3.1 可逆矩阵

从应用和考试两个方面看，本章都很重要，希望同学们多加重视！
本章包含的结论非常多，有的地方不是很好理解，希望同学们多下功夫！
节奏可以稍微慢一点，边看边想边记，学过的结论要好好记住。

3.1.1 可逆矩阵的定义

1. 对于一个非零的数 a， a 和它的倒数（也叫逆数） a^{-1} 满足 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$.

   把数的这个性质加以推广，可给出可逆矩阵的定义.

2. **定义 3-1** 对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$，若存在 n 阶方阵 $\mathbf{B}$，使得

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$$

则 $\mathbf{A}$ 叫做**可逆矩阵**（或称 $\mathbf{A}$ 可逆）， $\mathbf{B}$ 叫做 $\mathbf{A}$ 的**逆矩阵**. 否则，称 $\mathbf{A}$ **不可逆**。

3. 注意：只有方阵才有可能可逆，不是方阵一定不可逆。
顺便强调一下，只有方阵才有行列式。

4. **定理 3-1** 若 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵是唯一的

   证明 设 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 都是 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵，则 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$，$\mathbf{AC}=\mathbf{CA}=\mathbf{E}$.

   由 $\mathbf{B}=\mathbf{EB}=(\mathbf{CA})\mathbf{B}=\mathbf{C}(\mathbf{AB})=\mathbf{CE}=\mathbf{C}$ 可知, $\mathbf{A}$ 的逆矩阵是唯一的.

   注意：证明中巧妙地利用了单位矩阵 E 的特性，这是需要学习的地方。

5. 把 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵记作 $\mathbf{A}^{-1}$，读作“ $\mathbf{A}$ 的逆”。

   当 $\mathbf{A}$ 可逆时， $\mathbf{A}^{-1}$ 总满足 $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

   注：（1） $\mathbf{A}^{-1}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵，也就是定义 3-1 中的 B，所以 $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

   （2） $\mathbf{A}^{-1}$ 不能写成 $\dfrac{1}{\mathbf{A}}$.

   （3） $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^{-1}$ 相乘时可交换，这一点要好好记住。讨论矩阵可交换的问题时，基本上都要用到这个结论。

6. 通常认为**矩阵是没有除法运算的**，下面我们来说明矩阵没有除法运算的原因。

   对于数 a 和 b ($b\neq 0$)，$a\div b=\dfrac{a}{b}=a\cdot b^{-1}=b^{-1}\cdot a$， $a\cdot b^{-1}$ 和 $b^{-1}\cdot a$ 总是相等的。

   对于矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ （假设 $\mathbf{B}$ 可逆），由于矩阵不满足交换律，所以 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{-1}$ 和 $\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ 一般不相等。如果矩阵有除法，那么就有人会把 $\mathbf{A}\div\mathbf{B}$ 写成 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{-1}$，也有人会把 $\mathbf{A}\div\mathbf{B}$ 写成 $\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}$，这样就会造成混乱。所以矩阵没有除法的定义。

   虽然矩阵没有除法，但是我们可以做类似于除法的一些运算，也可按除法的方式来思考一些问题。

   例如，在 $2x=3$ 的两边同时除以 2，可得 $x=\dfrac{3}{2}$.

当 $\mathbf{A}$ 可逆时，在 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 的两边同时从左侧乘 $\mathbf{A}^{-1}$，可得 $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

上面这两种情况的感觉是类似的。

7. 当 A 可逆时，消去律是成立的.

（1）当 $\mathbf{A}$ 可逆时，由 $\mathbf{AX}=\mathbf{AY}$ 可消去 $\mathbf{A}$，得到 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

. 证：$\mathbf{AX}=\mathbf{AY}\Rightarrow\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AY}\Rightarrow\mathbf{EX}=\mathbf{EY}\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{Y}$

（2）当 $\mathbf{A}$ 可逆时，由 $\mathbf{XA}=\mathbf{YA}$ 可消去 $\mathbf{A}$，得到 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

证：$\mathbf{XA}=\mathbf{YA}\Rightarrow\mathbf{XAA}^{-1}=\mathbf{YAA}^{-1}\Rightarrow\mathbf{XE}=\mathbf{YE}\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{Y}$

（3）当 $\mathbf{A}$ 可逆时，由 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 可消去 $\mathbf{A}$，得到 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$.

证：$\mathbf{AB}=\mathbf{O}\Rightarrow\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{O}\Rightarrow\mathbf{B}=\mathbf{O}$

注意：即使 $\mathbf{A}$ 可逆，$\mathbf{AX}=\mathbf{YA}$ 中的 $\mathbf{A}$ 也消不掉.

8. 当数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 都不为零时,

（1）$$\begin{bmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}k_1^{-1}&&&\\&k_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&k_n^{-1}\end{bmatrix}$$

注：$$\begin{bmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1^{-1}&&&\\&k_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&k_n^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1^{-1}&&&\\&k_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&k_n^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{bmatrix}=\mathbf{E}$$

（2）$$\begin{bmatrix}&&&k_1\\&&k_2&\\&\iddots&&\\k_n&&&\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}&&&k_n^{-1}\\&&\iddots&\\&k_2^{-1}&&\\k_1^{-1}&&&\end{bmatrix}.$$

注意：k_1^{-1}，$k_2^{-1},\cdots,k_n^{-1}$ 的位置与k_1，$k_2,\cdots$，k_n 的位置不一样。

注：$$\begin{bmatrix}&&&k_1\\&&k_2&\\&\iddots&&\\k_n&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&&k_n^{-1}\\&&\iddots&\\&k_2^{-1}&&\\k_1^{-1}&&&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&&k_n^{-1}\\&&\iddots&\\&k_2^{-1}&&\\k_1^{-1}&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&&k_1\\&&k_2&\\&\iddots&&\\k_n&&&\end{bmatrix}=\mathbf{E}$$

3.1.2　伴随矩阵及矩阵可逆的条件

1. 定义 3-2　设 $n>1,\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，把矩阵 $\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$

叫做 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵。

注意　$\mathbf{A}^*$ 是伴随矩阵的专用记号，$\mathbf{A}^*$ 的第 i 列的元素是 $\mathbf{A}$ 中第 i 行相应各元素的代数余子式，定义中有个转置的过程，写 $\mathbf{A}^*$ 的表达式时一定要记着转置。

2. **定理 3-2** 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，$n>1$，则 $\mathbf{AA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$.

注意： $\mathbf{AA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$ 是关于 $\mathbf{A}^*$ 的一个最基本的结论，一定要好好记住。

证明 根据**行列式的性质 2-2 和性质 2-7**，可得

$$\mathbf{AA}^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}| \end{bmatrix}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

同理可证 $\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$.

3. **定理 3-3** 方阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件是 $|\mathbf{A}|\neq 0$.并且当 $\mathbf{A}$ 可逆时，

$$|\mathbf{A}^{-1}|=\frac{1}{|\mathbf{A}|}, \qquad \mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}.$$

注意：这个定理包含了三个结论，这三个结论都很重要。

（1）经常通过 $|\mathbf{A}|\neq 0$ 来证明或判断 $\mathbf{A}$ 可逆。

（2）讨论 $\mathbf{A}^{-1}$ 的行列式时，一般都要用到 $|\mathbf{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$.

（3）可通过公式 $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$ 来求 $\mathbf{A}^{-1}$.

注意 ：求逆矩阵是本节必须掌握的一种计算。

证明 **必要性** 由 $\mathbf{A}$ 可逆可知，$\mathbf{A}^{-1}$ 存在，且满足 $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{E}$.对该式两边取行列式，得 $|\mathbf{AA}^{-1}|=|\mathbf{E}|$，$|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}^{-1}|=1$，所以 $|\mathbf{A}|\neq 0$, 且 $|\mathbf{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$.

充分性 由定理 3-2 可知，$\mathbf{AA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$.

因 $|\mathbf{A}|\neq 0$, 在上式两边同时除以 $|\mathbf{A}|$，得 $\mathbf{A}\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

$\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$ 相当于定义 3-1 中的 $\mathbf{B}$，由定义 3-1 可知，$\mathbf{A}$ 可逆且 $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$.

4. **定义 3-3** 对于方阵 $\mathbf{A}$，当 $|\mathbf{A}|=0$ 时，称 $\mathbf{A}$ 为**奇异矩阵**；当 $|\mathbf{A}|\neq 0$ 时，称 $\mathbf{A}$ 为**非奇异矩阵**.

由定理 3-3 可知，可逆矩阵和非奇异矩阵是同一种矩阵，都要求 $|\mathbf{A}|\neq 0$.

5. **推论 3-1** 若方阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都可逆，且 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}$.

注意：（1）推论 3-1 把定义 3-1 简化了，以后将用推论 3-1 取代定义 3-1.

（2）使用推论 3-1 时，要记着 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都要求是方阵。

证明 由 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$ 可得， $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{E}|$， 即 $|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|=1$， 可见 $|\mathbf{A}|\neq 0, \ |\mathbf{B}|\neq 0,$

所以 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都可逆，并且

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{EB}=\mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{E}\mathbf{B}^{-1}=(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})=\mathbf{A}\mathbf{E}=\mathbf{A}.$$

6. **例 3-1** 试确定二阶方阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可逆的条件，并求 $\mathbf{A}^{-1}$.

解 当 $|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$ 时， $\mathbf{A}$ 可逆.

通过计算可得 $\mathbf{A}^{*}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$， 所以 $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}^{*}}{|\mathbf{A}|}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$

注意：对于二阶方阵，将 $\mathbf{A}$ 的对角元互换位置，非对角元改变符号，就可得到 $\mathbf{A}^{*}$.

例 3-2 求方阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 因为 $|\mathbf{A}|=6+4+3-2-6-6=-1$，所以 $\mathbf{A}$ 可逆。

下面来算每一行的代数余子式。

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=0, A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-3, \ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2.$$

可类似地算出：

$$A_{21}=-1, A_{22}=2, \ A_{23}=-1$$
$$A_{31}=1, A_{32}=-1, \ A_{33}=0$$

注意：(1) 代数余子式由符号和余子式两部分构成, 别忘了符号部分。

(2) 要养成习惯：按行求代数余子式，按列写到 $\mathbf{A}^{*}$ 中。

$$\mathbf{A}^{*}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^{*}}{|\mathbf{A}|}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

注: $\dfrac{\mathbf{A}^{*}}{|\mathbf{A}|}$ 就是用 $\mathbf{A}^{*}$ 中的每个元素除以 $|\mathbf{A}|$.

注意 求 $\mathbf{A}^{-1}$ 时，可通过 $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{E}$ 来验证答案是否正确。

7. **例 3-3** 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，证明 $|\mathbf{A}^{*}|=|\mathbf{A}|^{n-1}$.

注：要记住这个公式，做题时会用到的。

证明 分成三种情况加以证明.

（i）设$|\mathbf{A}|\neq 0$，则$\mathbf{A}$可逆. 由$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$可得，$\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$

(注：上面这个式子要记住，同时要注意，当$\mathbf{A}$ 可逆时，$\mathbf{A}^*$ 与$\mathbf{A}^{-1}$ 只相差一个倍数。）

$$|\mathbf{A}^*|=\left||\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}\right|=|\mathbf{A}|^n\left|\mathbf{A}^{-1}\right|=|\mathbf{A}|^{n-1}.$$

（注：上式可以让我们体会到为什么$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$中的次数$n-1$）

（ii）若$\mathbf{A}=\mathbf{O}$，则$\mathbf{A}^*=\mathbf{O}$.这时$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|=0$，所以结论成立.

（iii）若$\mathbf{A}\neq\mathbf{O},|\mathbf{A}|=0$，则$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{E}=\mathbf{O}$.

下面用**反证法**证明$|\mathbf{A}^*|=0$.

假设$|\mathbf{A}^*|\neq 0$，则由定理 3-3 可知，$\mathbf{A}^*$可逆.

从$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{O}$消去$\mathbf{A}^*$，得$\mathbf{A}=\mathbf{O}$，这与$\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$矛盾.所以$|\mathbf{A}^*|=0$，结论成立.

8. 公式$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$，$\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$和$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$在讨论$\mathbf{A}^*$的问题时经常用到.

（1）**当 A 可逆时**，讨论$\mathbf{A}^*$一般都要用到 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$，要记着从这个公式出发来思考问题。

（2）**当 A 不可逆时**，讨论$\mathbf{A}^*$一般都是从 $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{O}$或$\mathbf{A}^*\mathbf{A}=\mathbf{O}$ 出发来思考问题。

9. 证明方阵 A 可逆的方法：

方法 1 通过证明$|\mathbf{A}|\neq 0$来证明 **A** 可逆.

方法 2 找出方阵 **B**，证明 **AB=E.**

证明 A 不可逆或证明$|\mathbf{A}|=0$的方法：

方法 1： 反证法。

方法 2： 通过定理 3-5 进行证明。

例 3-4 设方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-\mathbf{E}=\mathbf{O}$，证明$\mathbf{A}-2\mathbf{E}$可逆，并求出$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}$的表达式。

证明 设$\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-\mathbf{E}=\mathbf{O}$可变形为$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})(\mathbf{A}+k\mathbf{E})=m\mathbf{E}$，

比较上面两个式子的系数可得$\begin{cases}k-2=1\\-2k-m=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=3\\m=-5\end{cases}$.

$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})(\mathbf{A}+3\mathbf{E})=-5\mathbf{E}$，即$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\dfrac{\mathbf{A}+3\mathbf{E}}{-5}=\mathbf{E}$.

由推论 3-1 可知$\mathbf{A}-2\mathbf{E}$可逆，并且$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=-\dfrac{\mathbf{A}+3\mathbf{E}}{5}$.

例 若 **A** 和 **B** 都是非零的 n 阶方阵且 **AB=O**，则 **A** 和 **B** 都不可逆.

证 反证法 设 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在。在 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 的两边同时从左侧乘 $\mathbf{A}^{-1}$，得 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{O}$，即 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$，这与 $\mathbf{B}$ 是非零矩阵矛盾，所以 $\mathbf{A}$ 不可逆。

设 $\mathbf{B}$ 可逆，则 $\mathbf{B}^{-1}$ 存在。在 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 的两边同时从右侧乘 $\mathbf{B}^{-1}$，得 $\mathbf{ABB}^{-1}=\mathbf{OB}^{-1}$，即 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$，这与 $\mathbf{A}$ 是非零矩阵矛盾，所以 $\mathbf{B}$ 不可逆。

10. **可逆阵 A 具有下列性质：**

（1）若 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$.

注： 这个结论和数的情况类似。

证： 因为 $\mathbf{A}$ 可逆，$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$，所以根据推论 3-1 可知，$\mathbf{A}^{-1}$ 可逆，$(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$.

（2）若 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $\mathbf{A}^{T}$ 也可逆，且 $(\mathbf{A}^{T})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^{T}$.

证： 因为 $\mathbf{A}^{T}(\mathbf{A}^{-1})^{T}=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{T}=\mathbf{E}^{T}=\mathbf{E}$，所以根据推论 3-1 可知，$\mathbf{A}^{T}$ 可逆，且 $(\mathbf{A}^{T})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^{T}$.

（3）若 $\mathbf{A}$ 可逆，数 $k\neq0$，则 $k\mathbf{A}$ 也可逆，且 $(k\mathbf{A})^{-1}=k^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

注： 这个结论和数的情况类似。

证： 因为 $(k\mathbf{A})(k^{-1}\mathbf{A}^{-1})=(kk^{-1})(\mathbf{AA}^{-1})=\mathbf{E}$，所以根据推论 3-1 可知，$k\mathbf{A}$ 可逆，且 $(k\mathbf{A})^{-1}=k^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

（4）若 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同阶可逆矩阵，则 $\mathbf{AB}$ 也可逆，且 $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

注意： $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ **的右边是** $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$，$\mathbf{B}^{-1}$ **在** $\mathbf{A}^{-1}$ **的前边。**

证： 因为 $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})=\mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{AEA}^{-1}=\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{E}$，所以根据推论 3-1 可知，$\mathbf{AB}$ 可逆，且 $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

根据（4）还可用数学归纳法证明：若 $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_k$ 为同阶可逆方阵，则 $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k$ 也可逆，且 $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k)^{-1}=\mathbf{A}_k^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$.

特别地，若 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $\mathbf{A}^k$ 也可逆，且 $(\mathbf{A}^k)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^k$.

11. 注意 （1）当 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都可逆时，$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}$ **不一定可逆.**

（2）一般 $(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})^{-1}\neq\mathbf{A}^{-1}\pm\mathbf{B}^{-1}$

例 （1）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 都可逆，但 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ 都不可逆。

（2）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 都可逆，但 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\neq\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$，$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^{-1}\neq\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{B}^{-1}$