第九章第三节 曲面及其方程

本节学习的重点是记住一些结论和公式。

注意，一个曲面的方程和这个曲面之间需满足一一对应的关系。
关于曲面，主要研究下面两个基本问题：
（1）已知曲面，建立其方程.
（2）已知曲面的方程，研究曲面的形状.

一、球面及其方程

1. 以点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心，以 r 为半径的球面的方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

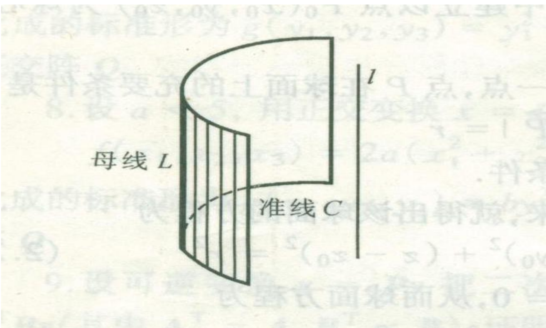
2. 球心在原点，半径为 r 的球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=r^2$.

注：（1）要记住球面方程的形式，给出球心和半径，要能写出球面的方程。
（2）看到方程，要能知道它是否表示球面。

3. 球面方程是一个特殊的三元二次方程，它的特点是：x^2, y^2, z^2 的系数相同，没有 xy, yz, zx 这样的混合项.

二、柱面及其方程

1. **柱面的定义：** 由动直线 L 沿着一条定曲线 C 平行于定直线 l 移动所形成的曲面称为柱面.
定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线.
注：动直线 L 在移动过程中每一瞬间对应的直线都称为柱面的母线.



2. 一个只含两个变量 x, y 的方程 $f(x,y)=0$ 在 $Oxyz$ 坐标系下表示母线平行于 z 轴，准线为 Oxy 面上的曲线 $f(x,y)=0$ 的柱面.

方程 $g(y,z)=0$ 和 $h(z,x)=0$ 在 $Oxyz$ 坐标系下分别表示母线平行于 x 轴和 y 轴的柱面.

总的说来，一个只含两个变量的方程表示一个柱面，其母线平行于缺少的那个变量所对应的坐标轴.

3. **例** 在空间直角坐标系下，求准线为 Oxy 面上的圆 $C: x^2+y^2=1$，母线平行于向量 $\vec{s}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ 的柱面的方程。

注：柱面上的每一点都在柱面的某一条母线上，柱面的每一条母线都与准线有交点。

解 设 $P(x,y,z)$ 为该柱面上任意一点，并设过点 P 的母线与准线 C 的交点为 $P_0(x_0,y_0,0)$，则 $\overrightarrow{P_0P} /\!/ \vec{s}$，$\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{s}$ 的坐标成比例，$\dfrac{x-x_0}{-1}=\dfrac{y-y_0}{3}=\dfrac{z}{1}$.

由上式求得 $\begin{cases} x_0 = x+z \\ y_0 = y-3z \end{cases}$.

因为点 P_0 在圆 C 上，P_0 的坐标满足方程 $x_0^2+y_0^2=1$，所以所求柱面的方程为 $(x+z)^2+(y-3z)^2=1$.

注 1　该题的想法是：将柱面上任一点 P 与准线上的点 P_0 建立联系，找出 P_0 的坐标与 P 的坐标之间的关系，通过 P_0 的坐标所满足的方程求出 P 的坐标所满足的方程。这是求曲面方程的一种重要的方法，后面求旋转面的方程也是按这个方法做的。

注 2　当柱面的母线不平行于坐标轴时，柱面的方程一般是很复杂的。

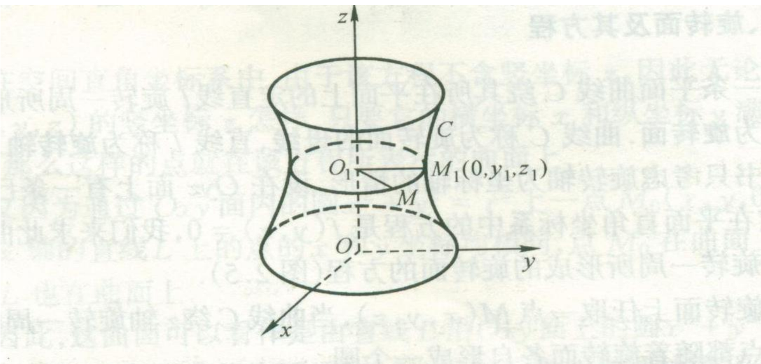
注 3　（1）把方程 $x^2+y^2=1$ 放在空间直角坐标系看，它表示一个柱面.（2）把方程 $x^2+y^2=1$ 放在 Oxy 面上看，它表示 Oxy 面上的一个圆。（3）“准线为 Oxy 面上的圆 $C:x^2+y^2=1$”这句话的意思是把方程 $x^2+y^2=1$ 局限到 Oxy 面上看它表示一个圆。

三、旋转面及其方程

1. 由一条平面曲线 C 绕其所在平面上的定直线 l 旋转一周所形成的曲面称为旋转面. 曲线 C 称为旋转面的母线，直线 l 称为旋转轴.

注 1：能在一个平面里边画出来的曲线称为平面曲线。
注 2：曲线 C 在旋转的过程中每一瞬间对应的曲线都称为母线。
注 3：我们现在只考虑旋转轴为坐标轴的情形.

2. **例**　设在 Oyz 面上有一条曲线 C，它在平面直角坐标系 Oyz 面中的方程是 $f(y,z)=0$，求曲线 C 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转面的方程（见下图）.



注：当曲线 C 绕 z 轴旋转一周时，曲线 C 上的每一点也都跟着绕 z 轴旋转，各自形成一个圆，该旋转面可以看成这些圆摞在一起所形成的。这意味着该旋转面上的任一点 M 一定在曲线 C 上的某个点 M_1 绕 z 轴旋转所形成的圆上。

解　在旋转面上任取一点 $M(x,y,z)$，设点 M 在由曲线 C 上的点 $M_1(0,y_1,z_1)$ 绕 z 轴旋转所形成的圆上，显然 $z_1=z$，记圆心为 $O_1(0,0,z_1)$，则 $|\overrightarrow{O_1M}|=|\overrightarrow{O_1M_1}|$，即 $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$，亦即 $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

因为 M_1 在母线 C 上，所以 $f(y_1,z_1)=0$.将 $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z_1=z$ 代入上式，得

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

这就是所求旋转面的方程。

可见，在母线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中将 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得出曲线 C 绕 z 轴旋转所形成的旋转面的方程.

注 1：由于曲线 C 上的点 M_1 绕 z 轴旋转时高度总是不变的，所以由准线 C 的方程写出绕 z 轴旋转所形成的旋转面的方程时，方程 $f(y,z)=0$ 中的 z 不变。

注 2：为什么是 $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$，这里为什么要有 $\pm$ 号呢？原因是：曲线 C 有可能在右边，也可能在左边，Oyz 面的左右两边都有一条曲线可看作曲线 C.

3. 由上面的讨论可知，当旋转轴为某个坐标轴而母线在含这个坐标轴的某个坐标平面上时，根据母线的方程就可直接写出旋转面的方程．结论如下：

（1）Oxy 面上的曲线 $f(x,y)=0$，绕 x 轴旋转所形成的旋转面的方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$，绕 y 轴旋转所形成的旋转面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

（2）Oyz 面上的曲线 $f(y,z)=0$，绕 y 轴旋转所形成的旋转面的方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$，绕 z 轴旋转所形成的旋转面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

（3）Oxz 面上的曲线 $f(x,z)=0$，绕 x 轴旋转所形成的旋转面的方程为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$，绕 z 轴旋转所形成的旋转面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

4. 由上述结论可以看出，以坐标轴为旋转轴的旋转面的方程的特点是：x,y,z 中有两个变量总以平方和的形式出现，而旋转轴就是另一变量所对应的坐标轴.

例　求 Oyz 面上的直线 $y=az$ 绕 z 轴旋转一周所形成的圆锥面的方程。

解　因为旋转轴为 z 轴，所以只要将方程 $y=az$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得到所求圆锥面的方程为 $\pm\sqrt{x^2+y^2}=az$，即 $x^2+y^2-a^2z^2=0$.

例　曲面 $x^2+y^2=az$ 叫做**旋转抛物面**，指出其旋转轴和母线.

解　旋转轴为 z 轴，母线为 Oyz 面上的抛物线 $y^2=az$ 或 Ozx 面上的抛物线 $x^2=az$.

四、空间曲线及其方程

1. 正如空间直线可以看作两个平面的交线一样，一条空间曲线也可以看作是两个曲面的交线.

设曲面 S_1 和 S_2 的方程分别为 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$，则曲面 S_1 和 S_2 的交线的方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，该式称为**空间曲线的一般式方程**.

请注意，在空间直角坐标系中，曲面的方程一般只含一个关系式，而曲线的方程一般是由两个关系

式联立起来的方程组.

例如，在空间直角坐标系下，方程 $x^2+y^2=1$ 表示一个柱面，是一个母线平行于 z 轴的柱面，它不表示圆. Oxy 面上以原点为圆心、半径为 1 的圆在空间直角坐标系下的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{cases}$. 这个圆有时也说成 “$Oxy$ 面上的圆 $x^2+y^2=1$”。

2. 空间曲线还可以看成动点运动的轨迹．这条曲线的方程可以用动点关于时间 t 的运动方程表达：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，这个含有参数 t 的方程叫做**空间曲线的参数方程**.

3. 在计算三重积分和曲面积分时，经常需要知道空间中的一条曲线在某个坐标面上的投影曲线的方程及其图形，为此，我们来讨论这个问题。

设有空间曲线 C，过曲线 C 上的每一点作 Oxy 面的垂线，这些垂线形成一个母线平行于 z 轴且通过曲线 C 的柱面，称为曲线 C 关于 Oxy 面的**投影柱面**．这个柱面与 Oxy 面的交线称为曲线 C 在 Oxy 面上的**投影曲线**，简称**投影**.

设曲线 C 的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，另设由该式**消去 z 所得的方程为** $H(x,y)=0$.

由于 $H(x,y)=0$ 中不含 z，所以它表示一个母线平行于 z 轴的柱面．又因为曲线 C 上的点都满足 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，所以曲线 C 上的点也都满足 $H(x,y)=0$，这说明曲线 C 上的点都在这个柱面上．因此，$H(x,y)=0$ 就是曲线 C 关于 Oxy 面的投影柱面的方程．曲线 C 在 Oxy 面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$.

同理，从 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 分别消去 x 和 y，并分别与 $x=0$ 和 $y=0$ 联立，就可得到曲线 C 在 Oyz 面和 Ozx 面上的投影曲线的方程.

第四节　二次曲面

1. 一个三元二次方程所表示的曲面叫做**二次曲面**．前面讲过的球面、二次柱面和圆锥面都是二次曲面．

本节再介绍几种常见的二次曲面．在这里，我们首先给出它们的标准方程，然后从它们的标准方程出发来研究曲面的形状．

2. 关于这一节，目前重点要掌握三个方面的内容：（1）曲面的名称；（2）方程的形式；（3）怎样画出曲面的图形。

3. 这里研究曲面的方法称为**截痕法.**

截痕法的做法是：用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的形状．

画曲面的图形时，我们主要是要画出曲面上一些有代表性的曲线，这些有代表性的曲线指的是曲面与坐标面的交线以及曲面与平行于坐标面的平面的交线，画出这些有代表性的曲线，就可围出一个曲面。

4. 当所给二次曲面的方程不是标准方程时，怎样把它化成标准方程，从而进一步研究曲面的形状，需要讲完二次型的问题之后再进行讨论。