第二节　学习指导

本节的内容是很重要的，将直接用于求平面方程和直线方程。

（一）　数量积

1.向量的数量积也叫点乘积，还可叫内积。叫数量积是从运算结果是一个数考虑的， 叫点乘积是从数量积的表达式考虑的，在这里用点“·”表示乘号，这个点是要写出来的，是不能省的，也不能换成别的。

2.数量积的物理意义：数量积可以用来表示功$W=\overrightarrow{F}\cdot\vec{s}$，这在“工数”和“大学物理”中都是要用到的。

3. 数量积具有下列性质：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0,\quad \vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$；

（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

（3）$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$；

（4）$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

4. **数量积的坐标表达式：**

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

这个公式和我们在平面解析几何中所学的公式类似，都是等于向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的坐标的对应乘积之和. 将来算数量积时，要主动地去找出向量的坐标，然后套上面公式进行计算。

5. 设向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角为θ，当$|\vec{a}||\vec{b}|\neq 0$时，由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$可得：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

这个公式是研究角度的重要公式，后面求角度都是用这个公式。虽然向量积的公式中有三角函数$\sin\theta$，但一般不用$\sin\theta$求角度。原因有两个：一方面是向量积没有数量积好算，另一方面是$\sin\theta$分辨不出锐角和钝角。

（二）向量积

1.向量积也叫叉乘积，还可叫外积。叫向量积是从运算结果是一个向量考虑的， 叫叉乘积是从向量积的表达式考虑的，在这里用“×”表示乘号，×是要写出来的，是不能省的，也不能换成别的。

2.定义 两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**向量积**（也叫**叉乘积**）是一个向量，记作$\vec{a}\times\vec{b}$. 规定

（1）它的长度为$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$（其中$\theta$为$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角）;

（2） $\vec{a}\times\vec{b}$的方向与$\vec{a}$和$\vec{b}$都垂直，且按$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$的次序符合右手法则。

注意：（1）是$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，不是$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，写法要注意，不要写错。

（2）确定$\vec{a}\times\vec{b}$的方向是分两步进行的，首先$\vec{a}\times\vec{b}$的方向与$\vec{a}$,$\vec{b}$都垂直，也可以说与$\vec{a}$,$\vec{b}$所在的平面垂直，第一步要先找出$\vec{a}$,$\vec{b}$所在平面的垂线；第二步再按$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$的次序符合右手法则来确定垂线的指向，就确定了$\vec{a}\times\vec{b}$的方向。

3. 经常通过$\vec{a}\times\vec{b}$来求一个与$\vec{a},\vec{b}$都垂直的向量，也可以说，经常通过$\vec{a}\times\vec{b}$来求一个与$\vec{a},\vec{b}$所在平面垂直的向量。在求平面方程和直线方程时经常用到这种运算。

4. **向量积的几何意义是：**当$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行时，$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积。

5.向量积具有下列性质：

（1） $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$；

（2） $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$；

（3） $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$；

（4） $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

6.向量积的坐标表达式

设$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

.

请同学们好好掌握这个公式，后面都是通过这个公式来算向量积的。

在这里，虽然$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$是向量，但是算上面的三阶行列式时，是把它们看作三个字母，或者说，把它们看作三个数的，通过三阶行列式的这种计算，与按向量积的定义和运算性质进行运算的结果完全一样，但这样做简便，所以我们都是这样做的。

（三）混合积

1.三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的**混合积**是一个数，记作$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$，规定$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

注意：之所以叫混合积，是因为混合积里边既有叉乘又有点乘，两种乘混合在一起。要注意一定是先做叉乘后做点乘，因为如果先做点乘，则得到的是一个数，再做不了叉乘了。

2. **混合积的几何意义：** 三个向量的混合积的绝对值表示以这三个向量为棱的平行六面体的体积.

证明：以三个非零向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱作一个平行六面体，其底面积为$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$，高为$\left|\vec{c}\right|\left|\cos\theta\right|$（其中$\theta$是$\vec{c}$与$\vec{a}\times\vec{b}$的夹角）。于是，该平行六面体的体积为

$$V=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\left|\cos\theta\right|=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$$

若向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$依该次序符合右手法则，则θ为锐角，$V=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$（图(1)）；若向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$依该次序符合左手法则，则$\theta$为钝角，$V=-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$（图(2)）.

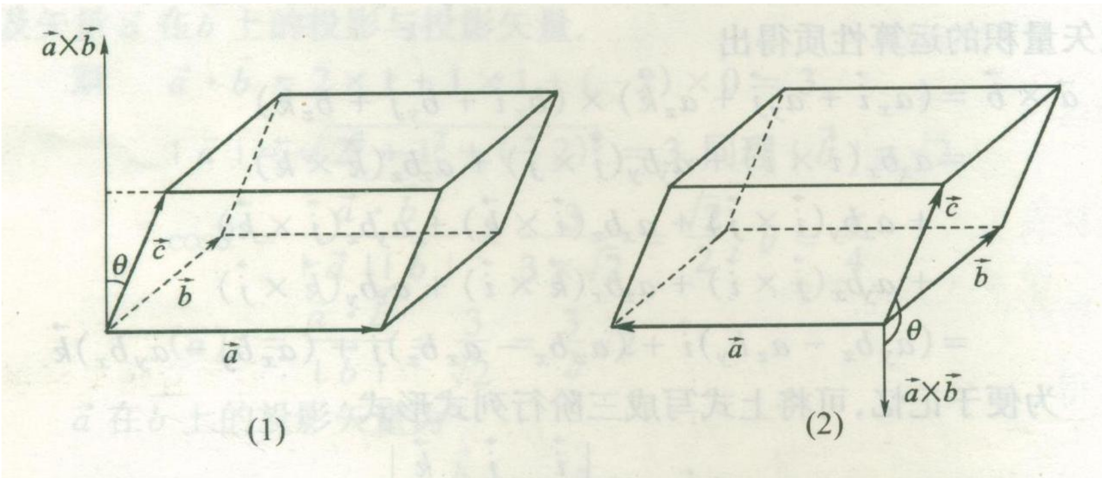

图 4.7

3. 混合积的坐标表达式.

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$，则

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

注意：这是计算混合积的公式，计算混合积就是算这样一个三阶行列式。

根据行列式的性质，可知$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & b_x & c_x\\ a_y & b_y & c_y\\ a_z & b_z & c_z\end{vmatrix}=\left|\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\right|$.

4.根据行列式的性质可知，混合积具有下列性质（稍作了解即可）：

（1）$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})$；

（2）$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$；

（3）$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$；

（4）$(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$；

（5）若$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$中有两个相等或有一个为零向量，则$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$=0.

（四）向量间的关系

定理 4-1　设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$都是非零向量，θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，则

（1）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

（2）$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

（3）$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

注：（1）根据$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}$及$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，可知$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

（2）根据 $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\theta=0$（或$\pi$）及$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，可知$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

（3）当$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面时，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$构不成平行六面体，可想象成把平行六面体压扁了，

根据混合积的几何意义可知，$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$一定等于 0.

定理 4-2　$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow$存在实数$\lambda$，使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$或$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

注：当$\vec{a}\parallel\vec{b}$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$要么同向，要么反向，$\vec{a}$与$\vec{b}$一定成倍数，所以结论成立。

推论 4-1 设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

注：当$\vec{a}\parallel\vec{b}$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$一定成倍数，$\vec{a}$与$\vec{b}$的坐标也一定成倍数，所以上式成立。

知识扩充：在小学数学中我们是这样定义除法的，若数$b\neq0,\ bc=a,$，则称c是a除以b的商，记作$a\div b=c,$也可记作$\dfrac{a}{b}=c.$

显然，对于任意的数c，都有$0\cdot c=0,$因而我们可以认为$\dfrac{0}{0}=c,$也可以说$\dfrac{0}{0}$等于任意数。

按照这样的方式来理解，我们就可认为$\dfrac{1}{2}=\dfrac{0}{0}=\dfrac{-3}{-6}$是有意义的。

例：显然$\vec{a}=\vec{i}-3\vec{k}$与$\vec{b}=2\vec{i}-6\vec{k}$平行，可以认为它们的坐标仍然满足推论 4-1 的结论。

希望大家能够接受这样一种新的理解方式，我们在第四章第 4 节中是要按照这种方式来研究一些特殊直线的方程的，这种表示方式在全世界都认为是可以的，也是正确的。

强调：这一节的内容是第四章的基础，一定要好好地掌握，只有掌握好这一节的内容，才有可能学好这一章。