# 第 1 章第 2 节　向量与分块矩阵

## （一）向量

1. **定义**　$n$ 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组称为 ***n* 元向量**，这 $n$ 个数称为该向量的 $n$ 个分量，第 $i$ 个数称为第 $i$ 个分量。

**注 1：**这里是从向量的坐标出发来讲向量，这是代数里边向量的定义。

**注 2：**定义中的**“有次序”**指的是先后次序，这个次序给定以后，就不能再变了。

2. （1）$n$ 元向量可以写成一行的形式 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，也可以写成一列的形式 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$，分别称为**行向量和列向量**，也就是**行矩阵和列矩阵**。

（2）规定行向量和列向量都按矩阵的运算法则进行运算，并且总认为 $\mathbf{a}^T \neq \mathbf{a}$ .

（3）专用黑体小写字母 $\mathbf{a},\mathbf{b},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 等表示列向量，行向量则用 $\mathbf{a}^T,\mathbf{b}^T,\boldsymbol{\alpha}^T,\boldsymbol{\beta}^T$ 等表示 。

（4）所讨论的向量在没有指明是列向量还是行向量时，均指列向量。

（5）所有 $n$ 元实向量的集合记作 $\mathbf{R}^n$ .

**注意：上面这些内容需逐条好好掌握。**

3. 专用 $\mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^n$ 表示第 $i$ 个分量为 $1$，其余分量都为 $0$ 的 $n$ 元列向量。例如，若设 $\mathbf{e}_3 \in \mathbf{R}^4$，则

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**注：$\mathbf{e}_i$ 是专用记号。**

4. 分量个数相同的一组列向量叫做一个列向量组；分量个数相同的一组行向量叫做一个行向量组。

5. **向量和矩阵之间的关系：（1）**向量是特殊的矩阵，一个向量组可组成一个矩阵；（2）一个矩阵又可看作是由它的行向量组或列向量组构成的。（3）注意到这种关系，我们可以把矩阵的某些问题与向量组的某些问题进行相互转换，从而使问题便于研究。

## （二）分块矩阵

1. 在本课程中，**讲授分块矩阵主要用于简化证明**。以后也可用分块矩阵的方法来简化某些计算。

2. **定义**　用若干条纵贯整个矩阵的横线和竖线把矩阵 $\mathbf{A}$ 分成许多小块（即子矩阵），以这些小块为元素的形式上的矩阵称为 $\mathbf{A}$ 的**分块矩阵**。

注意：对矩阵进行分块是研究矩阵的一种新的方法，研究的还是原来的矩阵，只是用分块矩阵的形式来代替原来的矩阵而已，所得结果要保证和原矩阵的运算结果一样才行。

**3. 常用的分块方法：**

（1）　把 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 整个作为一块，此时 $\mathbf{A}$ 是一个 $1 \times 1$ 分块矩阵。

（2）　把 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 按列分块为 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$，其中 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 为 $\mathbf{A}$ 的 $n$ 个列向量.

（3） 把 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 按行分块为 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1^T\\ \mathbf{b}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m^T\end{bmatrix}$，其中 $\mathbf{b}_1^T,\mathbf{b}_2^T,\cdots,\mathbf{b}_m^T$ 为 $\mathbf{A}$ 的 $m$ 个行向量。

（4） 把 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 分成一个 2×2 型的分块矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$，其中 $\mathbf{A}_{11}$ 为 $\mathbf{A}$ 的左上角子方阵。

注意：在本课程的学习当中，前两种分块方法用的很多。

4. 形如 $\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{A}_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{ss}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1s}\\ 0 & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{ss}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \cdots & \mathbf{A}_{ss}\end{bmatrix}$

的分块矩阵分别称为分块对角矩阵、分块上三角形矩阵和分块下三角形矩阵。

5. 分块的基本要求（这一部分的内容比较重要，要好好注意）

（1） 计算 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 时，对 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的分块方法需完全一样。

（2） **计算 $\mathbf{AB}$ 时，对 $\mathbf{A}$ 加竖线的位置需和对 $\mathbf{B}$ 加横线的位置相同，对 $\mathbf{A}$ 加竖线的数量也要和对 $\mathbf{B}$ 加横线的数量相同。**

这种要求来自于矩阵乘法的定义，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 要想能相乘，需 $\mathbf{A}$ 的列数等于 $\mathbf{B}$ 的行数，这种关系在对矩阵进行分块时仍然要延续下去。

对 $\mathbf{A}$ 怎样加横线、对 $\mathbf{B}$ 怎样加竖线没有要求。

**例** 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{bmatrix}$,$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\\1&2\\1&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}$ 的列数等于 $\mathbf{B}$ 的行数，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可做乘法运算。

（1）若对 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 按下面方式进行分块，

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{array}\right]=[\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2],\quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}1&2\\1&2\\ \hdashline 1&2\\1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix},$$

则 $\mathbf{AB}=[\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2]\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix}=\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2.$

注：这种分块方法是可以的。要注意做乘法运算时，$\mathbf{A}_1$ 要在 $\mathbf{B}_1$ 前面，$\mathbf{A}_2$ 要在 $\mathbf{B}_2$ 前面。

（2）若对 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 按下面方式进行分块，则分块以后就不能再做乘法运算 $\mathbf{AB}$ 了，因为 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{B}_1$、$\mathbf{A}_2$ 和 $\mathbf{B}_2$ 都做不了乘法运算，所以在做乘法运算 $\mathbf{AB}$ 时，这种分块方法是不可以的。

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{array}\right]=[\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2],\quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}1&2\\1&2\\1&2\\ \hdashline 1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix}$$

（3）若对 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 按下面方式进行分块，则分块以后也做不了乘法运算 $\mathbf{AB}$。因为

$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1, & \mathbf{A}_2\end{bmatrix}$是$1\times2$的分块矩阵，$\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\\mathbf{B}_2\\\mathbf{B}_3\end{bmatrix}$是$3\times1$的分块矩阵，$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1, & \mathbf{A}_2\end{bmatrix}$的列数不等于$\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\\mathbf{B}_2\\\mathbf{B}_3\end{bmatrix}$的行数，$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1, & \mathbf{A}_2\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\\mathbf{B}_2\\\mathbf{B}_3\end{bmatrix}$无法相乘，所以在做乘法运算 **AB** 时，这种分块方法也是不可以的。

（4）对 **A** 和 **B** 按下面方式进行分块，是可以的。

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&3&4\\\hdashline 5&6&7&8\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}1&2\\1&2\\\hdashline 1&2\\1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\\mathbf{B}_2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\\mathbf{B}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2\\\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2\end{bmatrix}.$$

同学们还可以再按别的分块方法试试，这样就能对分块的基本要求有一个更好的理解。

6. 分块矩阵的转置

设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\cdots&\mathbf{A}_{1r}\\\vdots&&\vdots\\\mathbf{A}_{s1}&\cdots&\mathbf{A}_{sr}\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}}&\cdots&\mathbf{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\\vdots&&\vdots\\\mathbf{A}_{1r}^{\mathrm{T}}&\cdots&\mathbf{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$.

注：分块矩阵转置时，除了行和列的位置要互换以外，其中的每一块还要加转置符号 **T**。

特别地，若 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$为按列分块矩阵，则 $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\\\mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\mathbf{a}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$.

同学们可通过 $\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&1&1\\2&2&2&2\\\hdashline 3&3&3&4\\5&5&5&5\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$ 做个验证，按列分块的情况也可以试一下。

7. **例** 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\7&10\end{bmatrix}$

若记 $\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]$

因为 $\mathbf{Ab}_1=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$，$\mathbf{Ab}_2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}$，所以 $[\mathbf{Ab}_1,\ \mathbf{Ab}_2]=\begin{bmatrix}3&4\\7&10\end{bmatrix}$.

又因为 $\mathbf{A}[\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]=\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}3&4\\7&10\end{bmatrix}$，所以 $\mathbf{A}[\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]=[\mathbf{Ab}_1,\ \mathbf{Ab}_2]$.

对于上面结论的另一种理解方式：

对于表达式 $\mathbf{A}[\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]$，从分块矩阵的角度来看，$\mathbf{A}$ 可看成一个 $1\times1$ 分块矩阵，在 $\mathbf{A}$ 中没有加竖线；$[\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]$ 是一个 $1\times2$ 分块矩阵，$[\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]$ 在分块时没有加横线，这是满足计算乘法时对矩阵分块的要求的，所以可以仿照普通矩阵一样进行运算。$\mathbf{A}[\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]=[\mathbf{A}\mathbf{b}_1,\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2]$

从感觉上看，这里就和“一个数乘以一个行矩阵”的感觉一样。

注意：$[\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]\mathbf{A}\neq[\mathbf{b}_1\mathbf{A},\ \mathbf{b}_2\mathbf{A}]$.原因有两个：（1）$[\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]$ 分块时加竖线了，但 $\mathbf{A}$ 中没有加横线，这不满足计算乘法时对矩阵分块的要求。（2）$\mathbf{b}_1\mathbf{A}$，$\mathbf{b}_2\mathbf{A}$ 不满足矩阵乘法定义的要求，做不了乘法运算。

8. **例** 设按列分块矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$， **单位矩阵** $\mathbf{E}_n=[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n]$，

由 $\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{E}_n=\mathbf{A}[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n]=[\mathbf{A}\mathbf{e}_1,\mathbf{A}\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{A}\mathbf{e}_n]$ 及 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$ 可知，$\mathbf{a}_j=\mathbf{A}\mathbf{e}_j\ \ (j=1,2,\cdots,n)$.

可见，$\mathbf{A}\mathbf{e}_j$ 表示 $\mathbf{A}$ 的第 $j$ 列。

我们下面来讨论什么样的式子能表示 $\mathbf{A}$ 的一行。

$\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}=((\mathbf{e}_i^T\mathbf{A})^T)^T=(\mathbf{A}^T\mathbf{e}_i)^T$ ，

根据前面得到的结论，$\mathbf{A}^T\mathbf{e}_i$ 表示 $\mathbf{A}^T$ 的第 $i$ 列，又因为 $\mathbf{A}^T$ 的第 $i$ 列是由 $\mathbf{A}$ 的第 $i$ 行转置以后得来的，所以 $\mathbf{A}^T\mathbf{e}_i=\begin{bmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{bmatrix}$， $\mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=(\mathbf{A}^T\mathbf{e}_i)^T=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]$

可见，$\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的第 $i$ 行。

$\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{e}_j=(\mathbf{e}_i^T\mathbf{A})\mathbf{e}_j=[a_{i1},\cdots,a_{ij},\cdots a_{in}]\mathbf{e}_j=a_{ij}$ ， $\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{e}_j$ 表示 $\mathbf{A}$ 的 $(i,j)$ 元 $a_{ij}$.

**例** 我们用三阶方阵对上面结论做个验证。

设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{A}\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{bmatrix}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的第 3 列，

$$\mathbf{e}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=[0,1,0]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=[a_{21},a_{22},a_{23}]$$ 表示 $\mathbf{A}$ 的第 2 行。

从这样一个具体问题的讨论，可以更清楚地看到上面结论的正确性。

注意　当 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵时，上面的结论也正确. 在有些问题的证明中，我们将使用 $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{e}_j$ 来分别表示 $\mathbf{A}$ 的第 $j$ 列、第 $i$ 行和元素 $a_{ij}$，这样做能使很多证明变得简单.