第八章 离散时间系统的变换域分析

§8.1 引　言

- 离散时间系统的变换域分析法就是z变换分析法：

  (1) 将激励信号分解为一系列变幅的正弦序列加权和的形式；

  (2) 求每个正弦序列单独作用到系统的响应；

  (3) 运用叠加原理求出系统总的响应。

- 其优点在于：

  (1) 一次性求出全响应；

  (2) 将卷积的运算转换为乘积的运算。

§8.2 z变换的定义及其收敛域/收敛区

一、z变换的定义

➢ **根据理想抽样信号可知：**

$$f_\delta(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-kT)$$

其傅里叶变换为

$$F_\delta(j\omega) = F.T.\{f_\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-kT)\,e^{-j\omega t}dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\delta(t-kT)dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-j\omega kT}$$

上式是一个无穷级数序列求和的问题，$F_\delta(j\omega)$是否存在取决于$f(kT)e^{-j\omega kT}$是否收敛。

$$\boxed{F_\delta(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-j\omega kT}}$$

为了保证级数序列的收敛性，用指数序列收敛因子$e^{-\sigma kT}$**去乘**$f(kT)e^{-j\omega kT}$**，则有**

$$F_\delta(\sigma + j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-j\omega kT} \cdot e^{-\sigma kT} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-(\sigma+j\omega)kT}$$

即理想抽样信号的拉普拉斯变换为

$$F_\delta(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-skT}$$

令复变量$z = e^{sT}$**，且抽样间隔**$T = 1$**，则有**

$$F_d(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

此式称为双边z变换（Double-sided z transform, Z.T.）。

- 实际工程中，绝大多数的激励信号都是因果信号。在离散时间系统中，若$k < 0, f(k) = 0$，则称为**因果序列/有始序列**。

- 若$k < k_1, f(k) = 0$，则称为**右边序列/单边序列**。

- 本课程研究的重点是**单边z变换**（**Single-sided z transform**）：

$$F(z) = \mathscr{Z}\{f(k)\} = Z.T.\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots$$

原函数$f(k) \leftrightarrow$ 生成函数$F(z)$

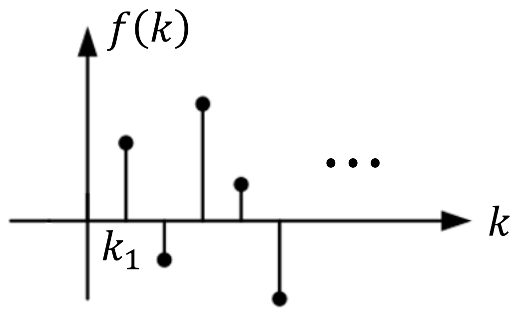
其中，z为复变量，其**实部**Re(z)和**虚部**Im(z)组成的平面称为z**平面**。

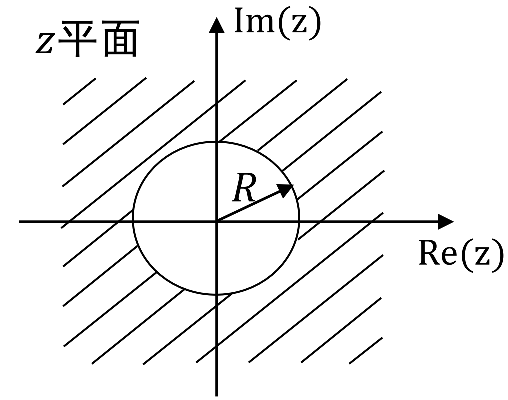
二、z变换的收敛域

- 对于任意序列$f(k)$，使$F(z)$存在且有限的z的取值范围称为$F(z)$的收敛域/收敛区，即使$F(z)=Z.T.\{f(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}$收敛的$z$的取值范围。

- 右边序列的收敛域：

$$f(k)=\begin{cases} f(k) & k\ge k_1 \\ 0 & k<k_1 \end{cases}$$





$$F(z)=Z.T.\{f(k)\}=\sum_{k=k_1}^{\infty}f(k)z^{-k}=f(k_1)z^{-k_1}+f(k_1+1)z^{-(k_1+1)}+\cdots$$

这是一个无穷级数的求和，可以采用级数理论的根值法求解$F(z)$的收敛域，即$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f(k)z^{-k}|}<1$。

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f(k)z^{-k}|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f(k)||z^{-k}|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f(k)|}\,|z^{-1}|<1$$

收敛域： $|z|>\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|f(k)|}=R$

三、零极点分布图

- 与拉普拉斯变换类似，一个**实的**离散时间信号的z变换是复变量z的**有理函数**，即$F(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$

- 同样，$F(z)$的性质也是由其零点和极点决定的。

  零点：使$F(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=0$，即$N(z)=0$的z的取值

  极点：使$F(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\infty$，即$D(z)=0$的$z$的取值

- 将$F(z)$的所有零点(○)和极点(×)画在z平面上，就得到$F(z)$的**零极图/极零图**。

- 显然，收敛域内**不能有极点**，**可以有零点**。对于右边序列而言，极点一定在某个圆的内部，或者在圆的边界上。

四、常用右边序列的单边z变换

1. 单位函数

$$f(k)=\delta(k)\qquad F(z)=Z.T.\{\delta(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=\delta(0)z^{-0}=1$$

收敛域： 整个z平面

2. 单位阶跃序列

$$f(k)=\varepsilon(k)\qquad F(z)=Z.T.\{\varepsilon(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon(k)z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$

这是一个公比为z^{-1}的无穷等比级数，只有当$|z^{-1}|<1$时，级数收敛，且等于$\frac{1}{1-z^{-1}}$。

故 $F(z)=Z.T.\{\varepsilon(k)\}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$　　**收敛域：** $|z|>1$

3. 单边指数序列

$$f(k) = v^k \varepsilon(k)$$

$$F(z) = Z.T.\{v^k \varepsilon(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \varepsilon(k) z^{-k} = 1 + vz^{-1} + v^2 z^{-2} + v^3 z^{-3} + \cdots$$

这是一个公比为vz^{-1}的无穷等比级数，只有当$|vz^{-1}| < 1$时，级数收敛，且等于$\frac{1}{1-vz^{-1}}$。

故 $F(z) = Z.T.\{v^k \varepsilon(k)\} = \dfrac{1}{1 - vz^{-1}} = \dfrac{z}{z - v}$　　**收敛域：** $|z| > |v|$

例如：

$$f(k) = e^{\lambda kT} \varepsilon(k)$$

$$F(z) = Z.T.\{e^{\lambda kT} \varepsilon(k)\} = Z.T.\left\{\left(e^{\lambda T}\right)^k \varepsilon(k)\right\} = \frac{z}{z - e^{\lambda T}}$$

收敛域： $|z| > |v| = \left|e^{\lambda T}\right|$

4. 复指数序列

$$f(k)=e^{j\omega_0 k}\varepsilon(k)$$

$$F(z)=Z.T.\{e^{j\omega_0 k}\varepsilon(k)\}=Z.T.\left\{\left(e^{j\omega_0}\right)^k\varepsilon(k)\right\}=\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}$$

收敛域： $|z|>|v|=\left|e^{j\omega_0}\right|=1$

5. 单边余弦序列

$$f(k)=\cos\omega_0 k\,\varepsilon(k)$$

$$\begin{aligned}F(z)=Z.T.\{\cos\omega_0 k\,\varepsilon(k)\}&=Z.T.\left\{\left[\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 k}+e^{-j\omega_0 k}\right)\right]\varepsilon(k)\right\}\\&=Z.T.\left\{\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 k}\varepsilon(k)+e^{-j\omega_0 k}\varepsilon(k)\right]\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}+\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}\end{aligned}$$

收敛域： $|z|>1$

同理可得单边正弦序列： $f(k)=\sin\omega_0 k\,\varepsilon(k)$

$$F(z)=Z.T.\{\sin\omega_0 k\,\varepsilon(k)\}=\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

收敛域： $|z|>1$

常用的单边序列的z变换参考表8-1 (P. 354)

§8.3 z变换的性质

一、线性特性

若$f_1(k) \longleftrightarrow F_1(z), f_2(k) \longleftrightarrow F_2(z)$，且$a_1, a_2$为常数，则

$$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k) \longleftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$$

二、 z域尺度变换特性

若$f(k) \longleftrightarrow F(z)$，且$a$为常数，则$a^k f(k) \longleftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$

已知 $\varepsilon(k) \longleftrightarrow \dfrac{z}{z-1}$

则 $v^k \varepsilon(k) \longleftrightarrow \dfrac{\frac{z}{v}}{\frac{z}{v}-1} = \dfrac{z}{z-v}$ $\qquad e^{\lambda kT}\varepsilon(k) \longleftrightarrow \dfrac{\frac{z}{e^{\lambda T}}}{\frac{z}{e^{\lambda T}}-1} = \dfrac{z}{z-e^{\lambda T}}$

三、增序特性

若有始序列$f(k) \leftrightarrow F(z)$，且$n > 0$，则

$$f(k+n) \leftrightarrow z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) z^{-k} \right]$$

当$n = 1$时，有$f(k+1) \leftrightarrow z[F(z) - f(0)]$

当$n = 2$时，有$f(k+2) \leftrightarrow z^2[F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}]$

四、减序特性

若有始序列$f(k) \leftrightarrow F(z)$，且$n > 0$，

则$f(k-n) \leftrightarrow z^{-n} F(z)$

已知 $\delta(k) \leftrightarrow 1$ 则 $\delta(k-n) \leftrightarrow z^{-n}$

已知 $v^k \varepsilon(k) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-v}$ 则 $v^{k-1} \varepsilon(k-1) \leftrightarrow z^{-1} \dfrac{z}{z-v} = \dfrac{1}{z-v}$

五、z域微分特性

若$f(k) \leftrightarrow F(z)$，则$kf(k) \leftrightarrow -z\dfrac{dF(z)}{dz}$

已知 $\varepsilon(k) \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1}$ 则 $k\varepsilon(k) \leftrightarrow -z\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z}{z-1}\right) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$

$$v^{k-1}k\varepsilon(k) = v^{-1}v^k k\varepsilon(k) \leftrightarrow v^{-1}\frac{\frac{z}{v}}{\left(\frac{z}{v}-1\right)^2} = \frac{z}{(z-v)^2}$$

六、卷积定理

若$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z)$，$f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$，则$f_1(k) * f_2(k) \leftrightarrow F_1(z)F_2(z)$

七、初值定理

若有始序列$f(k)$的单边z变换为$F(z)$，则$\lim\limits_{k\to 0} f(k) = \lim\limits_{z\to\infty} F(z)$

八、终值定理

若有始序列$f(k)$的单边z变换为$F(z)$，$f(k)$的终值存在并且有界，则$\lim\limits_{k\to\infty} f(k) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)F(z)$

例：求下列离散时间信号的单边z变换。

(1) $f_1(k)=(2k-3)\varepsilon(k)$ (2) $f_2(k)=3\delta(k-2)-5\delta(k-3)$

解：(1) 根据z域微分特性，可知其单边z变换为

$$F(z)=Z.T.\{(2k-3)\varepsilon(k)\}=Z.T.\{2k\varepsilon(k)-3\varepsilon(k)\}$$

$$=\frac{2z}{(z-1)^2}-\frac{3z}{z-1}$$

$$=\frac{-3z^2+5z}{(z-1)^2}$$

(2) 根据减序特性，可知其单边z变换为

$$F(z)=Z.T.\{3\delta(k-2)-5\delta(k-3)\}=3z^{-2}-5z^{-3}$$

§8.4 反z变换

- 与求解拉普拉斯反变换类似，求解z变换的反变换也采用部分分式展开法，即将$F(z)$展开成一系列部分分式加权和的形式，然后利用基本变换对逐项对应到时域当中。
- 常用的基本变换对：

$$(1)\ \ Av^k\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{Az}{z-v}$$

$$(2)\ \ Av^{k-1}\varepsilon(k-1) \leftrightarrow \frac{A}{z-v}$$

$$(3)\ \ Akv^{k-1}\varepsilon(k) \leftrightarrow \frac{Az}{(z-v)^2}$$

$$(4)\ \ A(k-1)v^{k-2}\varepsilon(k-1) \leftrightarrow \frac{A}{(z-v)^2}$$

- 部分分式中，待定系数的求解方法与拉普拉斯反变换待定系数的求解方法相同。

例：已知z变换如下，求其原序列$f(k)$， $f(k)$均为有始序列。

$$(1)\ F(z)=\frac{z^2+2z}{z^2-0.5z-0.5};\quad (2)\ F(z)=\frac{5z^2-8z}{z^2-3z+2}$$

解：(1) 将$F(z)$进行部分分式展开得

$$F(z)=\frac{z^2+2z}{z^2-0.5z-0.5}=z\cdot\frac{z+2}{(z-1)(z+0.5)}=z\cdot\left(\frac{2}{z-1}+\frac{-1}{z+0.5}\right)=\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z+0.5}$$

故其原序列为

$$f(k)=2\varepsilon(k)-(-0.5)^k\varepsilon(k)=[2-(-0.5)^k]\varepsilon(k)$$

(2) 将$F(z)$进行部分分式展开得

$$F(z)=\frac{5z^2-8z}{z^2-3z+2}=z\cdot\frac{5z-8}{(z-1)(z-2)}=z\cdot\left(\frac{3}{z-1}+\frac{2}{z-2}\right)=\frac{3z}{z-1}+\frac{2z}{z-2}$$

故其原序列为

$$f(k)=3\varepsilon(k)+2\cdot 2^k\varepsilon(k)=\left(3+2^{k+1}\right)\varepsilon(k)$$

§8.5 离散时间系统的z变换分析法

一、运用z变换求系统的全响应

对于一个二阶系统，其差分方程为

$$y(k+2)+a_1y(k+1)+a_0y(k)=b_2e(k+2)+b_1e(k+1)+b_0e(k)$$

方程两边同时求z变换，可得

$$z^2[Y(z)-y(0)-y(1)z^{-1}]+a_1z[Y(z)-y(0)]+a_0Y(z)=$$
$$b_2z^2[E(z)-e(0)-e(1)z^{-1}]+b_1z[E(z)-e(0)]+b_0E(z)$$

整理上式可得响应的z变换为

$$Y(z)=\frac{b_2z^2E(z)+b_1zE(z)+b_0E(z)+(z^2+a_1z)y(0)+zy(1)-(b_2z^2+b_1z)e(0)-b_2ze(1)}{z^2+a_1z+a_0}$$

其中， $y(0)=y_{zi}(0)+y_{zs}(0),\qquad y(1)=y_{zi}(1)+y_{zs}(1)$

则系统的全响应为 $y(k)=I.Z.T.\{Y(z)\}$

例：已知一个离散时间系统的差分方程为$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=e(k+1)+e(k)$。当$e(k)=\varepsilon(k)$且初始条件为$y(0)=0,y(1)=0$时，求系统的全响应。

解：对差分方程两边同时求z变换，可得

$$z^2[Y(z)-y(0)-y(1)z^{-1}]-5z[Y(z)-y(0)]+6Y(z)=z[E(z)-e(0)]+E(z)$$

整理上式可得

$$Y(z)=\frac{zE(z)+E(z)+(z^2+5z)y(0)+zy(1)-ze(0)}{z^2-5z+6}$$

将$E(z)=\frac{z}{z-1},y(0)=0,y(1)=0,e(0)=1$代入上式，得响应的z变换为

$$Y(z)=\frac{2z}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{z}{z-1}+\frac{-2z}{z-2}+\frac{z}{z-3}$$

运用反z变换，可得系统的全响应为

$$y(k)=I.Z.T.\{Y(z)\}=\varepsilon(k)-2\cdot 2^k\varepsilon(k)+3^k\varepsilon(k)=(1-2^{k+1}+3^k)\varepsilon(k)$$

二、运用z变换求系统的零状态响应

已知离散时间系统的零状态响应是激励信号与单位函数响应的卷积和，即

$$y_{zs}(k) = e(k) * h(k)$$

若响应信号$y_{zs}(k)$和激励信号$e(k)$的z变换分别为$Y_{zs}(z)$和$E(z)$，则根据卷积定理有

$$Y_{zs}(z) = E(z)H(z), \qquad H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{E(z)}$$

$H(z)$称为z域内的系统函数，反映了系统零状态响应与激励之间的关系。

- 离散时间系统对任意激励信号零状态响应的**求解步骤**：

(1) 求激励信号的**z变换**$E(z)$；

(2) 求**系统函数**$H(z)$；

(3) 计算**响应的z变换**$Y_{zs}(z) = E(z)H(z)$；

(4) 通过**反z变换**求时域响应$y_{zs}(k) = I.Z.T.\{Y_{zs}(z)\}$。

- 求解$H(z)$的方法：

(1) 运用**单位函数响应**的z变换：$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$

(2) 通过**差分方程**求解：

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_0 y(k) = b_m e(k+m) + b_{m-1}e(k+m-1) + \cdots + b_0 e(k)$$

$$H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

也就是将转移算子$H(S)$中的**移序算子S全部改成z**。

三、运用时域法求系统的零输入响应，运用z变换求系统的零状态响应

例：已知一个因果离散时间系统的系统函数$H(z)=\frac{z(7z-2)}{(z-0.5)(z-0.2)}$**，当**$e(k)=\varepsilon(k)$**且初始条件为**$y(0)=9, y(1)=13.9$**时，求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。**

解：(1) 运用z变换求系统的零状态响应$y_{zs}(k)$**：**

激励信号的z变换为 $E(z)=Z.T.\{\varepsilon(k)\}=\frac{z}{z-1}$

系统的系统函数为 $H(z)=\frac{z(7z-2)}{(z-0.5)(z-0.2)}$

响应的z变换为

$$Y_{zs}(z)=E(z)H(z)=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z(7z-2)}{(z-0.5)(z-0.2)}=\frac{12.5z}{z-1}+\frac{-5z}{z-0.5}+\frac{-0.5z}{z-0.2}$$

通过反z变换得系统的零状态响应为

$$y_{zs}(k)=I.Z.T.\{Y_{zs}(z)\}=12.5\varepsilon(k)-5\cdot 0.5^k\varepsilon(k)-0.5\cdot 0.2^k\varepsilon(k)$$

$$\boxed{y_{zs}(k) = 12.5\varepsilon(k) - 5\cdot 0.5^k\varepsilon(k) - 0.5\cdot 0.2^k\varepsilon(k)}$$

(2) 运用时域法求零输入响应$y_{zi}(k)$：

根据系统的系统函数，知其特征方程为 $(z-0.5)(z-0.2)=0$

得到特征根为 $v_1=0.5, v_2=0.2$

则零输入响应的形式解为 $y_{zi}(k)=c_1v_1^k+c_2v_2^k=c_1(0.5)^k+c_2(0.2)^k$

求零输入响应的初始条件

$$y_{zi}(0)=y(0)-y_{zs}(0)=9-(12.5-5-0.5)=2$$

$$y_{zi}(1)=y(1)-y_{zs}(1)=13.9-(12.5-5\cdot 0.5-0.5\cdot 0.2)=4$$

将初始条件代入零输入响应的形式解得

$$\begin{aligned} y_{zi}(0)&=c_1+c_2=2 \\ y_{zi}(1)&=0.5c_1+0.2c_2=4 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} c_1&=12 \\ c_2&=-10 \end{aligned}$$

系统的零输入响应为 $y_{zi}(k)=[12(0.5)^k-10(0.2)^k]\varepsilon(k)$

故系统的全响应为

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=12.5\varepsilon(k)+7(0.5)^k\varepsilon(k)-10.5(0.2)^k\varepsilon(k)$$

四、离散时间系统的稳定性

- 稳定系统：对于有界的激励信号产生有界的响应信号的系统，即系统具备有限输入-有限输出的BIBO（Boundary-input, boundary-output）特性。
- 不稳定系统：对于有界的激励信号产生无限增加的响应信号的系统。
- 临界稳定系统：对于有界的激励信号产生幅度恒定的振荡信号的系统。

➢ 稳定系统：对于有界的激励信号产生有界的响应信号的系统。

若$|e(k)| \le M_e$，则$|y(k)| \le M_y$

其中M_e和M_y为有限的正实数

➢ 从时域角度分析离散时间系统稳定的条件：

$$y_{zs}(k) = e(k) * h(k) = h(k) * e(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)e(k-j)$$

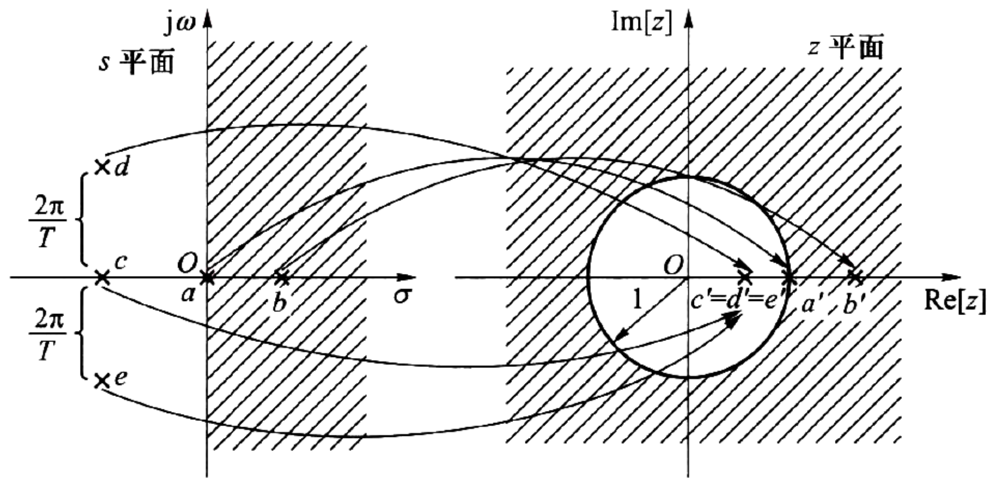
$$|y_{zs}(k)| = \left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)e(k-j)\right| \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h(j)| \cdot |e(k-j)| \le M_e \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h(j)| \le M_y$$

使得上式成立的条件是$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|h(j)| < \infty$，即离散时间系统稳定的充分必要条件是系统单位函数响应$h(k)$满足绝对可和。

➢ 从z域角度分析离散时间系统稳定的条件：

$$z_i = e^{s_i T} = e^{(\sigma_i + j\omega_i)T} = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T} = |z_i| e^{j\theta_i}$$

$$|z_i| = e^{\sigma_i T}, \qquad \theta_i = \omega_i T$$



s平面内虚轴上的极点 ⟶ z平面单位圆上的极点，临界稳定

s平面左半平面的极点 ⟶ z平面单位圆内的极点，稳定

s平面右半平面的极点 ⟶ z平面单位圆外的极点，不稳定

系统稳定的条件是系统函数$H(z)$的极点都在单位圆内，即系统函数$H(z)$的收敛域包含单位圆。

本章小结

基本概念：z变换的定义、z变换的收敛域、零极点分布图、系统函数、离散时间系统的稳定性。

基本运算：z变换和反z变换的求解、常用右边序列的z变换、z变换的性质、离散时间系统的z变换分析方法。