

第四章 微分方程

4.1 微分方程的基本概念

例1 一曲线通过点 $(1, 2)$ ，且在该曲线上任一点 $M(x, y)$ 处的切线的斜率位 $2x$ ，求这曲线方程。

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$ 。根据导数的几何意义，可知未知函数 $y=y(x)$ 应满足关系式

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (1)$$

此外，未知函数 $y=y(x)$ 还应满足下列条件：

$$x=1 \text{ 时, } y=2. \quad (2)$$

把 (1) 式两端积分，得

$$y = \int 2x dx \quad \text{即} \quad y = x^2 + C \quad (3)$$

其中 C 是任意常数。

把条件 “ $x=1$ 时, $y=2$ ” 代入 (3) 式，得 $C=1$ ，代入 (3) 式，即得曲线方程为

$$y = x^2 + 1$$

例2 设有一弹簧，它的上端固定，下端挂一个质量为 m 的物体，弹簧伸长一段 l 后就会处于静止状态，这个位置就是物体的平衡。如果用力将物体向下拉至某一位置，然后突然放开，那么物体就会在平衡位置附近作上下振动，试确定物体的运动规律。

解 取物体的平衡位置坐标原点， x 轴竖直向下建立坐标系（如图 4-1）。要确定物体的振动规律，就是求物体在任意时刻 t 离开平衡位置的位移函数 $x(t)$ 。这是个动力学问题，需要分析物体在振动过程中所受的外力。

(1) 如果不计摩擦力和介质阻力，则物体在任意时刻所受的力只有弹性力和重力。但因为物体在平衡位置时处于静止状态，作用在物体上的重力 mg 与弹性力 cl 大小相等，方向相反，所以使物体回到平衡位置的力弹性恢复力： $f=-cx$ 其中 $c(c>0)$ 为弹簧的弹性系数， x 为物体离开平衡位置的位移（如图 4-1），负号表示弹性恢复力的方向和物体的位移方向相反。

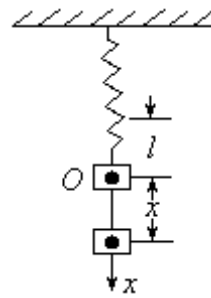


图 4-1

$$\text{根据牛顿第二定律，有} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx \quad \text{或} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + cx = 0 \quad (3)$$

方程 (3) 代表的振动叫无阻尼自由振动或简谐振动。

(2) 如果物体在振动过程中还受到阻力作用，由实验知道，阻力 R 总是与运动方向相反，当振动不大时，其大小与物体的速度成正比，设比例系数为 $\mu(\mu > 0)$ ，则有

$$R = -\mu \frac{dx}{dt}$$

此时物体的微分运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}$$

令 $2n = \frac{\mu}{m}, k^2 = \frac{c}{m}$, 则上式可化为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0 \quad (4)$$

方程(4)称为有阻尼的自由振动的方程。

(3) 如果物体在振动过程中, 还受铅直干扰力 $F = H \sin pt$

$$\text{令 } h = \frac{H}{m}, \text{ 则有 } \frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = h \sin pt \quad (5)$$

方程(5)称为有阻尼的强迫振动的方程。

微分方程: 一般地, 包含自变量, 未知函数及其导数或微分的等式称为微分方程。如果微分方程的未知函数是一元函数, 则称为常微分方程。如果微分方程中的未知函数是多元函数, 则称为偏微分方程。

微分方程的阶: 微分方程中未知函数导数的最高阶数称为该微分方程的阶。

如果微分方程是关于未知函数和各阶导数的一次有理整式, 则称它为线性微分方程。n阶线性微分方程的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x)$$

其中 $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x)$ 及 $g(x)$ 为 x 的已知函数, 且 $a_0(x) \neq 0$ 。不是线性方程的微分方程称为非线性微分方程。

当微分方程中的未知函数用已知函数代替时, 方程变为恒等式, 则该已知函数称为方程的解。

如果微分方程解中含有独立的任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同, 则这样的解称为微分方程的通解。微分方程通解的图形是一族曲线, 称为微分方程的积分曲线族。

在通解中, 令任意常数取确定的值而得到的解称为特解。特解的图形是一条曲线, 称为微分方程的积分曲线。

从通解中确定特解的条件称为定解条件。因为 n 阶方程的通解中含有 n 个任意常数, 所以需要 n 个条件, 即定解条件有 n 个。若定解条件都是在自变量的同一个点上(此点常称为初始点)给定的, 则称为初始条件。一个 n 阶方程的初始条件即为

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

微分方程与初始条件一起称为初值问题。

作业 3, 4

4.2 某些简单微分方程的初等积分法

4.2.1 一阶变量分离方程

形如 $\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$ (1)

的微分方程称为一阶变量分离方程, 其中 $h(x), g(y)$ 分别是 x, y 的连续函数。

其解法是先分离变量 $\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$ ($g(y) \neq 0$) 然后两边积分得

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + c$$

令 $G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, H(x) = \int h(x)dx$, 则上式可写为 $G(y) = H(x) + c$ (2)

(2) 式给出所求微分方程 (1) 的解, 由于 (2) 式含有任意常数, 又是以隐式方式给出解, 所以 (2) 式称为 (1) 式的隐式通解。这种求解的方法称为分离变量法。

例 1 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 的通解。

解 分离变量 $\frac{dy}{y} = 2xdx$ 两端积分得 $\ln|y| = x^2 + C_1$ 从而 $y = \pm e^{x^2 + C_1}$

$= \pm e^{C_1} e^{x^2}$, 因为 $\pm e^{C_1}$ 仍是任意常数, 将它记做 C , 便得原微分方程的通解为 $y = Ce^{x^2}$ 。

例 2 设降落伞从跳伞塔下落后, 所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时 (他=0) 速度为零, 求降落伞下落速度与时间的函数关系。

解 设降落伞下落速度为 $v(t)$ 。降落伞在空中下落时, 同时受到重力 P 与阻力 R 的作用。

重力大小为 mg , 方向与 v 一致; 阻力大小为 kv (k 为比例常数), 方向与 v 相反, 从而降落伞所受外力为 $F = mg - kv$ 。

根据牛顿第二运动定律 $F = ma$, 得函数 $v(t)$ 应满足的方程为 $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$ (9)

按题意, 初始条件为 $v|_{t=0} = 0$ 。

方程 (9) 是可分离变量的。分离变量后得 $\frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m}$, 两端积分, 并考虑到

$mg - kv > 0$, 得 $-\frac{1}{k} \ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + C_1$, 即 $mg - kv = e^{-\frac{k}{m}t - kC_1}$ 或

$$v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t} \left(C = -\frac{e^{-kC_1}}{k} \right), \quad (10)$$

这就是方程 (9) 的通解。

将初始条件 $v|_{t=0} = 0$ 代入 (1) 式, 得 $C = -\frac{mg}{k}$ 。

于是所求的特解为
$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \quad (11)$$

4.2.2 一阶线性微分方程

形如 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ (3) 的方程称为一阶线性微分方程。若 $q(x)$ 不恒

为零, 称方程 (3) 为一阶线性微分方程。若 $q(x) \equiv 0$, 则方程 (3) 变为 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ (4)

称方程 (4) 为一阶齐次线性微分方程。

对于齐次方程 (4)。分离变量得 $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ 两边积分 $\ln|y| = -\int p(x)dx + c_1$

取对数, 即得方程 (4) 的通解 $y = ce^{-\int p(x)dx}$ ($c = \pm e^{c_1}$) (5)

再看非齐次方程 (3)。将方程变形为 $\frac{dy}{dx} = q(x) - p(x)y$, 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{q(x)}{y} - p(x) \right] dx \text{ 两边积分, 可形式的得到 } y = (\pm e^{\int \frac{q(x)}{y} dx}) e^{-\int p(x)dx}, \text{ 注意到 } \pm e^{\int \frac{q(x)}{y} dx}$$

是 x 的函数, 因此我们猜想方程 (3) 的解应为 $y = u(x)e^{-\int p(x)dx}$ (6) 形式, 即

把 (5) 的任意常数 c 视为待定函数 $u(x)$ 。将式 (6) 代入方程 (3), 得到

$$\frac{d}{dx}(ue^{-\int p(x)dx}) + p(x)ue^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

整理化简, 得

$$\frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

这是个可分离变量的方程, 求解得 $u = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c$ (7)

将 (7) 代入方程 (6), 便得 $y = e^{-\int p(x)dx} \left(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right)$ (8)

式 (8) 即为一阶线性微分方程的通解。

上述解决非齐次线性微分方程通解的方法称为常数变易法。在由 (8) 式, 我们可得下述结论: 非齐次线性微分方程的通解等于它对应的齐次线性微分方程的通解加上原非齐次方程的一个特解。

例 3 求方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解。

解 这是一个非齐次线性微分方程。先求对应的齐次方程的通解。

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1}, \quad \ln|y| = 2\ln|x+1| + \ln C_1, \quad \text{即 } y = C(x+1)^2。$$

使用常数变易法, 把 C 换成 u , 即令 $y = u(x+1)^2$ (6)

那么 $\frac{dy}{dx} = u'(x+1)^2 + 2u(x+1)$ 代入所给非齐次方程, 得 $u' = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ 。两端积分, 得

$u = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$, 再把上式代入 (6), 即得所求方程的通解为

$$y = (x+1)^2 \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C \right]$$

例 4 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x+y$ 。

解 设所求的曲线为 $y(x)$ 。由题意可知, $y(x)$ 满足下面初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x + y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

这是一个一阶非齐次线性方程。先求解对应的齐次方程, 得

$$y = ce^x。$$

令 $y = c(x)e^x$ 为原方程的解, 代入原方程, 求得

$$c'(x) = 2xe^{-x}$$

积分得

$$c(x) = -2(1+x)e^{-x} + c_1$$

因此原方程通解为

$$y = -2(1+x) + c_1e^x$$

由初始条件 $y(0) = 0$, 得

$$c_1 = 2$$

所求曲线方程为

$$y = 2(e^x - 1 - x)$$

4.2.3 利用变量代换求解微分方程

1. 齐次方程 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

形如 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程称为齐次方程。对于齐次方程，只要作变换 $\frac{y}{x} = u$ ，就可将此

方程化为 u 与 x 的变量分离方程。实际上由 $\frac{y}{x} = u$ ，即 $y = xu$ ，可得 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ，代入原

方程，有 $u + x \frac{du}{dx} = f(u)$ 分离变量得 $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$ 求解后把 $u = \frac{y}{x}$ 代回即得齐次方程的

通解。

例 4 解方程 $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$

解 原方程可写成 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$ ，因此是齐次方程。令 $\frac{y}{x} = u$ ，则

$y = ux$ ， $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ，于是原方程变为 $u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1}$ ，即 $x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1}$ 分离变量，得

$\left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}$ ，两端积分，得 $u - \ln|u| + C = \ln|x|$ 或 $\ln|xu| = u + C$ ，以 $\frac{y}{x}$ 代入上式

中的 u ，便得所给方程的通解为 $\ln|y| = \frac{y}{x} + C$

2. 伯努利方程

形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n (n \neq 0, 1)$ 的方程称为伯努利方程，当 $n \neq 0, 1$ 时，将方程两

边同除 y^n ，得 $y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$ (11)

令 $z = y^{1-n}$ ，求导代入式 (11) 得 $\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ 这是一个一阶线性微分

方程，求解后将 $z = y^{1-n}$ 代回即可。

例 5 求方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = a(\ln x)y^2$ 的通解，其中 a 为常数。

解 这是伯努利方程，令 $z = y^{-1}$ ，代入原方程得 $\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -a \ln x$ ，其通解为

$$z = x \left[C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right], \text{ 以 } z = y^{-1} \text{ 代回, 得所求方程的通解为 } yx \left[C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right] = 1$$

对于方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$, 可以将方程变形为 $\frac{dx}{dy} = x+y$ 来解。

4.2.4 某些可降阶的高阶微分方程

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

微分方程 $y^{(n)} = f(x)$ 由于右端只含有自变量 x , 只要把上式关于 x 积分一次就得到一个 $n-1$ 阶的微分方程 $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$ 。同理可得 $y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)dx + C_1 \right] dx + C_2$, 以此法继续进行, 接连积分 n 次, 便得到微分方程 $y^{(n)} = f(x)$ 的含有 n 个任意常数的通解。

例 1 求微分方程 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解。

解 对所给方程接连积分三次, 得 $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C$, $y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + Cx + C_2$, $y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$ 这就是所给方程的通解。

2. 不显含未知函数的微分方程 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

形如 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ 的 n 阶微分方程, 其中 $1 \leq k \leq n$ 。对于这种方程, 只要作变换 $z = y^{(k)}$, 则可化为 $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$, 从而将原方程降了 k 阶。特别地, 对于二阶微分方程 $F(x, y', y'') = 0$ 就变成一阶微分方程了。

例 2 求微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3$ 的特解。

解 设 $z = y'$, 则代入原方程分离变量后, 得 $\frac{dz}{z} = \frac{2x}{1+x^2} dx$, 两端积分, 得 $\ln |z| = \ln(1+x^2) + C$, 即 $z = y' = C_1(1+x^2)$, 由初始条件 $y'|_{x=0}=3$, 得 $C_1=3$, 所以 $y' = 3(1+x^2)$, 两端再积分, 得 $y = x^3 + 3x + C_2$, 又由条件 $y|_{x=0}=1$, 得 $C_2=1$, 于是所求的特解为 $y = x^3 + 3x + 1$ 。

3. 不显含自变量的微分方程 $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

对于这种方程可作变换: 令 $y' = z(y)$, 则 $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z$,

$$y''' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dy} \cdot z \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dz}{dy} \cdot z \right) \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \cdot z$$

...

代入原方程, 得到关于 $y, z, z', \dots, z^{(n-1)}$ 的方程式, 我们把它记做 $F_1(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$, 这是以 y 为自变量, z 为未知函数的 $n-1$ 阶方程, 比原方程降了一阶。特别地对于二阶方程 $F(y, y', y'') = 0$ 就变成了一阶方程。

例 3 求方程 $y'' = 3\sqrt{y} (x \geq 0)$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的解。

解 此方程不显含自变量 x 。令 $y' = z(y)$, 则 $y'' = z \frac{dz}{dy}$ 。代入原方程, 得 $z \frac{dz}{dy} = 3y^{\frac{1}{2}}$

分离变量并积分, 得 $\frac{1}{2} z^2 = 2y^{\frac{3}{2}} + c_1$ 。由 $y(0) = 1$ 及 $y'(0) = 2$ 可确定出 $c_1 = 0$, 于是

$z = \pm 2y^{\frac{3}{4}}$, 由方程 $y'' = 3\sqrt{y}$ 知 $y'' > 0$, 故 y' 单调上升; 又 $y'(0) = 2$, 所以

$y' = z > 0 (x \geq 0)$, 从而上式取正号, 即 $y' = z = 2y^{\frac{3}{4}}$ 再积分得 $4y^{\frac{1}{4}} = 2x + c_2$ 代入 $y(0) = 1$

可确定 $c_2 = 4$, 从而所求解为 $y^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}x + 1$ 或 $y = \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^4$ 。

4. 首次积分方法

若 $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ 则称 $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c$ 为方程

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ 的首次积分。这样就把原方程降了一阶。特别地, 二阶的就变成一阶方程了。

例 4 求解方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 。

解 原方程可写为 $\frac{d}{dx}(yy') = 0$, 从而 $yy' = c$, 这是可分离变量方程求解后, 得

$$y^2 = c_1 x + c_2 \quad (c_1 = 2c)$$

例 5 求解方程 $\frac{y''}{y'} = \frac{2yy'}{1+y^2}$ 。

解 原方程变形为 $\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = 0$, 因为此方程左端为

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = \frac{d}{dx} [\ln|y'| - \ln(1+y^2)], \text{ 所以 } \ln|y'| - \ln(1+y^2) = \ln|c|, \text{ 即}$$

$y' = c_1(1+y^2)$, 积分得 $y = \tan(c_1x + c_2)$ 。

作业 1。偶数 (分离) 2。(1), (4) (一阶) ; 4。(1), (3) (伯努利)

5. 奇数 8, 9

4.4 高阶线性方程

4.4.1 线性微分方程通解的结构

$$\text{形如 } y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

的微分方程称为线性方程。若 $n > 1$ 称之为高阶线性微分方程。

若 $f(x) \neq 0$, 则称式 (1) 为非齐次线性微分方程。若 $f(x) \equiv 0$, 则式 (1) 变为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

称式 (2) 为齐次线性微分方程或称式 (2) 为式 (1) 所对应的齐次线性方程。

$$\text{若引入算子符号 } L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)$$

$$\text{则 } L[y(x)] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(n-i)}$$

其中 $a_0(x) = 1$ 。于是方程 (1) 和方程 (2) 可分别简记为 $L(y) = f(x)$ 和 $L(y) = 0$ 。

易证 $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$, $L(cy) = cL(y)$, 其中 c 为常数。

定理 1 (叠加原理) 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是齐次线性微分方程 (2) 的解, 则它们

的线性组合 $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = \sum_{j=1}^n c_jy_j(x)$ 也是方程 (2) 的解, 其中

c_1, c_2, \cdots, c_n 是任意常数。

定理 2 设 $\tilde{y}(x)$ 是非齐次方程 (1) 的一个解, $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是方程 (1) 对应

的齐次方程 (2) 的解, 则 $\sum_{j=1}^n c_jy_j(x) + \tilde{y}(x)$ 也是方程 (1) 的解, 其中 c_1, c_2, \cdots, c_n 是任意

常数。

定义 设 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的一组函数, 如果存在一组不全为零的常数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得在区间 $[a, b]$ 上有 $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) = 0$, 则说这组函数 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是线性相关的, 否则说它们是线性无关的。

易证函数组 $1, \sin^2 x, \cos^2 x$ 是线性相关的, $1, x, x^2, \dots, x^n$ 是线性无关的。对于两个函数的情形, 若它们的比为常数则线性相关, 否则线性无关。

定理 3 (二阶齐次线性微分方程通解的结构) 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ ($a \leq x \leq b$) 是方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (3)$$

的两个线性无关特解, 则 $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ (c_1, c_2 是任意常数) 是方程 (3) 的通解。

对于二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (4)$$

有如下的定理。

定理 4 (二阶非齐次线性微分方程通解的结构) 设 $y^*(x)$ 是方程 (4) 的一个特解, $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ ($a \leq x \leq b$) 是方程 (4) 对应的齐次线性方程 (3) 的两个线性无关解, 则

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y^*(x) \quad (5)$$

是方程 (4) 的通解。

4.4.2 高阶常系数齐次线性微分方程的解法

形如
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (6)$$

的方程称为高阶 ($n > 1$ 时) 常系数线性方程, 其中 a_1, a_2, \dots, a_n 是已知常数, $f(x)$ 是已知函数。当 $f(x) \equiv 0$ 时, 方程 (6) 变为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (7)$$

称方程 (7) 为常系数非齐次线性方程 (6) 对应的常系数齐次线性方程。

由上节通解的结构, 可知求 (7) 的通解转化为求它的 n 个线性无关解, 称为基本解组, 下面使用欧拉待定指数函数法求解其基本解组。

由于函数 $e^{\lambda x}$ 的各阶导数都只差一个常数因子, 根据这个特点, 我们使用 $y = e^{\lambda x}$ 来尝试, 看能否选取适当的常数 λ , 使 $y = e^{\lambda x}$ 满足方程 (7), 将其各阶导数代入 (7) 后整理得

$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$ 因为 $e^{\lambda x} \neq 0$, 所以上式化为 $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ (8)

于是得出 $y = e^{\lambda x}$ 是方程 (7) 的解的充要条件是 λ 为一元 n 次函数代数方程 (8) 的根。称 (8) 式为微分方程 (7) 的特征方程, 它的根称为特征根。下面我们分特征根的不同情形对二次方程讨论其基本解组。

1. 特征根式单根

设 λ_1, λ_2 是互不相等的实根时, 有解 $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$, 且 $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq$

常数。于是得到方程 (3) 的通解为 $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, 其中 c_1, c_2 是任意常数。

如果 λ_1, λ_2 为复根, 若系数为实数则必为共轭复根, 设其为 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$,

复根对应的解为 $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$, 由欧拉公式 ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$) 可知

$$y_1^* = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x), y_2^* = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

再由叠加原理可知 $y_1 = \frac{y_1^* + y_2^*}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = \frac{y_1^* - y_2^*}{2} = e^{\alpha x} \sin \beta x$ 也是方程 (3) 的解,

且为实数解, 并且是线性无关的, 所以方程 (3) 的通解为 $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

2. 特征根有两个相等的实根: $\lambda_1 = \lambda_2$

这时齐次方程 (3) 只有一个解 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, 味求出另外一个解 y_2 , 并要求 $\frac{y_2}{y_1}$ 不是常数。

设 $\frac{y_2}{y_1} = u(x)$, 将 y_2 求导代入原方程得到 $u'' = 0$, 由于只需要得到一个不为常数的解。所

以不妨选取 $u = x$, 由此得到微分方程 (3) 的另外一个解 $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$, 从而微分方程的通解

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}$$

综上所述, 求二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解的步骤如下:

第一步 写出微分方程的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

第二步 求出特征方程的两个根 λ_1, λ_2 。

第三步 根据特征方程两个根的不同情形, 按照下列表格写出微分方程 (3) 的通解

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 λ_1, λ_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 λ_1, λ_2	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
两个相等的实根 $\lambda_1 = \lambda_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例 3 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解

解 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ，其根 $\lambda_1 = -1$ ， $\lambda_2 = 3$ 是两个不相等的实根，因此所求通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

例 4 求方程 $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + s = 0$ 满足初始条件 $s|_{t=0} = 4, s'|_{t=0} = -2$ 的特解。

解 特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$ ，其根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 是两个相等的实根，因此所求微分方程的通解为 $s = (C_1 + C_2 t) e^{-t}$

将条件 $s|_{t=0} = 4$ 代入通解，得 $C_1 = 4$ ，从而 $s = (4 + C_2 t) e^{-t}$ ，将上式对 t 求导，得 $s' = (C_2 - 4 - C_2 t) e^{-t}$ ，再把条件 $s'|_{t=0} = -2$ 代入上式，得 $C_2 = 2$ ，于是所求特解为 $s = (4 + 2t) e^{-t}$

例 5 求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解

解 特征方程为 $r^2 - 2r + 5 = 0$ ，其根 $r_{1,2} = 1 \pm 2i$ 为一对共轭复根。因此所求通解为 $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

对于高阶常系数齐次线性微分方程可以根据下表给出的特征方程的根写出对应齐次线性微分方程的解如下：

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 λ	给出一项 $Ce^{\lambda x}$
一对单复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出两项 $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

k 重实根 λ	给出 k 项: $e^{\lambda x}(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})$ 项
k 重复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	给出 2k 项: $e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})\cos \beta x + (D_1 + D_2x + \cdots + D_kx^{k-1})\sin \beta x]$

例 6 求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解。

解 特征方程为 $r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0$, 其根为 $r_1 = r_2 = 0$ 和 $r_{3,4} = 1 \pm 2i$, 因此所给微分方程的通解为 $y = C_1 + C_2x + e^x(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$ 。

4.4.3 高阶常系数非齐次线性微分方程的解法

由非齐次线性微分方程通解的结构, 可知在求出齐次线性微分方程通解后, 只需求出非齐次线性微分方程的一个特解即可。对于二阶常系数非齐次线性微分方程并不是对于 $f(x)$ 的所有情形都能解出, 下面只讨论 $f(x)$ 的两种情形。

1. 设 $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x)$

其中 α 是常数, $P_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式。此时设非齐次方程 (6) 有如下形式的特解

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x} Q_m(x) \quad (9)$$

其中 k 是特征方程含根 α 的重复次数, 当 α 不是特征根时, 可取 0。 $Q_m(x)$ 仍为 m 次多项式, 其系数求法是将特解代入方程 (6), 通过待定系数方法求出。

例 7 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的一个特解。

解 这是二阶常系数非齐次线性微分方程, 且函数 $f(x)$ 是 $P_m(x)e^{\alpha x}$ 型。

与所给方程对应的齐次方程为 $y'' - 2y' - 3y = 0$, 它的特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$ 。

由于这里 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根, 所以应设特解为 $y^* = b_0x + b_1$, 把它代入所给方程,

$$\text{得 } -3b_0x - 2b_0 - 3b_1 = 3x + 1, \text{ 比较两端系数得 } \begin{cases} -3b_0 = 3 \\ -2b_0 - 3b_1 = 1 \end{cases}$$

由此求得 $b_0 = -1, b_1 = \frac{1}{3}$ 。于是求得一个特解为 $y^* = -x + \frac{1}{3}$

例 8 求方程 $y'' + y = xe^x$ 的通解。

解 特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$ ，其根为 $\lambda = \pm i$ 。而 $\alpha = 1$ 不是特征根，又 $P(x) = x, m = 1$ ，

故特解设为 $y^* = (ax + b)e^x$ ，代入原方程得 $2a + 2b + 2ax = x$ ，比较 x 的同次幂的系数得

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \text{ 解得 } a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, \text{ 故特解为 } y^* = \frac{1}{2}(x-1)e^x。 \text{ 从而通解为}$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x。$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = e^{\alpha x} [A_l(x) \cos \beta x + B_n(x) \sin \beta x]$$

其中 α, β 为常数， $A_l(x)$ 和 $B_n(x)$ 分别为 l 次和 n 次多项式。此时设非齐次方程 (6)

$$\text{有如下形式特解 } y^* = x^k e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x] \quad (10)$$

其中 k 是特征方程含根 $\alpha + i\beta$ 的重复次数，当 $\alpha + i\beta$ 不是特征根时，可取 0。

$m = \max\{l, n\}$ $P_m(x)$ 和 $Q_m(x)$ 分别是 x 的 m 次多项式，其系数待定。

例 9 问方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x(x \cos x + 2 \sin x)$ 具有什么形式的特解？

解 因特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ 的特征根为 $\lambda = \pm i$ ，而 $\alpha = 0, \beta = 2, \alpha + i\beta = 2i$ 不是特征根，故 $k = 0$ ；

又 $A_l(x) = x, B_n(x) = 0, m = \max\{l, n\} = 1$ ，故特解应设为

$$y^* = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x$$

代入原方程得 $(-3ax - 3b + 4c) \cos 2x - (3cx + 3d + 4a) \sin 2x = x \cos 2x$

$$\text{先比较 } \cos 2x, \sin 2x \text{ 同类项系数，得 } \begin{cases} -3ax - 3b + 4c = x \\ 3cx + 3d + 4a = 0 \end{cases}$$

$$\text{再比较 } x \text{ 的同次幂系数，得 } \begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d + 4a = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a = -\frac{1}{3}, b = 0, c = 0, d = \frac{4}{9}。 \text{ 于是求得一}$$

$$\text{个特解为 } y^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x。$$

当非齐次方程 (6) 的右端是由多个项相加而成的，可利用下面的叠加原理求得其特解。

设 $\tilde{y}_1(x)$ 和 $\tilde{y}_2(x)$ 分别是线性方程 $L(y) = f_1(x)$ 和 $L(y) = f_2(x)$ 的解，那么 $\tilde{y}_1(x) +$

$\tilde{y}_2(x)$ 是方程 $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$ 的解。

4.4.4 变系数线性微分方程的解法

1. 欧拉方程

形如 $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$ (14) 的微分方程称为欧拉方

程, 其中 a_1, a_2, \cdots, a_n 是常数。它的特点是, y 的 k 阶导数 ($k=0, 1, \cdots, n$, 规定 $y^{(0)} = y$) 的系数是 x 的 k 次方乘以常数。

作自变量的变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) \cdots$$

若引入微分算子符号 $D = \frac{d}{dt}$, 则上述结果可简记为

$$xy' = Dy, \quad x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D^2 - D)y = D(D-1)y$$

$$x^3 y''' = \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y \quad \cdots$$

一般地 $x^k y^{(k)} = D(D-1) \cdots (D-k+1)y$, 将上述结果代入方程 (14) 就可以化为关于 $y(t)$ 的常系数线性方程, 于是可求解。下面通过具体例子说明。

例 13 求解方程 $x^2 y'' + xy' - y = x^2$ 。

解 与方程 (14) 对照, 这是欧拉方程, 利用上述微分算子符号, 可直接将变换后的方

程写成 $D(D-1)y + Dy - y = e^{2t}$, 即 $D^2 y - y = e^{2t}$ 或 $\frac{d^2 y}{dt^2} - y = e^{2t}$, 求其通解为

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}, \quad \text{将 } e^t \text{ 换成 } x, \text{ 即得 } y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} + \frac{1}{3} x^2。$$

作业 5, 偶数; 6, 8, 9 (1) (欧拉方程)

第五章 向量代数与空间解析几何.....	1
5.1 向量及其运算.....	1
5.1.1 向量的概念.....	1
5.1.2 向量的线性运算.....	2
5.1.3 向量的数量积（点积、内积）.....	5
5.1.5 向量的混合积.....	8
5.2 点的坐标与向量的坐标.....	8
5.2.1 控件直角坐标系.....	8
5.2.2 向量运算的坐标表示.....	11
5.3 空间的平面与直线.....	17
5.3.1 平面.....	17
5.2.3 空间直线.....	19
5.3.3 点、平面、直线的位置关系.....	21
5.4 曲面与曲线.....	26
5.4.1 曲面、曲线的方程.....	26

第五章 向量代数与空间解析几何

5.1 向量及其运算

5.1.1 向量的概念

即有大小又有方向的量，称为向量（或矢量）。

在数学上，往往以有向线段表示向量，其方向表示向量的方向，其长度表示向量的大小。以 A 为起点， B 为终点的有向线段所表示的向量记作

\overrightarrow{AB} （图 5—1）。有时也用一个黑体字来表示向量，例如 \mathbf{a} 、 \mathbf{r} 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{F} 或 \vec{a} 、 \vec{r} 、 \vec{v} 、 \vec{F} 等等。

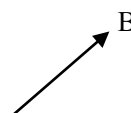


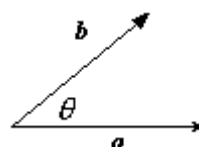
图 5—1

向量的大小称为向量的模。向量 \overrightarrow{AB} 、 \mathbf{a} 、 \vec{a} 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 、 $|\mathbf{a}|$ 、 $|\vec{a}|$ 。

在实际问题中，有些向量与其起点有关（例如质点运动的速度，与该质点的位置有关，力与力的作用点有关），有些向量与其起点无关。由于一切向量的共性是大小和方向，所以在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称为自由向量（简称向量），即只考虑向量的大小和方向，而不论他的起点在那。

如果两个向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 大小相同方向一致，就说两个向量相等，记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的。

模等于 1 的向量叫做单位向量。模等于零的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$ 。零向量的起点与终点重合，它的方向是任意的。与向量 \mathbf{a} 模相等而方向相反的向量称为 \mathbf{a} 的负向量，记做 $-\mathbf{a}$ 。



若将向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 平移，使它们的起点重合，则表示它们的有向线段的夹角 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$

称为向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的夹角（见图 5-2），记做 (\mathbf{a}, \mathbf{b})

两个非零向量如果它们的方向相同或者方向相反，就称这两个向量 图 5-2
平行。向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 平行，记作 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ ，零向量平行于任意向量。

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上，称两向量共线。若 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$ ，则称 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 垂直或正交，记做 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 。

类似还有向量共面的概念。设有 k ($k \geq 3$) 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量共面。

5.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} ，任取一点 A ，作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ ，连接 AC （图 5-3），那么向量 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ 称为向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的和，记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ，即

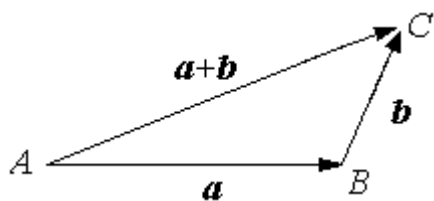


图 5-3

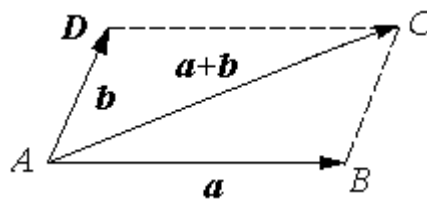


图 5-4

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

此方法称为三角形法则。

向量的平行四边形法则：当向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 不平行时，作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ ，以 AB, AD 为边作一平行四边形 $ABCD$ ，连接对角线 AC （图 5-4），显然向量 \overrightarrow{AC} 即等于向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

向量加法复合下列运算规律：

- (1) 交换率 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- (2) 结合率 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

由图 5-4 易得交换率 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ $\mathbf{b} + \mathbf{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$

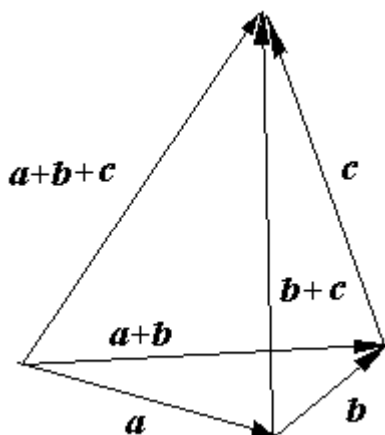


图 5-5

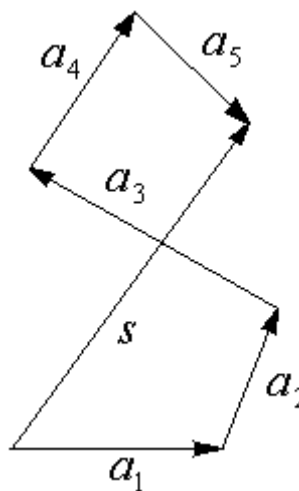


图 5-6

由图 5-5 易证结合率, 由加法的交换率和结合率, n 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$ 相加可以写成 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 由三角形法则, 可得 n 个向量相加的法则如下: 使前一向量的终点作为次一向量的起点, 相继作向量 a_1, a_2, \dots, a_n , 再以第一向量的起点为起点, 最后一向量的终点为终点作一向量, 这一向量即为所求之和。

我们规定两个向量 b 与 a 的差 $b-a=b+(-a)$. 即把向量 $-a$ 加到 b 上, 使得 a 与 b 的差 $b-a$ (图 5-7(a)).

特别地, 当 $b=a$ 时, 有 $a-a=a+(-a)=0$.

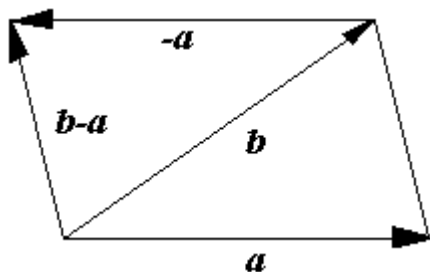


图 5-7 (a)

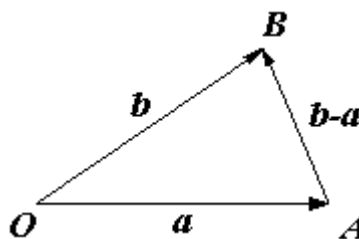


图 5-7 (b)

显然, 任给向量 \overrightarrow{AB} 及点 O , 有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

因此, 若把向量 a 与 b 移到同一点 O , 则从 a 终点 A 向 b 的终点 B 所引向量 \overrightarrow{AB} 便是向量 a 与 b 的差 $b-a$ (图 5-7(b)).

由三角形两边之和大于第三边的原理, 有

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{及} \quad |a-b| \leq |a| + |b|$$

其中等号在 a 与 b 同向或反向时成立。

2. 向量与数的乘法

向量 a 与实数 λ 的乘积记作 λa 规定 λa 是一个向量, 它的模 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$, 它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反, 当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda a| = 0$, 即 λa 为零向量, 这时它的方

向可以是任意的。

特别地，当 $\lambda = \pm 1$ 时，有

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}, (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

向量与数的乘积复合下列运算规律：

(1) 结合率 $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a};$

(2) 分配率 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a};$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ 。试用 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表示向量 \overrightarrow{MA} 、 \overrightarrow{MB} 、 \overrightarrow{MC} 和 \overrightarrow{MD} ，这里 M 是平行四边形对角线的交点（图 5-8）

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所

以 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

即 $-(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\overrightarrow{MA}$

于是 $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ 。

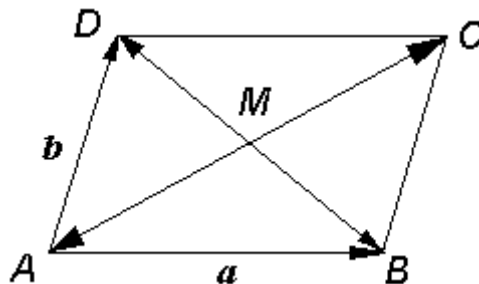


图 5-8

因为 $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$ ，所以 $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ 。

又因 $-\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD}$ ，所以 $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ 。由于 $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD}$ ， $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ 。

设 \mathbf{e}_a 表示与非零向量 \mathbf{a} 同方向的单位向量，则 $|\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 与 \mathbf{e}_a 同向，即 $|\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 与 \mathbf{a} 同向，因此， $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 。

我们规定，当 $\lambda \neq 0$ 时， $\frac{\mathbf{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{a}$ ，则上式可写为 $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \mathbf{e}_a$ 。即向量除以它的模为与原向量的单位向量。

命题 1 设向量 $\mathbf{a} \neq 0$ ，那么，向量 \mathbf{b} 平行于 \mathbf{a} 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ ，使 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ 。

证：条件的充分性是显然的，下面证必要性

设 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$ ，设 $|\lambda| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$ ，当 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 同向时 λ 取正值，当 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 反向时 λ 取负值，即 $\lambda\mathbf{a}$ 与

\mathbf{b} 同向，且 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ，故 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$

再证数 λ 的唯一性。设 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ ，又设 $\mathbf{b} = \mu \mathbf{a}$ ，两式相减，便得 $(\lambda - \mu)\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ，即 $|\lambda - \mu| |\mathbf{a}| = 0$ 。因 $|\mathbf{a}| \neq 0$ ，故 $|\lambda - \mu| = 0$ ，即 $\lambda = \mu$ 。

命题 2 如向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 共面，而 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 不共线，则存在实数 λ 和 μ ，使得 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ 。

证明 因为 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 不共线，故可知 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 均为非零向量，过一定点 O 作 $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$ 、 $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$ 、 $\mathbf{OC} = \mathbf{c}$ 。由题设 \mathbf{OA} 、 \mathbf{OB} 、 \mathbf{OC} 共面。

过点 C 分别作直线 \mathbf{OB} 、 \mathbf{OA} 的平行线，交 \mathbf{OA} 与 E 、 \mathbf{OB} 与 F （图 5-10），从而 $\mathbf{OC} = \mathbf{OE} + \mathbf{OF}$ ，又因 \mathbf{OE} 与 \mathbf{OA} 共线，由命题 1 知存在实数 λ ，使得 $\mathbf{OE} = \lambda \mathbf{OA} = \lambda \mathbf{a}$ 同理存在实数 μ ，使得 $\mathbf{OF} = \mu \mathbf{OB} = \mu \mathbf{b}$ ，于是 $\mathbf{OC} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ ，即 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ 。

命题 3 若向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 不共面，则对任一向量 \mathbf{d} ，存在实数 λ 、 μ 、 ν ，使得 $\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}$ 。

5.1.3 向量的数量积（点积、内积）

设一物体在常力作用 \mathbf{F} 下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2 。依 s 表示位移 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 。由物理学知道，力 \mathbf{F} 所作的功为 $W = |\mathbf{F}| |s| \cos \theta$ ，其中 θ 为 \mathbf{F} 与 s 的夹角（图 5-9）。

由此，我们可以看到有时要对两个向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 作这样的运算，其结果为一数值，等于两个向量的模与它们夹角余弦的乘积。我们称这样的运算为向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的数量积、点积或内积，记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ （图 5-10），即 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta$ 。

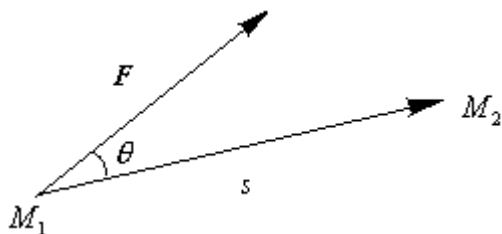


图 5-9

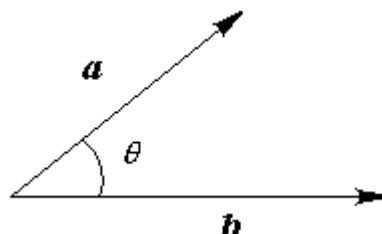


图 5-10

由此定义，力做功可以表示为 $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ 。

设非零向量 \mathbf{a} 所在的直线为 l ，且 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \theta$ 。用有限线段 \mathbf{AB} 表示向量 \mathbf{b} ，过点 A 和点 B 作平面垂直于直线 l ，并与 l 分别交于点 A' 和点 B' 分别是点 A 和点 B 在 l 上的投影，称有向线段 $A'B'$ 为向量 \mathbf{b} 在向量 \mathbf{a} 上的投影向量。容易看出 $A'B' = (|\mathbf{AB}| \cos \theta) \mathbf{e}_a = (|\mathbf{b}| \cos \theta) \mathbf{e}_a$ 称上式中的实数 $|\mathbf{b}| \cos \theta$ 为向量 \mathbf{b} 在向量 \mathbf{a} 上的投影，并记做 $\text{Prj}_a \mathbf{b}$ 。当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时， $\text{Prj}_a \mathbf{b}$ 等于 \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 上投影向量的长度；当 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ 时， $\text{Prj}_a \mathbf{b}$ 等于 \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 上投影向量的长度的相反数；当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $\text{Prj}_a \mathbf{b}$ 等于零。投影具有唯一性。由数量积的定义，立即得到 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

$$=|a|\text{Prj}_a b$$

投影具有下列性质:

$$\text{Prj}_a(\lambda b)=\lambda \text{Prj}_a b \quad \text{Prj}_a(b+c)=\text{Prj}_a b+\text{Prj}_a c$$

数量积的运算规律

(1) 交换律 $a \cdot b=b \cdot a$. 由定义显然

(2) 数乘交换律 $(\lambda a) \cdot (\mu b)=\lambda \mu (a \cdot b)$

(3) 分配律 $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$.

(1) $a \cdot a=|a|^2$. 这时因为 $a \cdot a=|a|^2 \cos 0=|a|^2$. 或 $|a|=\sqrt{a \cdot a}$.

(2) $\cos \theta=\frac{a \cdot b}{|a||b|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$.

对于两个非零向量 a, b , $a \cdot b=0 \Leftrightarrow$ 是 $a \perp b$. 这是因为 $a \cdot b=0 \Leftrightarrow \cos \theta=0 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$.

由于零向量的方向可以看作是任意的, 故可以认为零向量与任何向量都垂直。因此上述结论可以叙述为: $a \cdot b=0 \Leftrightarrow$ 是 $a \perp b$.

例 2 设液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域, 液体在这区域上各点处的速度均为(常向量) v . 设 n 为垂直于 S 的单位向量(图 5-11 (a)), 计算单位时间内经过这区域流向 n 所指向一侧的液体的质量 P (液体得密度为 ρ).

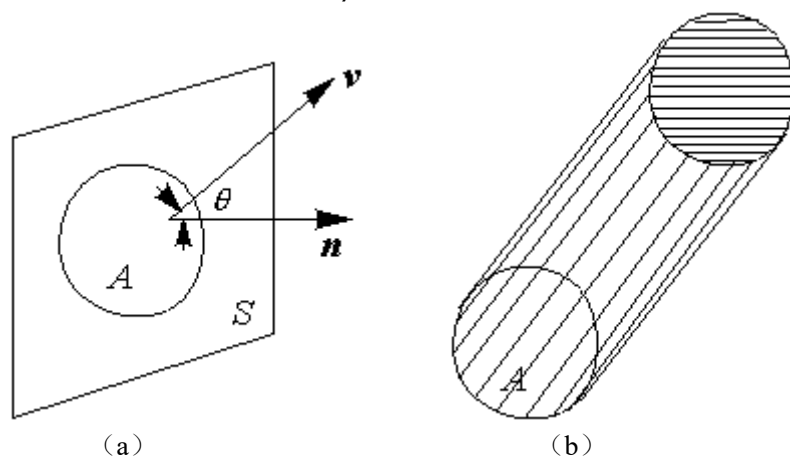


图 5-11

解 该斜柱体的斜高 $|v|$, 斜高与地面垂线的夹角为 v 与 n 的夹角 θ , 所以这柱体的高为 $|v|\cos \theta$, 体积为 $A|v|\cos \theta=A v \cdot n$.

从而, 单位时间内经过这区域流向 n 所指向一侧的液体的质量为

$$P=\rho A v \cdot n.$$

5.1.4 向量的向量积(叉积、外积)

设 O 为一根杠杆 L 的支点, 有一个力 F 作用于这杠杆上 P 点处. F 与 \overrightarrow{OP} 的夹角为 θ (图 5-13). 由力学规定, 力 F 对支点 O 的力矩是一向量 M , 它的模

$$|\vec{M}| = |OQ| |\vec{F}| = |\vec{OP}| |\vec{F}| \sin \theta,$$

而 \vec{M} 的方向垂直于 \vec{OP} 与 \vec{F} 所确定的平面, \vec{M} 的指向是按右手规则从 \vec{OP} 以不超过 π 的角转向 \vec{F} 来确定的, 如图 5-14。

设向量 \vec{c} 由两个向量 \vec{a} 与 \vec{b} 按下列方式给出:

\vec{c} 的模 $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, 其中 θ 为 \vec{a} 、 \vec{b} 间的夹角;

\vec{c} 的方向垂直于 \vec{a} 、 \vec{b} 所决定的平面, \vec{c} 的指向按右手规则从 \vec{a} 转向 \vec{b} 来决定 (图 5-12)

那么向量 \vec{c} 叫做向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的向量积, 即

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

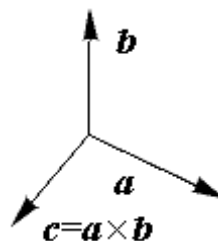


图 5-12

因此上面的力矩 \vec{M} 等于 \vec{OP} 与 \vec{F} 的向量积, 即 $\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F}$.

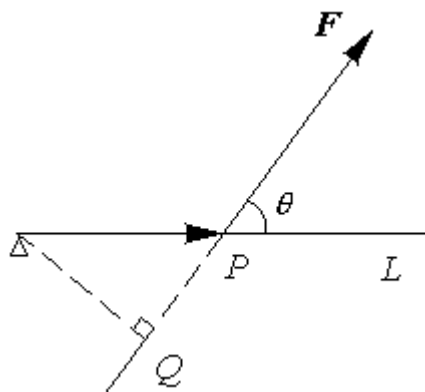


图 5-13

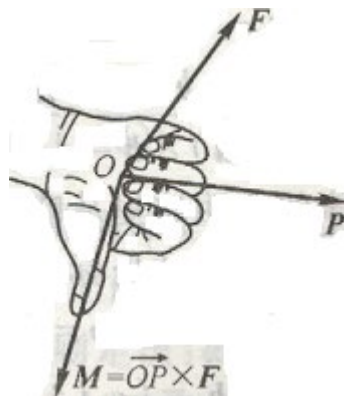


图 5-14

向量积的几何意义:

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ 的模 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 是以 \vec{a} 、 \vec{b} 为邻边的平行四边形的面积
- (2) $\vec{a} \times \vec{b}$ 与一切即平行于 \vec{a} 又平行于 \vec{b} 的平面垂直。

向量积的运算规律

- (1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- (2) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
- (3) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ (λ 为数)。

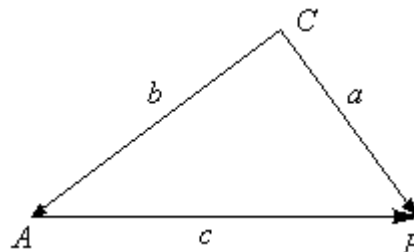
向量积的性质

- (1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. 这是因为夹角 $\theta = 0$, 所以 $|\vec{a} \times \vec{a}| = |\vec{a}|^2 \sin 0 = 0$.
- (2) 对于两个非零向量 \vec{a} 与 \vec{b} : 如果 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, 那么 $\vec{a} // \vec{b}$; 反之, 如果 $\vec{a} // \vec{b}$ 那么 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

这是因为 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, 但 $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, 所以 $\sin \theta = 0$, 于是 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$; 反之, 如果 $\vec{a} // \vec{b}$, 那么 $\theta = 0$ 或 π , 于是 $\sin \theta = 0$, 从而 $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$, 即 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

由于零向量可以认为与任意向量平行, 所以上述结论可叙述为 $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

例 3 设 $\triangle ABC$ 的三条边分别是 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} (图 5-15), 试用向量运算证明正弦定理



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

证明 注意到 $\mathbf{CB} = \mathbf{CA} + \mathbf{AB}$, 故有

$$\begin{aligned}\mathbf{CB} \times \mathbf{CA} &= (\mathbf{CA} + \mathbf{AB}) \times \mathbf{CA} = \mathbf{CA} \times \mathbf{CA} + \mathbf{AB} \times \mathbf{CA} \\ &= \mathbf{AB} \times \mathbf{CA} \\ &= \mathbf{AB} \times (\mathbf{CB} + \mathbf{BA}) = \mathbf{AB} \times \mathbf{CB}\end{aligned}$$

图 5-15

于是得到 $\mathbf{CB} \times \mathbf{CA} = \mathbf{AB} \times \mathbf{CA} = \mathbf{AB} \times \mathbf{CB}$

从而 $|\mathbf{CB} \times \mathbf{CA}| = |\mathbf{AB} \times \mathbf{CA}| = |\mathbf{AB} \times \mathbf{CB}|$

即 $ab \sin C = cb \sin A = ca \sin B$

所以

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

5.1.5 向量的混合积

设已知三个向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 和 \mathbf{c} . 如果先作两个向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的向量积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 把所得的向量与第三个向量 \mathbf{c} 再作数量积 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, 这样得到的数量叫做三向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 的混和积, 记作 $[\mathbf{abc}]$.

向量的混和积 $[\mathbf{a b c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 是这样的一个数, 它的绝对值表示以向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 为棱的平行六面体的体积. 如果向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 组成右手系(即 \mathbf{c} 的指向按右手规则从 \mathbf{a} 转向 \mathbf{b} 来确定), 那么混和积的符号是正的; 如果 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 组成左手系(即 \mathbf{c} 的指向按左手规则从 \mathbf{a} 转向 \mathbf{b} 来确定), 那么混和积的符号是负的.

当 $[\mathbf{abc}] = 0$ 时, 平行六面体的体积为零, 此时该六面体的三条棱落在同一平面上, 即 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 共面; 反之, 当 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 共面时, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{c}$, 此时 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 由混合积的定义, 立即得到 $[\mathbf{abc}] = 0$. 于是得到三向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 共面的充要条件是 $[\mathbf{abc}] = 0$.

作业 1, 3, 5, 6, 7, 10, 12

5.2 点的坐标与向量的坐标

5.2.1 控件直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, 就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴, 依次记为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 统称坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系. 称为 $Oxyz$ 坐标系或 $[O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ 坐标系(图 5-16), x 轴、 y 轴、 z 轴组成右手系. 如图 5-17

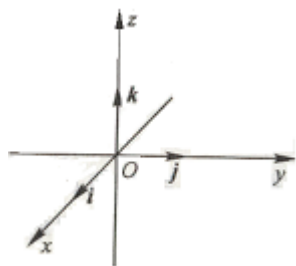


图 5-16

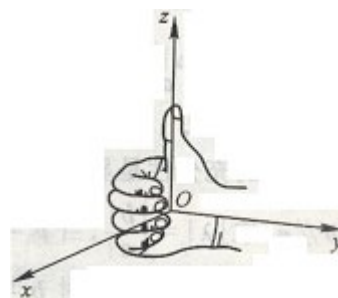


图 5-17

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴、 y 轴确定的叫 xOy 面, y 轴、 z 轴确定的叫 yOz , z 轴、 x 轴确定的叫 zOx 面. 三个坐标面分空间为八个部分, 每一部分叫做一个卦限, 含有 x 轴、 y 轴、 z 轴正半轴的叫第一卦限, 其他第二、第三、第四卦限在 xOy 面上方, 按逆时针方向确定. 第一卦限下面的为第五, 第二下的为第六、第三下的为第七、第四下的为第八. 如图 5-18

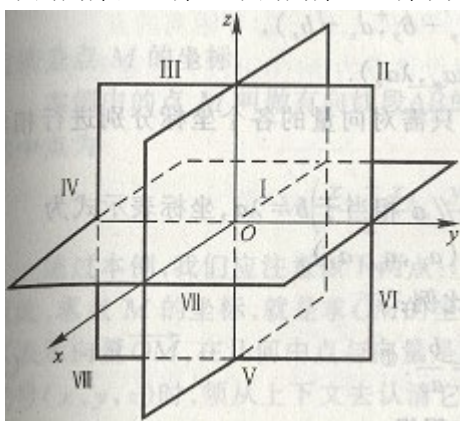


图 5-18

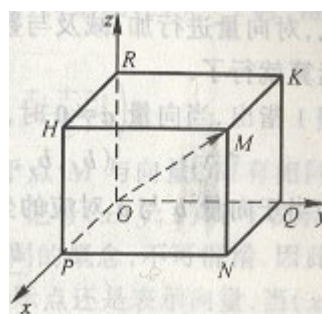


图 5-19

设 M 是空间的一点, 过点 M 分别作平面垂直于三条坐标轴, 并依次与 x 轴、 y 轴、 z 轴交于 P 、 Q 、 R 三点, P 、 Q 、 R 三点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标分别为 x 、 y 、 z , 这样点 M 就和有序数组 (x, y, z) 建立了一一对应的关系. 我们称有序数组 (x, y, z) 为点 M 的坐标, 依次把 x, y, z 称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标, 并将点 M 记做 $M(x, y, z)$ (图 5-19), 特别地有 $P(x, 0, 0), Q(0, y, 0), R(0, 0, z), O(0, 0, 0)$.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间两点. 过 M_1 和 M_2 各作三各垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的平面. 这 6 个平面围成一个长方体, $M_1 M_2$ 为其对角线, 该长方体的三条棱的长度分别为 $|x_2 - x_1|$ 、 $|y_2 - y_1|$ 、 $|z_2 - z_1|$, 于是得到

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 两点间的距离为

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 于坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为 $|MO| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

例 1 已知点 $A(4, 1, 7)$ 、 $B(-3, 5, 0)$, 在 y 轴上求一点 M , 使得 $|MA| = |MB|$.

解 因为点在 y 轴上, 故设其坐标为 $M(0, y, 0)$, 则由两点间的距离公式, 有

$$\sqrt{(4-0)^2 + (1-y)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{(-3-0)^2 + (5-y)^2 + (0-0)^2}$$

解得 $y = -4$, 故所求点为 $M(0, -4, 0)$

例 2 求证以 $M_1(4, 3, 1)$ 、 $M_2(7, 1, 2)$ 、 $M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为

$$|M_1M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14$$

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6$$

$$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6$$

所以 $|M_2M_3| = |M_3M_1|$, 即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

任给向量 \mathbf{r} , 对应有点 M , 使 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, 以 \overrightarrow{OM} 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK - OPNQ$, 如图 7-12 所示, 有

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

设 $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i}$ 、 $\overrightarrow{OQ} = y\mathbf{j}$ 、 $\overrightarrow{OR} = z\mathbf{k}$, 则 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. 此式称为向量 \mathbf{r} 的坐标分解式, $x\mathbf{i}$ 、 $y\mathbf{j}$ 、 $z\mathbf{k}$ 称为向量 \mathbf{r} 沿三个坐标轴方向的分向量.

显然, 给定向量 \mathbf{r} , 就确定了点 M 及 \overrightarrow{OP} 、 \overrightarrow{OQ} 、 \overrightarrow{OR} 三个分量, 进而确定了 x 、 y 、 z 三个有序数; 反之, 给定三个有序数 x 、 y 、 z 也就确定了向量 \mathbf{r} 与点 M . 于是点 M 、向量 \mathbf{r} 与三个有序数 x 、 y 、 z 之间有一一对应的关系

$$M \leftrightarrow \mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \leftrightarrow (x, y, z),$$

据此, 定义: 有序数 x 、 y 、 z 称为向量 \mathbf{r} (在坐标系 $Oxyz$ 中) 的坐标, 记作 $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

向量 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明, 一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x, y, z) 即表示点 M , 又表示向量 \overrightarrow{OM} .

如点 M 在 yOz 面上, 则 $x=0$; 同样, 如点 M 在 zOx 面上, 则 $y=0$; 在 xOy 面上, 则 $z=0$. 如点 M 在 x 轴上, 则 $y=z=0$; 同样, 在 y 轴上的点, 则 $z=x=0$; 在 z 轴上的点, 有 $x=y=0$. 如点 M 为原点, 则 $x=y=z=0$.

5.2.2 向量运算的坐标表示

利用向量的坐标, 可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下:

设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z),$

即 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$

利用向量的运算规律, 有

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x) \mathbf{i} + (a_y - b_y) \mathbf{j} + (a_z - b_z) \mathbf{k}$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x) \mathbf{i} + (\lambda a_y) \mathbf{j} + (\lambda a_z) \mathbf{k}, (\lambda \text{ 为实数})$$

即 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

由此可见, 对向量进行加、减及数乘, 只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了, 5.1 节命题 1 指出, 当向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, 向量 $\mathbf{b} // \mathbf{a}$ 相当于 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 坐标表示式 $(b_x, b_y, b_z) = \lambda (a_x, a_y, a_z)$ 这就相当于向量 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 的对应坐标成比例:

即
$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

例 3 设有两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式。

解 由于 $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$, 而 $\overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2)$, 于是

$$\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

即 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

例 4 已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求与 \overrightarrow{AB} 方向相同的单位向量 \mathbf{e} 。

解 因为

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7, 1, 3) - (4, 0, 5) = (3, 1, -2),$$

所以
$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14},$$

于是

$$\mathbf{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2).$$

例 5 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases} 5\mathbf{x} - 3\mathbf{y} = \mathbf{a} \\ 3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = \mathbf{b} \end{cases}$ 其中 $\mathbf{a} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, -2)$.

解 解此方程组得 $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$

以 \mathbf{a} , \mathbf{b} 代入, 即得

$$\mathbf{x} = 2(2, 1, 2) - 3(-1, 1, -2) = (7, -1, 10)$$

$$\mathbf{y} = 3(2, 1, 2) - 5(-1, 1, -2) = (11, -2, 16).$$

例 6 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 AB 上求点 M , 使

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}.$$

解 如图 7-13 所示. 由于

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

$$\text{因此} \quad \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}),$$

$$\text{从而} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda} (\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}).$$

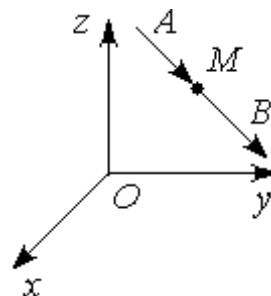


图 7-13

以 \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{OB} 的坐标 (即点 A 、点 B 的坐标) 代入

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right)$$

本例中的点 M 称为定比分点, 特别地当 $\lambda = 1$ 时, 得线段 AB 的中点为

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

利用向量的坐标运算, 计算向量的模、方向角

设向量 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 作 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, 则点 M 的坐标为 $M(x, y, z)$, 由两点间距离公式

$$\text{立即得到} \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

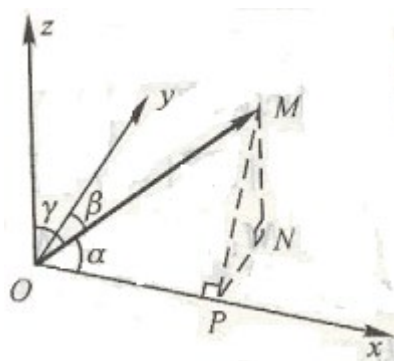


图 5-20

非零向量 \mathbf{r} 与三条坐标轴的夹角 α, β, γ 称为向量 \mathbf{r} 的方向角. 从图 5-20 可见, 设

$\mathbf{r} = (x, y, z)$, 由于 x 是有向线段 \overrightarrow{OP} 的值, $MP \perp OP$, 故

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{x}{|\mathbf{r}|}, \text{ 类似地 } \cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|}, \cos \gamma = \frac{z}{|\mathbf{r}|}$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) &= \left(\frac{x}{|\mathbf{r}|}, \frac{y}{|\mathbf{r}|}, \frac{z}{|\mathbf{r}|} \right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}|} (x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 \mathbf{r} 的方向余弦. 上式表明, 以向量 \mathbf{r} 的方向余弦为坐标的

向量就是与 \mathbf{r} 同方向的单位向量 \mathbf{e}_r , 并由此可得

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

例 7 已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

$$\begin{aligned} \text{解 } \overrightarrow{M_1M_2} &= (1 - 2, 3 - 2, 0 - \sqrt{2}) \\ &= (-1, 1, -\sqrt{2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{M_1M_2}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 2} = \sqrt{4} = 2; \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{2}, \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

下面我们来推导数量积的坐标表示式

设 $a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$ 。按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= a_x i \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) + a_y j \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) + a_z k \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= a_x b_x i \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_x b_z i \cdot k + \\ &\quad a_y b_x j \cdot i + a_y b_y j \cdot j + a_y b_z j \cdot k + \\ &\quad a_z b_x k \cdot i + a_z b_y k \cdot j + a_z b_z k \cdot k \end{aligned}$$

由于 i, j, k 互相垂直, 所以 $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$, $j \cdot i = k \cdot j = i \cdot k = 0$, 又由于 i, j, k 的模均为 1, 所以 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$. 因此得

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

这就是两个向量数量积的坐标表示式.

由于 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta$, 所以当 a, b 都是非零向量时, 有

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}.$$

将向量的坐标表示式代入上式得

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

由此可得 $a \perp b$ 的充要条件是 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

例 8 已知三点 $M(1, 1, 1)$ 、 $A(2, 2, 1)$ 和 $B(2, 1, 2)$, 求 $\angle AMB$.

解 作向量 \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{MB} , 则 $\angle AMB$ 为向量 \overrightarrow{MA} 与 \overrightarrow{MB} 的夹角. 这时 $\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0)$,

$\overrightarrow{MB} = (1, 0, 1)$, 从而

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1;$$

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2};$$

$$|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

从而

$$\cos \angle AMB = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

由此得 $\angle AMB = \frac{\pi}{3}$.

例 9 设立方体得一条对角线为 OM , 一条棱为 OA , 且 $|OA|=a$, 求 \vec{OA} 在方向 OM 上的投影 $\text{prj}_{\vec{OM}} \vec{OA}$.

解 如图 5-21 所示, 记 $\angle MOA = \varphi$, 有

$$\cos \varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

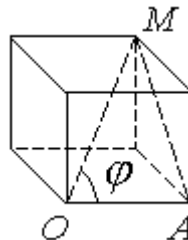


图 5-21

于是 $\text{prj}_{\vec{OM}} \vec{OA} = \vec{OA} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}.$

下面来推导向量积的坐标表示式

设 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$. 按向量积的运算规律可得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x \mathbf{i} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + a_y \mathbf{j} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + a_z \mathbf{k} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_x b_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_x b_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\ &\quad a_y b_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_y b_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\ &\quad a_z b_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_z b_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}). \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, 所以

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

为了帮助记忆, 利用三阶行列式, 上式可以写成

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

例 10 设 $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 2)$, 计算 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\text{解} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

例 11 已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(3, 4, 5)$ 、和 $C(2, 4, 7)$, 求三角形 ABC 的面积.

解 由向量积对于, 可知三角形 ABC 的面积

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \angle A \\ &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \end{aligned}$$

由于 $|\vec{AB}| = (2, 2, 2)$, $|\vec{AC}| = (1, 2, 4)$, 因此

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

于是

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

例 12 设刚体以等角速度 ω 绕 l 轴旋转, 计算刚体上一点 M 的线速度.

解 刚体绕 l 轴旋转时, 我们可以用在 l 轴上的一个向量 ω 表示角速度, 它的大小等于角速度的大小, 它的方向由右手规则定出: 即以右手握住 l 轴, 当右手的四个手指的转向与刚体的旋转方向一致时, 大拇指的指向就是 ω 的方向 (图 5-22).

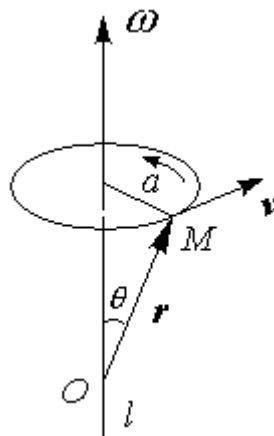


图 5-22

设点 M 到旋转轴 l 上任取一点 O 做向量 $\vec{r} = \vec{OM}$, 并以 θ 表示 ω 与 \vec{r} 的夹角, 那么

$$a = |\vec{r}| \sin \theta.$$

设线速度为 \vec{v} , 那么由物理学上线速度与角速度的关系可知, \vec{v} 的大小为

$$|\vec{v}| = |\omega| a = |\omega| |\vec{r}| \sin \theta;$$

\vec{v} 的方向垂直于通过点 M 的与 l 轴的平面, 即 \vec{v} 垂直于 ω 与 \vec{r} ; 又 \vec{v} 的指向是使 ω 、 \vec{r} 、 \vec{v} 符合右手规则, 因此有 $\vec{v} = \omega \times \vec{r}$.

类似可得向量混合积的表达式, 设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

例 13 已知不在一平面上的四点: $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$ 、 $C(x_3, y_3, z_3)$ 、

$D(x_4, y_4, z_4)$. 求四面体 $ABCD$ 的体积.

解 由立体几何知道, 四面体的体积 V_T 等于以向量 \vec{AB} 、 \vec{AC} 和 \vec{AD} 为棱的平行六面体的体积的六分之一. 因而

$$V_T = \frac{1}{6} |[\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}]|.$$

由于

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ \vec{AC} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1), \\ \vec{AD} &= (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)\end{aligned}$$

所以

$$V_T = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

上式中符号的选择必须和行列式的符号一致.

作业 3, 4, 6, 8, 10, 13, , 15

5.3 空间的平面与直线

5.3.1 平面

平面的法线: 垂直于平面的任一非零向量称为平面的法线。平面上的任一向量均垂直于平面的法线。

设已知平面上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及其法向量 $\mathbf{n}=(A, B, C)$, 下面求平面的方程。

设 $M(x, y, z)$ 为平面 Π 上异于 M_0 的任一点 (图 5-23), 那么向量 $\vec{M_0M} \perp \mathbf{n}$, 从而 $\mathbf{n} \cdot \vec{M_0M} = 0$. 由于 $\mathbf{n}=(A, B, C)$, $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, 所以有

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

这就是平面 Π 上任一点的坐标 x, y, z 满足的方程; 反过来不在平面 Π 上点的坐标 x, y, z 显然不满足方程 (1)。方程 (1) 称为平面的点法式方程。

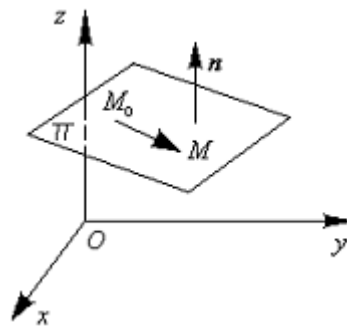


图 5-23

例 1 已知空间两点 $M_1(1, 2, -1)$ 和 $M_2(3, -1, 2)$, 求经过点 M_1 且与直线 M_1M_2 垂直的平面方程。

解 显然 M_1M_2 就是平面的一个法向量

$$\vec{M_1M_2} = (3 - 1, -1 - 2, 2 + 1) = (2, -3, 3)$$

由点法式方程可得所求平面的方程为

$$2(x - 1) - 3(y - 2) + 3(z + 1) = 0$$

即

$$2x - 3y + 3z + 7 = 0$$

例2 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$ 、 $M_2(-1, 3, -2)$ 和 $M_3(0, 2, 3)$ 的平面的方程。

解 先找出这平面的法线向量 \vec{n} 。由于向量 \vec{n} 与向量 $\vec{M_1M_2}$ 、 $\vec{M_1M_3}$ 都垂直, 而 $\vec{M_1M_2} = (-3, 4, -6)$, $\vec{M_1M_3} = (-2, 3, -1)$, 所以可取它们的向量积为 \vec{n} :

$$\vec{n} = \vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k},$$

根据平面的点法式方程 (1), 得所求平面的方程为

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0,$$

即

$$14x + 9y - z - 15 = 0.$$

本题也可以按下面的方法来解

设 $M(x, y, z)$ 是平面上的任意一点, 则向量 $\vec{M_1M}$, $\vec{M_1M_2}$, $\vec{M_1M_3}$ 共面, 由混合积的

几何意义可得

$$[\vec{M_1M}, \vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}] = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -1-2 & 3+1 & -2-4 \\ 0-2 & 2+1 & 3-4 \end{vmatrix} = 0$$

化简即得

$$14x + 9y - z - 15 = 0$$

一般地, 过已知三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

该方程称为平面的三点式方程

由点法式方程可知平面的方程可以使用三元一次方程来表示, 反过来, 设有一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

任取满足该方程的一组数 x_0, y_0, z_0 , 即

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3)$$

由 (2) - (3)

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) + D = 0. \quad (4)$$

与点法式相比可知 (4) 为过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$ 的平面方程。由于 (4)

与(2)通解,可知任一三元一次方程(2)的图形总是一个平面.方程(2)称为平面的一般方程,其中 x, y, z 的系数就是该平面的一个法线向量 \mathbf{n} 的坐标,即 $\mathbf{n}=(A, B, C)$.

当 $D=0$ 时,方程(2)成为 $Ax+By+Cz=0$,它表示一个过原点的平面.

当 $A=0$ 时,方程(2)成为 $By+Cz+D=0$,法线向量 $\mathbf{n}=(0, B, C)$ 垂直于 x 轴,方程表示一个平行于 x 轴的平面.

同样,方程 $Ax+Cz+D=0$ 和 $Ax+By+D=0$,分别表示一个平行于 y 轴和 z 轴的平面.

当 $A=B=0$ 时,方程(2)成为 $Cz+D=0$ 或 $z=-\frac{D}{C}$,法线向量 $\mathbf{n}=(0, 0, C)$ 同时垂直 x 轴和 y 轴,方程表示一个平行于 xOy 面的平面.

同样,方程 $Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示一个平行于 yOz 面和 xOz 面的平面.

例3 设一平面与 x, y, z 轴的交点依次为 $P(a, 0, 0)$ 、 $Q(0, b, 0)$ 、 $R(0, 0, c)$ 三点(图5-24),求这平面的方程(其中 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$).

解 设所求的平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因 $P(a, 0, 0)$ 、 $Q(0, b, 0)$ 、 $R(0, 0, c)$ 三点都在平面上,所以点 P 、 Q 、 R 的坐标都满足方程(2);即有

$$\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0, \end{cases}$$

$$\text{得 } A=-\frac{D}{a}, B=-\frac{D}{b}, C=-\frac{D}{c}.$$

以此代入(2)并除以 D ($D \neq 0$),便得所求的平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (5)$$

方程(5)叫做平面的截距式方程,而 a, b, c 依次叫做平面在 x, y, z 轴上的截距.

例4 因平面通过 z 轴及点 $(1, 2, -3)$ 的平面方程.

解 因平面通过 z 轴,故可设其方程为 $Ax+By=0$

又因 $(1, 2, -3)$ 点在平面上,将其坐标代入方程,则有

$$A+2B=0, \text{ 即 } A=-2B$$

故所求平面方程为 $-2Bx+By=0$,即 $2x-y=0$

例5 设平面 π 的方程为 $3x-2y+z+5=0$,求经过坐标原点且与 π 平行的平面方程.

解 显然所求平面与平面 π 有相同的法向量 $\mathbf{n}=(3, -2, 1)$,又所求平面经过原点,故它的方程为 $3x-2y+z=0$

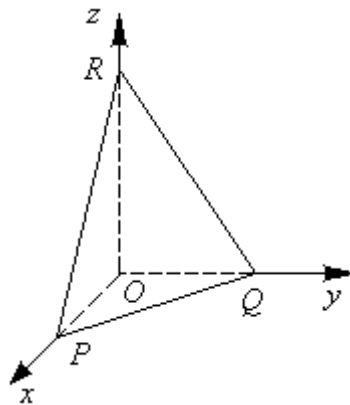


图 5-24

5.2.3 空间直线

空间直线可以看作是空间两平面的交线,如果两个相交的平面的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,那么直线上的任一点必同时满足这

两个平面的方程,即满足方程组
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \quad (1)$$

反过来,不在直线上的点,不可能同时在两个平面上,所以它的坐标不满足方程组(1)。因此直线可以使用方程组(1)表示。方程组称为空间直线的一般方程。

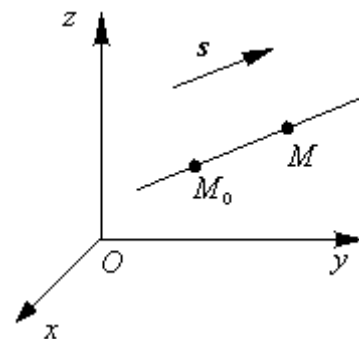
直线的方向向量:平行于一已知直线的任一向量称为直线的方向向量。易知直线上的任一向量都平行于直线的方向向量。

假设直线过 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且其方向向量为 $s=(m, n, p)$, 下面来求它的方程。

设 $M(x, y, z)$ 为直线上的任一异于 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的点, 则 $\overrightarrow{M_0M} \parallel s$, 如图 5-26, 从而两向量的坐标成比例,

由于 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $s=(m, n, p)$, 从而有

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$



(2) 图 5-26

显然, 如果点 M 不在直线上, 则 $\overrightarrow{M_0M}$ 不平行于 s , 从而两向量的坐标不成比例。因此方程组(2)就是直线的方程, 叫做直线的对称式方程或点向式方程。

任一方向向量 s 的坐标 (m, n, p) 叫做这直线的一组方向数, 而向量 s 的方向余弦叫做该直线的方向余弦。

由直线的对称式方程容易导出直线的参数式方程。如设

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t,$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (3)$$

方程组(3)就是直线的参数式方程。

例 6 求经过两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线方程。

解 该直线的方向向量可取 $n=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ 。由点法式方程立即得到所求直线的方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

该方程称为直线的两点式方程。

例 7 用直线的对称式方程及参数式方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases} \quad (4)$$

解 易得 $(1, 0, -2)$ 为直线上的一点。直线的方向向量为两平面的法线向量的向量

积, 从而

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4i - j - 3k.$$

因此, 所给直线的对称式方程为 $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3}$

令 $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3} = t,$

得所给直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = -t, \\ z = -2 - 3t. \end{cases}$$

5.3.3 点、平面、直线的位置关系

1. 点到平面的距离

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点, 求 P_0 到这平面的距离 (图 5-26) .

在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 并作一法线向量 \mathbf{n} , 由图 5

-26, 并考虑到 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 与 \mathbf{n} 的夹角也可能是钝角, 得所求距离

$d = |\text{Prj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_0}|$. 设 \mathbf{e}_n 为与向量 \mathbf{n} 同法线的单位向量, 那么有

$$\text{Prj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \mathbf{e}_n,$$

而

$$\mathbf{e}_n = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right),$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \text{Prj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_0} &= \frac{A(x_0 - x_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

由于

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

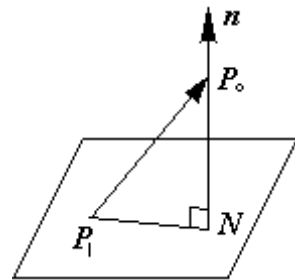


图 5-26

所以

$$\text{Prj}_n \overrightarrow{P_1 P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

由此得点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 得距离公式为:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

例 8 求两个平行平面 $\pi_1: z = 2x - 2y + 1$, $\pi_2: 4x - 4y - 2z + 3 = 0$ 之间的距离。

解 在平面 π_1 上任取一点 $M(0,0,1)$, 则两平面间的距离 d 就是点 M 到 π_2 的距离, 于是

$$d = \frac{4 \times 0 - 4 \times 0 - 2 \times 1 + 3}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{6}$$

2. 点到直线的距离

设直线 L 的方程是 $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 是空间一点, 则

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在直线 L 上, 且 L 的方向向量 $s=(m,n,p)$ 。

过 M_0 点作一向量 M_0M , 使 $M_0M=s=(m,n,p)$, 以,

M_0M_1 和 M_0M 为邻边作以平行四边形 (图 5-27), 不难看出

出 M_1 到 L 的距离 d 等于这个平行四边形底边上的高。

由向量积的定义知, 该平行四边形的面积

$$S = |M_0M_1 \times M_0M| = |M_0M_1 \times s|$$

又 $S = |M_0M| \cdot d = |s| \cdot d$

于是点 M_1 到直线 L 的距离为 $d = \frac{|M_0M_1 \times s|}{|s|}$ (11)

例 9 求点 $M(1,2,3)$ 到直线 $L: x-2 = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{5}$ 的距离

解 由直线方程知点 $M_0(2,2,0)$ 在 L 上, 且 L 的方向向量 $s=(1,-3,5)$ 。从而

$$M_0M = (-1,0,3)$$

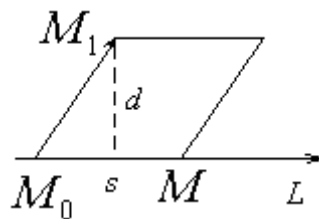


图 5-27

$$M_0 M \times s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 9i + 8j + 3k$$

代入 (11), 得点 M 到 L 的距离为

$$d = \frac{|M_0 M \times s|}{|s|} = \frac{\sqrt{9^2 + 8^2 + 3^2}}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \sqrt{\frac{22}{5}}$$

3. 两平面之间的夹角

两平面的法线向量的夹角 (通常指锐角) 称为两平面的夹角.

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量的夹角依次为

$n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 那么平面 Π_1 和

Π_2 的夹角 θ (图 5-28) 应是 $\angle(n_1, n_2)$ 和 $\angle(-n_1, n_2) = \pi - \angle(n_1, n_2)$ 图 5-28

两者中的锐角, 因此, $\cos \theta = |\cos \angle(n_1, n_2)|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式, 平面 Π_1 和平面 Π_2 的夹角 θ 可由 图 5-25

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (6)$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论:

Π_1 、 Π_2 互相垂直相当于 $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$;

Π_1 、 Π_2 互相平行或重合相当于 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

例 10 一平面通过两点 $M_1(1, 1, 1)$ 和 $M_2(0, 1, -1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$, 求它的方程.

解 设所求平面的一个法线向量为 $n = (A, B, C)$.

因 $\overrightarrow{M_1 M_2} = (-1, 0, -2)$ 在所求平面上, 它必与 n 垂直, 所以有

$$-A - 2C = 0 \quad (7)$$

又因所求的平面垂直于已知平面 $x+y+z=0$, 所以又有

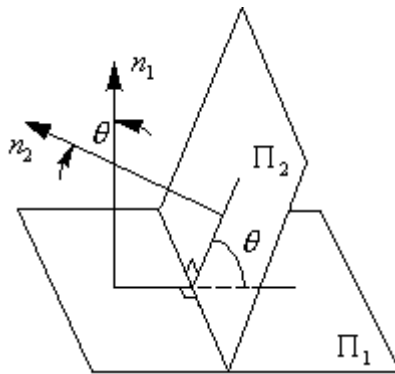
$$A + B + C = 0. \quad (8)$$

由 (7)、(8) 得到

$$A = -2C, \quad B = C.$$

由点法式, 平面方程为 $A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0$. 将 $A = -2C$, $B = C$ 代入上式, 并约去 $C (C \neq 0)$, 便得

$$-2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0 \text{ 或 } 2x - y - z = 0.$$



这就是所求的平面方程.

4. 两直线的夹角

两直线的法线向量的夹角（通常指锐角）叫做两直线的夹角.

设直线 L_1 和 L_2 的法线向量依次为 $s_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $s_2 = (m_2, n_2, p_2)$, 那么 L_1 和 L_2 的

夹角 φ 应是 $\angle(s_1, s_2)$ 和 $\angle(-s_1, s_2) = \pi - \angle(s_1, s_2)$ 两者中的锐角, 因此 $\cos \varphi = |\cos(s_1, s_2)|$, 从而

$$\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (5)$$

来确定

两直线 L_1 、 L_2 互相垂直相当于 $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$;

两直线 L_1 、 L_2 互相平行或重合相当于 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

例 11 求直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$ 和 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$ 的夹角.

解 直线 L_1 的方向向量 $s_1 = (1, -4, 1)$, L_2 的方向向量 $s_2 = (2, -2, -1)$. 设直线 L_1 和 L_2 的夹角为 φ , 那么由公式 (5) 有

$$\cos \varphi = \frac{|1 \times 2 + (-4) \times (-2) + 1 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 故 } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

5. 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时, 直线与它在平面上的投影直线的夹角 φ ($0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) 称为直

线与平面的夹角 (图 5-29), 当直线与平面垂直时, 规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线的方向向量为 $s = (m, n, p)$, 平面的法线向量为 $n = (A,$

$B, C)$, 直线与平面的夹角为 φ , 那么 $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} - \angle(s, n) \right|$, 因此 $\sin \varphi$

$= |\cos(s, n)|$, 从而有

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (6)$$

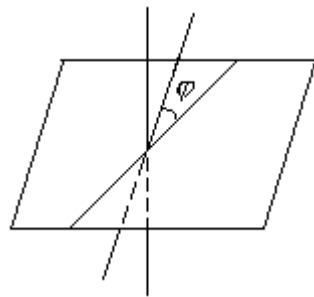


图 5-29

直线垂直于平相当于 $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$;

直线平行于或直线在平面上相当于 $Am + Bn + Cp = 0$.

例 12 求过点 $(1, -2, 4)$ 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线方程.

解 因为直线垂直于平面, 所以平面的法线向量即为直线的方向向量, 从而所求直线的

方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}.$$

6. 平面束

设直线 L 有方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & (11) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (12) \end{cases}$$

其中系数 A_1 、 B_1 、 C_1 与 A_2 、 B_2 、 C_2 不成比例. 建立三元依次方程

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (13)$$

因为 A_1 、 B_1 、 C_1 与 A_2 、 B_2 、 C_2 不成比例, 所以 $A_1 + \lambda A_2$ 、 $B_1 + \lambda B_2$ 、 $C_1 + \lambda C_2$ 不全为零, 所以 (13) 表示一个平面, 且直线 L 上的点满足 (13), 反之过直线 L 的平面一定在 (13) 所表示的平面内, 通过定直线的所以平面的全体称为平面束, 而方程 (13) 就作为通过直线 L 的平面束方程.

例 13 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

解 过直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 的平面束的方程为

$$(x+y-z-1) + \lambda(x-y+z+1) = 0$$

即 $(1+\lambda)x + (1-\lambda)y + (-1+\lambda)z + (-1+\lambda) = 0,$ (14)

其中 λ 为待定系数. 这平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直的条件是

$$(1+\lambda) \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 + (-1+\lambda) \cdot 1 = 0,$$

即 $\lambda = -1.$

代入 (14) 式, 得投影平面的方程为

$$2y - 2z - 2 = 0$$

即 $y - z - 1 = 0.$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

7. 杂例

例 14 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3, 2, 5)$ 得直线方程

解 因为所求直线与两平面的交线平行, 所以其方向向量 s 一定同时垂直于两平面的法

向量 n_1 、 n_2 ，所以可以取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -(4i + 3j + k),$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}.$$

例 15 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

解 所给直线的参数方程为 $x=2+t$, $y=3+t$, $z=4+2t$,
代入平面方程中, 得 $2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0$.
得 $t=-1$, 代入参数方程得交点为

$$x=1, y=2, z=2.$$

例 16 求过点 $(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

过点 $(2, 1, 3)$ 且垂直于已知直线的平面方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0 \quad (9)$$

已知直线的参数方程为 $x=-1+3t$, $y=1+2t$, $z=-t$. (10)

将 (10) 代入 (9) 求得 $t = \frac{3}{7}$, 从而求得直线与平面的交点为 $\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$.

以点 $(2, 1, 3)$ 为起点, 点 $\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$ 为终点的向量

$$\left(\frac{2}{7}-2, \frac{13}{7}-1, -\frac{3}{7}-3\right) = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$$

这就是所求直线的方向向量, 故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}.$$

作业 平面 1 (2), 2 (3), 3 (1), 4 (1) (3) (5), 直线 5 (2) (4) 点到平面直线距离 7, 8, 9, 10 (3), 13, 14, 16, 17

5.4 曲面与曲线

5.4.1 曲面、曲线的方程

如果曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ (1)
有下述关系:

- (1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 (1);
- (2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 (1)

那么, 方程 (1) 就叫做曲面 S 的方程, 而曲面 S 就叫做方程 (1) 的图形 (图 5-30)。

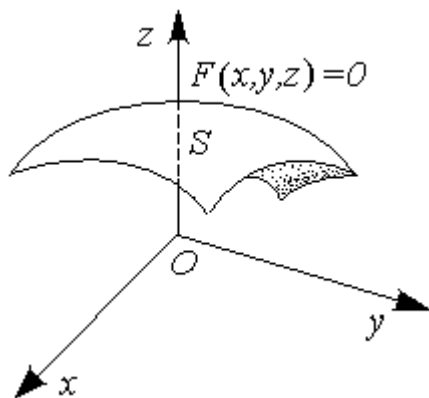


图 5-30

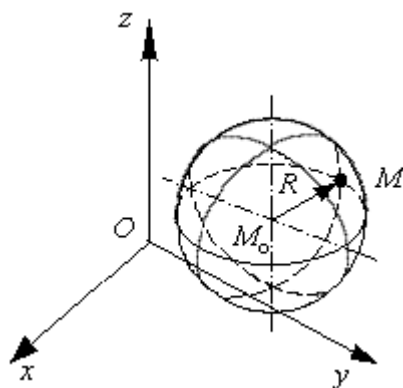


图 5-31

例 1 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面的方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上的任一点 (图 5-31), 那么 $|M_0M|=R$.

由于 $|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$,

所以 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$ (2)

这就是球心在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面的方程。

如果球心在原点, 这时 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, 从而球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

例 2 设有点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(2, -1, 4)$, 求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解 由题意知, 所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹. 设 $M(x, y, z)$ 为所求平面上的任一点, 由于 $|AM|=|BM|$,

所以 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}$

等式两边平方, 然后化简便得 $2x - 6y + 2z - 7 = 0$

在空间几何中关于曲面的研究, 有下列两个基本问题

- (1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时, 建立这曲面的方程;
- (2) 已知坐标 x , y 和 z 间的方程时, 研究这方程所表示的曲面的形状.

例 3 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$ 表示怎样的曲面?

解 通过配方, 原方程可以改写成 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$, 与 (2) 式比较知原

方程表示球心在点 $M_0(1, -2, 0)$ 、半径为 $R = \sqrt{5}$ 的球面.

一般地, 设有三元二次方程

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0,$$

这个方程的特点是缺 xy , yz , zx 各项, 而且平方系数相同, 只要将方程经过配方可以化成方程 (2) 的形式, 那么它的图形就是一个球面.

空间曲线可以看作两个曲面的交线。设 $F(x, y, z) = 0$ 和 $G(x, y, z) = 0$ 是两个曲面的方程，它们的交线为 C (图 5-32)。因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个曲面的方程，所以应满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

反过来，如果点 M 不在曲线 C 上，那么它不可能同时在两个曲面上，所以它的坐标不满足方程组 (1)。因此，曲线 C 可以用方程组 (1) 来表示。方程组 (1) 叫做空间曲线 C 的一般方程。

例 4 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解 方程组中第一个方程表示球心在原点，半径为 2 的球面。而方程组中的第二个方程表示一个垂直于 z 轴的平面，因此他们的交线为一个圆，如图 5-33 所示。

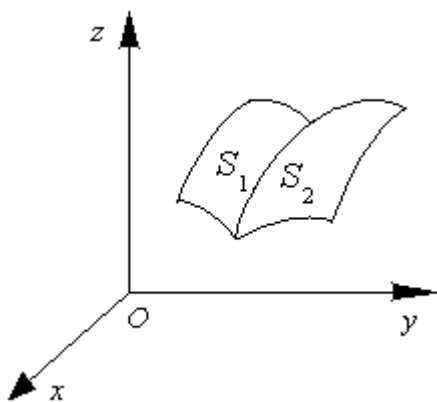


图 5-32

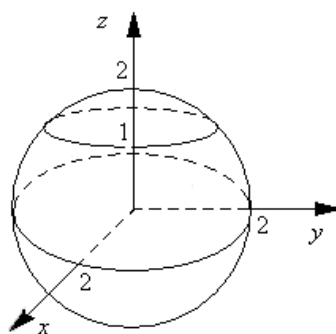


图 5-33

方程组 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (2)$ 当给定 $t = t_1$ 时，就得到 C 上的一个点 (x_1, y_1, z_1) ；

随着 t 得变动便可得曲线 C 上的全部点。方程组 (2) 叫做空间曲线的参数方程。

例 5 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω 、 v 都是常数），那么点 M 构成的图形叫做螺旋线。试建立其参数方程。

解 取时间 t 为参数。设当 $t=0$ 时，动点位于 x 轴上的一点 $A(a, 0, 0)$ 处。经过时间 t ，动点由 A 运动到 $M(x, y, z)$ (图 5-34)。记 M 在 xOy 面上的投影为 M' 的坐标为 $x, y, 0$ 。

由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，所以经过时间 t ， $\angle AOM' = \omega t$ 。从而

$$x = |OM'| \cos \angle AOM' = a \cos \omega t, \quad y = |OM'| \sin \angle AOM' = a \sin \omega t.$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升，所以 $z = M'M = vt$ 。

因此螺旋线的参数方程为
$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$
 也可以用其他变量作参

数; 例如令 $\theta = \omega t$, 则螺旋线的参数方程可写为
$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

这里 $b = \frac{\omega}{v}$, 而参数为 θ .

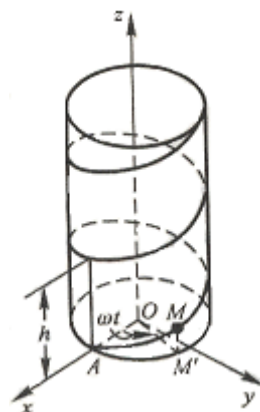


图 5-34

当 OM 转过一周时, 螺旋线上的点 M 上升固定的高度 $h = 2\pi b$. 这个高度在工程技术上叫做螺距.

5.4.2 柱面、旋转面和锥面

1. 柱面

例 6 方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 在 xOy 面上表示圆心在原点 O 、半径为 R 的圆, 在空间中表示圆柱面 (图 5-35), 它可以看作是平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 移动而形成的. 这曲面叫做圆柱面 (图 5-35), xOy 面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 叫做它的准线, 这平行于 z 轴的直线 l 叫做它的母线.

一般地, 平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面, 这曲线 C 叫做柱面的准线, 动直线叫做柱面的母线.

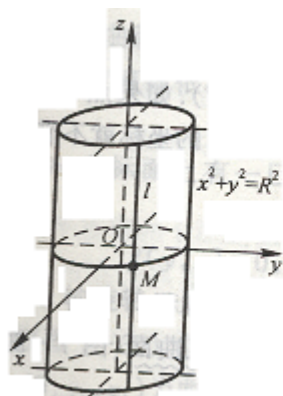


图 5-35

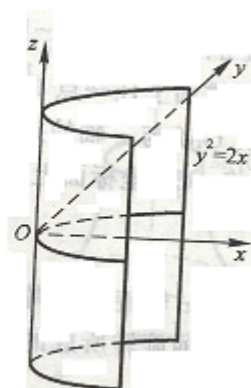


图 5-36

类似地, 方程 $y^2 = 2x$, 称为抛物柱面 (图 5-36)

又如, 方程 $x - y = 0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面, 它的准线是 xOy 面上的直线 $x - y = 0$, 所以它是过 z 轴的平面 (图 5-37).

一般地, 只含 x, y 而缺 z 的方程 $F(x, y) = 0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z

轴的柱面，其准线是 xOy 面上的曲线 $C: F(x, y) = 0$ (图 5-38)。

只含 x, z 而缺 y 的方程 $G(x, z) = 0$ 和只含 y, z 而缺 x 的方程 $H(y, z) = 0$ 分别母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面。

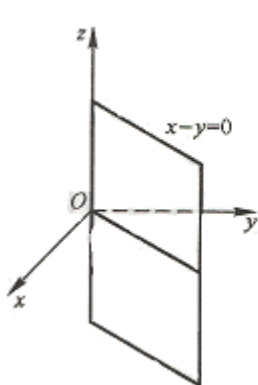


图 5-37

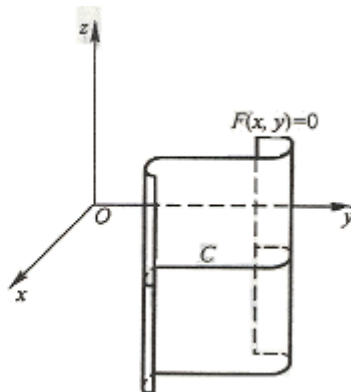


图 5-38

2. 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴。

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C ，它的方程为 $f(y, z) = 0$ ，

把这曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面 (图 5-39)。它的方程可以求得如下：

设 $M_1(0, y_1, z_1)$ 为曲线 C 上的任一点，那么有

$$f(y_1, z_1) = 0. \quad (3)$$

当曲线 C 绕 z 轴旋转时，点 M_1 绕 z 轴转到另一点 $M(x, y, z)$ ，这时 $z = z_1$ 保持不变，且

点 M 到 z 轴的距离 $d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|$ 。将 $z_1 = z$ ， $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ 代入 (3) 式，

$$\text{就有 } f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \quad (4)$$

这就是所求旋转曲面的方程。

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为 $f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$. (5)

例 7 将 xOz 坐标面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ，分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周，求所生

成的旋转曲面的方程。

解 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面叫做旋转单叶双曲面 (图 5-41)，它的方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

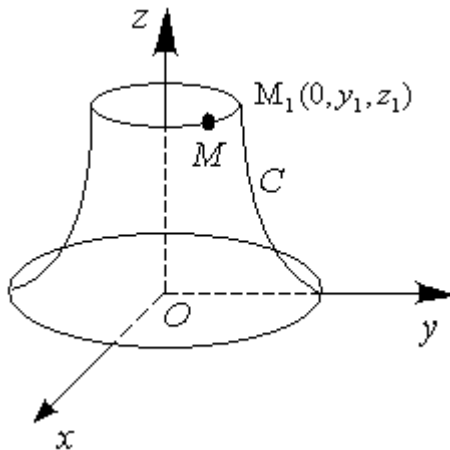


图 5-39

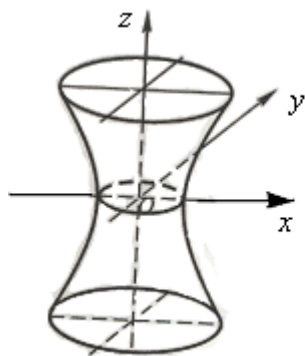


图 5-41

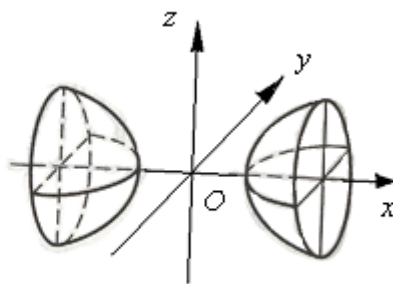


图 5-42

绕 x 轴旋转所成的旋转曲面叫做旋转双叶双曲面 (图 5-42), 它的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1.$$

3. 锥面

设有一条控件曲线 L 以及 L 外的一点 M_0 , 由 M_0 和 L 上全体点所在直线构成的曲面称为锥面 (cone), M_0 称为该锥面的顶点 (vertex), L 称为该锥面的准线 (图 5-43)。

例 9 求顶点在原点, 准线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \quad (c \neq 0) \end{cases} \quad \text{的锥面方程。}$$

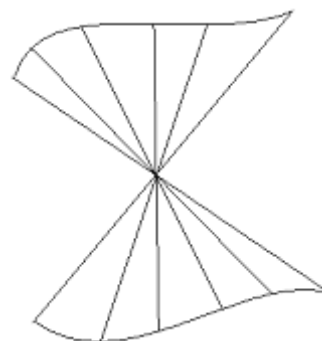


图 5-43

解 设 $M(x, y, z)$ 为锥面上任一点, 过原点与 M 的直线与平面 $z=c$ 交于点 $M_1(x_1, y_1, c)$ (图 5-44), 则有

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

由于 OM 与 OM_1 共线, 故

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{c}$$

既有 $x_1 = \frac{cx}{z}$, $y_1 = \frac{cy}{z}$, 代入 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, 整理得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (6)$$

这就是所求锥面的方程, 该锥面称为椭圆锥面
当 $a=b$ 时, 式 (6) 相应变为

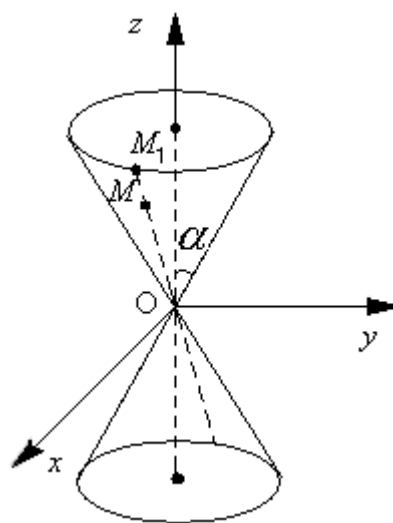


图 5-44

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

此时锥面称为圆锥面，若记 $k = \frac{c}{a}$ ，圆锥面的方程为 $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$ (7)

圆锥也可认为是 yOz 平面上经过原点的直线 $L: z=ky(k>0)$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面。

只需将 $z=ky$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ ，即得圆锥面的方程 $z = \pm k\sqrt{x^2 + y^2}$ 。

即 $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$ $\alpha = \arctan \frac{1}{k}$ 称为圆锥面的半顶角。

5.4.3 二次曲面

通常将三元二次方程 $F(x, y, z) = 0$ 所表示的曲面称为二次曲面。而把平面称为一次曲面。二次曲面有九种，它们的标准方程如下

(1) 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$ (图 5-45) (2) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

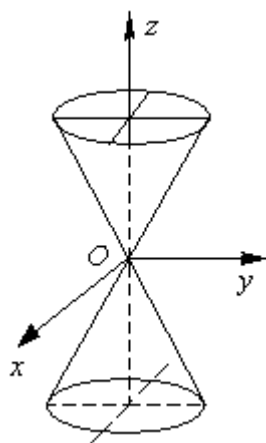


图 5-45

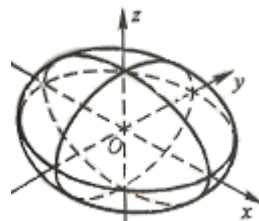


图 5-46

(3) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (4) 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(5) 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ (图 5-46) (6) 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ (图 5-47)

(7) 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (8) 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(9) 抛物柱面 $x^2 = ay$

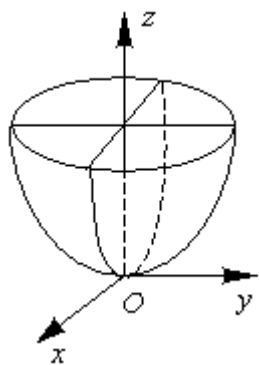


图 5-46

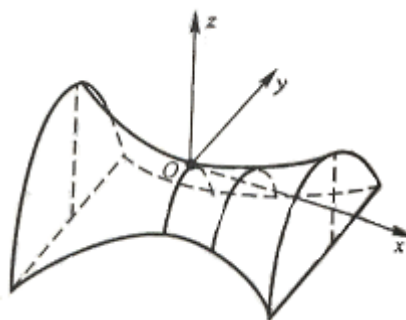


图 5-47

5.4.4 空间几何图形举例

设 Γ 是一空间曲线, π 是一平面, 则成以 Γ 为准线, 母线垂直于 π 的柱面为曲线 Γ 对平面 π 的投影柱面, 称投影柱面与 π 的交线为 Γ 在 π 上的投影曲线或投影。

$$\text{设空间曲线 } C \text{ 的一般方程为 } \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

现在来研究由方程组 (5) 消去 z 后所得的方程 $H(x, y) = 0$. (6)

由于方程 (6) 是由方程 (5) 消去 z 后所得的结果。因此当 x, y 和 z 满足方程组 (5) 时, 前两个数 x, y 必定满足方程 (6), 这说明曲线 C 上的所有点都在方程 (6) 所表示的曲面上。

而方程 (6) 为母线平行于 z 轴的柱面。该柱面包含 C 。以 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面叫做曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面, 投影柱面与 xOy 面的交线叫做空间曲线 C 在 xOy 面的投影曲线, 或简称投影。因此, 方程 (6) 所表示的柱面必定包含投影柱面, 而方

程 $\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 所表示的曲线必定包含空间曲线 C 在 xOy 面上的投影。

同理可得空间曲线 C 在 yOz 及 zOx 面上的投影的曲线方程为

$$\begin{cases} R(x, y) = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} T(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

例 10 已知两球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (7)$$

和

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \quad (8)$$

求它们的交线 C 在 xOy 面上的投影方程。

解 (7) - (8) 得 $y + z = 1$.

将 $z = 1 - y$ 代入 (7) 或 (8) 得所求柱面方程为 $x^2 + 2y^2 - 2y = 0$. 于是投影方程为

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

例 11 设一个立体由上半球 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成(图 5-48), 求它在 xOy 面上的投影.

解 半球面和锥面的交线为 C :

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}. \end{cases}$$
 由上列方程组消去 z , 得到

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$
 这是 xOy 面上的一个圆, 于是所求

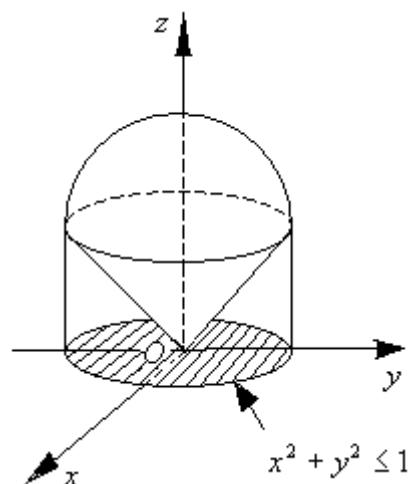


图 5-48

立体在 xOy 面上的投影, 就是该圆在 xOy 面上的一个圆,

于是所求立体 xOy 面上的投影, 就是该圆在 xOy 面上所围的部分: $x^2 + y^2 \leq 1$ 。

作业 3, 4, 6, 8

第六章 多元函数微分学及其应用

DIFFERENTIAL CALCULUS OF MULTIVARIABLE FUNCTIONS AND ITS APPLICATIONS

导言

上册中我们讨论的函数都只有一个自变量,这种函数叫做一元函数,但在很多实际问题中往往牵涉到多方面的因素。例如,在经济理论中,一个商品的供给和需求往往不仅取决于商品的价格,而且也与其他相关的商品的价格、时间和有关的其他因素有着很大的关系。又如利润并非取决于一种商品的产出,也取决于几种商品的产出水平和几种投入的组合。这种关系反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的情形.这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题.本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分法及其应用.讨论中我们以二元函数为主,因为从一元函数到二元函数会产生新的问题,而从二元函数到二元以上的多元函数只有形式和技巧上的差别,并无本质的不同

6.1 多元函数的基本概念

6.1.1 n 维点集

空间直角坐标系的建立,使空间中的点及向量与一个三元有序数组 (x, y, z) 形成一一对应,可以赋予三元有序数组之间的加法、数乘等运算。我们把这种有序实数组的全体称为**三维空间**,记做 R^3 并称这些数组为 R^3 中的**三维点**。

一般地,按照上面作法,对 n 元有序数组之间同样赋予加法、数乘等运算由 n 元有序数组的全体所组成的集合称为 **n 为空间**,记做 R^n ,并称每一个 n 元数组为 R^n 中一个 **n 维点**。

这样,全体实数构成的集合 R ,或数轴上一切点的集合称为**一维空间**,并记做 R^1 ;全体有序数组 (x, y) 构成的集合,或 xOy 平面上一切点的集合称为**二维空间**并记做 R^2 。

在讨论一元函数时,常用 R^1 中的点集、区间和邻域等概念描述变量的变化范围,在讨论二元函数有关概念时,则需用到平面点集与区域等概念。我们先介绍平面点集与区域的基本知识,然后推广到一般的 R^n 中。

1. 平面点集

当在平面上建立了一个直角坐标系后,平面上的点 P 与有序二元实数组 (x, y) 之间就建立了一一对应。于是,我们常将有序实数组 (x, y) 与平面上的点 P 视作是等同的,这种建立了坐标系的平面称为**坐标平面**。二元有序实数组 (x, y) 的全体,即

$R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}$ 就表示坐标平面。

坐标平面上具有某种条件的点的集合，称为平面点集，记作

$$E = \{(x, y) | (x, y) \text{ 具有某种条件} \}$$

例如，平面上以坐标原点为中心、 r 为半径的圆内（图 6—1）所有点的集合是

$$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 < r^2\}$$

如果我们以点 P 表示 (x, y) , $|OP|$ 表示点 P 到原点 O 的距离，那么集合 C 也可表成

$$C = \{P | |OP| < r\}$$

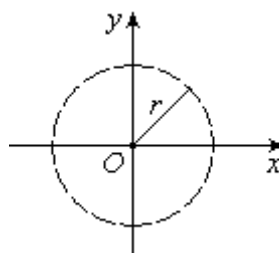


图 6—1

再如，集合 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 表示一个矩形上点的全体，这一集合通常记做 $D = [a, b] \times [c, d]$ 。

现在我们来引入 R^2 中邻域的概念。

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点， δ 是某一正数，与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0, \delta)$ ，即

$$U(P_0, \delta) = \{P | |PP_0| < \delta\} \text{ 或 } U(P_0, \delta) = \{(x, y) | \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

若点 P_0 不包括在该邻域内，则称该邻域为点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$ ，即

$$\overset{\circ}{U}(P_0, \delta) = \{P | 0 < |PP_0| < \delta\}.$$

或 $\overset{\circ}{U}(P_0, \delta) = \{(x, y) | 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$

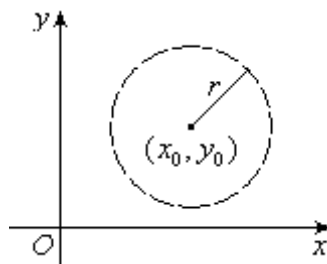


图 6—2

在几何上 $U(P_0, \delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心， $\delta > 0$ 为半径的圆内部的点 $P(x, y)$ 的全体（图 6—2）。

如果不需要强调邻域的半径 δ ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，用 $\overset{\circ}{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某个去心邻域。

邻域在数轴上为开区间，在平面内为开圆，在空间中为开球。

下面用邻域来描述点和点集之间的关系。

任意一点 $P \in R^2$ 与任意一个点集 $E \subset R^2$ 之间必有以下三种关系中的一种：

(1) 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$, 使得 $U(P) \subset E$, 则称 P 为 E 的**内点** (如图 6-3 中, P_1 为 E 的内点);

(2) 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$, 使得 $U(P) \cap E = \Phi$, 则称 P 为 E 的**外点** (如图 6-3 中, P_2 为 E 的外点)。

(3) 如果点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点, 又含有不属于 E 的点, 则称 P 为 E 的**边界点** (如图 6-3 中, P_3 为 E 的边界点)。

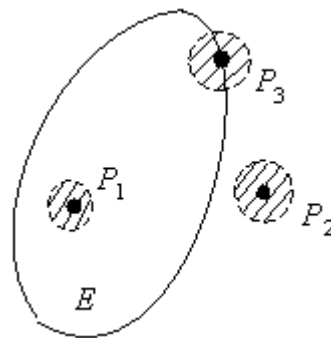


图 6-3

E 的边界点的全体, 称为 E 为**边界**, 记作 ∂E 。

E 的内点必属于 E ; E 的外点必定不属于 E ; 而 E 的边界点可能属于 E , 也可能不属于 E 。

如果对于任意给定的 $\delta > 0$, 点 P 的去心邻域 $\overset{0}{U}(P, \delta)$ 内总有 E 中的点, 则称 P 是 E 的聚点。

由聚点定义可知, 点集 E 的聚点 P 本身, 可以属于 E , 也可以不属于 E 。

例如, 设平面点集

$$E = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

满足 $1 < x^2 + y^2 < 2$ 的一切点 (x, y) 都是 E 的内点; 满足 $x^2 + y^2 = 1$ 的一切点 (x, y) 都是

E 的边界点, 它们都不属于 E ; 满足 $x^2 + y^2 = 2$ 的一切点 (x, y) 也是 E 的边界点, 它们属于 E , 点集 E 以及它的边界 ∂E 上的一切点都是 E 的聚点。

聚点与维数无关, 内点与维数有关, 比如在一维空间 $E = (a, b)$ 内的点都是 E 的内点, 也是 E 的聚点, 但在二维空间中, 它们只是 E 的聚点, 不再是内点了。

根据点集所属点的特征, 我们再来定义一些重要的平面点集。

如果点集 E 的点都是 E 的内点, 则称 E 为**开集**。

如果点集 E 的所有聚点都属于 E , 则称 E 为**闭集**。

例如, 集合 $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ 是开集; 集合 $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ 是闭集; 而集合 $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$ 既非开集, 也非闭集

如果点集 E 内的任何两点, 都可以用折线连接起来, 且该折线上的点都属于 E , 则称 E 为**连通集**。

连通的开集称为**区域**或**开区域**。

开区域连同它的边界一起所构成的点集称为**闭区域**。

对于平面点集 E , 如果存在某一正数 r , 使得 $E \subset U(O, r)$,

其中 O 是坐标原点, 则称 E 为**有界集**, 否则称为**无界集**

例如, 集合 $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ 是有界闭区域; 集合 $\{(x, y) | x + y > 0\}$ 是无界开区域, 集合 $\{(x, y) | x + y \geq 0\}$ 是无界闭区域。

上面我们仅在 \mathbf{R}^2 中给出了平面点集的一些概念, 这些概念可以自然地推广到 n 维空间 \mathbf{R}^n 中。相应于平面上两点间的距离公式, 对于 \mathbf{R}^n 中点 $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和点 $N(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 规定 M, N 两点间的距离

$$|MN| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

显然, $n = 1, 2, 3$ 时, 上述规定与数轴上、平面上及空间中两点间的距离公式一致。

在 \mathbf{R}^n 中规定两点间距离之后, 就可使前面讨论的有关平面点集的一系列概念, 方便地推广到 $n(n \geq 3)$ 维空间中来。例如,

设 $P_0 \in \mathbf{R}^n$, δ 是某一正数, 则 n 维空间内的点集

$$U(P_0, \delta) = \{P | |PP_0| < \delta; P \in \mathbf{R}^n\}$$

就定义为 \mathbf{R}^n 中点 P_0 的 δ 邻域。以邻域为基础, 可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点, 以及开集、闭集、区域等一系列概念, 这里不再赘述。

6.1.2 多元函数的定义

自然科学与工程技术的许多问题, 往往与多种因素有关, 反映在数学上, 就是一个变量依赖于多个变量的关系。例如灼热的铸件在冷却过程中, 它的温度 I 与铸件内部点的位置 x, y, z 和时间 t , 以及外界环境温度 I_0 。空气流动的速度 v 等 6 个变量有关。因此需要研究多个变量之间的依赖关系。先看下面几个例子。

例 1 一定量的理想气体的压强 p 、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系 $p = \frac{RT}{V}$, 其中 R 为常数。这里, 当 V, T 在集合 $\{(V, T) | V > 0, T > T_0\}$ 内取定一对值 (V, T) 时, p 的对应值就随之确定。

例 2 平行四边形的面积 S 由它的相邻两边的长 a, b 与夹角 θ 所决定, 即

$$S = ab \sin \theta \quad (a > 0, b > 0, 0 < \theta < \pi)$$

这个关系式反映了对每一个三维点 (a, b, θ) , 变量 S 有确定的值与之对应。

例 3 沙石运输问题。

假设有体积为 $V(\text{m}^3)$ 的沙石用长方体形状的有底无盖且在底部装有滑行器的木箱运输，这种木箱可以反复使用（假设木箱永不损坏）。木箱的各部分造价是，箱底与两端的材料费用为 a （元/ m^2 ），另外两个侧面的材料费用为 b （元/ m^2 ），箱底两个滑行器与箱子同长，材料费为 c （元/ m ）。又不论箱子中沙石是否装满（一般情况下，最后一箱沙石不会装满），每装一箱沙石需支付费用 d （元）。

若设木箱的长、宽、高分别为 x, y, z （ m ），则运输沙石的总费用 u 与 x, y, z 的关系为

$$u = axy + 2ayz + 2bxz + 2cx + \left(\left[\frac{Vd}{xyz} \right] + 1 \right) d$$

显然 u 依赖于 x, y, z （ $x > 0, y > 0, z > 0$ ），当 x, y, z 的值确定后， u 的值也随之确定。

上面 3 个例子的具体意义各不相同，但它们却有共同的性征，抽出这些共性就可得出多元函数的定义。

定义 设 D 是 n 维空间 \mathbf{R}^n 的点集， R 为实数集，如果按照某一确定的对应法则 f ，对 D 内每一点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，均有唯一的一个实数 $u \in R$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的 n 元函数，它在点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 处的函数值是 u ，并记

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D,$$

或简记为

$$u = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D,$$

也可记为

$$u = f(P), P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 称为自变量， u 称为因变量。 D 称为定义域，函数值 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体称为值域记作 $f(D)$ ，即

$$f(D) = \{ u \mid u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \}.$$

和一元函数相仿，习惯上我们也称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 元函数。

表示 n 元函数的记号 f 也是可以任意选取的，例如也可以记为 $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 等。

多元函数的概念也可以使用映射的术语表述：对于 n 维空间 \mathbf{R}^n 内的点集 D ，映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 就称为定义在 D 上的 n 元函数。

当 $n=2$ 时, n 元函数通常称为**二元函数**记为

$$z=f(x, y), (x, y) \in D \subseteq R^2$$

或

$$z=f(P), P \in D,$$

当 $n=3$ 时, n 元函数通常称为**三元函数**, 记为 $u=f(x, y, z), (x, y, z) \in D \subseteq R^3$ 。

当 $n=1$ 时, n 元函数就是一元函数。当 $n \geq 2$ 时, n 元函数统称为**多元函数**。

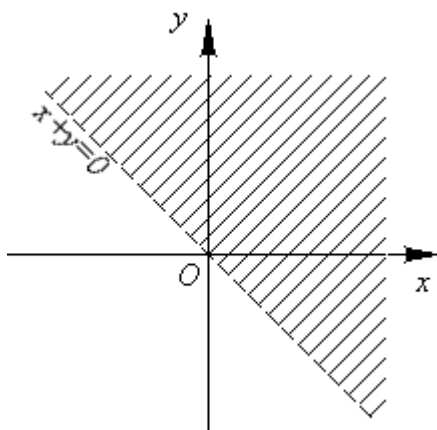


图 6-4

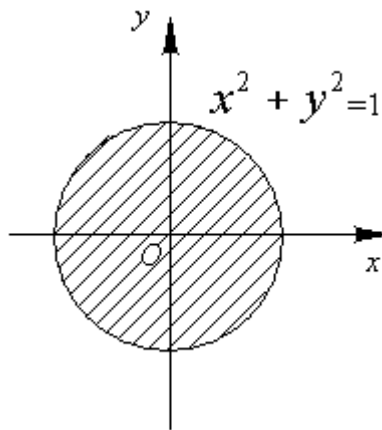


图 6-5

关于多元函数的定义域, 与一元函数相类似, 我们作如下约定: 在讨论用算式表示的多元函数 $u=f(x)$ 时, 使算式有意义的全体变元 x 的值所组成的点集为这个多元函数的**自然定义域**, 以后对这类函数的定义域也不再特别标出. 例如, 函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为

$$\{(x, y) | x+y>0\}$$

(图 6-4) 这是一个无界开区域。又如, 函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为

$$\{(x, y) | x^2+y^2 \leq 1\}$$

(图 6-5), 这是一个有界的闭圆域。

设二元函数 $z=f(x, y)$ 的定义域为 D . 对于任意取定的点 $P(x, y) \in D$, 对应的函数值为 $z=f(x, y)$. 这样, 在三维空间中就确定出以 x 为横坐标、 y 为纵坐标、 $z=f(x, y)$ 为竖坐标的点 $M(x, y, z)$. 当 (x, y) 遍取 D 上的一切点时, 就得到一个空间点集

$$\{(x, y, z) | z=f(x, y), (x, y) \in D\},$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形 (图 6-6)

通常二元函数的图形是一张曲面

例如, 由空间解析几何知道, 线性函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一张平面, 而函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面。

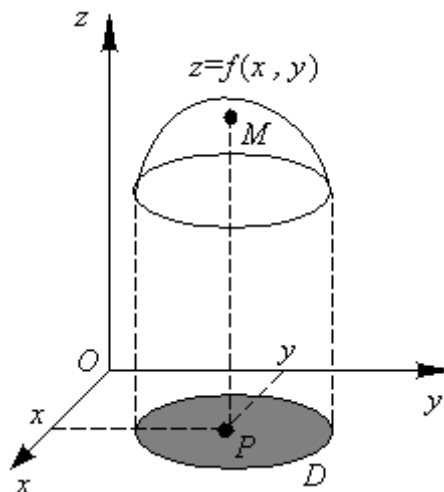


图 6-6

与一元初等函数类似, 也可以定义多元初等函数, 它是指能用一个算式表示的多元函数, 这个算式由不同变量的一元基本初等函数与常数经过有限次四则运算和复合而得到的, 例如

$\frac{x+y^2-1}{1+x^2}, \sin(2x+y), e^{x^2+y^2+z^2}$ 等, 都是多元初等函数。

6.1.3 二元函数的极限

由于 \mathbf{R}^n 中点的变化情况要比 \mathbf{R}^1 上的变化情况复杂得多, 所以从一元函数推广到二元函数, 虽有一些共性之处, 但也会出现某些实质性的差异。但是从二元函数推广至三元或更多元, 只是形式和技巧上的差别, 而并无本质上的不同, 因此我们重点讨论二元函数, 二元以上的情况依此类推。

我们先讨论二元函数 $z=f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, 即 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 时的极限。

这里 $P \rightarrow P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0 , 也就是点 P 与点 P_0 间的距离趋于零, 即

$$|PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \rightarrow 0$$

与一元函数的极限概念类似, 如果在 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 的过程中, 对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近于一个确定的常数值 A , 我们就说 A 是函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限。下面用 “ $\varepsilon - \delta$ ” 语言描述个极限概念。

定义 设二元函数 $f(P)=f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点。如果存在常数 A ,

对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得当点 $P(x, y) \in D \cap \overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$, 即

$$0 < |PP_0| < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

时, 都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立, 那么就称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限, 记作

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{ 或 } f(x,y) \rightarrow A ((x,y) \rightarrow (x_0,y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \quad \text{或} \quad f(P) \rightarrow A (P \rightarrow P_0)$$

为了区别于一元函数的极限, 上述二元函数的极限也称做二重极限。

例 4 设 $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$, 求证 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ 。

证 函数的定义域 $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 点 $O(0,0)$ 为 D 的聚点。因为

$$|f(x, y) - 0| = \left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq x^2 + y^2,$$

可见,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, 则当

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta,$$

即 $P(x, y) \in D \cap \overset{\circ}{U}(O, \delta)$ 时, 总有

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

成立, 所以

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

根据二元函数极限的定义, 所谓二重极限存在, 是指 $P(x, y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, $f(x, y)$ 都无限接近于 A . 这里特别注意“任何方式”, 如果 $P(x, y)$ 以某一特殊方式, 例如沿着某一条定直线或定曲线趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 即使 $f(x, y)$ 无限接近于某一确定值, 我们还不能由此断定函数的极限存在。但是反过来, 如果当 $P(x, y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, $f(x, y)$ 趋于不同的值, 那么就可以断定这函数的极限不存在。下面用例子来说明这种情形。

考察函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

显然, 当点 $P(x, y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

又当点 $P(x, y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0;$$

虽然点 $P(x, y)$ 以上述两种特殊方式 (沿 x 轴或沿 y 轴) 趋于原点时函数的极限存在并且相等, 但是 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ 并不存在, 这是因为当点 $P(x, y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

显然, 当 (x,y) 沿不同斜率的直线趋于 $(0, 0)$ 时, $f(x,y)$ 趋于不同的值。

上面的两个例子说明了二重极限要比一元函数的极限复杂得多, 其主要原因是由 $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ 方式的任意性所导致。

由于多元函数极限定义与一元函数极限的定义在形式上和内容上完全类似,所以一元函数极限的性质,如唯一性、局部有界性、局部保号性和夹逼定理,以及运算法则都可以对应地移至到多元函数,这里不再一一赘述。

例 5 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

解 这里函数 $\frac{\sin(xy)}{x}$ 的定义域为 $D=\{(x,y) | x \neq 0, y \in \mathbf{R}\}$, $P_0(0,2)$ 为 D 的聚点.

由极限运算法则,得

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \left[\frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y \right] = \lim_{xy \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow 2} y = 1 \cdot 2 = 2.$$

例 6 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 对任意的 $x \neq 0, y \neq 0$, 有 $\left| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 1$, 故 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 为有界

变量。

又因 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$

故由无穷小与有界变量之积仍为无穷小,得

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

例 7 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$.

解 因为 $0 \leq \left| \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} = |x| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} |x|$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{2} |x| \rightarrow 0$, 故由极限的夹逼准则,得

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = 0$$

6.1.4 二元函数的连续性

有了多元函数极限的概念,与讨论一元函数的连续性相仿,可以讨论多元函数的连续性。

定义 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点, 且 $P_0 \in D$. 如果

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0), \quad (1)$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续, 并称 $P_0(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的连续点。

上面关于连续性的定义也可以使用增量的说法来表达, 记 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$, 分别称为变量 x, y 在 x_0 与 y_0 处的增量, 相应地, 称 $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ 为函数

$z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的全增量。于是

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)。$$

与一元函数一样, 可用增量的形式来描述极限 (1), 则有

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \Delta z = 0$$

如果函数 $f(x, y)$ 在 D 的每一点都连续, 那么就称函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 或者称 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数. 二元连续函数的图形是一个无洞无缝的连锦曲面。

设函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 不连续, 则称 $P_0(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的间断点. 与一元函数不同, 二元函数的间断点不一定是孤立的点的集合, 可能是一条或几条曲线。

例如前面讨论过的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

其定义域 $D = \mathbf{R}^2$, $O(0, 0)$ 是 D 的聚点. $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow 0$ 时的极限不存在, 所以点 $O(0, 0)$ 是该函数的一个间断点; 又如函数

$$\sin \frac{x+y}{x-y}$$

其定义域为

$$D = \{(x, y) \mid y \neq x\}$$

$y=x$ 的点都是 D 的聚点, 而 $f(x, y)$ 在 $y=x$ 上没定义, 当然 $f(x, y)$ 在 $y=x$ 上各点都不连续, 所以直线 $y=x$ 上各点都是该函数的间断点。

前面我们已经指出: 一元函数中关于极限的运算法则, 对于多元函数仍然适用. 根据多元函数的极限运算法则, 可以证明多元连续函数的和、差、积仍为连续函数; 连续函数的商在分母不为零处仍连续; 多元连续函数的复合函数也是连续函数。进一步可以得出如下结论:

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域。

由多元初等函数的连续性, 如果要求它在点 P_0 处的极限, 而该点又在此函数的定义区域内, 则极限值就是函数在该点的函数值, 即

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)。$$

例 8 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x+y}{xy}$.

解 函数 $f(x, y) = \frac{x+y}{xy}$ 是初等函数, 它的定义域为

$$D = \{(x, y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$$

$P_0(1,2)$ 为 D 的内点, 故存在 P_0 的某一邻域 $U(P_0) \subseteq D$, 而任何邻域都是区域, 所以 $U(P_0)$ 是 $f(x, y)$ 的一个定义区域, 因此

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x+y}{xy} = f(1,2) = \frac{3}{2}.$$

一般地, 求 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ 时, 如果 $f(P)$ 是初等函数, 且 P_0 是 $f(P)$ 的定义域的内点, 则

$f(P)$ 在点 P_0 处连续, 于是

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 9 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$ 。

解 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\sqrt{1+xy}-1)(\sqrt{1+xy}+1)}{xy(\sqrt{1+xy}+1)} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{xy(\sqrt{1+xy}+1)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{1+xy}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

以上运算的最后一步用到了二元函数在点 $(0,0)$ 的连续性。

与闭区间上一元连续函数的性质相类似, 在有界闭区域上连续的多元函数, 具有如下性质。

有界性与最大值最小值定理 在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 必定在 D 上有界, 且能取得它的最大值和最小值。

介值定理 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取复介于最大值和最小值之间的任何值。

一致连续性定理 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续。

该性质是说, 若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得对于 D 上的任意二点 P_1, P_2 , 只要当 $|P_1 P_2| < \delta$ 时, 都有

$$|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$$

成立。

6.2 偏导数与高阶导数

6.2.1 偏导数

1. 偏导数的定义

我们已经知道, 一元函数的导数刻画了函数对于自变量的变化率, 在研究函数性态中具有极为重要的作用。对于多元函数同样需要讨论它的变化率, 由于多元函数的自变量不止一个, 因而因变量与自变时的关系要比一元函数复杂得多。在实际问题中, 经常需要了解一个受多种因素制约的量, 当其他因素固定不变的情况下, 随一种因素变化的变化率问题。例如, 由物理学知, 一定量理想气体的体积 V 、压强 P 、与绝对温度 T 之间存在着函数关系

$$V = R \frac{T}{P}$$

其中 R 为常数。我们可以讨论在等温条件下 (视 T 为常数), 体积 V 对于压强 P 的变化率, 也可以分析在等压过程中 (视 P 为常数) 体积 V 对于温度 T 的变化率。

像这样, 在多元函数中只对某一个变量求变化率, 而将其他变量视为常数的方法就是多元函数的求偏导数问题。下面我们以二元函数 $z = f(x, y)$ 为例, 给出偏导数的概念。

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义, 当 y 固定在 y_0 , 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时, 相应地函数有增量

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数 (partial derivative), 记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z'_x|_{(x_0, y_0)} \text{ 或 } f'_x(x_0, y_0) \text{ 等.}$$

称 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ 为函数 $z = f(x, y)$ 关于 x 的偏增量。

类似地, 如果固定 $x = x_0$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (2)$$

存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数, 记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z'_y|_{(x_0, y_0)} \text{ 或 } f'_y(x_0, y_0).$$

称 $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 为函数 $z = f(x, y)$ 关于 y 的偏增量。

当函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处同时存在对 x 及对 y 的偏导数时, 可简称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可偏导。如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在, 那么这个偏导数就是 (x, y) 的函数, 它就称为函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 x 的偏导函数, 记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x \text{ 或 } f'_x(x, y).$$

类似地, 可以定义函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 y 的偏导函数, 记作

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y \text{ 或 } f'_y(x, y).$$

由偏导函数的概念可知, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$, 就是偏导函数 $f'_x(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的函数值; $f'_y(x_0, y_0)$ 就是偏导函数 $f'_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的函数值。就像一元函数的导函数一样, 以后在不至于混淆的情况下, 也把偏导函数简称为偏导数。

偏导数的概念还可推广到二元以上的函数, 例如三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f'_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

2. 偏导数的计算法

由偏导数的定义可知, 对具体的二元函数 $z = f(x, y)$ 求偏导数时, 并不需要引进新的方法, 因为这里只有一个自变量在变动, 另一个自变量是看作固定的, 所以仍旧是一元函数的

微分法问题。求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时, 只要把 y 暂时看作常量而对 x 求导数; 而求 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 时, 则只要把 x 暂时

看作常量对 y 求导数。

例 1 设 $z = x^2 + xy + y^3$, 求 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,1)}$ 和 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,1)}$.

解 将 y 看作常量, 对 x 求导, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,1)} = 1.$$

把 x 看作常量, 对 y 求导, 得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 3y^2, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,1)} = 3.$$

例 2 设 $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x}$, 求 z_x 和 z_y .

解

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= \frac{x - y}{x^2 + y^2} \\ z_y &= \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) + \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{x + y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

例 3 设 $u = x^{\frac{z}{y}}$ ($x > 0, x \neq 1, y \neq 0$), 求证: $\frac{yx}{z} u_x + y u_y + z u_z = u$

证 因为将 y 和 z 视为常量, 对 x 求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{y} x^{\frac{z}{y}-1};$$

将 x 和 z 视为常量, 对 y 求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{\frac{z}{y}} \ln x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{y}\right) = -\frac{z}{y^2} x^{\frac{z}{y}} \ln x;$$

将 x 和 y 视为常量, 对 z 求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{\frac{z}{y}} \ln x \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{y}\right) = \frac{1}{y} x^{\frac{z}{y}} \ln x.$$

从而

$$\frac{yx}{z} u_x + y u_y + z u_z = u$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{yx}{z} \frac{z}{y} x^{\frac{z}{y}-1} + y \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) x^{\frac{z}{y}} \ln x + z \frac{1}{y} x^{\frac{z}{y}} \ln x \\
&= x^{\frac{z}{y}} = u.
\end{aligned}$$

例 4 求 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的偏导数.

$$\text{解 } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r};$$

由于所给函数关于自变量的对称性, 立即可求出

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

例 5 已知一定量的理想气体的状态方程 $pV=RT$ (R 为常量), 推证热力学中的公式

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1.$$

$$\text{证 因为 } p = \frac{RT}{V}, \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}; \quad V = \frac{RT}{p}, \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p}; \quad T = \frac{pV}{R}, \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R};$$

$$\text{所以 } \frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -1.$$

我们知道, 对一元函数来说, $\frac{dy}{dx}$ 可看作函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商。而例

5 表明, 偏导数的记号 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 都是整体记号, 不能看作分子与分母之商。

3. 偏导数的几何意义

二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的偏导数有下述几何意义.

在 $z = f(x, y)$ 中, 固定 $y = y_0$ 就是一个变量的函数。偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $z=f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数, 所以几何上偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$, 就是曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的交线在点 M_0 处的切线 $M_0 T_x$ 对 x 轴的斜率(见图 6-7). 同样, 偏导数 $f'_y(x_0, y_0)$ 的几何意义是曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $x = x_0$ 的交线在点 M_0 处的切线 $M_0 T_y$ 对 y 轴的斜率.

我们已经知道, 如果一元函数在某点具有导数, 则它在该点必定连续, 但对于多元函数来说, 即使在某点可偏导, 也不能保证函数在该点连续。这是因为各偏导数存在只能保证点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋于 P_0 时, 函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$, 但不能保证点 P 按任何方式

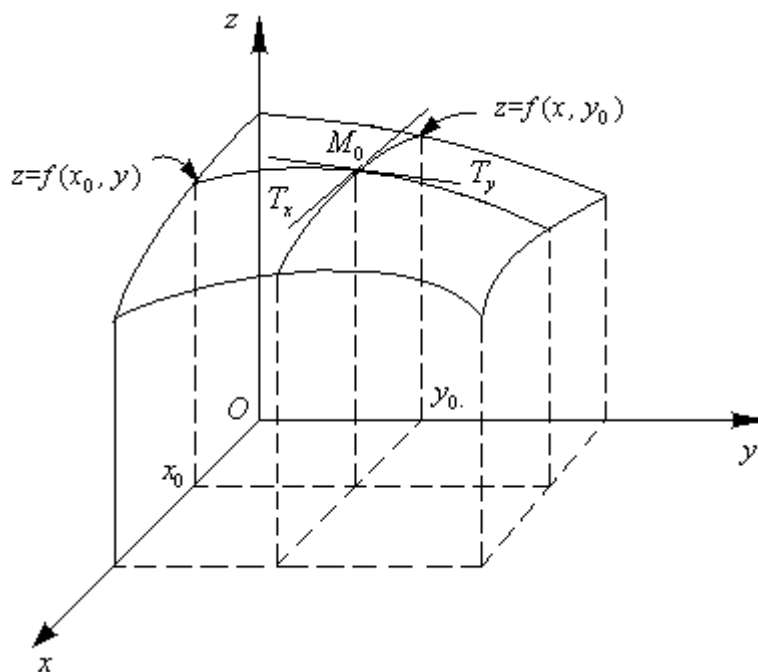


图 6—7

趋于 P_0 时, 函数值 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$, 例如, 函数

$$z=f(x, y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 对 x 和对 y 的偏导数都存在

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0$$

但是我们在第一节中已经知道这函数在点 $(0,0)$ 并不连续.

6.2.2 高阶偏导数

设函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y),$$

那么在 D 内 $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$ 都是 x 、 y 的函数。如果这两个函数的偏导数也存在, 则称它们是函数 $z=f(x, y)$ 的**二阶偏导数**。按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y).\end{aligned}$$

其中第二、三两个偏导数称为**混合二阶偏导数**。同样可得三阶、四阶、 \cdots 以及 n 阶偏导数。二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**。

例 6 求函数 $z = e^{xy} + \sin(x + y)$ 的二阶偏导数, 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

解 先求一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + \cos(x + y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} + \cos(x + y)$$

再求二阶偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y^2 e^{xy} - \sin(x + y), \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= y^3 e^{xy} - \cos(x + y) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= (1 + xy)e^{xy} - \sin(x + y), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= (1 + xy)e^{xy} - \sin(x + y), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x^2 e^{xy} - \sin(x + y)\end{aligned}$$

我们看到例 6 中两个二阶混合偏导数相等, 即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. 这不是偶然的, 事实上,

我们有下述定理。

定理 如果函数 $z=f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续, 那么在

该区域内这两个二阶混合偏导数必相等。

换句话说, 二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关, 这定理的证明从略。

对于二元以上的函数, 我们也可以类似地定义高阶偏导数, 而且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导的次序无关

例 7 验证函数 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证 因为 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2),$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

例 8 证明函数 $u = \frac{1}{r}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

证 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{r^3 - x \cdot 3r^2 \cdot \left(\frac{x}{r}\right)}{r^6} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

由于函数关于自变量的对称性, 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0.$$

例 7 和例 8 中的两个方程都叫拉普拉斯方程, 它是数学物理方程中一种很重要的方程。

例 9 设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & |x| \geq |y|, \\ -xy, & |x| < |y|, \end{cases} \text{ 求 } f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0).$$

解 当 $y \neq 0$ 时

$$f_x(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-xy}{x} = -y$$

而

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

总之有

$$f_x(0, y) = -y$$

类似易得 $f_y(x,0) = x$

从而立即得到 $f_{xy}(0,0) = -1$

$$f_{yx}(0,0) = 1$$

我们看到 $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

这从另一个方面说明了 f_{xy} 和 f_{yx} 在点 $(0,0)$ 处不连续。

作业 1, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 15

6.3 全微分及其应用

6.3.1 全微分概念

通过前面的讨论, 我们知道, 二元函数对某个自变量的偏导数表示当另一个自变量固定时, 因变量相对于该自变量的变化率, 根据一元函数微分学中增量与微分的关系, 可得

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y)\Delta y + o(\Delta y)$$

这里 $f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ 与 $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 分别称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y)

处对 x 与对 y 的**偏增量**, $f_x(x, y)\Delta x$ 与 $f_y(x, y)\Delta y$ 分别称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处

对 x 与对 y 的**偏微分**。

在实际问题中, 有时需要研究多元函数中各个自变量都取得增量时因变量所获得的增量, 即所谓**全增量**的问题。

例如 设矩形的边长分别为 x, y , 当边长分别增加 $\Delta x, \Delta y$ 时, 面积的改变量是多少? (图 6-8)

这时, 矩形的面积为 $A = xy$

$$\Delta A = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

上式右边第一部分 $y\Delta x + x\Delta y$ 表示图 6-8 中带有斜线的两块小长方形面积之和, 它与 ΔA 的差仅为

一块带有双斜线的面积 $\Delta x\Delta y$ 很小时, 就有

$$\Delta A \approx y\Delta x + x\Delta y$$

称 $y\Delta x + x\Delta y$ 为面积 A 的全微分。

下面以二元函数为例进行讨论。

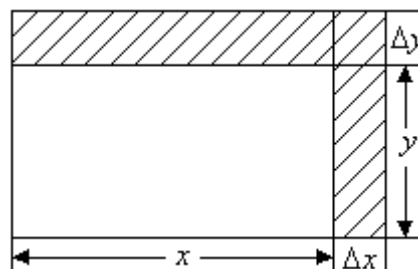


图 6-8

一般来说,计算全增量 Δz 比较复杂。与一元函数的情形一样,我们希望用自变量的增量 Δx 、 Δy 的线性函数来近似地代替函数的全增量 Δz , 从而引入如下定义.

定义 如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho), \quad (2)$$

其中 A 、 B 不依赖于 Δx 、 Δy 而仅与 x 、 y 有关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 而 $A \Delta x + B \Delta y$ 称为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分 (total differential), 记作 dz , 即

$$dz = A \Delta x + B \Delta y.$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微, 那么称函数 $z = f(x, y)$ 为 D 内可微函数。

在第二节曾经指出, 多元函数在某点的偏导数存在, 并不能保证函数在该点连续, 但是, 由上述定义可知, 如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微分, 那么这函数在该点必定连续. 事实上, 这时由(2)式可得

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta z = 0,$$

从而

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} [f(x, y) + \Delta z] = f(x, y).$$

因此函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续.

6.3.2 可微与可偏导的关系

下面讨论函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微的条件.

定理 1 (必要条件) 如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分, 则该函数在点 (x, y) 的偏导数

$\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在, 且函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (3)$$

证 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 可微。于是, 对于点 P 的某个邻域内的任意一点 $P'(x + \Delta x, y + \Delta y)$, (2) 式总成立。特别当 $\Delta y=0$ 时 (2) 式也应成立, 这时 $\rho = |\Delta x|$, 所以 (2) 式成为

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = A \cdot \Delta x + o(|\Delta x|).$$

上式两边各除以 Δx , 再令 $\Delta x \rightarrow 0$ 而取极限, 就得

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = A,$$

从而偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在, 且等于 A . 同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$. 所以 (3) 式成立.

由一元函数微分学可知, 一元函数在某点的导数存在是微分存在的充分必要条件. 但对于多元函数来说, 情况就不一样了. 当函数的各偏导数都存在时, 虽然能形式地写出

$\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, 但它与 Δz 之差并不一定是比 ρ 高阶的无穷小, 因此它不一定是函数的全

微分. 换句话说, 各偏导数的存在只是全微分存在的必要条件而不是充分条件. 例如, 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处有 $f_x(0,0) = 0$ 及 $f_y(0,0) = 0$, 所以

$$\Delta z - [f_x(0,0) \cdot \Delta x + f_y(0,0) \cdot \Delta y] = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

如果考虑点 $P'(\Delta x, \Delta y)$ 沿着直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 则

$$\frac{\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}{\rho} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{\Delta x \cdot \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} = \frac{1}{2},$$

它不能随 $\rho \rightarrow 0$ 而趋于 0, 这表示 $\rho \rightarrow 0$ 时,

$$\Delta z - [f_x(0,0) \cdot \Delta x + f_y(0,0) \cdot \Delta y]$$

并不是比 ρ 高阶的无穷小, 因此函数在点 $(0,0)$ 处的全微分并不存在, 即函数在点 $(0,0)$ 处是不可微的.

由定理 1 及这个例子可知, 偏导数存在是可微分的必要条件而不是充分条件. 但是, 如果再假定函数的各个偏导数连续, 则可以证明函数是可微的, 即有下面的定理.

定理 2 (充分条件) 如果函数 $z=f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 连续, 则函数在

该点可微分.

证 因为我们只限于讨论在某一区域内有定义的函数 (对于偏导数也如此), 所以假定偏导数在点 $P(x, y)$ 连续, 就含有偏导数在该点的某一邻域内必然存在的意思 (以后凡说到偏导数在某一点连续均应如此理解). 设点 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为这邻域内任意一点, 考察函数的全增量

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] \\ &\quad + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \end{aligned}$$

在第一个括号内的表达式, 由于 $y+\Delta y$ 不变, 因而可以看作是 x 的一元函数 $f(x, y+\Delta y)$ 的增量. 于是, 应用拉格朗日中值定理, 得到

$$[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

又依假设, $f'_x(x, y)$ 在点 (x, y) 连续, 所以上式可写为

$$[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] = f'_x(x, y) \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x \quad (4)$$

其中 ε_1 为 Δx 、 Δy 的函数, 且当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$.

同理可证第二个括号内的表达式可写为

$$[f(x, y+\Delta y) - f(x, y)] = f'_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_2 \Delta y \quad (5)$$

其中 ε_2 为 Δy 的函数, 且当 $\Delta y \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

由 (4)、(5) 两式可见, 在偏导数连续的假定下, 全增量 Δz 可以表示为

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad (6)$$

容易看出

$$\left| \frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\rho} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon_1 \Delta x}{\rho} \right| + \left| \frac{\varepsilon_2 \Delta y}{\rho} \right| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|,$$

它随着 $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, 即 $\rho \rightarrow 0$ 时而趋于零.

这就证明了 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 是可微的.

以上关于二元函数全微分的定义及可微的必要条件和充分条件, 可以完全类似地推广到三元和三元以上的多元函数.

习惯上, 我们将自变量的增量 Δx 、 Δy 分别记作 dx 、 dy , 并分别称为自变量 x 、 y 的微分. 这样, 函数 $z=f(x, y)$ 的全微分就可写为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (7)$$

这里我们看到函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 初等全微分等于它关于 x, y 的偏微分 $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ 与

$\frac{\partial z}{\partial y} dy$ 之和, 这一事实称为二元函数微分的叠加原理.

叠加原理也适用于二元以上的函数的情形. 例如, 如果三元函数 $u=f(x, y, z)$ 可微, 那么它的全微分就等于它的三个偏微分之和, 即

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

例 1 计算 $z = e^{xy}$ 在点 $(2, 1)$ 处的全微分.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$$

因而
$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} = e^2, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} = 2e^2$$

所以
$$dz = e^2 dx + 2e^2 dy.$$

例 2 计算函数 $u = x + \sin \frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解 因为
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} + ze^{yz}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz},$$

所以
$$du = dx + \left(\frac{1}{2} \cos \frac{y}{2} + ze^{yz} \right) dy + ye^{yz} dz.$$

6.3.3 全微分几何意义

我们知道, 在一元函数中, 对于可微函数 $y = f(x)$, 当 Δy 时曲线 $y = f(x)$ 上的点 M 的纵坐标的增量时, 微分 dy 就是曲线的切线在该点相应处的增量. 由于 $\Delta y \approx dy$, 因而在点 M 的附近, 可用切线段来近似地代替曲线段. 对于二元函数来说, 全微分则反映了曲面与通过某点的切平面之间的类似关系.

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则在 (x_0, y_0) 的附近有

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

记
$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

在几何上, 它表示经过曲面 $S: z = f(x, y)$ 上的点 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 并以 $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$ 为法向量的平面, 记其为 Π .

由偏导数的几何意义可知, 曲面 S 与平面 $y = y_0$ 的交线在点 M_0 的切线方程为

$$\begin{cases} z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

而曲面 S 与平面 $x = x_0$ 的交线在点 M_0 的切线方程为

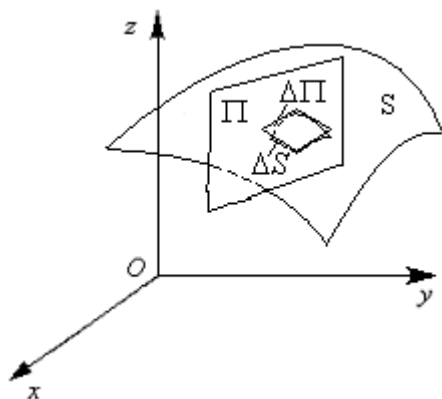
$$\begin{cases} z - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

由此可推知, 这两条相交的切线所确定的平面方程为

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

这正是平面 Π 。

我们把平面 Π 称为曲面 S 在点 M_0 处的切平面
(切平面的确切定义将在 6.6.2 节中给出)。这说明如
果 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 则曲面 $z = f(x, y)$
在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 存在切平面, 并且在
 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 附近可用切平面近似代替曲面 (图



6-9)

6.3.4 全微分的应用

由全微分的定义可知, 当二元函数 $z = f(x, y)$

图 6-9

在点 $P(x, y)$ 处可微, 并且 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 都较小时, 就有近似公式

$$\Delta z \approx dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y. \quad (8)$$

上式也可以写成

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y \quad (9)$$

与一元函数的情形相类似, 我们可以利用 (8) 式或 (9) 式对二元函数作近似计算和误差估计。

例 3 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值。

解 设函数 $f(x, y) = x^y$. 显然, 要计算的值就是函数在 $x=1.04, y=2.02$ 时的函数值 $f(1.04, 2.02)$.

取 $x=1, y=2, \Delta x=0.04, \Delta y=0.02$. 由于 $f(1, 2)=1$,

$$f_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f_y(x, y) = x^y \ln x,$$

$$f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(1, 2) = 0,$$

所以, 应用公式 (9) 便有

$$(1.04)^{2.02} \approx 1 + 2 \times 0.04 + 0 \times 0.02 = 1.08.$$

例 4 利用单摆摆动测定重力加速度 g 的公式是

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

现测得单摆摆长 l 与振动周期 T 分别为 $l = 100 \pm 0.1 \text{cm}$ 、 $T = 2 \pm 0.004 \text{s}$ 。问由于测定 l 与 T 的误差而引起 g 的绝对误差和相对误差各为多少?

解 如果把测量 l 与 T 时所产生的误差当作 $|\Delta l|$ 与 $|\Delta T|$ ，则利用上述计算公式所产生的误差就是二元函数 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ 的全增量的绝对值 $|\Delta g|$ 。由于 $|\Delta l|$ 、 $|\Delta T|$ 都很小，因此我们可以用 dg 来近似地代替 Δg 。这样就得到 g 的误差为

$$|\Delta g| \approx |dg| = \left| \frac{\partial g}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial g}{\partial T} \Delta T \right| \leq \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right| \cdot \delta_l + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \cdot \delta_T = 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} \delta_l + \frac{2l}{T^3} \delta_T \right)$$

其中 δ_l 与 δ_T 为 l 与 T 的绝对误差。把 $l = 100$, $T = 2$, $\delta_l = 0.1$, $\delta_T = 0.004$ 代入上式，得 g 的绝对误差约为

$$\delta_g = 4\pi^2 \left(\frac{0.1}{2^2} + \frac{2 \times 100}{2^3} \times 0.004 \right) = 0.5\pi^2 \approx 4.93 (cm/s^2)。$$

从而 g 的相对误差约为

$$\frac{\delta_g}{g} = \frac{0.5\pi^2}{\frac{4\pi^2 \times 100}{2^2}} = 0.5\%$$

例 5 某城市的大气污染指数 P 取决于两个因素，即空气中固体废物的数量 x 和空气中有害气体的数量 y 。它们之间的关系可表示成

$$P(x, y) = x^2 + 2xy + 4xy^2 \quad (0 \leq x, y \leq +\infty).$$

- (1) 计算 $P'_x(10, 5)$ 和 $P'_y(10, 5)$ ，并说明它们的实际意义；
- (2) 当 x 增长 10%， $y=5$ 不变或 $x=10$ 不变， y 增长 10%，该城市的空气污染的情况怎样？
- (3) 当 x 增长 10%， y 减少 10%，该城市的空气污染是否有所改善？

解 (1) 由 $P'_x(x, y) = 2x + 2y + 4y^2$, $P'_y(x, y) = 2x + 8xy$ ，得

$$P'_x(10, 5) = 130, \quad P'_y(10, 5) = 420.$$

根据偏导数定义， $P'_x(10, 5)$ 表示当空气中有害气体 $y=5$ ，且固定不变，空气中的固体废物量 $x=10$ 时， P 对 x 的变化率，也就是说 $y=5$ 是常量， x 是变量，且 x 自 10 发生一个单位的改变时，大气污染指数 P 大约改变 $P'_x(10, 5)$ 个单位。

同理， $P'_y(10, 5)$ 表示当空气中固体废物 $x=10$ 不改变时， P 对 y （当 $y=5$ ）的变化率，或者说，当 $x=10$ 不变， y 自 5 发生一个单位的改变时，大气污染指数 P 大约改变 $P'_y(10, 5)$ 个单位。

(2) 显然 $P'_x(x, y), P'_y(x, y)$ 在点 $(10, 5)$ 处连续, 根据增量公式, 有

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(10+\Delta x, 5+\Delta y) - P(10, 5) \\ &= P'_x(10, 5)\Delta x + P'_y(10, 5)\Delta y + o(\rho) \\ &= 130\Delta x + 420\Delta y + o(\rho) \\ &\approx 130\Delta x + 420\Delta y\end{aligned}$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

当 $y=5, x$ 增长 10% 时, $\Delta x=10 \times 10\%=1, \Delta y=0$, 则有

$$\Delta_x P = P'_x(10, 5)\Delta x + o(|\Delta x|) \approx P'_x(10, 5) = 130;$$

当 $x=10, y=5, \Delta y=5 \times 10\%=0.5$ 时, 有

$$\Delta_y P = P'_y(10, 5)\Delta y + o(|\Delta y|) \approx 420 \times 0.5 = 210.$$

由此可见, 当自变量 x, y 在点 $(10, 5)$ 处一个保持不变, 另一个增加 10% 时, 引起大气污染的程度是不同的, 有害气体对大气污染的程度较严重.

(3) 由于 $x=10, y=5, x$ 增长 10%, 即 $\Delta x=1; y$ 减少 10%, 即 $\Delta y=-0.5$, 此时大气污染指数的增量为

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(10+1, 5-0.5) - P(10, 5) \\ &\approx P'_x(10, 5)\Delta x + P'_y(10, 5)\Delta y \\ &= -80,\end{aligned}$$

即大气污染得到一定的治理, 空气状况有所改变.

作业 2, 4, 9, 10, 11

6.4 多元复合函数的微分法

6.4.1 链式法则

在一元函数微分学中链式法则是重要的求导法则之一。现将这一重要求导法则推广到多元复合函数的情形。多元复合函数的求导法则在多元函数微分学中也起着重要作用。

和一元复合函数相比较, 多元复合函数的结构更为复杂。为了便于掌握, 下面按照多元复合函数不同的复合情形, 分三种情形讨论。

1. 复合函数的中间变量均为一元函数的情形。

如果函数 $u = \varphi(t)$ 及 $v = \phi(t)$ 都在点 t 可导, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 处可微, 则

复合函数 $z = f[\varphi(t), \phi(t)]$ 在点 t 可导, 且有

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}} \quad (1)$$

证 设 t 获得增量 Δt ，这时 $u = \varphi(t)$ 、 $v = \phi(t)$ 的对应增量为 Δu 、 Δv ，由此，函数 $z = f(u, v)$ 相应地获得的增量 Δz 。按假设，函数 $z = f(u, v)$ 在点 (u, v) 可微，于是有

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + o(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}),$$

将上式两边同除 Δt ，得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2} \cdot \frac{|\Delta t|}{\Delta t} \quad (2)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，由 $u = \varphi(t)$ 及 $v = \phi(t)$ 都在点 t 可导，有 $\Delta u \rightarrow 0$ ， $\Delta v \rightarrow 0$ ，从而 $\rho \rightarrow 0$ ，从而

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0, \text{ 而 } \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2} \cdot \frac{|\Delta t|}{\Delta t} \text{ 为有界变量, 从而 (2) 式第三项极限为 } 0$$

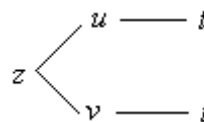
又因为当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， $\frac{\Delta u}{\Delta t} \rightarrow \frac{du}{dt}$ ， $\frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{dv}{dt}$ ，所以

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

这就证明了复合函数 $z = f[\varphi(t), \phi(t)]$ 在点 t 可导，且其导数可用公式

(1) 计算。

为了便于记忆求导公式 (1)，我们画以 z, u, v, t 的依赖关系的示意图 (图 6-10)。



用同样的方法，可把定理推广到复合函数的中间变量多于两个的情况 图 6-11

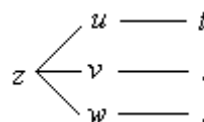
形。例如，设 $z = f(u, v, w)$ ， $u = \varphi(t)$ 、 $v = \phi(t)$ ， $w = \omega(t)$ ，由此复合而得复合函数

$$z = f[\varphi(t), \phi(t), \omega(t)],$$

则在定理相类似的条件下，这个复合函数在点 t 可导，且其导数可用下列公式计算：

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dt} \quad (2)$$

在公式 (1) 及 (2) 中的导数 $\frac{dz}{dt}$ 称为全导数。



其关系图如图 6-11 所示

图 6-11

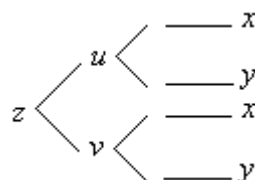
2. 复合函数的中间变量均为多元函数的情形。

如果函数 $u = \varphi(x, y)$ 及 $v = \phi(x, y)$ 都在点 (x, y) 具有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 处可微, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \phi(x, y)]$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4)$$

其变量关系图如图 6-12



类似地, 设 $u = \varphi(x, y)$ 、 $v = \phi(x, y)$ 及 $w = \omega(x, y)$ 都在点 (x, y) 具有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $z = f(u, v, w)$ 在对应点 (u, v, w) 具有连续偏导数, 则复合函数

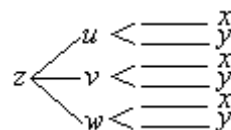
图 6-12

$$z = f[\varphi(x, y), \phi(x, y), \omega(x, y)]$$

在点 (x, y) 的两个偏导数都存在, 且可用下列公式计算:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6)$$



其变量关系图如图 6-13 所示

图 6-13

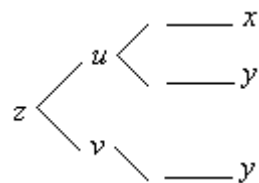
3. 复合函数的中间变量既有一元函数, 又有多元函数的情形。

如果函数 $u = \varphi(x, y)$ 在点 (x, y) 具有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $v = \phi(y)$ 在点 y 可导, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \phi(y)]$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在, 且有

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}}, \quad (7)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dy}} \quad (8)$$

上述情形实际上是情形 2 的一种特例。即在情形 2 中, 如变量 v 与 x 无关, 从而 $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$; 在 v 对 y 求导时, 由于 v 是 y 的一元函数, 故 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 换成了 $\frac{dv}{dy}$, 这就得上述结果。



其关系图如图 6-14 所示

图 6-14

在情形 3 中, 还会遇到这样的情形: 复合函数的某些中间变量本身又是复合函数的自变量。例如, 设 $z=f(u, x, y)$ 具有连续偏导数, 而 $u=\varphi(x, y)$ 具有偏导数, 则复合函数

$z=f[\varphi(x, y), x, y]$ 可看作情形 2 中当 $v=x, w=y$ 的特殊情形。因此

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 1.$$

从而复合函数 $z=f[\varphi(x, y), x, y]$ 具有对自变量 x 及 y 的偏导数, 且由公式 (5)、(6) 得

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}},$$

注意 这里 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是不同的, $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是把复合函数 $z=f[\varphi(x, y), x, y]$ 中所有的 y 看作不变而对 x 的偏导数, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 则是把 $f(u, x, y)$ 中的 u (尽管 u 中包含 y) 及 y 看作不变而对其余的 x 的偏导数. $\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 也有类似的区别。

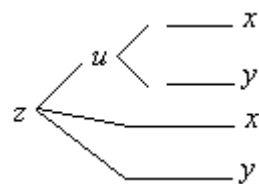


图 6-15

其关系图如图 6-15 所示

以上我们对多元复合函数中有代表性的三种情形, 给出了求偏导数的链式法则。所谓链式法则反映的是复合函数的链式结构。例如图 6-10 表明了是 u, v 的函数, 而 u, v 又都是 x, y 的函数。从图中可知, 从 z 到 x 有两条链:

$$f \rightarrow u \rightarrow x, \quad f \rightarrow v \rightarrow x,$$

而求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 的过程反映了由 z 到 x 的这两条链:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{或} \quad z_x = f_u u_x + f_v v_x$$

求偏导的法则可简称为 “同链相乘, 分链相加”。

同样, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的过程也有类似的结果。

多元复合函数的结构是多种多样的, 但掌握了以上链式法则, 求偏导的特点, 对于其他情形就不难解决了。

例 1 设 $z = \sin \frac{x}{y}$, 而 $x = e^t, y = t^2$ 。求全导数 $\frac{dz}{dt}$ 。

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}, \quad \frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \left(\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \right) e^t - \left(\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \right) (2t) \\ &= \frac{(t-2)e^t}{t^3} \cos \frac{e^t}{t^2} \end{aligned}$$

例 2 求函数 $z = e^{xy} \sin(x+y) + e^{x+y} \cos xy$ 的偏导数。

解 引入中间变量 $u=xy, v=x+y$, 则 $z = e^u \sin v + e^v \cos u$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

于是, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (e^u \sin v - e^v \sin u) \cdot y + (e^u \cos v + e^v \cos u) \cdot 1$$

$$= e^{xy} [y \sin(x+y) + \cos(x+y)] + e^{x+y} (\cos xy - y \sin xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (e^u \sin v - e^v \sin u) \cdot x + (e^u \cos v + e^v \cos u) \cdot 1$$

$$= e^{xy} [x \sin(x+y) + \cos(x+y)] + e^{x+y} (\cos xy - x \sin xy)$$

例 3 设 $z = e^u \sin v + x^2$, $u = x + y$, $v = xy$ 。求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = e^u \sin v + e^u \cos v \cdot y + 2x \\ &= e^{x+y} [\sin(xy) + y \cos(xy)] + 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = e^u \sin v + x e^u \cos v \\ &= e^{x+y} [\sin(xy) + x \cos(xy)]\end{aligned}$$

例 4 设 $w = f(x+y+z, xyz)$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$ 。

解 令 $u = x + y + z$, $v = xyz$, 则 $w = f(u, v)$ 。
为表达简便起见, 引入以下记号:

$$f'_1 = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}, \quad f''_{12} = \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v}$$

这里下标 1 表示对第一个变量求偏导数, 下标 2 表示对第二个变量求偏导数, 同理有

$f'_2, f''_{11}, f''_{21}, f''_{22}$ 等等。

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1 + yz f'_2 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} (f'_1 + yz f'_2) = f''_{11} + xy f''_{12} + y f'_2 + yz (f''_{21} + xy f''_{22}) \\ &= y f'_2 + f''_{11} + y(x + z) f''_{12} + xy^2 z f''_{22}\end{aligned}$$

例 5 设 $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, 其中 φ, ψ 均有二阶导数, 证明 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 。

证
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\varphi' + a\psi', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\varphi'' + a^2\psi'',$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi' + \psi', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'' + \psi'',$$

从而有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

例 6 1mol 理想气体的压强 P (单位: kPa), 体积 V (单位: L)、温度 T (单位: K) 满足方程 $PV = 8.31T$ 。当温度为 300K, 温度的增加率为 0.1K/s, 体积为 100L 以及体积的增加率为 0.2L/s 时, 求压强的变化率。

解 依题意即求压强 P 对时间 t 的变化率 $\frac{dP}{dt}$, 由已知 $P = 8.31 \frac{T}{V}$
 $T = 300, \frac{\partial T}{\partial t} = 0, V = 100, \frac{\partial V}{\partial t} = 0.2$, 利用链式法则 (1) 有

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dt} = 8.31 \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{dT}{dt} - \frac{T}{V^2} \frac{dV}{dt} \right) \\ &= 8.31 \left(\frac{1}{100} \times 0.1 - \frac{30}{100^2} \times 0.2 \right) = -0.04155\end{aligned}$$

即压强的减少率为 0.04155 kPa/s 。

从以上例子可看出, 求多元复合函数偏导数的关键是分清函数的复合结构: 哪些变量是自变量, 哪些变量是中间变量, 以及它们之间的关系 (是一元函数, 还是多元函数, 从而用不同的记号)。在求高阶偏导数时要注意的, 偏导函数仍是多元复合函数。

6.4.2 全微分形式不变性

与一元函数微分的形式不变性类似, 多元函数也有全微分形式的不变性。以二元函数为例, 设函数 $z=f(u, v)$ 可微, 则有全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

如果 u, v 又是 x, y 的函数 $u = \varphi(x, y)$ 、 $v = \phi(x, y)$, 且这两个函数也是可微函数, 则复合函数

$$z = f[\varphi(x, y), \phi(x, y)]$$

的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 分别由公式 (3) 及 (4) 给出。把公式 (3) 及 (4) 中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入上式,

得

$$\begin{aligned}dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.\end{aligned}$$

由此可见在二元函数 $z = f(u, v)$ 中, 无论 u, v 是中间变量, 还是自变量, 它的全微分形式是一样的。这个性质叫做**全微分形式的不变性**。

利用这一性质, 可得到多元函数全微分与一元函数微分相同的运算法则:

$$(1) \quad d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$(2) \quad d(uv) = u dv + v du$$

$$(3) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} (v \neq 0)$$

恰当地利用这些结果，常会得到很好的效果。

例 7 设 $z = e^u \sin v$ ，尔 $u = xy, v = x + y$ 。利用全微分形式不变性求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

$$\text{解} \quad dz = d(e^u \sin v) = e^u \sin v du + e^u \cos v dv$$

$$\begin{aligned} \text{因} \quad du &= d(xy) = y dx + x dy \\ dv &= d(x+y) = dx + dy \end{aligned}$$

代入后归并含 dx 及 dy 的项，得

$$dz = (e^u \sin v \cdot y + e^u \cos v) dx + (e^u \sin v \cdot x + e^u \cos v) dy$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy &= e^{xy} [y \sin(x+y) + \cos(x+y)] dx \\ &\quad + e^{xy} [x \sin(x+y) + \cos(x+y)] dy. \end{aligned}$$

比较上式两边的 dx 、 dy 的系数，就同时得到两个偏导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= e^{xy} [y \sin(x+y) + \cos(x+y)] \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= e^{xy} [x \sin(x+y) + \cos(x+y)] \end{aligned}$$

6.4.3 隐函数的求导法则

1. 一个方程的情形

前面我们已经提出了隐函数的概念，并且介绍了不经过显化直接由方程

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

求它所确定的隐函数的导数的方法，前提是假定该隐函数存在且可导。现在我们来讨论在什么条件下，方程 $F(x, y) = 0$ 可以惟一地确定隐函数 $y = y(x)$ ，即隐函数存在定理，并根据多元复合函数的求导法来建立隐函数的导数公式。

隐函数存在定理 1 设函数 $F(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且

$F(x_0, y_0) = 0, F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内可以唯一确定一

个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$, 它满足条件 $y_0=f(x_0)$, 并有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \quad (2)$$

公式 (2) 就是隐函数的求导公式。

这个定理中存在性的证明从略。现仅就公式 (2) 作如下推导。

将方程 (1) 所确定的函数 $y=f(x)$ 代入 (1), 得恒等式

$$F(x, f(x)) \equiv 0$$

其左端可以看作是 x 的一个复合函数, 利用符合函数的链式法则求这个函数的全导数, 由于恒等式两端求导后仍然恒等, 即得

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0,$$

由于 F_y 连续, 且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 所以存在 (x_0, y_0) 的一个邻域, 在这个邻域内 $F_y \neq 0$, 于是得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

如果 $F(x, y)$ 得二阶偏导数也都连续, 我们可以把等式 (2) 的两端看作 x 的复合函数

而再一次求导, 即得隐函数 $y=f(x)$ 的二阶导数

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{(F_{xx} + F_{xy}y')F_y - F_x(F_{yx} + F_{yy}y')}{F_y^2} \\ &= -\frac{(F_{xx} + F_{xy}(-\frac{F_x}{F_y}))F_y - F_x(F_{yx} + F_{yy}(-\frac{F_x}{F_y}))}{F_y^2} \\ &= -\frac{(F_{xx}F_y - F_{xy}F_x)F_y - F_x(F_{yx}F_y - F_xF_{yy})}{F_y^3} \\ &= -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}. \end{aligned}$$

例 1 验证方程 $F(x, y) = xy + e^x - e^y = 0$ 在点 $(0, 0)$ 的某一邻域内能唯一确定一个有连续导数的隐函数 $y=f(x)$, 并求这函数的一阶导数在 $x=0$ 的值.

解 $F_x = y + e^x, F_y = x - e^y, F(0,0) = 0, F_y(0,0) = -1 \neq 0$ 。因此由定理 1 可知, 方程

$F(x, y) = xy + e^x - e^y = 0$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内能惟一确定一个有连续导数、当 $x=0$ 时 $y=0$ 的函数 $y=f(x)$.

下面求这函数的一阶导数。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{y+e^x}{x-e^y} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1$$

隐函数存在定理还可以推广到多元函数。既然一个二元方程 (1) 可以确定一个一元隐函数, 那么一个三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

就有可能确定一个二元隐函数。

与定理 1 一样, 我们同样可以由三元函数 $F(x, y, z)$ 的性质来断定由方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的二元函数 $z=f(x, y)$ 的存在, 以及这个函数的性质。这就是下面的定理。

隐函数存在定理 2 设函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数,

且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0, F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y, z)=0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一邻域内恒

能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x, y)$, 它满足条件 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \quad (4)$$

这个定理我们证, 仅就 (4) 式作如下推导:

$$\text{由于} \quad F(x, y, f(x, y)) \equiv 0,$$

将上式两端分别对 x 和 y 求导, 应用复合函数求导法则得

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

因为 F_z 连续, 且 $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 所以存在点 (x_0, y_0, z_0) 的一个邻域, 在这个邻域内

$F_z \neq 0$, 于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

例 2 设 $z=f(x, y)$ 是由方程 $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$ 所确定的隐函数, 试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 设 $F(x, y, z) = e^{-xy} - 2z + e^z$, 则

$$F_x = -ye^{-xy}, \quad F_y = -xe^{-xy}, \quad F_z = e^z - 2,$$

当 $z \neq \ln 2$ 时, 应用公式 (4) 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}.$$

再一次由 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 对 y 求偏导数, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{(e^{-xy} - xye^{-xy})(e^z - 2) - ye^{-xy}e^z \frac{\partial z}{\partial y}}{(e^z - 2)^2} \\ &= \frac{(e^{-xy} - xye^{-xy})(e^z - 2) - ye^{-xy}e^z \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}}{(e^z - 2)^2} \\ &= \frac{(e^{-xy} - xye^{-xy})(e^z - 2)^2 - ye^{-xy}e^z xe^{-xy}}{(e^z - 2)^3} \\ &= \frac{e^{-xy}[(1 - xy)(e^z - 2)^2 - xye^{z-xy}]}{(e^z - 2)^3}\end{aligned}$$

例 3 求由方程 $F(y - z, yz) = 0$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 的偏导数, 其中 F_1, F_2 均连续且 $F_2 \neq 0$ 。

解 把原方程两边对 x, y 分别求偏导, 并注意 $z = z(x, y)$, 由链法则得

$$\begin{aligned}F_1 \cdot (-1) + F_2 \cdot y \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \\ F_1 + F_2 \left(z + y \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= 0.\end{aligned}$$

从中解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1}{yF_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F + zF_{21}}{yF_2}$$

二、方程组得情形

下面将隐函数存在定理作另一方面的推广。我们不仅增加方程中变量得个数, 而且增加方程的个数。例如, 考虑方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

这时, 在四个变量中, 一般只能由两个变量独立变化, 因此方程组 (5) 就有可能确定两个二元函数。在这种情况下, 我们可以由函数 F, G 的性质来断定由方程组 (5) 所确定的两个二元函数的存在, 以及它们的性质。我们有下面的定理。

隐函数存在定理 3 设 $F(x, y, u, v)$ 、 $G(x, y, u, v)$ 在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数, 又 $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, 且偏导数所组成的函数行列式或称雅可比 (Jacobi 德国, 1804—1851) 行列式:

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 不等于零，则方程组(5)在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 的某一邻域内可唯一确定一

组连续且具有连续偏导数的函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ ，它们满足条件

$u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$ 并有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} \end{aligned} \quad (6)$$

与前了两个定理一样，我们仅推导求偏导数的公式

因隐函数满足

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0. \end{cases}$$

将上面两恒等式两端对 x 求偏导数，有

$$\begin{cases} F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0 \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0 \end{cases}$$

这是一个关于 u_x, v_x 的线性方程组,

由于 $J \neq 0$, 可解得

$$u_x = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad v_x = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

同理可得

$$u_y = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad v_y = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$$

在求这类偏导数问题时, 可直接使用公式 (6), 但一般情况下, 用推导公式 (6) 的方法, 即用复合函数的链式法则较为方便。

例 设 $\begin{cases} u^3 + xv = y \\ v^3 + yu = x \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$

解 将方程组两边对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + v + x \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{3v^2 + x}{9u^2v^2 - xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3u^2 + vy}{9u^2v^2 - xy}$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3v^2 + ux}{9u^2v^2 - xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{3u^2 + y}{9u^2v^2 - xy}$$

本题也可用全微分的形式不变性求解: 在方程组的两端求全微分, 得

$$\begin{cases} 3u^2 du + xdv + vdx = dy \\ 3v^2 dv + ydu + udy = dx \end{cases}$$

解出

$$\begin{aligned} du &= -\frac{3v^2 + x}{9u^2v^2 - xy} dx + \frac{3v^2 + ux}{9u^2v^2 - xy} dy \\ dv &= \frac{3u^2 + vy}{9u^2v^2 - xy} dx - \frac{3u^2 + y}{9u^2v^2 - xy} dy \end{aligned}$$

于是立即得出所求的偏导数，其结果与前面用链式法则所得结果相同。

作业 2, 3, 6, 7, 10, 12, 13, 14

6.5 偏导数的几何应用

6.5.1 空间曲线的切线与法平面

首先将平面曲线的切线概念推广到空间曲线，并给出空间曲线的法平面概念。

设 M_0 是空间曲线 Γ 上的一定点，在 Γ 上 M_0 的附近任取一点 M ，过 M_0 ， M 两点的直线称为 Γ 的割线。

如果当点 M 沿曲线 Γ 趋于 M_0 时，割线 M_0M 存在极限位置 M_0T ，则称直线 M_0T 为曲线 Γ 在 M_0 点的切线 (tangent line)。过 M_0 点

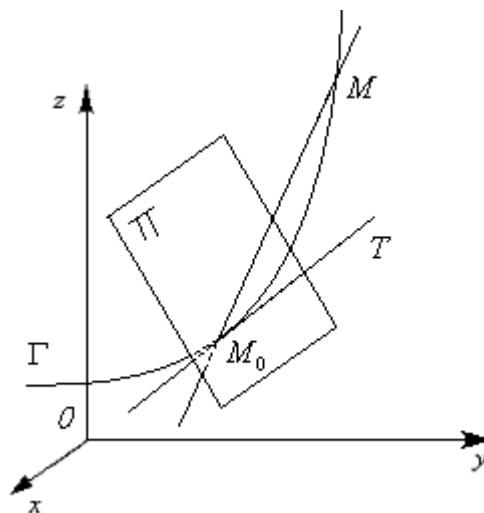


图 6-16

且与切线 M_0T 垂直的平面 Π 称为曲线 Γ 在 M_0 点的法平面 (normal plane) (如图 6-16)。

现在来建立 Γ 在 M_0 点的切线与法平面方程。

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \phi(t), z = \omega(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \quad (1)$$

这里假设(1)式的三个函数都在 $[\alpha, \beta]$ 上可导

在曲线 Γ 上取对应于 $t = t_0$ 的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及对应于 $t = t_0 + \Delta t$ 的邻近一点 $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$.根据解析几何,曲线的割线 M_0M 的方程是

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}$$

用 Δt 除上式的各分母,得

$$\frac{\frac{x - x_0}{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{\frac{y - y_0}{\Delta y}}{\Delta t} = \frac{\frac{z - z_0}{\Delta z}}{\Delta t},$$

令 $M \rightarrow M_0$ (这时 $\Delta t \rightarrow 0$),通过对上式取极限,即得曲线在点 M_0 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\phi'(t)} = \frac{y - y_0}{\phi'(t)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t)}. \quad (2)$$

这里当然要假定 $\phi'(t_0)$ 、 $\phi'(t_0)$ 及 $\omega'(t)$ 不能全为零.如果个别为零,则应按空间解析几何中有关直线的对称式方程的说明来理解.

称切线的方向向量为曲线的**切向量** (tangent vector), 记做 \tilde{s} , 则

$$\tilde{s} = (\phi'(t_0), \phi'(t_0), \omega'(t))$$

进而得到曲线 Γ 在点 M_0 处的法平面方程为

$$\phi'(t_0)(x - x_0) + \phi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t)(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

例1 求曲线 $x=t, y=t^2, z=e^t$ 在点 $(1, 1, e)$ 处的切线及法平面方程。

解 点 $(1, 1, e)$ 所对应的参数为 $t=1$,又

$$\frac{dx}{dt}=1, \quad \frac{dy}{dt}=2t, \quad \frac{dz}{dt}=e^t,$$

当 $t=1$ 时, 切线的方向向量为 $s=(1,2,e)$, 故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-e}{e},$$

法平面方程为

$$x+2y+ez-3-e^2=0,$$

现在我们来讨论空间曲线 Γ 的方程以另外两种形式给出的情形.

如果空间曲线 Γ 的方程以

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \phi(x) \end{cases}$$

的形式给出, 则取 x 为参数, 它就可以表为参数方程的形式

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \varphi(x), \\ z = \phi(x). \end{cases}$$

若 $\varphi(x), \phi(x)$ 都在 $x = x_0$ 处可导, 那么根据上面的讨论可知, $\tilde{s}=(1, \varphi'(x_0), \phi'(x_0))$ 因此

曲线 Γ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z-z_0}{\phi'(x_0)}, \quad (5)$$

在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的法平面方程为

$$(x-x_0) + \varphi'(x_0)(y-y_0) + \phi'(x_0)(z-z_0) = 0. \quad (6)$$

若空间曲线 Γ 的方程以一般形式

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

给出, 只要满足隐函数存在定理的条件,

那么方程组 (7) 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内可确定惟一的隐函数组

$y = \varphi(x), z = \psi(x)$, 此时可认为曲线方程是以 x 为参数, 再利用隐函数求导法求出曲线在

M_0 处的切向量 $(1, \varphi'(t_0), \psi'(t_0))$, 进而可得切线与法平面方程。

例 2 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的交线 Γ 在点 $P_0(1, 1, \sqrt{2})$ 处的切线方程与法平面方程。

解 对两个曲面方程式两端求全微分, 得

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0, \quad 2xdx + 2ydy - 2dx = 0$$

在点 $P_0(1, 1, \sqrt{2})$ 处, 有

$$2dx + 2dy + 2\sqrt{2}dz = 0, \quad 2dx + 2dy - 2dx = 0$$

解得
$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

于是 Γ 在点 P_0 的切向量为 $\vec{s} = (1, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

从而求得所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\sqrt{2}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

即

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-\sqrt{2}} = z-2, \\ y=0 \end{cases}$$

法平面方程为

$$(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(z-\sqrt{2})=0,$$

即

$$\sqrt{2}x - z = 0$$

6.5.2 曲面的切平面与法线

我们先讨论曲面方程由隐式给出的情形, 设曲面 Σ 的方程为

$$F(x, y, z) = 0 \quad (10)$$

然后把由显式给出的曲面方程作为它的特例。

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面 Σ 上的一点, 并设函数 $F(x, y, z)$ 的偏导数在该点连续且不同时为零, 在曲面 Σ 上, 通过点 M_0 任意引一条曲线(图 6-17), 假定曲线 Γ 的参数方程为

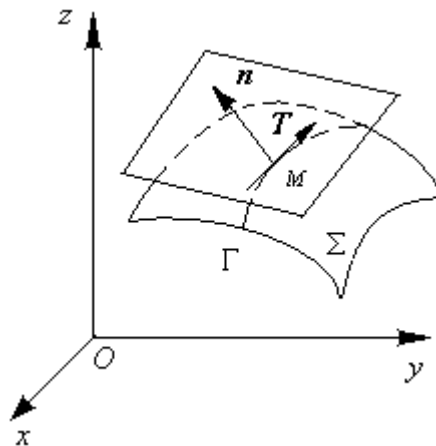


图 6-17

$$x = \varphi(t), y = \phi(t), z = \omega(t), (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (11)$$

$t = t_0$ 对应于点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且 $\varphi'(t_0), \phi'(t_0), \omega'(t_0)$ 不全为零, 则由(2)式可得这曲线的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\phi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

切向量为 $\vec{s} = (\varphi'(t_0), \phi'(t_0), \omega'(t_0))$

我们现在要证明, 在曲面 Σ 上通过点 M_0 且在点 M_0 处具有切线的任何曲线, 它们在点 M_0 处的切线都在同一个平面上。事实上, 因为曲线 Γ 完全在曲面 Σ 上, 所以有恒等式

$$F[\varphi(t), \phi(t), \omega(t)] \equiv 0,$$

又因 $F(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处有连续偏导数, 且 $\varphi'(t_0), \phi'(t_0), \omega'(t_0)$ 存在, 所以这恒等式

左边的复合函数在 $t = t_0$ 处有全导数, 且这全导数等于零:

$$\frac{d}{dt} F[\varphi(t), \phi(t), \omega(t)] \Big|_{t=t_0} = 0,$$

即有

$$F_x(x_0, y_0, z_0)\varphi'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)\phi'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)\omega'(t_0) = 0 \quad (12)$$

先引入向量

$$\underset{\sim}{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)),$$

则 (12) 式又可写作

$$\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{s} = 0$$

这表明曲面 Σ 上过点 M_0 点的任一条曲线在这一点的切向量,

$$\underset{\sim}{s} = (\varphi'(t_0), \phi'(t_0), \omega(t_0))$$

都与同一个向量 $\underset{\sim}{n}$ 垂直, 所以曲面上通过点 M_0 的一切曲线在点 M_0 的切线都在同一个平面

上 (图 6-17). 这个平面称为曲面 Σ 在点 M_0 的切平面 (tangent plane). 而 $\underset{\sim}{n}$ 就是切平面的一个法向量 (normal vector), 于是切平面方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (13)$$

通过点 M_0 而垂直于切平面(13)的直线称为曲面在该点的法线 (normal line), 它以法向量 $\underset{\sim}{n}$ 作为方向向量, 因此其方程是

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (14)$$

现在来考虑曲面由显示给出的情形, 设曲面 Σ 的方程为

$$z = f(x, y). \quad (15)$$

令

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

可见

$$F_x(x, y, z) = f_x(x, y), F_y(x, y, z) = f_y(x, y), F_z(x, y, z) = -1.$$

于是, 当函数 $f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续时, 曲面 (15) 在点

$M(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量为

$$\vec{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1),$$

于是得到其切平面方程为

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

或

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (16)$$

而法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

这里顺便指出, 方程 (16) 右端恰好是函数 $z = f(x, y)$ 是在点 (x_0, y_0) 的全微分, 而左端是切平面在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处竖坐标的增量, 因此, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全微分, 在几何上表示曲面 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面上点的竖坐标的增量。

如果用 α, β, γ 表示曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$ 的法向量的方向角, 并假定法向量 \vec{n} 的方向向上, 即它与 z 轴的正向所成的角 γ 是一锐角, 则法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \cos \beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

这里, 把 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 分别简记为 f_x, f_y 。

例 3 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 在点(1,1,1)处的切平面及法线方程.

解 设 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$, $\underset{\sim}{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 4y, 6z)$,

$$\underset{\sim}{n} \Big|_{(1,1,1)} = (2, 4, 6)$$

所以在点 (1, 1, 1) 处此曲面的切平面方程为

$$2(x-1) + 4(y-1) + 6(z-1) = 0$$

即 $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

显然 (0,0,0) 满足法线方程, 由此可见, 法线经过原点 (即球心)。

例 4 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点(2,1,4)处的切平面及法线方程。

解 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$,

$$\underset{\sim}{n} = (f_x, f_y, z-1) = (2x, 2y, -1)$$

$$\underset{\sim}{n} \Big|_{(2,1,4)} = (4, 2, -1).$$

所以在点(2,1,4)处的切平面方程为

$$4(x-2) + 2(y-1) - (z-4) = 0$$

即 $4x + 2y - z - 6 = 0$.

法线方程为

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

例 5 证明曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = a$ ($a > 0$) 上任一点处的切平面在三个坐标轴上截距之和为一个常数。

证 设 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - a$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上任一点, 则

$$(F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)$$

$$\left. \mathbf{n} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{z_0}}\right)$$

从而切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$$

从而

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}$$

由于点 M_0 在曲面上, 所有 $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = a$,

于是切平面在 x, y, z 轴上的截距分别为 $a\sqrt{x_0}, a\sqrt{y_0}, a\sqrt{z_0}$

其和为

$$a\sqrt{x_0} + a\sqrt{y_0} + a\sqrt{z_0} = a^2$$

作业 (切线与法平面) 1 偶数, (切平面与法线) 3, 5, 8, 10

6.6 多元函数的极值

6.6.1 多元函数的极值及最大值、最小值

寻求多元函数的极值以及最大值、最小值，是多元函数微分学的一个重要应用。下面就二元函数来讨论这个问题。

定义 设二元函数 $z=f(x, y)$ 的在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，若在此邻域内有

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得**极大值** (**极小值**) $f(x_0, y_0)$ ；点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的**极大值点** (**极小值点**)；极大值、极小值统称为**极值**。使得函数取得极值的点称为**极值点**。

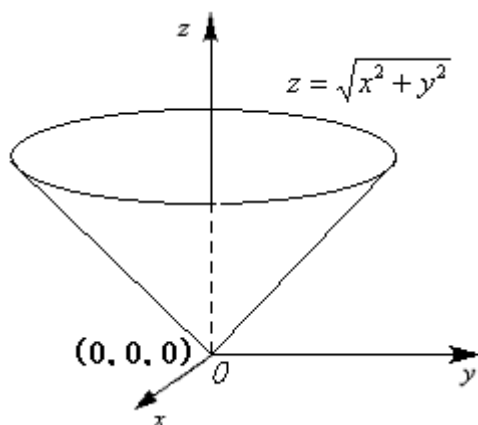


图 6-18

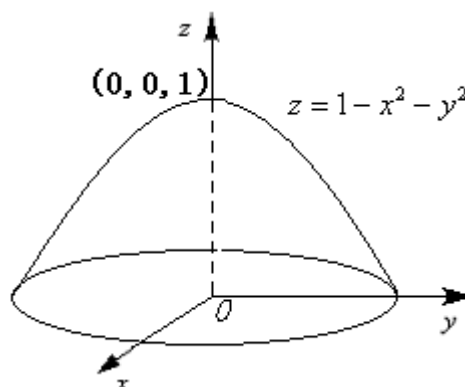


图 6-19

如果定义中的不等式是严格不等式，则得到严格极值的概念。和一元函数类似，多元函数的极值是一个局部的概念。如果和 $z=f(x, y)$ 的图形联系起来，则函数的极大值和极小值分别是曲面的“高峰”和“低谷”。

例如 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $(0, 0, 0)$ 为极小值，为曲面的“低谷”（图 6-18），而

$z = 1 - x^2 - y^2$ ， $(0, 0, 1)$ 为极大值，为曲面的“高峰”（图 6-19）。

以上关于二元函数的极值概念，很容易推广到 n 元函数。

与倒数在一元函数极值研究中的作用一样，偏导数是研究多元函数极值的主要手段。下面两个定理就是关于这个问题的结论。

定理（二元函数极值的必要条件） 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0, y_0) 处取得极值，则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证 因为 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值，所以一元函数 $f(x, y_0)$ 在点 x_0 处也取得极值，又 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有偏导数，从而由可导的一元函数取得极值的必要条件（费马引理），可得到

$$f_x(x_0, y_0) = 0.$$

同理, 有

$$f_y(x_0, y_0) = 0.$$

从几何上看, 这时如果曲面 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处有切平面, 则切平面

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

成为平行于 xOy 坐标面的平面

$$z - z_0 = 0.$$

该定理可以推广至 n ($n > 2$) 元函数, 例如, 如果三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0)

具有偏导数, 则它在点 (x_0, y_0, z_0) 具有极值的必要条件为

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

类似一元函数, 使 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ 同时成立的点 (x_0, y_0) 称为函数 $z = f(x, y)$ 的驻点。从上面定理可知, 具有偏导数的函数的极值点必定是驻点。但函数的驻点不一定是极值点, 例如, 易知点 $(0, 0)$ 是函数 $z = xy$ 的驻点, 但函数在该点并不取得极值。

怎样判定一个驻点是否是极值点呢? 下面的定理部分地回答了这个问题

定理 (二元函数极值的充分条件) 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有连续的二阶偏导数, 且 $P_0(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的驻点, 记

$$f_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

则

(1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极值, 且当 $A < 0$ 时为极大值, 当 $A > 0$ 时为极小值;

(2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 不是极值;

(3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是否为极值, 还需另作讨论.

定理的证明从略。下面举例说明寻求二元函数极值的步骤。

例 4 求函数 $f(x, y) = 3axy - x^3 - y^3$ 的极值.

解 先解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3ay - 2x^2 = 0, \\ f_y(x, y) = 3ax - 3y^2 = 0, \end{cases}$$

求得驻点为 $(0, 0)$ 、 (a, a) 。

再求出二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y) = -6x, \quad f_{xy}(x,y) = 3a, \quad f_{yy}(x,y) = -6y.$$

在点(0,0)处, $AC - B^2 = -9a^2 < 0$, 所以(0,0)不是极值点;

在点(a,a)处, $AC - B^2 = 27a^2 > 0$, 又 $A < 0$, 因此 $f(a,a) = a^3$ 为极大值。

讨论函数的极值问题时, 如果函数在所讨论的区域内具有偏导数, 则由函数极值的必要条件可知, 极值只可能在驻点处取得。然而如果函数在个别点处的偏导数不存在, 这些点当然不是驻点, 但也可能是极值点。例如函数 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ 在点(0,0)处的偏导数不存在, 但该函数在点(0,0)处却取得极大值。因此, 在考虑函数的极值问题时, 除了考虑函数的驻点外, 如果有偏导数不存在的点, 那么对这些点也应当考虑。

与一元函数相类似, 我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值。我们知道, 如果 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上必定能取得最大和最小值。如果函数在 D 的内部取得最大值(最小值), 则这个最大值(最小值)也是函数的极大值(极小值)。另外函数的最大值(最小值)还可能在 D 的边界上取得。因此, 求函数最大值和最小值的一般方法是: 将函数 $f(x,y)$ 在 D 内所有驻点处的函数值及在 D 的边界上的最大值和最小值相互比较, 其中最大者就是最大值, 最小者就是最小值。但是, 要求出 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值和最小值, 往往相当复杂。在通常遇到的实际问题中, 如果根据问题的性质, 知道函数 $f(x,y)$ 的最大值(最小值)一定在 D 的内部取得, 而函数在 D 内又只有一个驻点, 那么可以肯定该驻点处的函数值就是最大值或最小值。

例5 一厂商通过电视和报纸两种方式做销售某种产品的广告。据统计资料, 销售收入 R (万元) 与电视广告费用 x (万元) 及报纸广告费用 y (万元) 之间的关系有如下的经验公式:

$$R = 15 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2$$

试在广告费用不限的前提下, 求最优广告策略。

解 所谓最优广告策略是指, 如何分配两种不同传媒方式的广告费用, 使产品的销售利润达到最大。设利润函数为 $f(x,y)$, 则

$$\begin{aligned} f(x,y) &= R - (x+y) \\ &= 15 + 13x + 31y - 8xy - 2x^2 - 10y^2, \quad (x,y) \in R^2 \end{aligned}$$

由

$$\begin{cases} f_x = 13 - 8y - 4x = 0, \\ f_y = 31 - 8x - 20y = 0, \end{cases}$$

解得唯一驻点 (0.75, 1.25), 根据实际意义知, 利润 $f(x,y)$ 一定有最大值, 且在定义域内

有唯一的驻点, 因此可以断定, 该点就是利润的最大值点。因此当 $x = 0.75$ (万元), $y = 1.25$

(万元)时, 厂商获得最大利润 $f(0.75, 1.25) = 39.25$ (万元)。

例 6 有一宽为 24cm 的长方形铁板, 把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽, 问怎样折法才能使断面的面积最大?

解 设折起来的边长为 x cm, 倾角为 α (图 6-20), 那么梯形断面的下底长为 $24-2x$, 上底长为 $24-2x+2x \cos \alpha$, 高为 $x \sin \alpha$, 所以断面面积

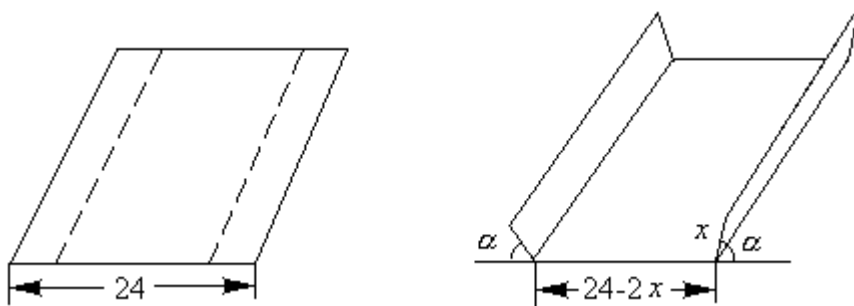


图 6-20

$$A = \frac{1}{2}(24-2x+2x \cos \alpha + 24-2x) \cdot x \sin \alpha,$$

即

$$A = 24x \sin \alpha - 2x^2 \sin \alpha + x^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\left(0 < x < 12, 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

从而

$$\begin{cases} A_x = 24 \sin \alpha - 4x \sin \alpha + 2x \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\ A_\alpha = 24x \cos \alpha - 2x^2 \cos \alpha + x^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \end{cases}$$

由于 $\sin \alpha \neq 0$ 、 $x \neq 0$ 上述方程组可化为

$$\begin{cases} 12 - 2x + x \cos \alpha = 0, \\ 24 \cos \alpha - 2x \cos \alpha + x(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0. \end{cases}$$

解这方程组, 得

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, x = 8(\text{cm}).$$

根据题意可知断面面积的最大值一定存在, 并且在 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 12, 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\}$ 内取得.

通过计算得知 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时的函数值比 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $x = 8(\text{cm})$ 时的函数值小. 又函数在 D 内只有唯一

的驻点, 因此可以断定, 当 $x = 8(\text{cm})$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 就能使断面的面积最大.

6.6.2 条件极值 拉格朗日乘数法

上面所讨论的极值问题, 对于函数的自变量, 除了限制在函数的定义域内以外, 没有附加其它条件, 所以有时称为**无条件极值**或**自由极值**. 然而在许多实际问题中往往对自变量提

出一些约束条件. 例如, 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积问题. 设长方体三条

棱的长为 x, y, z , 则体积 $V = xyz$. 又因假定表面积为 a^2 , 所以自变量 x, y, z 还必须满足附加条件 $2(xy + yz + zx) = a^2$. 像这种对自变量有附加条件的极值称为**条件极值**. 对于有些实际问题, 可以把条件极值化为无条件极值, 然后利用 6.7.1 节中的方法加以解决. 例如上述问题可由条件 $2(xy + yz + zx) = a^2$, 将 z 表成 x, y 的函数

$$z = \frac{a^2 - 2xy}{2(x + y)}.$$

再把它代入 $V = xyz$ 中, 于是问题就化为求

$$V = \frac{xy}{2} \left(\frac{a^2 - 2xy}{x + y} \right)$$

但是在很多情况下, 将条件极值化为无条件极值并非这样简单. 下面介绍一种直接寻求条件极值的方法, 即拉格朗日乘数法.

一般的条件极值问题可表述为: 求函数

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

在条件

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (2)$$

下的极值. 这里 $f(x, y)$ 称为目标函数, $\varphi(x, y) = 0$ 称为**约束条件**.

首先我们讨论函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下取得极值的必要条件.

如果函数(1)在 (x_0, y_0) 取得所求的极值, 那么首先有

$$\varphi(x_0, y_0) = 0 \quad (3)$$

我们假定在 (x_0, y_0) 的某一邻域内 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均有连续的一阶偏导数, 而

$\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$. 由隐函数存在定理可知, 方程(2)确定一个具有连续导数的函数 $y = \phi(x)$, 将其代入(1)式, 则得到一个关于 x 的一元函数

$$z = f(x, \phi(x)). \quad (4)$$

这样函数(1)在 (x_0, y_0) 处取得极值, 也就是相当于函数(4)在 $x = x_0$ 处取得极值. 由一元可导函数取得极值的必要条件, 可知

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \quad (5)$$

对于方程(2), 用隐函数求导公式, 有

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = - \frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}.$$

把上式代入(5)式, 得

$$f_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) \frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} = 0. \quad (6)$$

(3)、(6) 两式就是目标函数 $z = f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下在点 (x_0, y_0) 取得极值的必要条件。

设 $\frac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} = -\lambda$, 则由 (6) 知 $\frac{f_x(x_0, y_0)}{\varphi_x(x_0, y_0)} = -\lambda$, 这样上述必要条件可改写为

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

若引进辅助函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

则不难看出, (7) 中前两式就是

$$L_x(x_0, y_0) = 0, \quad L_y(x_0, y_0) = 0.$$

函数 $L(x, y)$ 称为**拉格朗日函数**, 参数 λ 称为**拉格朗日乘子** (Lagrange multiplier) .

由以上讨论, 我们得到以下结论。

拉格朗日乘法法 要找函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点, 可以先作拉格朗日函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

其中 λ 为参数。求其对 x 与 y 的一阶偏导数, 并使之为零, 然后与方程 (2) 联立起来:

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

由这方程组解出 x, y 及 λ , 这样得到的 (x, y) 就是函数 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点。

这一方法还可以推广到自变量多于两个及约束条件多于一个的情形.例如, 要求目标函数

$$u = f(x, y, z, t)$$

在约束条件

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \quad \text{与} \quad \phi(x, y, z, t) = 0 \quad (9)$$

下的极值, 可以先作拉格朗日函数

$$L(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \lambda \varphi(x, y, z, t) + \mu \phi(x, y, z, t),$$

其中 λ, μ 均为参数, 求其所有的偏导数, 并使之为零, 然后与(9)中的两个方程联立起来求

解, 这样得出的 (x, y, z, t) 就是函数 $f(x, y, z, t)$ 在附加条件(9)下的可能极值点。

至于如何确定所求得的点是否极值点, 在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判断。

例 7 制作一个体积为 V 的无盖长方体, 问如何制造才能使用料最省。

解 设长方体的长、宽、高分别为 x, y, z , 则问题就是在条件

$$\varphi(x, y, z) = xyz - V = 0 \quad (10)$$

下, 求函数

$$S = xy + 2xz + 2yz \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$$

的最小值, 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xy + 2z(x + y) + \lambda(xyz - V),$$

求其对 x, y, z 的偏导数, 并使之为零, 得到

$$\begin{aligned} y + 2z + \lambda yz &= 0, \\ x + 2z + \lambda xz &= 0, \\ x + y + \lambda yz &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

再与(10)联立求解。

由(11)可得

$$x=y=2z$$

将此代入(10)式, 便得

$$x=y=2z=\sqrt[3]{2V},$$

这是唯一可能的极值点, 因为由问题本身可知最小值一定存在, 所以使长、宽、高比例为2:2:1时用料最省。

例 8 在空间直角坐标系的原点处, 有一单位正电荷, 设另一单位负电荷在旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线上移动。问负电荷位于何处时, 两电荷间的引力最大? 何时又最小?

解 由电学知识知, 当负电荷位于曲线上 (x, y, z) 处时, 两电荷间的引力为

$$f = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (k > 0 \text{ 为常数})。为计算方便, 设函数$$

$g(x, y, z) = \frac{k}{f} = x^2 + y^2 + z^2$ 为目标函数。这样 f 的最大(或最小)值就是 g 的最小(或最大)值。于是问题转化为求函数

$g(x, y, z)$ 在条件 $x^2 + y^2 - z = 0$ 及 $x + y + z - 1 = 0$ 之下的最小值和最大值。作拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 1),$$

求 F 的各阶偏导数, 并令其为零, 得

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ 2z - \lambda + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

解得两点

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right) \text{ 及 } M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right)$$

于是 $g(M_1) = 9 - 5\sqrt{3}$, $g(M_2) = 9 + 5\sqrt{3}$

即 $g(x, y, z)$ 在点 M_1 和 M_2 处分别取得最小值和最大值, 即当负电荷位于 M_1 和 M_2 时, 两电荷间的引力分别最大和最小。

作业 (极值) 2, 3, (最值) 4 (2) (4), (条件极值), 5, 7, 8

6.7 方向导数与梯度

在物理学中, 某一物理量随着它在空间或空间中的部分区域的分布情况不同, 所产生的物理现象也不尽相同。为了研究某一物理现象, 就必须了解产生这个物理现象的各种物理量的分布情况。例如要预报某一地区在某一时间段内的气候, 就必须掌握附近各地区的气压、气温等分布情况以及该时间段内的变化规律。要研究电场的变化。就必须知道电位, 电场的强度等分布情况及变化规律。我们把分布着某种物理量的空间或局部空间称为该物理量的**场** (field)。物理量为数量的场称为**数量场** (data field), 物理量为向量的场称为**向量场** (vector field)。例如密度、温度、电位形成的场都是数量场; 速度、电场强度、力形成的场则是向量场。如果场中的物理量仅与位置有关, 而不随着时间变化, 则称这种场为**稳定场**, 否则称为不稳定场。

在稳定的数量场中, 物理量 u 的分布是点 P 的数量值函数 $u = f(P)$, 例如场是一空间区域, 则可用三元函数 $u = f(x, y, z)$ 表示; 场位于一平面区域, 则可用二元函数 $z = f(x, y)$ 描述。

本节将介绍稳定的数量场的两个重要概念—方向导数与梯度

6.7.1 方向导数的概念

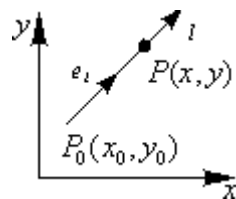
我们知道无论导数还是偏导数, 都是函数对自变量的变化率。本节在讨论一种特殊的变化率, 即方向导数。如何再从方向导数引出梯度的概念, 它在应用中非常重要。

偏导数反映的是函数沿坐标轴方向的变化率, 但在许多物理问题中, 需要考虑函数在某一点沿某一方向或任意方向的变化率问题。例如, 在热传导问题中, 需研究温度在各个方向上的变化率; 要进行气象预报, 就要确定大气温度、气压沿着某些方向的变化率。

设 l 是 xOy 平面上以 $P_0(x_0, y_0)$ 为始点的一条射线, 它的方向用向量 l 表示, $e_l = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 是与 l 同方向的单位向量 (图 6-21)。

射线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha, \\ y = y_0 + t \cos \beta. \end{cases} \quad (t \geq 0)$$



设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内有定义,

图 6-21

$P(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta)$ 为 l 上另一点, 且 $P \in U(P_0)$. 如果函数增量 $f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)$ 与 P 到 P_0 的距离 $|PP_0| = t$ 的比值。

$$\frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

当 P 沿着 l 趋于 P_0 (即 $t \rightarrow 0^+$) 时的极限存在, 则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 沿方向 l

的方向导数 (directional derivative), 记作 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\sim (x_0, y_0)}$, 即

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\sim (x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t} \quad (1)$$

显然, 方向导数也可由下式表示

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\sim (x_0, y_0)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}, \quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

从方向导数的定义可知, 方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\sim (x_0, y_0)}$ 就是函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿 l 方向

的变化率。

需要注意的是, 方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\sim}$ 与偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 是两个不同的概念。偏导数

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0)$$

分别是函数在某点沿平行于坐标轴的直线的变化率，其中 Δx ， Δy 可正可负，而方向导数定义中，则要求 $t \geq 0$ ，即方向导数是沿一个方向的变化率。

因而函数在某点即使方向导数存在，也不能保证偏导数一定存在。例如对于圆锥面

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，在顶点 $O(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数都存在，且有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\sim (x_0, y_0)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(0 + \Delta x)^2 + (0 + \Delta y)^2} - 0}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{\rho} = 1$$

但在 $(0, 0)$ 点的两个偏导数都不存在，如

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(0 + \Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

故 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)}$ 不存在。

关于方向导数的存在及计算，我们有以下定理。

定理 如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微，那么函数在该点沿任一方向 l 的方向导数存在，且有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\sim (x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta, \quad (2)$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 是方向 l 的方向余弦。

证 由假设， $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微，故有

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}). \end{aligned}$$

但点 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 在以 (x_0, y_0) 为始点的射线 l 上时，应有

$\Delta x = t \cos \alpha, \Delta y = t \cos \beta, \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = t$. 所以

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta \end{aligned}$$

这就证明了方向导数存在，且其值为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\sim (x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta.$$

类似地, 如果函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 可微, 那么函数在该点沿着方向

$\mathbf{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 的方向导数为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = f_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + f_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma$$

例 1 求函数 $z = ye^{2x}$ 在点 $P(0,1)$ 处沿着从点 $P(0,1)$ 到点 $Q(-1,2)$ 的方向的方向导数。

$$\text{解} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(0,1)} = 2ye^{2x} \Big|_{(0,1)} = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(0,1)} = e^{2x} \Big|_{(0,1)} = 1$$

方向 l 即向量 $\overrightarrow{PQ} = \{-1, 1\}$ 的方向, 其方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

于是

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(1,0)} = 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}。$$

例 2 设曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 \mathbf{n} , 求函数

$u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 \mathbf{n} 的方向导数。

解 令 $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6$, 则 $\tilde{\mathbf{n}} = \{4x, 6y, 2z\} \Big|_{(1,1,1)} = \{4, 6, 2\}$, 故

\mathbf{n} 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}},$$

u 在点 P 的偏导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P = \frac{1}{z} \frac{6x}{\sqrt{6x^2 + 8y^2}} \Big|_P = \frac{6}{\sqrt{14}}, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P = \frac{1}{z} \frac{8y}{\sqrt{6x^2 + 8y^2}} \Big|_P = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P = \frac{-1}{z^2} \sqrt{6x^2 + 8y^2} \Big|_P = -\sqrt{14}。$$

所以

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_P &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P \cos \gamma \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}} \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}} \frac{3}{\sqrt{14}} - \sqrt{14} \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7} \end{aligned}$$

6.7.2 梯度、向量值函数与场

1. 梯度

多元函数在一点的方向导数依赖于方向、

一般来说,沿不同的方向其方向导数不尽相同。这就很自然提出一个问题:沿哪一个方向其方向导数最大?其最大值是多少?为解决这一问题,我们引入梯度的概念。

在二元函数的情形,设函数 $f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数,则对于每一点 $P_0(x_0, y_0) \in D$, 都可确定一个向量

$$f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j},$$

这向量称为函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的梯度 (gradient), 记作 $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$, 即

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}.$$

如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微, $\mathbf{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 是与方向 l 同向的单位向量,

则方向导数可写成梯度与 \mathbf{e}_l 的数量积形式

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} &= f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta \\ &= \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{e}_l \end{aligned}$$

由于 \mathbf{e}_l 是单位向量, 故又有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = |\mathbf{grad} f(x_0, y_0)| |\mathbf{e}_l| \cos \theta = |\mathbf{grad} f(x_0, y_0)| \cos \theta$$

其中 $\theta = \angle(\mathbf{grad} f(x_0, y_0), \mathbf{e}_l)$.

这一关系式表明了函数在一点梯度与函数在这点的方向导数间的关系.特别, 当向量 \mathbf{e}_l

与 $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$ 的夹角 $\theta = 0$, 即沿梯度方向时, 方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)}$ 取得最大值, 这个最

大值就是梯度的模 $|\mathbf{grad} f(x_0, y_0)|$. 这就是说,

函数在一点的梯度是个向量, 它的方向是函数在这点的方向导数取最大值的方向, 它的模就等于方向导数的最大值.

梯度的概念也可以推广到二元以上的多元函数. 如三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点

$P(x_0, y_0, z_0)$ 具有连续的偏导数, 则向量

$$f_x(x_0, y_0, z_0)\tilde{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\tilde{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\tilde{k}$$

即为函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的梯度 $\text{grad}f(x_0, y_0, z_0)$ 。

例 3 求函数 $u = 3x^2 + 2y^2 - z^2$ 在点 $P(1, 2, -1)$ 处分别沿什么方向时方向导数取得最大值和最小值？并求出其最大值和最小值。

解 该函数在点 P 处的梯度

$$\text{grad}u|_P = (6x\tilde{i} + 4y\tilde{j} - 2z\tilde{k})|_P = 6\tilde{i} + 8\tilde{j} + 2\tilde{k}$$

由梯度的定义可知，函数沿向量 $(6, 8, 2)$ 的方向，方向导数取得最大值：

$$|\text{grad}u|_P = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2^2} = 2\sqrt{26}$$

而沿梯度 $\text{grad}u|_P$ 的反方向 $(-6, -8, -2)$ ，方向导数取得最小值：

$$-|\text{grad}u|_P = -2\sqrt{26}$$

例 4 由物理学知，点电荷 q 在点 (x, y, z) 处的电位为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

求 $\text{grad}U$

$$\text{解} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{x}{r^3},$$

$$\text{同理} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{z}{r^3}$$

$$\text{故} \quad \text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\tilde{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\tilde{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\tilde{k}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon r^3}(x\tilde{i} + y\tilde{j} + z\tilde{k}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^3}\tilde{r}$$

其中 $\tilde{r} = x\tilde{i} + y\tilde{j} + z\tilde{k}$ ，而 $\frac{q}{4\pi\epsilon r^3}\tilde{r}$ 正是点电荷 q 在点 (x, y, z) 处的电场强度 \tilde{E} ，于是 \tilde{E} 和电位 U 之间的关系是

$$\tilde{E} = -\text{grad}U$$

这说明，电位在电场强度相反的方向增加得最快。

前面已经指出，在稳定的数量场中，物理量的分布，可以用数量值函数 $u = f(P)$ 表示。

在对数量场的研究中，我们经常需要考察在场中具有相同物理量的点，即使函数 $u = f(P)$ 取

相同数值的各点

$$f(P) = C$$

其中 C 为常数。例如，在一个空间的数量场 $u = f(x, y, z)$ 中， $f(x, y, z) = C$ 表示一个曲面，其上各点的函数值均相等，我们称该曲面为**等值面**，如气象学中的等温面、等压面，电学中的等位面等。而对于平面上的数量场 $z = f(x, y)$ ，则称曲线 $f(x, y) = C$ 为**等值线**，如地图中的等高线等。

为了进一步说明梯度的意义，我们结合等值面（线）从几何上来看梯度的方向。

由于等值线 $f(x, y) = C$ 上任一点 $P(x, y)$ 的法线斜率为

$$K_{\text{法}} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{-\frac{f_x}{f_y}} = \frac{f_y}{f_x}$$

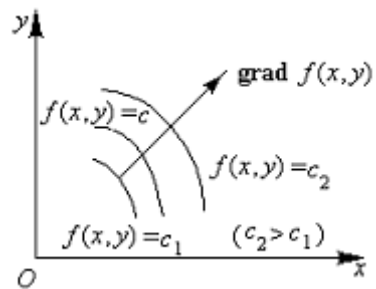
可见法线与向量 (f_x, f_y) 平行。因而梯度 $\text{grad } f(x, y) = (f_x, f_y)$ 就是等值线上点 P 处的法

向量。所以 $z = f(x, y)$ 在点 P 处的梯度方向与过点 P 的

等值线在该点的法线方向相同，并且从数值较低的等值线指向数值较高的等值线，如图 6-22 所示。

例 5 某处地下埋有物品 E ，以该处为坐标原点建立平面直角坐标系。已知 E 在大气中散发着特有气味，设气味的浓度在地表 xOy 平面上的分布为

$$v = e^{-k(x^2+y^2)} \quad (k \text{ 为正的常数})$$



一条警犬在点 (x_0, y_0) 处嗅到气味后，沿着气味最浓的方

图 6-22

向搜索，求警犬搜索的路线。

解 设警犬搜索路线为 $y = y(x)$ ，在点 (x, y) 处前进的方向为曲线 $y = y(x)$ 的切向量

$\underline{s} = \{1, \frac{dy}{dx}\}$ 方向。而气味最浓的方向是 v 的梯度方向。解得

$$\underline{\text{grad}} v = e^{-k(x^2+y^2)} (-k)(2x \underline{i} + 4y \underline{j})$$

因为 $\underline{s} // \underline{\text{grad}} v$ ，于是

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{4y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

得搜索路线 $y = \frac{y_0}{x_0^2} x^2 \quad (x_0 \neq 0)$

若 $x_0 = 0$ ，搜索路线为 $x = 0$ 。

本题也可按下列方法求解：

气味的等值线为 $x^2 + 2y^2 = C$ ，两边求导，得等值线满足的微分方程

$$x + 2yy' = 0, \text{ 即 } y' = -\frac{x}{2y}$$

由于警犬沿气味的梯度方向搜索，所以搜寻曲线与气味等值线正交，即搜寻曲线的切线的斜率与等值线的斜率为负倒数关系。故搜寻曲线满足初值问题

$$\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}。$$

（以下略）

作业 （方向导数）2，4，（梯度）5，8

第七章 多元数量值函数积分学.....	1
7.1 多元数量值函数积分的概念与性质.....	1
7.2 二重积分的计算.....	4
7.3 三重积分的计算.....	14
7.4 数量值函数的曲线与曲面积分的计算.....	21
7.5 数量值函数积分应用举例.....	29

第七章 多元数量值函数积分学

本章将一元函数微分学，推广到多元函数上来。

7.1 多元数量值函数积分的概念与性质

7.1.1 引例 非均匀分布的几何形体的质量问题

例 1 平面薄板的质量

设有一平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D ，它在点 (x, y) 处的面密度为 $\mu(x, y)$ ，这里 $\mu(x, y) > 0$ 且在 D 上连续. 现在要计算该薄片的质量 M .

将区域 D 任意划分为 n 个小区间 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. 同时这个小闭区域的面积也记作 $\Delta\sigma_i$ ，由于 $\mu(x, y)$ 连续，所以薄板在每个小区间上的质量可以看作是均匀分布的。在每个小区间 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) ，则该小区间上的质量的近似值为 $\Delta m_i \approx \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。

从而整个薄板的质量 m 近似值为

$$m \approx \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

记 $d = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta\sigma_i \text{ 的直径} \}$ 。所谓 $\Delta\sigma_i$ 的直径指的是 $\Delta\sigma_i$ 上任意两点间距离的最大值。当

$d \rightarrow 0$ 时。每个小 $\Delta\sigma_i$ 的面积将趋于零，并且小区间的数目无限增大，这样上述近似值就无限接近薄板的质量，因此可把上面和式的极限规定为该薄板的质量，即

$$M = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

类似地，使用同样的方法可以讨论其他几何形体上的物体的质量问题。它们都可以归结为上面形式的极限，这一类型的极限，在物理、力学、几何和工程技术中有广泛的应用。

7.1.2 多元数量值函数积分的概念

定义 设 Ω 是可度量（即可求长度、面积或体积）的有界闭几何形体， $f(M)$ 是定义在 Ω

上的数量值函数。将 Ω 任意划分为 n 个小几何形体 $\Delta\Omega_i$ ($i=1,2,\dots,n$)， $\Delta\Omega_i$ 同时表示其度

量。在 $\Delta\Omega_i$ 上任取一点 M_i ，作乘积 $f(M_i) \Delta\Omega_i$ ，并作和式 $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\Omega_i$ ，记

$d = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta\Omega_i \text{ 的直径} \}$ ，如果不论对 Ω 怎样分划，也不论点 M_i 在 $\Delta\Omega_i$ 上怎样选取，只要

$d \rightarrow 0$ ，上述和式都趋于同一常数 I ，则称 $f(M)$ 在 Ω 上可积，并把 I 称为函数 $f(M)$ 在 Ω 的积分，记做 $\int_{\Omega} f(M) d\Omega$ ，即

$$\int_{\Omega} f(M) d\Omega = I = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\Omega_i$$

其中 $f(M)$ 叫做被积函数， Ω 叫做积分区域， $f(M) d\Omega$ 叫做被积表达式， \int 为积分号，

$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\Omega_i$ 叫做积分和。

可积的必要条件 若函数 $f(M)$ 在几何形体 Ω 上可积，则 $f(M)$ 在 Ω 上闭有界。

可积的充分条件 若函数 $f(M)$ 在有界闭几何形体 Ω 上连续，则 $f(M)$ 在 Ω 上必可积。

7.1.3 多元数量值函数积分的性质

性质 1 当 $f(M) \equiv 1$ 时，它在 Ω 上的积分等于 Ω 的度量，即

$$\int_{\Omega} 1 d\Omega = \int_{\Omega} d\Omega = \Omega.$$

性质 2 线性性质 设 α 、 β 为常数，则

$$\int_{\Omega} [\alpha f(M) + \beta g(M)] d\Omega = \alpha \int_{\Omega} f(M) d\Omega + \beta \int_{\Omega} g(M) d\Omega.$$

性质 3 积分区域的可加性 若将 Ω 分为两部分 Ω_1 ， Ω_2 ，则

$$\int_{\Omega} f(M) d\Omega = \int_{\Omega_1} f(M) d\Omega + \int_{\Omega_2} f(M) d\Omega$$

性质 4 比较性质 如果在 Ω 上， $f(M) \leq g(M)$ ，则

$$\int_{\Omega} f(M) d\Omega \leq \int_{\Omega} g(M) d\Omega$$

由此显然有

$$|\int_{\Omega} f(M) d\Omega| \leq \int_{\Omega} |f(M)| d\Omega$$

性质 5 估值性质 设 M, m 分别是 $f(M)$ 在闭几何形体 Ω 上的最大值和最小值，则

$$m\Omega \leq \int_{\Omega} f(M) d\Omega \leq M\Omega$$

性质 6 积分中值定理 设函数 $f(M)$ 在闭几何形体 Ω 上连续, 则在 Ω 上至少存在一点 M_0 , 使得

$$\int_{\Omega} f(M) d\Omega = f(M_0) \Omega$$

7.1.4 多元数量值函数积分的分类

按几何形体 Ω 的类型, 多元数量值函数积分可以分为以下四种类型:

1. 二重积分

当几何形体 Ω 为 xOy 平面上的区域 D 时, 则 f 就是定义在 D 上的二元函数 $f(x, y)$, $\Delta\Omega_i$

就是小区域的面积 $\Delta\sigma_i$, 这时称 $\int_{\Omega} f(M) d\Omega$ 为函数 $f(x, y)$ 在平面区域 D 上的二重积分, 记

$$\text{做 } \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ 即 } \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \quad .$$

例 2 试估计二重积分 $I = \iint_D \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} d\sigma$ 的取值范围, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 10\}$ 。

$|x| + |y| \leq 10$ 。

解 由于被积函数连续, 由积分中值定理, 存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使

$$I = \iint_D \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} d\sigma = \frac{1}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta} \cdot S(D)$$

这里 $S(D)$ 表示区域 D 的面积, 易知 $S(D)=200$ 。又

$$\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta} \leq \frac{1}{100}$$

故 $\frac{200}{102} \leq I \leq \frac{200}{100}$, 即 $\frac{100}{51} \leq I \leq 2$

2. 三重积分

当几何形体 Ω 为空间区域 V 时, 则 $f(\Omega)$ 是 V 上的三元函数 $f(x, y, z)$, $\Delta\Omega_i$ 就是小立体

区域的体积 ΔV_i , 这时称 $\int_{\Omega} f(M) d\Omega$ 为函数 $f(x, y, z)$ 在空间区域 V 上的三重积分, 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv, \text{ 即}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i \quad (1)$$

其中 dv 叫做体积微元。

3. 对弧长的曲线积分

当几何形体 Ω 为平面或空间曲线弧段 L 时, 则 $f(\Omega)$ 是定义在 L 上的二元或三元函数 $f(x, y)$ 或 $f(x, y, z)$, $\Delta\Omega_i$ 是小弧段的弧长 Δs_i , 这时称 $\int_{\Omega} f(M)d\Omega$ 为函数 $f(x, y)$ 或 $f(x, y, z)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分, 或称第一型的曲线积分, 记作 $\int_L f(x, y)ds$ 或 $\int_{\Gamma} f(x, y, z)ds$, 即

$$\int_L f(x, y)ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

或

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z)ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$$

这里 ds 是弧长微元。

4. 对面积的曲面积分

当几何形体 Ω 为空间曲面块 S 时, 则 $f(\Omega)$ 是定义在 S 上的三元函数 $f(x, y, z)$, $\Delta\Omega_i$ 是小曲面块的面积 ΔS_i , 这时称 $\int_{\Omega} f(M)d\Omega$ 为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 S 上对面积的曲面积分, 或称第一型的曲面积分, 记作 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS$, 即

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

这里 dS 为曲面的面积微元。

例 3 已知曲面块 S 上带静电, 电荷分布面密度 $\mu = \mu(x, y, z)$, 按照与求几何形体质量完全类似的方法, 可知 S 上静电总量为

$$q = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

即

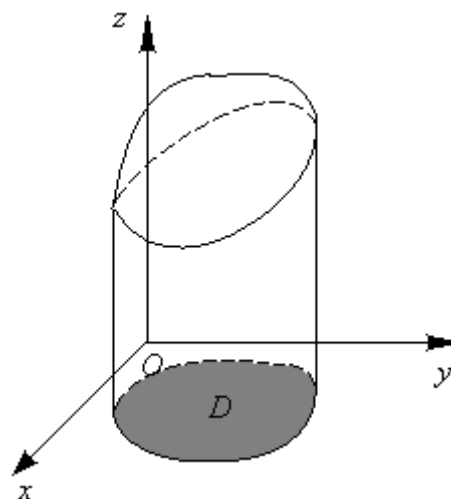
$$q = \iint_{\Sigma} \mu(x, y, z)dS$$

作业 2 (1), 5, 6, 8, 10

7. 2 二重积分的计算

7. 2. 1 二重积分的几何意义

设有一立体, 它的底是 xOy 面上的闭区域 D , 它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面, 它的顶是曲面 $z = f(x, y)$, 这里 $f(x, y) \geq 0$ 且在 D 上连续 (图 7-1). 这种立体叫做曲顶柱体. 现在我们来讨论如何定义并计算上述曲顶柱体的体积 V .



在二重积分定义中的 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 是以 $\Delta\sigma_i$ 为底以 $f(\xi_i, \eta_i)$ 为高的平顶柱体的体积, 当

$\Delta\sigma_i$ 的

图 7-1

直径很小时, $f(x, y)$ 在 $\Delta\sigma_i$ 上的变化很小, 因此可将以 $\Delta\sigma_i$ 为底以 $z=f(x, y)$ 为顶的小曲顶柱

体近似地看作平顶柱体, 其体积的近似值可取为 $f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$, 从而积分和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$

就是整个曲顶柱体的体积的近似值. 显然 $d \rightarrow 0$ 时, 积分和以曲顶柱体的体积为极限, 即二

重积分等于曲顶柱体的体积. 这就是二重积分的几何意义. 如果 $f(x) \leq 0$, 则曲顶柱体就

在 xOy 平面的下方, 二重积分的值是负的. 因而曲顶柱体的体积就是二重积分的负值. 如

果 $f(x, y)$ 在 D 的某区域上为正, 在某些区域上为负, 则二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 就等于这些区

域上曲顶柱体体积的代数和.

7. 2. 2 直角坐标系下二重积分的计算

当积分存在时, 我们以平行线划分区域, 这时除边界的小区域外, 区域都是矩形, 其面积元素等于 $\Delta\sigma = \Delta x \cdot \Delta y$, 因而在直角坐标系下常把微元 $d\sigma = dxdy$, 而把二重积分记为

$$\iint_D f(x, y) dxdy.$$

下面用几何观点来讨论二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的计算问题. 在讨论中我们假定

$$f(x, y) \geq 0.$$

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b$$

来表示 (图 7-2), 其中函数 $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续.

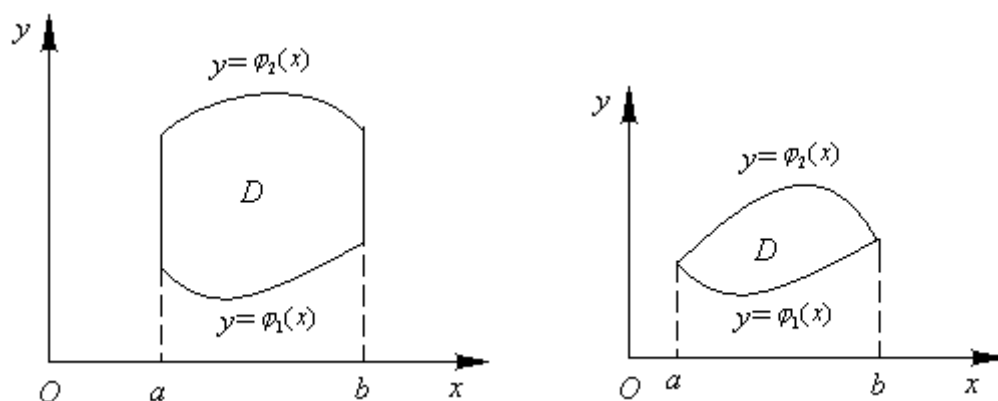


图 7-2

该类型的区域称为 X-型区域。

按照二重积分的几何意义, 二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的值等于以 D 为底, 以曲面

$z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积 (图 7-3). 下面我们应用第三章中计算 “平行截面面积已知的立体的体积” 的方法, 来计算这个曲顶柱体的体积.

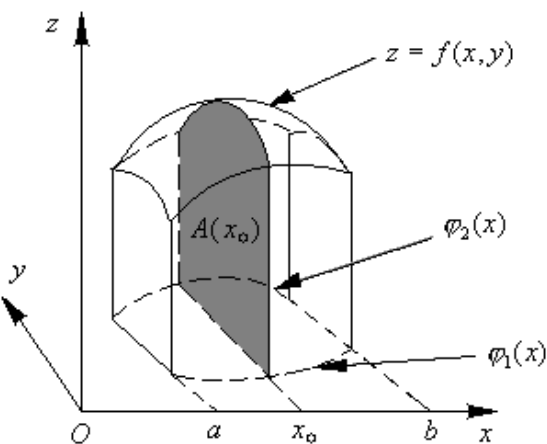
先计算截面面积. 为此, 在区间 $[a, b]$ 上任取一点 x_0 , 作平行于 yOz 面的平面 $x = x_0$. 这平面截曲顶柱体所得的截面是一个以区间

$[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底、曲线 $z = f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形 (图 7-3 中阴影部分), 所以这截面的面积为

$$A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

一般地, 过区间 $[a, b]$ 上任一点 x 且平行于 yOz 面的平面截面曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$



于是, 应用计算平行截面面积为已知的立体体积的方法, 得曲顶柱体体积为

图 7-3

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

这个体积也就是所求二重积分的值, 从而有等式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (1)$$

上式右端的积分叫做先对 y 、后对 x 的二次积分. 就是说, 先把 x 看作常数, 把 $f(x, y)$ 只看作 y 的函数, 并对 y 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分; 然后把算得的结果 (是 x 的函数) 在对 x 计算在区间 $[a, b]$ 上定积分. 这个先对 y 再对 x 的二次积分也常记作

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

因此 (1) 式也写成

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy, \quad (1')$$

这就是把二重积分化为先对 x 再对 y 的二次积分的公式.

公式 (1) 对 $f(x, y)$ 的符号为任何都成立.

类似地, 如果积分区域 D 可以用不等式

$$\phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y), \quad c \leq y \leq d$$

来表示 (图 7-4), 其中函数 $\phi_1(y)$ 、 $\phi_2(y)$ 在区间 $[c, d]$ 上连续, 称为 Y-型区域. 那么就

有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy, \quad (2)$$

上式右端的积分叫做先对 x 、后对 y 的二次积分，这个积分也常记作

$$\int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx,$$

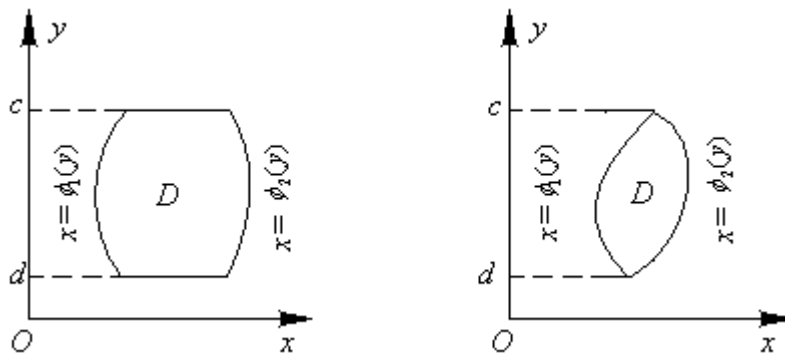


图 7-4

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx, \quad (2')$$

这就是把二重积分化为先对 x 、后对 y 的二次积分的公式。

使用公式 (1)， D 必须是 X—型区域，使用公式 (2) D 必须是 Y—型区域。当积分区域不是 X—型区域也不是 Y—型区域时，我们可以通过划分，将其转化为几个 X—型区域或 Y—型区域，然后利用积分区间的可加性，将在它们上的积分相加即得原积分。比如如图 7-5 所示的区域

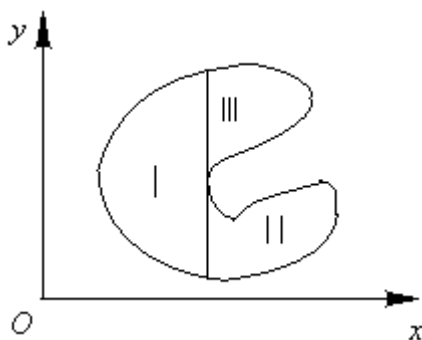


图 7-5

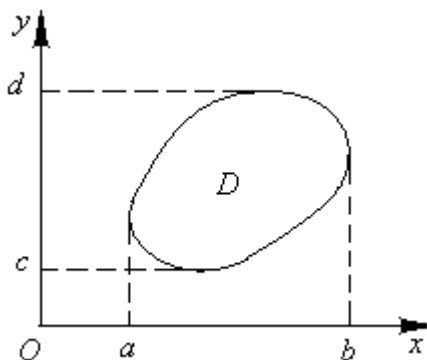


图 7-6

如果积分区域即是 X—型的，可用不等式 $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), a \leq x \leq b$ 表示，又是 Y—

型的，可用不等式 $\phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y), c \leq y \leq d$ 表示（图 7-6），则由公式 (1') 及 (2') 可得

$$\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx \quad (3)$$

例 1 计算 $\iint_D xy^2 d\sigma$, 其中 D 是由直线

$y=1$ 、 $x=0$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

解 积分域 D 的图形如图 7-7 所示, 它显然既是 y 型区域, 也是 x 型区域

若将 D 看作 x 型区域, 则 D 可以表示为:

$$D: x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$$

于是先对 y 积分, 再对 x 积分, 便得

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 d\sigma &= \int_0^1 dx \int_x^1 xy^2 dy \\ &= \int_0^1 x \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_x^1 dx = \int_0^1 x \left(\frac{1}{3} - \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中 D 由双曲线 $xy=1$ 及直

线 $y=x$, $x=2$ 围成.

解 积分区域如图 7-8 所示, 它显然是 x 型的, 则 D 可以表示为

$$D: \frac{1}{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2.$$

于是, 先对 y 积分再对 x 积分, 便得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx \\ &= \int_1^2 (x^3 - x) dx = 2\frac{1}{4} \end{aligned}$$

本题如果将积分区域看作 y 型区域, 则要计算两个积分相对比较麻烦一些。

例 3 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 是由直线

$y=x$ 与抛物线 $y^2=x$ 所围成的区域.

解 积分区域 D 为

$$D: y^2 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1$$

于是先对 x 积分后对 y 积分, 便得

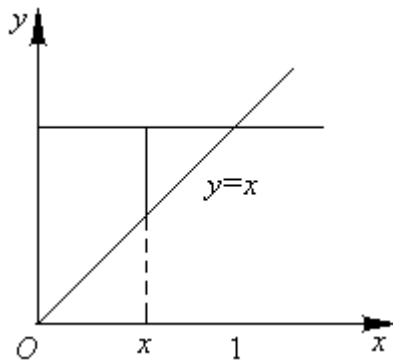


图 7-7

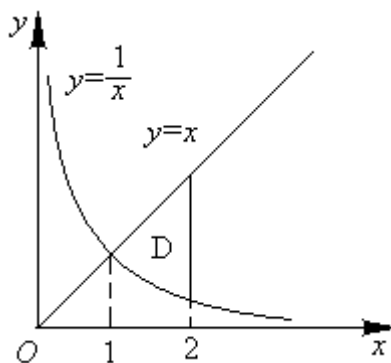


图 7-8

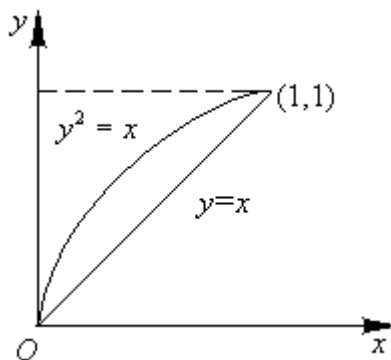


图 7-9

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx \\&= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} [x]_{y^2}^y dy = \int_0^1 (1-y) \sin y dy = 1 - \sin 1\end{aligned}$$

如果使用 x 型区域则无法积分.

例 4 求两个底圆半径都等于 R 的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解 设这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{及} \quad x^2 + z^2 = R^2$$

利用对称性, 只需算出第一卦限部分的体积 V , 然后乘以 8.

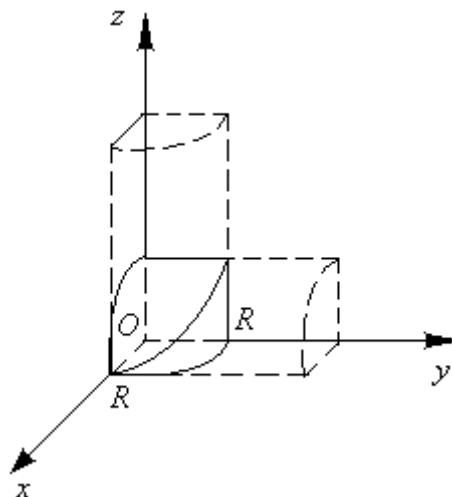


图 7-10

在第一卦限, 立体可以看作以柱面 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ 为曲顶, 积分区域为

$$D: \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \leq x \leq R\},$$

于是

$$\begin{aligned}V_1 &= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} d\sigma = \int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx \\&= \int_0^R \left[\sqrt{R^2 - x^2} y \right]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3\end{aligned}$$

从而所求立体的体积为

$$V = 8V_1 = \frac{16}{3} R^3.$$

7.2.3 极坐标系下二重积分的计算

设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 现将 D 用 $\rho = \text{常数}$ 的一族同心圆及 $\theta = \text{常数}$ 的一族

发自原点的射线进行分划 (如图 7-11), 此时

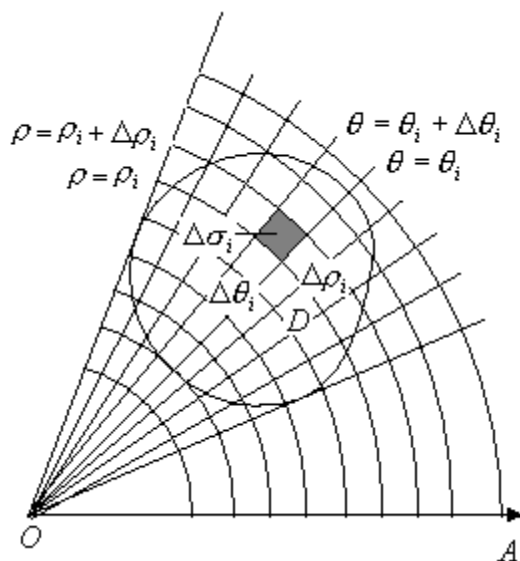
D 被分割成 n 个小区间 $\Delta\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$, 将

$\Delta\sigma_i$ 的面积也记为 $\Delta\sigma_i$, 于是除了包含边界点

的一些小区域外, 小区域的面积 $\Delta\sigma_i$ 可计算如

下:

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2} (\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \cdot \Delta\theta_i - \frac{1}{2} \rho_i^2 \cdot \Delta\theta_i$$



$$= \frac{1}{2}(2\rho_i + \Delta\rho_i)\Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i = \frac{\rho_i + (\rho_i + \Delta\rho_i)}{2} \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i$$

图 7-11

$$= \bar{\rho}_i \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i,$$

其中 $\bar{\rho}_i$ 表示相邻两圆弧的半径的平均值。在这小区域内取圆周 $\rho = \bar{\rho}_i$ 上的一点 $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$,

该点的直角坐标设为 ξ_i, η_i , 则由直角坐标与极坐标之间的关系有

$$\xi_i = \bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i, \eta_i = \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i, \text{ 于是}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i, \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i) \bar{\rho}_i \Delta\rho_i \Delta\theta_i,$$

$$\text{即} \quad \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

在直角坐标系下为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

极坐标系下的二重积分, 同样可以化为二次积分来计算

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(\theta) \leq \rho \leq \varphi_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$$

来表示 (图 7-11), 其中函数 $\varphi_1(\theta)$ 、 $\varphi_2(\theta)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续

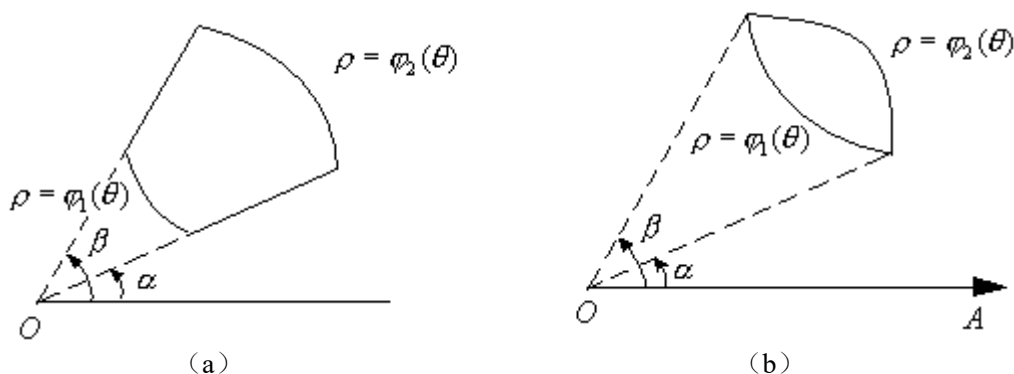


图 7-11

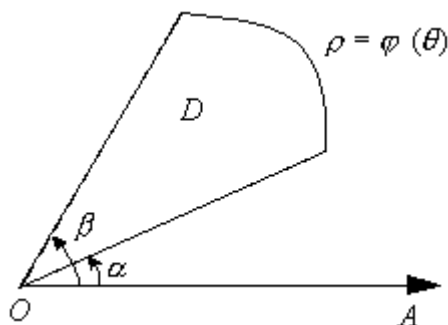
则类似于在直角坐标系下的讨论, 可得

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \quad (5)$$

如果积分区域 D 是图 7-12 所示的曲边梯形, 你们可以把它看作图 7-10 (a) 中当

$\varphi_1(\theta) \equiv 0, \varphi_2(\theta) = \varphi(\theta)$ 时的特例. 这时闭区域 D 可

以用不等式



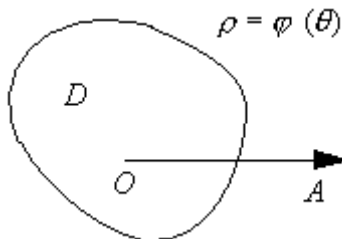
$$0 \leq \rho \leq \varphi(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$$

来表示, 从而积分变为

图 7-12

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

如果积分区域 D 如图 7-13 所示, 极点在 D 的内部, 那么可以把它看作图 7-12 中当 $\alpha = 0$ 、 $\beta = 2\pi$ 时的特例。这时闭区域 D 可以用不等式



$0 \leq \rho \leq \varphi(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 来表示, 这时积分公式变为

图 7-13

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

在极坐标中, 面积元素 $d\sigma = \rho d\rho d\theta$, 上式成为 $\sigma = \iint_D \rho d\rho d\theta$

如果闭区域 D 如图 7-10 (a) 所示, 则由公式 (5) 有

$$\sigma = \iint_D \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi_2^2(\theta) - \varphi_1^2(\theta)] d\theta$$

特别地, 如果闭区域 D 如图 7-12 所示, 则 $\sigma = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta) d\theta$

一般地, 当积分区域 D 是圆或圆的一部分, 且被积函数特别简单或被积函数能写成 $z = f(x^2 + y^2)$ 的形式时, 二重积分 $\iint_D f(x^2 + y^2) dx dy$ 可以采用极坐标来计算.

例 5 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, 其中 D 是由中心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域.

解, 这时 D 可以表示为 $0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

由公式 (4) 及 (5) 有

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^a d\theta = \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi (1 - e^{-a^2}) \end{aligned}$$

下面我们利用上述结果来计算工程上常用的反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 。

设

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2R^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}.$$

显然 $D_1 \subset S \subset D_2$ (图 7-14). 由于 $e^{-x^2-y^2} > 0$, 从而在这些闭区域上的二重积分之间有不等式

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

因为
$$\iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy$$

$$= \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2,$$

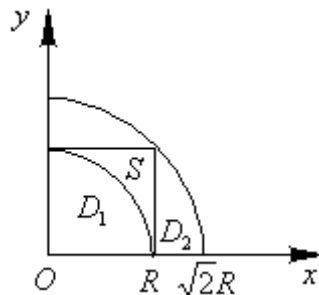


图 7-14

又应用上面已得的结果有

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}), \quad \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

于是上面的不等式可写成

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$$

令 $R \rightarrow +\infty$, 上式两端趋于同一极限 $\frac{\pi}{4}$, 从而
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 6 在一个形状为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 的容器中, 装有 $2\pi \text{ cm}^3$ 的液体, 今再倒进

$8\pi \text{ cm}^3$ 的液体, 问液面升高多少 cm?

解 设容器的高为 h , 则容器的容量可看作由 $z=h$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积, 故容器的容量为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [h - (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{h}} (h - \rho^2) \rho d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} h \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^{\sqrt{h}} \\ &= \frac{1}{2} \pi h^2. \end{aligned}$$

将 $v = 2\pi$ 与 $V = 10\pi$ 代入上式, 得 $h_1 = 2$ 与 $h_2 = 2\sqrt{5}$. 因此液面升高为 $h_2 - h_1 = 2\sqrt{5} - 2$ (cm).

7.2.4 二重积分的换元法

定理 设 $f(x, y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续, 变换

$$T: x=x(u, v), y=y(u, v) \quad (7)$$

将 uOv 平面上的闭区域 D' 变为 xOy 平面上的 D , 且满足

- (1) $x=x(u, v), y=y(u, v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数;
- (2) 在 D' 上雅克比式

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0;$$

- (3) 变换 $T: D' \rightarrow D$ 是一对一的,

则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] |J(u, v)| du dv. \quad (8)$$

公式 (8) 称为二重积分的换元公式.

例 7 计算 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$, 其中 D 是由 x 轴、 y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域.

解 令 $u = y - x, v = y + x$, 则 $x = \frac{v-u}{2}, y = \frac{v+u}{2}$.

作变换 $x = \frac{v-u}{2}, y = \frac{v+u}{2}$, 则 xOy 平面上的闭区域 D 和它在 uOv 平面上的对应区域

D' 如图 9-25 所示

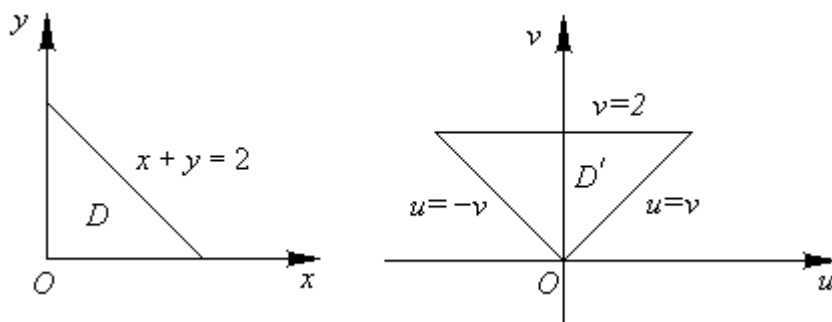


图 9-25

雅克比式为

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

利用公式 (8)

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy = \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^2 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 (e - e^{-1}) v dv = e - e^{-1}.
\end{aligned}$$

例 9 计算 $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, 其中 D 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的闭区域.

解 作广义极坐标变换

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \theta, \\ y = b\rho \sin \theta, \end{cases}$$

其中 $a > 0, b > 0, \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. 在这变换下, 与 D 对应的闭区域为 $D' = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 雅克比式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = ab\rho.$$

J 在 D' 内仅当 $\rho = 0$ 处为零, 故换元公式仍成立, 从而有

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = \iint_{D'} \sqrt{1 - \rho^2} ab\rho d\rho d\theta = \frac{2}{3}\pi ab.$$

作业 3(1)(3)(5), 4(2)(4), 5(1)(3), 6(1)(3)(5), 9(2)(4), 10(1)

7.3 三重积分的计算

7.3.1 直角坐标系下三重积分的计算

如图 7-15, 区域 Ω 可以表示为 $\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$

其中

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

为 X -型区域, 称 Ω 为 XY -型区域

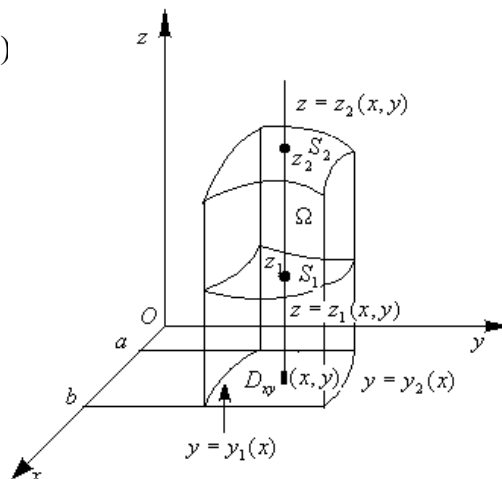
我们将 x, y 看作定值, 将 $f(x, y, z)$ 只看

作 z 的函数, 在区间 $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ 上对 z

积分. 积分的结果是 x, y 的函数, 记为

$F(x, y)$, 即

$$F(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$



然后计算 $F(x, y)$ 闭区域 D_{xy} 上的二重积分

图 7-15

$$\iint_{D_{xy}} F(x, y) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma$$

再由二重积分的计算得到

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz. \quad (2)$$

公式 (2) 把三重积分化为线对 z 、次对 y 、最后对 x 的三重积分. 如果闭区域 Ω 不是 XY-型区域, 则可以将它划分成几个 XY-型区域. 然后利用积分的可加性, 进行计算.

例 1 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 为

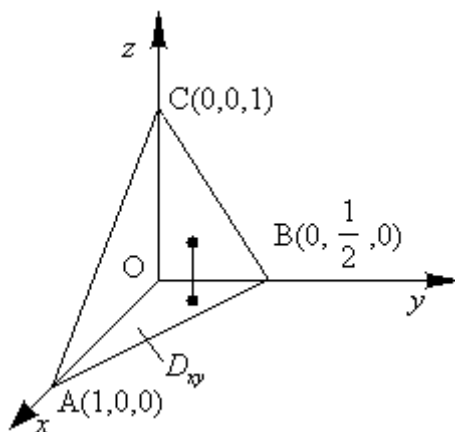


图 7-16

三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域.

解 作闭区域 Ω 如图 7-16 所示.

将 Ω 投影到 xOy 面上, 得投影区域 D_{xy} 为三角形闭区域 OAB, 直线 OA、OB 及 AB 得

方程依次为 $y = 0$ 、 $x = 0$ 及 $x + 2y = 1$, 所以

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2}, 0 \leq x \leq 1\}$$

在 D_{xy} 内任取一点 (x, y) , 过该点作平行于 z 轴的直线, 该直线通过平面 $z = 0$ 穿入 Ω

内, 然后通过平面 $z = 1 - x - 2y$ 穿出 Ω 外.

于是, 由公式 (2) 得

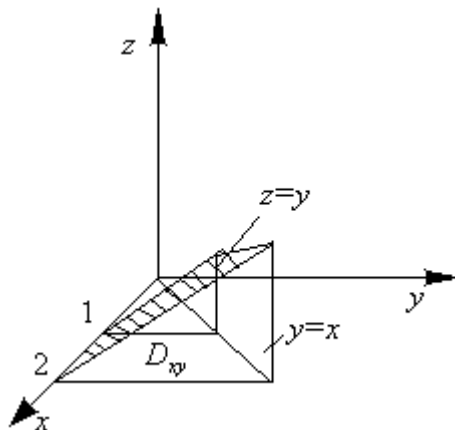
$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} x dz = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iiint_V \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2}$, 其中 V 是由平面

$x = 1, x = 2, z = 0, y = x$ 及 $z = y$ 围成得区域.

不难画出 V 的图形如图 7-17. 由图可知, V 同时是三种类型的区域. 下面按 XY-型区域来计算, 这时 V 可以表示为

$$V : 0 \leq z \leq y, 0 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2,$$



因此

图 7-17

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2} &= \int_1^2 dx \int_0^x dy \int_0^y \frac{dz}{x^2 + y^2} = \int_1^2 dx \int_0^x \frac{y}{x^2 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(x^2 + y^2) \Big|_0^x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln 2 dx = \frac{1}{2} \ln 2.\end{aligned}$$

有时, 我们计算一个三重积分也可以先计算一个二重积分、再计算一个定积分, 即有下述计算公式

设空间闭区域

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_z, c_1 \leq z \leq c_2\},$$

其中 D_z 是竖坐标为 z 的平面截闭区域 Ω 所得到的一个平面闭区域 (图 7-18), 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy. \quad (3)$$

例 3 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由

椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围成的空间闭区域.

解 空间闭区域 Ω 以表示为

$$\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}, -c \leq z \leq c\}$$

如图 9-33 所示, 由公式 (3) 得

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= \pi ab \int_{-c}^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz \\ &= \frac{4}{15} \pi abc^2\end{aligned}$$

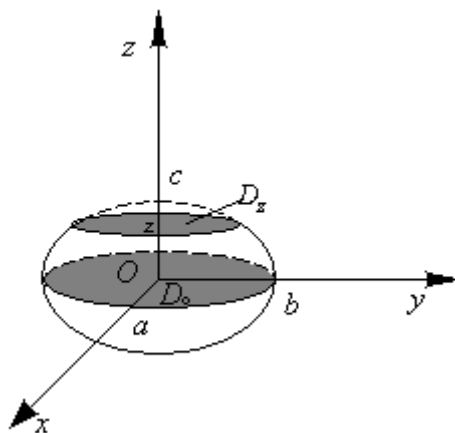


图 7-18

7.3.2 柱面坐标系与球面坐标系下三重积分的计算

1. 三重积分的换元法

和定积分、二重积分类似, 三重积分也可以利用换元法来计算. 这里只给出结论

定理 设 V 是 xOy 坐标系中的有界闭区域, 函数 $f(x, y, z)$ 在 V 上连续: V' 是 $O'uvw$ 坐

标系中的有界闭区域, 函数 $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ (2.4)

在 V' 上有连续的一阶偏导数, 且 Jacobi 行列式

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} & \frac{\partial v}{\partial w} \\ \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} & \frac{\partial w}{\partial w} \end{vmatrix}} \neq 0 \quad (u, v, w) \in V'; \quad (2.5)$$

当变换 (2.4) 把 V' 一对一地变到 V 时, 则有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} F(u, v, w) |J| du dv dw \quad (2.6)$$

其中

$$F(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

例 4 求由曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 围成的空间闭区域 V 的体积.

解 根据三重积分的性质

$$V = \iiint_V dx dy dz,$$

作变量代换

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases}$$

由于

$$V = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

从而得

$$V' = \{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$$

即 V' 是 $O'uvw$ 中得单位球型闭区域。又

$$J = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} & \frac{\partial v}{\partial w} \\ \frac{\partial w}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial v} & \frac{\partial w}{\partial w} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}}{1} = abc \neq 0,$$

于是, 由变量代换公式 (2.6) 得

$$V = \iiint_V abc du dv dw = abc \iiint_{V'} du dv dw = \frac{4}{3} \pi abc$$

2. 柱面坐标系下三重积分的计算

设 $M(x, y, z)$ 为空间内一点, 并设点 M 在 xOy 面上的投影 P 的极坐标为 ρ, θ , 则这样

的三个数 ρ, θ, z 就叫做点 M 的柱面坐标, 如图 7-19 所示, 这里规定 ρ, θ, z 的变化范围为

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho < +\infty \\ 0 &\leq \theta < 2\pi \\ -\infty &< z < +\infty \end{aligned}$$

三组坐标面分别为

$\rho = \text{常数}$, 即以 z 轴为轴的圆柱面;

$\theta = \text{常数}$, 即过 z 轴的平面;

$z = \text{常数}$, 即与 xOy 面平行的平面.

显然, 点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (4)$$

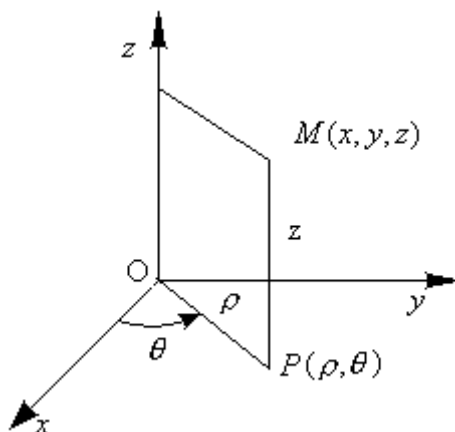


图 7-19

现在要把三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 中的变量化为柱面坐标。由柱坐标变换得

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

再由三重积分的变换公式得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta dz \quad (5)$$

其中 $F(\rho, \theta, z) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$

这时 Ω 与 Ω' 是同一立体, 只是坐标系不同。

一般来说, 当被积函数可化为 $\varphi(x^2 + y^2, z)$ 的形式, 而积分域 V 是以 z 轴为轴得旋转体或部分旋转体时, 利用柱面坐标计算三重积分觉简单.

例 5 利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成得闭区域.

解: Ω 在 xOy 面上的投影区域为半径为 2 的闭区域 $D_{xy} = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 2,$

$0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ 。而 z 是从抛物面 $z = x^2 + y^2$ 到 $z = 4$, 故 $\rho^2 \leq z \leq 4$, 即闭区域 Ω 可以表示为

$$\rho^2 \leq z \leq 4, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

于是

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \iiint_{\Omega} z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 z dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho(16 - \rho^4) d\rho = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left[8\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^2 = \frac{64}{3}\pi.$$

3. 利用球面坐标计算三重积分

设 $M(x, y, z)$ 为空间内一点, 则点 M 也可用这样三个有次序的数 r, φ, θ 来确定, 其中 r

为原点 O 与点 M 间的距离, φ 为有向线段 \overrightarrow{OM} 与 z 轴正向所夹的角, θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段 \overrightarrow{OP} 的角, 这里 P 为点 M 在 xOy 面上的投影 (图 7-20)。

这样的三个数 r, φ, θ 叫做点 M 的球面坐标。这里 r, φ, θ 的变化范围为

$$0 \leq r < +\infty$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

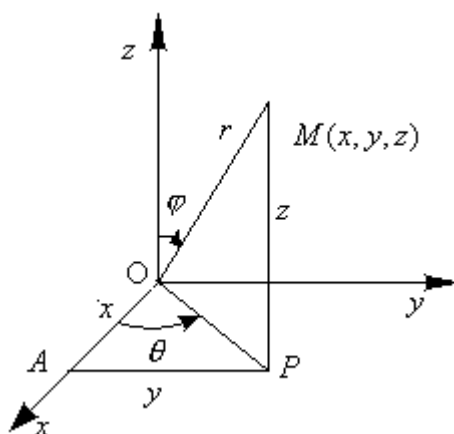


图 7-20

三组坐标面分别为

$r = \text{常数}$, 即以原点为心的球面;

$\varphi = \text{常数}$, 即以原点为顶点、 z 轴为轴的圆锥面;

$\theta = \text{常数}$, 即过 z 轴的半平面.

设点 M 在 xOy 面上的投影为 P , 点 P 在 x 轴上的投影为 A , 则 $OA = x$, $AP = y$, $PM = z$ 。

又

$$OP = r \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi$$

因此, 点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = OP \cos \theta = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = OP \sin \theta = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

由球坐标变换得

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{vmatrix} = -r^2 \sin \phi$$

从而 $|J| = r^2 \sin \phi$

由三重积分的换元公式得,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \quad (7)$$

其中 $F(r, \varphi, \theta) = f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$

若积分区域 Ω 得边界曲面是一个包围原点在内的闭曲面, 其球面坐标方程为

$r = r(\varphi, \theta)$, 则

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi, \theta)} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr. \end{aligned}$$

当积分区域 Ω 为球面 $r = a$ 所围成时, 则

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr.$$

特别地, 当 $F(r, \varphi, \theta) = 1$ 时, 由上式即得球的体积.

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

一般来说, 当被积函数可写成 $x^2 + y^2 + z^2$ 的函数, 而积分域为球体或其一部分时, 利用球面坐标计算三重积分比较简单.

例 6 求半径为 a 的球面域半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体 (图 7-21) 的体积.

解 设球面通过原点 O , 球心在 z 轴上, 又内接锥面的顶点在原点 O , 其轴与 z 轴重合, 则球面方程为 $r = 2a \cos \varphi$, 锥面方程为 $\varphi = \alpha$. 因为立体所占有的空间闭区域 Ω 可用不等式

$$0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

来表示, 所以

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr = \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\alpha} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} (1 - \cos^4 \alpha). \end{aligned}$$

作业 2 奇数, 3, 4 奇数, 5 偶数, 6, 8, 10

7.4 数量值函数的曲线与曲面积分的计算

7.4.1 第一型曲线积分的计算

定理 设 $f(x, y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

其中 $\varphi(t)$ 、 $\phi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'^2(t) + \phi'^2(t) \neq 0$, 则曲线积分

$\int_L f(x, y) ds$ 存在, 且

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \phi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)} dt \quad (\alpha < \beta). \quad (1)$$

证 设当参数 t 由 α 变到 β 时, L 上的点 $M(x, y)$ 依点 A 至点 B 的方向描出曲线 L . 在 L 上取一列点

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B,$$

它们对应于一列单调增加的参数值

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

由于

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)} dt,$$

由积分中值定理, 有

$$\Delta s_i = \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \phi'^2(\tau_i)} \Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$.

根据对弧长的曲线积分的定义, 有

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

取点 (ξ_i, η_i) 对应于参数值 τ_i , 即 $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ 、 $\eta_i = \phi(\tau_i)$, 于是

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f[\varphi(\tau_i), \phi(\tau_i)] \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \phi'^2(\tau_i)} \Delta t_i$$

上式右端的和的极限, 就是函数 $f[\varphi(t), \phi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)}$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的定积分,

由于这个函数在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 所以这个定积分是存在的, 因此上式右端的曲线积分

$\int_L f(x, y) ds$ 也存在, 并且有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \phi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)} dt \quad (\alpha < t < \beta) \quad (1)$$

使用 (1) 时要注意, 积分下限 α 一定要小于上限 β .

如果曲线 L 由参数方程

$$y = \phi(x) \quad (x_0 \leq x \leq X)$$

给出, 那么可以把这种情形看作是特殊的参数方程

$$x = t, y = \phi(t) \quad (x_0 \leq t \leq X)$$

的情形, 从而由公式 (1) 得出

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{x_0}^X f[x, \phi(x)] \sqrt{1 + \phi'^2(x)} dx \quad (x_0 < X) \quad (2)$$

类似地, 如果曲线 L 由方程

$$x = \varphi(y) \quad (y_0 \leq y \leq Y)$$

给出, 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{y_0}^Y f[\varphi(y), y] \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} dy \quad (y_0 < Y) \quad (3)$$

完全类似地, 若空间曲线 Γ 由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \phi(t), z = \omega(t) \quad (\alpha \leq t < \beta)$$

给出的情形, 这样就有

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \phi(t), \omega(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt \quad (\alpha < \beta) \quad (4)$$

例 1 计算 $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = ax$. 记号 \oint_L 表示沿封闭曲线 L 积分.

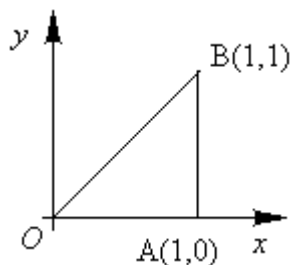
解 L 可以表示为 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

其参数方程为 $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \theta, y = \frac{a}{2} \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$,

于是

$$\begin{aligned} \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{2}(1 + \cos \theta)} \sqrt{\frac{a^2}{4}(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = \frac{a^2}{2} \left[\int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \right] = 2a^2. \end{aligned}$$

例 2 计算 $\oint_L (x + y) ds$, 其中 L 是以



$O(0,0), A(1,0), B(1,1)$ 为顶点的三角形的边界 (如图 7-22)

解 由积分的性质知

$$\oint_L (x+y)ds = \oint_{OA} (x+y)ds + \oint_{AB} (x+y)ds + \oint_{BO} (x+y)ds$$

图 7-22

因为在 OA 上 $y=0$, 所以

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx = dx;$$

在 AB 上 $x=1$, 所以

$$ds = \sqrt{1+x'^2} dy = dy;$$

在 BO 上 $y=x$, 所以

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \sqrt{2}dx$$

于是

$$\begin{aligned}\oint_L (x+y)ds &= \int_0^1 xdx + \int_0^1 (1+y)dy + \int_0^1 (x+x)\sqrt{2}dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}.\end{aligned}$$

例 3 计算半径为 R 、中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I (设线密度 $\mu=1$).

解 取坐标系如图 7-23, 则 $I = \int_L y^2 ds$

为了便于计算, 利用 L 的参数方程

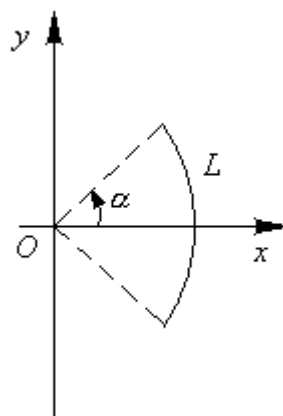
$$x = R \cos \theta, y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha).$$

于是

$$\begin{aligned}I &= \int_L y^2 ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} d\theta \\ &= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = \frac{R^3}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\alpha}^{\alpha} \\ &= \frac{R^3}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) = R^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).\end{aligned}$$

例 4 计算 $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x=y$ 的交线

解 L 是平面 $y=x$ 上的圆. 将 $y=x$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 消去 x , 得 L 向 yOz 面的投影柱面方程



$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

由此可知, 曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, \\ y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, \\ z = a \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

于是

$$\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds = \int_0^{2\pi} a \cdot a dt = 2\pi a^2.$$

下面给出第一型曲线积分的几何解释。

设有柱面 S (图 7-24), 它的母线平行于 z 轴, 准线为 xOy 平面上的曲线段 L . 柱面的“高度” $f(x, y) ((x, y) \in L)$ 是一个变量, 这里 $f(x, y)$ 是定义在 L 上的非负连续函数。现用

L 上的点 $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ 将 L 分为 n 个小弧段, 在每个分点处作平行于 z 轴的直线, 就

把 S 分为 n 个小柱面。在每个小弧

段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 这

样第 i 个小柱面的面积可近似表示

为 $\Delta S_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$, 其中 Δs_i 表

示 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 的弧长。于是柱面面积为

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \quad \text{即}$$

$$S = \int_L f(x, y) ds.$$

可见, 第一型曲线积分

$$\int_L f(x, y) ds, \quad \text{当 } f(x, y) \geq 0 \text{ 时,}$$

表示以 xOy 平面上的曲线段 L 为准线。母线平行于 z 轴, 高度为 $f(x, y)$ 的柱面面积。

例 5 设椭圆柱面 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ 被平面 $z=y$ 及 $z=0$

所截。求位于第一、二卦限内所截下部分的侧面积 (图 7-25)。

解 由第一型曲线积分的几何意义, 得所求侧面

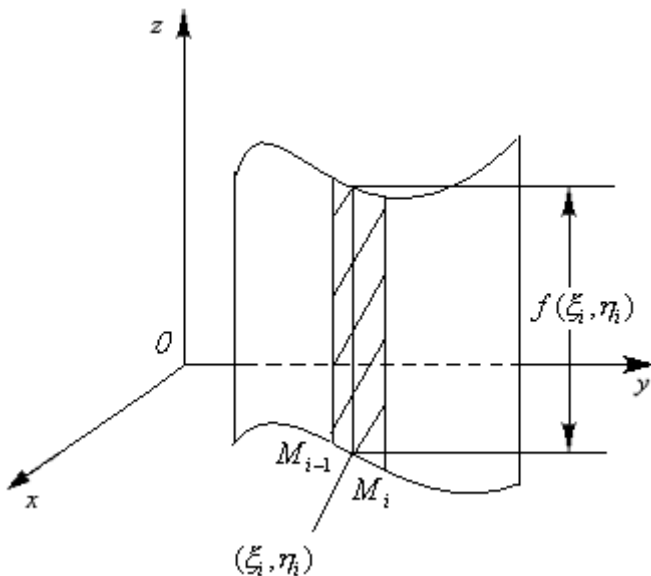
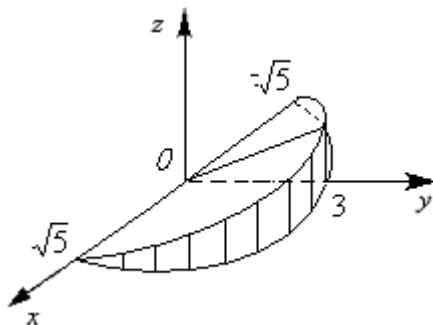


图 7-24



积

$$S = \int_L y ds$$

其中 L 为 xOy 平面上的半个椭圆, 将 L 用参数方程表示, 有

图 7-25

$$x = \sqrt{5} \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

于是

$$\begin{aligned} S &= \int_L y ds = \int_0^\pi 3 \sin t \sqrt{5 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt \\ &= -3 \int_0^\pi \sqrt{5 + 4 \cos^2 t} d \cos t = 9 + \frac{15}{4} \ln 5 \end{aligned}$$

7.4.2 第一型曲面积分的计算

设曲面 S 的方程 $z = f(x, y)$ 给出, D 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域, 函数 $f(x, y)$

在 D 上具有连续的偏导数 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 。我们计算曲面 S 的面积 A 。

在闭区域 D 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$ (这小闭区域的面积也记作 $d\sigma$)。在 $d\sigma$ 上任取一点 $P(x, y)$, 对应地曲面 S 上有一点 $M(x, y, f(x, y))$, 点 M 在 xOy 面上的投影即点 P 。点 M 处曲面 S 的切平面设为 T (图 9-38)。以小闭区域 $d\sigma$ 的边界为准线做母线平行于 z 轴的柱面, 这柱面在曲面 S 上截下一小片曲面, 在切平面 T 上截下一小片平面。由于 $d\sigma$ 的直径很小, 且平面 T 上的那一小片平面的面积 dA 可以近似代替相应的那小片曲面的面积。

设点 M 处曲面 S 上的法线 (指向朝上) 与 z 轴所成的角为 γ , 则 $dA = \frac{d\sigma}{\cos \gamma}$

因为 $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}$, 所以 $dA = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma$ 。这就是

曲面 S 的面积元素, 以它为被积表达式在闭区域 D 上积分, 得

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma$$

上式也可以写为 $A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$ 。

这就是计算曲面面积的公式。

该公式也可以应用到曲面方程为 $x = g(y, z)$ 或 $y = h(z, x)$, 可分别把曲面投影到 yOz 面上或 zOx 平面上。

例 6 求半径为 a 的球的表面积。

解 取上半球面方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 则它在 xOy 面上的投影区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ 。

$$\text{由 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\text{得 } \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

因为这函数在闭区域 D 上无界, 我们不能直接应用曲面面积公式. 所以先取区域

$D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq b^2\} (0 < b < a)$ 为积分区域, 算出相应于 D_1 上的球面面积 A_1 后,

令 $b \rightarrow a$ 取 A_1 的极限就得半球面的面积.

$$A_1 = \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

利用极坐标, 得

$$\begin{aligned} A_1 &= \iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \\ &= 2\pi a \int_0^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi a (a - \sqrt{a^2 - b^2}). \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \lim_{b \rightarrow a} A_1 = \lim_{b \rightarrow a} 2\pi a (a - \sqrt{a^2 - b^2}) = 2\pi a^2.$$

这就是半个球面的面积, 因此整个球面的面积为 $A = 4\pi a^2$.

类似于第一型曲线积分的推导, 我们可以得到第一型曲面积分的计算公式如下:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy \quad (2)$$

其中 $z(x, y)$ 为曲面 Σ 的方程, D_{xy} 为 Σ 在 xOy 面上的投影.

当积分曲面 Σ 由方程 $x = x(y, z)$ 或 $y = y(z, x)$ 给出, 也可类似地把对面积的曲面积分转化为相应的二重积分.

例 7 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$, 其中 S 是锥面 $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ 被柱面

$x^2 + y^2 - 2ax = 0$ 截下的一块面积 ($z \geq 0$).

解 S 的方程为

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad D_{xy}: x^2 + y^2 - 2ax \leq 0,$$

用极坐标表示为:

$$0 \leq r \leq 2a \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

于是由公式 (2), 得

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_{xy}} [x^2 + y^2 + 4(x^2 + y^2)] \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} 5(x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{4x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2}} dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} 5\sqrt{5}(x^2 + y^2) dx dy = 5\sqrt{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^3 dr \\
 &= 5\sqrt{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^4 \cos^4 \theta d\theta = 40\sqrt{5} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\
 &= 40\sqrt{5} a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{15\sqrt{5}}{2} \pi a^4.
 \end{aligned}$$

例 8 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z}$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ ($0 < h < a$)

截出的顶部 (图 7-26) .

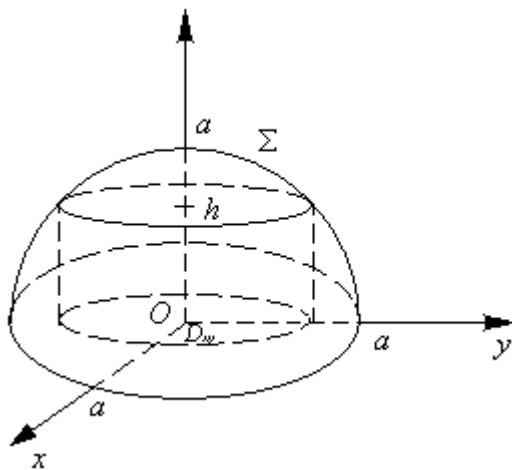


图 7-26

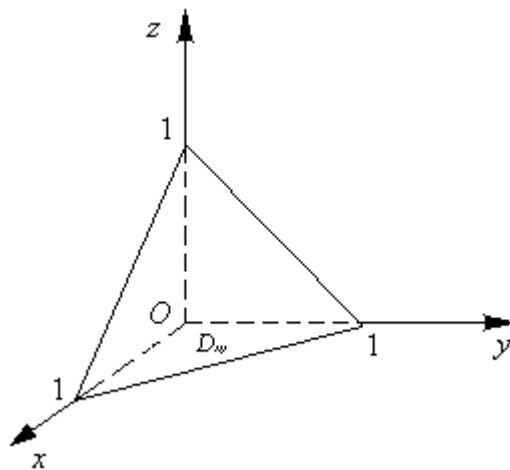


图 7-27

解 Σ 的方程为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆形闭区域 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2\}$. 又

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

根据公式 (2), 有

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z} = \iint_{D_{xy}} \frac{a dx dy}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

利用极坐标, 得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z} &= \iint_{D_{xy}} \frac{a\rho d\rho d\theta}{a^2 - \rho^2} = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{\rho d\rho}{a^2 - \rho^2} \\ &= 2\pi a \left[-\frac{1}{2} \ln(a^2 - \rho^2) \right]_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} = 2\pi a \ln \frac{a}{h}.\end{aligned}$$

例 9 计算 $\oiint_{\Sigma} xyz dS$, 其中 Σ 是由平面 $x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四

面体的整个边界曲面 (图 7-27) .

解 整个边界曲面 Σ 在平面 $x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y+z=1$ 上的部分依次记为

$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 及 Σ_4 , 于是

$$\oiint_{\Sigma} xyz dS = \oiint_{\Sigma_1} xyz dS + \oiint_{\Sigma_2} xyz dS + \oiint_{\Sigma_3} xyz dS + \oiint_{\Sigma_4} xyz dS.$$

由于在 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 上, 被积函数 $f(x, y, z)$ 均为零, 所以

$$\oiint_{\Sigma_1} xyz dS = \oiint_{\Sigma_2} xyz dS = \oiint_{\Sigma_3} xyz dS = 0.$$

在 Σ_4 上, $z=1-x-y$, 所以

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{3},$$

从而

$$\oiint_{\Sigma} xyz dS = \oiint_{\Sigma_4} xyz dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{3} xy(1-x-y) dx dy$$

其中 D_{xy} 是 Σ_4 在 xOy 面上的投影区域, 即由直线 $x=0, y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的闭区域.

因此

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} xyz dS &= \sqrt{3} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y(1-x-y) dy dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left[(1-x) \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x \cdot \frac{(1-x)^3}{6} dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4) dx = \frac{\sqrt{3}}{120}.\end{aligned}$$

作业 1 偶数, 4, 5, 6 奇数, 8, 9

7.5 数量值函数积分应用举例

本节我们将把定积分应用中的元素法推广到重积分的应用中, 利用重积分的元素法来讨论重积分在几何、物理上的一些其他应用.

对几何形体 Ω 来说, Ω 上的可加量 Q 的微元的一般形式为 $f(M)d\Omega$, 即

$$dQ = f(M)d\Omega, \quad M \in d\Omega,$$

其中 $d\Omega$ 为 Ω 的任一子量, $f(M)$ 为 Ω 上的连续函数, 而且 $\Delta Q - f(M)d\Omega$ 是当 $d \rightarrow 0$ 时

的无穷小. 找到微元后 $dQ = f(M)d\Omega$ 以后, 对 $f(M)$ 在 Ω 上积分即得 Q , 也即

$$Q = \int_{\Omega} f(M)d\Omega$$

7.5.1 几何问题举例

例 1 假设在某海湾中有个小岛, 其陆地高度为 $z = 30\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{10^6}\right)$ (单位: m), 水

平面 $z = 0$ 对应于低潮的位置, $z = 2$ 为高潮位置. 求高潮与低潮时海岛露出水面得面积之比.

解 本题为求曲面面积的问题, 设低潮时海岛与水平面的截平面区域为 D_0 , 设高潮时

海岛与水平面的截平面区域为 D_2 . 设 $z = 0$, 从而 $0 = 30\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{10^6}\right)$.

由此得 $D_0 : x^2 + y^2 \leq 10^6$.

令 $z = 2$, 即 $2 = 30\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{10^6}\right)$

由此得 $D_2 : x^2 + y^2 \leq 10^6\left(1 - \frac{1}{15}\right) = 10^6 \cdot \frac{14}{15}$.

经计算

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{36(x^2 + y^2)}{10^{10}}}.$$

利用极坐标计算, 低潮时海岛的表面积

$$S_0 = \iint_{D_0} \sqrt{1 + \frac{36(x^2 + y^2)}{10^{10}}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{10^3} \sqrt{1 + \frac{36r^2}{10^{10}}} r dr$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \frac{10^{10}}{72} \int_0^{10^3} \left(1 + \frac{36r^2}{10^{10}}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{36r^2}{10^{10}}\right) \\
&= \frac{10^{10}}{36} \pi \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{36r^2}{10^{10}}\right)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{10^3} \\
&= \frac{10^{10}}{54} \pi \cdot 5404.857.
\end{aligned}$$

同样可求得，高潮时海岛得表面积 $S_2 \approx \frac{10^4}{54} \pi \cdot 5044.2313$.

面积之比为 $\frac{S_2}{S_1} = 0.9333$.

7.5.2 质心与转动惯量

设在 xOy 平面上有 n 个质点，它们分别位于点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 处，质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n 。由力学知道，该质点系得质心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

其中 $M = \sum_{i=1}^n m_i$ 为该质点系的总质量，

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

分别为该质点系对 y 轴和 x 轴的静矩。

设有一平面薄片，占有 xOy 面上闭区域 D ，在点 (x, y) 处的面密度 $\mu(x, y)$ ，假定 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续，现在要找该薄片的质心的坐标。

取 D 上的小闭区域 $d\sigma$ ，则质量元素为 $\mu(x, y) d\sigma$ ，从而微力矩 dM_y 及 dM_x ：

$$dM_y = x \mu(x, y) d\sigma, \quad dM_x = y \mu(x, y) d\sigma$$

从而在区域 D 上积分，便得薄片的力矩

$$M_y = \iint_D x \mu(x, y) d\sigma, \quad M_x = \iint_D y \mu(x, y) d\sigma$$

由第一节知道，薄片得质量为 $M = \iint_D \mu(x, y) d\sigma$.

所以薄片得质心为，薄片的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma}$$

如果薄片是均匀的, 即面密度为常量, 则薄片的质心为

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x d\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma,$$

其中 $A = \iint_D d\sigma$ 为闭区域 D 的面积. 这时薄片的质心完全

由闭区域 D 的形状所决定. 称均匀平面薄片的质心叫做这平面薄片所占的平面图形的形心. 因此, 平面图形 D 的形心的坐标, 就可用公式 (1) 计算.

例 2 求位于两圆 $\rho = 2\sin\theta$ 和 $\rho = 4\sin\theta$ 之间得均匀薄片得质心

解 因为闭区域 D 对称于 y 轴, 所以质心 $C(\bar{x}, \bar{y})$ 必

位于 y 轴上, 于是 $\bar{x} = 0$ 。

在按公式

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma$$

这时 D 得面积等于 3π , 这时

$$\begin{aligned} \iint_D y d\sigma &= \iint_D \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{56}{3} \int_0^\pi \sin^4\theta d\theta = 7\pi. \end{aligned}$$

因此 $\bar{y} = \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3}$, 所求质心为 $C(0, \frac{7}{3})$.

类似地, 占有空间有界闭区域 Ω 、在点 (x, y, z) 处得密度为 $\rho(x, y, z)$ (假定 $\rho(x, y, z)$ 在 Ω 上连续) 的物体的质心坐标是

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_\Omega x\rho(x, y, z)dv, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_\Omega y\rho(x, y, z)dv, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_\Omega z\rho(x, y, z)dv$$

其中 $M = \iiint_\Omega \rho(x, y, z)dv$

例 3 求均匀半球体的质心

解: 取半球体的对称轴为 z 轴, 原点取在球心上, 又设求半径为 a , 则半球体所占空间闭区域

$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}.$$

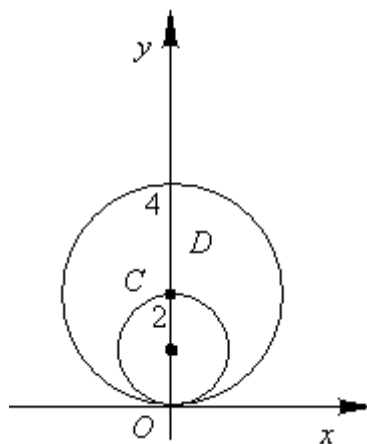


图 7-28

显然, 质心在 z 轴上, 故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho dv = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv$$

其中 $V = \frac{2}{3}\pi a^3$ 为半球体的体积

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^3 dr \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{4}. \end{aligned}$$

假设质量为 m 的质点 M 绕定轴 l 旋转, M 到 l 的距离为 r , 力学上称 $I = mr^2$ 为质点 M 对 l 的转动惯量.

设在 xOy 平面上有 n 个质点, 它们分别位于点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 处, 质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n . 由力学知道, 该质点系对于 x 轴以及 y 轴的转动惯量依次为

$$I_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 m_i; I_y = \sum_{i=1}^n x_i^2 m_i.$$

设有一薄片, 占有 xOy 面上的闭区域 D , 在点 (x, y) 处的面密度为 $\mu(x, y)$, 假定 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续, 则利用元素法, 可得该薄片对 x 轴及 y 轴的转动惯量为

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) d\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) d\sigma$$

例 4 求半径为 a 的均匀半圆薄片 (面密度为常量 μ) 对于其直径边的转动惯量.

解 取坐标系如图 7-29 所示, 则薄片所占闭区域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\},$$

而所求转动惯量即半圆薄片对于 x 轴的转动惯量 I_x .

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D \mu y^2 d\sigma = \mu \iint_D \rho^3 \sin^2 \theta d\rho d\theta \\ &= \mu \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 \sin^2 \theta d\rho \\ &= \mu \cdot \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \mu a^4 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} M a^2, \end{aligned}$$

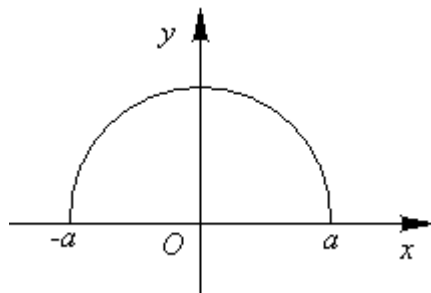


图 7-29

其中 $M = \frac{1}{2}\pi a^2 \mu$ 为半圆薄片的质量.

类似地, 占有空间有界闭区域 Ω 、在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$ (假定 $\rho(x, y, z)$

在 Ω 上连续) 的物体对于 x 、 y 、 z 轴的转动惯量为

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv,$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dv$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dv$$

例 5 求密度为 ρ 的均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.

解 取球心为坐标原点, z 轴与轴 l 重合, 又设球的半径为 a , 则球体所占空间闭区域

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\},$$

所求转动惯量即球体对于 z 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dv \\ &= \rho \iiint_{\Omega} (r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \rho \iiint_{\Omega} r^4 \sin^3 \varphi dr d\varphi d\theta = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr \\ &= \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{a^5}{5} \int_0^{\pi} (\cos^2 \varphi - 1) d(\cos \varphi) \\ &= \frac{2}{5} \pi a^5 \rho \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{5} a^2 M, \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ 为球体的质量.

类似地, 对线积分也有相应的公式.

例 6 计算半径为 R 、中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I (设线密度 $\mu = 1$).

解

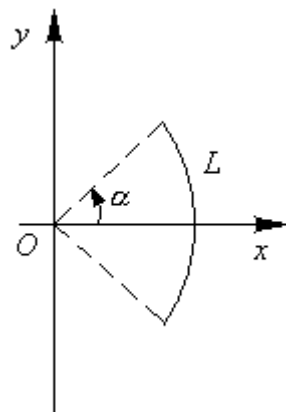
取坐标系如图 10-3, 则

$$I = \int_L y^2 ds$$

为了便于计算, 利用 L 的参数方程

$$x = R \cos \theta, y = R \sin \theta \quad (-\alpha \leq \theta \leq \alpha).$$

于是



$$\begin{aligned}
I &= \int_L y^2 ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2 \theta \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} d\theta \\
&= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = \frac{R^3}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\alpha}^{\alpha} \\
&= \frac{R^3}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) = R^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).
\end{aligned}$$

7. 5. 3 引力

设物体占有空间有界闭区域 Ω ，它在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$ ，并假定

$\rho(x, y, z)$ 在 Ω 上连续. 在物体任取一直径很小的闭区域 dv (这闭区域的体积也记作 dv)，

(x, y, z) 为这一小块中的一点. 把这一小块物体的质量 ρdv 近似地看作集中在点 (x, y, z) 处.

于是按两质点间的引力公式，可得在这一小块物体对位于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的单位质量的质点的引力近似地为

$$dF = (dF_x, dF_y, dF_z)$$

$$\left(G \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dv, G \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dv, G \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dv \right),$$

其中 dF_x, dF_y, dF_z 为引力元素 dF 在三个坐标轴上的分量，

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ ， G 为引力常数，将 dF_x, dF_y, dF_z 在 Ω 上分别积分，即得

$$\begin{aligned}
F &= (F_x, F_y, F_z) \\
&= \left(\iiint_{\Omega} \frac{G\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dv, \iiint_{\Omega} \frac{G\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dv, \iiint_{\Omega} \frac{G\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dv \right).
\end{aligned}$$

另外，平面薄片对薄片外一点的单位质量的引力，也可以类似地得到，只要改成对 x, y 的二重积分就行了.

例 7 设半径为 R 的均质球占有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. 求它对位于 $M_0(0, 0, a)$ ($a > R$) 处的单位质量的质点的引力.

解 设球的密度为 ρ_0 ，由球体的对称性及质量分布的均匀性知 $F_x = F_y = 0$ ，所求引力沿 z 轴的分量为

$$F_z = \iiint_{\Omega} G\rho_0 \frac{z - a}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}} dv$$

$$\begin{aligned}
&= G\rho_0 \int_{-R}^R (z-a)dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} \frac{dxdy}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= G\rho_0 \int_{-R}^R (z-a)dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho d\rho}{[\rho^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= 2\pi G\rho_0 \int_{-R}^R (z-a) \left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}} \right) dz \\
&= 2\pi G\rho_0 \left[-2R + \frac{1}{a} \int_{-R}^R (z-a) d\sqrt{R^2-2az+a^2} \right] \\
&= 2\pi G\rho_0 \left(-2R + 2R - \frac{2R^3}{3a^2} \right) \\
&= -G \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0 \cdot \frac{1}{a^2} = -G \frac{M}{a^2},
\end{aligned}$$

其中 $M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0$ 为球的质量. 上述结果表明: 均质球对球外一质点的引力如同球的质量集

中于球心时两质点间的引力.

作业 2, , 5, 7, 9, 10, 11

第 8 章 曲线积分与曲面积分

8.1 向量值函数在有向曲线上的积分

8.1.1 向量场

若场中每一点对应的物理量是向量，则称该场为向量场。例如力场、流速场等都属于向量场。

数量场可以用一个数量值函数 $z=f(x, y)$ 表示；若 G 是一向量场，则可用定义在 G 上的二元向量值函数表示： $\mathbf{F}(x, y)=P(x, y)\mathbf{i}+Q(x, y)\mathbf{j}$ 其中二元数量值函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 为 $\mathbf{F}(x, y)$ 的坐标。若 G 是一空间向量场，在引入空间直角坐标系后， G 可用三元向量值函数表示：

$$\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

在数量场中，我们从几何上用等值线（面）描述数量场分布，对于向量场则用向量线来刻画向量场的分布。所谓向量线是位于向量场中这样的曲线：该曲线上每点处的切线与该点的场向量重合。例如静电场中的电力线，磁场中的磁力线都是向量线，它们直观清晰地描绘了向量场中的电场强度与磁场强度的分布情况。

8.1.2 第二型曲线积分的概念

变力沿曲线所作的功 设一个质点在力 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x, y)=P(x, y)\mathbf{i}+Q(x, y)\mathbf{j}$ 作用下，从点 A 沿一条光滑的平面曲线 L 移动到点 B （如图 8-1），其中函数 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在 L 上连续，试求力 \mathbf{F} 所作的功。

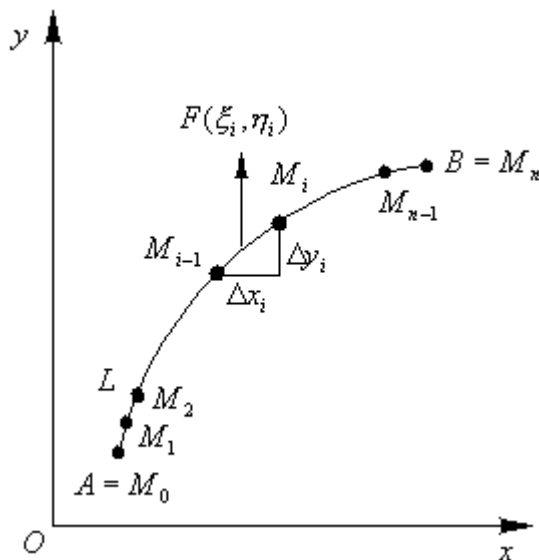


图 8-1

如果力 \mathbf{F} 是常力，质点沿直线运动，则 \mathbf{F} 所做的功为 $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ ，现在 $\mathbf{F}(x, y)$ 是变力，且质点沿曲线 L 运动，功就不能用上面的公式了。与前面一样，我们仍采用“划分、代替、求和、取极限”的方法来解决这个问题。

使用分点 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ 将 L 分成 n 个小弧段，由于

$\widehat{M_{i-1}M_i}$ 光滑而且很短。可以用有向线段 $\xrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i)\mathbf{i} + (\Delta y_i)\mathbf{j}$ 来近似地代替它, 其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 、 $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ 。又由于函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 L 上连续, 可以用 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的一点 (ξ_i, η_i) 处的力 $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) = P(\xi_i, \eta_i)\mathbf{i} + Q(\xi_i, \eta_i)\mathbf{j}$ 来近似代替这小弧段上各点处的力。这样 $\mathbf{F}(x, y)$ 沿有向小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 所作的功 ΔW_i 可以近似地等于常力 $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i)$ 沿 $\xrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 所作的功: $\Delta W_i \approx \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) \cdot \xrightarrow{M_{i-1}M_i}$

即
$$\Delta W_i \approx P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i.$$

于是
$$W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i].$$

用 λ 表示 n 个小弧段的最大长度, 令 $\lambda \rightarrow 0$ 取上述和的极限, 所得到的极限自然地被认为变力 \mathbf{F} 沿有向曲线弧所作的功, 即

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]$$

定义 设 L 为 xOy 面内的从点 A 到点 B 的一条有向光滑面曲线弧, 函数 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在 L 上有界, 在 L 上沿 L 的方向任意插入一点列 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots,$

$M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ 把 L 分成 n 个有向小弧段, $\widehat{M_{i-1}M_i}$ ($i=1, 2, \dots, n; M_0 = A, M_n = B$). 设

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 、 $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. 点 (ξ_i, η_i) 为 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的点. 如果当各小弧段长

度的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$ 的极限总存在, 则称此极限为函数 $P(x, y)$ 在有向

弧段 L 上对坐标 x 的曲线积分, 记作 $\int_L P(x, y) dx$. 类似地, 如果 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$ 总存在,

则称此极限为函数 $Q(x, y)$ 在有向弧段 L 上对坐标 y 的曲线积分, 记作 $\int_L Q(x, y) dy$. 即

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i,$$

其中 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 叫做被积函数, L 叫做积分弧段

以上两个积分也称为第二类曲线积分.

当 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 连续时, 上述两个积分总存在, 以后我们假定 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在 L 上连续.

上述定义可以类似地推广到积分弧段为空间有向曲线弧 Γ 的情形:

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i,$$

$$\int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i,$$

$$\int_{\Gamma} R(x, y, z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i.$$

应用上经常出现的是

$$\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy,$$

这种合并起来的式子, 为简便起见, 把上式写成

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

也可以写成向量形式

$$\int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}$$

其中 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 为向量值函数, $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$.

由此, 变力沿曲线做功可以表示为

$$W = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

或

$$W = \int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}$$

类似地, 把

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + \int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy + \int_{\Gamma} R(x, y, z) dz$$

简写成

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

或

$$\int_{\gamma} \mathbf{A}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}$$

其中 $\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$.

性质 1 设 α 、 β 为常数, 则

$$\int_L [\alpha \mathbf{F}_1(x, y) + \beta \mathbf{F}_2(x, y)] \cdot d\mathbf{r} = \alpha \int_L \mathbf{F}_1(x, y) \cdot d\mathbf{r} + \beta \int_L \mathbf{F}_2(x, y) \cdot d\mathbf{r}$$

性质 2 若有向曲线弧 L 可分成两段光滑的有向曲线弧 L_1 和 L_2 ，则

$$\int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_1} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} + \int_{L_2} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}$$

性质 3 设 L 是有向光滑曲线弧， L^- 是 L 的反向曲线弧，则

$$\int_{L^-} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} = - \int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}$$

由性质 3 我们知道对坐标的曲线积分，必须注意积分弧段的方向。

二、对坐标的曲线积分的计算法

定理 设 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在有向弧段 L 上有定义且连续， L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases}$$

当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x, y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B ， $\varphi(t)$ 、 $\phi(t)$

在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t) + \phi'^2(t) \neq 0$ ，则曲线积分

$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 存在，且

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \phi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \phi(t)]\phi'(t)\}dt \quad (1)$$

证 在 L 上取一列点

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B,$$

它们对应于一列单调变化的参数值

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta,$$

$$\text{由于} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ， τ_i 在 t_{i-1} 与 t_i 之间，取 $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ ， $\eta_i = \phi(\tau_i)$ ，

由定义，有

$$\int_L P(x, y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[\varphi(\tau_i), \phi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

上式右端的和的极限就是定积分 $\int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \phi(t)]\varphi'(t)dt$ ，由于函数 $P[\varphi(t), \phi(t)]\varphi'(t)$ 连续，

这个定积分是存在的，因此上式右端的曲线积分 $\int_L P(x, y)dx$ 也存在，并且有

$$\int_L P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \phi(t)]\varphi'(t)dt$$

同理可证

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t), \phi(t)] \phi'(t) dt$$

把以上两式相加，得

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \phi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \phi(t)] \phi'(t)\} dt \quad (1)$$

这里必须注意的是下限 α 对应于 L 的起点。上限 β 对应于 L 的终点， α 不一定小于 β 。

类似地，当曲线 L 的方程由 $y = \phi(x)$ 或 $x = \varphi(y)$ 给出时，可看作是参数方程的特例，

比如，当 L 的方程由 $y = \phi(x)$ 给出时，公式 (1) 成为

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \{P[x, \phi(x)] + Q[x, \phi(x)] \phi'(x)\} dx,$$

这里下限 a 对应于 L 的起点。上限 b 对应于 L 的终点。

公式 (1) 可推广到空间曲线 Γ 由参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \phi(t), \quad z = \omega(t)$$

给出的情形，这样便得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \phi(t), \omega(t)] \varphi'(t) + \\ & \quad Q[\varphi(t), \phi(t), \omega(t)] \phi'(t) + R[\varphi(t), \phi(t), \omega(t)] \omega'(t)\} dt, \end{aligned}$$

这里下限 α 对应于 Γ 的起点。上限 β 对应于 Γ 的终点。

例 1 计算 $\int_L xy dx$ ，其中 L 为抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧 (图 8-2)

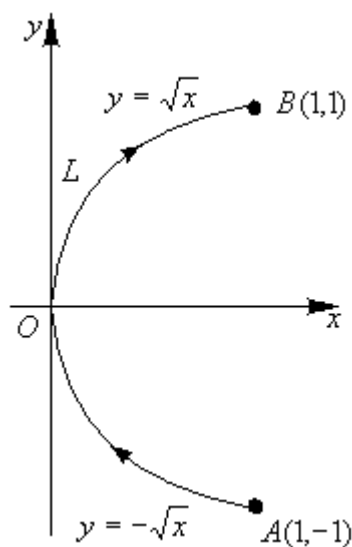


图 8-2

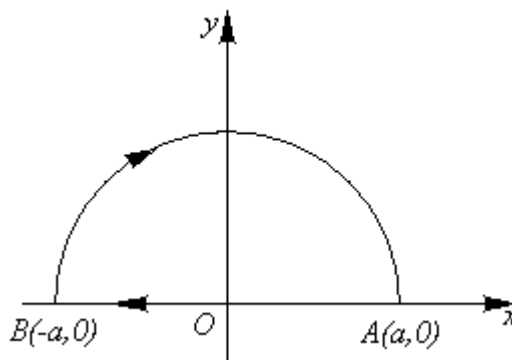


图 8-3

解 将方程看成 $x = y^2$ ， y 从 -1 变到 1 。因此

$$\int_L xy dx = \int_{-1}^1 y^2 y(y^2)' dy = 2 \int_{-1}^1 y^4 dy = 2 \left[\frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{5}.$$

例 2 计算 $\int_L y^2 dx$ 其中 L 为 (图 8-3)

- (1) 半径为 a 、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周；
- (2) 从点 $A(a, 0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a, 0)$ 的直线段.

解 (1) L 是参数方程

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta$$

当参数 θ 从 0 变到 π 的曲线弧。因此

$$\begin{aligned} \int_L y^2 dx &= \int_0^\pi a^2 \sin^2 \theta (-a \sin \theta) d\theta = -a^3 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \\ &= -a^3 \left[\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = -\frac{4}{3} a^3. \end{aligned}$$

(2) 现在, L 的方程为 $y = 0, x$ 从 a 变到 $-a$. 所以

$$\int_L y^2 dx = \int_a^{-a} 0 dx = 0.$$

从例 2 可以看出, 虽然两个曲线积分的被积函数相同, 起点和终点也相同, 但沿不同路径得出的值并不相同.

例 3 计算 $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, 其中 L 为 (图 8-4):

- (1) 抛物线 $y = x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧;
- (2) 抛物线 $x = y^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧;
- (3) 有向折线 OAB , 这里 O, A, B 依次是 $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.

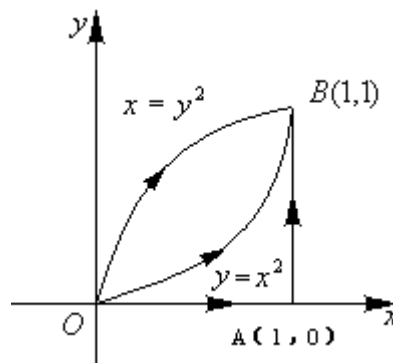


图 8-4

解 (1) 化为对 x 的定积分. $L: y = x^2, x$ 从 0 变到 1, 所以

$$\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx = 4 \int_0^1 x^3 dx = 1.$$

(2) 化为对 y 的定积分. $L: x = y^2, y$ 从 0 变到 1, 所以

$$\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2y^2 \cdot y \cdot 2y + y^4)dy = 5 \int_0^1 y^4 dy = 1.$$

$$(3) \int_L 2xydx + x^2dy = \int_{OA} 2xydx + x^2dy + \int_{AB} 2xydx + x^2dy$$

在 OA 上, $y = 0, x$ 从 0 变到 1, 所以

$$\int_{OA} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)dx = 0.$$

在 AB 上, $x = 1, y$ 从 0 变到 1, 所以

$$\int_{AB} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1)dy = 1.$$

从而

$$\int_L 2xydx + x^2dy = 0 + 1 = 1.$$

从例 3 可以看出, 虽然沿不同路径, 曲线积分的值可以相等.

例 4 计算曲线积分 $\oint_L x^2 y^3 dx + z dy + y dz$, 其中 L 是抛物面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 与平面 $z = 3$ 的交线, 其正向与 z 轴正向成右手系 (将右手除拇指外的四个手指依 L 的正向握起时, 拇指则指向 z 轴正向).

解 在方程组

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2, \\ z = 3 \end{cases}$$

中消去 z , 得 L (如图 8-5) 的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 3 \end{cases}$$

L 的参数方程为

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

所以

$$\begin{aligned} & \oint_L x^2 y^3 dx + z dy + y dz \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos^2 \theta \sin^3 \theta (-\sin \theta) + 3 \cos \theta + 0] d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta) \sin^4 \theta d\theta + 3 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \\ &= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 \theta - \sin^6 \theta) d\theta + 0 \\ &= -\frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

例 5 设一个质点在 $M(x, y)$ 处受力 \mathbf{F} 的作用, \mathbf{F} 的大小与 M 到原点 O 的距离成正比,

\mathbf{F} 的方向恒指向原点. 此质点由点 $A(a, 0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 按逆时针方向移动到点 $B(0, b)$, 求力 \mathbf{F} 所作的功 W .

解 $\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$

由假设有 $\mathbf{F} = -k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$, 其中 $k > 0$ 是比例常数. 于是

$$W = \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} -kx dx - ky dy = -k \int_{AB} x dx + y dy.$$

利用椭圆的参数方程: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ 起点 A 、终点 B 分别对应参数 $0, \frac{\pi}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} W &= -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2 \cos t \sin t + b^2 \sin t \cos t) dt \\ &= k(a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \frac{k}{2}(a^2 - b^2). \end{aligned}$$

三、两类曲线积分之间的联系

设有向曲线弧 L 的起点为 A , 终点为 B . 曲线弧 L 有参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t) \end{cases}$ 给出, 起点 A 、

终点 B 分别对应参数 α 、 β . 不妨设 $\alpha < \beta$ (若 $\alpha > \beta$, 可令 $s = -t$, A 、 B 对应

$s = -\alpha, s = -\beta$, 就有 $(-\alpha) < (-\beta)$, 把下面的讨论对参数 s 进行即可), 并设函数

$\varphi(t)$ 、 $\phi(t)$ 在闭区域 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'^2(t) + \phi'^2(t) \neq 0$, 又函数 $P(x, y)$ 、

$Q(x, y)$ 在 L 上连续. 于是, 由对坐标的曲线积分计算公式 (1) 有

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \phi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \phi(t)]\phi'(t)\}dt$$

向量 $\tau = \varphi'(t)\mathbf{i} + \phi(t)\mathbf{j}$ 是曲线弧 L 在点 $M(\varphi(t), \phi(t))$ 处的一个切向量, 它的指向与参数 t 增大时点 M 移动的走向一致, 当 $\alpha < \beta$ 时, 这个走向就是有向曲线弧 L 的走向. 以后我们称这种与有向曲线弧的走向一致的切向量为有向曲线弧的切向量. 于是有向曲线弧 L 的切向量为 $\tau = \varphi'(t)\mathbf{i} + \phi(t)\mathbf{j}$, 它的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)}}, \quad \cos \beta = \frac{\phi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)}}$$

由对弧长的曲线积分的计算公式可得

$$\begin{aligned} & \int_L [P(x, y)\cos \alpha + Q(x, y)\cos \beta]ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ P[\varphi(t), \phi(t)] \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)}} + Q(x, y) \frac{\phi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)}} \right\} \sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \phi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \phi(t)]\phi'(t)\} dt. \end{aligned}$$

由此可见, 平面曲线 L 上的两类曲线积分之间有如下联系:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos \alpha + Q\cos \beta)ds \quad (2)$$

其中 $\alpha(x, y)$ 、 $\beta(x, y)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x, y) 处的切向量的方向角。

类似地可知，空间曲线 Γ 上的两类曲线积分之间有如下关系：

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \quad (3)$$

其中 $\alpha(x, y, z)$ 、 $\beta(x, y, z)$ 、 $\gamma(x, y, z)$ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x, y, z) 处的切向量的方向角。

两类积分曲线之间的联系也可以用向量的形式表达。例如，空间曲线 Γ 上的两类曲线之间的联系可以写成如下形式：

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

或

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{A}_{\tau} ds$$

其中 $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ ， $\boldsymbol{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x, y, z) 处的单位切向量， $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} ds = (dx, dy, dz)$ ，称为有向曲线元， \mathbf{A}_{τ} 为向量 \mathbf{A} 在向量 $\boldsymbol{\tau}$ 上的投影。

作业 1 奇数，2，4，7，8

8.2 向量值函数在有向曲面上的积分

8.2.1 曲面的侧

有向曲面：取定了法向量亦即选定了侧的曲面称为有向曲面。法向量的方向称为曲面的正向，相反的称为反向。

设 Σ 是有向曲面。在 Σ 上取一小块曲面 ΔS ，把 ΔS 投影到 xOy 面上得一投影区域，这投影区域的面积为 $(\Delta \sigma)_{xy}$ 。假定 ΔS 上各点处的法向量与 z 轴的夹角 γ 的余弦 $\cos \gamma$ 有相同的符号（即 $\cos \gamma$ 都是正的或都是负的）。我们规定 ΔS 在 xOy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 为

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta \sigma)_{xy}, & \cos \gamma > 0, \\ -(\Delta \sigma)_{xy}, & \cos \gamma < 0, \\ 0, & \cos \gamma \equiv 0. \end{cases}$$

其中 $\cos \gamma \equiv 0$ 也就是 $(\Delta \sigma)_{xy} = 0$ 的情形。 ΔS 在 xOy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 实际就是 ΔS 在 xOy 面上的投影区域的面积附以一定的正负号。类似地可以定义 ΔS 在 yOz 面及 zOx 面上的投影 $(\Delta S)_{yz}$ 及 $(\Delta S)_{zx}$ 。

8.2.2 第二型曲面积分的概念

流向曲面一侧的流量 设稳定流动的不可压缩流体（假定密度为 1）的速度场由

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \{P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}\}$$

给出， Σ 是速度场中的一片有向曲面，函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 都在 Σ 上连续，求在单位时间内流向 Σ 指定侧的流体的质量，即流量 Φ 。

如果流体流过平面上面积为 A 的一个闭区域，且流体在这闭区域上各点处的流速为（常向量） \mathbf{v} ，又设 \mathbf{n} 为该平面的单位法向量（图 8-6），那么在单位时间内流过闭区域的流体组成一个底面积为 A 、斜高为 $|\mathbf{v}|$ 的斜柱体（图 8-6（b））。

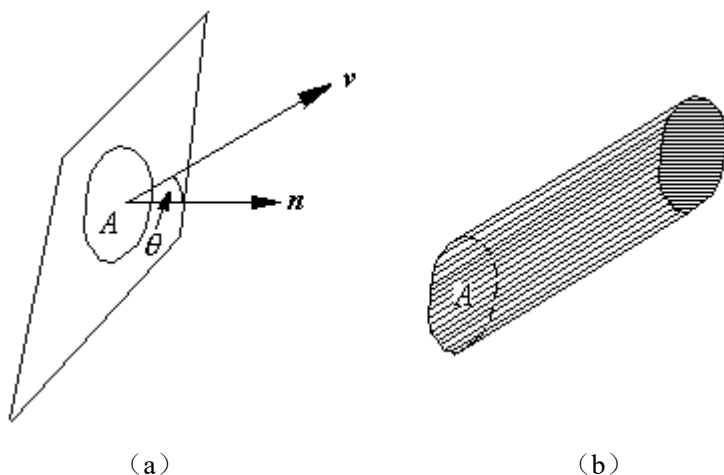


图 8-6

当 $(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{n}}) = \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，这斜柱体的体积为

$$A|\mathbf{v}|\cos\theta = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

这也就是通过闭区域 A 流向 \mathbf{n} 所指一侧的流量；

当 $(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{n}}) = \theta = \frac{\pi}{2}$ 时，显然流体通过闭区域 A 流向 \mathbf{n} 所指一侧的流量 Φ 为零，

而 $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ ，故 $\Phi = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ；

当 $(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{n}}) = \theta > \frac{\pi}{2}$ 时， $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ ，这时我们仍把 $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 称为流体通过闭区域 A 流向 \mathbf{n} 所指一侧的流量，它表示流体通过闭区域 A 实际上流向 $-\mathbf{n}$ 所指一侧，且流向 $-\mathbf{n}$ 所指一侧的流量为 $-A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 。因此，不论 $(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{n}})$ 为何值，流体通过闭区域 A 流向 \mathbf{n} 所指一侧的流量均为 $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 。

由于现在所考虑的不是平面区域内而是一片曲面，且流速 \mathbf{v} 也不是常向量，因此所求流量不能使用上述方法来计算。我们仍然使用前面使用过的方法来解决目前的问题。

把曲面 Σ 分成 n 各小块 ΔS_i （ ΔS_i 同时也代表第 i 小块曲面的面积）。在 Σ 是光滑和 \mathbf{v} 连续的前提下，只要 ΔS_i 的直径很小，我们就可以用 ΔS_i 上任一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处的流速

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{i} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{j} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{k}$$

代替 ΔS_i 上其他各点处的流速，以该点

(ξ_i, η_i, ζ_i) 处曲面 Σ 的单位法向量

$$\mathbf{n}_i = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

代替 ΔS_i 上其他各点处的单位法向量(图 8-7).

从而得到通过 ΔS_i 流向指定侧流量的近似值为

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

于是，通过 Σ 流向指定侧的流量

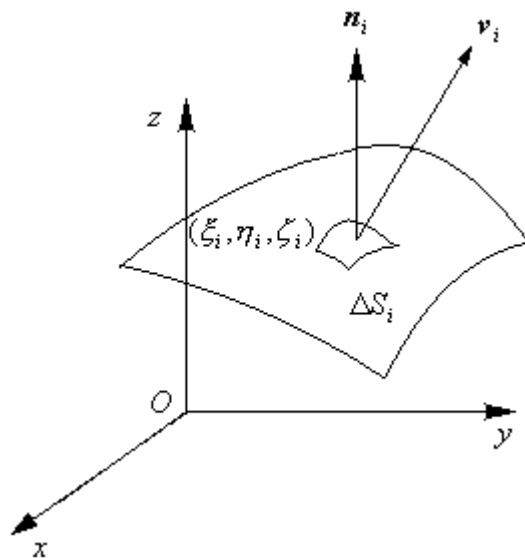


图 8-7

$$\begin{aligned} \Phi &\approx \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \\ &= \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i \end{aligned}$$

但 $\cos \alpha_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{yz}$, $\cos \beta_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{zx}$, $\cos \gamma_i \cdot \Delta S_i \approx (\Delta S_i)_{xy}$,

因此上式可以写成

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

令 $\lambda \rightarrow 0$ 取上述和的极限，就得到流量 Φ 的精确值. 这样的极限还会在其他的问题中遇到. 抽取它们的物理意义，就得到下列对坐标的曲面积分的概念.

定义 设 Σ 为光滑的有向曲面，函数 $R(x, y, z)$ 在 Σ 上有界. 把 Σ 任意分成 n 块小曲面

ΔS_i (ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积)， ΔS_i 在 xOy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$ ， (ξ_i, η_i, ζ_i)

是 ΔS_i 上任意取定的一点. 如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda \rightarrow 0$ 时，

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

总存在，则称此极限为函数 $R(x, y, z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x, y 的曲面积分记作

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy, \text{ 即}$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

其中 $R(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

类似地可以定义函数 $P(x, y, z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 y, z 的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz, \text{ 及函数 } Q(x, y, z) \text{ 在有向曲面 } \Sigma \text{ 上对坐标 } z, x \text{ 的曲面积分}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx \text{ 分别为}$$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx}$$

以上三个曲面积分也称为第二类曲面积分.

当 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在有向光滑曲面 Σ 上连续时, 对坐标的曲面积分

是存在的, 以后总假定 P 、 Q 、 R 在 Σ 上连续.

在应用上出现较多的是:

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx + \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$$

这种合并起来的形式, 为简便起见, 我们把它写成:

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

例如, 上述流向 Σ 指定侧的流量 Φ 可表示为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

如果 Σ 是分片光滑的有向曲面, 我们规定函数在 Σ 上对坐标的曲面积分等于函数在各片光滑曲面上对坐标的曲面积分之和.

性质 1 如果把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 , 则

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma_1} P dy dz + Q dz dx + R dx dy + \iint_{\Sigma_2} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

性质 2 设 Σ 是有向曲面, Σ^- 表示与 Σ 取相反侧的有向曲面, 则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma^-} P(x, y, z) dydz &= -\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz \\ \iint_{\Sigma^-} Q(x, y, z) dzdx &= -\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx \\ \iint_{\Sigma^-} R(x, y, z) dxdy &= -\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy\end{aligned}$$

由性质 2, 我们知道对坐标的曲面积分, 我们必须注意积分曲面所取的侧.

8.2.3 对坐标的曲面积分的算法

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面上侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy} ,

函数 $z = z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数, 被积函数 $R(x, y, z)$ 在 Σ 上连续.

按对坐标的曲面积分的定义, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

因为 Σ 取上侧, $\cos \gamma > 0$, 所以

$$(\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy}.$$

因为 (ξ_i, η_i, ζ_i) 是 Σ 上的一点, 故 $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$. 从而有

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} = \sum_{i=1}^n R[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)] (\Delta \sigma_i)_{xy}$$

令 $\lambda \rightarrow 0$ 取上式两端的极限, 就得到

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dxdy. \quad (3)$$

这就是把对坐标的曲面积分化为二重积分的公式.

必须注意, 公式 (3) 的曲面积分是取在曲面 Σ 上侧的; 如果曲面积分取在 Σ 的下侧,

这时 $\cos \gamma < 0$, 那么

$$(\Delta S_i)_{xy} = -(\Delta \sigma_i)_{xy}$$

从而有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dxdy. \quad (3')$$

类似地, 如果 Σ 由 $x = x(y, z)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dydz, \quad (4)$$

如果 Σ 由 $y = y(z, x)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx, \quad (5)$$

符号的确定按下列规则: 对于曲面的侧 上取正下取负; 前取正后取负; 右取正左取负.

例 1 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 Σ 是长方体 Ω 的整个表面的外

测, $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$.

解 把有向曲面 Σ 分成一下六部分:

$\Sigma_1 : z = c (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ 的上侧

$\Sigma_2 : z = 0 (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ 的下侧

$\Sigma_3 : x = a (0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c)$ 的前侧

$\Sigma_4 : x = 0 (0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c)$ 的后侧

$\Sigma_5 : y = b (0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c)$ 的右侧

$\Sigma_6 : y = 0 (0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c)$ 的左侧

除 Σ_3 、 Σ_4 外, 其余四片曲面在 yOz 面上的投影为零, 因此

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = \iint_{\Sigma_3} x^2 dy dz + \iint_{\Sigma_4} x^2 dy dz$$

右公式 (4) 就有

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = \iint_{D_{yz}} a^2 dy dz - \iint_{D_{yz}} 0 dy dz = a^2 bc$$

类似地可得

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} y^2 dy dz &= b^2 ac \\ \iint_{\Sigma} z^2 dy dz &= c^2 ab \end{aligned}$$

于是所求曲面积为 $(a + b + c)abc$.

例 2 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分.

解 把 Σ 分为 Σ_1 和 Σ_2 两部分 (图 10-23), Σ_1 的方程为 $z_1 = -\sqrt{1-x^2-y^2}$, Σ_2 的方程为 $z_2 = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\iint_{\Sigma} xyz dx dy = \iint_{\Sigma_2} xyz dx dy + \iint_{\Sigma_1} xyz dx dy.$$

上式右端的第一个积分的积分曲面 Σ_2 取上侧, 第二个积分的积分曲面 Σ_1 取下侧, 因此分别应用公式 (3) 及 (3'), 就有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} xyz dx dy &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy. \end{aligned}$$

其中 D_{xy} 是 Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域, 就是位于第一象限内的扇形 $x^2 + y^2 \leq 1$

($x \geq 0, y \geq 0$). 利用极坐标计算这个二重积分如下:

$$\begin{aligned} 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy &= 2 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho = 1 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{15}, \end{aligned}$$

从而
$$\iint_{\Sigma} xyz dx dy = \frac{2}{15}.$$

8.2.4 两类曲面积分之间的联系

设有向曲面 Σ 由方程 $z = z(x, y)$ 给出, Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy} , 函数 $z = z(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数, $R(x, y, z)$ 在 Σ 上连续. 如果 Σ 取上侧, 则由对坐标的曲面积分计算公式 (3) 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

另一方面, 因上述有向曲面 Σ 的法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos \beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

故由对面积的曲面积分计算公式有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy$$

由此可见, 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS \quad (6)$$

如果 Σ 取下侧, 则由 (3') 有

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{\Sigma} R[x, y, z(x, y)] dx dy$$

但这时 $\cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, 因此 (6) 式仍成立.

类似地可得

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha dS \quad (7)$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \cos \beta dS \quad (8)$$

合并起来有

$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \quad (9)$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦.

两类曲面积分之间的联系也可以写成如下的向量形式:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

或

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} A_n dS$$

其中 $\mathbf{A} = (P, Q, R), \mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的单位法向量,

$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = (dydz, dzdx, dxdy)$, 称为有向曲面元, A_n 为向量 \mathbf{A} 在向量 \mathbf{n} 上的投影.

例 3 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dxdy$, 其中 Σ 是旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = 2$ 之间的部分的下侧.

解 由两类积分曲面之间的联系(9), 可得

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz = \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \cos \alpha dS = \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dxdy$$

在曲面 Σ 上, 有

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

故

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dxdy = \iint_{\Sigma} [(z^2 + x)(-x) - z] dxdy.$$

再按对坐标的曲面积分的算法, 便得

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dxdy = - \iint_{D_{xy}} \left\{ \left[\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + x \right] \cdot (-x) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\} dxdy.$$

注意到 $\iint_{D_{xy}} \frac{1}{4} x(x^2 + y^2) dxdy = 0$, 故

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dydz - z dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \left[x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \rho^2) \rho d\rho = 8\pi \end{aligned}$$

作业 1 偶数, 2, 4, 6, 7, 9

8.3 各种积分之间的联系

8.3.1 格林公式

牛顿-莱布尼茨公式 $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$ 表示 $F'(x)$ 的积分可以通过它的原函数 $F(x)$ 在这个区间端点上的值来表示.

那么在平面区域 D 上的二重积分能否可以通过沿闭区域 D 的边界曲线 L 上的曲线积分来表达. 格林公式给了我们一个准确的答案.

单连通区域: 设 D 为平面区域, 如果 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D , 则称 D 为平面单连通区域, 否则称为复连通区域.

对平面区域 D 的边界曲线 L 我们规定 L 的正向如下: 当观察者沿 L 的这个方向行走时, D 内在它近处的那一部分总在它的左边. 例如图 8-8, L 的正向为逆时针方向, 而 l 的正向是顺时针方向

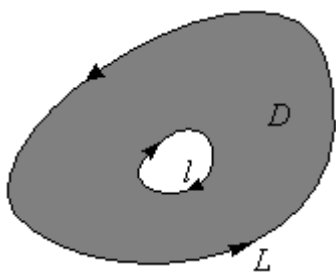


图 8-8

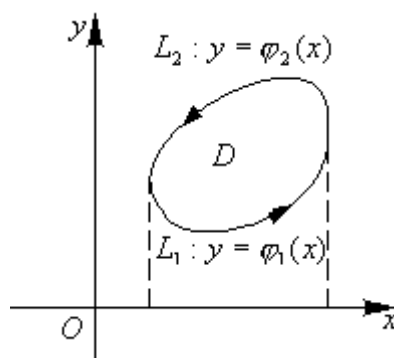


图 8-9

定理 1 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy, \quad (1)$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

证 假设区域既是 X -型又是 Y -型区域 (图 8-9)

设 $D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$. 因为 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 连续, 所以由二重积分的计

算法有

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right\} dx$$

$$= \int_a^b \{P[x, \varphi_2(x)] - P[x, \varphi_1(x)]\} dx.$$

另一方面, 由对坐标的曲线积分的性质及算法有

$$\begin{aligned} \oint_L P dx &= \int_{L_1} P dx + \int_{L_2} P dx \\ &= \int_a^b P[x, \varphi_1(x)] dx + \int_b^a P[x, \varphi_2(x)] dx \\ &= \int_a^b \{P[x, \varphi_1(x)] - P[x, \varphi_2(x)]\} dx \end{aligned}$$

因此,

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P dx. \quad (2)$$

设 $D = \{(x, y) \mid \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y), c \leq y \leq d\}$ 。类似地可证

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q dy. \quad (3)$$

由于 D 既是 X -型又是 Y -型区域, (2)、(3) 同时成立, 合并后即得公式 (1)

当区域不满足上述条件时, 我们可以在 D 内引进一条或几条辅助线把 D 分成有限个部分闭区域, 使得每个部分闭区域都满足上述条件. 例如, 就图 8-10 所示的闭区域 D 来说, 它的边界曲线 L 为 \overline{MNP} 引进一条辅助线 ABC , 把 D 分成 D_1 、 D_2 、 D_3 三部分. 应用公式

(1) 于每个部分, 得

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{MCBAM} P dx + Q dy, \\ \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{ABPA} P dx + Q dy, \\ \iint_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{BCNB} P dx + Q dy, \end{aligned}$$

把三个等式相加, 注意到相加时沿辅助线来回的曲线积分相互抵消, 便得

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,$$

其中 L 的方向对 D 来说为正方向. 一般地, 公式 (1) 对于由分段光滑曲线围成的闭区域都成立. 证毕

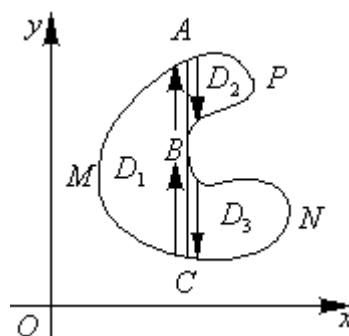


图 8-10

在公式 (1) 中取 $P = -y, Q = x$, 即得

$$2 \iint_D dx dy = \oint_L x dy - y dx.$$

上式右端是闭区域 D 的面积 A 的两倍, 因此有

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

例 1 求椭圆 $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ 所围成图形的面积 A .

解 根据公式 (4) 有

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 \theta + an \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab. \end{aligned}$$

例 2 计算曲线积分 $I = \int_L (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy$, 其中 L 是由直线 $x + y = 1$ 位于

第一象限的线段及圆弧 $x^2 + y^2 = 1$ 位于第二象限的部分组成, 方向如图 8-11 所示.

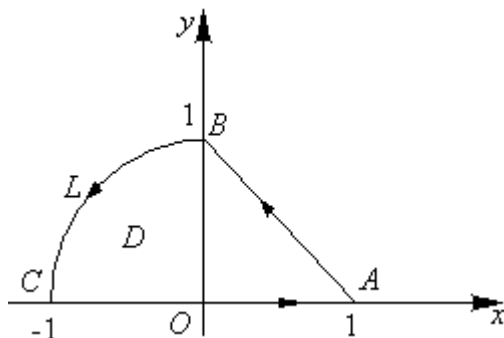


图 8-11

解 作线段 CA , 则 $L \cup CA$ 构成闭合曲线 \widehat{ABCA} , 并取正向, 设它围成的区域为 D ,

由于 $P = x^2 - 2y, Q = 3x + ye^y$

在 D 上满足格林公式的条件, 所以有

$$\begin{aligned} &\oint_{ABCA} (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy \\ &= \iint_D (3 + 2) dx dy = 5 \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

又因为 CA 的方程为

$$y = 0, -1 \leq x \leq 1,$$

所以 $dy = 0dx$, 从而有

$$\int_{CA} (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy = \int_{-1}^1 (x^2 - 0)dx = \frac{2}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \oint_{CA} (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy - \int_{CA} (x^2 - 2y)dx + (3x + ye^y)dy \\ &= 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{3} = \frac{5\pi}{4} + \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

例3 计算 $\iint_D e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域 (图 8-12).

解 令 $P=0, Q=xe^{-y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-y^2}.$$

因此, 由公式 (1) 有

$$\iint_D e^{-y^2} dx dy = \int_{OA+AB+BO} xe^{-y^2} dy = \int_{OA} xe^{-y^2} dy = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

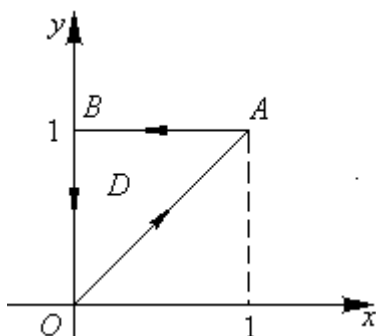


图 8-12

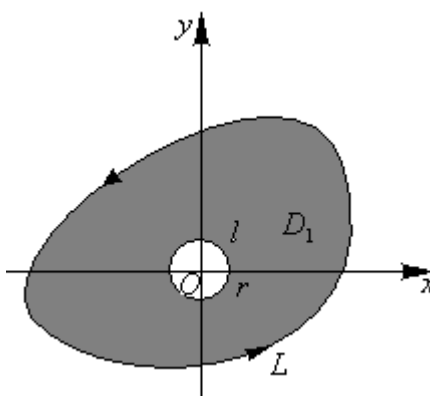


图 8-13

例4 计算 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为一条无重点, 分段光滑且不过原点的连续闭曲线,

L 的方向为逆时针方向.

解 令 $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, 则当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

记 L 所围成的闭区域为 D . 当 $(0, 0) \notin D$ 时, 由公式 (1) 便得 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$

当 $(0, 0) \in D$ 时, 选取适当小的 $r > 0$, 作位于 D 内的圆周 $l: x^2 + y^2 = r^2$, 记 L 和 l 所

围成的区域为 D_1 (图 10-13). 对复连通区域 D_1 应用格林公式, 得

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

其中 l 的方向取逆时针方向. 于是

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} d\theta = 2\pi.$$

8.3.2 高斯公式

格林公式表达了平面闭区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系, 而高斯公式表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系, 这个关系可陈述如下:

定理 1 设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$

$R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy, \quad (1)$$

或

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \quad (1')$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦. 公式 (1) 或 (1') 叫做高斯公式.

证 设闭区域 Ω 为 XY-型区域, 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy} . 这样, 可设 Σ 由 Σ_1, Σ_2

和 Σ_3 三部分组成 (图 10-24), 其中 Σ_1 和 Σ_2 分别由方程 $z = z_1(x, y)$ 和 $z = z_2(x, y)$ 给定,

这里 $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$, Σ_1 取下侧, Σ_2 取上侧; Σ_3 是以 D_{xy} 的边界曲面为准线而母线平行于 z 轴的柱面上的一部分, 取外侧.

根据三重积分的计算法, 有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv &= \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right\} dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} \{ R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)] \} dxdy \end{aligned} \quad (2)$$

根据曲面积分的计算法, 有

$$\iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) dxdy = - \iint_{D_{xy}} R[x, y, z_1(x, y)] dxdy.$$

$$\iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z_2(x, y)] dx dy.$$

因为 Σ_3 上任意一块曲面在 xOy 面上的投影为零, 所以直接根据对坐标的曲面积分的定义可知

$$\iint_{\Sigma_3} R(x, y, z) dx dy = 0.$$

把以上两式相加, 得

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} \{R[x, y, z_2(x, y)] - R[x, y, z_1(x, y)]\} dx dy. \quad (3)$$

比较 (2)、(3) 两式, 得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv = \oiint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy.$$

类似地, 如果 Ω 是 YZ -型或者 ZX -型, 同理可证

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dv = \oiint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz.$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dv = \oiint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx.$$

把以上三式相加即得高斯公式 (1) .

如果 Ω 不是上述的类型, 类似于格林公式证明那样, 进行分割即可得证.

例 5 利用高斯公式计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma} (x - y) dx dy + (y - z) x dy dz,$$

其中 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0, z = 3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个边界曲面的外侧 (图 8-14) .

解 现在, $P = (y - z)x, Q = 0, R = x - y,$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y - z, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

利用高斯公式把所给曲面积分化为三重积分, 再利用柱面坐标计算三重积分:

$$\begin{aligned}
& \oiint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)x dy dz \\
&= \iiint_{\Omega} (y-z)dx dy dz \\
&= \iiint_{\Omega} (\rho \sin \theta - z) \rho d\rho d\theta dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^3 (\rho \sin \theta - z) dz \\
&= -\frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

例 6 利用高斯公式计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

其中 Σ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = h (h > 0)$ 之间的部分的下侧, $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦.

解 现在, 曲面 Σ 不是封闭曲面, 不能直接利用高斯公式. 若设 Σ_1 为 $z = h (x^2 + y^2 \leq h^2)$ 的上侧, 则 Σ 与 Σ_1 一起构成一个封闭曲面, 记它们围成的空间闭区域为 Ω , 利用高斯公式, 便得

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\
&= 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) dv \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h (x + y + z) dz,
\end{aligned}$$

其中 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq h^2\}$, 注意到

$$\iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h (x + y) dz = 0,$$

即得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \iint_{D_{xy}} (h^2 - x^2 - y^2) dx dy = \frac{1}{2} \pi h^4.$$

而

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma_1} z^2 dS = \iint_{D_{xy}} h^2 dx dy = \pi h^4.$$

因此

$$\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma_1} z^2 dS = \frac{1}{2} \pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2} \pi h^4.$$

例 7 设函数 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶及二阶连续偏导数, 证明

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz = \oiint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

其中 Σ 是闭区域 Ω 的整个边界曲面, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 $v(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数,

符号 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 称为拉普拉斯 (Laplace) 算子. 这个公式叫做格林第一公式.

证 因为方向导数

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处的外法线向量的方向余弦. 于是曲面积分

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS &= \oiint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= \oiint_{\Sigma} \left[\left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \beta + \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos \gamma \right] dS \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz + \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

将上式右端第二积分左移, 即得所证等式.

8.3.3 斯托克斯公式

斯托克斯公式将格林公式推广到曲面积分上, 将曲面 Σ 上曲面积分转化为 Σ 的边界曲线积分.

定理 1 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则, 函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在曲面 Σ (连同边界 Γ) 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz. \quad (1)$$

公式 (1) 叫做斯托克斯公式.

证明 略

为了便于记忆, 利用行列式记号把斯托克斯公式 (1) 写成

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz,$$

其中 $\frac{\partial}{\partial y}$ 与 R 的乘积理解为 $\frac{\partial R}{\partial y}$, 其他类似. 斯托克斯的另一形式为

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

其中 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的单位法向量.

当 Σ 是 xOy 面上的一块平面闭区域, 斯托克斯公式就变成格林公式. 因此, 格林公式是斯托克斯公式的一个特殊情形.

例 8 利用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$, 其中 Γ 为平面 $x + y + z = 1$

被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则 (图 8-14).

解 按斯托克斯公式, 有

$$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy.$$

由于 Σ 的法向量的三个方向余弦都为正, 又由于对称性, 上式右端等于

$$3 \iint_{D_{xy}} d\sigma,$$

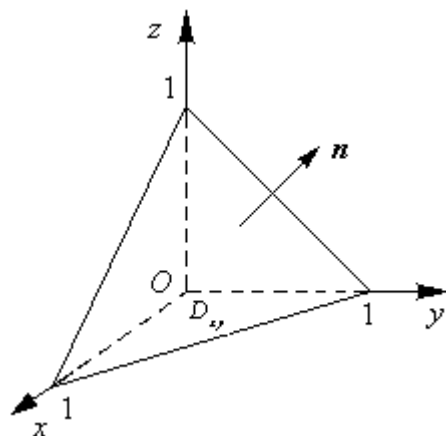


图 8-14

其中 D_{xy} 为 xOy 面上由直线 $x + y = 1$ 及两条坐标围成的三角形闭区域, 因此

$$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz = \frac{3}{2}$$

作业 2, 3, 5 偶数, 8, 10

8.4 平面曲线积分与路径无关的条件

8.4.1 曲线积分与路径无关的条件

设 G 是一个区域, $P(x, y)$ 以及 $Q(x, y)$ 在区域 G 内具有一阶连续偏导数. 如果对于 G 内任意指定的两个

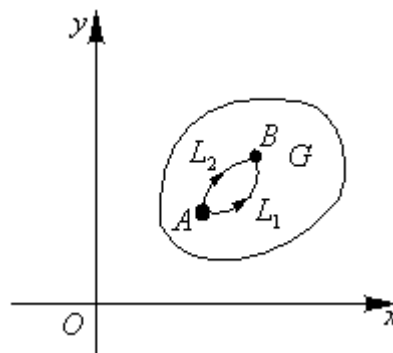


图 8-15

点 A 、 B 以及 G 内从点 A 到点 B 的任意两条曲线 L_1, L_2 (图 8-15), 等式

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

恒成立, 就说曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内与路径无关.

在以上叙述中注意到, 如果曲线积分与路径无关, 那么

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

(图 8-15)。由于

$$\int_{L_2} Pdx + Qdy = -\int_{L_2^-} Pdx + Qdy,$$

所以

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2^-} Pdx + Qdy = 0,$$

从而

$$\oint_{L_1 + L_2^-} Pdx + Qdy = 0,$$

这里 $L_1 + L_2^-$ 是一条有向闭曲线. 因此, 在区域 G 内由曲线积分与路径无关可推得在 G 内沿闭曲线的曲线积分为零. 反过来在区域 G 内沿任意闭曲线的曲线积分为零, 也可推得在 G 内曲线积分与路径无关. 由此得出结论: 曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关相当于沿 G 内任意闭曲线 C 的曲线积分 $\oint_C Pdx + Qdy$ 等于零.

定理 2 设区域 G 是一个单连通域, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在 G 内与路径无关 (或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零) 的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (5)$$

在 G 内恒成立.

证 先证这条件是充分的. 在 G 内任取一条曲线 C , 要证当条件 (5) 成立时有 $\oint_C Pdx + Qdy = 0$. 因为 G 是单连通的, 所以闭曲线 C 所围成的闭区域 D 全部在 G 内, 于是 (5) 式在 D 上恒成立. 应用格林公式, 有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C Pdx + Qdy.$$

上式左端的二重积分等于零, 从而右端的曲线积分等于零.

再证条件 (5) 是必要的, 现在要证的是: 如果沿 G 内的任意闭曲线的曲线积分为零, 那么 (5) 式在 G 内恒成立. 用反证法来证. 假设上述论断不成立, 那么 G 内至少有一点 M_0 ,

使

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0} \neq 0.$$

不妨假定

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0} = \eta > 0.$$

由于 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 G 内连续, 可以在 G 内取得一个以 M_0 为圆心、半径足够小的圆形闭区域

K , 使得在 K 上恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geq \frac{\eta}{2}.$$

于是由格林公式及二重积分的性质就有

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \geq \frac{\eta}{2} \cdot \sigma, \quad ,$$

这里 γ 是 K 的正向边界曲线, σ 是 K 的面积. 因为 $\eta > 0$, $\sigma > 0$, 从而

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy > 0.$$

这结果与沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零的假定矛盾, 可见 G 内使 (5) 式不成立的点不可能存在, 即 (5) 式在 G 内处处成立. 证毕.

在定理 2 中, 要求区域 G 是单连通区域, 且函数 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数. 如果这两个条件之一不能满足, 那么定理的结论不能保证成立. 例如, 在例 4 中我们

已经看到, 当 L 所围成的区域含有原点时, 虽然除去原点外, 恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 但沿闭曲线

的积分 $\oint_L Pdx + Qdy \neq 0$, 其原因在于区域含有破坏函数 P 、 Q 及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 连续性条件的点

O , 这种点通常称为奇点.

定理 3 设区域 G 是一个单连通域, 函数 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 在 G 内为某一函数 $u(x, y)$ 的全微分的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (5)$$

在 G 内恒成立.

证 先证必要性, 假设存在着某一函数 $u(x, y)$, 使得

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

则必有
$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

从而
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

由于 P 、 Q 具有一阶连续偏导数, 所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 连续, 因此 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, 即 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

这就证明了条件 (5) 是必要的.

再证充分性. 设已知条件 (5) 在 G 内恒成立, 则由定理 2 可知, 起点为 $M_0(x_0, y_0)$ 终点为 $M(x, y)$ 的曲线积分在区域 G 内域路径无关, 于是可把这个曲线积分写作

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

当起点 $M_0(x_0, y_0)$ 固定时, 这个积分的值取决于终点 $M(x, y)$, 因此, 它是 x, y 的函数,

把这函数记作 $u(x, y)$, 即

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (6)$$

下面来证明这函数 $u(x, y)$ 的全微分就是 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, 因为 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 都是连续的, 因此只要证明

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

按偏导数的定义, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}.$$

由 (6) 式, 得

$$u(x + \Delta x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)$$

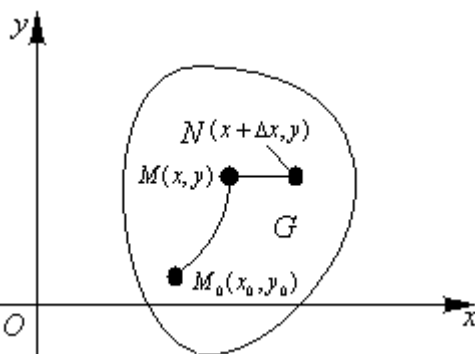


图 8-16

由于积分与路径无关, 可以取先从 M_0 到 M ,

然后沿平行于 x 轴的直线段从 M 到 N 作为上式右端曲线积分的路径 (图 8-16). 这样就有

$$u(x + \Delta x, y) = u(x, y) + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

从而

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

因为直线段 MN 的方程为 $y = \text{常数}$ ，按对坐标的曲线积分的计算法，上式称为

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y)dx.$$

应用积分中值定理，得

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

上式两边除以 Δx ，并令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取极限。由于 $P(x, y)$ 的偏导数在 G 内连续， $P(x, y)$ 本身也一定连续，于是得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

这就证明了条件 (5) 是充分的，证毕。

8.4.2 原函数、全微分方程

定理 3 中的 $u(x, y)$ 称为 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 的一个原函数。 $u(x, y)$ 可用下面公式求得

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

这时 $u(x, y) + C$ 就是它的原函数的一般表达式。我们把求 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 原函数的过程称为全微分求积。

为简便起见，我们可以选取图 8-17 的路径

M_0RM 或 M_0SM 作为积分路线在公式 (6) 中取

M_0RM 为积分路线，得

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy.$$

在公式 (6) 中取 M_0SM 为积分路线，则函数 u 也

可表示为

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx.$$

例 5 验证： $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ 在右半平面 ($x > 0$) 内是某个函数的全微分，并求出一个这样

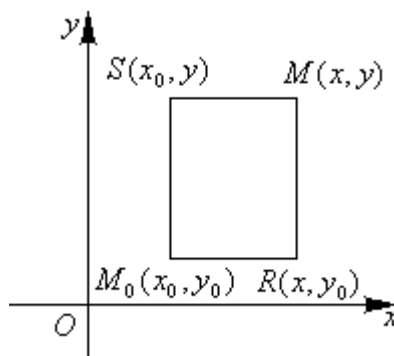


图 8-17

的函数.

解 在例 4 中已经知道, 令

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

就有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在右半平面恒成立, 因此在右半平面内, $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 是某个函数

的全微分.

取积分路径如图 8-18 所示, 利用公式 (6) 的所求函数为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\ &= \int_{AB} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + \int_{BC} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\ &= 0 + \int_0^y \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \left[\arctan \frac{y}{x} \right]_0^y = \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

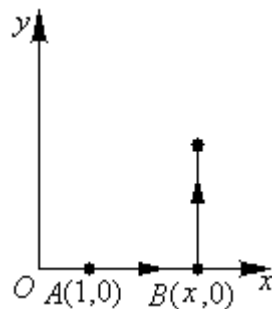


图 8-18

例 6 验证: 在整个 xOy 平面内, $xy^2dx + x^2ydy$ 是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

解 现在 $P = xy^2, Q = x^2y$, 且 $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xOy 面内恒成立, 因此在

整个 xOy 面内, $xy^2dx + x^2ydy$ 是某个函数的全微分. 即, 存在函数 $u(x, y)$ 使得

$$du = xy^2dx + x^2ydy$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy^2.$$

故

$$u = \int xy^2dx = \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的待定函数. 由此得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y + \varphi'(y).$$

又 u 必须满足

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y$$

故

$$x^2 y + \varphi'(y) = x^2 y.$$

从而 $\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C$, 所求函数为 $u = \frac{x^2 y^2}{2} + C$.

如果表达式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 是某一个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则称微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

为一阶全微分方程。可以使用上述方法求解一阶全微分方程。

例 7 求解微分方程 $(x^2 - 2xy + 2y^2)dx - (x^2 - 4xy)dy = 0$

解 因为 $P = x^2 - 2xy + 2y^2, Q = -x^2 + 4xy$, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x + 4y = \frac{\partial P}{\partial y}$$

所以原方程是全微分方程, 显然 P, Q 及 $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在全平面上连续, 故可取 $x_0 = 0, y_0 = 0$,

于是

$$u(x, y) = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y -(x^2 - 4xy)dy = \frac{x^3}{3} - x^2 y + 2xy^2$$

因此原方程通解为

$$\frac{x^3}{3} - x^2 y + 2xy = c$$

其中 c 为任意常数。

作业 2, 4 (2) (4), 5, 7

8.5 场论简介

8.5.1 向量场的散度

1. 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

对于曲面积分 $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$ 在怎样的条件下与曲面 Σ 无关而只取决于 Σ

的边界曲线? 这问题相当于在怎样的条件下, 沿任意闭曲面的曲面积分为零?

对空间区域 G , 如果 G 内任一闭曲面所围成的区域全属于 G , 则称 G 是空间二维单连通区域; 如果 G 内任一闭曲线总可以张一片完全属于 G 的曲面, 则称 G 是空间一维单连通区域.

定理 2 设 G 是空间二维单连通区域, $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

在 G 内与所取曲面 Σ 无关而只取决于 Σ 的边界曲线(或沿 G 内任一闭曲面的曲面积分为零)的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

在 G 内恒成立.

证 类似于第三节第二目的证明.

2. 通量与散度

设稳定流动的不可压缩流体(假定密度为 1)的速度场由

$$\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

给出, 其中 P 、 Q 、 R 假定具有一阶连续偏导数, Σ 是速度场中的一片有向曲面, 又

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

是 Σ 在点 (x, y, z) 处的单位法向量, 则由第五节第一目知道, 单位时间内流体经过 Σ 流向指定侧的流体总质量 Φ 可用曲面积分来表示:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \\ &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} v_n dS \end{aligned}$$

其中 $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ 表示流体的速度向量 \mathbf{v} 在有向曲面 Σ 的法向量上的投影. 如果 Σ 是高斯公式(1)中闭区域 Ω 的边界曲面的外测, 那么公式(1)的右侧可解释为单位时间内离开闭区域 Ω 的流体的总质量. 由于假定流体是不可压缩的, 且流动是稳定的, 因此在流体离开 Ω 的同时, Ω 内部必须有产生流体的“源头”产生同样多的流体来进行补充. 所以高斯公式左端可解释为分布在 Ω 内的源头在单位时间内所产生的流体的总质量.

为简便起见, 把高斯公式(1)改写成

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} v_n dS.$$

以闭区域 Ω 的体积 V 除上式两端, 得

$$\frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \frac{1}{V} \oiint_{\Sigma} v_n dS.$$

上式左端表示 Ω 内的源头在单位时间内所产生的流体质量的平均值。应用积分中值定理于上式左端，得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \bigg|_{(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{1}{V} \oiint_{\Sigma} v_n dS,$$

这里 (ξ, η, ζ) 是 Ω 内的某个点. 令 Ω 缩向一点 $M(x, y, z)$ ，取上式的极限，得

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{V} \oiint_{\Sigma} v_n dS$$

上式左端称为 \mathbf{v} 在点 M 的散度，记作 $\operatorname{div} \mathbf{v}$ ，即

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$\operatorname{div} \mathbf{v}$ 在这里可看作稳定流动的不可压缩流体在点 M 的源头强度——在单位时间内所产生的流体质量. 如果 $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 为负，表示点 M 处流体在消失.

一般地，设某向量场由

$$\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

给出，其中 P 、 Q 、 R 具有一阶连续偏导数， Σ 是场内的一片有向曲面， \mathbf{n} 是 Σ 在点 (x, y, z)

处的单位法向量，则 $\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ 叫做向量场 \mathbf{A} 通过曲面 Σ 向着指定侧的通量（或流量），而

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 叫做向量场 \mathbf{A} 的散度，记作 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ ，即

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

高斯公式现在可以写成

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \oiint_{\Sigma} A_n dS,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的边界曲面，而

$$A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

是向量 \mathbf{A} 在曲面 Σ 的外测法向量上的投影.

例 1 设向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = (xy, ye^x, xz)$ ，求 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 在点 $(0, 1, 0)$ 处的散度 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ 。

解 这里 $P=xy$, $Q=ye^x$, $R=xz$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y + e^x + x$$

于是

$$\operatorname{div} A|_{(0,1,0)} = 1 + 1 + 0 = 2$$

8.5.2 向量场的旋度

1. 空间曲线积分与路径无关的条件

定理 2 设空间区域 G 是一维单连通域, 函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则空间曲线积分 $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ 在 G 内与路径无关 (或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零) 的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (5)$$

在 G 内恒成立.

证 略

定理 3 设区域 G 是空间一维单连通区域, 函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则表达式 $Pdx + Qdy + Rdz$ 在 G 内成为某一函数 $u(x, y, z)$ 的全微分的充分必要条件是等式 (5) 在 G 内恒成立; 当条件 (5) 满足时, 这函数 (不计一常数之差) 可用下式求出:

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy + Rdz \quad (6)$$

或用定积分表示为 (按图 10-29 取积分路径)

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz. \quad (6')$$

其中 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 G 内某一定点, 点 $M(x, y, z) \in G$.

2. 环流量与旋度

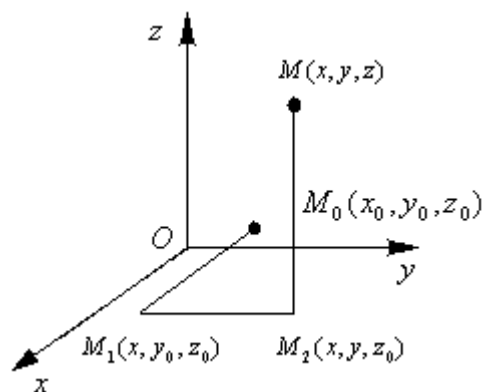
设斯托克斯公式中的有向曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的单位法向量为

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

而 Σ 的正向边界曲线 Γ 在点 (x, y, z) 处的单位切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = \cos \lambda \mathbf{i} + \cos \mu \mathbf{j} + \cos \nu \mathbf{k}$$

则斯托克斯公式可用对面积的曲面积分及对弧长的曲线积分表示为



$$\iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS$$

$$= \oint_{\Gamma} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) ds. \quad (7)$$

设有向量场

$$\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

在坐标轴上的投影分别为

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

的向量叫做向量场 \mathbf{A} 的旋度, 记作 $\mathbf{rot} \mathbf{A}$, 即

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (8)$$

现在, 斯托克斯公式可写成向量的形式

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds,$$

或

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{rot} \mathbf{A})_n dS = \oint_{\Gamma} A_{\tau} ds, \quad (9)$$

其中

$$(\mathbf{rot} \mathbf{A})_n = \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma$$

为 $\mathbf{rot} \mathbf{A}$ 在 Σ 的法向量上的投影, 而

$$A_{\tau} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} = P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu$$

为向量 \mathbf{A} 在 Γ 的切向量上的投影.

沿有向闭曲线 Γ 的曲线积分

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} A_{\tau} ds$$

叫做向量场 \mathbf{A} 沿有向闭曲面 Γ 的环流量. 斯托克斯公式 (9) 现在可叙述为: 向量场 \mathbf{A} 沿有向闭曲线 Γ 的环流量等于向量场 \mathbf{A} 的旋度场通过 Γ 所张的曲面 Σ 的通量, 这里 Γ 的正向与 Σ 的侧应符合右手规则.

为便于记忆, $\mathbf{rot} \mathbf{A}$ 的表达式 (8) 可利用行列式记号形式地表示为

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

作业 2, 4 (2) (4), 6

第九章 无穷级数

9.1 常数项级数的概念和基本性质

9.1.1 级数的概念

求半径为 R 的球的面积：首先作圆的内接正六边形，设其面积 a_1 为圆的面积 A 的一个粗糙近似值。为了能够精确地计算 A 的值，我们以这个正六边形的每个边为底分别作一个顶点在圆上的等腰三角形，算出它们的面积之和 a_2 。那么 $a_1 + a_2$ （即内接正十二边形的面积）就是 A 的一个较好的近似值。同样地以这个正十二边形的边为底作分别作一个顶点在圆上的等腰三角形，算出它们的面积之和 a_3 。那么 $a_1 + a_2 + a_3$ （即内接正二十四边形的面积）就是 A 的一个更好的近似值。如此继续下去，内接正 3×2^n 边形的面积就逐步逼近圆面积：

$$A \approx a_1, A \approx a_1 + a_2, A \approx a_1 + a_2 + a_3, \cdots, A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

如果内接正多边形的边数无限增多，即 n 无限增大，则和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 的极限就是所要求的圆面积 A 。这时和式中的项数无限增多，于是出现了无穷多个数量依次相加的数学式子。一般地，如果给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots,$$

则由这数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

叫做（常数项）无穷级数，简称（常数项）级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项。

作级数（1）的前 n 项和

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

s_n 称为级数（1）的部分和。当 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots$ 时，它们构成一个新的数列：

$$s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots, s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots.$$

根据这个数列有没有极限, 引进无穷级数(1)的收敛与发散的概念.

定义 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

收敛, 这时极限 s 叫做这级数的和, 并写成

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots;$$

如果 $\{s_n\}$ 没有极限, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

称 $r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数的余项. 用 s_n 来代替 s 所产生的误差是这个余项的绝对值 $|r_n|$.

例 1 无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

叫做等比级数(又称几何级数), 其中 $a \neq 0, q$ 叫做级数的公比. 试讨论该级数的收敛性.

解 因为该级数的部分和为

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q}$, 故级数收敛, 且和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在, 故级数发散;

当 $q = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 也不存在, 故级数也发散;

当 $q = -1$ 时, 级数变成

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots,$$

易知级数也发散.

综上, 当 $|q| < 1$ 时, 等比级数收敛, 且其和为 $\frac{a}{1-q}$; 当 $|q| \geq 1$ 时, 等比级数发散.

例 2 讨论级数 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots$ 的收敛性.

解 由于
$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

因此

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+n}\right) = 1,$$

所以这级数收敛, 它的和是 1.

9.1.2 收敛级数的基本性质

性质 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛, 且其和为 ks .

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 s, σ , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且其和

为 $s \pm \sigma$.

性质 3 在级数中去掉, 加上或改变有限项, 不会改变级数的收敛性.

证 只证在级数的前面去掉, 加上或改变有限项, 不会改变级数的收敛性.

设将级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$$

的前 k 项去掉, 则得级数

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots.$$

于是新得的级数的部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} = s_{k+n} - s_k,$$

其中 s_{k+n} 是原来级数的前 $k+n$ 项的和. 因为 s_k 是常数, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, σ_n 与 s_{k+n} 或者同时收敛或者同时发散.

性质 4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对这级数的项任意加括号后所成的级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots \quad (4)$$

仍收敛, 且其和不变.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (相应于前 n 项) 的部分和为 s_n , 加括号后所成的级数 (4) (相应于前 k

项) 的部分和为 A_k , 则

$$A_1 = u_1 + \cdots + u_{n_1} = s_{n_1},$$

$$A_2 = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) = s_{n_2},$$

.....

$$A_k = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) = s_{n_k}$$

.....

可见, 数列 $\{A_k\}$ 是数列 $\{s_n\}$ 的一个子数列. 由数列 $\{s_n\}$ 的收敛性以及收敛数列与其子数列

的关系可知, 数列 $\{A_k\}$ 必定收敛, 且有 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} s_n$,

即加括号后所成的级数收敛, 且其和不变.

如果加括号后所成的级数收敛, 则不能断定去括号后原来的级数也收敛. 例如, 级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots$$

收敛于零, 但级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的.

性质 5 (级数收敛的必要条件) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则它的一般项 u_n 趋于零, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

证 略

级数的一般项收敛于零并不是级数收敛的充分条件. 有些级数虽然一般项趋于零, 但仍然是发散的. 例如, 调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \quad (5)$$

虽然它的一般项趋于零, 但它是发散的.

例 3 证明调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 是发散的.

证 将原级数的第一项和第二项括起来, 然后将第 $2^m + 1$ 项到第 2^{m+1} ($m = 1, 2, \cdots$) 括起来, 的以新级数

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m + 1} + \frac{1}{2^m + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}\right) + \cdots.$$

注意这个级数的一般项 $\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}$ 中共有 $2^m (m=1,2,\cdots)$ 项, 所以

$$\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} > \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}.$$

说明新级数的一般项不趋于零, 故不收敛, 从而原调和级数发散.

作业 1,2,5,7

9.2 正项级数及其敛散性的判别法

9.2.1 正项级数收敛的基本定理

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $u_n \geq 0$, 则称此级数为正项级数, 这时部分和数列 $\{s_n\}$ 显然是单

调增加数列, 若 $\{s_n\}$ 有界, 即 $s_n \leq M$, 由单调有界原理, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛于 s , 且

$s_n \leq s \leq M$. 反之, 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, 从而 $\{s_n\}$ 有界。

基本定理 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是: 它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界。

例 1 讨论 p -级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \quad (2)$$

的收敛性, 其中常数 $p > 0$.

解 设 $p \leq 1$, 这时级数的各项不小于调和级数的对应项: $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, 但调和级数发散,

其部分和为无穷大, 因而该级数的部分和数列无界, 由基本定理, 当 $p \leq 1$ 时级数 (2) 发散.

设 $p > 1$, 因为当 $k-1 \leq x \leq k$ 时, 有 $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{x^p}$, 所以

$$\frac{1}{k^p} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k^p} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx, (k=2,3,\cdots)$$

从而级数 (2) 的部分和

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^p} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \\ &= 1 + \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{n^{p-1}} \right) < 1 + \frac{1}{p-1}, (n=2,3,\cdots) \end{aligned}$$

这说明数列 $\{s_n\}$ 有界, 因此级数 (2) 收敛.

综上所述, p -级数 (2) 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

9.2.2 比较判别法

比较审敛法 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \cdots)$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收

敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 反之, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散;

证 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于和 σ , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leq \sigma (n=1, 2, \cdots),$$

即部分和数列 $\{s_n\}$ 有界, 由基本定理知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

反之, 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必发散, 因为若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则由上面的

证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛, 显然于假设矛盾.

推论 1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 且存在自然数 N , 使

当 $n \geq N$ 时有 $u_n \leq kv_n (k > 0)$ 成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 且当 $n \geq N$

时有 $u_n \geq kv_n (k > 0)$ 成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 2 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$ 的敛散性。

解 显然这时正项级数, 而且 $\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n < \left(\frac{1}{2} \right)^n, n=1, 2, \cdots,$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比级数, 故收敛, 再由比较法即知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$ 收敛.

推论 2 (比较审敛法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, (其中

$v_n \neq 0, n=1,2,\dots$), 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

则

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数同时敛散;

(2) 当 $l=0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

(3) 当 $l = +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.

证 由推论 1 易证。

例 3 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 的收敛性.

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 根据推论 2 知此级数发散.

9.2.3 比值判别法

定理 (比值审敛法, 达朗贝尔 (D'Alembert) 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 如果

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则当 $\rho < 1$ 时级数收敛; $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$) 时级数发散; $\rho = 1$ 时级数可

能收敛也可能发散.

证 (i) 当 $\rho < 1$. 取一个适当小的正数 ε , 使得 $\rho + \varepsilon = r < 1$, 根据极限定义, 存在自然数 m , 当 $n \geq m$ 时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = r.$$

因此 $u_{m+1} < ru_m, u_{m+2} < ru_{m+1} < r^2 u_m, \dots, u_{m+k} < r^k u_m, \dots$. 而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r^k u_m$ 收敛 (公比

$r < 1$), 根据定理 2 的推论, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(ii) 当 $\rho > 1$. 取一个适当小的正数 ε , 使得 $\rho - \varepsilon > 1$. 根据极限定义, 当 $n \geq m$ 时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon > 1,$$

也就是

$$u_{n+1} > u_n.$$

所以当 $n \geq m$ 时, 级数的一般项 u_n 时逐渐增大的, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. 根据级数收敛的充要条

件可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

类似地, 可以证明当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(iii) 当 $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散. 例如 p -级数 (2), 不论 p 为何值都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1.$$

但 p -级数, 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散. 因此只根据 $\rho = 1$ 不能判定级数的收敛性.

例 4 证明级数

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots$$

是收敛的, 并估计以级数的部分和 s_n 近似代替和 s 所产生的误差.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

根据比值审敛法可知所给级数收敛.

以这级数的部分和 s_n 近似代替和 s 所产生的误差为

$$\begin{aligned} |r_n| &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \right) \\ &< \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots \right) = \frac{1}{n!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{(n-1)(n-1)!}. \end{aligned}$$

例 5 判定级数 $\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \cdots + \frac{n!}{10^n} + \cdots$ 的收敛性.

解 因为 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \frac{n+1}{10}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty.$

根据比值审敛法可知所给级数发散.

9.2.4 根值判别法

定理 (根值判别法, 柯西判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则当 $\rho < 1$

时级数收敛, $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$) 时级数发散, $\rho = 1$ 时级数可能收敛有可能发散.

类似于比值判别法

例 6 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n} \right)^n$ 的收敛性, 其中 $a_n \rightarrow a \neq 0, a_n, b, a$ 皆为正数.

解 因为 $\sqrt[n]{u_n} = \frac{b}{a_n} \rightarrow \frac{b}{a} (n \rightarrow \infty)$, 所以当 $b < a$ 时级数收敛, 当 $b > a$ 时级数发散.

当 $b = a$ 时, $\rho = 1$ 根式法失效, 未定.

定理 (极限审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,

(1) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = l > 0$ (或), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(2) 如果 $p > 1$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = l (0 \leq l < +\infty)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证 (1) 在极限形式的比较审敛法中, 取 $v_n = \frac{1}{n}$, 由调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 知结论成立。

(2) 在极限形式的比较审敛法中, 取 $v_n = \frac{1}{n^p}$, 当 $p > 1$ 时, p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故结论成立。

例 7 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ 的收敛性.

解 因 $\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{n^2} (n \rightarrow \infty)$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1,$$

根据极限审敛法, 知所给级数收敛.

9.2.5 积分判别法

定理(积分判别法) 设非负函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调减少, 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与反常积分

分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性相同.

证明 由于 $f(x)$ 单调减少, 且 $f(x) \geq 0$, 则当 $x \in [n-1, n]$ 时, 有

$$f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$$

从而
$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(n-1) \quad n = 2, 3, \dots$$

相加得
$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^m f(x)dx \leq 1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

即 $\{S_m\}$ 有界, 故级数收敛.

若反常积分收敛, 由函数 $f(x)$ 的非负性, 即知 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$, 级数的部分和

$$\sum_{n=1}^m f(n) \geq \int_1^{m+1} f(x)dx$$

显然, $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = +\infty$, 故级数发散.

例 8 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ 的敛散性, 其中 $p > 0$.

解 $p > 0$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$ 在 $[2, +\infty)$ 上是非负递减函数. 由于反常积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \begin{cases} +\infty, & \text{当 } p \leq 1 \text{ 时} \\ \frac{1}{(p-1) \ln^{p-1} 2}, & \text{当 } p > 1 \text{ 时} \end{cases}$$

故当 $p \leq 1$ 时级数发散, 当 $p > 1$ 时级数收敛.

作业 1 偶数, 2 偶数, 3 偶数, 4 偶数, 5 偶数, 8, 9, 12

9.3 任意项级数及其敛散性的判别法

9.3.1 交错级数及其审敛法

所谓交错级数是这样的级数, 它的各项是正负交错的, 从而可以写成下面的形式:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, \quad (3)$$

或

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots, \quad (4)$$

其中 u_1, u_2, \cdots 都是正数。按级数 (3) 的形式来证明关于交错级数的一个审敛法

定理 7 (莱布尼茨定理) 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足条件:

$$(1) u_n \geq u_{n+1} (n=1, 2, 3, \cdots); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。

证 先证明前 $2n$ 项的和 s_{2n} 的极限存在。为此把 s_{2n} 写成两种形式:

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

及

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

根据条件 (1) 知道括弧内中的差都是非负的。由第一种形式可见数列 $\{s_{2n}\}$ 是单调增加的,

由第二种形式可见 $s_{2n} < u_1$ 。于是, 根据单调有界数列必有极限的准则知道, 当 n 无限增大

时, s_{2n} 趋于一个极限 s , 并且 s 不大于 u_1 : $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s \leq u_1$ 。

再证明前 $2n+1$ 项的和 s_{2n+1} 的极限也是 s 。事实上, 我们有

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}.$$

由条件 (2) 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} + u_{2n+1}) = s.$$

由于级数的前偶数项的和与奇数项的和趋于同一极限 s , 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 的部分和

s_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时具有极限 s 。这就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛于和 s , 且 $s \leq u_1$ 。

这时余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$, 其绝对值 $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$,

上式右端也是一个交错级数, 它也满足收敛的两个条件, 所以其和小于级数的第一项, 也就

是说 $|r_n| \leq u_{n+1}$. 证明完毕.

例如, 交错级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$

满足条件

$$(1) \quad u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

及

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

所以它是收敛的, 且其和 $s < 1$ 。如果取前 n 项的和

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

作为 s 的近似值, 所产生的误差 $|r_n| \leq \frac{1}{n+1} (= u_{n+1})$ 。

例 2 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{\pi}{3n}$ 的敛散性。

解 由于 $0 < \frac{\pi}{3n} < \frac{\pi}{2}$, 对于一切 $n \geq 1$, 故

$$u_n = \tan \frac{\pi}{3n} > 0 \quad (n=1, 2, \cdots)$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{\pi}{3n}$ 是交错级数, 并满足

$$u_n > \tan \frac{\pi}{3n} > \tan \frac{\pi}{3(n+1)} = u_{n+1} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \frac{\pi}{3n} = 0$, 故由莱布尼兹判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{\pi}{3n}$ 收敛。

9.3.2 绝对收敛与条件收敛

现在我们讨论一般的级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

它的各项为任意实数。如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 各项的绝对值所构成的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛; 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收

敛。容易知道, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ 是绝对收敛级数, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 是条件收敛级数。

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛。

证 令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n=1,2,\cdots)$$

显然 $v_n \geq 0$ 且 $v_n \leq |u_n|$ ($n=1,2,\cdots$)。因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 故由比较审敛法知道, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 也收敛。而 $u_n = 2v_n - |u_n|$, 由收敛级数的基本性质可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 定理证毕.

例 3 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 的收敛性.

解 因为 $\left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right|$ 也收敛。由定理 8

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛.

一般说来, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 我们不能断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散, 但是, 如果是用

比值审敛法或根值审敛法根据 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho > 1$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho > 1$ 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发

散, 则我们可以断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定发散. 这是因为从 $\rho > 1$ 可推知 $|u_n|$ 不趋于零 ($n \rightarrow \infty$),

从而 u_n 不趋于零 ($n \rightarrow \infty$), 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是发散的.

例 4 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n^s}$ ($s > 0, \alpha > 0$) 是绝对收敛、条件收敛还是发散的?

解 考虑绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-\alpha)^n}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^s}$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\frac{\alpha^n}{n^s}} = \frac{(n+1)^s}{\alpha} = \alpha$, 故由比值判别法

知当 $\alpha < 1$ 时级数绝对收敛, 当 $\alpha > 1$ 时级数发散。当 $\alpha = 1$ 时级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$, 其绝对

值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, 故由比较判别法知当 $s > 1$ 时级数绝对收敛, 当 $0 < s \leq 1$ 时由莱

布尼兹判别法知级数条件收敛, 总结如下:

当 $0 < \alpha < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n^s}$ ($s > 0, \alpha > 0$) 绝对收敛;

当 $\alpha > 1$ 时级数发散;

当 $\alpha = 1$, 且 $s > 1$ 时, 级数绝对收敛;

当 $\alpha = 1$, 且 $0 < s \leq 1$ 时, 级数条件收敛。

作业 1 偶数, 3, 5, 6

9.4 幂级数

9.4.1 函数项级数的概念

如果给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots,$$

则由这函数列构成的表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

称为定义在区间 I 上的 (函数项) 无穷级数, 简称 (函数项) 级数。

对于每一个确定的值 $x_0 \in I$, 函数项级数 (1) 成为常数项级数

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (2)$$

这个级数 (2) 可能收敛也可能发散。如果 (2) 收敛, 称点 x_0 是函数项级数 (1) 的收敛点;

如果 (2) 发散, 称点 x_0 是函数项级数 (1) 的发散点。函数项级数 (1) 的所有收敛点的全体称为它的收敛域, 所有发散点的全体称为它的发散域。

对应于收敛域内的任意一个数 x , 函数项级数称为一收敛的常数项级数, 因而有一确定的和 s 。这样, 在收敛域上函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$, 通常称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数, 这函数的定义域就是级数的收敛域, 并写成

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

把函数项级数 (1) 的前 n 项的部分和记为 $s_n(x)$, 则在收敛域上有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x).$$

仍把 $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$ 叫做函数项级数的余项 (当然, 只有 x 在收敛域上 $r_n(x)$ 才有意义), 于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$.

例 1 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数项级数, 当 $|x| < 1$

时级数收敛; 其他情况级数发散。

9.4.2 幂级数及其收敛性
型为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad (3)$$

的函数项级数称为幂级数, 其中常数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 称为幂级数的系数。

定理 1 (阿贝尔 (Abel) 定理) 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) 时收敛, 则适

合不等式的 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 使这幂级数绝对收敛。反之, 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ 时

发散, 则适合不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x 使这幂级数发散。

证 先设 x_0 是幂级数 (3) 的收敛点, 及级数

$$= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots,$$

收敛。根据级数三类的必要条件, 这时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$,

于是存在一个常数 M , 使得 $|a_n x_0^n| \leq M$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$)。

这样级数 (3) 的一般项的绝对值

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

因为当 $|x| < |x_0|$ 时, 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛 (公比 $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$), 所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛,

也就是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛。

第二部分用反证法, 若幂级数当 $x = x_0$ 时发散而有一点 x_1 适合 $|x_1| > |x_0|$ 使级数收敛,

则根据本定理的第一部分, 级数当 $x = x_0$ 时应收敛, 这与所设矛盾。定理得证。

有定理我们知道,如果幂级数在 $x = x_0$ 收敛,则对于开区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内的任何 x 都收敛;如果幂级数在 $x = x_0$ 发散,则对于闭区间 $[-|x_0|, |x_0|]$ 外的任何 x 都发散。

推论 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x = 0$ 一点收敛,也不是在整个数轴上都收敛,则必有一个确定的正数 R 存在,使得

当 $|x| < R$ 时,幂级数绝对收敛;

当 $|x| > R$ 时,幂级数发散;

当 $x = R$ 与 $x = -R$ 时幂级数可能收敛也可能发散。

正数 R 通常叫做幂级数 (3) 的收敛半径。开区间 $(-R, R)$ 叫做幂级数 (3) 的收敛区间。

再由幂级数在 $x = \pm R$ 处的收敛性就可以决定它的收敛域是 $(-R, R)$ 、 $[-R, R)$ 、 $(-R, R]$ 或 $[-R, R]$ 这四个区间之一。

如果幂级数 (3) 只在 $x = 0$ 处收敛,这时收敛域只有一点 $x = 0$,但为了方便起见,规定这时收敛半径 $R = 0$;如果幂级数 (3) 对一切 x 都收敛,则规定收敛半径 $R = \pm\infty$,这时收敛域是 $(-\infty, +\infty)$,这两种情形确实都是存在的。

定理(收敛半径算法) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 其中 a_n 、 a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项的系数,则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

证 考察幂级数 (3) 的各项取绝对值所成的级数

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots \quad (4)$$

这级数相邻两项之比为

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|.$$

(1) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ ($\rho \neq 0$) 存在,根据比值审敛法,则当 $\rho |x| < 1$ 即 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时,

级数 (4) 收敛, 从而级数 (3) 绝对收敛; 当 $\rho |x| > 1$ 即 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, 级数 (4) 发散并且从某一个 n 开始

$$|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_nx^n|,$$

因此一般项 $|a_nx^n|$ 不能趋于零, 所以 a_nx^n 也不能趋于零, 从而级数 (3) 发散。于是收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$ 。

(2) 如果 $\rho = 0$, 则对任何 $x \neq 0$, 有 $\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 所以级数 (4) 收敛, 从而级数 (3) 绝对收敛。于是 $R = +\infty$ 。

(3) 如果 $\rho = +\infty$, 则对于除 $x = 0$ 外的其他一切 x 值, 级数 (3) 必发散, 否则由定理 1 知道将有点 $x \neq 0$ 使级数 (4) 收敛。于是 $R = 0$ 。

例 2 求幂级数 $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$ 的收敛半径与收敛域。

解 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = 1$, 所以收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 1$ 。

对于端点 $x = 1$, 级数称为交错级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$, 级数收敛;

对于端点 $x = -1$, 级数称为 $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} - \cdots$, 级数发散。因此, 收敛域是 $(-1, 1]$ 。

例 3 求幂级数 $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$ 的收敛域。

解 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$,

所以收敛半径 $R = +\infty$, 从而收敛域是 $(-\infty, +\infty)$ 。

例 4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 的收敛半径 (规定 $0! = 1$)。

解 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = +\infty,$

所以收敛半径 $R = 0$, 即级数仅在 $x = 0$ 收敛。

例 5 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径。

解 级数缺少奇次幂的项, 定理 2 不能直接应用。根据比值审敛法来求收敛半径:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} x^{2(n+1)}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}} \right| = 4 |x|^2.$$

当 $4|x|^2 < 1$ 即 $|x| < \frac{1}{2}$ 时级数收敛; 当 $4|x|^2 > 1$ 即 $|x| > \frac{1}{2}$ 时级数发散。所以收敛半径 $R = \frac{1}{2}$ 。

例 6 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot n}$ 的收敛域。

解 令 $t = x - 1$, 上述级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \cdot n}$ 。

因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n}{2^{n+1} (n+1)} = \frac{1}{2},$

所以收敛半径 $R = 2$ 。收敛区间为 $|t| < 2$, 即 $-1 < x < 3$ 。

当 $x = 3$ 时, 级数称为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 这级数发散; 当 $x = -1$ 时级数称为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 这级数收

敛。因此原级数的收敛域为 $[-1, 3)$ 。

9.4.3 幂级数的运算与性质

1. 代数运算

设幂级数

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

及

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

分别在区间 $(-R, R)$ 及 $(-R', R')$ 内收敛, 对于这两个幂级数, 可以进行下列四则运算:

(1) 加减法运算

加法:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots \end{aligned}$$

减法:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) - (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots) \\ &= (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x^n + \cdots \end{aligned}$$

根据收敛级数的基本性质 2, 上面两式在 $(-R, R)$ 与 $(-R', R')$ 中较小的区间内成立。

(2) 乘法除法运算

乘法:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots \end{aligned}$$

这时两个幂级数的柯西乘积, 可以证明上式在 $(-R, R)$ 与 $(-R', R')$ 中较小的区间内成立。

除法:

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots,$$

这里假设 $b_0 \neq 0$ 。为了决定系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$, 可以将级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ 相乘,

并令乘积中各项的系数分别等于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 中同次幂的系数, 即得:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0c_0, \\ a_1 &= b_1c_0 + b_0c_1, \\ a_2 &= b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

由这些方程就可以顺序地求出 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 。

相除后所得的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ 的收敛区间可能比原来两级数的收敛区间小的多。

2. 分析运算

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 并有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x) dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad (x \in I)$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

性质 3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 $(-R, R)$ 上可积, 且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R). \quad (6)$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径。

例 7 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

解 先求收敛域。由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1,$$

得收敛半径 $R=1$ 。在端点 $x=-1$ 处, 幂级数称为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, 是收敛的交错级数; 在端点

$x=1$ 处, 幂级数称为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, 是发散的。因此收敛域为 $I=[-1, 1)$ 。

设和函数为 $s(x)$, 及

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

于是 $xs(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

利用性质 3, 逐项求导, 并由

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad (-1 < x < 1)$$

得

$$[xs(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

对上式从 0 到 x 积分, 得

$$xs(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

于是, 当 $x \neq 0$ 时, 有 $s(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x)$.

而 $s(0)$ 可由 $s(0) = a_0 = 1$ 得出, 也可由和函数的连续性得到

$$s(0) = \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x} \ln(1-x) \right] = 1.$$

故

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1), \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

作业 1 (1) (3) (5) (7), 2

9.4.4 泰勒级数(函数展开称幂级数)

给定函数 $f(x)$, 能否在某个区间内将其“展开称幂级数”, 或者说, 是否能找到这样一个幂级数, 它在某区间内收敛, 且其和恰好就是给定的函数 $f(x)$ 。如果这样的幂级数存在, 我们就说, 函数 $f(x)$ 在该区间内能展开称幂级数, 而这个幂级数在该区间内就表达了函数 $f(x)$ 。前面我们曾经给出过泰勒级数

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (1)$$

即在 x_0 的邻域内 $f(x)$ 可以用 n 次多项式

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad (2)$$

来近似表示, 并且误差等于余项的绝对值 $|R_n|$ 。如果 $|R_n|$ 随 n 增大而减小, 那么我们就可以用增加多项式 P_n 的项数的办法来提高精度。

如果 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有各阶导数 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$, 这时我们可以设想多项式 P_n 的项数趋向无穷而成为幂级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \cdots \quad (3)$$

幂级数 (3) 称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数。显然, 当 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 的泰勒级数收敛于

$f(x_0)$ ，但除 $x = x_0$ 外，它是否一定收敛？如果它收敛，它是否一定收敛于 $f(x)$ ？关于这些问题，有下述定理。

定理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开称泰勒级数的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (x \in U(x_0))$ 。

证 先证必要性。设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内能展开为幂级数，即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots$$

对一切 $x \in U(x_0)$ 成立。我们把 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式 (1) 写成

$$f(x) = s_{n+1}(x) + R_n(x), \quad (1')$$

其中 $s_{n+1}(x)$ 是 $f(x)$ 的泰勒级数 (3) 的前 $(n+1)$ 项之和，因为由 (4) 式有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}(x) = f(x),$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - s_{n+1}(x)] = f(x) - f(x) = 0.$$

这就证明了条件是必要的。

再证充分性，设 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 对一切 $x \in U(x_0)$ 成立。由 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式 (1') 有

$$s_{n+1}(x) = f(x) - R_n(x),$$

令 $n \rightarrow \infty$ 取上式的极限，得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x),$$

即 $f(x)$ 的泰勒级数 (3) 在 $U(x_0)$ 内收敛，并且收敛于 $f(x)$ 。因此条件充分的。定理证毕

在 (3) 式中取 $x_0 = 0$ ，得

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots, \quad (5)$$

级数 (5) 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数。

下面我们证明如果函数能展开成 x 的幂级数，则展开式是唯一的，并且就是 $f(x)$ 的麦

克劳林级数

如果 $f(x)$ 在点 $x_0 = 0$ 的某邻域内 $(-R, R)$ 内能展开成 x 的幂级数, 即

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (6)$$

对一切 $x \in (-R, R)$ 成立, 那么根据幂级数在收敛区间内可以逐项求导, 有

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$

$$f''(x) = 2!a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots,$$

$$f'''(x) = 3!a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \cdots,$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x + \cdots,$$

.....

把 $x = 0$ 代入以上各式, 得

$$a_0 = f(0), a_1 = f'(0), a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \cdots.$$

这就是所要证明的。

由此可知, 如果 $f(x)$ 能展开成 x 的幂级数, 则这个幂级数就是 $f(x)$ 的麦克劳林级数。

但是, 反过来如果 $f(x)$ 的麦克劳林级数在点 $x_0 = 0$ 的某邻域内收敛, 它却不一定收敛于

$f(x)$ 。因此如果 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处具有各阶导数, 则 $f(x)$ 的麦克劳林级数 (5) 虽能作出

来, 但这个级数是否能在某个区间内收敛, 以及是否收敛于 $f(x)$ 却需要进一步考查。下面

将具体讨论把函数 $f(x)$ 展开为 x 得幂级数的方法。

9.4.5 常用的初等函数的幂级数展开式及其应用举例

要把函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 可以按照下列步骤进行:

第一步 求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$ 如果在 $x = 0$ 处某阶导数不存在, 就停止进行。

第二步 求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值:

$$f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0), \cdots$$

第三步 求出幂级数

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

并求出收敛半径 R .

第四步 考查当 x 在区间 $(-R, R)$ 内时余项 $R_n(x)$ 的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

是否为零, 如果为零, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-R, R)$ 内的幂级数展开式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots, \quad (-R < x < R).$$

例 8 将函数 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数。

解 所给函数的各阶导数为 $f^{(n)}(x) = e^x$ ($n = 1, 2, \cdots$), 因此 $f^{(n)}(0) = 1$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$),

这里 $f^{(0)} = f(0)$. 于是得级数

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

它的收敛半径 $R = +\infty$ 。

对于任何有限的 x 、 ξ (ξ 在 0 与 x 之间), 余项的绝对值为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

因 $e^{|x|}$ 有限, 而 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 时收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow$

0 , 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $|R_n(x)| \rightarrow 0$ 。于是得展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (7)$$

例 9 将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数。

解 所给函数的各阶导数为

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

$f^{(n)}(0)$ 顺序循环地取 $0, 1, 0, -1, \cdots$ ($n = 0, 1, 2, 3, \cdots$), 于是得级数

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$$

它的收敛半径 $R = +\infty$ 。

对于任何有限的 x 、 ξ (ξ 在 0 与 x 之间), 余项的绝对值当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin \left[\xi + \frac{(n+1)\pi}{2} \right]}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此得展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (8)$$

上面将函数展开成幂级数的方法称为直接法, 大家看到运算量很大, 并且研究余项在初等函数中也不是意见容易的事。下面利用间接展开法, 即利用已知的函数的展开式、幂级数的运算以及变量代换等, 将函数展开成幂级数。

例 10 将函数 $\cos x$ 展开成幂级数。

解 对 $\sin x$ 的展开式逐项求导就得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty). \quad (9)$$

例 11 将函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 展开成幂级数。

解 因为

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

把 x 换成 $-x^2$, 得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \quad (-1 < x < 1).$$

如果幂级数在收敛区间的端点 $x = R$ (或 $x = -R$) 仍收敛, 而函数 $f(x)$ 在 $x = R$ (或 $x = -R$) 处有定义且连续, 那么根据幂级数的和函数的连续性, 该展开式对 $x = R$ (或 $x = -R$) 也成立。

例 12 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

解 因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x}$,

而 $\frac{1}{1+x}$ 是收敛的等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ 的和函数;

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1),$$

所以将上式从 0 到 x 逐项积分, 得

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1). \quad (10)$$

上式对 $x=1$ 也成立, 因为级数在该点收敛, 而函数在该点连续。

例 13 将函数 $f(x) = (1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数, 其中 m 为任意常数.

解 $f(x)$ 的各阶导数为

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

.....

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

.....

所以 $f(0) = 1, f'(0) = m, f''(0) = m(m-1), \cdots, f^{(n)}(0) = m(m-1)\cdots(m-n+1),$

.....,

于是的级数

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots.$$

这级数相邻两项的系数之比的绝对值

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{m-n}{n+1} \right| \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

因此, 对于任何常数 m 这级数在开区间 $(-1,1)$ 内收敛.

设其和为 $F(x)$, 即

$$F(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots.$$

逐项微分得

$$F'(x) = m \left[1 + \frac{m-1}{1}x + \cdots + \frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots \right],$$

由此得

$$\begin{aligned} (1+x)F'(x) &= m \left[1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \right] \\ &= mF(x) \end{aligned} \quad (-1 < x < 1).$$

现在令
$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^m},$$

于是 $\varphi(0) = F(0) = 1$, 且

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{(1+x)^m F'(x) - m(1+x)^{m-1} F(x)}{(1+x)^{2m}} \\ &= \frac{(1+x)^{m-1} [(1+x)F'(x) - mF(x)]}{(1+x)^{2m}} = 0,\end{aligned}$$

所以 $\varphi(x) = c$ (常数). 但是 $\varphi(0) = 1$, 从而 $\varphi(x) = 1$, 即

$$F(x) = (1+x)^m.$$

因此在区间 $(-1,1)$ 内,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots. \quad (-1 < x < 1). \quad (11)$$

在区间的端点, 展开式是否成立要看 m 的数值而定.

公式 (11) 叫做二项展开式. 特殊地, 当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式, 就称为代数学中的二项式定理.

例 14 将函数 $\sin x$ 展开成 $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数.

解 因为

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin \left[\frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right]\end{aligned}$$

由 $\sin x$ 、 $\cos x$ 的展开式

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^4}{4!} - \cdots \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^5}{5!} - \cdots \quad (-\infty < x < \infty),$$

所以

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3}{3!} + \cdots \right] \quad (-\infty < x < +\infty).$$

例 15 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解 因为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(3+x)} \\ &= \frac{1}{4\left(1 + \frac{x-1}{2}\right)} - \frac{1}{8\left(1 + \frac{x-1}{4}\right)}, \end{aligned}$$

而

$$\frac{1}{4\left(1 + \frac{x-1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-1)^n \quad (-1 < x < 3),$$

$$\frac{1}{8\left(1 + \frac{x-1}{4}\right)} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} (x-1)^n \quad (-3 < x < 5),$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-1)^n \quad (-1 < x < 3).$$

例 16 计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值, 要求误差不超过 0.0001.

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 因此所给的积分不是反常积分. 如果定义被积函数在 $x=0$ 处的

值为 1, 则它的积分区间 $[0,1]$ 上连续.

展开被积函数, 有

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

在区间 $[0,1]$ 上逐项积分, 得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots.$$

因为第四项的绝对值

$$\frac{1}{7 \cdot 7!} < \frac{1}{30000},$$

所以取前三项的和作为积分的近似值:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0.9461.$$

9.5 傅里叶级数

9.5.1 三角级数 三角函数系的正交性

在自然界和工程技术中周期现象是经常出现的,如振动、电磁波等,当用函数来描述这些现象时出现的就是周期函数.描述简谐振动的正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ 是一种简单而又为人们所熟悉的周期函数,其中 y 表示动点的位置, t 表示时间, A 为振幅, ω 为角频率, φ 为初相. 周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$. 现在类似于将函数展开成幂级数,我们也想将周期函数展开成由简单的三角函数

组成的级数.具体的说,希望将以 $T\left(=\frac{2\pi}{\omega}\right)$ 的周期函数 $f(t)$ 表示为

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad (1)$$

其中 A_0, A_n, φ_n ($n=1,2,3,\cdots$) 都是常数.

在利用三角恒等式,变形为

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos \varphi_n \sin n\omega t);$$

令 $\frac{a_0}{2} = A_0, a_n = A_n \sin \varphi_n, b_n = A_n \cos \varphi_n, \omega t = x$, 则得到级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (2)$$

称(2)式的级数为三角级数,其中 a_0, a_n, b_n ($n=1,2,3,\cdots$) 都是常数.

$$\text{称三角函数系 } 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots \quad (3)$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交,就是指在三角函数系(3)中任何不同的两个函数的乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分等于零,即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nxdx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nxdx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nxdx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nxdx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

9.5.2 以 2π 为周期的函数的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,且能展开成三角级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4)$$

我们进一步假设级数(4)可以逐项积分.在此假设条件下我们讨论 $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$

与 $f(x)$ 的关系.

由三角函数系的正交性,有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = \pi a_0$$

即得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

以 $\cos nx$ 乘(4)两端,再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分,同样由三角函数系的正交性我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \pi a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

即

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

同理可得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

由于当 $n = 0$ 时, a_n 的表达式正好给出 a_0 , 因此, 已得结果可以合并写成

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

这样, 不论 $f(x)$ 能否表示为三角函数, 只要 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 就可按公式(5)计算出 a_n

和 b_n , 称 a_n 和 b_n 为函数 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier)系数, 将这些系数代入(4)式右端, 所得的三角

级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (6)$$

叫做函数 $f(x)$ 的傅里叶级数.

那么, $f(x)$ 在怎样的条件下, 它的傅里叶级数不仅收敛, 而且收敛于 $f(x)$?

定理(收敛定理, 狄利克雷(Dirichlet)充分条件) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 如果它满足:

- (1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点,
- (2) 在一个周期内至多只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 并且

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$;

当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$.

$$C = \left\{ x \mid f(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] \right\},$$

在 C 上就成立 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad , x \in C. \quad (7)$$

例 1 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 所给函数满足收敛定理的条件, 它在点 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处不连续, 在其他点处连续, 从而由收敛定理知道 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 并且当 $x = k\pi$ 时级数收敛于

$$\frac{-1+1}{2} = 0,$$

当 $x \neq k\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$. 和函数的图形如图 9-1 所示

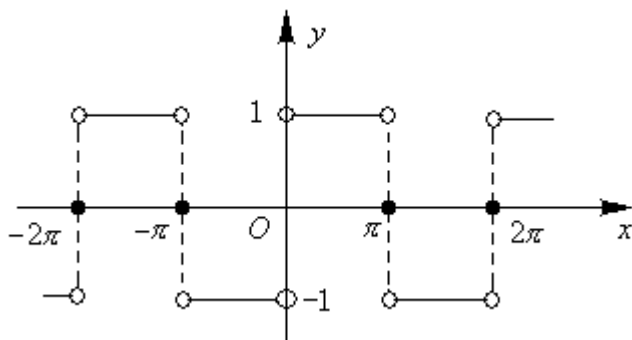


图 9-1

计算傅里叶级数如下:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx \\
 &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{x} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

将求得的系数代入(7)式,就得到 $f(x)$ 的傅里叶级数的展开式为

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x + \dots \right] \quad (-\infty < x < +\infty; x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots).$$

例 2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 所给函数满足收敛定理的条件,它在点 $x = (2k+1)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处不连续,在

其他点处连续,从而由收敛定理知道 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛,并且当 $x = (2k+1)\pi$ 时级数收

敛于

$$\frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{0 - \pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

在连续点 $x (x \neq (2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$. 和函数的图形如图 9-2 所示.

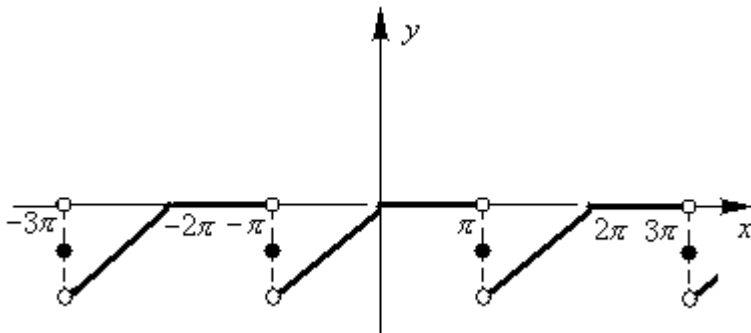


图 9-2

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^0 \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n^2 \pi}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots; \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 = -\frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_{-\pi}^0 \\ &= -\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

将求得的系数代入(7)式,得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}
 f(x) = & -\frac{\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi} \cos x + \sin x \right) \\
 & - \frac{1}{2} \sin 2x + \left(\frac{2}{3^2 \pi} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) \\
 & - \frac{1}{4} \sin 4x + \left(\frac{2}{5^2 \pi} \cos 5x + \frac{1}{5} \sin 5x \right) - \cdots \\
 & (-\infty < x < +\infty; x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots).
 \end{aligned}$$

如果函数 $f(x)$ 只定义在 $[-\pi, \pi]$ 且满足收敛定理的条件, 则 $f(x)$ 也可以展开成傅里叶级数, 只要在 $[-\pi, \pi)$ 或 $(-\pi, \pi]$ 外补充函数的定义, 使它拓广成周期为 2π 的周期函数 $F(x)$. 按这种方式拓广函数的定义域的过程称为周期延拓. 再将 $F(x)$ 展开成傅里叶级数. 最后限制 x 在 $(-\pi, \pi)$ 内, 此时 $F(x) \equiv f(x)$, 这样便得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式. 根据收敛定理, 这级数在区间端点 $x = \pm\pi$ 处收敛于 $\frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2}$.

例 3 将函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

展开成傅里叶级数.

解 所给函数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上满足收敛定理的条件, 并且拓广成周期函数时, 它在每一点 x 处都连续(图 9-3), 因此拓广的周期函数的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) \\
 &= \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi}, & n = 1, 3, 5, \cdots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \cdots; \end{cases}
 \end{aligned}$$

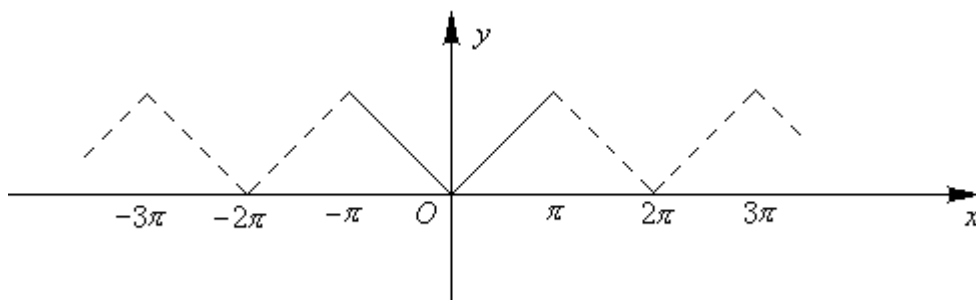


图 9-3

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi}$$

$$= 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

将求得的系数代入(6)式,得到 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right) \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

利用这个展开式,我们可以求出几个特殊级数的和.当 $x=0$ 时, $f(0)=0$,于是又这个展开式得出

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots.$$

设

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

$$\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \left(= \frac{\pi^2}{8} \right),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots,$$

$$\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots,$$

因为

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}.$$

所以

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}.$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6},$$

又
$$\sigma_3 = 2\sigma_1 - \sigma = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

正弦级数和余弦级数

当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(x)\cos nx$ 是奇函数, $f(x)\sin nx$ 是偶函数, 故

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (8)$$

即知奇函数的傅里叶级数是只含有正弦项的正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. (9)

当 $f(x)$ 为偶函数时, $f(x)\cos nx$ 是偶函数, $f(x)\sin nx$ 是奇函数, 故

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (10)$$

即知偶函数的傅里叶级数是只含有余弦项的余弦级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$. (11)

例 4 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 首先所给函数满足收敛定理的条件, 它在点

$$x = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

处不连续, 因此 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 $x = (2k+1)\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0,$$

在连续点 $x (x \neq (2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$. 和函数的图形如图 9-4 所示

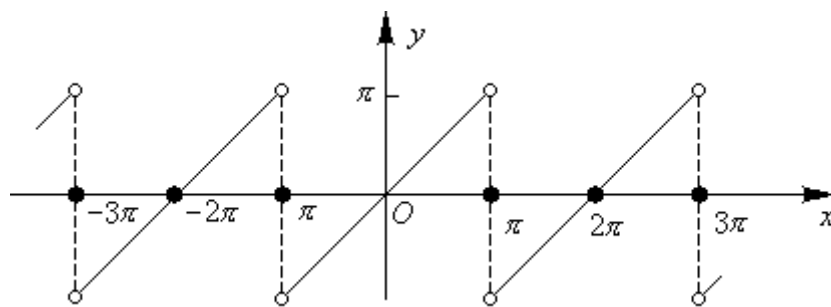


图 9-4

其次若不计 $x = (2k+1)\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数. 显然, 此时

(8)式仍成立. 按公式(8)有 $a_n = 0 (n=0, 1, 2, \dots)$, 而

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

将求得的 b_n 代入正弦级数(9), 得 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx + \dots \right) \\ &\quad (-\infty < x < \infty; x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \dots). \end{aligned}$$

对于定义在区间 $[0, \pi]$ 上并且满足收敛定理的条件的函数 $f(x)$, 我们在开区间 $(-\pi, 0)$ 内补充函数 $f(x)$ 的定义, 得到定义在 $(-\pi, \pi]$ 上的函数 $F(x)$, 使它在 $(-\pi, \pi)$ 上成为奇函数 (偶函数). 按这种方式拓广函数定义域的过程称为奇延拓 (偶延拓). 然后将奇延拓 (偶延拓) 后的函数展开成傅里叶级数, 这个级数必定是正弦级数 (余弦级数). 再限制 x 在 $(0, \pi]$ 上, 此时 $F(x) \equiv f(x)$, 这样便得到 $f(x)$ 的正弦级数 (余弦级数) 展开式.

例 6 将函数 $f(x) = x+1 \quad (0 \leq x \leq \pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先求正弦级数. 为此对函数 $f(x)$ 进行奇延拓 (图 9-5). 按公式(8)有

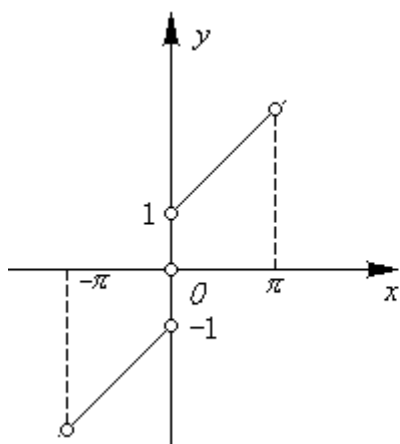


图 9-5

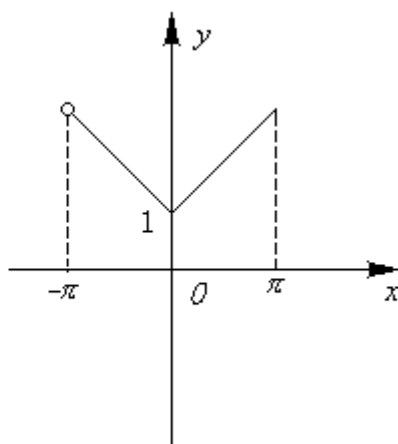


图 9-6

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x+1) \sin nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(x+1) \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{2}{n\pi} (1 - (\pi+1) \cos n\pi) \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi+2}{n}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ -\frac{2}{n}, & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}
 \end{aligned}$$

将求得的 b_n 代入正弦级数(9),得

$$x+1 = \frac{2}{\pi} \left[(\pi+2) \sin x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} (\pi+2) \sin 3x - \frac{\pi}{4} \sin 4x + \dots \right] \quad (0 < x < \pi)$$

在端点 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处,级数的和显然为零,它不代表原来函数 $f(x)$ 的值.

再求余弦级数,为此对函数 $f(x)$ 进行偶延拓(图 9-6).按公式(10)有

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x+1) \cos nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(x+1) \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) \\
 &= \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots, \\ -\frac{4}{n^2 \pi}, & n = 1, 3, 5, \dots. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{\pi} = \pi + 2;$$

将求得的 a_n 代入余弦级数(11),得

$$x+1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right) \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

9.5.3 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

定理 设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), (x \in C) \quad (1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1,2,3,\cdots). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$C = \{x \mid f(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]\}$$

当 $f(x)$ 为奇函数时,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (x \in C), \quad (3)$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1,2,3,\cdots). \quad (4)$$

当 $f(x)$ 为偶函数时,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (x \in C), \quad (5)$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0,1,2,\cdots). \quad (6)$$

证 作变量代换 $z = \frac{\pi x}{l}$, 于是区间 $-l \leq x \leq l$ 就变换成 $-\pi \leq z \leq \pi$. 设函数 $f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = F(z)$, 从而 $F(z)$ 是周期为 2π 的周期函数, 并且它满足收敛定理的条件, 将

$F(z)$ 展开成傅里叶级数:

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz),$$

其中 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \cos nz dz, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \sin nz dz.$

在以上式子中令 $z = \frac{\pi x}{l}$, 并注意到 $F(z) = f(x)$, 于是有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

而且

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

类似地, 可以证明定理的其余部分.

例 7 设 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 它在 $[-2, 2)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0, \\ k, & 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad (\text{常数 } k \neq 0).$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 这时 $l = 2$, 按公式(2)有

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 k \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \left[\frac{k}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = 0 \quad (n \neq 0);$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 k dx = k;$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 k \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \left[-\frac{k}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2$$

$$= \frac{k}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{2k}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}$$

将求得的系数 a_n, b_n 代入(1)式, 得

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right).$$

$$(-\infty < x < +\infty; x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \dots)$$

$f(x)$ 的傅里叶级数的和函数的图形如图 9-7 所示.

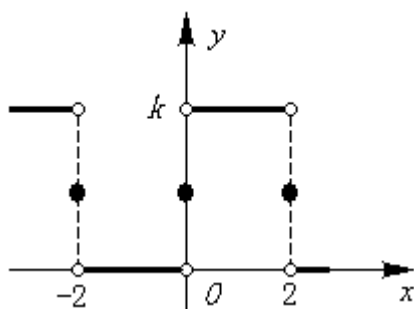


图 9-7

9.5.4 在 $[-l, l]$ 上有定义的函数的傅里叶展开

定义在 $[-l, l]$ 上的函数 $f(x)$, 可以通过延拓而成为一个在数轴上有对于的一个以 $2l$ 为周期的函数 $F(x)$, 从而可以展开成傅立叶级数, 然后再将自变量限制回 $(-l, l)$, 即得 $f(x)$ 的傅立叶展开式。

例 8 将函数 $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$) 展开成以 2 为周期的傅立叶级数。

解 由于 $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$) 是偶函数, 所以

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \int_0^1 (2 + x) dx = 5 \\ a_n &= 2 \int_0^1 (2 + x) \cos n\pi x dx = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \\ &= \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi^2} = \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \\ b_n &= 0, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

因所给函数在区间 $[-1, 1]$ 上满足收敛定理条件, 并注意到周期延拓后的函数处处连续图 9-8, 故

$$2 + |x| = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}, x \in [-1, 1]$$

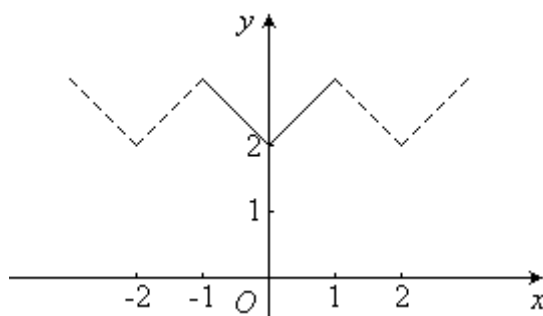


图 9-8

9.5.5 在 $[0, l]$ 上定义的函数的傅里叶展开

对于定义在 $[0, l]$ 上定义的函数 $f(x)$, 我们可以将其进行奇延拓或偶延拓从而展开成 $(-l, l)$

上的函数，然后使用 9.5.4 的方法将其展成正弦或余弦级数，最后再限制回 $(0, l)$ 即可得到 $[0, l]$ 上的函数 $f(x)$ 的傅立叶展开。

例 9 将函数 $f(x) = x - 1$ 在 $[0, 2]$ 上展开为 (1) 正弦级数; (2) 余弦级数。

解 (1) 为将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数，需对 $f(x)$ 作奇延拓 (图 9-9)，于是 $2l=4$ ，从而

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{2}{n\pi} - (-1)^n \frac{2}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n=1,3,5,\dots \\ -\frac{4}{n\pi}, & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

由收敛定理知

$$x-1 = -\frac{4}{\pi} (\sin \pi x + \sin 2\pi x + \sin 3\pi x + \dots), x \in (0, 2)$$

(2) 对 $f(x)$ 作偶延拓 (图 9-10)，从而

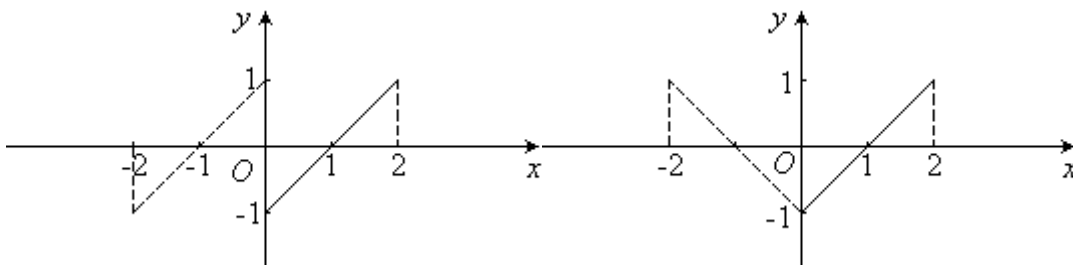


图 9-9

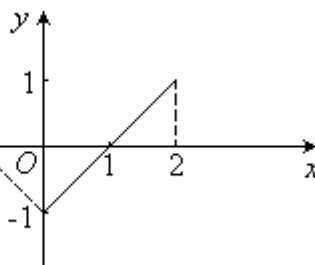


图 9-10

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{8}{n^2 \pi^2}, & n=1,3,5,\dots \\ 0, & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

由收敛定理知

$$x-1 = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}, x \in [0, 2]$$

作业 2(1)(3), 4, 6, 9, 10