5.3.3 等价向量组

1. 定义 5-8 若向量组Ⅰ: $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 中的每个向量都能由向量组Ⅱ: $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性表示，**则称向量组Ⅰ能由向量组Ⅱ线性表示.**

若向量组Ⅰ与向量组Ⅱ能够互相线性表示，**则称这两个向量组等价.**

2. **注 1** 矩阵与向量组有着很密切的关系，但是它们还是有区别的，不能把它们完全等同。例如，可以说矩阵 **A** 的行向量组线性相关，也可以说矩阵 **A** 的列向量组线性相关，但不能笼统地说矩阵 **A** 线性相关。

3. **注 2:** 向量组等价与矩阵等价的含义不同.

（1）两个向量组等价的含义是：这两个向量组能够互相线性表示。

两个矩阵等价的含义是：能通过初等变换把其中一个矩阵化成另一个矩阵。

（2）等价矩阵的列向量组不一定等价。

例如，矩阵$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$等价，但是它们的列向量组$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$不等价。

（3）等价的列向量组所构成的矩阵不一定等价。例如，向量组$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$与向量组$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$等价，但是它们构成的矩阵$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$不等价。

4. **注:** 一个向量组与其极大无关组是等价的.

证：设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 是向量组 V 的极大无关组，**根据定理 5-7，向量组 V 中的每个向量都可由它的极大无关组唯一地线性表示**，所以向量组 V 可由极大无关组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 线性表示。

反过来，因为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 是从向量组 V 中挑选出来的向量，所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 也能由向量组 V 线性表示，这时相当于用自己表示自己，例如，$\mathbf{a}_1=1\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\cdots$

综合上面的讨论可知，一个向量组与其极大无关组是等价的.

5. **注:** 一个向量组的两个极大无关组是等价的.

证：设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 和 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_r$ 都是向量组 V 的极大无关组。

根据定理 5-7，向量组 V 中的每个向量都可由它的极大无关组唯一地线性表示。

因为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 是从向量组 V 中挑选出来的向量，$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_r$ 是向量组 V 的极大无关组，所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 可由 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_r$ 线性表示。

同理，因为 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_r$ 是从向量组 V 中挑选出来的向量，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 是向量组 V 的极大无关组，所以 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_r$ 可由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 线性表示。

所以极大无关组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 和 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_r$ 等价。

6. 设向量组 I 能由向量组 II 线性表示，并设表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = p_{11}\mathbf{a}_1 + p_{21}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{m1}\mathbf{a}_m \\ \mathbf{b}_2 = p_{12}\mathbf{a}_1 + p_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{m2}\mathbf{a}_m \\ \quad\vdots \\ \mathbf{b}_n = p_{1n}\mathbf{a}_1 + p_{2n}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{mn}\mathbf{a}_m \end{cases}, \tag{5.4}$$

上式可写成 $[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n] = [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}$.

令 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]$, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m]$, $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{m\times n}$,

则式(5.4)可写成矩阵形式： $\mathbf{B} = \mathbf{AP}$.

注 1： P 为式(5.4)中系数矩阵的转置并且 P 在 A 的右侧.

注 2： 当一个向量组能由另一个向量组线性表示时，我们经常将其写成矩阵形式 $\mathbf{B} = \mathbf{AP}$，这种做法同学们一定要掌握，这是今天所学内容的重点之一。

例 设 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+4\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2+6\mathbf{a}_3]$, $|\mathbf{A}| = 1$, 求 $|\mathbf{B}|$.

解： 已知条件可写成矩阵形式 $\mathbf{B} = \mathbf{AP}$， $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$，

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{AP}| = |\mathbf{A}||\mathbf{P}| = -1$$

7. 由上面的讨论可得定理 5-10.

定理 5-10 向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 能由向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 存在矩阵 $\mathbf{P}$，使

$$\mathbf{B} = \mathbf{AP}. \quad 其中\ \mathbf{A} = [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m], \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]$$

8. 根据定理 5-10 及性质 5-6 可得：.

定理 5-11 若向量组 I 能由向量组 II 线性表示，则 r(I)≤r(II).

证： 设向量组 I 为: $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$， 向量组 II 为： $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$.

记 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]$, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m]$.

【注： **B**对应于向量组I，**A**对应于向量组II 】

根据定理 5-10 可知，

向量组 I 能由向量组 II 线性表示 $\Rightarrow$ 存在矩阵 $\mathbf{P}$， 使 $\mathbf{B} = \mathbf{AP} \Rightarrow r(\mathbf{B}) \le r(\mathbf{A})$

即 r(I)≤r(II)

9. **推论 5-3** 若向量组 I 与向量组 II 等价，则 r(I)=r(II).

证：向量组I与向量组II等价 $\Rightarrow \begin{cases} \text{I能由II表示} \Rightarrow \mathrm{r(I)} \le \mathrm{r(II)} \\ \text{II也能由I表示} \Rightarrow \mathrm{r(II)} \le \mathrm{r(I)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathrm{r(I)} = \mathrm{r(II)}$$

10. 例　设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$为线性无关的$n$元列向量组，$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-k\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_3=k\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3$，

（1）当k取何值时，向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性无关？

（2）当k取何值时，向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性相关？

解　设$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3],\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]$，则已知条件可写成矩阵形式$\mathbf{B}=\mathbf{AP}$，

其中$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&k\\1&1&0\\0&-k&1\end{bmatrix}$.　　$|\mathbf{P}|=1-k^2$

（1）当$k\neq\pm1$时，$|\mathbf{P}|\neq0$，$\mathbf{P}$可逆．根据性质 5-3 可得，$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{AP})=r(\mathbf{A})$

由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关可知，$r(\mathbf{A})=3$,

故$r(\mathbf{B})=3$，向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性无关。

（2）当$k=1$或$k=-1$时，$|\mathbf{P}|=0$，$r(\mathbf{P})<3$,　　$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{AP})\le r(\mathbf{P})<3$

向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性相关。

总结　从上面的讨论可以看出：

（1）当$|\mathbf{P}|\neq0$时，$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性无关；

（2）当$|\mathbf{P}|=0$时，$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性相关。

注： 当$|\mathbf{P}|=0$时，无论$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$是相关还是无关，$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$都线性相关。

10. **例 5-10**　设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$为 n 元向量组，$\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3$，

证明：　向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性无关$\Leftrightarrow$向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关.

证　设$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3],\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3]$，则已知条件可写成矩阵形式$\mathbf{B}=\mathbf{AP}$，其中，

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

由$|\mathbf{P}|=2$知，$\mathbf{P}$可逆，所以　$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{AP})=r(\mathbf{A})$.

向量组$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$线性无关$\Leftrightarrow r(\mathbf{B})=3\Leftrightarrow r(\mathbf{A})=3\Leftrightarrow$向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关

11. **定理 5-12**　若向量组 V 中有 r 个向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$线性无关，并且 V 中的任一向量都可由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$线性表示，则$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$是向量组 V 的一个极大无关组.

【注：定理 5-12 可作为极大无关组的定义使用，它与定义 5-3 中所讲的极大无关组的定义是等价的】

证明 设$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1}$是向量组$\mathbf{V}$中的任意$r$+1 个向量，则它们可由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$线性表示.【注：已知条件中有“$\mathbf{V}$中的任一向量都可由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$线性表示”】

由定理 5-11 可得，$r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1})\le r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r)=r<r+1,$

故$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1}$线性相关.

【注：$r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1})<r+1$说明$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1}$中所能找到的线性无关向量的最大个数少于$r+1$，所以$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_{r+1}$这$r+1$个向量一定线性相关】

可见，$\mathbf{V}$中任意r+1 个向量都线性相关，又因为$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$线性无关，所以由定义 5-3 可知，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$是向量组$\mathbf{V}$的一个极大无关组.

12. 注：通过定理5-12来求一个向量组的极大无关组要比通过定义5-3来求简单一些。

例 求向量组$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix},\mathbf{a}_4=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$的秩和一个极大无关组.

解 由于$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$不成倍数关系，所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性无关。

通过观察可得$\mathbf{a}_3=-\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2$， $\mathbf{a}_4=2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$， 这说明$\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$都能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性表示。

根据定理 5-12 可知，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$是所给向量组的一个极大无关组，所给向量组的秩为 2.

13. **定理 5-13** 向量组Ⅰ：$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能由向量组Ⅱ:$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性表示的充要条件是$r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right)=r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\right).$

证明 必要性 显然$r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right)\ge r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\right).$

另一方面，由已知条件可知，向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\ \mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能由向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性表示，由定理 5-11 可得

$$r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right)\le r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\right).$$

综合上面的讨论可知必要性正确.

充分性 设$r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\right)=r\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\right)=r,$ 并设$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$是向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$的一个极大无关组，则它也是$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$的一个极大无关组.根据定理 5-7 可知，$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$能由$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$线性表示，从而能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$线性表示.

【注：因为$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$的秩也是$r$, 所以只要从该向量组中找到$r$个

线性无关的向量，这 r 个线性无关的向量就构成该向量组的一个极大无关组。显然，$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 是 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 中 r 个线性无关的向量，所以 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 是 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 的一个极大无关组.】

【注：设 $\mathbf{b}=k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2$，则一定有 $\mathbf{b}=k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+0\cdot\mathbf{a}_3$. 这说明只要 $\mathbf{b}$ 能由向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 中的一部分向量线性表示，则 $\mathbf{b}$ 一定能由向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 线性表示。】

14. **推论 5-4** 向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 与向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 等价的充要条件是

$$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)=r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n).$$

证 向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 与向量组 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 等价

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\text{能由}\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\text{线性表示}\\ \mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n\text{也能由}\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m\text{线性表示}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)=r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)\\ r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)=r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n).$$

【注：$r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)$】

15. **推论 5-5** 矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有解 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{B}])=r(\mathbf{A})$.

证 设 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m],\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]$

矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有解

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{AP}=\mathbf{B}$，即 $\mathbf{B}=\mathbf{AP}$

$\overset{\text{定理5-10}}{\Leftrightarrow}$ $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$ 能由 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性表示

$\overset{\text{定理5-13}}{\Leftrightarrow}$ $r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=r(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m)$

$\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{B}])=r(\mathbf{A})$.

16. **推论 5-6** 方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})$.

【注：方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 可看成矩阵方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 的特殊情况】