2019 年《概率论与数理统计》期末考试题题解

客观题速查

一、 填空题

1	2	3	4	5	6
$\frac{8}{15}$	$\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$t(2)$	0.215

二、 选择题

1	2	3	4
D	C	D	B

完整解析

一、 填空题

1. $P(AB) = P(A|B)P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.4 - 0.12 = 0.68$

$$P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 0.32$$

$$P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right) = \frac{P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{0.32}{1 - 0.4} = \frac{8}{15}$$

2. 小鸟试飞k次后飞出，说明前$k-1$ 次都没飞出，第k次尝试后飞出了，因此

$$P(X = k) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$$

3. 由正态分布的可加性知$W \sim N(4,5)$，$V \sim N(-4a, 4 + a^2)$

$$E(X^2) = D(X) + E(X)^2 = 4$$
$$E(Y^2) = D(Y) + E(Y)^2 = 17$$

   由$Cov(X,Y) = \rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = E(XY) - E(X)E(Y)$得到$E(XY) = 1$

   $E(WV) = E\big((X+Y)(X-aY)\big) = E(X^2 + (1-a)XY - aY^2) = 5 - 18a$

   $Cov(W,V) = E(WV) - E(W)E(V) = 5 - 2a$

   令$\rho_{WV} = 0$，此时$Cov(W,V) = 0$，解得$a = \frac{5}{2}$

4. 在$Y=2$的条件下，X服从区间[0,2]上的均匀分布，因此$P(X\le 1|Y=2)=\frac{1}{2}$

5. 易知$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，$X_3^2+X_4^2\sim\chi^2(2)$

   因此$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}=\frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2}{2}}}\sim t(2)$

6. 有偏样本方差$S'^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\left(\frac{\sum_{i=1}^{9}x_i^2}{n}-\overline{x}\quad\frac{2}{9}\right)\approx 0.191$

   无偏样本方差$S^2=S'^2\times\frac{n}{n-1}\approx 0.215$

二、 选择题

1. 题意为 A、B 为互斥事件，若 A、B 为对立事件，则$\overline{A}=B$，$\overline{B}=A$，二者不相容，若 A、B 不为对立事件，则$\overline{A}$、$\overline{B}$相容，故 A、B 错误。$P(AB)=0$，$P(A)\ne 0,P(B)\ne 0$，C 错误。$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-0=P(A)$,D 正确。

2. $P(X=Y)=P(X=-1,Y=-1)+P(X=1,Y=1)$
   $=P(X=-1)P(Y=-1)+P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{2}$

3. $Y=n-X$，因此$\rho_{XY}=-1$。

4. 显著性水平α变小时，μ的置信区间变大，因此必接受H_0。

三、

解: ∵ $g(x)=1-e^{-x}$ 在R上单调递增

∴ $g(x)$的反函数 $h(y)=-\ln(1-y)$ 在$(-\infty,1)$上单调递减

而 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

∴ $f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[\ln(1-y)]^2}{2}}\cdot\left|\frac{1}{1-y}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-y)}e^{-\frac{[\ln(1-y)]^2}{2}}$

当 $y<1$时

而当$y\ge 1$时, $f_Y(y)=0$

∴ $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-y)}e^{-\frac{[\ln(1-y)]^2}{2}}, & y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

四、

解：Z仅能取0和1

$P(Z=1)=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}$

$P(Z=0)=1-P(Z=1)=\frac{7}{9}$

$\therefore Z\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}$

五、

解：易知 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，

$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0\le y\le x\\ 0, & 其它\end{cases}$

$\therefore f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0\le y\le x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$\therefore f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_y^1\frac{1}{x}\,dx=-\ln y\quad(0<y\le 1)$

$\therefore f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}-\frac{1}{x\ln y}, & 0<y\le x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

六、

解：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其它\end{cases}$

易知当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，当 $z>2$ 时，$F_Z(z)=1$

当 $0\le z\le 2$ 时，

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(|X-Y|\le z)=P(X-z\le Y\le X+z)$

$=(3-1)^2-(2-z)^2\times\frac{1}{4}=-\frac{z^2}{4}+z$

$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ -\frac{z^2}{4}+z, & 0\le z\le 2\\ 1, & z>2\end{cases}$，$f_Z(z)=\begin{cases}-\frac{z}{2}+1, & 0\le z\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$

七、

解：易知 (X,Y) 在 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布

$f(x,y)=\begin{cases}1, (x,y)\in D\\ 0, (x,y)\notin D\end{cases}$，令最大值点与最小值点的距离为 $Z=|X-Y|$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$，当 $z>1$ 时，$F_Z(z)=1$

当 $0\le z\le 1$ 时，

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(|X-Y|\le z)=P(X-z\le Y\le X+z)$

$=1-(1-z)^2=-z^2+2z$

$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}0, z<0\\ -z^2+2z, 0\le z\le 1\\ 1, z>1\end{cases}$，$f_Z(z)=\begin{cases}-2z+2, 0\le z\le 1\\ 0, 其它\end{cases}$

$\therefore E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)dz=\int_0^1(-2z^2+2z)dz=\frac{1}{3}$

八、

解：似然函数 $L(x)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=2^n\cdot e^{-2(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta)}$

对数似然函数 $\ln L(x)=n\ln 2-2(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta)$

$\because \frac{d\ln L(x)}{d\theta}=2n>0$

$\therefore \ln L(x)$ 关于 θ 单调递增，当 $\theta=\min\{x_i\}$ 时，$\ln L(x)$ 取最大值

$\therefore \hat{\theta}=\min\{x_i\}$

九、

解：利用$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

得$P\left(F_{0.975}(n_1-1,n_2-1)<\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}<F_{0.025}(n_1-1,n_2-1)\right)=1-\alpha$

从而得到$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间为$[\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{0.025}(n_1-1,n_2-1)},\frac{\frac{s_1^2}{s_2^2}}{F_{0.975}(n_1-1,n_2-1)}]$

将$n_1=36,n_2=40,\frac{s_1^2}{s_2^2}=1.55,F_{0.975}(35,39)=\frac{1}{F_{0.025}(39,35)}=0.514$

$,F_{0.025}(35,39)=1.91$ 代入得$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间为$[0.81,3.01]$

十、

解：作假设 $H_0: \sigma^2 = 0.0004$，$H_1: \sigma^2 \neq 0.0004$

使用统计量 $\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$

得 $P\left(\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$

∴ 拒绝域为 $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

代入 $\alpha = 0.1$，$n = 15$，$S = 0.025$，$\sigma^2 = 0.0004$ 得

$\chi^2 = 21.875$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 6.571$，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 23.685$

∴ $\chi^2_{1-\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}$，没有落在拒绝域内，接受 H_0

∴ 无显著差别