零，即

$$|\mathbf{A}_1|=1>0,$$

$$|\mathbf{A}_2|=\begin{vmatrix}1 & k\\ k & 4\end{vmatrix}=4-k^2>0,$$

$$|\mathbf{A}_3|=\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ k & 4 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=4k-k^2>0.$$

解上面的不等式，得 $0<k<2$.故当 $0<k<2$ 时,该二次型为正定二次型.

例 当 k 取何值时，$f(x_1,x_2,x_3)=kx_1^2+2x_2^2+x_3^2+2kx_1x_2-2kx_2x_3$ 为正定二次型？

解 该二次型的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}k & k & 0\\ k & 2 & -k\\ 0 & -k & 1\end{bmatrix}$，

根据定理 9-4，该二次型为正定二次型的充要条件是 $\mathbf{A}$ 的各阶顺序主子式都大于零，即

$$|\mathbf{A}_1|=k>0,$$

$$|\mathbf{A}_2|=\begin{vmatrix}k & k\\ k & 2\end{vmatrix}=2k-k^2>0,$$

$$|\mathbf{A}_3|=\begin{vmatrix}k & k & 0\\ k & 2 & -k\\ 0 & -k & 1\end{vmatrix}=2k-k^2-k^3>0.$$

解上面的不等式，得 $0<k<1$. 故当 $0<k<1$ 时,该二次型为正定二次型.

例 当 k 取何值时，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=kx_1{}^2+kx_2{}^2+\cdots+kx_n{}^2-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$ 为正定二次型？

【注：该题可以用顺序主子式做，也可以特征值做，用特征值做更简单】

解 该二次型的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}k-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & k-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & k-1\end{bmatrix}$

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-k+1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \lambda-k+1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & \lambda-k+1\end{vmatrix}\overset{\text{都加到第一列}}{=}\begin{vmatrix}\lambda-k+n & 1 & \cdots & 1\\ \lambda-k+n & \lambda-k+1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda-k+n & 1 & \cdots & \lambda-k+1\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{都减第一行}}{=}\begin{vmatrix} \lambda-k+n & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda-k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-k \end{vmatrix}=(\lambda-k+n)(\lambda-k)^{n-1}$$

$\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda=k-n$(单），$\lambda=k(n-1$重）

要使该二次型为正定二次型，需 $\mathbf{A}$ 的特征值全大于 0，所以 $k>n$.

例 9-7 证明：合同变换不改变实对称矩阵的正定性.**【要记住这个结论】**

证明 设 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B},\mathbf{P}$ 可逆，$\mathbf{A}$ 为 n 阶正定矩阵.由 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵可知，$\mathbf{A}$ 为实对称矩阵.再由合同变换保持对称性可知，$\mathbf{B}$ 为实对称矩阵.

对于任意 n 元非零向量 $\mathbf{x}$，**由 $\mathbf{P}$ 可逆可知，$\mathbf{P}\mathbf{x}\neq 0$**.由 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵，可得 $(\mathbf{P}\mathbf{x})^T\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{x})>0$，

即 $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}>0$. 故 $\mathbf{B}$ 为正定矩阵, 结论正确.

例 9-8 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，证明：$\mathbf{A}$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ 存在正定矩阵 $\mathbf{B}$，使 $\mathbf{A}=\mathbf{B}^2$.

【注：满足 $\mathbf{A}=\mathbf{B}^2$ 的 $\mathbf{B}$ 可看作 $\mathbf{A}$ 的平方根，根据该例题的结论，我们也可对正定矩阵进行开方运算】

证明 充分性 根据定理 9-3 及 $\mathbf{B}$ 为正定矩阵可知，$\mathbf{B}$ 的特征值都大于零。再由 $\mathbf{A}=\mathbf{B}^2$ 可知，$\mathbf{A}$ 的特征值为 $\mathbf{B}$ 的特征值的平方，所以 $\mathbf{A}$ 的特征值都大于零，$\mathbf{A}$ 为正定矩阵.

必要性 由 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵可知，存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值. 由 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵可知，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都大于零.

令 $\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, $\mathbf{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}},\lambda_2^{\frac{1}{2}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{2}})$,则 $\mathbf{\Lambda}=\mathbf{D}^2$，$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{\Lambda}$，

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}.$$

令 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$，则有 $\mathbf{A}=\mathbf{B}^2$.

因为 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，$\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^T$，所以 $\mathbf{B}=\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$。

因为 $\mathbf{D}$ 的特征值全大于 0 ，所以 $\mathbf{D}$ 为正定矩阵。由例 9-7 可知，$\mathbf{B}$ 为正定矩阵，故结论正确.

若令 $\mathbf{C}=-\mathbf{B}$，则有结论：“$\mathbf{A}$ 为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ 存在负定矩阵 $\mathbf{C}$，使 $\mathbf{A}=\mathbf{C}^2$”.可见，正定矩阵具有与正数类似的性质.

例 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为同阶正定矩阵，证明：$\mathbf{AB}$ 也为正定矩阵 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.

证： $(\Rightarrow)$ 由 $\mathbf{AB}$ 为正定矩阵可知，$\mathbf{AB}$ 也是对称矩阵, $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{AB}$, 即 $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=\mathbf{AB}$，

也即 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$（注：由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是正定矩阵可知，它们也是对称矩阵，$\mathbf{B}^T=\mathbf{B}$，$\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$）.

$(\Leftarrow)$ 由 $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=\mathbf{BA}=\mathbf{AB}$ 可知，$\mathbf{AB}$ 为对称矩阵

由 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵及定理 9-3 的(5)可知，存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{A}=\mathbf{P}^T\mathbf{P}$. 于是，有

$$\mathbf{AB}=\mathbf{P}^T\mathbf{PB},$$

$$(\mathbf{P}^T)^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{P}^T=(\mathbf{P}^T)^{-1}(\mathbf{P}^T\mathbf{PB})\mathbf{P}^T=\mathbf{PBP}^T.$$

可见，$\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{PBP}^T$ 相似，$\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{PBP}^T$ 的特征值相同。

由 $\mathbf{B}$ 是正定矩阵及相合变换保持正定性可知，$\mathbf{PBP}^T$ 也是正定矩阵，$\mathbf{PBP}^T$ 的特征值全大于 0，从而 $\mathbf{AB}$ 的特征值也全大于 0，所以 $\mathbf{AB}$ 为正定矩阵。

9. 通过正定矩阵的定义和特征值的性质，可以证明正定矩阵具有下列性质：

设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶正定矩阵，数 $c>0$，k 为正整数，则 $\mathbf{A}+\mathbf{B}, c\mathbf{A}, \mathbf{A}^k, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^*$ 均为正定矩阵.

证：由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶正定矩阵可知，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是对称矩阵。根据转置的性质可以验证，$\mathbf{A}+\mathbf{B}, c\mathbf{A}, \mathbf{A}^k, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^*$ 也都是对称矩阵。

【注：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T, (c\mathbf{A})^T=c\mathbf{A}^T, (\mathbf{A}^k)^T=(\mathbf{A}^T)^k, (\mathbf{A}^{-1})^T=(\mathbf{A}^T)^{-1}, \mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 】

（1）对于任意 n 元非零实向量 $\mathbf{x}$，由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是正定矩阵可得，$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}>0,\ \mathbf{x}^T\mathbf{Bx}>0$，

$\mathbf{x}^T(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}+\mathbf{x}^T\mathbf{Bx}>0$，所以 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 是正定矩阵.

（2）由特征值的性质可知：若 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 $c\lambda, \lambda^k, \lambda^{-1}, |\mathbf{A}|\lambda^{-1}$ 依次为 $c\mathbf{A}, \mathbf{A}^k, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^*$ 的特征值。

由 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵可知，$\lambda>0, |\mathbf{A}|>0$，进一步可知 $c\lambda, \lambda^k, \lambda^{-1}, |\mathbf{A}|\lambda^{-1}$ 均大于 0，所以 $c\mathbf{A}, \mathbf{A}^k, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^*$ 均为正定矩阵。

10. 根据“ $\mathbf{A}$ 为负定矩阵 $\Leftrightarrow -\mathbf{A}$ 为正定矩阵”，我们可以得到负定矩阵的相应结论.

定理 9-5 设 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 为 n 元二次型，则下列命题互为充要条件.

（1） $f(\mathbf{x})$ 为负定二次型，即 $\mathbf{A}$ 为负定矩阵；

（2） $\mathbf{A}$ 的特征值都为负数；

（3） $\mathbf{A}$ 的负惯性指数为 n；

（4） $\mathbf{A}$ 合同于 $-\mathbf{E}$；

（5）存在 n 阶可逆阵 $\mathbf{B}$，使 $\mathbf{A}=-\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

（6） $\mathbf{A}$ 的奇数阶顺序主子式都小于零，偶数阶顺序主子式都大于零.

作为示范，我们给出（4）和（6）的证明。

证：(4) $\mathbf{A}$ 为负定矩阵 $\Leftrightarrow -\mathbf{A}$ 为正定矩阵 $\overset{\text{定理9-3（4）}}{\Leftrightarrow}$ 存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使$\mathbf{P}^T(-\mathbf{A})\mathbf{P}=\mathbf{E}$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=-\mathbf{E}$.

（6））$\mathbf{A}$ 为负定矩阵 $\Leftrightarrow -\mathbf{A}$ 为正定矩阵 $\overset{\text{定理9-4}}{\Leftrightarrow} \left|-\mathbf{A}_k\right|>0 \Leftrightarrow (-1)^k\left|\mathbf{A}_k\right|>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\text{为奇数时},\left|\mathbf{A}_k\right|<0 \\ k\text{为偶数时},\left|\mathbf{A}_k\right|>0 \end{cases}$$

大家在学习时，可重点掌握正定矩阵的研究方法，对于负定矩阵的问题，可直接讨论，也可通过添加负号转换成正定矩阵的问题进行研究.

11. 【下面内容了解一下即可】

***定义 9-7** 对于 n 元二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，若对任意 n 元实的列向量 $\mathbf{x}$ 都有 $f(\mathbf{x})\ge 0$，且存在 $\mathbf{x}_0\ne\mathbf{0}$ 使 $f(\mathbf{x}_0)=0$，则称该二次型为**半正定二次型**，并称 $\mathbf{A}$ 为**半正定矩阵**；若对任意 n 元实的列向量 $\mathbf{x}$ 都有 $f(\mathbf{x})\le 0$，且存在 $\mathbf{x}_0\ne\mathbf{0}$ 使 $f(\mathbf{x}_0)=0$，则称该二次型为**半负定二次型**，并称 $\mathbf{A}$ 为**半负定矩阵**；若既存在 $\mathbf{y}\ne\mathbf{0}$ 使 $f(\mathbf{y})>0$，又存在 $\mathbf{z}\ne\mathbf{0}$, 使 $f(\mathbf{z})<0$，则称 $f(\mathbf{x})$ 为**不定二次型**，并称 $\mathbf{A}$ 为**不定矩阵**.

关于半正定二次型和半负定二次型的结论，读者可依照前面的讨论自己给出.