第二章 控制系统数学模型
Chapter 2 Mathematical Model of Control Systems

§2-1 导论(Introduction)

- 数学模型(Mathematical model)：
  - 描述系统性能的数学表达式，叫做系统的数学模型。
- 动态模型(Dynamic model)：
  - 描述系统动态过程的方程式称为动态模型。如微分方程、偏微分方程、差分方程等。
- 静态模型(Static model)：
  - 在静态条件下(即变量的各阶导数为零)，描述系统各变量之间关系的方程式，称为静态模型。

建立数学模型应注意

- 全面了解系统的自然特性，分析研究的目的和要求，决定能否忽略一些次要因素而使系统数学模型简化。
- 根据所应用的系统分析方法，建立相应形式的数学模型（微分方程、传递函数等）。

建立系统数学模型的途径：

- 演绎法(Deduction)：
  - 在建立模型时，通过对系统本身机理（物理、化学规律)的分析确定模型的 结构和参数，从理论上推导出系统的数学模型的一种方法。
- 归纳法(Induction)：
  - 根据对系统的观察，通过测量所得到的大量输入、输出数据，推断出被研究系统的数学模型。

§2-2 控制系统的微分方程

(Differential Equation)

建立系统(或元件)微分方程式的一般步骤：

(1) 了解系统组成及各环节之间的传递关系，确定系统输入、输出变量，系统内部变量及变量之间的相互关系。

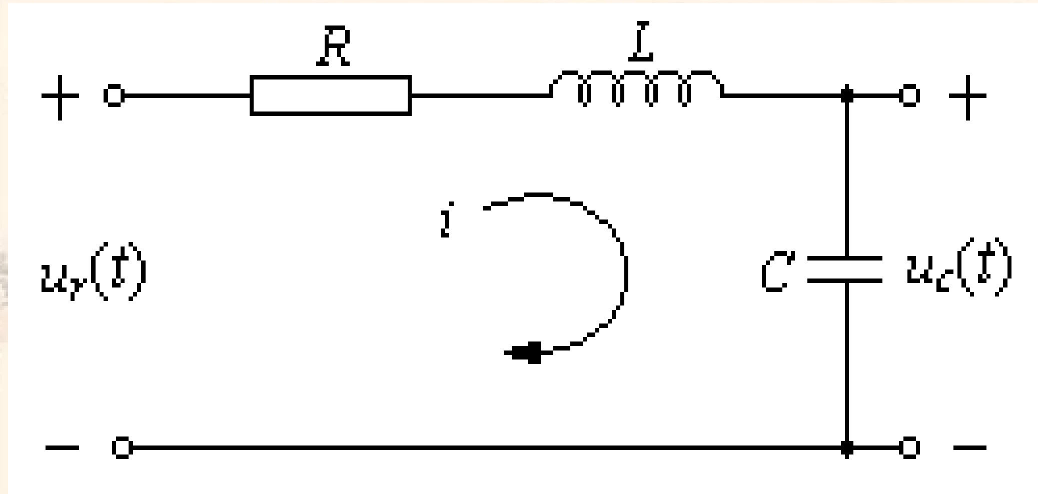
(2) 从输入端开始按照信号流向，分析各环节的运动机理，写出描述各环节动态关系的微分方程。

(3) 采用微偏线性化等方法对原始微分方程进行简化。

(4) 对简化后方程进行推导，消除中间变量，仅保留系统输入变量和输出变量。

(5) 对偏微分方程整理成规范形式，即将输出变量及其各阶导数项放在等号左边，输入变量及其各阶导数项放在等号右边，分别按降阶顺序排列。

例1　R-L-C电路



$u_r(t)$为输入电压

$u_c(t)$为输出电压

要求列出$u_c(t)$与$u_r(t)$的关系方程式。

（1）根据基尔霍夫定律可写出原始方程式

$$u_r(t) = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t$$

（2）式中i是中间变量，它与输出$u_c(t)$有如下关系

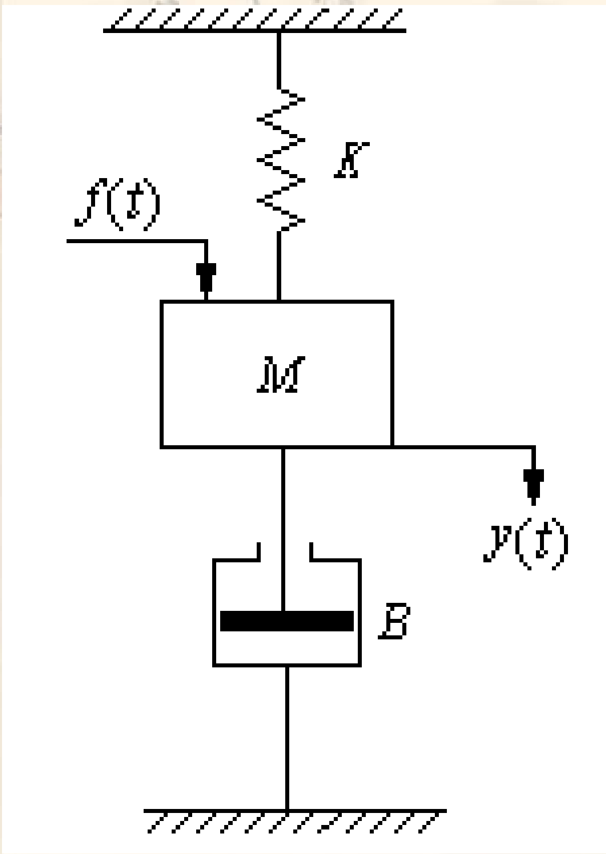
$$u_c(t) = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t$$

（3）消去中间变量i后，输入输出微分方程式

$$u_r(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2} + u_c(t)$$

或 $T_1T_2\dfrac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2} + T_2\dfrac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + u_c(t) = u_r(t), T_1 = L/R, T_2 = RC$

例2 弹簧—质量—阻尼器系统



输入——$f(t)$　　输出——$y(t)$

要求写出系统在外力$f(t)$作用下的运动方程式

（2）消去中间变量

（1）列出原始方程式

$$f(t) - f_1(t) - f_2(t) = M\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

阻

阻尼器阻力

弹簧力

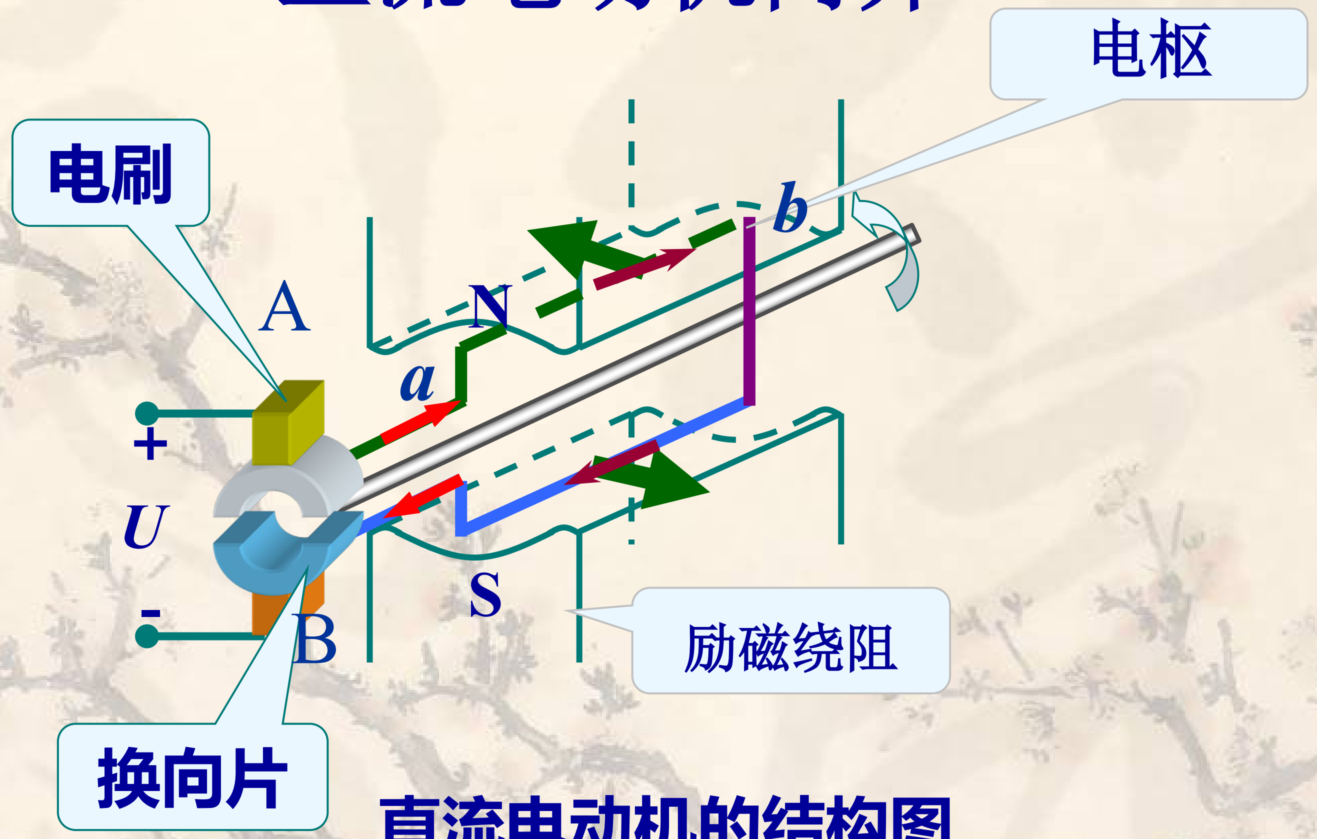
$$f_1(t) = B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \qquad f_2(t) = Ky(t)$$

弹性系数

整理得 $M\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + Ky(t$

——线性定常二阶微分方程式

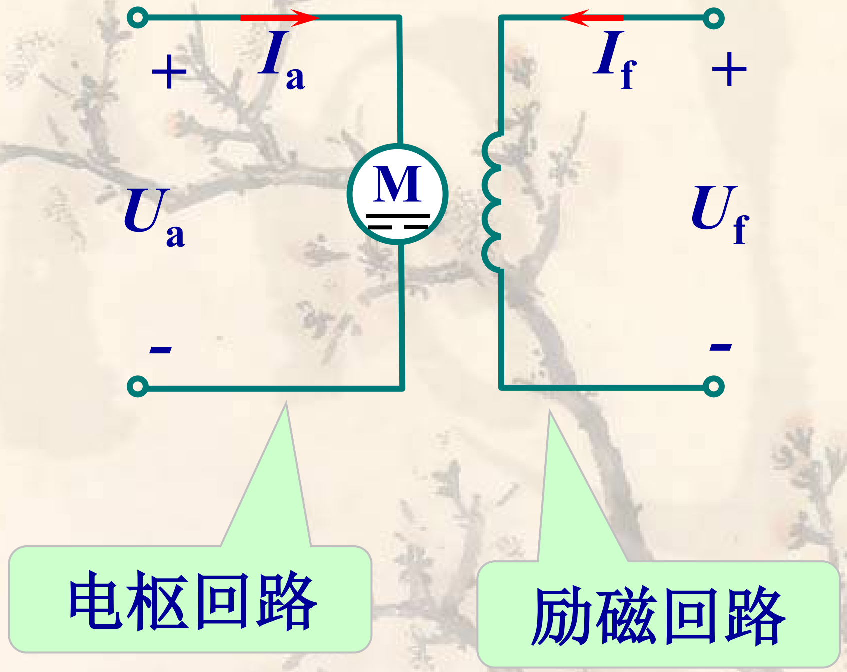
直流电动机简介



直流电动机的结构图

电枢绕组通过电刷接到直流电源上，电枢绕组的转轴与机械负载相连，这时便有电流从电源的正极流出，经电刷A流入电枢绕组，然后经电刷B流回电源的负极。

直流电动机原理图



直流电动机控制方式分为电枢控制和磁场控制两种形式。

推导

当电枢绕组中有电枢电流通过时，在磁场内受电磁力的作用，产生电磁转矩：

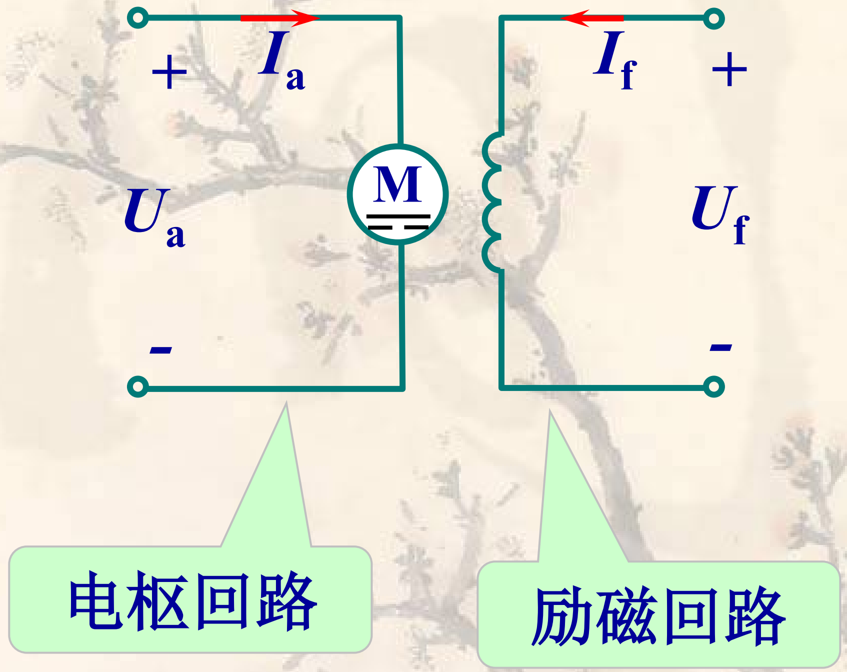
$$M = C_m I_a$$

C_m为电动机轴转矩系数

I_a为电枢电流

电枢和励磁绕阻分别由两个独立的直流电源供电。

直流电动机原理图



直流电动机控制方式分为**电枢控制**和**磁场控制**两种形式。

推导

当电枢旋转时，主磁场在电枢绕组中感应的电动势为： $E_a = C_d \omega$

C_d为电动势系数

ω为电动机轴角速度

电枢和励磁绕阻分别由两个独立的直流电源供电。

例3 直流电动机—电枢控制的直流电动机

式中 L_a— 电枢回路总电感(亨);

R_a— 电枢回路总电阻(欧);

C_d— 电动机比例系数(伏/弧度/秒);

ω — 电动机机械角速度(弧度/秒);

U_d— 电枢电压(伏);

i_a—— 电枢电流(安)。

式中 J— 转动部分转动…

M_L— 电动机轴上负载转矩(牛顿·米);

M— 电动机电磁转矩(牛顿·米)。

$$U_d = R_a i_a + L_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + E_a = R_a i_a + L_a \frac{\cdots}{\mathrm{d}t} \cdots$$

根据刚体旋转定律得：

$$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + M_L$$

（2）M和i_a是中间变量。由于电动机转矩与电枢电流和气隙磁通的乘积成正比，磁通恒定，所以有 $M = C_m i_a$

联立求解，整理后得

C_m—电动机转矩系数(牛顿·米/安)。

$$T_aT_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=\frac{1}{C_d}U_d-\frac{T_aT_m}{J}\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}-\frac{T_m}{J}M_L$$

或

$$T_m=\frac{R_aJ}{C_dC_m}$$ —机电时间常数(秒)；

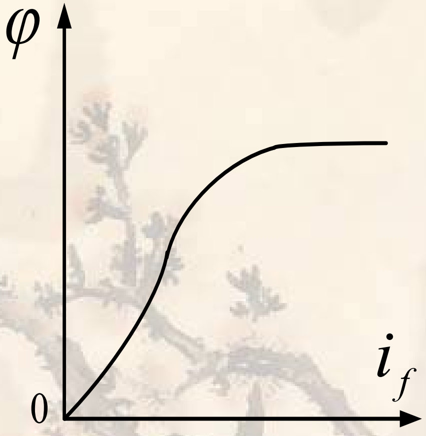
$$T_a=\frac{L_a}{R_a}$$ —电动机电枢回路时间常数 (秒)

若输出为电动机的转角θ，则有

$$T_aT_m\frac{\mathrm{d}^3\theta}{\mathrm{d}t^3}+T_m\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{C_d}U_d-\frac{T_aT_m}{J}\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}-\frac{T_m}{J}M_L$$

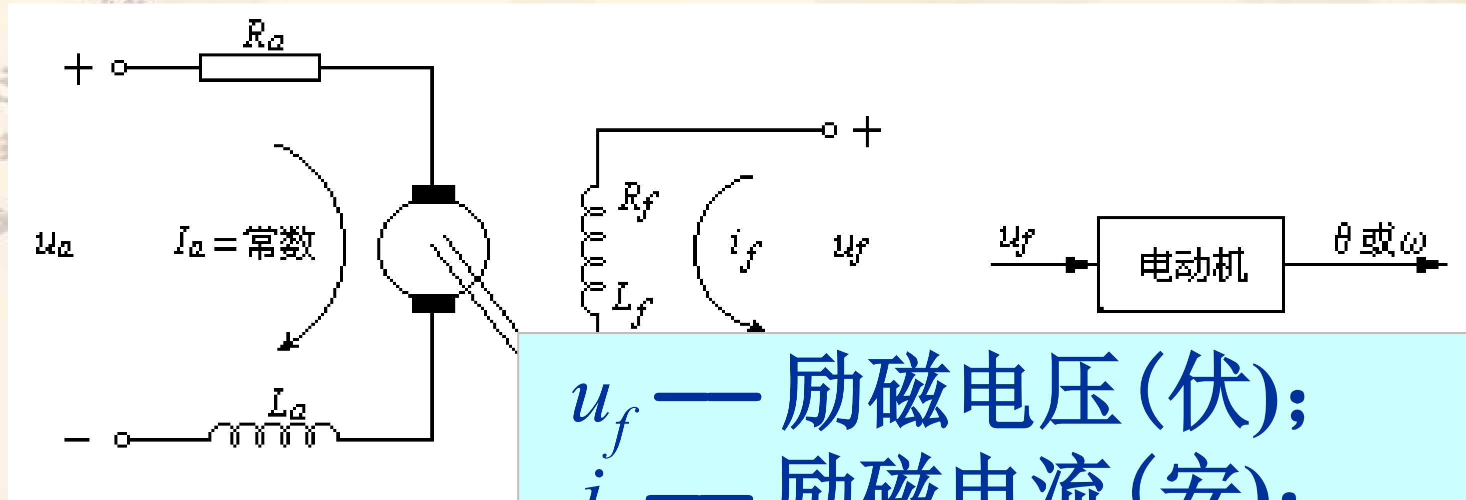
——三阶线性定常微分方程

当恒定功率负载或者电枢电流保持恒定时，假设电枢电流I_a为常数，气隙磁通$\varphi(t)=K_f i_f(t)$,其中i_f为励磁电流，K_f为常数，假设铁心不饱和，气隙磁通工作在线性段，如下图所示。



由于磁通$\varphi(t)$随时间改变，K_e和K_m不再为常数，电枢控制不再使用。在此种情况下，采用**磁场控制方式**控制电机转动。

例4 磁场控制的直流电动机



u_f —— 励磁电压(伏);
i_f —— 励磁电流(安);
R_f —— 励磁回路电阻(欧);
φ —— 励磁绕组磁链(韦)。

设电枢电流I_a=常数

气隙磁通 $\varphi(t)=K_f$

励磁回路电感L_f为常值。

（1）励磁回路方程式 $u_f = R_f i_f + \dfrac{d\varphi}{dt}$

T_f—励磁回路时间常数(秒)，$T_f = \frac{L_f}{R_f}$

T_m—惯性和阻尼摩擦时间常数(秒)，$T = \frac{J}{B}$

K_d—电动机传递系数

J— 转动部分转动惯量；

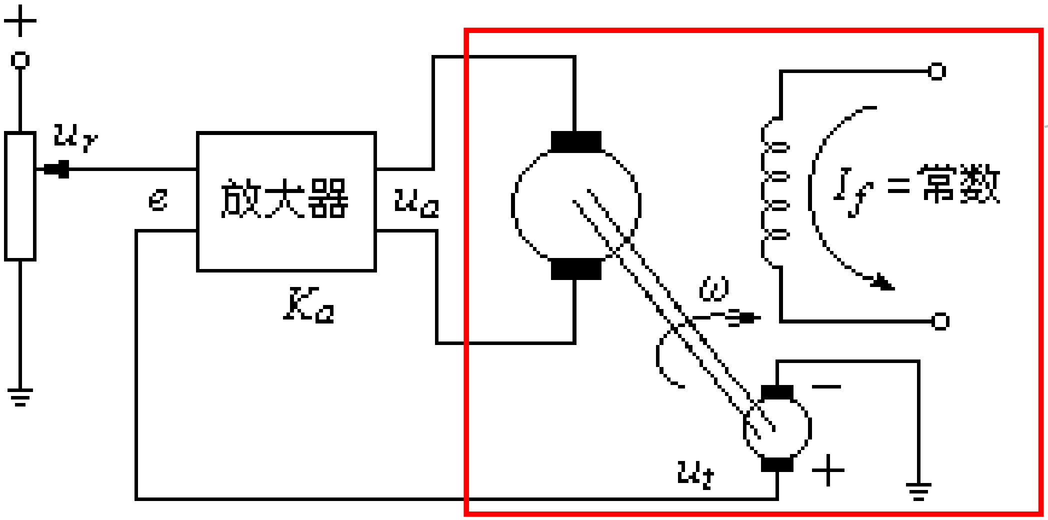
B — 阻尼摩擦系数。

∴ $\cdots + \frac{J}{B})\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega = \frac{K_i}{R_f B}u_f$

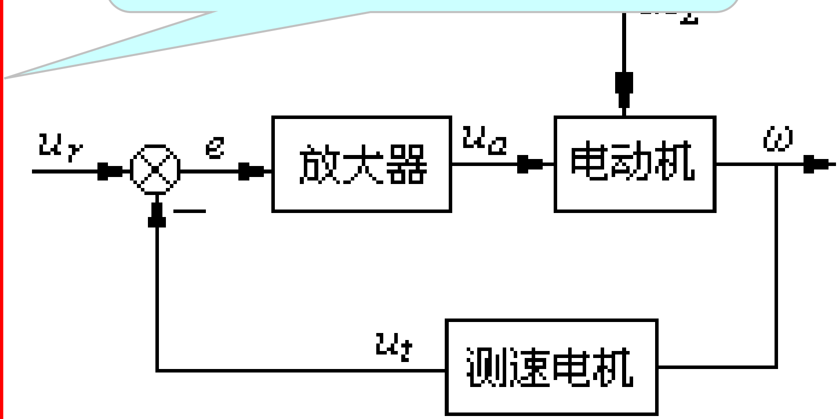
或

$$T_f T_m \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2} + (T_f + T_m)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega = K_d u_f$$

例5 电动机转速控制系统



闭环控制系统



已知控制系统其输出为角速度ω，参考输入为u_r扰动输入为负载转矩M_L。

（1）列各元件方程式，电动机方程式为：

$$T_aT_m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t} \quad \cdots \quad \frac{T_aT_m}{J}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \quad \cdots \quad \frac{T}{J}M_L$$

测速电机输出电压

反馈系数

反馈电压

$$u_a = K_a e \qquad u_t = K_t\omega \qquad e = u_r - u_t$$

（2）消去中间变量。从以上各式中消去中间变量u_a，e，u_t，最后得到系统的微分方程式

$$T_aT_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2} \cdots \frac{\mathrm{d}\omega}{\cdots} \cdots \frac{K_a}{K_e}u_r-\frac{T_aT_m}{J}\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}-\frac{T_m}{J}M_L$$

两式相比较

$$K=\frac{K_aK_t}{K_e}$$ 为各元件传递系数的乘积，称为系统的开环放大系数。

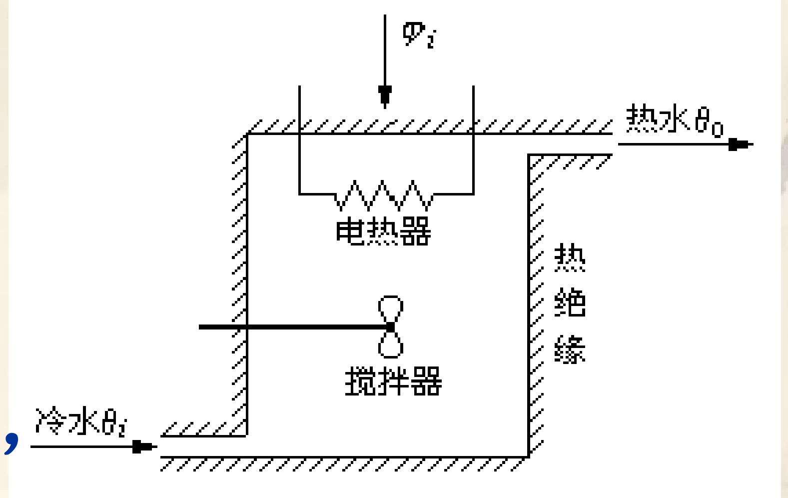
$$T_aT_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=\frac{1}{K_e}u_a-\frac{T_aT_m}{J}\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}-\frac{T_m}{J}M_L$$

可以看出，假如K足够大，由于应用了反馈，负载转矩对转速的影响大大降低(为原来的$1/(1+K)$),抗干扰能力加强，控制精度提高。

热力系统

凡是能将热量从一种物质传递到另一种物质的系统，称为热力系统。

右图所示的热力系统是一个通过液体来传递热量的系统。假设容器中的液体混合均匀，其各点温度是相同的。

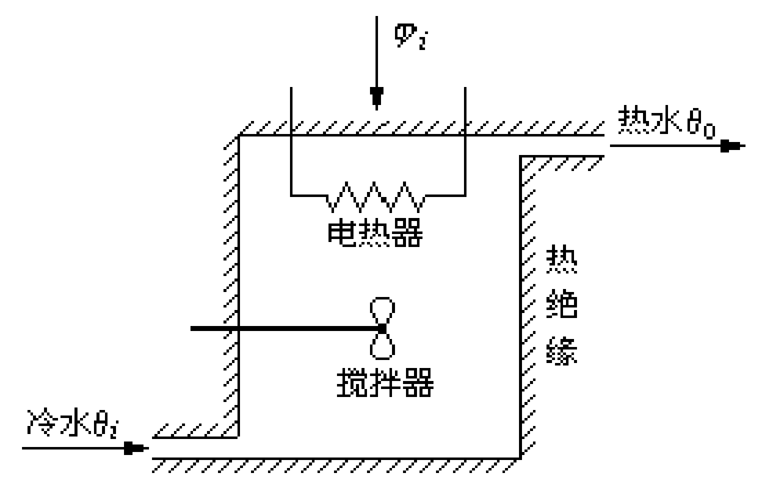


设φ_t为供给水箱中水的热流量，计算公式为

$$\phi_t = C\frac{\mathrm{d}\theta_o}{\mathrm{d}t}$$

其中C为水箱中水的热容量，θ_o为水箱中水的温度，t为时间。

设φ_o为出水带走的热流量，计算公式为 $\phi_o = QC_p\theta_o$



其中Q为出水质量流量，C_p为水的比热容，θ_o为水箱中水的温度。

设φ_s为通过热绝缘耗散的热流量，计算公式为 $\varphi_s = (\theta_o - \theta_i)/R$

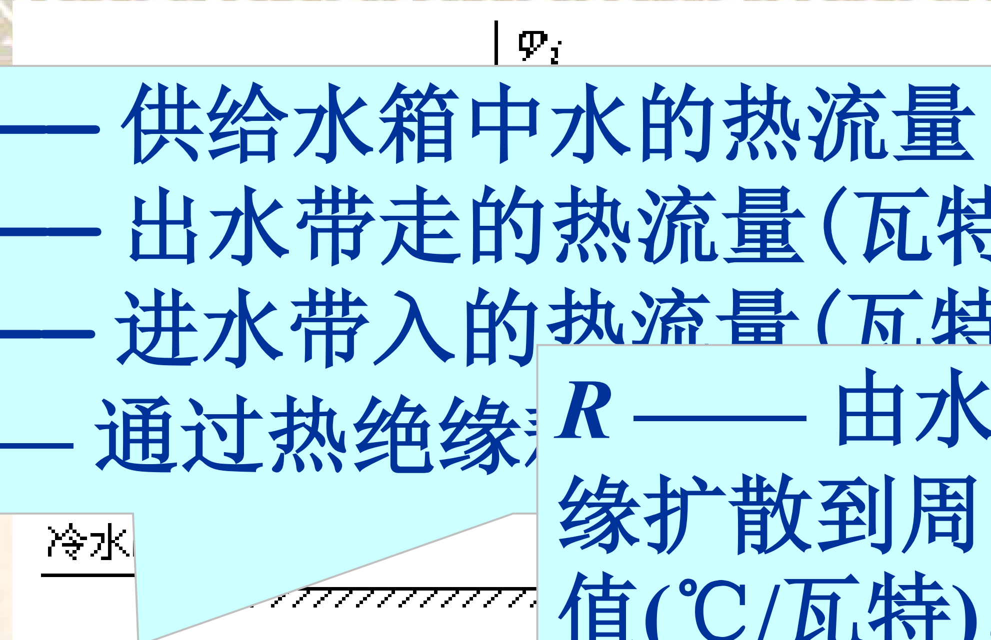
其中θ_o为出水的温度，θ_i为进水温度，R为由水箱内壁通过热绝缘扩散到周围环境的等效热值。

例6 热力系统

耳/℃）

输入量为 φ_i

输出量为θ_o



φ_t— 供给水箱中水的热流量(瓦

φ_o— 出水带走的热流量(瓦特)

φ_c— 进水带入的热流量(瓦特)

φ_s— 通过热绝缘

R —— 由水箱

缘扩散到周围

值(℃/瓦特)。

（1）按能量守恒定律可写出热流量平衡方程

$$\phi_i = \phi_t + \phi_o - \phi_c + \phi_s$$

（2）找出中间变量

瓦/秒)；

/千克·℃)。

$$\phi_o = QC_p\theta_o \qquad \varphi_s = \frac{\theta_o - \theta_i}{R}$$

（3）将以上各式代入热平衡方程

$$C\frac{\mathrm{d}\theta_o}{\mathrm{d}t}+(QC_p+\frac{1}{R})\theta_o=\phi_i+(QC_p+\frac{1}{R})\theta_i$$

或

$$T\frac{\mathrm{d}\theta_o}{\mathrm{d}t}+(QC_pR+1)\theta_o=R\phi_i+(QC_pR+1)\theta_i$$

——一阶非线性微分方程式

T=RC为热时间常数(秒)

当出 量Q一定 环境温度和进水温度θ_i也

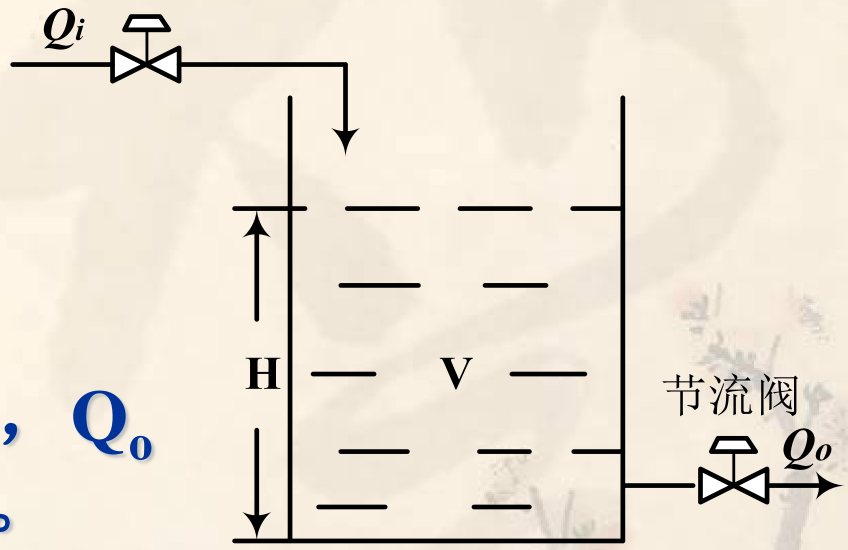
性定常微分方程

$$T\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+(QC_pR+1)\theta=R\varphi_i$$

流体过程

过程描述：

$$S\frac{dH}{dt}=Q_i-Q_o$$



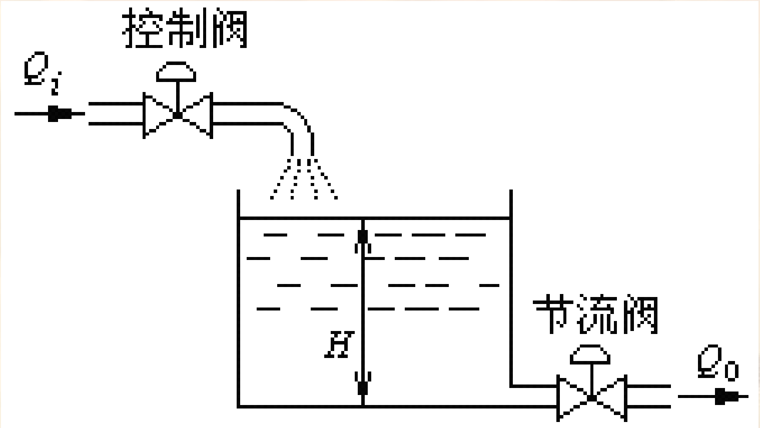
*H*为液面高度，Q_i为流入量，Q_o为流出量，S为液罐截面积。

- 特点：

  系统出口流量的推动力为液面高度*H*，输出流量随液位变化。

- 输出流量Q_o与液位*H*的关系式：$Q_o=\alpha\sqrt{H}$ α为节流阀的流量系数。

例7　流体过程



输入量Q_i（供水量）
输出量H（液面高度）
求输入与输出关系式

（1）设流体是不可压缩的。根据物质守恒定律，可得

$$S\mathrm{d}H=(Q_i-Q_o)\mathrm{d}t$$

（2）求出中间变量Q_o与其他变量关系

$$Q_o=\alpha\sqrt{H}$$

（3）消去中间变量Q_o，就得输入输出关系式

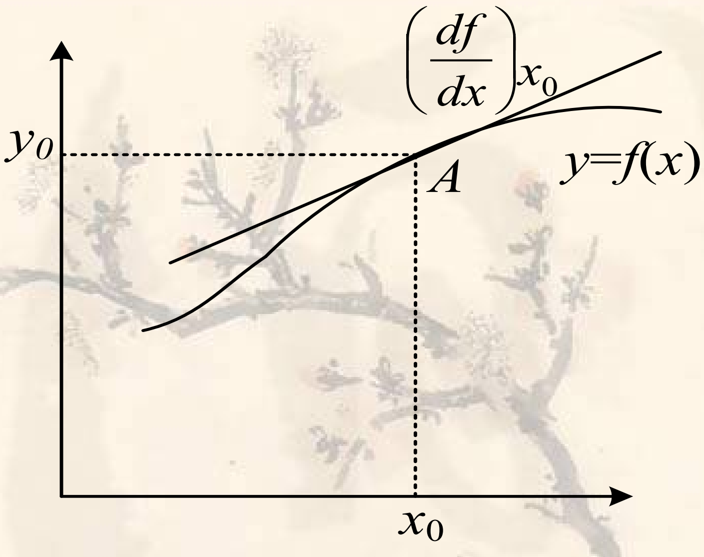
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}+\frac{\alpha}{S}\sqrt{H}=\frac{1}{S}Q_i$$

（一阶非线性微分方程式）

非线性微分方程的线性化

严格地说，实际物理元件或系统都是非线性的。在一定条件下，为了简化数学模型，可以忽略非线性的影响，将物理元件视为线性元件，这就是通常使用的线性化方法。

此外，还有一种线性化方法，称为切线法或小偏差法，这种线性化方法特别适合于具有连续变化的非线性特性函数，其实质是在一个很小的范围内，将非线性特性用一段直线来代替。



小偏差线性化示意图

设连续变化的非线性函数为$y=f(x)$，如左图所示。取某平衡状态A为工作点，对应有$y_0=f(x_0)$。

当 $x = x_0 + \Delta x$ 时，有

$y = y_0 + \Delta y$ ，设$y=f(x)$在（x_0,y_0）处连续可微。

在该点附近用泰勒级数展开为：

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$

当增量（x-x_0）很小时，略去其高次幂项，则有

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

令 $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$，$\Delta x = x - x_0$，$K = f'(x_0)$

则，线性化方程可简记为

$$\Delta y = K\Delta x$$

略去增量符号Δ，便得函数$y=f(x)$在工作点A附近的线性化方程为

$$y = Kx$$

式中，$K = f'(x_0)$ 是比例系数，它是函数$f(x)$在A点的切线斜率。

对于有两个自变量x_1, x_2的非线性函数$f(x_1, x_2)$，同样可以在某工作点(x_{10}, x_{20})附近进行线性化。

这种小偏差线性化对控制系统大多数工作状态是可行的。事实上，自动控制系统在正常情况下都处于一个稳定的工作状态，即平衡状态，这时被控量与期望值保持一致，控制系统也不进行控制动作。一旦被控量偏离期望值产生偏差时，控制系统便开始控制动作，以便减小这个偏差。因此控制系统中被控量的偏差一般不会很大，只是“小偏差”。

返回

§2-3拉普拉斯变换(Laplace transformation)

f **(*t*)的拉普拉斯变换被定义为：**

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

f **(*t*) =时间*t*的函数，并且当*t*<0时 *f* (*t*) = 0**

s **= 复变数;**

L **= 运算符号，放在某量之前，表示该量用拉普拉斯积分** $\int_0^{\infty} e^{-st} dt$ **进行变换**

***F*(*s*) 是 *f* (*t*)的拉普拉斯变换** $F(s) = L[f(t)]$

例8 指数函数(Exponential function)

假设函数：$f(t)=0$ **(t<0)**

$f(t)=Ae^{-\alpha t}$ **(t≥0)**

式中A和α是常数，求$f(t)$的拉普拉斯变换

解：

$$L[f(t)]=\int_0^\infty Ae^{-\alpha t}e^{-st}dt=A\int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t}dt=\frac{A}{s+\alpha}$$

例9 幂函数(Power function)

假设函数：$f(t)=t^{\mathrm{n}}\cdot 1(t)$

求$f(t)$的拉普拉斯变换

解：$L\left[f(t)\right]=\int_{0^-}^{\infty}t^{n}\cdot 1(t)\cdot e^{-st}dt=-\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty}t^{n}de^{-st}$

$$=-\frac{1}{s}t^{n}e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty}+\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}dt^{n}=\frac{n}{s}\int_{0^-}^{\infty}t^{n-1}e^{-st}dt$$

$\cdots$

$$=\frac{n!}{s}\int_{0^-}^{\infty}1\cdot e^{-st}dt=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

例10 阶跃函数(Step function)

假设阶跃函数：$f(t)=0$ **(t<0)**

$f(t)=A=$常数 **(t>0)**

求$f(t)$的拉普拉斯变换

解：此阶跃函数在s=0处是不确定的，因此求

$$\int_{0_-}^{0_+} Ae^{-st}dt=0$$

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty} Ae^{-st}dt=\frac{A}{s}$$

定义：高度为1的阶跃函数叫做单位阶跃函数。

单位阶跃函数的拉普拉斯变换是 $L[1(t)]=\dfrac{1}{s}$

例11 斜坡函数(Ramp function)

斜坡函数：$f(t)=0 \quad$ **(*t*<0)**

$$f(t)=At \quad (t\geq 0)$$

式中***A***是一个常数，求***f*** **(*t*)**的拉普拉斯变换

解：

$$L[f(t)]=A\int_0^\infty te^{-st}dt$$

$$=At\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{Ae^{-st}}{-s}dt$$

$$=\frac{A}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$=\frac{A}{s^2}$$

例12 正弦函数(Sine function)

正弦函数：$f(t)=0$ **(t<0)**

$f(t)=A\sin\omega t$ **($t\geq 0$)**

式中A和ω是一个常数，求$f(t)$的拉普拉斯变换

解：$L[f(t)]=A\int_0^{\infty}(\sin\omega t)e^{-st}dt$

因为

$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$

$e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t$

$\Rightarrow \sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$

所以 $L[f(t)]=\frac{A}{2j}\int_0^{\infty}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})e^{-st}dt$

$$=\frac{A}{2j}\frac{1}{s-j\omega}-\frac{A}{2j}\frac{1}{s+j\omega}$$

$$=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

拉普拉斯变换定理

平移函数：求平移函数$f(t-\alpha)$的拉普拉斯变换。假设当t<0时$f(t)$=0，或当t<α时$f(t-\alpha)=0$。函数$f(t)$和$f(t-\alpha)$的曲线如下图所示：

方程说明时间函数$f(t)$通过α的平移相当于拉普拉斯变换$F(s)$与$e^{-\alpha s}$相乘。

当0

$F(s$ ... $e^{-st}dt$

式中 $t-\alpha=\tau$

$$L[f(t-\alpha)]=\int_0^\infty f(t-\alpha)e^{-st}dt=e^{-\alpha s}F(s)$$

例13 脉动函数 (Fluctuation function)

脉动函数： $f(t)=A=$ 常数 $(0<t<t_0)$

$$f(t)=0 \qquad (t<0, t_0<t)$$

求$f(t)$的拉普拉斯变换

解：脉动函数$f(t)$可以看作是一个从 $t=0$ 开始的高度为A的阶跃函数，再叠加一个从 $t=t_0$ 开始的高度为A的负的阶跃函数，即

$$f(t)=A1(t)-A1(t-t_0)$$

$$L[f(t)]=L[A1(t)]-L[A1(t-t_0)]=\frac{A}{s}-\frac{A}{s}e^{-t_0 s}$$

$$=\frac{A}{s}(1-e^{-t_0 s})$$

例14 脉冲函数 (Pulse function)

脉冲函数：$f(t)=\lim\limits_{t_0\to 0}\dfrac{A}{t_0}\qquad (0<t<t_0)$

$f(t)=0\qquad (t<0,\text{或}t>t_0)$

求 $f(t)$ 的拉普拉斯变换

解：

$$L[f(t)]=\lim_{t_0\to 0}\frac{A}{t_0 s}(1-e^{-t_0 s})=\lim_{t_0\to 0}\frac{\dfrac{d}{dt_0}\left[A(1-e^{-t_0 s})\right]}{\dfrac{d}{dt_0}(t_0 s)}=\frac{As}{s}=A$$

脉冲函数的拉普拉斯变换等于在那个脉冲下的面积

定义：面积等于1的脉冲函数叫做单位脉冲函数。在 $t=t_0$ 处的单位脉冲函数通常用 $\delta(t-t_0)$ 来表示，并满足下列条件：

$\delta(t-t_0)=0\qquad (t\neq t_0)$

$\delta(t-t_0)=\infty\qquad (t=t_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

微分定理(Differentiation theorem)

函数 $f(t)$的导数的拉普拉斯变换为

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

式中 $f(0)$ 是 $f(t)$ 在$t=0$处的初始值。

注意：如果$f(t)$在$t=0$处 $f(0+)\neq f(0-)$ ，则需要对上述方程进行修正，结果为：

$$L_{+}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0+)\qquad L_{-}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0-)$$

证明：$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty-\int_0^\infty\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$F(s)=\frac{f(0)}{s}+\frac{1}{s}L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\Rightarrow L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

例15 余弦函数 (Cosine function)

余弦函数：$g(t)=0$ **(t<0)**

$$g(t)=A\cos\omega t \quad (t\geq 0)$$

式中A和ω是一个常数，求$g(t)$的拉普拉斯变换

解：假定正弦函数：$f(t)=0$ **(t<0)**

$$f(t)=\sin\omega t \quad (t\geq 0)$$

$$F(s)=L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

余弦函数拉普拉斯变换为：

$$L[A\cos\omega t]=L\left[\frac{d}{dt}\frac{A}{\omega}\sin\omega t\right]=\frac{A}{\omega}[sF(s)-f(0)]$$

$$=\frac{A}{\omega}\left(\frac{s\omega}{s^2+\omega^2}-0\right)=\frac{As}{s^2+\omega^2}$$

终值定理(Final-value theorem)

假设$f(t)$和$df(t)/dt$可以进行拉普拉斯变换，$\lim_{t\to\infty} f(t)$

存在，并且除在原点外唯一的极点外，$sF(s)$不

注意：当$f(t)$是正弦函数$\sin\omega t$时，$sF(s)$在$s=\pm j\omega$处有极点，并且$\lim_{t\to\infty} f(t)$不存在，因此，对于这样的函数此定理无效。如果当t趋近于无穷大时，$f(t)$也趋近于无穷大，则$\lim_{t\to\infty} f(t)$不存在，终值定理同样不适用。

$$=\lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

初值定理(Initial-value theorem)

如果$f(t)$和$df(t)/dt$不但可以拉普拉斯变换，而且

$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$存在，则 $f(0+) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

证明：运用$df(t)/dt$ 的 L_+变换的方程式，即

$$L_+\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0+)$$

对于$0+ \le t \le \infty$ 的时间间隔，当s趋近于无穷大时，e^{-st} 趋近于零。因此

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0+}^{\infty}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]e^{-st}dt = 0$$

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0+) = 0$$

积分定理(Integral theorem)

$f(t)$的积分的拉普拉斯变换为

$$L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0)}{s}$$

式中 $f^{-1}(0)=\int f(t)dt$ 在 $t=0$ 处的值。

注意：如果$f(t)$在$t=0$处包含一个脉冲函数，那么 $f^{-1}(0+)\neq f^{-1}(0-)$，则需要对上述方程进行修正。

$$L_{+}\left[\int f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0+)}{s} \qquad L_{-}\left[\int f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0-)}{s}$$

证明：

$$L\left[\int f(t)dt\right]=\int_0^\infty\left[\int f(t)dt\right]e^{-st}dt=\left[\int f(t)dt\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty-\int_0^\infty f(t)dt\frac{e^{-st}}{-s}$$

$$=\frac{1}{s}\int f(t)dt\Big|_{t=0}+\frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\frac{f^{-1}(0)}{s}+\frac{F(s)}{s}$$

拉普拉斯反变换 (Inverse Laplace transform)

由复变数表达式推导成时间表达式的数学运算叫做反变换，拉普拉斯反变换的符号是 L^{-1} ,因而

$$\mathrm{L}^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)$$

拉氏反变换的求法

- 部分分式展开法
- 只包含不相同的极点的***F*(*s*)**的部分分式展开式
- 包含多重极点的***F*(*s*)**的部分分式展开式

部分分式展开法

如果$f(t)$的拉普拉斯变换$F(s)$已分解成为下列分量：

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s)$$

假定$F_1(s)$, $F_2(s)$, · · ·， $F_n(s)$的拉氏反变换很容易地求出，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^{-1}[F(s)]&=\mathrm{L}^{-1}[F_1(s)]+\mathrm{L}^{-1}[F_2(s)]+\cdots+\mathrm{L}^{-1}[F_n(s)]\\&=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t)\end{aligned}$$

式中$f_1(t)$, $f_2(t)$, · · ·, $f_n(t)$分别为$F_1(s)$, $F_2(s)$, · · ·, $F_n(s)$的拉式反变换。

对于控制理论的问题，$F(s)$常常是如下形式：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

式中$A(s)$, $B(s)$是s的多项式，而且$B(s)$的阶次不高于$A(s)$的阶次。

在应用部分分式展开法求拉氏反变换时，必须预先知道多项式$A(s)$的根。

这种方法的优点是由于$F(s)$被展开成了部分分式的形式，而使$F(s)$的每一项都是s的简单函数，因此，如果我们记住了几种简单函数的拉氏变换，就不需要查拉氏变换表。

只包含不相同的极点的*F*(*s*)的部分分式展开式

在这种情况下，*F*(*s*)总是能展开成下面的简单部分分式的和：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{\quad}{s\ \cdots}$$

这里可以看出，所有被展开项除a_k项外全都没有了

式中a_k是常数，a_k叫做$s=$ 极点处的留数。a_k的值可用$(s+p_k)$乘以上方程的 边，并令$s=-p_k$的方法求出。

$$\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_k)\right]_{s=-p_k}=\left[\frac{a_1}{s+p_1}(s+p_k)+\frac{a_2}{s+p_2}(s+p_k)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{a_k}{s+p_k}(s+p_k)+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}(s+p_n)\right]_{s=-p_k}=a_k$$

于是，留数a_k由下式求出。

$$a_k = \left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_k)\right]_{s=-p_k}$$

必须注意，因为$f(t)$是一个时间的实函数，如果p_1和p_2是共轭复数，那么留数a_1和a_2也是共轭复数，这样就只需对共轭的a_1和a_2求出任何一个值，另一个自然也就知道了

因为 $$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

所以 $$f(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t} \quad (t \geq 0)$$

例16 求下式的拉氏反变换

$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

解： $F(s)$的部分分式展开式是

$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{a_1}{(s+1)}+\frac{a_2}{(s+2)}$$

求出留数a_1，a_2

$$a_1=\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+1)\right]_{s=-1}=2$$

$$a_2=\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+2)\right]_{s=-2}=-1$$

于是：

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}[F(s)]$$

$$= \mathrm{L}^{-1}[\frac{2}{s+1}] + \mathrm{L}^{-1}[\frac{-1}{s+2}]$$

$$= 2e^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \qquad (t \geq 0)$$

例17 求下式的拉氏反变换

$$G(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}$$

解：用分母除分子得到：

$$G(s)=s+2+\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

等式右侧第三项同例题1中的解。单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的拉式变换是1，而 $d\delta(t)/dt$ 的拉式变换是s，于是得到传递函数的拉式反变换为：

$$g(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)+2\delta(t)+2e^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \qquad (t\geq 0\text{-})$$

包含多重极点的*F*(*s*)部分分式展开式

例18　求下列函数的拉氏反变换

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

解：　将上式展成部分分式得

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_3}{(s+1)^3}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_1}{s+1}$$

式中 b_3，b_2，b_1 确定如下：

$$b_3=\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+1)^3\right]_{s=-1}=(s^2+2s+3)_{s=-1}=2$$

$$b_2 = \left\{ \frac{d}{ds}\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+1)^3 \right] \right\}_{s=-1} = \left[\frac{d}{ds}\left(s^2+2s+3\right) \right]_{s=-1}$$

$$= (2s+2)_{s=-1} = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{(3-1)!}\left\{ \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+1)^3 \right] \right\}_{s=-1} = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left(s^2+2s+3\right) \right]_{s=-1}$$

$$= \frac{1}{2}(2) = 1$$

于是得到： $f(t) = \mathrm{L}^{-1}[F(s)]$

$$= \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right] + \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$$= (t^2+1)e^{-t} \qquad (t \geq 0)$$

返回

§ 2-4 控制系统的传递函数描述

(Transfer Function description)

一、传递函数的概念

***RC*电路如下：根据基尔霍夫定律，列写微分方程**

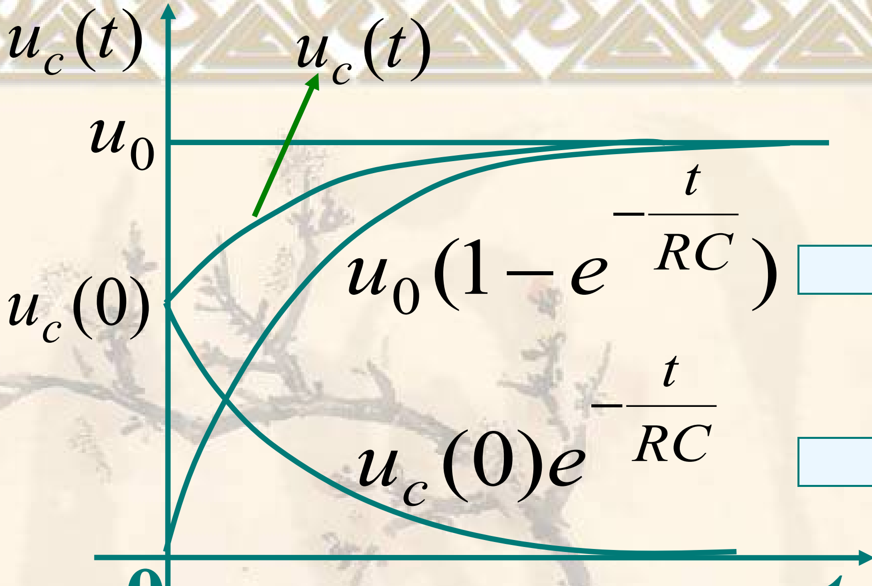
$$\begin{cases} Ri(t)+u_c(t)=u_r(t) \\ u_c(t)=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}+u_c(t)=u_r(t)$$

拉氏变换：$RCsU_c(s)-RCu_c(0)+U_c(s)=U_r(s)$

$$U_c(s)=\frac{1}{RCs+1}U_r(s)+\frac{RC}{RCs+1}u_c(0)$$

当输入为阶跃电压 $u_r(t)=u_0\cdot 1(t)$ 时，对 $U_c(s)$ 求拉氏反变换：

$$u_c(t)=u_0(1-e^{-\frac{t}{RC}})+u_c(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$



零状态响应，由输入电压决定

零输入响应，由初始电压决定

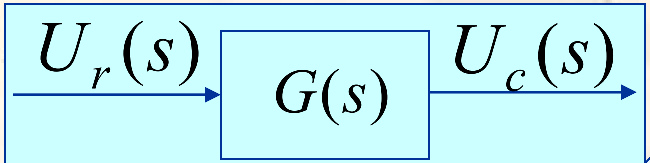
RC

传递函数$G(s)$确立了电路输入电压与输出电压之间的关系

若u

$RCs+1$

或 $G(s)=\dfrac{U_c(s)}{U_r(s)}=\dfrac{1}{RCs+1}=\dfrac{1}{Ts+1}$ 式中 $T=RC$



传递函数

- 方框内为传递函数
- 进入和离开方框的箭头分别表示为输入信号和输出信号

线性(或线性化)定常系统在零初始条件下，输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比称为传递函数(Transfer function)。

线性定常系统由下述n阶微分方程描述:

$$a_n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}c(t)+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}c(t)+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t)+a_0c(t)=b_m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}r(t)+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}r(t)+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+b_0r(t)$$

令$C(s)=L[c(t)]$，$R(s)=L[r(t)]$，在初始条件为零时，进行拉氏变换，得到关于s的代数方程

$$[a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0]C(s)=[b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0]R(s)$$

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}=\frac{M(s)}{D(s)}$$

$D(s)$为传递函数的分母多项式。

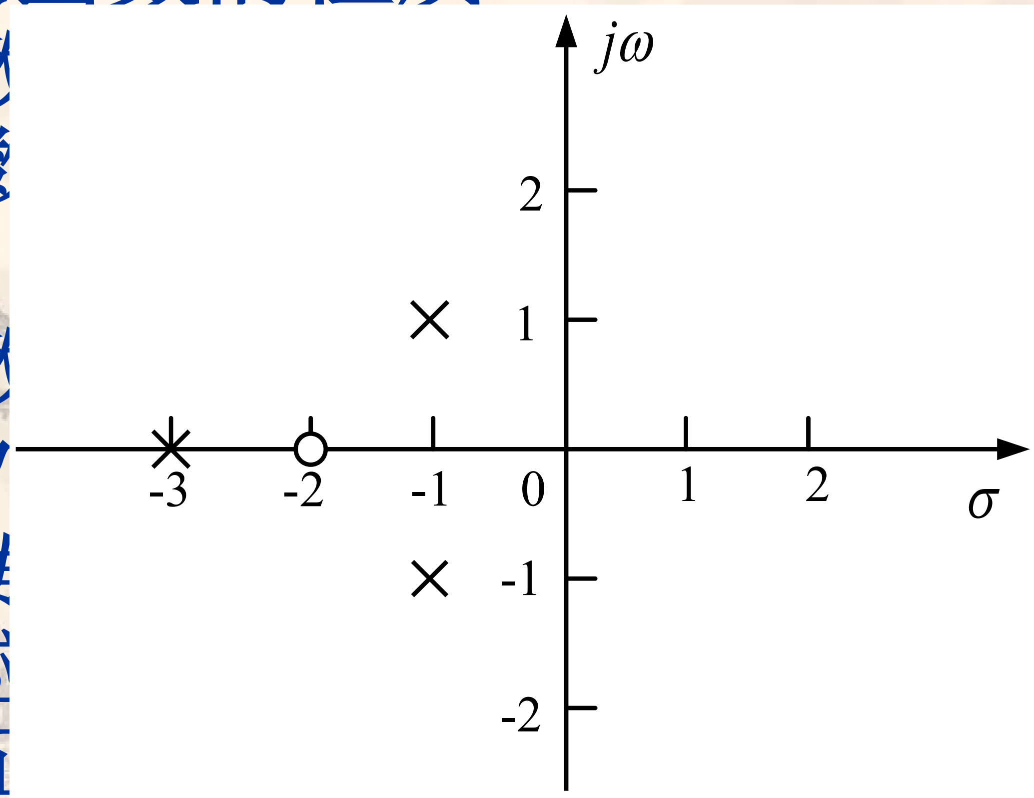
$c(t)$是系统输出量；$r(t)$是系统输入量

a_0，a_1，…，a_n；b_0，b_1，…，b_m

是与系统结构参数有关的常系数

二、 传递函数的性质

1.传递函数数，分
子的阶数数n，
即$m \le n$，



2.传递函数构和参
数，与外

3.一定的传分布图
与之对应点分布
图也表征

4.令$s=0$，则$G(0)=\frac{b_0}{a_0}$称为传递系数，或静态放大系数。

例如：$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

5.一个传递函数只能表示一个输入对一个输出的函数关系。

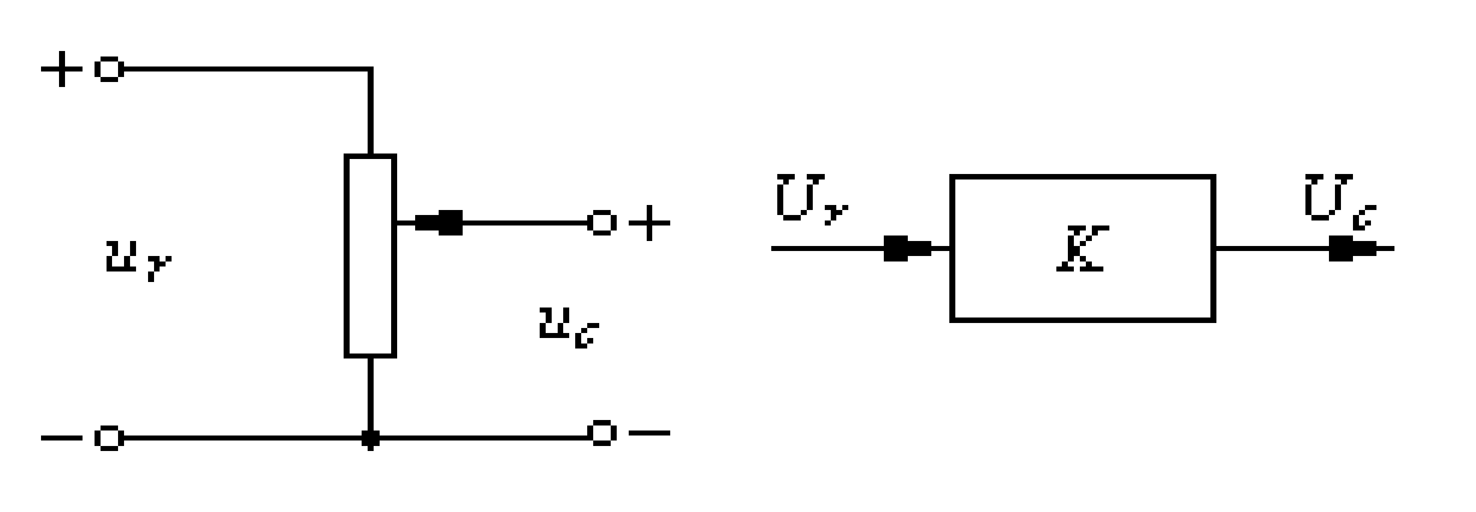
$-z_1,\cdots,-z_m$——传递函数的零点，m个

$-p_1,\cdots,-p_n$——传递函数的极点，n个

三、典型环节及其传递函数

(一) 比例环节 (Proportional factor)

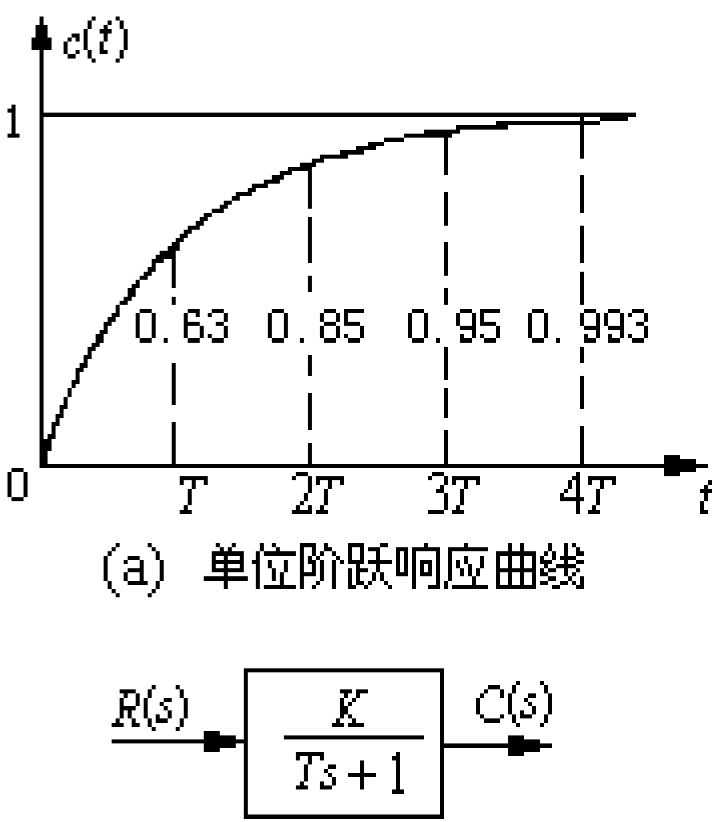
$$G(s)= K$$



比例环节：(a) (b)

表明输出量与输入量成正比。无弹性变形的杠杆、不计非线性和惯性的电子放大器、测速电机都可认为是比例环节。

（二）惯性环节 (First-Order factor)



(a) 单位阶跃响应曲线

(b) 方框图

$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$

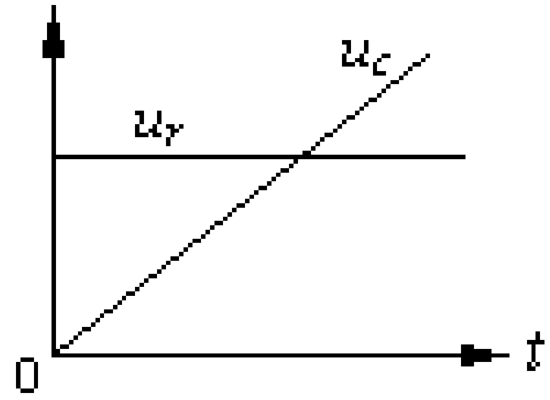
式中 K——环节的比例系数

T——环节的时间常数

当环节的输入量为单位阶跃函数时，环节的输出量将按指数曲线上升，具有惯性，R-C回路、R-L回路等都可看做惯性环节。

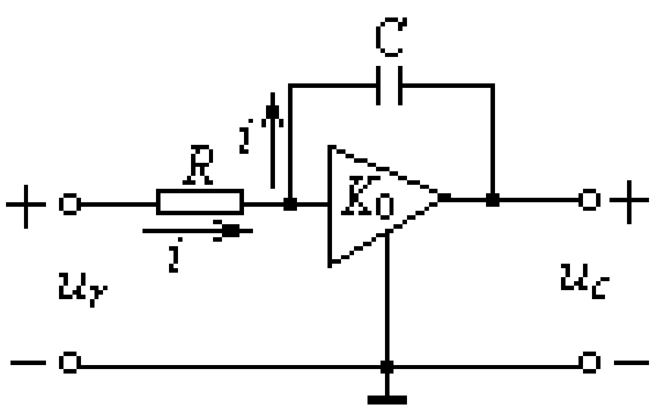
（三）积分环节 (Integral factor)

$$G(s)=\frac{1}{Ts}$$



(a) 阶跃响应曲线

当积分环节的输入信号为单位阶跃函数时，则输出为t/T，它随着时间直线增长。如图(a)所示：



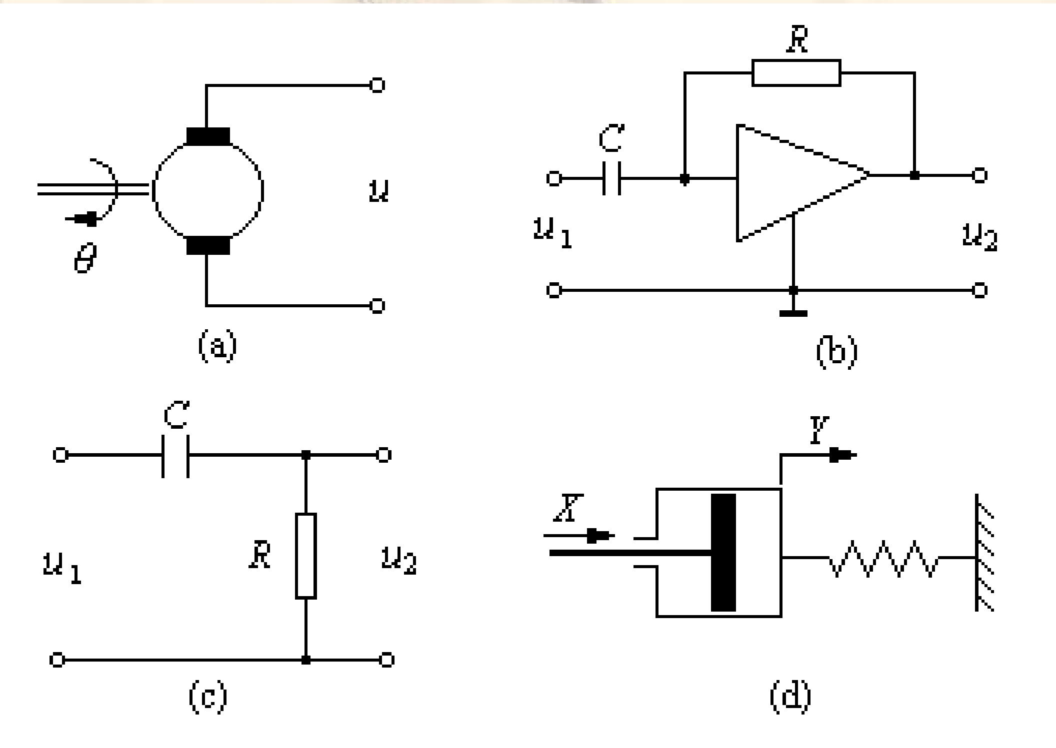
(b) 线路图

图(b)为控制系统中经常用到的积分控制器。积分时间常数为RC

（四）微分环节 (Derivative factor)

$$G(s) = Ts$$ （理想微分环节 ）

$$G(s) = \frac{T_1 s}{T_2 s + 1}$$ （实际微分环节）



(a)测速电机与(b)微分运算放大器为理想微分环节;

(c)和(d)实际微分环节

（五）振荡环节 (Quadratic factor)

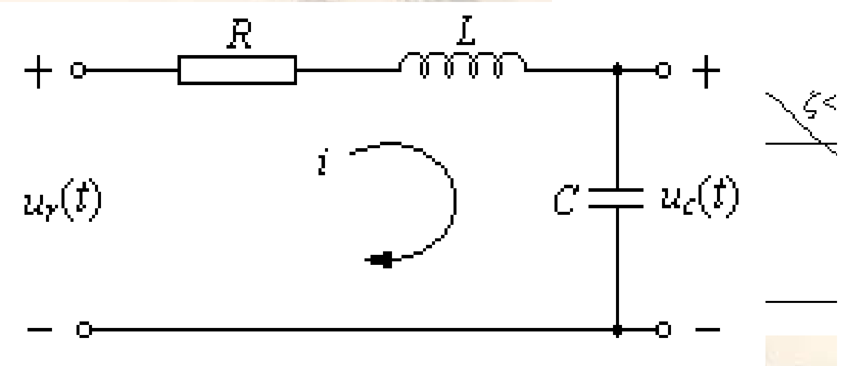
单位阶跃函数作用下的传递函数:

$$G(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\omega_n\xi s+\omega_n^{\ 2}}$$

式中： ω_n—无阻尼自然振荡频率；

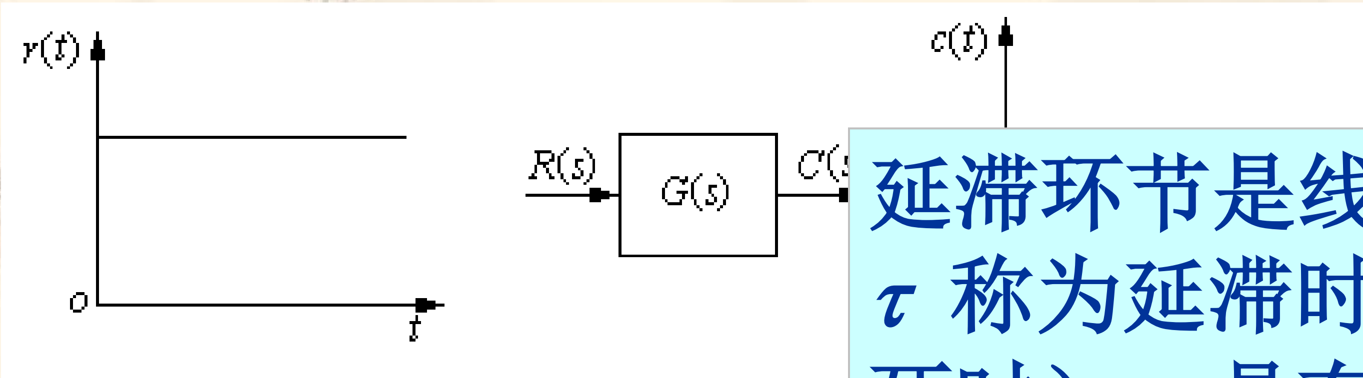
ζ——阻尼比，$0<\zeta<1$。

单位阶跃函数作用下的响应曲线:



振荡环节实际上是一个二阶系统。如左图所示的*R-L-C*电路，从传递函数的特性来看就是振荡环节。

（六）延滞环节 (Delay factor) $G(s)=e^{-\tau s}$



延滞环节是线性环节，τ 称为延滞时间（又称死时）。具有延滞环节的系统叫做延滞系统。

延滞环节的传递函数:

$$C(s)=\int_0^{\infty} r(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0 r(\xi)e^{-s(\xi+\tau)}\mathrm{d}\xi$$

$$=e^{-\tau s}R(s)$$

式中$\xi= t-\tau$，所以延滞环节的传递函数为:

$G(s)=e^{-\tau s}$ 系统具有延滞环节对系统的稳定性不利，延滞越大，影响越大。

返回

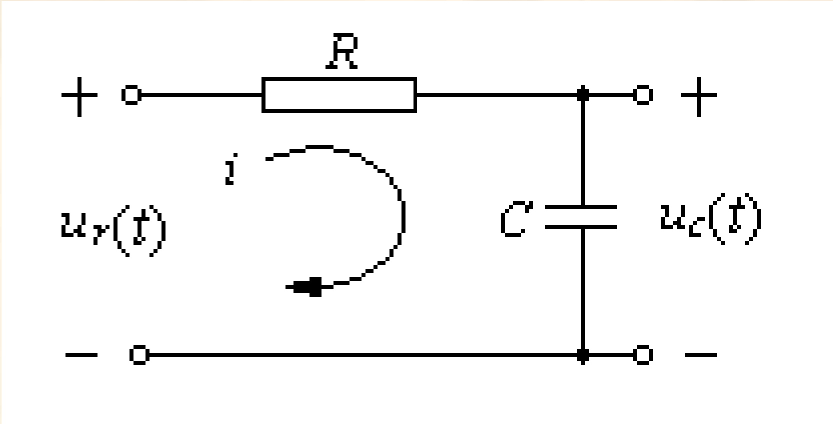
§2-5 控制系统结构图

(Block Diagram Chart and Signal-flow graph)

一、控制系统的结构图

(一）结构图的概念

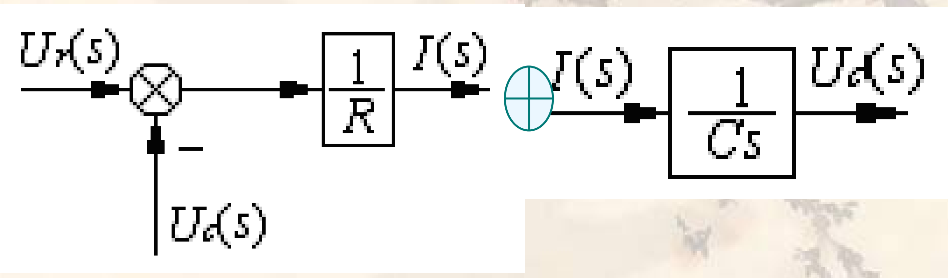
***RC*网络的微分方程式为**

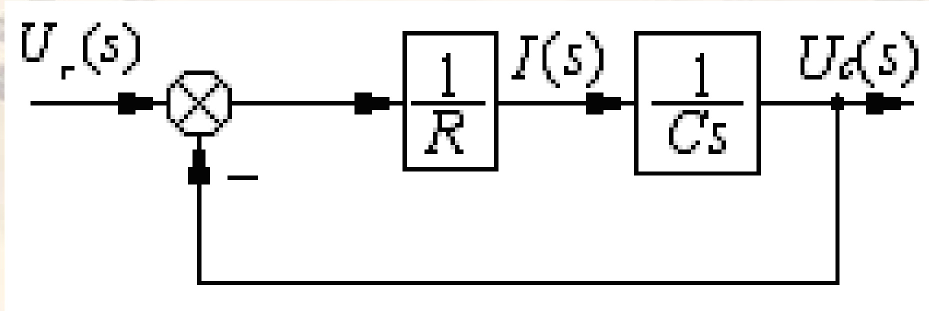


$$\begin{cases} u_r - u_c = Ri \\ u_c = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\mathrm{d}t \end{cases}$$

拉氏变换

$$\begin{cases} U_r(s) - U_c(s) = RI(s) \Rightarrow \dfrac{1}{R}[U_r(s) - U_c(s)] = I(s) \\ U_c(s) = \dfrac{1}{Cs} I(s) \end{cases}$$





（二） 系统结构图的建立步骤

（1）分析系统各环节物理规律，列写微分方程

（2）对每个环节的微分方程进行拉普拉斯变换，得到对应的传递函数

（3）按照信号传递方向，把各个环节的方框图连接起来，得到整个系统的动态结构图。一般输入量放在方框的左边，输出框放在方框右边

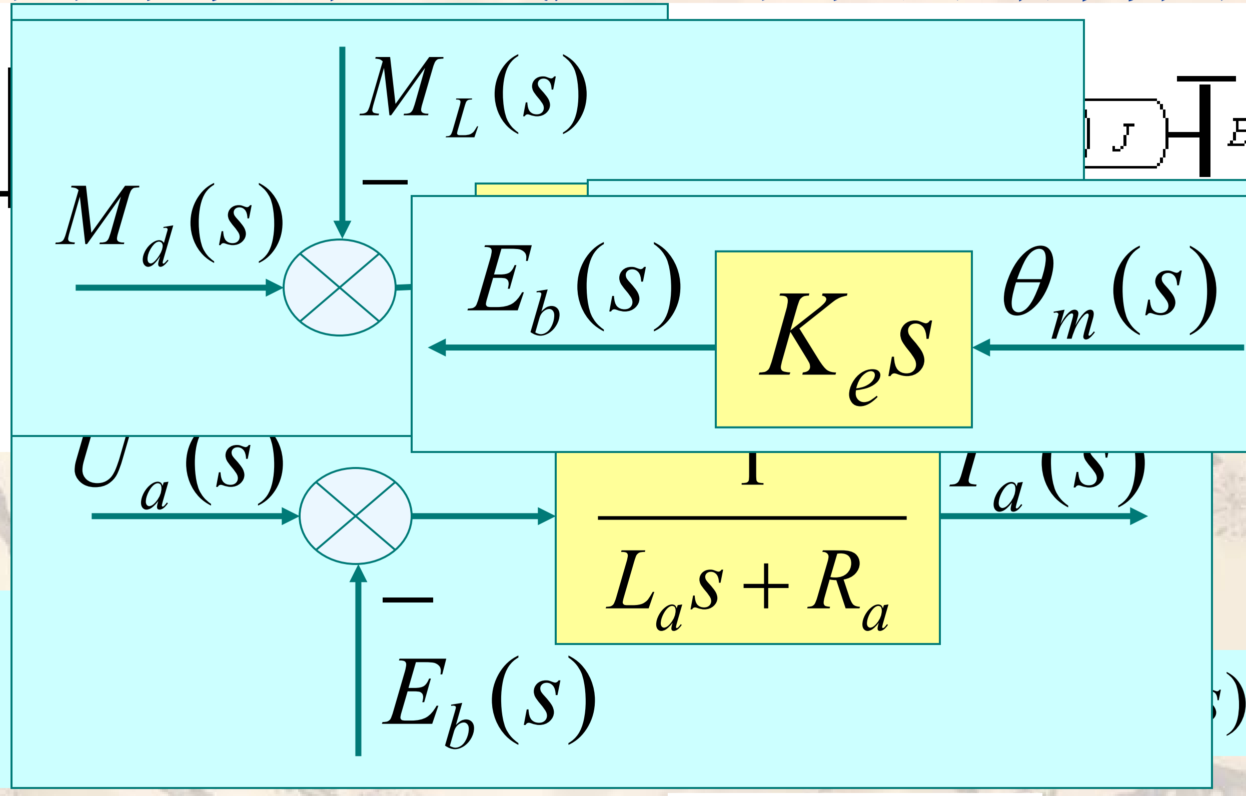
例19 位置随动系统如下，试建立系统的结构图

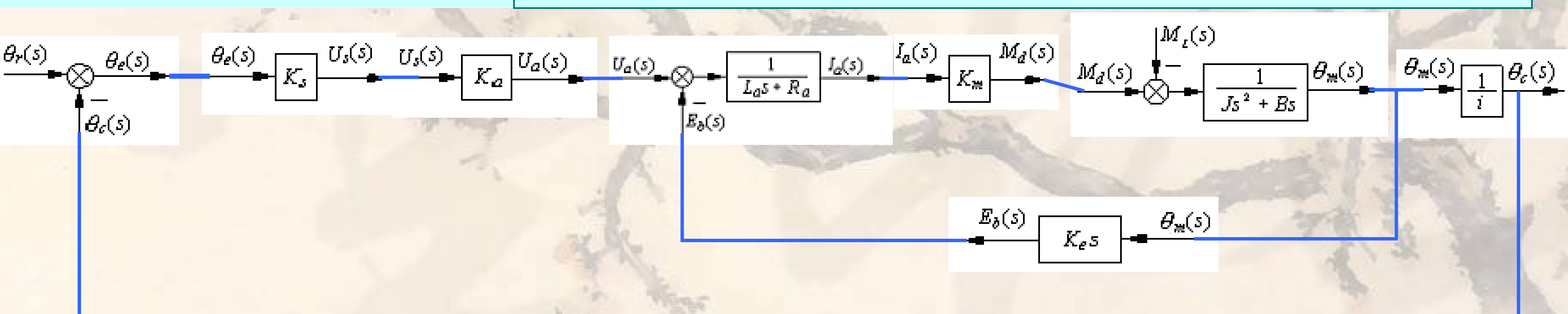
$$\theta_e(s)=\theta_r(s)-\theta_c(s)$$

$$U_s(s)=K_s\theta_e(s)$$

$$U_a(s)=K_aU_s(s)$$

$$I_a(s)=\frac{U_a(s)-E_b(s)}{L_as+R_a}$$



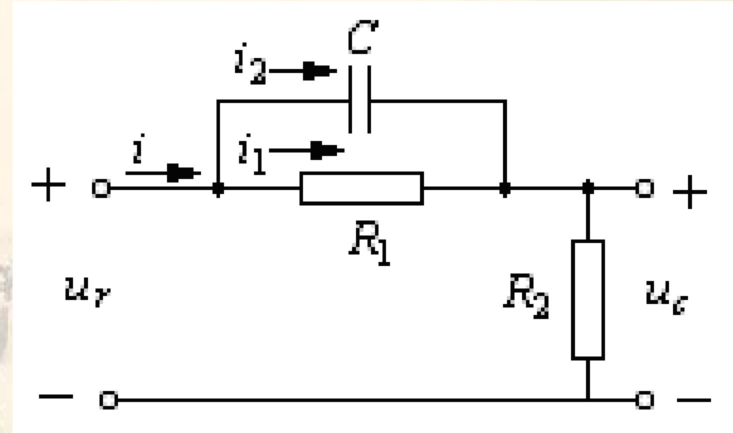


例20 试绘制无源网络的结构图

$(u_r - u_c)$ 为R_1与C并联支路的端电压

$i_1+i_2=i$

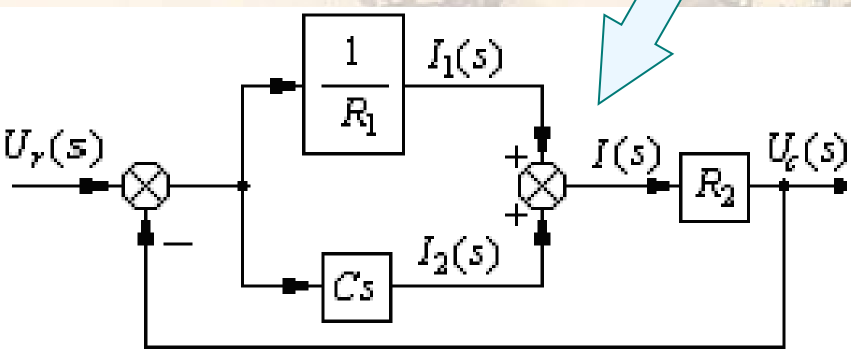
$R_2 i = u_c$

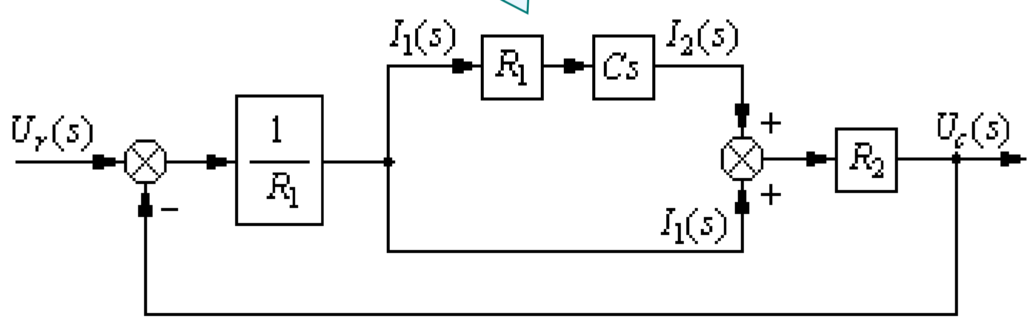


u_r为网络输入

u_c为网络输出

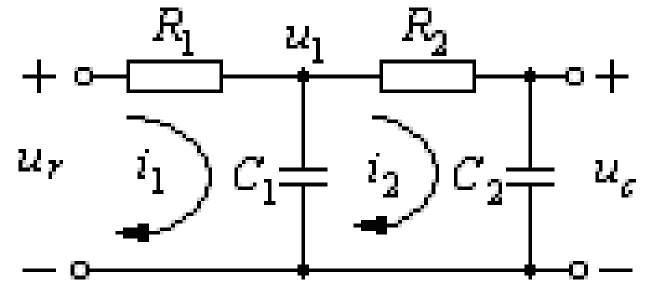
直接建立结构图





注意：一个系统或一个环节，其结构图不是唯一的

例21 绘制两级*RC*网络的结构图

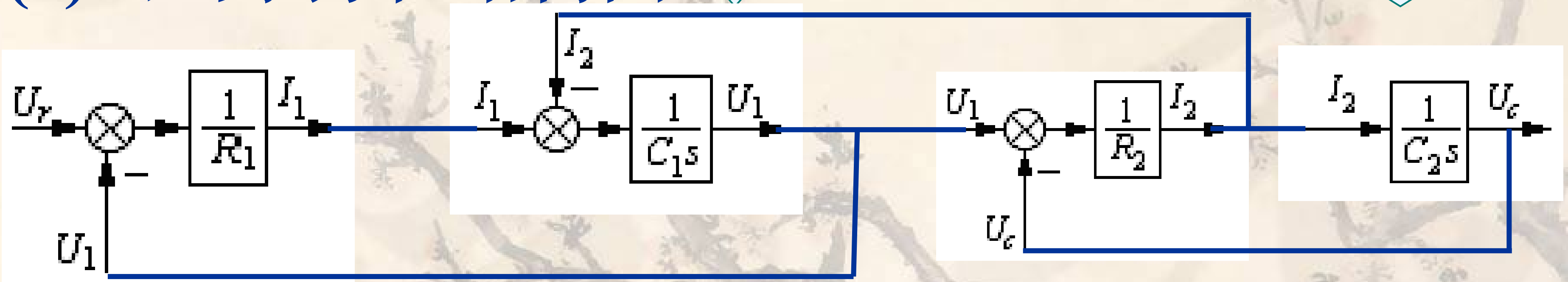


(1)列写原始方程：

$$U_r(s)-U_1(s)=R_1I_1(s) \qquad U_1(s)-U_c(s)=R_2I_2(s)$$

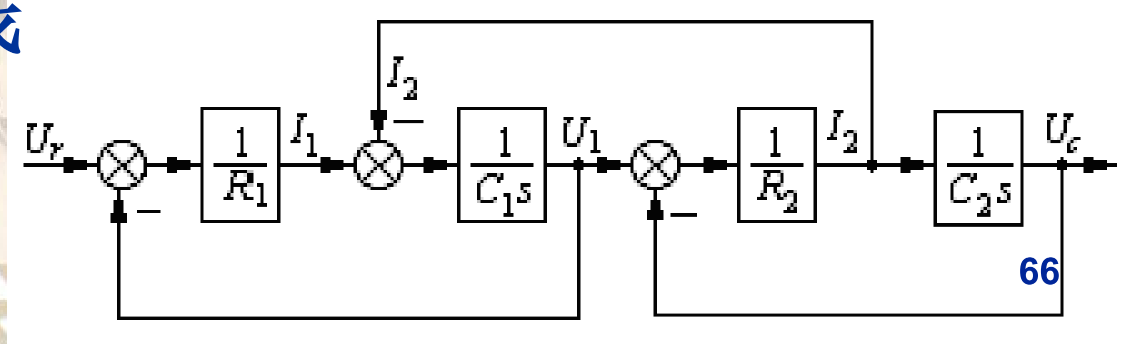
$$U_1(s)=\frac{1}{C_1s}\left[I_1(s)-I_2(s)\right] \qquad U_c(s)=\frac{1}{C_2s}I_2(s)$$

(2)画出子方程结构图：



（3）连接相关信号线

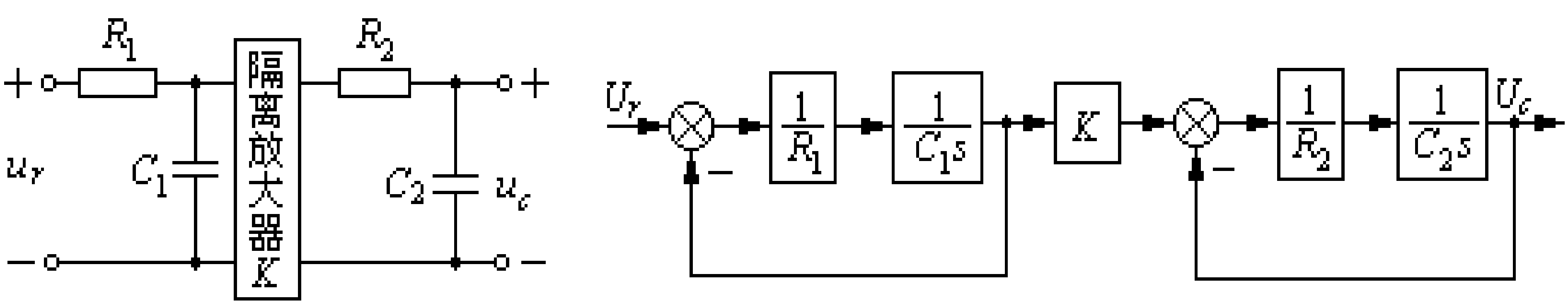
得到最终结构图：



负载效应(Loading effect)

后一级网络作为前一级网络的负载，对前级网络的输出电压u_1产生影响。

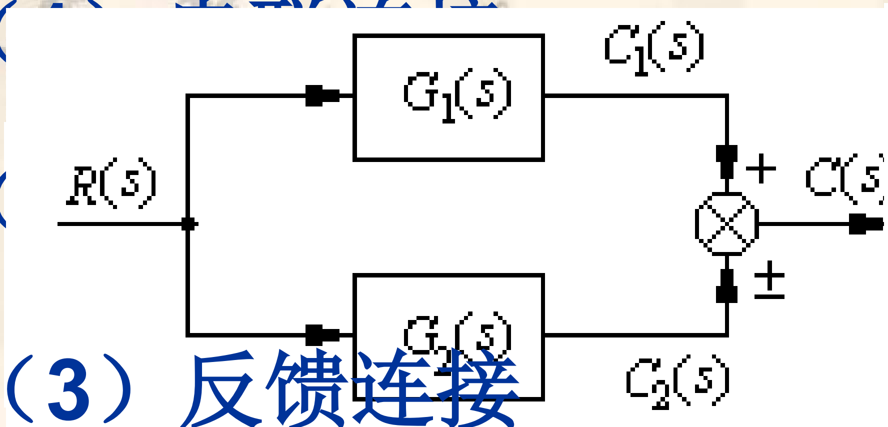
注意：此时，不能用两个单独网络结构图的串联表示组合网络的结构图。

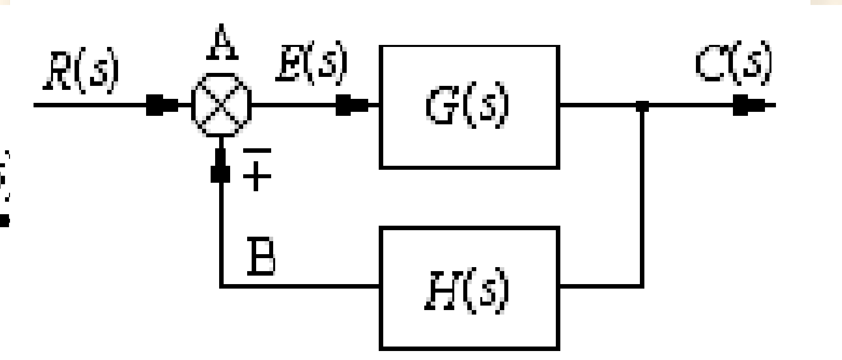


如果在两级网络之间，接入一个输入阻抗很大而输出阻抗很小的隔离放大器，则该电路的结构图就可由两个简单的*RC*网络结构图组成，这时，网络之间的负载效应已被消除。

(三) 结构图的等效变换

1. 结构图的基本组成形式





（3）反馈连接

一个方框的输出，输入到另一个方框，得到的输出再返回作用于前一个方框的输入端，这种结构称为反馈连接。如图所示：

A处的信号取“+”，称为正反馈；取“-”，称为负反馈。负反馈连接是控制系统的基本结构形式。

2. 结构图的等效变换法则

（1）串联方框的等效变换

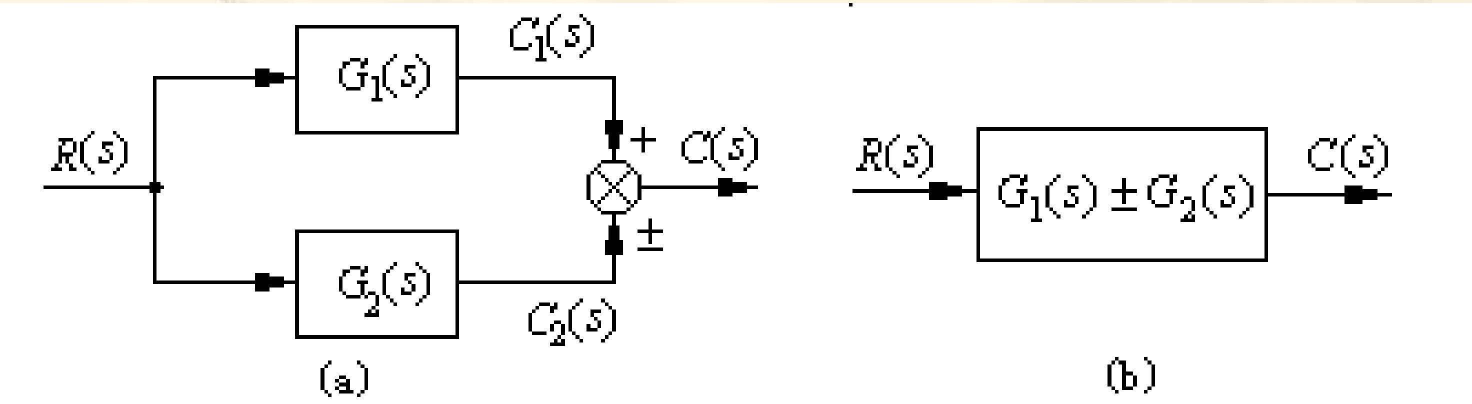
如图所示：得出

$$U(s)=G_1(s)R(s) \qquad C(s)=G_1(s)G_2(s)R(s)=G(s)R(s)$$

$$C(s)=G_2(s)U(s) \qquad G(s)=G_1(s)G_2(s)$$

结论：串联结构总传递函数等于各个环节传递函数的乘积。

（2）并联连接的等效变换



如图所示：得出

$$C_1(s) = G_1(s)R(s)$$

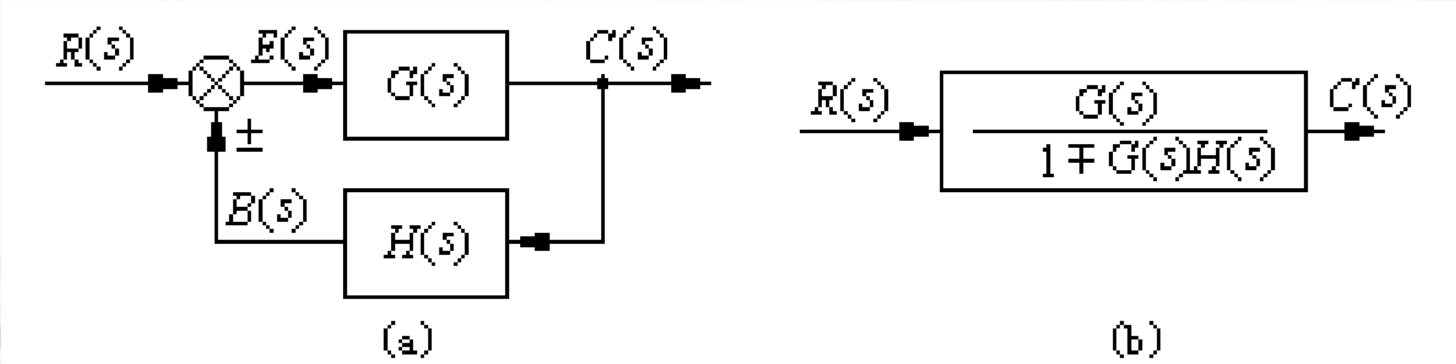
$$C_2(s) = G_2(s)R(s)$$

$$C(s) = G_1(s)R(s) \pm G_2(s)R(s)$$
$$= [G_1(s) \pm G_2(s)]R(s)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s) \pm G_2(s)$$

结论：并联结构总传递函数等于各个环节传递函数的代数和。

（3）反馈连接的等效变换



按照信号传递的关系可写出：

$$C(s)=G(s)E(s)$$
$$B(s)=H(s)C(s)$$
$$E(s)=R(s)\pm B(s)$$

消去*E*(*s*)和*B*(*s*)，得

分母中的加号对应于负反馈；减号对应于正反馈。

$C($ … $)R(s)\pm G(s)H(s)C(s)$

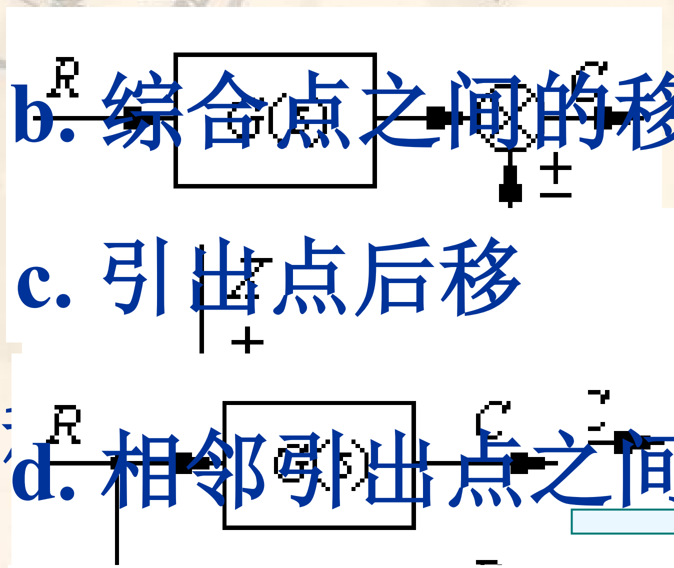
$C($ … $)]C(s)=G(s)R(s)$

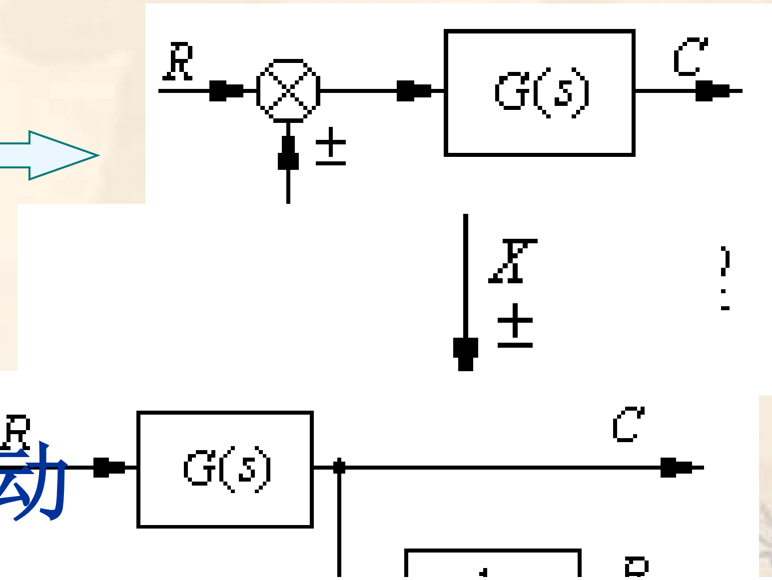
因此 $$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1\mp G(s)H(s)}=G_B(s)$$

若反馈通路的传递函数*H*(*s*)=1，常称作单位反馈

（4）综合点与引出点的移动

a. 综合点前移

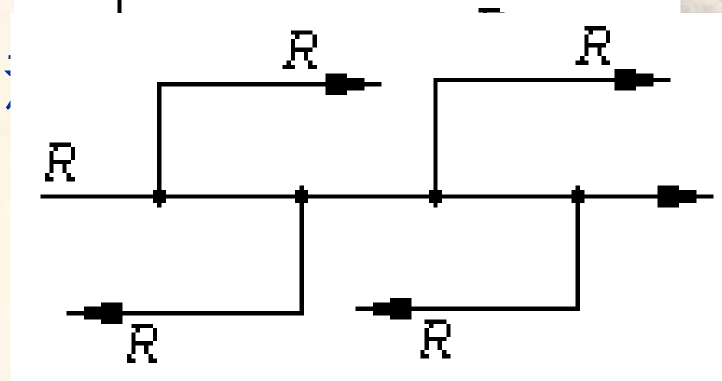


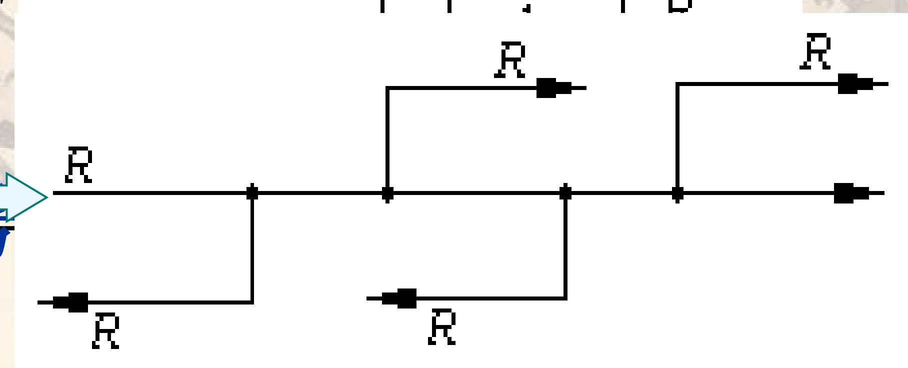


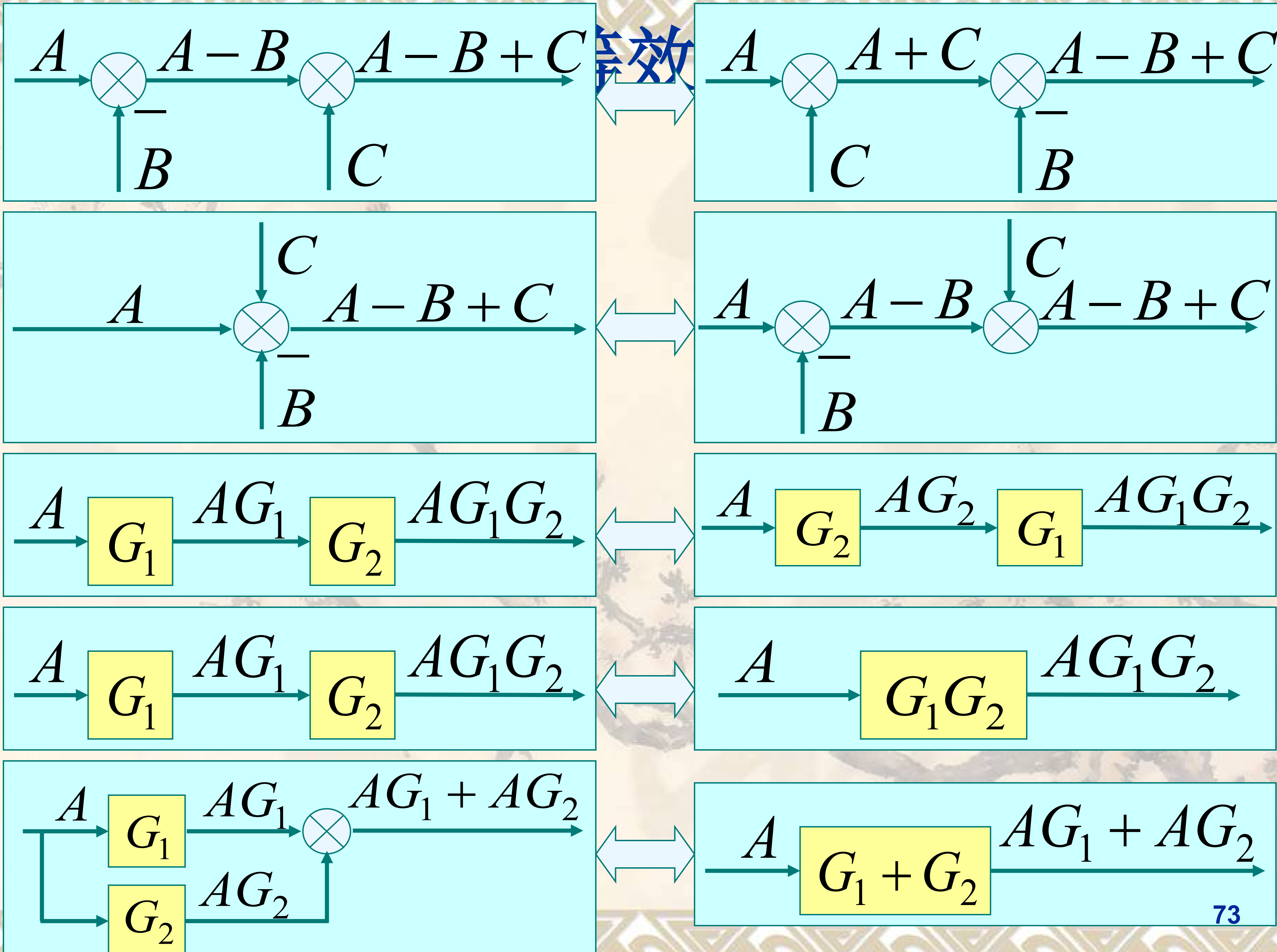
b. 综合点之间的移动

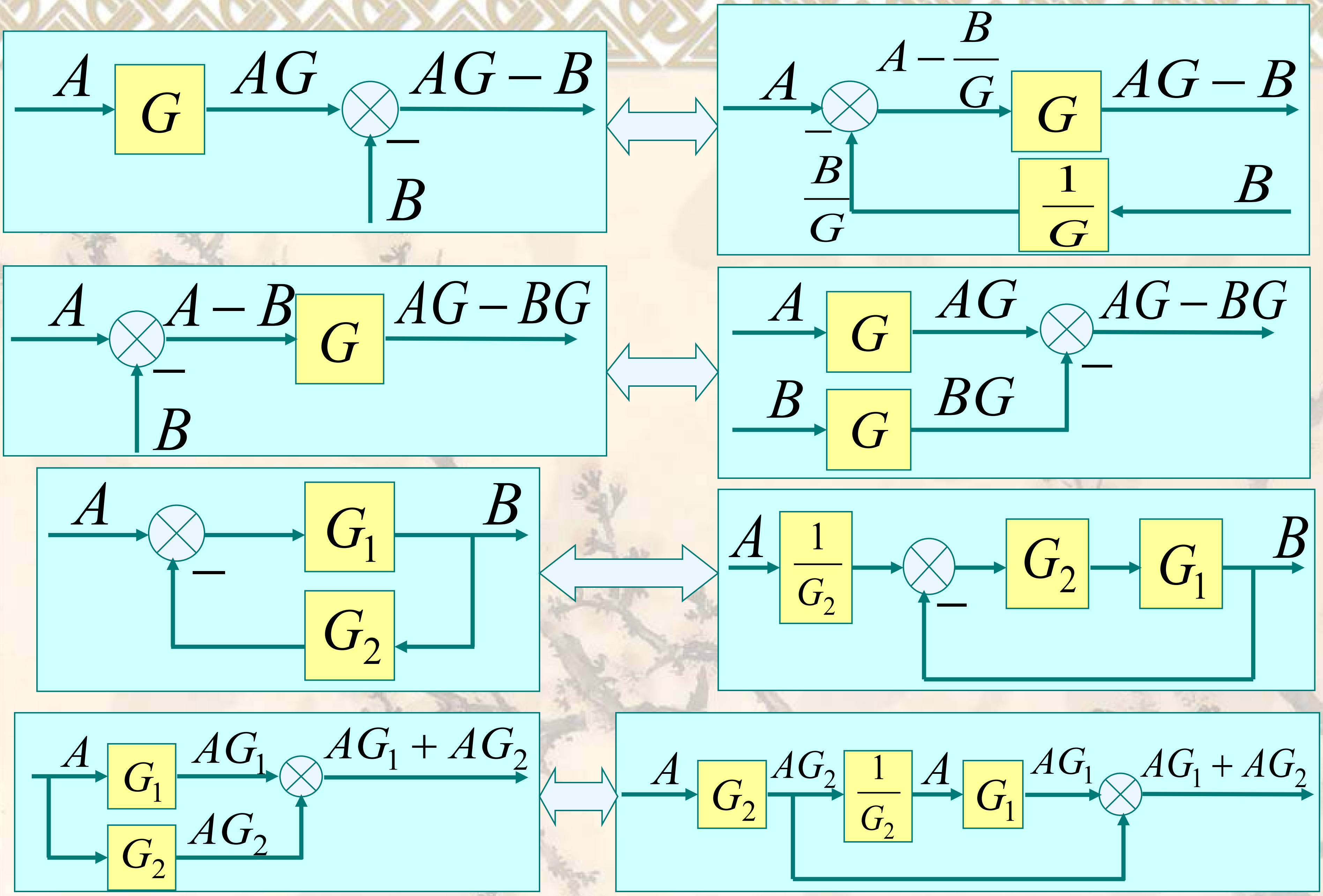
c. 引出点后移

d. 相邻引出点之间的移动





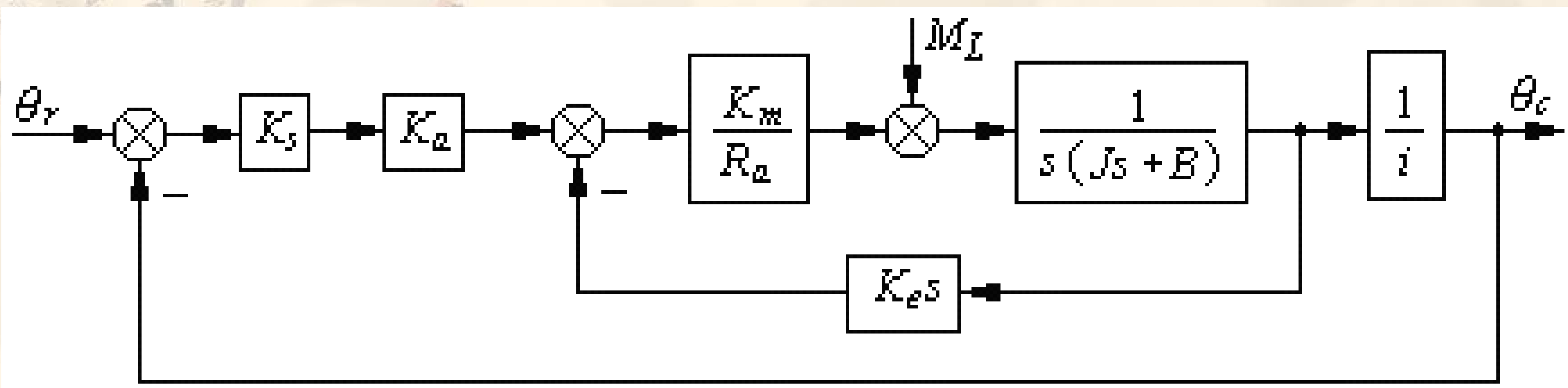

A
A − B
A − B + C
B
C
A + C
A − B + C
C
B
A
A − B + C
A − B
A − B + C
AG1
AG1G2
G1
G2
AG2
AG1G2
G1G2
AG1 + AG2
G1 + G2


A
G
AG
AG − B
B
A − B/G
B/G
1/G
A − B
AG − BG
BG
G₁
G₂
1/G₂
AG₁
AG₂
AG₁ + AG₂

3.结构图变换举例

例22 位置随动系统的闭环传递函数

$$G(s)=\theta_c(s)/\theta_r(s)$$



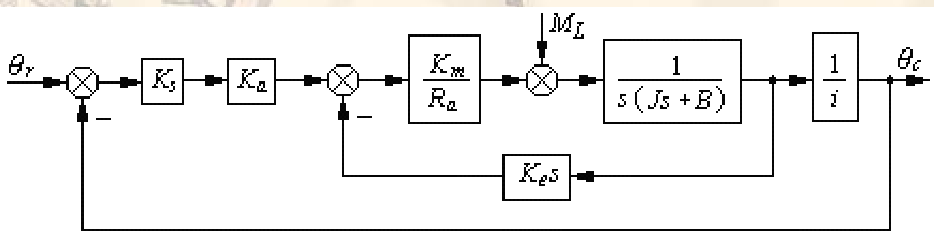
位置随动系统的结构图

传递函数简化为

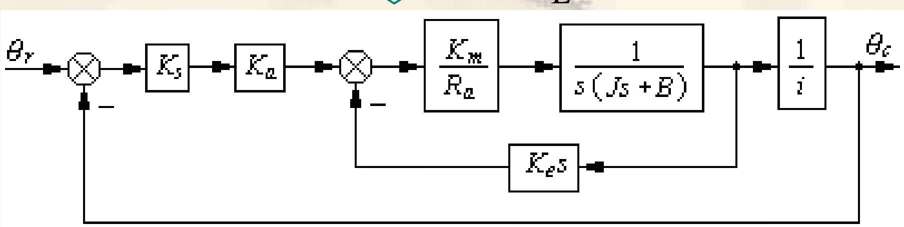
$$G(s)=\theta_c(s)/\theta_r(s)=\frac{K_sK_aK_m/R_ai}{Js^2+(B+K_mK_e/R_a)s+K_sK_aK_m/R_ai}$$

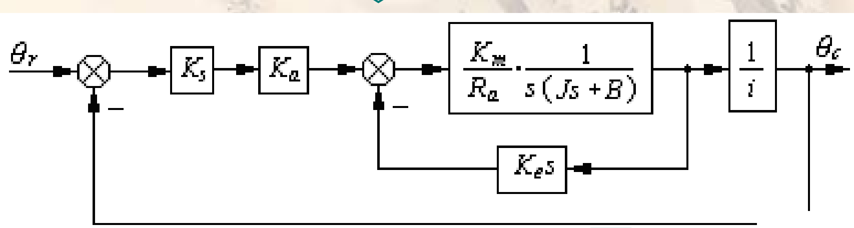
例22 位置随动系统的闭环传递函数(续)

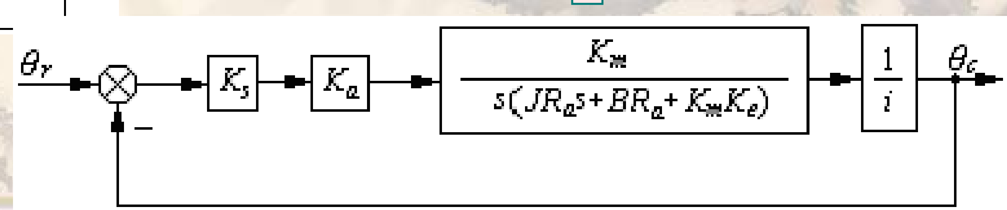
整体流程图

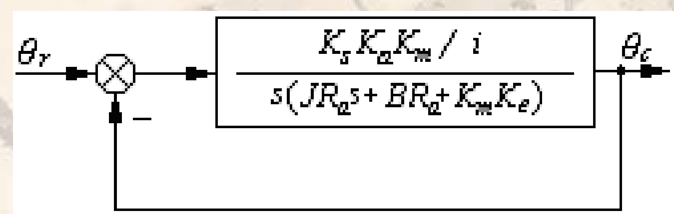


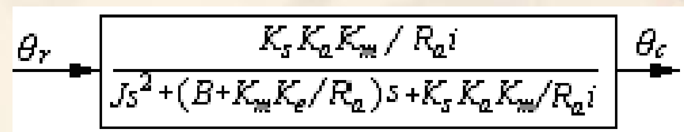
令$M_L = 0$







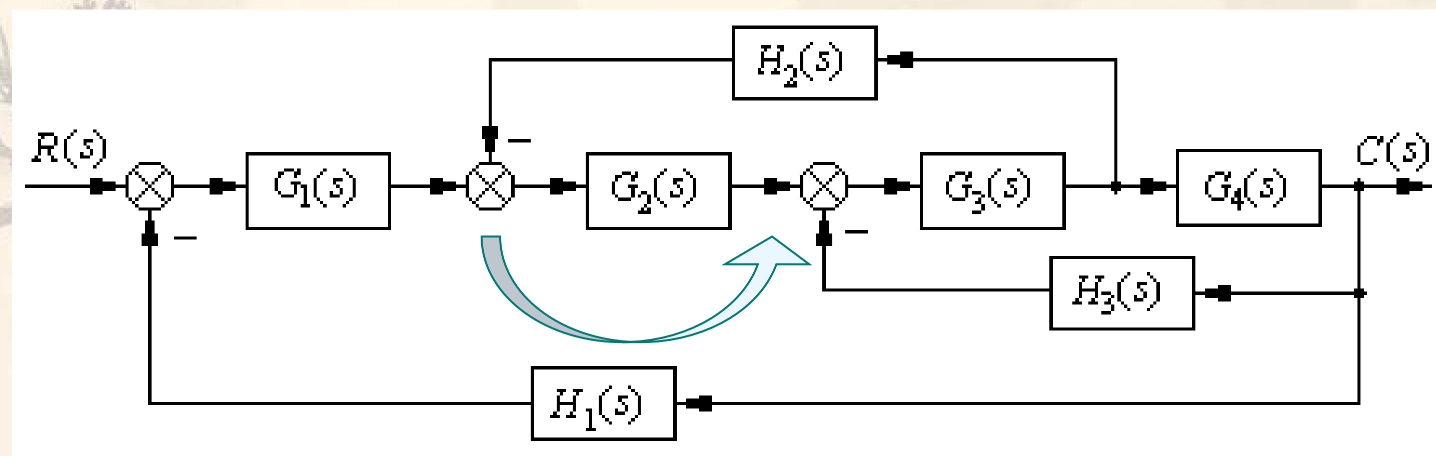




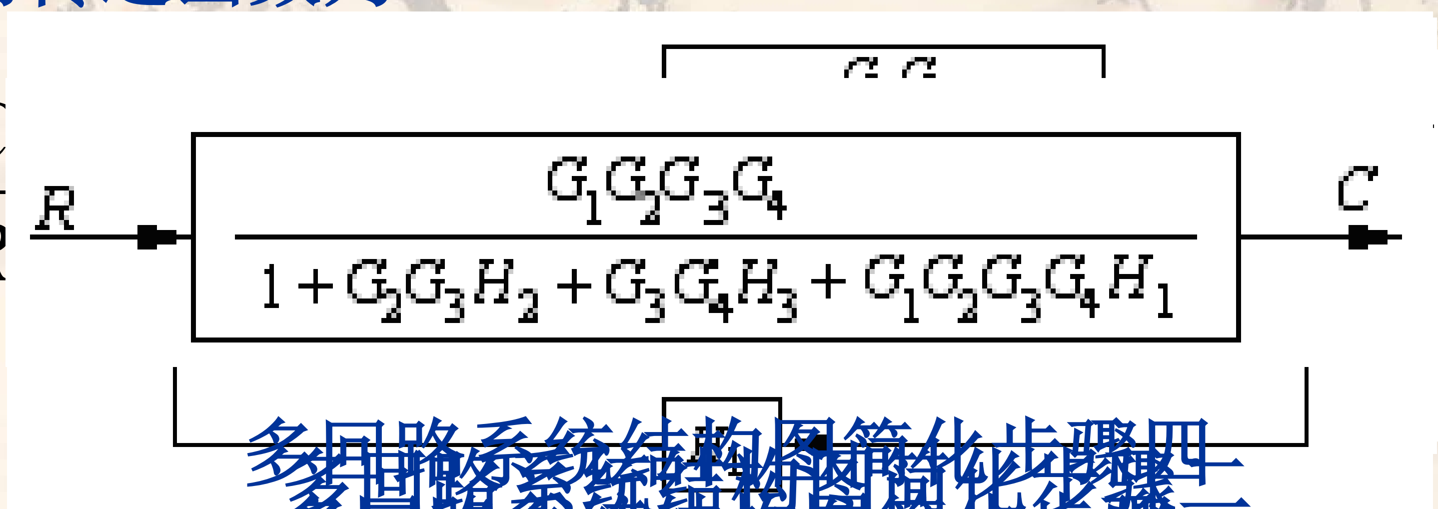
$$G(s) = \theta_c(s)/\theta_r(s)$$

$$= \frac{K_sK_aK_m/R_ai}{Js^2 + (B + K_mK_e/R_a)s + K_sK_aK_m/R_ai}$$

例23 简化结构图，并求系统传递函数$C(s)/R(s)$



系统的传递函数为多回路系统结构图



多回路系统结构图简化步骤四

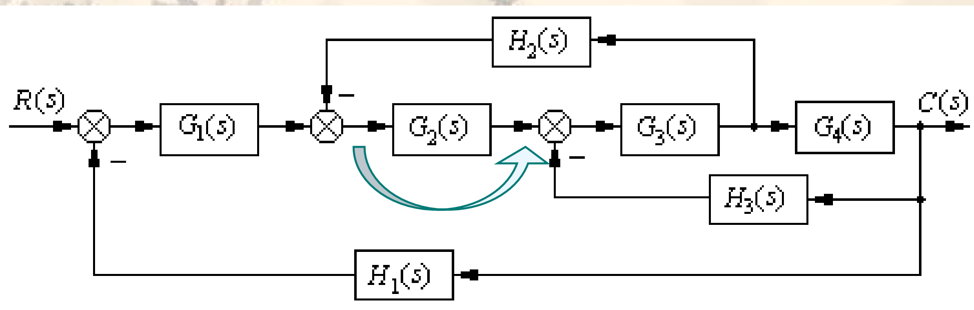
多回路系统结构图简化步骤一

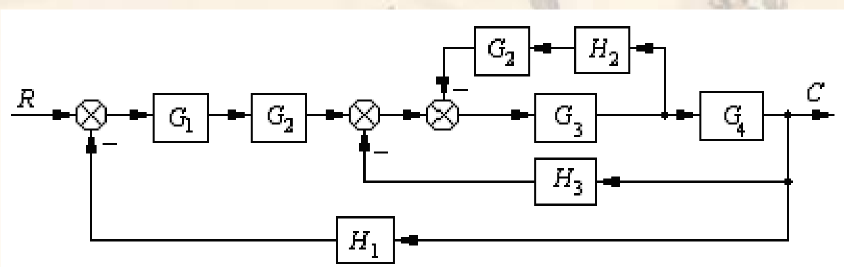
多回路系统结构图简化步骤二

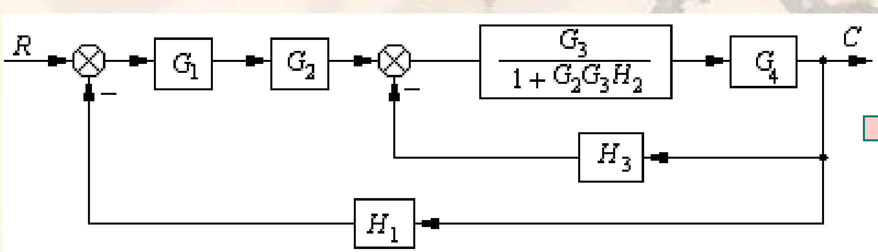
多回路系统结构图简化步骤三

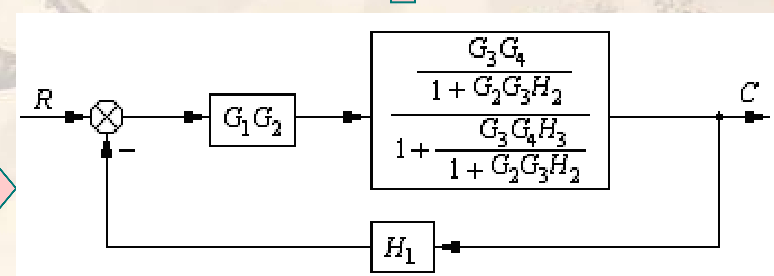
例23　简化结构图，并求系统传递函数（续）

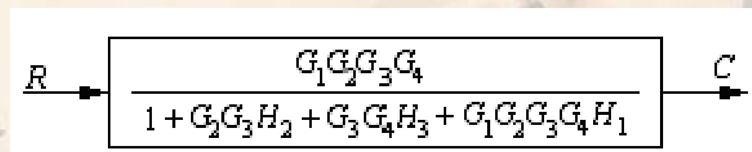
整体流程图





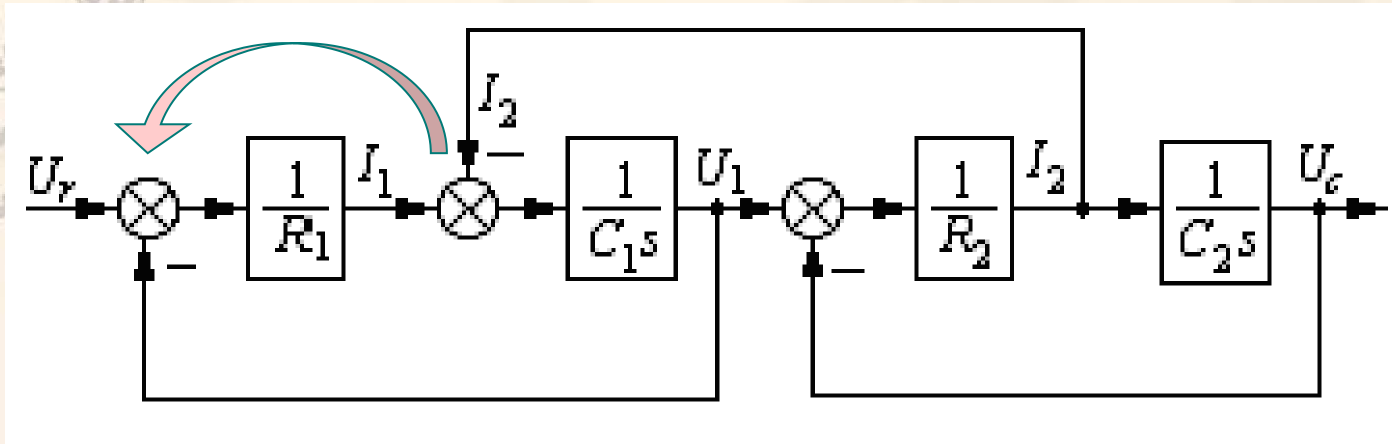






$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_2G_3H_2+G_3G_4H_3+G_1G_2G_3G_4H_1}$$

例24 化简两级RC网络结构图，并求传函$U_c(s)/U_r(s)$



系统传递函数为

两级*RC*电路串联的结构图

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

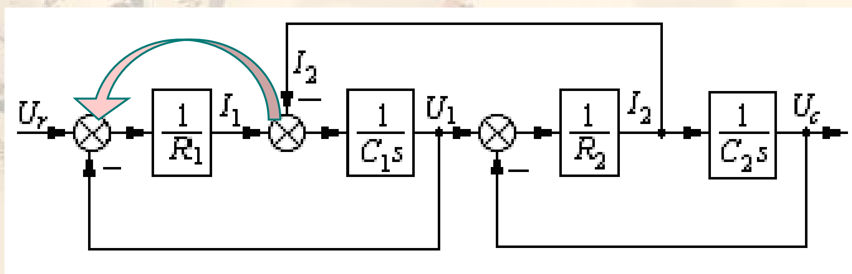
两级*RC*电路串联的结构图简化步骤三

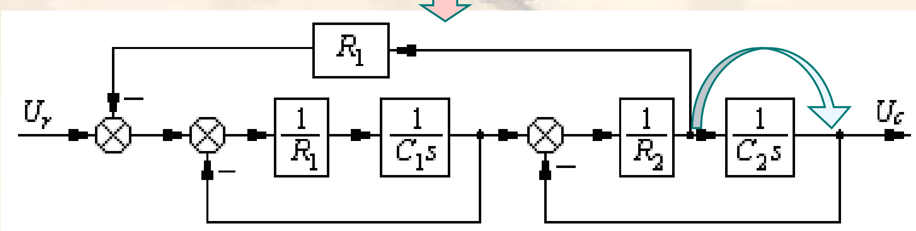
两级*RC*电路串联的结构图简化步骤二

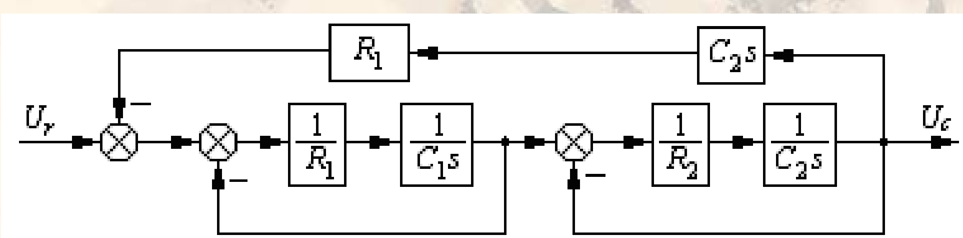
两级*RC*电路串联的结构图简化步骤一

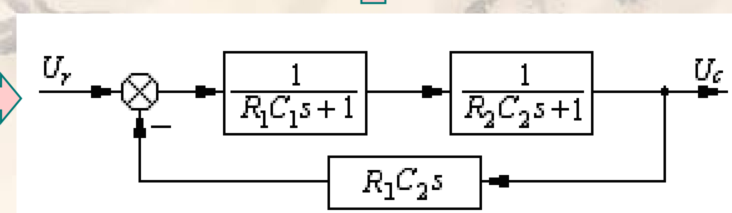
例24 化简两级RC网络结构图，并求传函（续）

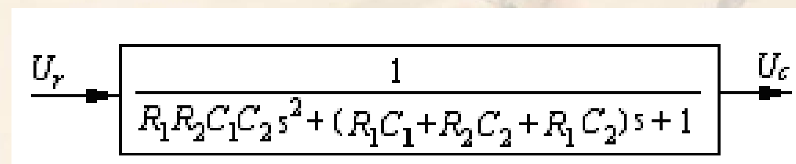
整体流程图











$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

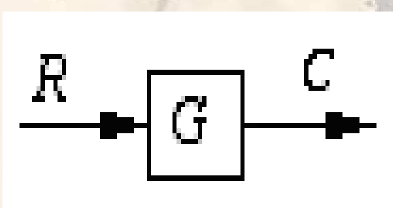
例题　返回

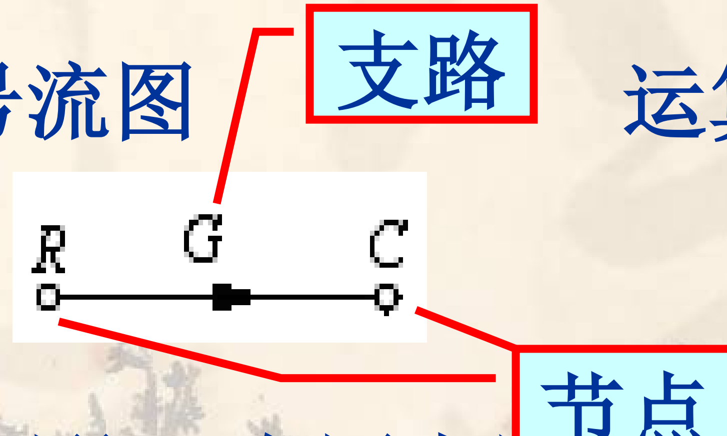
§2-6 控制系统的信号流图 (signal-flow graph)

(一) 信号流图的定义

信号流图是由节点和支路组成的信号传递网络。

方框图　　　　信号流图　　　　运算表达式





$$C = GR$$

•节点标志变量(信号)，在图中用小圆圈表示;

•支路是连接两个节点的定向线段，它有一定的复数增益(即传递函数)，称为支路增益;

•信号只能在支路上沿箭头方向传递，经支路传递的信号应乘以支路的增益。

信号流图的常用术语：

输入节点：只有输出支路的节点，它一般表示系统的输入变量。

输出节点：只有输入支路的节点称为输出节点，它一般表示系统的输出变量。

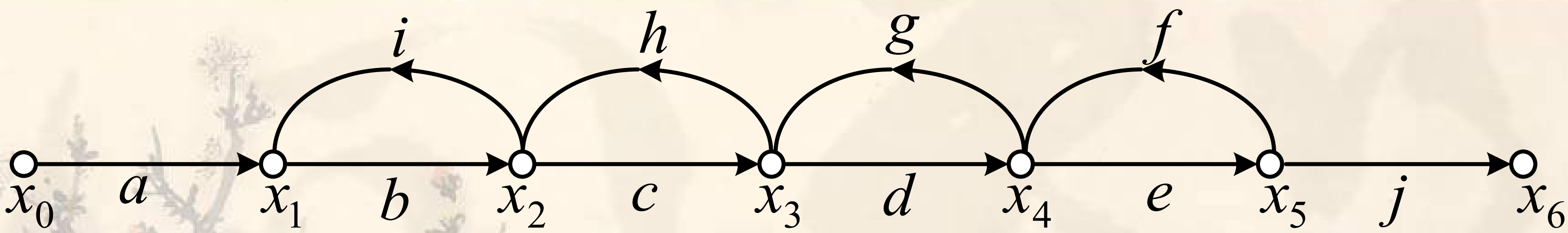
混合节点：既有输入支路又有输出支路的节点称为混合节点。

通路：从某一节点开始沿支路箭头方向经过各相连支路到另一节点所构成的路径称为通路。

前向通路：是指从输入节点开始并终止于输出节点且与其它节点相交不多于一次的通路。

回路：如果通路的终点就是通路的起点，并且与任何其它节点相交不多于一次的通路称为回路。

不接触回路：如果一信号流图有多个回路，各回路之间没有任何公共节点，则称为不接触回路，反之称为接触回路。



图中：

图中有四个闭环，即bi、ch、dg和ef。

x_0为输入节点（只有输出支路的节点），

$a\ b\ i$ 不是通道，因为两次经过节点x_1。

x_6为输出节点（只有输入支路的节点）。

$b\ i$是闭通道（回环）

x_1, x_2, x_3, x_4和x_5是混合节点。

$b\ c\ h\ i$ 不是回环，因为两次经过节点x_2。

$a\ b\ c\ d\ e\ j$ 是前向通路。

两两不相接触的回路有三个：bi和ef、bi和dg 和ch和ef。

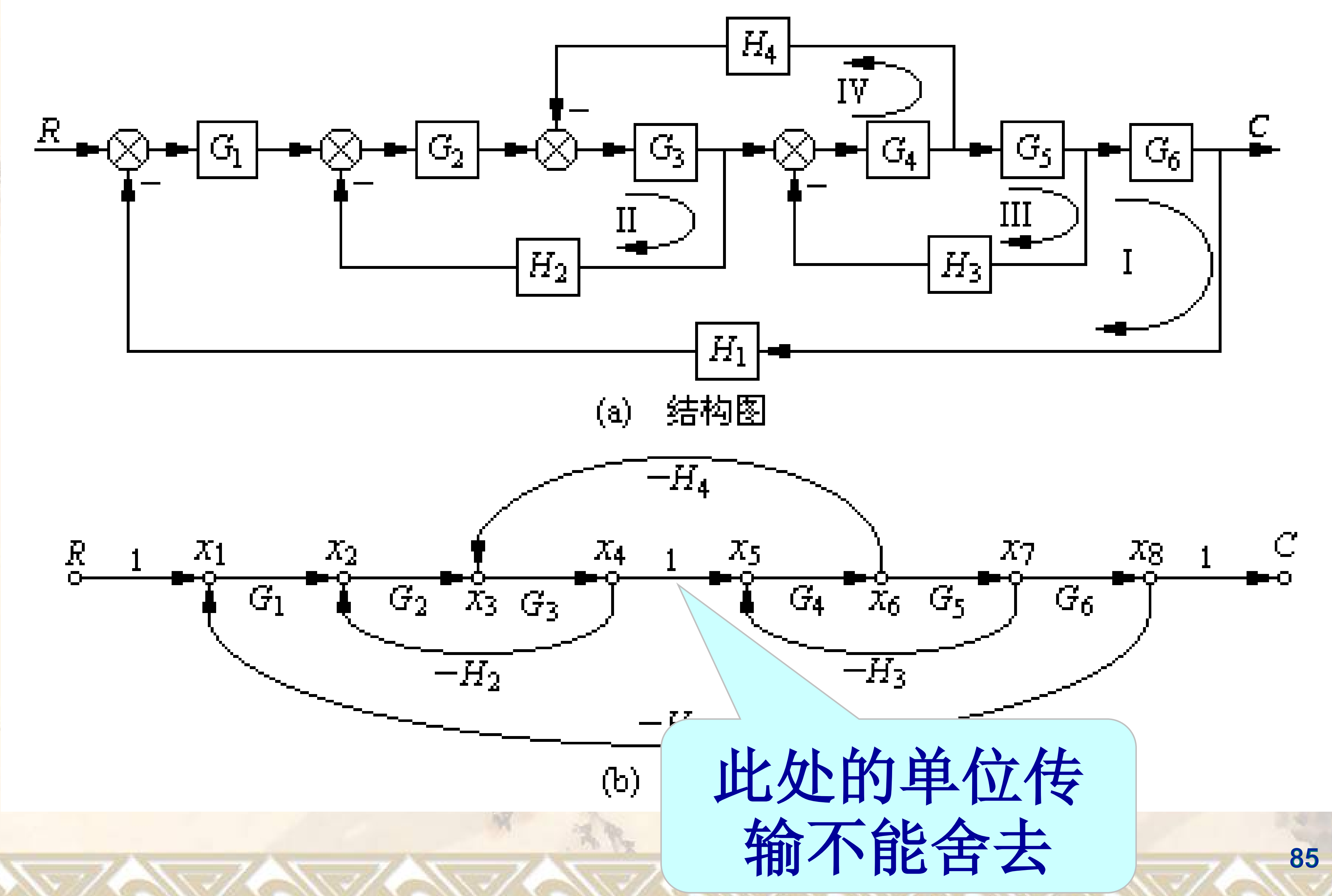
$a\ b\ c\ d\ e$和$f\ g\ h\ i$是通道。$a\ i$不是通道（两条支路的方向不一致）

没有三个及三个以上互不接触的回环。

（二）信号流图的基本性质

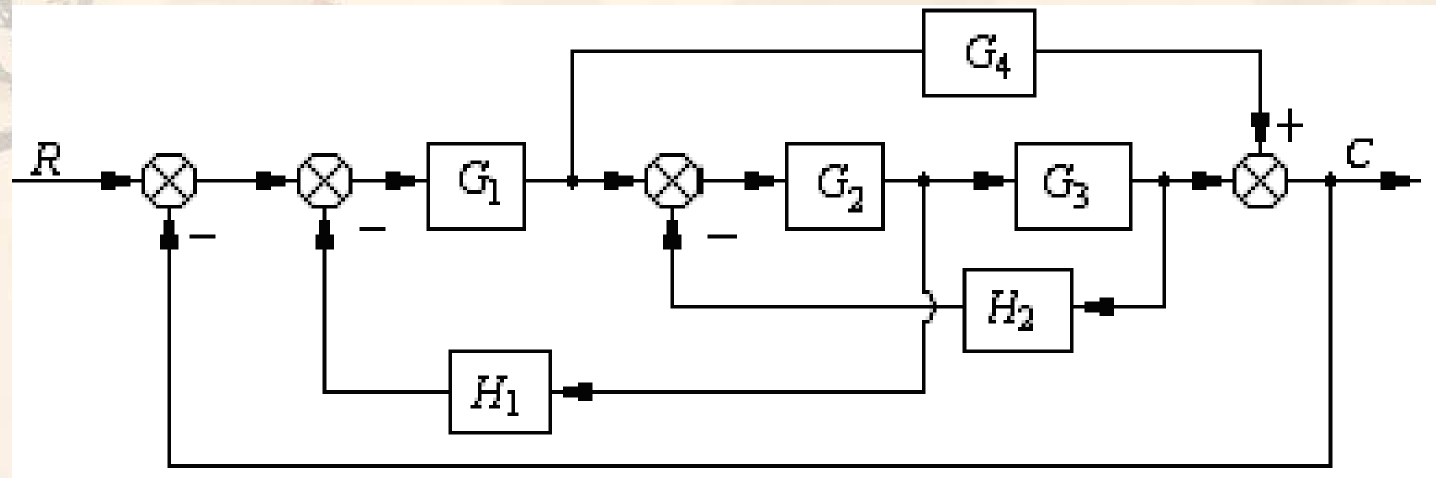
- 以节点代表变量。输入节点代表输入量，输出节点代表输出量。用混合节点表示变量或信号的汇合。在混合节点处，出支路的信号等于入支路信号的叠加。
- 以支路表示变量或信号的传输和变换过程，信号只能沿着支路的箭头方向传输。在信号流图中每经过一条支路，相当在方框图中经过一个用方框表示的环节。
- 增加一个具有单位传输的支路，可以把混合节点化为输入节点。
- 对于同一个系统，信号流图的形式不是唯一的。

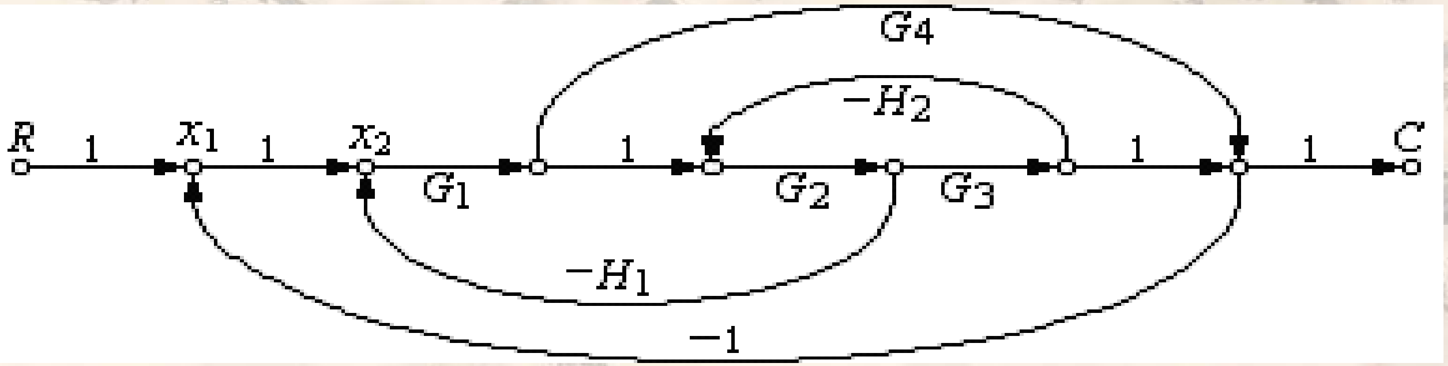
结构图与信号流图的对比



由系统结构图绘制信号流图

例25 试将如下系统的结构图转化为信号流图。





三、梅逊(S.J.Mason)公式求传递函数

(Transfer function)

梅逊公式的表达式为：
$$G(s)=\frac{\sum_{k=1}^{n}P_k\Delta_k}{\Delta}$$

$G(s)$ ——总传递函数；

Δ — 特征式； $\Delta = 1-\sum L_i+\sum L_iL_j-\sum L_iL_jL_k+\cdots$

n— 所有前向通路的条数；

P_k— 第k条前向通路的增益；

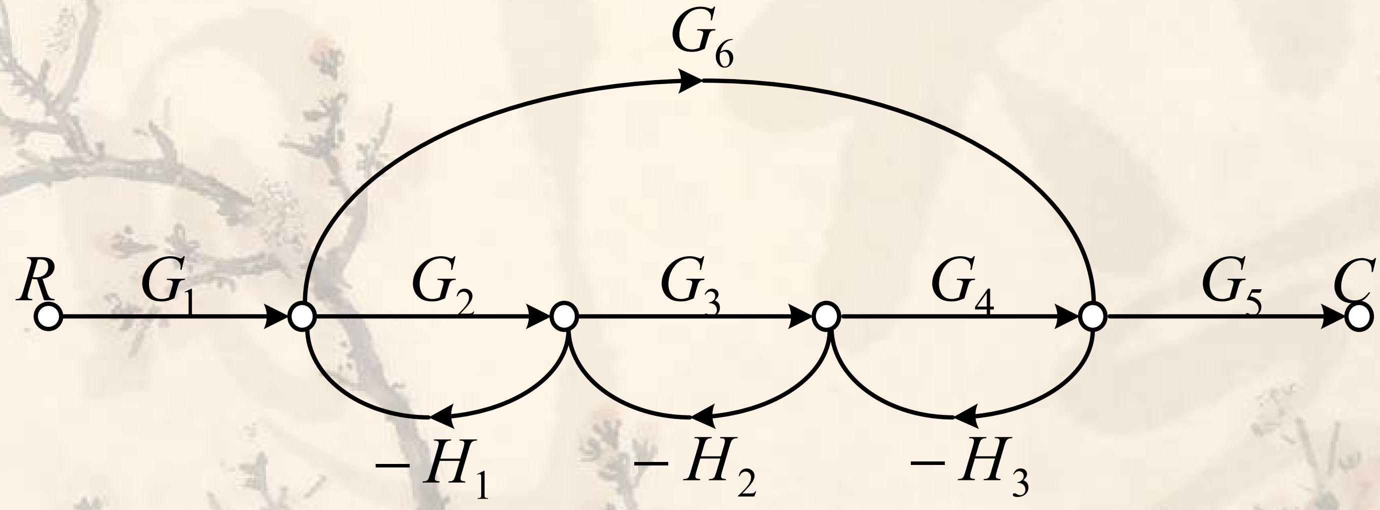
Δ_k— 在Δ中，将与第k条前向通路相接触的回路除去后所余下的部分，称为余子式；

$\sum L_i$— 所有回路的增益之和；

$\sum L_iL_j$—所有两两互不接触回路的回路增益乘积之和；

$\sum L_iL_jL_k$— 所有三个互不接触回路的回路增益乘积之和。

例26 根据信号流图求系统传递函数



系统有两条前向通路

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5 \qquad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_1G_5G_6 \qquad \Delta_2 = 1 + G_3H_2$$

回路有四条

$$\sum_{i=1}^{4} L_i = -G_2H_1 - G_3H_2 - G_4H_3 - G_6H_1H_2H_3$$

两两不相交回路

$$\sum L_iL_j = L_1L_3 = G_2G_4H_1H_3$$

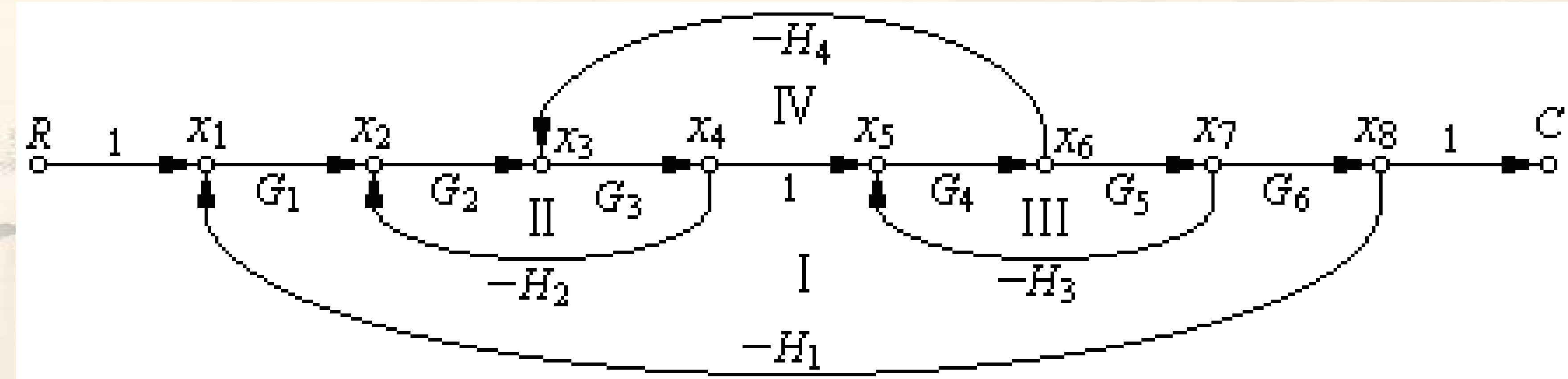
$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2$$

系统传递函数为：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{1 - \sum L_i + \sum L_i L_j}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_5G_6 + G_1G_3G_5G_6H_2}{1 + G_2H_1 + G_3H_2 + G_4G_3 + G_6H_1H_2H_3 + G_2H_1G_4H_3}$$

例27 求如图所示信号流图的增益



由图可见，共四个回路

$$\sum_{i=1}^{4} L_i = -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 - G_2G_3H_2 - G_4G_5H_3 - G_3G_4H_4$$

特征式

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_iL_j$$

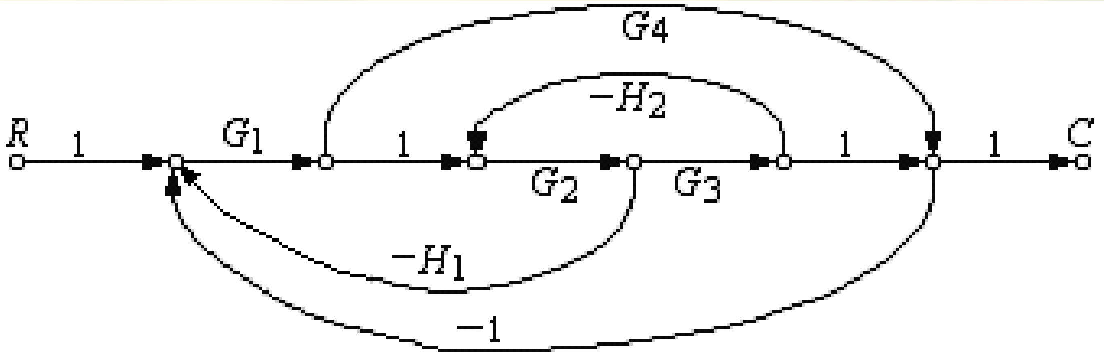
$$= 1 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3 + G_3G_4H_4 + G_2G_3G_4G_5H_2H_3$$

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P = \frac{p_1\Delta_1}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4G_5G_6}{1 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3 + G_3G_4H_4 + G_2G_3G_4G_5H_2H_3}$$

例28 求如图所示信号流程图的增益



4个回路：

$$L_1=-G_1G_2H_1,\ L_2=-G_2G_3H_2,\ L_3=-G_1G_2G_3,\ L_4=-G_1G_4$$

回路中L_2和L_4不接触，所以$L_2L_4=(-G_2G_3H_2)(-G_1G_4)$

因而，特征式：

$$\Delta=1-L_1-L_2-L_3-L_4+L_2L_4$$
$$=1+G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3+G_1G_4+G_1G_2G_3G_4H_2$$

图中有两条前向通路，故n=2。

第一条前向通路$P_1=G_1G_2G_3$，与每个回路均有接触，

故P_1的余子式 $\Delta_1=1$ 。

例28 求如图所示信号流程图的增益（续）

第二条前向通路 $P_2 = G_1G_4$ ，与回路$L_2 = -G_2G_3H_2$不接触，故在 Δ中去掉 L_1, L_3, L_4, L_2L_4 ，Δ 余下的为

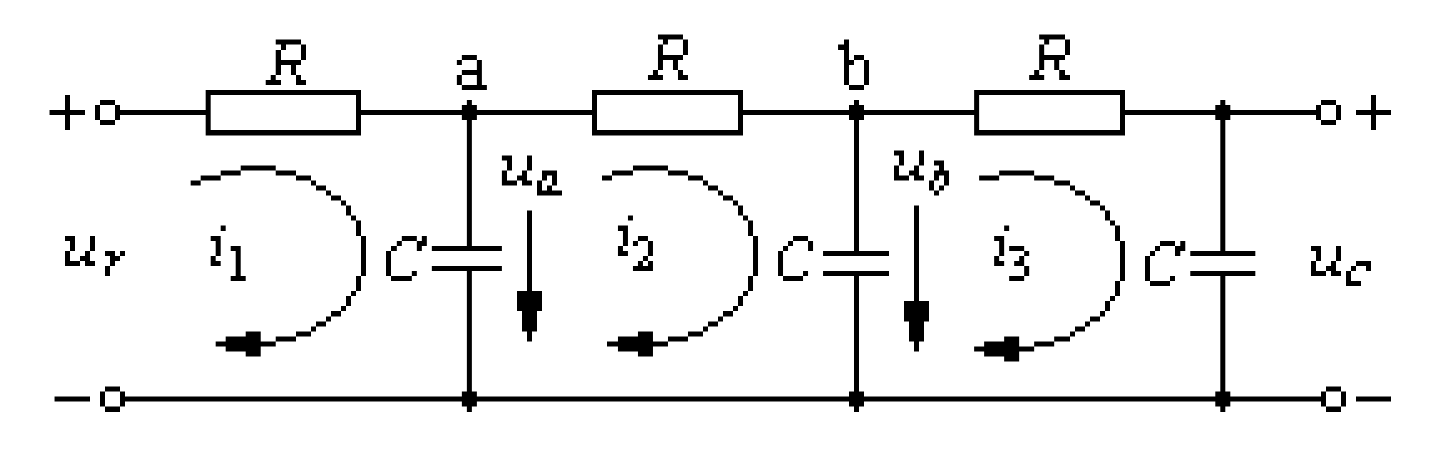
$$\Delta_2 = (1 + G_2G_3H_2)$$

则由梅逊公式可得信号流图的传递函数

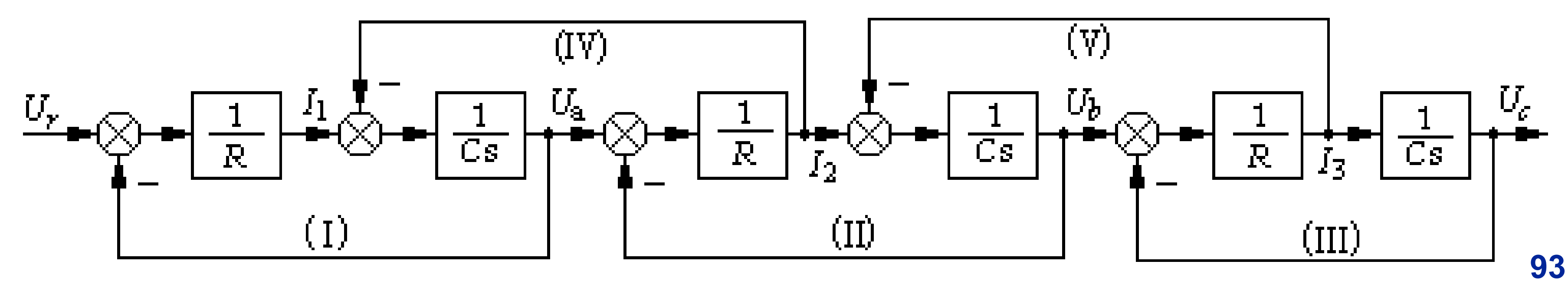
$$P = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

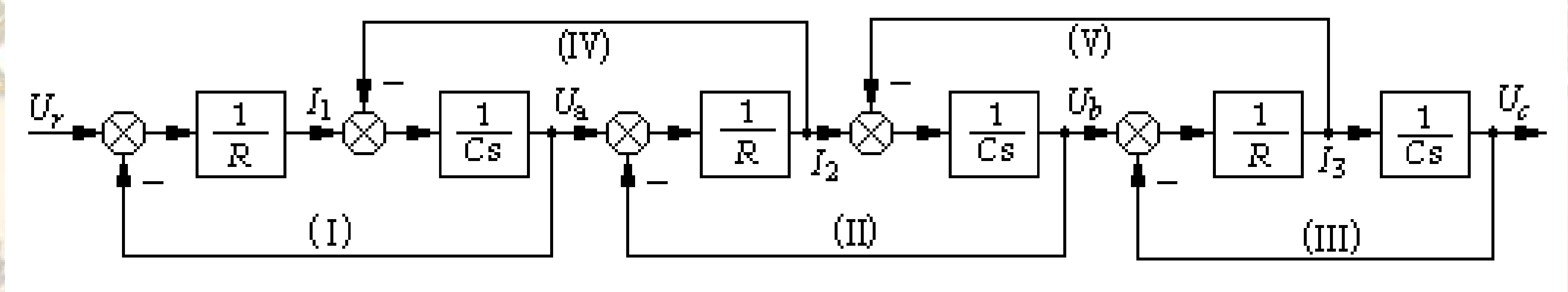
$$= \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4(1 + G_2G_3H_2)}{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_1G_4 + G_1G_2G_3G_4H_2}$$

例29 绘制三级*RC*滤波网络结构图，并求其传递函数U_c/U_r



1. 绘制结构图。用复阻抗与电压、电流关系，可以直接绘出网络的结构图：





2. 求传递函数

该结构图有5个反馈回路，回路传递函数均相同，

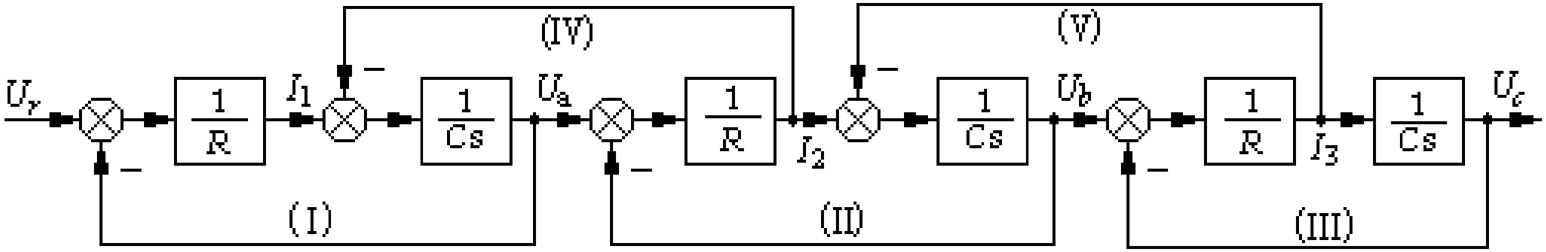
即 $$L_1 = L_2 = \cdots = L_5 = -\frac{1}{RCs} \qquad \sum L_i = -\frac{5}{RCs}$$

有6组两两互不接触的回路，它们是I-II、I-III、I-V、II-III、III-IV及IV-V，因此

$$\sum L_i L_j = \frac{6}{R^2 C^2 s^2}$$

有1组三个互不接触的回路，即I-II-III，故

$$\sum L_i L_j L_k = -\frac{1}{R^3 C^3 s^3}$$



特征式：
$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k$$
$$= 1 + \frac{5}{RCs} + \frac{6}{R^2C^2s^2} + \frac{1}{R^3C^3s^3}$$

前向通路只有一条，即 $P_1 = \dfrac{1}{R^3C^3s^3}$

且前向通路与各反馈回路均有接触，余子式$\Delta_1 = 1$。
则由梅逊公式可求得总传递函数：

$$\frac{U_c}{U_r} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dfrac{1}{R^3C^3s^3}}{1 + \dfrac{5}{RCs} + \dfrac{6}{R^2C^2s^2} + \dfrac{1}{R^3C^3s^3}}$$
$$= \frac{1}{R^3C^3s^3 + 5R^2C^2s^2 + 6RCs + 1}$$

返回

§ 2-7 控制系统的传递函数 (Transfer function)

闭环控制系统的典型结构如下图所示：

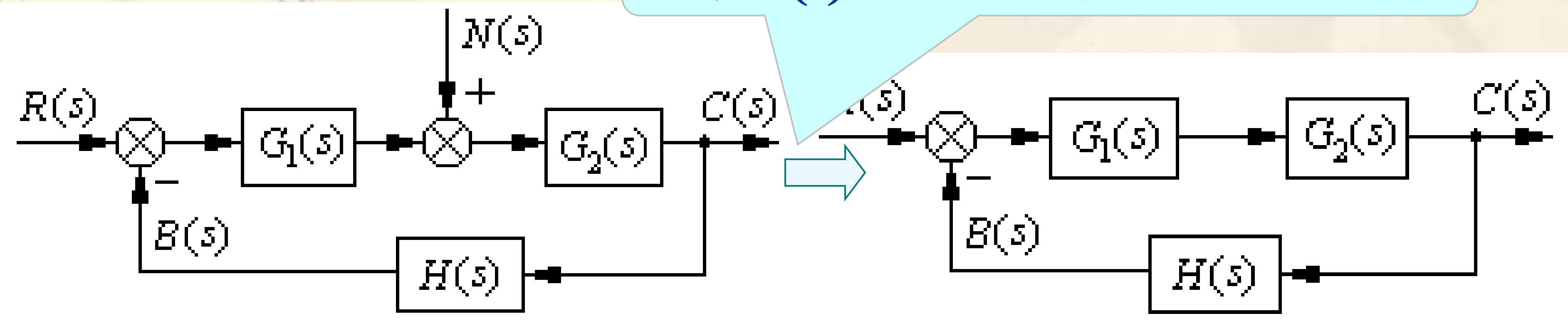
注意：开环传递函数并不是第一章所述的开环系统的传递函数，而是指闭环系统在开环时的传递函数。

断开系统的主反馈通路，这时前向通路传递函数与反馈通路传递函数的乘积$G_1(s)G_2(s)H(s)$，称为该系统的开环传递函数。也即

$$\frac{B(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s)$$

2. $r(t)$作用下系统

令$n(t)=0$，结构图变为：



求出闭环传递函数：

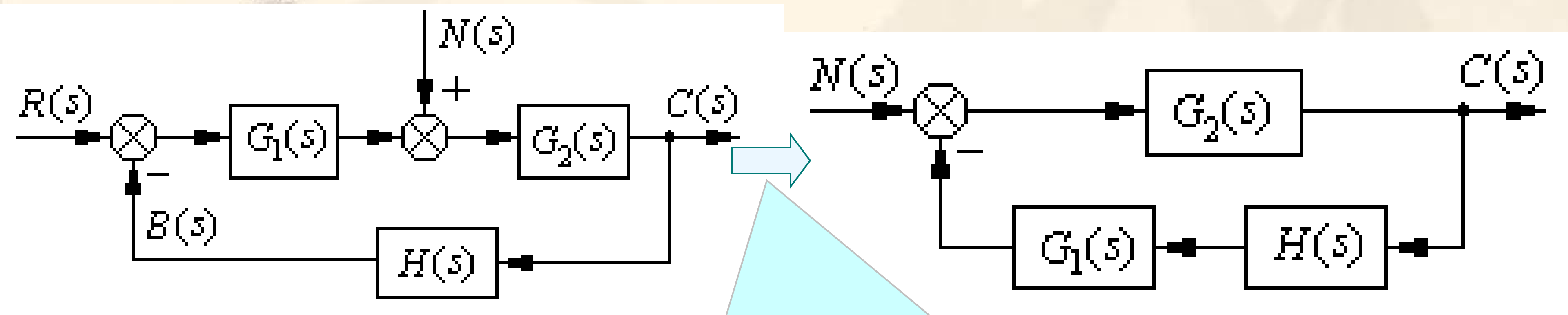
$$G_B(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

输出函数……拉氏变换式：

输入信号$r(t)$作用下系统的闭环传递函数。

$$\frac{G_1(s)G_2(s)}{\ldots+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)$$

3. *n*(*t*)作用下系统的闭环传递函数



令$r(t)=0$，结构图变为：

求出闭环传递函数：

$$\frac{C_n(s)}{N(s)}=G_{Bn}(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

干扰$n(t)$作用下系统的闭环传递函数。

输出函数 氏变换式：

$$C \quad \frac{G_2(s)}{G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

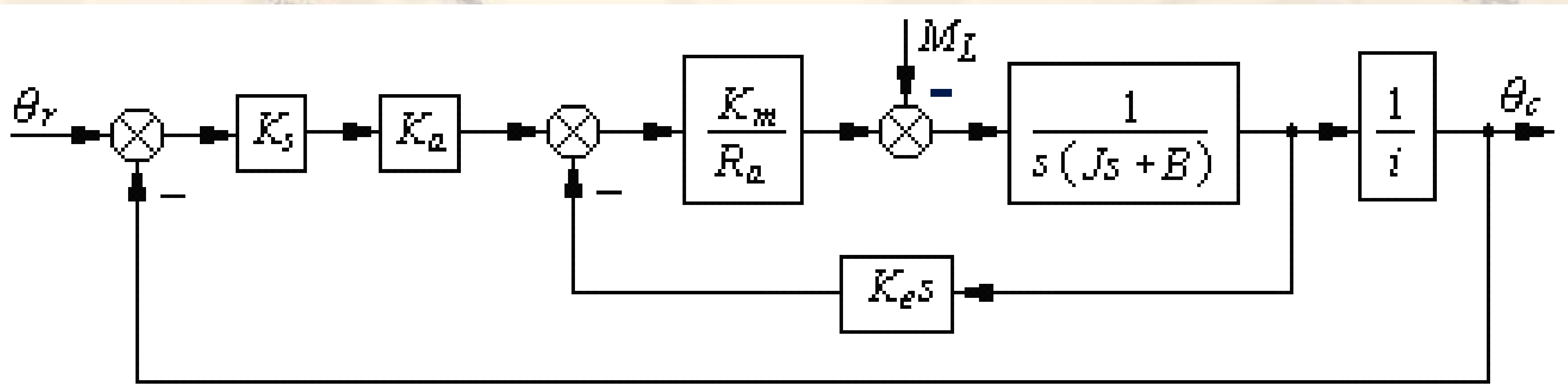
4. 系统的总输出

根据线性系统的叠加原理，系统的总输出应为各外作用引起的输出的总和。

$$C_{\Sigma}(s)=G_{B}(s)R(s)+G_{Bn}(s)N(s)$$

$$=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)+\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

例30 根据下图位置随动系统的结构图，试求系统在给定值 $\theta_r(t)$ 作用下的传递函数及在负载力矩 M_L 作用下的传递函数，并求两信号同时作用下，系统总输出的拉普拉斯变换式。

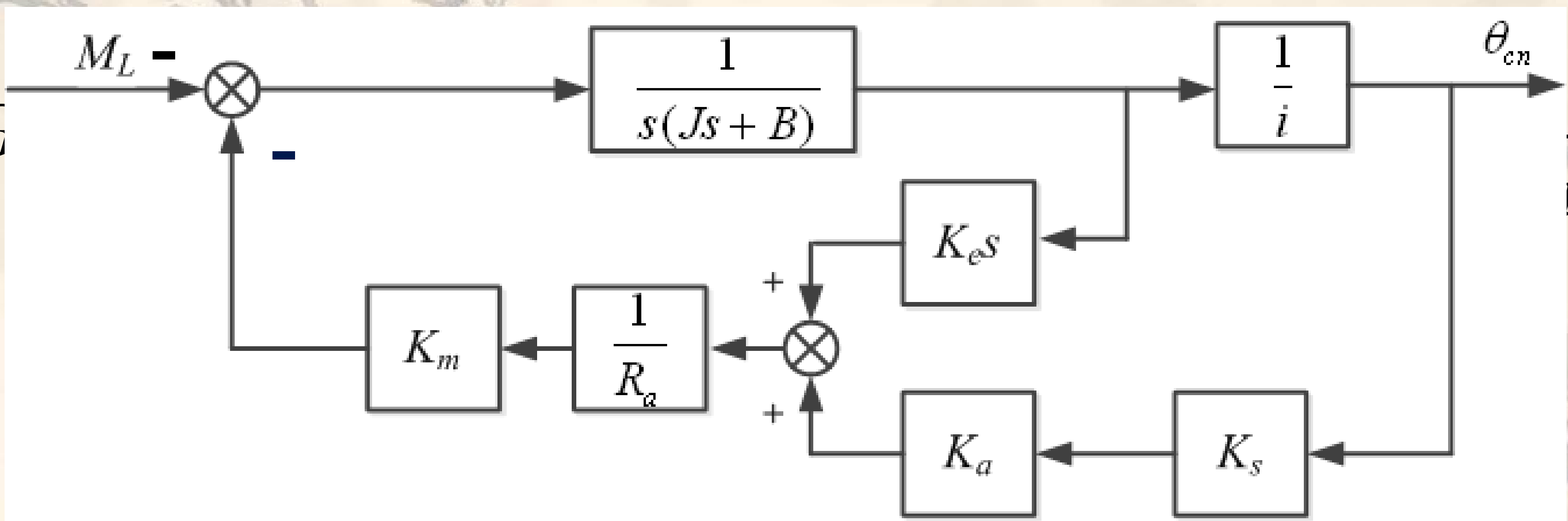


解 (1) 求 $\theta_r(t)$作用下系统的闭环传递函数

$$G(s)=\frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)}=\frac{K_aK_sK_m/iR_a}{Js^2+(B+K_mK_e/R_a)s+K_aK_sK_m/iR_a}$$

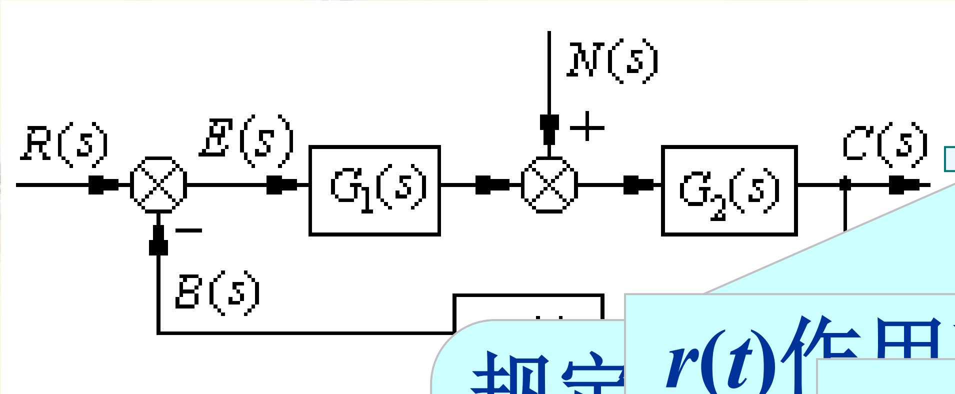
例30（续）

解 (2) 求 M_L 作用下系统的闭环传递函数



在 θ_r=0的系统简化结构图，其中 $\theta_{cn}(t)$表示在干扰作用下系统的输出信号。

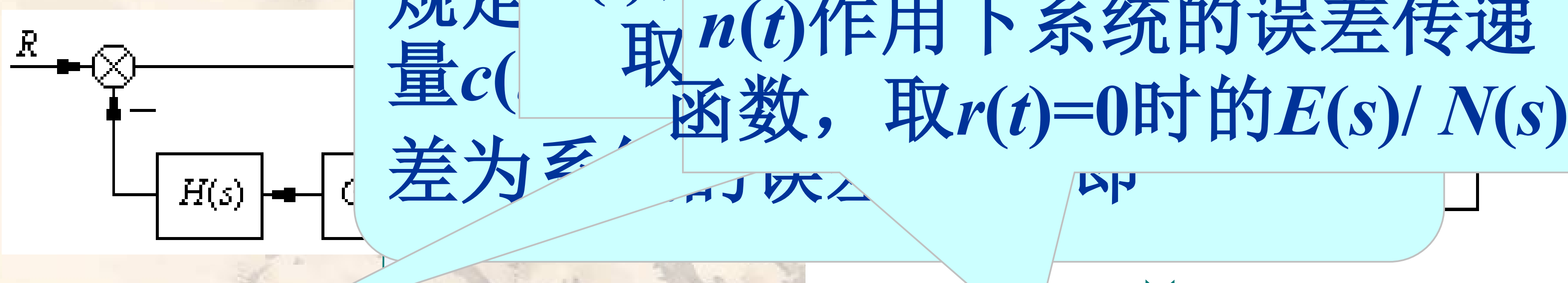
5. 闭环系统的误差传递函数
(Error transfer function of close-loop system)



或

$$e(t)=r(t)-b(t)$$

$$E(s)=R(s)-B(s)$$



规定
量$c($
差为系 … 的误差 … 即

$r(t)$作用下的误差传递函数
取

$n(t)$作用下系统的误差传递函数，取$r(t)$=0时的$E(s)$/ $N(s)$。

$$G_{Be}(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$G_{Ben}(s)=\frac{E_n(s)}{N(s)}=\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

系统的总误差:

$$E_{\sum}(s)=G_{Be}(s)R(s)+G_{Ben}(s)N(s)$$

6. 闭环系统的特征方程

(Characteristic equation of close-loop systems)

$D(s)=1+G_1(s)G_2(s)H(s)=0$

——闭环系统的特征方程

如果将上式改写成如下形式：

$$s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\ \ldots\ +\alpha_1 s+\alpha_0=(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)=0$$

则$-p_1,-p_2,\ldots,-p_n$称为特征方程的根，或称为闭环系统的极点。

如果系统中控制装置的参数设置，能满足

$|G_1(s)G_2(s)H(s)|>>1$及$|G_1(s)H(s)|>>1$

系统的总输出表达式:

$$C_{\Sigma}(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}+\frac{G_2(s)N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

可近似为: $C_{\Sigma}(s)\approx\frac{1}{H(s)}R(s)+0\cdot N(s)$

即: $E_{\Sigma}(s) = R(s)-B(s) = R(s)-H(s)C_{\Sigma}(s) \approx 0$

表明：采用反馈控制的系统，适当地匹配结构参数，有可能获得较高的工作精度和很强的抑制干扰的能力，同时又具备理想的复现、跟随指令输入的性能，这是反馈控制优于开环控制之处。

返回

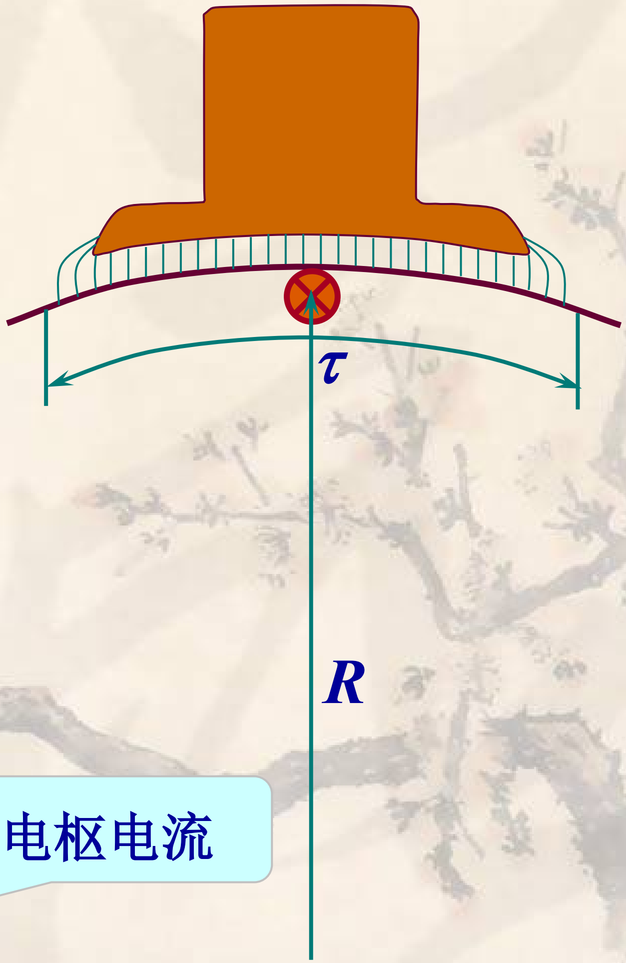
电磁转矩

- 电枢绕组串联总匝数： N
- 电枢绕组并联支路数：$2a$
- 总导体数： $2N\cdot 2a = 4aN$
- 电枢的周长： $2\pi R = 2p\tau$
- 电磁转矩：

$$
\begin{aligned}
M &= 4aN\cdot FR \\
&= 4aN\cdot\frac{p\tau}{\pi}\cdot Bli \\
&= 4aN\cdot\frac{p\tau}{\pi}\frac{\varphi}{\tau l}\cdot li \\
&= 4aN\cdot\frac{p}{\pi}\cdot\varphi i \\
&= \frac{2pN}{\pi}\cdot\varphi\cdot 2ai \\
&= C_m i_a
\end{aligned}
$$

C_m:电动机轴转矩系数

i_a:电枢电流



电动势

每个导体：$e = B\,l\,v$

- 导体切割磁场线的线速度：
- 电动势：

$$v = \frac{2\pi R}{60}n = \frac{2p\tau}{60}n$$

$$E = 2N\,e$$

$$= 2N\,B\,l\,v$$

$$= 2N\cdot\frac{\varphi}{\tau l}\cdot l\cdot\frac{2p\tau}{60}n = \frac{4pN}{60}\varphi\,n$$

$$= C_d\omega$$

Cd为电动势系数

ω为电动机轴角速度