第 十 七 讲

变分法初步(一)

北京大学 物理学院

数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. 泛函的极值
   - 泛函的概念
   - 何谓泛函极值
   - 泛函极值的必要条件
   - 变分的运算法则

2. 泛函的条件极值
   - Lagrange乘子法

讲授要点

1. 泛函的极值
   - 泛函的概念
   - 何谓泛函极值
   - 泛函极值的必要条件
   - 变分的运算法则
2. 泛函的条件极值
   - Lagrange乘子法

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，第21章
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§15.1
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，第15章

讲授要点

1. 泛函的极值
   - 泛函的概念
   - 何谓泛函极值
   - 泛函极值的必要条件
   - 变分的运算法则
2. 泛函的条件极值
   - Lagrange乘子法

函数概念的再认识

- 考虑定义在一定区间上的连续实函数．函数f是一个规则，它把区间上的每一点x和相应的实数$y=f(x)$(称之为f在x点的值)联系起来
- f的间接描述：Fourier级数
  若f是$0\leq x\leq\pi$上的可微实函数，则f可以由Fourier正弦系数$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x$表征
- 当然能够由Fourier正弦系数通过通常的简单的Fourier级数求出$f(x)$

函数概念的再认识

- 考虑定义在一定区间上的连续实函数．函数f是一个规则，它把区间上的每一点x和相应的实数$y=f(x)$(称之为f在x点的值)联系起来
- f的间接描述：Fourier级数
若f是$0 \le x \le \pi$上的可微实函数，则f可以由Fourier正弦系数$b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x$表征
- 当然能够由Fourier正弦系数通过通常的简单的Fourier级数求出$f(x)$

函数概念的再认识

- 考虑定义在一定区间上的连续实函数. 函数f是一个规则，它把区间上的每一点x和相应的实数$y=f(x)$(称之为f在x点的值)联系起来
- f的间接描述：Fourier级数
  若f是$0\le x\le\pi$上的可微实函数，则f可以由Fourier正弦系数$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$表征
- 当然能够由Fourier正弦系数通过通常的简单的Fourier级数求出$f(x)$

泛函的概念

简单地说，泛函就是以整个函数为自变量的函数

这个概念，可以看成是函数概念的推广

设在x, y平面上有一簇曲线$y(x)$，其长度

$$L = \int_C \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

显然，$y(x)$不同，L也不同，即L的数值依赖于整个函数$y(x)$而改变．L和函数$y(x)$之间的这种依赖关系，称为泛函关系

泛函的概念

简单地说，泛函就是以整个函数为自变量的函数

这个概念，可以看成是函数概念的推广

设在x,y平面上有一簇曲线$y(x)$，其长度

$$L=\int_C \mathrm{d}s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

显然，$y(x)$不同，L也不同，即L的数值依赖于整个函数$y(x)$而改变．L和函数$y(x)$之间的这种依赖关系，称为泛函关系

泛函的概念

简单地说，泛函就是以整个函数为自变量的函数

这个概念，可以看成是函数概念的推广

设在x, y平面上有一簇曲线$y(x)$，其长度

$$L = \int_C \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} \mathrm{d}x$$

显然，$y(x)$不同，L也不同，即L的数值依赖于整个函数$y(x)$而改变．L和函数$y(x)$之间的这种依赖关系，称为泛函关系

泛函的概念

简单地说，泛函就是以整个函数为自变量的函数

这个概念，可以看成是函数概念的推广

设在x, y平面上有一簇曲线$y(x)$，其长度

$$L = \int_C \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

显然，$y(x)$不同，L也不同，即L的数值依赖于整个函数$y(x)$而改变．L和函数$y(x)$之间的这种依赖关系，称为泛函关系

泛函的概念

简单地说，泛函就是以整个函数为自变量的函数

这个概念，可以看成是函数概念的推广

设在x, y平面上有一簇曲线$y(x)$，其长度

$$L = \int_C \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

显然，$y(x)$不同，L也不同，即L的数值依赖于整个函数$y(x)$而改变．L和函数$y(x)$之间的这种依赖关系，称为泛函关系

类似的例子还可以举出许多．例如，闭合曲线围成的面积，平面曲线绕固定轴而生成的旋转体体积或表面积，等等． 它们也都确定了各自的泛函关系

泛函的概念

设对于(某一函数集合内的)任意一个函数$y(x)$，有一个数$J[y]$与之对应， 则称$J[y]$为$y(x)$的泛函

这里的函数集合，即泛函的定义域，通常包含要求$y(x)$满足一定的边界条件， 并且具有连续的二阶导数．这样的$y(x)$称为可取函数

类似的例子还可以举出许多．例如，闭合曲线围成的面积，平面曲线绕固定轴而生成的旋转体体积或表面积，等等． 它们也都确定了各自的泛函关系

泛函的概念

设对于(某一函数集合内的)任意一个函数$y(x)$，有一个数$J[y]$与之对应， 则称$J[y]$为$y(x)$的泛函

这里的函数集合，即泛函的定义域，通常包含要求$y(x)$满足一定的边界条件， 并且具有连续的二阶导数．这样的$y(x)$称为可取函数

类似的例子还可以举出许多．例如，闭合曲线围成的面积，平面曲线绕固定轴而生成的旋转体体积或表面积，等等． 它们也都确定了各自的泛函关系

泛函的概念

设对于(某一函数集合内的)任意一个函数$y(x)$，有一个数$J[y]$与之对应， 则称$J[y]$为$y(x)$的泛函

这里的函数集合，即泛函的定义域，通常包含要求$y(x)$满足一定的边界条件， 并且具有连续的二阶导数．这样的$y(x)$称为可取函数

评述

- 泛函是函数概念的推广
- 对于函数，给定一个x值，有一个函数值与之对应
- 对于泛函，则必须给出某一区间上的函数$y(x)$，才能得到一个泛函值$J[y]$
- (定义在同一区间上的)函数不同，泛函值当然不同
- 为了强调泛函值$J[y]$与函数$y(x)$之间的依赖关系，常常又把函数$y(x)$称为变量函数

评述

- 泛函是函数概念的推广
- 对于函数，给定一个x值，有一个函数值与之对应
- 对于泛函，则必须给出某一区间上的函数$y(x)$，才能得到一个泛函值$J[y]$
- (定义在同一区间上的)函数不同，泛函值当然不同
- 为了强调泛函值$J[y]$与函数$y(x)$之间的依赖关系，常常又把函数$y(x)$称为变量函数

评述

- 泛函是函数概念的推广
- 对于函数，给定一个x值，有一个函数值与之对应
- 对于泛函，则必须给出某一区间上的函数$y(x)$，才能得到一个泛函值$J[y]$
- (定义在同一区间上的)函数不同，泛函值当然不同
- 为了强调泛函值$J[y]$与函数$y(x)$之间的依赖关系，常常又把函数$y(x)$称为变量函数

评述

- 泛函是函数概念的推广
- 对于函数，给定一个x值，有一个函数值与之对应
- 对于泛函，则必须给出某一区间上的函数$y(x)$，才能得到一个泛函值$J[y]$
- (定义在同一区间上的)函数不同，泛函值当然不同
- 为了强调泛函值$J[y]$与函数$y(x)$之间的依赖关系，常常又把函数$y(x)$称为变量函数

评述

- 泛函是函数概念的推广
- 对于函数，给定一个x值，有一个函数值与之对应
- 对于泛函，则必须给出某一区间上的函数$y(x)$，才能得到一个泛函值$J[y]$
- (定义在同一区间上的)函数不同，泛函值当然不同
- 为了强调泛函值$J[y]$与函数$y(x)$之间的依赖关系，常常又把函数$y(x)$称为变量函数

泛函的形式可以是多种多样的，本课程中只限于用积分

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

定义的泛函，其中的F是它的宗量的已知函数，具有连续的二阶偏导数

如果变量函数是二元函数$u(x,y)$，则泛函为

$$J[u]=\iint\limits_S F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对于更多个自变量的多元函数，也可以有类似的定义

泛函的形式可以是多种多样的，本课程中只限于用积分

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

定义的泛函，其中的F是它的宗量的已知函数，具有连续的二阶偏导数

如果变量函数是二元函数$u(x,y)$，则泛函为

$$J[u]=\iint\limits_{S}F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对于更多个自变量的多元函数，也可以有类似的定义

泛函的形式可以是多种多样的，本课程中只限于用积分

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

定义的泛函，其中的F是它的宗量的已知函数，具有连续的二阶偏导数

如果变量函数是二元函数$u(x,y)$，则泛函为

$$J[u]=\iint\limits_{S}F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

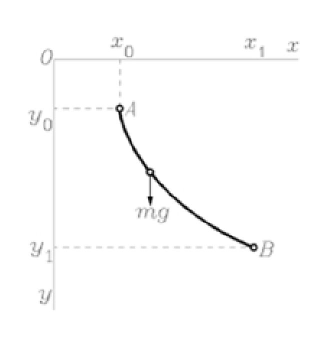
对于更多个自变量的多元函数，也可以有类似的定义

例17.1 (due to Galileo Galilei)

在重力作用下，一质点从(x_0, y_0)点沿平面曲线$y(x)$无摩擦地自由下滑到(x_1, y_1)点，则所需要的时间

$$T = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(y_0-y)}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\mathrm{d}x$$

就是$y(x)$的泛函



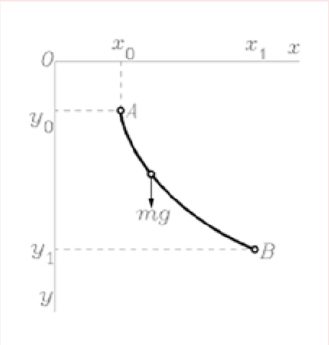
这里，要求$y(x)$一定通过端点(x_0, y_0)和(x_1, y_1)

例17.1 (due to Galileo Galilei)

在重力作用下，一质点从(x_0, y_0)点沿平面曲线$y(x)$无摩擦地自由下滑到(x_1, y_1)点，则所需要的时间

$$T = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}\mathrm{d}x$$

就是$y(x)$的泛函



这里，要求$y(x)$一定通过端点(x_0, y_0)和(x_1, y_1)

例17.2　弦的横振动问题

设在弦上隔离出足够短的一段弦，则该段弦的

$$\text{动能} = \frac{1}{2}\rho\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \qquad \text{势能} = \frac{1}{2}T\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

其中$u(x,t)$是弦的横向位移，ρ是弦的线密度，T是张力

这样，弦的Hamilton作用量

$$S = \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

也是位移$u(x,t)$的泛函

例17.2 弦的横振动问题

设在弦上隔离出足够短的一段弦，则该段弦的

$$\text{动能} = \frac{1}{2}\rho\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \qquad \text{势能} = \frac{1}{2}T\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

其中$u(x,t)$是弦的横向位移，ρ是弦的线密度，T是张力

这样，弦的Hamilton作用量

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\Big[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Big]\mathrm{d}x$$

也是位移$u(x,t)$的泛函

例17.2 弦的横振动问题

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\Big[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Big]\mathrm{d}x$$

$$L=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\Big[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Big]\mathrm{d}x$$

称为Lagrange量(Lagrangian)，而被积函数

$$\frac{1}{2}\Big[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Big]$$

称为Lagrange量密度

例17.2 弦的横振动问题

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$L=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

称为Lagrange量(Lagrangian)，而被积函数

$$\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$$

称为Lagrange量密度

讲授要点

1. 泛函的极值
   - 泛函的概念
   - 何谓泛函极值
   - 泛函极值的必要条件
   - 变分的运算法则
2. 泛函的条件极值
   - Lagrange乘子法

何谓函数极值

函数$f(x)$在x_0点取极小值 $\Longleftrightarrow$ 当x在x_0点及其附近$|x-x_0|<\varepsilon$时，恒有$f(x)\geq f(x_0)$

函数$f(x)$在x_0点取极大值 $\Longleftrightarrow$ 当x在x_0点及其附近$|x-x_0|<\varepsilon$时，恒有$f(x)\leq f(x_0)$

函数$f(x)$在x_0点取极值(极小或极大)的必要条件是

$$f'(x_0)=0$$

何谓函数极值

函数$f(x)$在x_0点取极小值 $\Longleftrightarrow$ 当x在x_0点及其附近$|x-x_0|<\varepsilon$时，恒有$f(x)\geq f(x_0)$

函数$f(x)$在x_0点取极大值 $\Longleftrightarrow$ 当x在x_0点及其附近$|x-x_0|<\varepsilon$时，恒有$f(x)\leq f(x_0)$

函数$f(x)$在x_0点取极值(极小或极大)的必要条件是

$$f'(x_0)=0$$

何谓函数极值

函数$f(x)$在x_0点取极小值 $\Longleftrightarrow$ 当x在x_0点及其附近$|x-x_0|<\varepsilon$时，恒有$f(x)\geq f(x_0)$

函数$f(x)$在x_0点取极大值 $\Longleftrightarrow$ 当x在x_0点及其附近$|x-x_0|<\varepsilon$时，恒有$f(x)\leq f(x_0)$

函数$f(x)$在x_0点取极值(极小或极大)的必要条件是

$$f'(x_0)=0$$

何谓泛函极值

当变量函数为$y(x)$时泛函$J[y]$取极小值 $\Longleftrightarrow$ 对于极值函数$y(x)$及其“附近”的变量函数$y(x)+\delta y(x)$，恒有

$$J[y+\delta y] \geq J[y]$$

所谓函数$y(x)+\delta y(x)$在另一个函数$y(x)$的“附近”，指的是：

- $|\delta y(x)| < \varepsilon$

$\delta y(x)$称为函数$y(x)$的变分

何谓泛函极值

当变量函数为$y(x)$时泛函$J[y]$取极小值

$\Longleftrightarrow$

对于极值函数$y(x)$及其“附近”的变量函数$y(x)+\delta y(x)$，恒有

$$J[y+\delta y]\geq J[y]$$

所谓函数$y(x)+\delta y(x)$在另一个函数$y(x)$的“附近”，指的是：

1. $|\delta y(x)|<\varepsilon$
2. 有时还要求$|(\delta y)'(x)|<\varepsilon$

$\delta y(x)$称为函数$y(x)$的变分

何谓泛函极值

当变量函数为$y(x)$时泛函$J[y]$取极小值 $\Longleftrightarrow$ 对于极值函数$y(x)$及其“附近”的变量函数$y(x)+\delta y(x)$，恒有

$$J[y+\delta y]\geq J[y]$$

所谓函数$y(x)+\delta y(x)$在另一个函数$y(x)$的“附近”，指的是:

1. $|\delta y(x)|<\varepsilon$
2. 有时还要求$|(\delta y)'(x)|<\varepsilon$

$\delta y(x)$称为函数$y(x)$的变分

何谓泛函极值

当变量函数为$y(x)$时泛函$J[y]$取极小值 $\Longleftrightarrow$ 对于极值函数$y(x)$及其“附近”的变量函数$y(x)+\delta y(x)$，恒有
$$J[y+\delta y]\geq J[y]$$

所谓函数$y(x)+\delta y(x)$在另一个函数$y(x)$的“附近”，指的是:

1. $|\delta y(x)|<\varepsilon$
2. 有时还要求$|(\delta y)'(x)|<\varepsilon$

$\delta y(x)$称为函数$y(x)$的变分

何谓泛函极值

当变量函数为$y(x)$时泛函$J[y]$取极小值

$\Longleftrightarrow$

对于极值函数$y(x)$及其"附近"的变量函数$y(x)+\delta y(x)$，恒有
$$J[y+\delta y] \geq J[y]$$

所谓函数$y(x)+\delta y(x)$在另一个函数$y(x)$的"附近"，指的是：

1. $|\delta y(x)| < \varepsilon$
2. 有时还要求$|(\delta y)'(x)| < \varepsilon$

$\delta y(x)$称为函数$y(x)$的变分

讲授要点

1. 泛函的极值
   - 泛函的概念
   - 何谓泛函极值
   - 泛函极值的必要条件
   - 变分的运算法则
2. 泛函的条件极值
   - Lagrange乘子法

可以仿照函数极值必要条件的导出办法，导出泛函取极值的必要条件

- 不妨不失普遍性地假定，所考虑的变量函数均通过固定的两个端点$y(x_0)=a, y(x_1)=b$
- 因此 $\delta y(x_0)=0 \qquad \delta y(x_1)=0$
- 考虑泛函的差值
$$J[y+\delta y]-J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\Big[F\big(x, y+\delta y, y'+(\delta y)'\big)-F(x, y, y')\Big]\mathrm{d}x$$
- 当函数的变分$\delta y(x)$足够小时，可以将被积函数在极值函数附近作Taylor展开

可以仿照函数极值必要条件的导出办法，导出泛函取极值的必要条件

- 不妨不失普遍性地假定，所考虑的变量函数均通过固定的两个端点$y(x_0)=a, y(x_1)=b$
- 因此 $\delta y(x_0)=0 \qquad \delta y(x_1)=0$
- 考虑泛函的差值
$$J[y+\delta y]-J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\Big[F\big(x, y+\delta y, y'+(\delta y)'\big)-F(x, y, y')\Big]\mathrm{d}x$$
- 当函数的变分$\delta y(x)$足够小时，可以将被积函数在极值函数附近作Taylor展开

可以仿照函数极值必要条件的导出办法，导出泛函取极值的必要条件

- 不妨不失普遍性地假定，所考虑的变量函数均通过固定的两个端点$y(x_0)=a, y(x_1)=b$
- 因此 $\delta y(x_0)=0 \qquad \delta y(x_1)=0$
- 考虑泛函的差值
$$J[y+\delta y]-J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\Big[F\left(x,y+\delta y,y'+(\delta y)'\right)-F(x,y,y')\Big]\mathrm{d}x$$
- 当函数的变分$\delta y(x)$足够小时，可以将被积函数在极值函数附近作Taylor展开

可以仿照函数极值必要条件的导出办法，导出泛函取极值的必要条件

- 不妨不失普遍性地假定，所考虑的变量函数均通过固定的两个端点$y(x_0)=a, y(x_1)=b$
- 因此 $\delta y(x_0)=0 \qquad \delta y(x_1)=0$
- 考虑泛函的差值
$$J[y+\delta y]-J[y] = \int_{x_0}^{x_1}\Big[F\left(x,y+\delta y,y'+(\delta y)'\right)-F(x,y,y')\Big]\mathrm{d}x$$
- 当函数的变分$\delta y(x)$足够小时，可以将被积函数在极值函数附近作Taylor展开

$$
\begin{aligned}
J[y+\delta y]-J[y] &= \int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]F\right.\\
&\quad \left.+\frac{1}{2!}\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]^2F+\cdots\right\}\mathrm{d}x\\
&= \int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial F}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x\\
&\quad +\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]^2F\mathrm{d}x+\cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J[y+\delta y]-J[y]
&=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]F\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2!}\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]^2F+\cdots\right\}\mathrm{d}x\\
&=\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial F}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x\\
&\qquad+\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]^2F\mathrm{d}x+\cdots
\end{aligned}
$$

$$\delta J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \mathrm{d}x$$

是泛函$J[y]$的一级变分

$$\delta^2 J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial}{\partial y'} \right]^2 F \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y (\delta y)' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} (\delta y)'^2 \right] \mathrm{d}x$$

是泛函$J[y]$的二级变分

$$\delta J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \mathrm{d}x$$

是泛函$J[y]$的一级变分

$$\delta^2 J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial}{\partial y'} \right]^2 F \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y (\delta y)' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} (\delta y)'^2 \right] \mathrm{d}x$$

是泛函$J[y]$的二级变分

$$\delta J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial F}{\partial y'}\right] \mathrm{d}x$$

是泛函$J[y]$的一级变分

$$\delta^2 J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial}{\partial y'}\right]^2 F \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y (\delta y)' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y)'^2\right] \mathrm{d}x$$

是泛函$J[y]$的二级变分

$$\delta J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial F}{\partial y'}\right] \mathrm{d}x$$

是泛函$J[y]$的一级变分

$$\delta^2 J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial}{\partial y'}\right]^2 F \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\delta y(\delta y)' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y)'^2\right] \mathrm{d}x$$

是泛函$J[y]$的二级变分

$$\delta J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \mathrm{d}x$$

是泛函$J[y]$的一级变分

$$\delta^2 J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial}{\partial y'} \right]^2 F \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y (\delta y)' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} (\delta y)'^2 \right] \mathrm{d}x$$

是泛函$J[y]$的二级变分

对应于函数$f(x)$取极值的必要条件为$f'(x)=0$

泛函极值的必要条件(积分形式)

泛函$J[y]$的一级变分为0

$$\delta J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial F}{\partial y'}\right] \mathrm{d}x = 0$$

对应于函数$f(x)$取极值的必要条件为$f'(x) = 0$

泛函极值的必要条件(积分形式)

泛函$J[y]$的一级变分为0

$$\delta J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \mathrm{d}x = 0$$

泛函极值的必要条件(微分形式)

$$\delta J[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + (\delta y)' \frac{\partial F}{\partial y'}\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} - \delta y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} - \delta y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right] \mathrm{d}x = 0$$

由于δy的任意性，就可以得到泛函极值的必要条件(微分形式)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

泛函极值的必要条件(微分形式)

$$\begin{aligned}\delta J[y] &\equiv \int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial F}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial F}{\partial y}-\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial F}{\partial y}-\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

由于δy的任意性，就可以得到泛函极值的必要条件(微分形式)

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

泛函极值的必要条件(微分形式)

$$\begin{aligned}\delta J[y] &\equiv \int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial F}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x\\ &=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial F}{\partial y}-\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x\\ &=\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial F}{\partial y}-\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

由于δy的任意性，就可以得到泛函极值的必要条件(微分形式)

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

泛函极值的必要条件(微分形式)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

- 称为Euler–Lagrange方程
- 一般说来，是一个二阶常微分方程

泛函极值的必要条件(微分形式)

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

- 称为Euler–Lagrange方程
- 一般说来，是一个二阶常微分方程

泛函极值的必要条件(微分形式)

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

- 称为Euler–Lagrange方程
- 一般说来，是一个二阶常微分方程

在导出Euler–Lagrange方程时，用到了变分法的一个重要的基本引理：

设$\phi(x)$是x的连续函数，$\eta(x)$具有连续的二阶导数，且$\eta(x)\big|_{x=x_0}=\eta(x)\big|_{x=x_1}=0$，若对于任意$\eta(x)$

$$\int_{x_0}^{x_1}\phi(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0$$

均成立，则必有$\phi(x)=0$

在导出Euler–Lagrange方程时，用到了变分法的一个重要的基本引理：

设$\phi(x)$是x的连续函数，$\eta(x)$具有连续的二阶导数，且$\eta(x)\big|_{x=x_0} = \eta(x)\big|_{x=x_1} = 0$，若对于任意$\eta(x)$

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0$$

均成立，则必有$\phi(x) \equiv 0$

例17.3　质点在势场中的运动

设质点在有势力场中沿路径$q = q(t)$由$t_0, q(t_0)$点运动到$t_1, q(t_1)$点，它的Hamilton作用量是

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t$$

其中q和$\dot{q}$是描写质点运动的广义坐标和广义动量，Lagrange量$L = T - V$是动能T和势能V之差

例17.3　质点在势场中的运动

设质点在有势力场中沿路径$q=q(t)$由$t_0, q(t_0)$点运动到$t_1, q(t_1)$点，它的Hamilton作用量是

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t$$

Hamilton原理

在一切(运动学上允许的)可能路径中，真实运动的(即由力学规律决定的)路径使作用量S取极值

例17.3　质点在势场中的运动

设质点在有势力场中沿路径$q=q(t)$由$t_0, q(t_0)$点运动到$t_1, q(t_1)$点，它的Hamilton作用量是

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(t,q,\dot{q})\mathrm{d}t$$

作用量S取极值的必要条件

积分形式

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right]\mathrm{d}t=0$$

微分形式

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$$

例17.3　质点在势场中的运动

设质点在有势力场中沿路径$q=q(t)$由$t_0, q(t_0)$点运动到$t_1, q(t_1)$点，它的Hamilton作用量是

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t$$

作用量S取极值的必要条件

积分形式

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right]\mathrm{d}t=0$$

微分形式

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$$

这就是Newton力学中的动力学方程

泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的两种特殊情形

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

1. $F=F(x,y')$，不显含y

Euler–Lagrange方程就是$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$

所以，立即就可得到首次积分

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\text{常量}C$$

泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的两种特殊情形

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

1. $F=F(x,y')$，不显含y

Euler–Lagrange方程就是$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$

所以，立即就可得到首次积分

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\text{常量}C$$

泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的两种特殊情形

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

1. $F=F(x,y')$，不显含y

Euler–Lagrange方程就是$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$

所以，立即就可得到首次积分

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\text{常量}C$$

泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的两种特殊情形

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

1. $F=F(x,y')$，不显含y

   Euler–Lagrange方程就是$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0$

   所以，立即就可得到首次积分

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\text{常量}C$$

泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的两种特殊情形

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

❷ $F=F(y,y')$，不显含x

泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的两种特殊情形

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

❷ $F=F(y,y')$，不显含x

直接计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right]=y''\frac{\partial F}{\partial y'}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}y'-\frac{\partial F}{\partial y'}y''$$

泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的两种特殊情形

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

❷ $F=F(y,y')$，不显含x

直接计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right]=y''\frac{\partial F}{\partial y'}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}y'-\frac{\partial F}{\partial y'}y''$$

泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的两种特殊情形

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

❷ $F=F(y,y')$，不显含x

直接计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right]=-y'\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]$$

泛函$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$的两种特殊情形

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

❷ $F=F(y,y')$，不显含x

直接计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right]=-y'\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]$$

所以，也可得到首次积分

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=\text{常量}C$$

$$F = F(y, y')$$

不显含x

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = \text{常量}C$$

应用到例17.3　质点在势场中的运动

$$F = F(y, y')$$

不显含x

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = 常量C$$

应用到例17.3　质点在势场中的运动

$$F = F(y, y')$$

不显含x

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = 常量C$$

应用到例17.3　质点在势场中的运动

设质点在势场中沿路径$q = q(t)$由$t_0, q(t_0)$点运动到$t_1, q(t_1)$点，它的Hamilton作用量是

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\mathrm{d}t$$

作用量S取极值的必要条件

微分形式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$F = F(y, y')$$

不显含x

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = 常量C$$

应用到例17.3　质点在势场中的运动

如果$L = L(q, \dot{q})$

不显含t

$F = F(y, y')$

不显含x

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = 常量C$$

应用到例17.3　质点在势场中的运动

如果$L = L(q, \dot{q})$

不显含t

则有

“首次积分”

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = 常量C$$

评述

- 作为完整的泛函极值问题，在列出泛函取极值的必要条件、即Euler-Lagrange方程后，还需要在给定的定解条件下求解微分方程，才有可能求得极值函数
- Euler-Lagrange方程只是泛函取极值的必要条件，并不是充分必要条件．在给定的定解条件下，Euler-Lagrange方程的解可能不止一个，它们只是极值函数的候选者．到底哪一(几)个解是要求的极值函数，还需要进一步加以甄别

评述

- 作为完整的泛函极值问题，在列出泛函取极值的必要条件、即Euler-Lagrange方程后，还需要在给定的定解条件下求解微分方程，才有可能求得极值函数
- Euler-Lagrange方程只是泛函取极值的必要条件，并不是充分必要条件． 在给定的定解条件下，Euler-Lagrange方程的解可能不止一个，它们只是极值函数的候选者． 到底哪一(几)个解是要求的极值函数，还需要进一步加以甄别

评述

- 作为完整的泛函极值问题，在列出泛函取极值的必要条件、即Euler-Lagrange方程后，还需要在给定的定解条件下求解微分方程，才有可能求得极值函数
- Euler-Lagrange方程只是泛函取极值的必要条件，并不是充分必要条件．在给定的定解条件下，Euler-Lagrange方程的解可能不止一个，它们只是极值函数的候选者．到底哪一(几)个解是要求的极值函数，还需要进一步加以甄别

评述

- 作为完整的泛函极值问题，在列出泛函取极值的必要条件、即Euler-Lagrange方程后，还需要在给定的定解条件下求解微分方程，才有可能求得极值函数
- Euler-Lagrange方程只是泛函取极值的必要条件，并不是充分必要条件． 在给定的定解条件下，Euler-Lagrange方程的解可能不止一个，它们只是极值函数的候选者． 到底哪一(几)个解是要求的极值函数，还需要进一步加以甄别

评述

- 与求函数极值的情形一样，甄别方法有两种
- 一种是直接比较所求得的解及其“附近”的函数的泛函值，根据泛函极值的定义加以判断．这种方法不太实用，至少会涉及较多的计算
- 一种方法是计算泛函的二级变分$\delta^2 J$，如果对于所求得的解，泛函的二级变分取正(负)值，则该解即为极值函数，泛函取极小(大)．这种方法当然比较简便，但如果二级变分为0，则需要继续讨论高级变分

评述

- 与求函数极值的情形一样，甄别方法有两种
- 一种是直接比较所求得的解及其“附近”的函数的泛函值，根据泛函极值的定义加以判断．这种方法不太实用，至少会涉及较多的计算
- 一种方法是计算泛函的二级变分$\delta^2 J$，如果对于所求得的解，泛函的二级变分取正(负)值，则该解即为极值函数，泛函取极小(大)．这种方法当然比较简便，但如果二级变分为0，则需要继续讨论高级变分

评述

- 与求函数极值的情形一样，甄别方法有两种
- 一种是直接比较所求得的解及其“附近”的函数的泛函值， 根据泛函极值的定义加以判断. 这种方法不太实用，至少会涉及较多的计算
- 一种方法是计算泛函的二级变分$\delta^2 J$， 如果对于所求得的解，泛函的二级变分取正(负)值，则该解即为极值函数， 泛函取极小(大). 这种方法当然比较简便，但如果二级变分为0， 则需要继续讨论高级变分

评述

- 实际问题往往又特别简单：这就是在给定的边界条件下，Euler-Lagrange方程只有一个解， 同时，从物理或数学内容上又能判断，该泛函的极值一定存在，那么， 这时求得的唯一解一定就是所要求的极值函数

讲授要点

1. 泛函的极值
   - 泛函的概念
   - 何谓泛函极值
   - 泛函极值的必要条件
   - 变分的运算法则
2. 泛函的条件极值
   - Lagrange乘子法

以一元函数为例，总结变分运算的几条简单法则

❶ 由于变分是对函数y进行的，独立于自变量x，所以，变分运算和微分或微商运算可交换次序

$$\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}\quad 即\quad \delta y'=(\delta y)'$$

❷ 变分运算也是一个线性运算

$$\delta(\alpha F+\beta G)=\alpha\delta F+\beta\delta G$$

其中α和β是常数

以一元函数为例，总结变分运算的几条简单法则

1. 由于变分是对函数y进行的，独立于自变量x，所以，变分运算和微分或微商运算可交换次序

$$\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}\quad \text{即}\quad \delta y'=(\delta y)'$$

2. 变分运算也是一个线性运算

$$\delta(\alpha F+\beta G)=\alpha\delta F+\beta\delta G$$

其中α和β是常数

以一元函数为例，总结变分运算的几条简单法则

3. 直接计算，就可以得到函数乘积的变分法则

$$\delta(FG) = (\delta F)G + F(\delta G)$$

4. 变分运算和积分(微分的逆运算)也可交换次序

$$\delta\int_a^b F\mathrm{d}x = \int_a^b(\delta F)\mathrm{d}x$$

这只要把等式两端的定积分写成级数和即可看出

以一元函数为例，总结变分运算的几条简单法则

❸ 直接计算，就可以得到函数乘积的变分法则

$$\delta(FG) = (\delta F)G + F(\delta G)$$

❹ 变分运算和积分(微分的逆运算)也可交换次序

$$\delta\int_a^b F\mathrm{d}x = \int_a^b (\delta F)\mathrm{d}x$$

这只要把等式两端的定积分写成级数和即可看出

以一元函数为例，总结变分运算的几条简单法则

5. 复合函数的变分运算，其法则和微分运算完全相同，只要简单地将微分法则中的“d”换成“δ”即可．例如

$$\delta F(x,y,y') = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

注意：引起F变化的原因，是函数y的变分，而自变量x是不变化的．所以，绝对不会出现“$(\partial F/\partial x)\delta x$”项

这些运算法则，可以毫不困难地推广到多元函数的情形

以一元函数为例，总结变分运算的几条简单法则

5. 复合函数的变分运算，其法则和微分运算完全相同，只要简单地将微分法则中的“d”换成“δ”即可．例如

$$\delta F(x,y,y') = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

注意：引起F变化的原因，是函数y的变分，而自变量x是不变化的．所以，绝对不会出现“$(\partial F/\partial x)\delta x$”项

这些运算法则，可以毫不困难地推广到多元函数的情形

以一元函数为例，总结变分运算的几条简单法则

❺ 复合函数的变分运算，其法则和微分运算完全相同，只要简单地将微分法则中的“d”换成“δ”即可．例如

$$\delta F(x,y,y') = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'$$

注意：引起F变化的原因，是函数y的变分，而自变量x是不变化的．所以，绝对不会出现“$(\partial F/\partial x)\delta x$”项

这些运算法则，可以毫不困难地推广到多元函数的情形

二元函数的泛函极值问题

- 二元函数的泛函
$$J[u]=\iint\limits_{S}F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
- 边界条件：$u(x,y)$在S的边界Γ上的数值给定，即
$$u\big|_{\Gamma}\text{固定}$$

二元函数泛函取极值的必要条件它的一级变分为0：$\delta J[u]=0$

二元函数的泛函极值问题

- 二元函数的泛函

$$J[u]=\iint\limits_S F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 边界条件：$u(x,y)$在S的边界Γ上的数值给定，即

$$u\big|_\Gamma \text{固定}$$

二元函数泛函取极值的必要条件它的一级变分为0：$\delta J[u]=0$

二元函数的泛函极值问题

- 二元函数的泛函
$$J[u]=\iint\limits_S F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
- 边界条件：$u(x,y)$在S的边界$\varGamma$上的数值给定，即
$$u\Big|_{\varGamma}\text{固定}$$

二元函数泛函取极值的必要条件它的一级变分为0：$\delta J[u]=0$

二元函数的泛函极值问题

- 二元函数的泛函
$$J[u]=\iint\limits_S F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 边界条件：$u(x,y)$在S的边界Γ上的数值给定，即
$$u\Big|_\Gamma \text{固定}$$

二元函数泛函取极值的必要条件它的一级变分为0：$\delta J[u]=0$

二元函数的泛函极值问题

$$\delta J[u] = \iint\limits_S \delta F(x, y, u, u_x, u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_S \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_S \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}(\delta u)_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}(\delta u)_y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二元函数的泛函极值问题

$$\delta J[u] = \iint_S \delta F(x, y, u, u_x, u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_S \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_S \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}(\delta u)_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}(\delta u)_y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二元函数的泛函极值问题

$$\delta J[u] = \iint\limits_S \delta F(x, y, u, u_x, u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_S \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_S \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}(\delta u)_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}(\delta u)_y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二元函数的泛函极值问题

$$\delta J[u]=\iint\limits_{S}\left[\delta u\frac{\partial F}{\partial u}+(\delta u)_x\frac{\partial F}{\partial u_x}+(\delta u)_y\frac{\partial F}{\partial u_y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化简

$$=\iint\limits_{S}\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint\limits_{S}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

面积分化线积分

$$=0$$

Continue

二元函数的泛函极值问题

$$\delta J[u] = \iint\limits_S \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u} + (\delta u)_x \frac{\partial F}{\partial u_x} + (\delta u)_y \frac{\partial F}{\partial u_y}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

▸ 化简

$$= \iint\limits_S \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right] \delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \iint\limits_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

▸ 面积分化线积分

$$= 0$$

▸ Continue

利 用 公 式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}\right]\delta u+\frac{\partial F}{\partial u_x}(\delta u)_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\right]=\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right]\delta u+\frac{\partial F}{\partial u_y}(\delta u)_y$$

Return

Green公式

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma \Big(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\Big)$$

取
$$Q = \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u$$
$$P = -\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u$$

$$\iint\limits_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma \left[-\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}y\right]\delta u$$

Return

Green公式

$$\iint\limits_S \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma \Big(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\Big)$$

取
$$Q=\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u \qquad P=-\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u$$

$$\iint\limits_S \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\Big)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma \Big[-\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}y\Big]\delta u$$

Return

Green公式

$$\iint\limits_S \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma \Big(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\Big)$$

取
$$Q=\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u$$
$$P=-\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u$$

$$\iint\limits_S \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\Big)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma\Big[-\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}y\Big]\delta u$$

Return

二元函数的泛函极值问题

$$\delta J[u] = \iint\limits_S \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u} + (\delta u)_x \frac{\partial F}{\partial u_x} + (\delta u)_y \frac{\partial F}{\partial u_y}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_S \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right] \delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \int_\Gamma \left[-\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}y\right] \delta u$$

$$= 0$$

根据边界条件

$$u\Big|_{\Gamma}\text{固定}$$

所以

$$\delta u\Big|_{\Gamma}=0$$

$$\int_{\Gamma}\left[-\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}y\right]\delta u=0$$

根据边界条件

$$u\Big|_{\Gamma}固定$$

所以

$$\delta u\Big|_{\Gamma} = 0$$

$$\int_{\Gamma}\left[-\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}y\right]\delta u = 0$$

根据边界条件

$$u\Big|_{\Gamma}\text{固定}$$

所以

$$\delta u\Big|_{\Gamma} = 0$$

$$\int_{\Gamma}\left[-\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}y\right]\delta u = 0$$

二元函数泛函

$$J[u] = \iint\limits_S F(x, y, u, u_x, u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

边界条件

$u\big|_\Gamma$ 固定

取极值的必要条件

积分形式

$$\iint\limits_S \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

微分形式（Euler-Lagrange方程）

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)u = 0$$

二元函数泛函

$$J[u]=\iint\limits_S F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

边界条件

$u\big|_\Gamma$固定

取极值的必要条件

积分形式

$$\iint\limits_S\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

微分形式（Euler-Lagrange方程）

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)u=0$$

二元函数泛函

$$J[u]=\iint\limits_S F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

边界条件

$u\big|_\Gamma$固定

取极值的必要条件

积分形式

$$\iint\limits_S \left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

微分形式（Euler-Lagrange方程）

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)u=0$$

Euler-Lagrange方程

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)u=0$$

应用于弦的横振动问题(见例17.2)

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

即得弦的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Euler-Lagrange方程

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)u=0$$

应用于弦的横振动问题(见例17.2)

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

即得弦的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

评述

- 以上在一元函数和多元函数的泛函极值问题中，都限定了变量函数在端点或边界上取定值， 因而变量函数的变分在端点或边界上一定为0
- 这种泛函极值问题称为固定端点或固定边界的泛函极值问题
- 这类问题在数学上是最简单的，然而却又是物理上最常用的

评述

- 以上在一元函数和多元函数的泛函极值问题中，都限定了变量函数在端点或边界上取定值， 因而变量函数的变分在端点或边界上一定为0
- 这种泛函极值问题称为固定端点或固定边界的泛函极值问题
- 这类问题在数学上是最简单的，然而却又是物理上最常用的

评述

- 以上在一元函数和多元函数的泛函极值问题中，都限定了变量函数在端点或边界上取定值， 因而变量函数的变分在端点或边界上一定为0
- 这种泛函极值问题称为固定端点或固定边界的泛函极值问题
- 这类问题在数学上是最简单的，然而却又是物理上最常用的

讲授要点

1. 泛函的极值
   - 泛函的概念
   - 何谓泛函极值
   - 泛函极值的必要条件
   - 变分的运算法则
2. 泛函的条件极值
   - Lagrange乘子法

可将求多元函数条件极值问题的Lagrange乘子法应用于泛函的条件极值问题

Lagrange乘子法

例如，求泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$$

在边界条件 $y(x_0) = a \qquad y(x_1) = b$

以及约束条件 $J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\mathrm{d}x = C$

下的极值

Continue

可将求多元函数条件极值问题的Lagrange乘子法应用于泛函的条件极值问题

Lagrange乘子法

例如，求泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$$

在边界条件 $y(x_0) = a \qquad y(x_1) = b$

以及约束条件 $J_1[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\mathrm{d}x = C$

下的极值

Continue

多元函数的极值问题

- 以二元函数为例
- 设有二元函数$f(x,y)$，它取极值的必要条件是

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 0$$

- 因为$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$任意，所以二元函数$f(x,y)$取极值的必要条件又可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

多元函数的极值问题

- 以二元函数为例
- 设有二元函数$f(x,y)$，它取极值的必要条件是

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=0$$

- 因为$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$任意，所以二元函数$f(x,y)$取极值的必要条件又可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\qquad\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

多元函数的极值问题

- 以二元函数为例
- 设有二元函数$f(x,y)$，它取极值的必要条件是

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=0$$

- 因为$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$任意，所以二元函数$f(x,y)$取极值的必要条件又可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\qquad\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

多元函数的条件极值问题

- 仍以二元函数为例
- 二元函数$f(x, y)$的条件极值问题，即在约束条件$g(x, y) = C$下求$f(x, y)$的极值
- 原则上可以由约束条件解出$y = h(x)$，然后消去$f(x, y)$中的y．上述条件极值问题就转化为一元函数$f(x, h(x))$的普通极值问题
- 它取极值的必要条件就是

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} h'(x) = 0$$

多元函数的条件极值问题

- 仍以二元函数为例
- 二元函数$f(x,y)$的条件极值问题，即在约束条件$g(x,y)=C$下求$f(x,y)$的极值
- 原则上可以由约束条件解出$y=h(x)$，然后消去$f(x,y)$中的y． 上述条件极值问题就转化为一元函数$f(x,h(x))$的普通极值问题
- 它取极值的必要条件就是

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}h'(x)=0$$

多元函数的条件极值问题

- 仍以二元函数为例
- 二元函数$f(x,y)$的条件极值问题，即在约束条件$g(x,y)=C$下求$f(x,y)$的极值
- 原则上可以由约束条件解出$y=h(x)$，然后消去$f(x,y)$中的y． 上述条件极值问题就转化为一元函数$f(x,h(x))$的普通极值问题
- 它取极值的必要条件就是

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}h'(x)=0$$

多元函数的条件极值问题

- 仍以二元函数为例
- 二元函数$f(x,y)$的条件极值问题，即在约束条件$g(x,y)=C$下求$f(x,y)$的极值
- 原则上可以由约束条件解出$y=h(x)$，然后消去$f(x,y)$中的y. 上述条件极值问题就转化为一元函数$f(x,h(x))$的普通极值问题
- 它取极值的必要条件就是

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}h'(x)=0$$

二元函数条件极值的必要条件：进一步的分析

- 上面要用到的是$h'(x)$而非$h(x)$
- $h'(x)$可以由$g(x,y)=C$微分而得

$$\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y=0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}$$

- 因此二元函数取极值的必要条件即可写成

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0$$

- 容易推广到更多个自变量的情形．但随着自变量数目的增多，公式也就越来越麻烦

二元函数条件极值的必要条件：进一步的分析

- 上面要用到的是$h'(x)$而非$h(x)$
- $h'(x)$可以由$g(x,y)=C$微分而得

$$\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y=0 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}$$

- 因此二元函数取极值的必要条件即可写成

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0$$

- 容易推广到更多个自变量的情形．但随着自变量数目的增多，公式也就越来越麻烦

二元函数条件极值的必要条件：进一步的分析

- 上面要用到的是$h'(x)$而非$h(x)$
- $h'(x)$可以由$g(x,y)=C$微分而得

$$\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y=0 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}$$

- 因此二元函数取极值的必要条件即可写成

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0$$

- 容易推广到更多个自变量的情形．但随着自变量数目的增多，公式也就越来越麻烦

二元函数条件极值的必要条件：进一步的分析

- 上面要用到的是$h'(x)$而非$h(x)$
- $h'(x)$可以由$g(x,y)=C$微分而得
$$\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y=0 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}$$
- 因此二元函数取极值的必要条件即可写成
$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0$$
- 容易推广到更多个自变量的情形．但随着自变量数目的增多，公式也就越来越麻烦

二元函数条件极值的必要条件：Lagrange乘子法

- 在实用中，更常用Lagrange乘子法来处理多元函数的条件极值问题
- 例如，对于在约束条件$g(x,y)=C$下求函数$f(x,y)$的极值问题，就可以引进Lagrange乘子λ，而定义一个新的二元函数[1]

$$h(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

- 仍将x和y看成是两个独立变量，这样，这个二元函数取极值的必要条件就是

$$\frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial x}=0\qquad\frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial y}=0$$

[1] 为了以后的方便，这里的Lagrange乘子前面多了一个负号

二元函数条件极值的必要条件：Lagrange乘子法

- 在实用中，更常用Lagrange乘子法来处理多元函数的条件极值问题
- 例如，对于在约束条件$g(x, y) = C$下求函数$f(x, y)$的极值问题，就可以引进Lagrange乘子λ，而定义一个新的二元函数[1]

$$h(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

- 仍将x和y看成是两个独立变量，这样，这个二元函数取极值的必要条件就是

$$\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y} = 0$$

[1] 为了以后的方便，这里的Lagrange乘子前面多了一个负号

二元函数条件极值的必要条件：Lagrange乘子法

- 在实用中，更常用Lagrange乘子法来处理多元函数的条件极值问题
- 例如，对于在约束条件$g(x,y)=C$下求函数$f(x,y)$的极值问题， 就可以引进Lagrange乘子λ，而定义一个新的二元函数[1]
$$h(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$
- 仍将x和y看成是两个独立变量，这样，这个二元函数取极值的必要条件就是
$$\frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial y}=0$$

[1] 为了以后的方便，这里的Lagrange乘子前面多了一个负号

二元函数条件极值的必要条件：Lagrange乘子法

- 容易看出，由

$$\frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial y}=0 \qquad (*)$$

消去λ，就能化为前面给出的必要条件

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0$$

- 由方程组$(*)$可以求出

$$x=x(\lambda) \qquad y=y(\lambda)$$

- 代回到约束条件中，定出Lagrange乘子λ的数值，就可以求出可能的极值点(x,y)

二元函数条件极值的必要条件：Lagrange乘子法

- 容易看出，由

$$\frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial y}=0 \qquad (*)$$

消去λ，就能化为前面给出的必要条件

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0$$

- 由方程组(*)可以求出

$$x=x(\lambda) \qquad y=y(\lambda)$$

- 代回到约束条件中，定出Lagrange乘子λ的数值，就可以求出可能的极值点(x,y)

二元函数条件极值的必要条件：Lagrange乘子法

- 容易看出，由

$$\frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial(f-\lambda g)}{\partial y}=0 \qquad (*)$$

消去λ，就能化为前面给出的必要条件

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}=0$$

- 由方程组(*)可以求出

$$x=x(\lambda) \qquad y=y(\lambda)$$

- 代回到约束条件中，定出Lagrange乘子λ的数值，就可以求出可能的极值点(x,y)

评述

- 如果是更多个自变量的多元函数，也可以同样地处理
- 如果涉及多个约束条件，只需引入多个Lagrange乘子即可

Return

评述

- 如果是更多个自变量的多元函数，也可以同样地处理
- 如果涉及多个约束条件，只需引入多个Lagrange乘子即可

Return

条件极值问题

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$$

$$y(x_0) = a \qquad y(x_1) = b$$

$$J_1[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\mathrm{d}x = C$$

等价于

极值问题

$$J_0[y] = J[y] - \lambda J_1[y]$$

$$y(x_0) = a \quad y(x_1) = b$$

必要条件是

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}\right)(F - \lambda G) = 0$$

条件极值问题

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

$$y(x_0)=a \qquad y(x_1)=b$$

$$J_1[y]\equiv\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x=C$$

等价于

极值问题

$$J_0[y]=J[y]-\lambda J_1[y]$$

$$y(x_0)=a \qquad y(x_1)=b$$

必要条件是

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}\right)(F-\lambda G)=0$$

条件极值问题

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\mathrm{d}x$$

$$y(x_0) = a \qquad y(x_1) = b$$

$$J_1[y] \equiv \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\mathrm{d}x = C$$

等价于

极值问题

$$J_0[y] = J[y] - \lambda J_1[y]$$

$$y(x_0) = a \quad y(x_1) = b$$

必要条件是

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}\right)(F - \lambda G) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}\right)(F-\lambda G)=0$$

$$y(x_0)=a \qquad y(x_1)=b$$

$$J_1[y]\equiv\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x=C$$

必要时经过甄别

$\Longrightarrow$

Lagrange乘子的值$\lambda=\lambda_0$
极值函数$y=y(x,\lambda_0)$
相应的泛函$J_0[y]$值(条件极值)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}\right)(F-\lambda G)=0$$

$$y(x_0)=a \qquad y(x_1)=b$$

$$J_1[y]\equiv\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x=C$$

必要时经过甄别

$\Longrightarrow$

Lagrange乘子的值$\lambda=\lambda_0$
极值函数$y=y(x,\lambda_0)$
相应的泛函$J_0[y]$值(条件极值)