## 3.2 $n \times n$ 型线性方程组

本节主要研究 $n \times n$ 型线性方程组有唯一解的充要条件及其解法，线性方程组的一般理论及一般方程组的解法将在第 6 章中进行介绍.

### 3.2.1 $n \times n$ 型齐次线性方程组

1. 若 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ 也是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解，则称 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的非零解.

齐次线性方程组的解分为两种情况：（1）只有零解；（2）有非零解.

2. **注：** 当 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解时，它一定是有无穷多个解。

原因：设 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的非零解，则 $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$. 在上式两边乘以数 $k$，得 $\mathbf{A}(k\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

这说明 $\mathbf{x} = k\mathbf{u}$ 都是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解，所以 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有无穷多个解。

3. **定理 3-5**

$n \times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow \left|\mathbf{A}\right| \neq 0$..

$n \times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow \left|\mathbf{A}\right| = 0$.

**注意：** 不要把两种情况搞混了。可以这样来想：

当 $\left|\mathbf{A}\right| \neq 0$ 时，$\mathbf{A}$ 可逆，在 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的两边同时从左侧乘 $\mathbf{A}^{-1}$，得 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$，因此 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解。

这里就和从 $2x = 0$ 消去 2 的感觉一样。

关于有非零解的情况，想一下具体的例子就很清楚了。例如: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解.

### 3.2.2 $n \times n$ 型非齐次线性方程组

1. 对于非齐次线性方程组，它的解的情况比较复杂。它可能有解，也可能无解；有解时，可能是有唯一解，也可能是有无穷多个解。在这一部分中，我们只对 $n \times n$ 型非齐次线性方程组有唯一解的充要条件及其解法进行研究。

例：$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ 无解，$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ 有无穷多个解，$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ 有唯一解

2. **定理 3-6** $n \times n$ 型非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解的充要条件是$|\mathbf{A}| \neq 0$（即 $\mathbf{A}$ 可逆），其解为 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

关于这个定理可以这样想：

当$|\mathbf{A}| \neq 0$ 时，$\mathbf{A}^{-1}$ 存在. 在 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的两边同时从左侧乘 $\mathbf{A}^{-1}$，得 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

所以可以想到 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

上面的思考过程就和由 $2x = 3$ 得到 $x = \dfrac{3}{2}$ 的感觉一样。

3. **定理 3-7** 【克拉默（Cramer）法则】 当$|\mathbf{A}| \neq 0$时，$n \times n$型非齐次线性方程组$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$有唯一解$x_i = \dfrac{|\mathbf{B_i}|}{|\mathbf{A}|}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 其中，$\mathbf{B_i}$是把$\mathbf{A}$的第$i$列换为$\mathbf{b}$所得的矩阵。

4. 解系数矩阵为可逆矩阵的线性方程组共有三种方法:

(1) 初等行变换法$[\mathbf{A}，\mathbf{b}] \xrightarrow{\text{行变换}} [\mathbf{E}，\mathbf{c}]$,解为$\mathbf{x} = \mathbf{c}$ .

(2) 求逆矩阵法$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .

(3) 利用克拉默法则$x_i = \dfrac{|\mathbf{B_i}|}{|\mathbf{A}|}$.

这三种方法的运算量是依次增加的。

**注意：**解方程组一般都是用初等行变换的方法，克拉默法则的优点是可以把解的表达式直接写出来。