1.(1) V_1是向量空间.

证：设$\mathbf{a}=[a_1,a_2,a_3]^T$,$\mathbf{b}=[b_1,b_2,b_3]^T$ 是V_1中任意两个向量，

k是任意实数，则有$a_1+a_2+a_3=0$，$b_1+b_2+b_3=0$.

显然V_1非空.

由$\mathbf{a}+\mathbf{b}=[a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3]^T$ 及$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)=0$

可知,$\mathbf{a}+\mathbf{b}\in V_1$.

由$k\mathbf{a}=[ka_1,ka_2,ka_3]^T$ 及$ka_1+ka_2+ka_3=0$可知$k\mathbf{a}\in V_1$.

可见，V_1关于向量的线性运算封闭，所以V_1是向量空间.

(2) V_2不是向量空间.

设$\mathbf{v}=[v_1,v_2,v_3]^T$ 是V_2中任一向量，则有$v_1+v_2+v_3=1$.

但是$2\mathbf{v}=[2v_1,2v_2,2v_3]^T$ 的分量不满足条件$x_1+x_2+x_3=1$, $2\mathbf{v}\notin V_2$.

这说明V_2关于向量的线性运算不封闭，所以V_2 不是向量空间.

方法2：$x_1+x_2+x_3=0$可看成一个特殊的方程组，V_1 可看成齐次线性方程组的解集，根据例7-2的结论可知，V_1是向量空间

$x_1+x_2+x_3=1$可看成一个特殊的方程组，V_2 可看成非齐次线性方程组的解集，由于非齐次线性方程组的解集不含零向量，所以V_2不是向量空间.

2.证：$\mathbf{R}^3$的基就是$\mathbf{R}^3$的极大无关组。因为$\mathbf{R}^3$的维数为3，所以$\mathbf{R}^3$的基由$\mathbf{R}^3$中的三个线性无关的向量组成。

因为$|\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{vmatrix}=1\neq 0$, 所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$是$\mathbf{R}^3$的一个基。

$$[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{v}]=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&3&7&0\\1&3&1&5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-1&1&-2\\0&1&-2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1&0&5&-3\\0&-1&1&-2\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&5&-3\\0&1&-1&2\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-5r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&7\\0&1&0&0\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

向量$\mathbf{v}$在该基下的坐标向量为$[7,0,-2]^T$.

3.解：（1）记$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$, $\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]$，则$\mathbf{B}=\mathbf{AP}$.

求过度矩阵$\mathbf{P}$，就是解矩阵方程$\mathbf{AP}=\mathbf{B}$.

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}1&1&1&2&-2&1\\0&1&1&1&2&2\\0&0&1&2&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&1&-4&-1\\0&1&0&-1&1&4\\0&0&1&2&1&-2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&-4&-1\\-1&1&4\\2&1&-2\end{bmatrix}.$$

(2) 向量 $\mathbf{y}$ 满足 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，求 $\mathbf{y}$ 就是解方程组 $\mathbf{P}\mathbf{y}=\mathbf{x}$.

$$[\mathbf{P},\mathbf{x}]=\begin{bmatrix}1&-4&-1&2\\-1&1&4&1\\2&1&-2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-4&-1&2\\0&-3&3&3\\0&9&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\div 9]{r_2\div(-3)}\begin{bmatrix}1&-4&-1&2\\0&1&-1&-1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+4r_2}\begin{bmatrix}1&0&-5&-2\\0&1&-1&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+5r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}=[3,0,1]^T$.

(3) $\mathbf{P}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4&-1\\-1&1&4\\2&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$， $\mathbf{u}$ 在旧基下的坐标向量为 $\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$

4. 注：答案不唯一，有很多形式，正确答案应该含两个任意参数，并且满足方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=0\\2x_2-x_3-3x_4=0\end{cases}$

解法 1：设 $\mathbf{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^T$ 是与向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 都正交的向量，则有

$$\begin{cases}\mathbf{a}_1^T\mathbf{x}=0\\\mathbf{a}_2^T\mathbf{x}=0\\\mathbf{a}_3^T\mathbf{x}=0\end{cases}，\quad 即\begin{cases}x_1-x_2+x_3+x_4=0\\2x_1\qquad+x_3-x_4=0\\x_1+x_2\qquad-2x_4=0\end{cases},$$

下面来解这个方程组。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\2&0&1&-1\\1&1&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\0&2&-1&-3\\0&2&-1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&2&-1&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \div 2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

化简后的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 = 0 \end{cases}, \quad 即 \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \end{cases},$$

令 $x_3 = k_1, x_4 = k_2$, 得 $\mathbf{x} = k_1\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

这就是与向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 都正交的所有向量。

解法 2：设 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 是与向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 都正交的向量，则有

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{a}_3^T\mathbf{x} = 0 \end{cases}, \quad 即 \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 \quad + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 \quad - 2x_4 = 0 \end{cases},$$

下面来解这个方程组。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

化简后的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}, \quad 即 \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_4 \\ x_3 = 2x_2 - 3x_4 \end{cases},$$

令 $x_2 = k_1, x_4 = k_2$, 得 $\mathbf{x} = k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$,

这就是与向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 都正交的所有向量。

5. **解**：$\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&-1&-2\\1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&-2\\2&-1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

该向量组的秩为2，可取$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$作为该向量组的极大无关组。

下面将其正交化。

令$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-\dfrac{\mathbf{b}_1^T\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}-\dfrac{0}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\1\end{bmatrix}=\mathbf{a}_2$.

再单位化，得

$$\mathbf{u}_1=\frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{u}_2=\frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$为由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$所生成的向量空间的一个标准正交基.

6.. **证**：由$\mathbf{C}$为反称矩阵，得$\mathbf{C}^T=-\mathbf{C}$.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=(\mathbf{E}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{C})\left[(\mathbf{E}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{C})\right]^T=(\mathbf{E}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{C})(\mathbf{E}-\mathbf{C})(\mathbf{E}+\mathbf{C})^{-1}$$

因为$(\mathbf{E}+\mathbf{C})(\mathbf{E}-\mathbf{C})=\mathbf{E}-\mathbf{C}^2=(\mathbf{E}-\mathbf{C})(\mathbf{E}+\mathbf{C})$，

所以$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=(\mathbf{E}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{E}-\mathbf{C})(\mathbf{E}+\mathbf{C})(\mathbf{E}+\mathbf{C})^{-1}=\mathbf{E},\ \ \mathbf{A}$ 为正交阵.

7.**证**：因为$\mathbf{u}$是方程组$\mathbf{A}^T\mathbf{x}=\mathbf{0}$的非零解，所以$\mathbf{A}^T\mathbf{u}=\mathbf{0},$即

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T\\\mathbf{a}_2^T\\\vdots\\\mathbf{a}_n^T\end{bmatrix}\mathbf{u}=\mathbf{0},\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{u}=0,\mathbf{u}^T\mathbf{a}_i=0(i=1,2,\cdots,n).$$

设$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{a}_n+k\mathbf{u}=\mathbf{0}$，　　　　　　　　　　（1）

用$\mathbf{u}^T$乘以上式，得$k_1\mathbf{u}^T\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{u}^T\mathbf{a}_2+\cdots+k_n\mathbf{u}^T\mathbf{a}_n+k\mathbf{u}^T\mathbf{u}=0$，即$k\|\mathbf{u}\|^2=0.$

因为$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$，所以$k = 0$. 这时，（1）式成为$k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \cdots + k_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$

由$\mathbf{A}$的列向量组为非零的正交向量组可知，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$线性无关，所以$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，因而$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n, \mathbf{u}$线性无关。