§3.4 卡诺图化简逻辑函数

Simplification Using K-Maps

用公式法化简逻辑函数时，有时很难看出是否达到最简式。用卡诺图（Karnaugh Map）化简逻辑函数具有简单、直观、方便的特点，较容易判断出函数是否得到最简结果。

3.4.1 卡诺图 Karnaugh Map

卡诺图 (K-map)与真值表相似，可以给出输入所有可能组合所对应的输出值 。与真值表不同的是卡诺图是由小格构成。每个小格代表一个二进制输入的组合。

n 个变量的卡诺图中有2^n个小格，每个小格表示一个最小项。

2 变量卡诺图：*F* (*A*,*B*)

F B \ A	0	1
0	$\bar{A}\,\bar{B}$ m_0	$A\,\bar{B}$ m_2
1	$\bar{A}B$ m_1	AB m_3

变量取值：0→1

$$\left.\begin{array}{l} 0 \ \text{ for } \ \bar{A},\bar{B} \\ 1 \ \text{ for } \ A,B \end{array}\right\}\text{最小项}$$

变量(A,B) 位置确定,每小格代表的最小项就确定。

3 变量卡诺图：$F(A,B,C)$

F C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	2	6	4
1	m_1	3	7	5

AB的排列顺序

排列方式要求：

保证相邻格之间只有一个变量变化

几何相邻: 位置相邻

逻辑相邻: 只有一个变量变化

相邻格

卡诺图其他排列方式

F A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

F AB \ C	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

每个小格有 n 个相邻格

相邻格与排列方式无关

4 变量卡诺图：*F* (*A*,*B*,*C*,*D*)

F *CD* \ *AB*	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

F *AB* \ *CD*	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

每个小格: 4 个相邻格

5变量卡诺图：$F(A,B,C,D,E)$

$2^5 = 32$ cells

F DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

相邻格包括对称位置

14: 6, 15, 10, 12, 30

8 : 12, 9, 24, 0, 10

3.4.2 用卡诺图表示逻辑函数

Mapping a Logic Function

例 1: 将真值表转换成卡诺图

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

F C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

例 2：用卡诺图表示标准与或式和标准或与式

$$F(X,Y,Z)=\sum m(0,4,6) \qquad F(X,Y,Z)=\prod M(1,2,3,5,7)$$

F 何时为 1 （最小项）

F Z \ XY	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0

F 何时为 0 （最大项）

F Z \ XY	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0

等 价

例3：将与或式填入卡诺图

$$F(X,Y,Z)=XY+\overline{Y}Z+\overline{X}\,\overline{Z}$$

$$=XY(Z+\overline{Z})+\overline{Y}Z(X+\overline{X})+\overline{X}\,\overline{Z}(Y+\overline{Y})$$

$$=XYZ+XY\overline{Z}+X\overline{Y}Z+\overline{X}\,\overline{Y}Z+\overline{X}Y\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

$$=\sum m(0,1,2,5,6,7)$$

F (Z \ XY)	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1		1	1

直接填　XY:

在 XY = 11 的两个格中填1

F (Z \ XY)	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1		1	1

3.4.3 卡诺图化简逻辑函数

K-Map Simplification

1. 求最简与或式

方法：圈相邻格中的1, 合并最小项

圈 1：根据下面规则将含有 1 的相邻格圈在一起

尽可能多地把相邻的矩形的 2^n 个 1 圈在一起，消去变化了的变量，留下不变的变量，是 1 写原变量，是 0 写反变量，组成"与"项；每个圈中至少有一个别的圈没圈过的 1，所有的 1 都要圈；1 可以重复圈；圈之间为"或"的关系。

圈 1个1，2个1，4个1，8个1，16个1

例 1: 用卡诺图化简下列函数

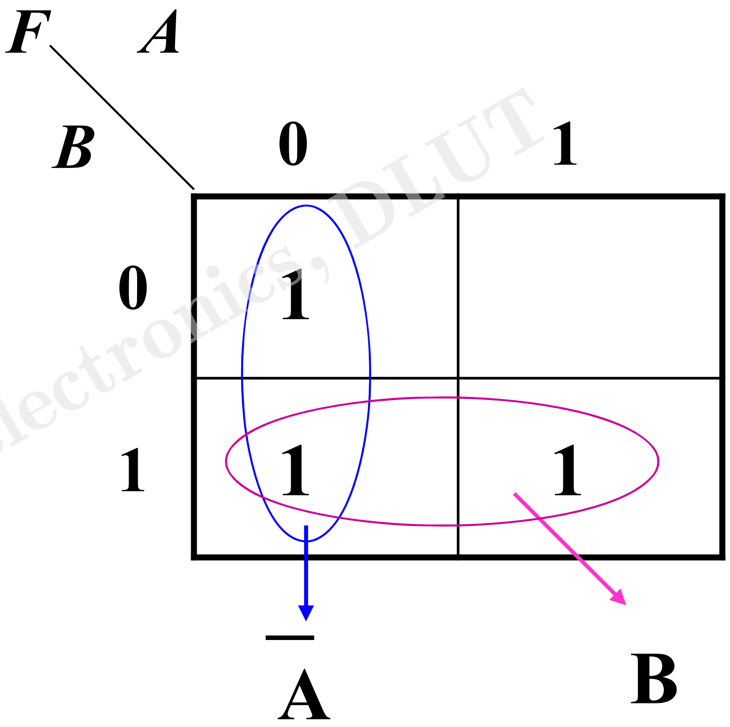
$$F(A,B)=\sum(0,1,3)$$

解:

① **填卡诺图**

② **圈 1**

③ **将与项相加**



$$F=\overline{A}+B$$

例 2: 化简函数

C \ AB	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	1

$\overline{B}$

AC

$$F = \overline{B} + AC$$

例 3:

F: CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11			1	
10	1	1	1	1

$$F(A, B, C, D) = \overline{D} + AB$$

2. 求最简或与式

尽可能多的把相邻矩形中 2^n个0 圈在一起，消去变化了的n 个变量，留下不变的变量，(是0写原变量，是 1 写反变量)组成或项；每个圈中至少有一个别的圈没圈过的0，所有0 都要圈，0 可重复圈，圈之间为与的关系。

例 4　圈 0

F (CD \ AB)	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11			1	
10	1	1	1	1

$A+\overline{D}$

$B+\overline{D}$

F (CD \ AB)	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11			1	
10	1	1	1	1

$$F=\overline{D}+AB$$

$$\therefore F=(A+\overline{D})(B+\overline{D})$$
$$=AB+\overline{D}$$

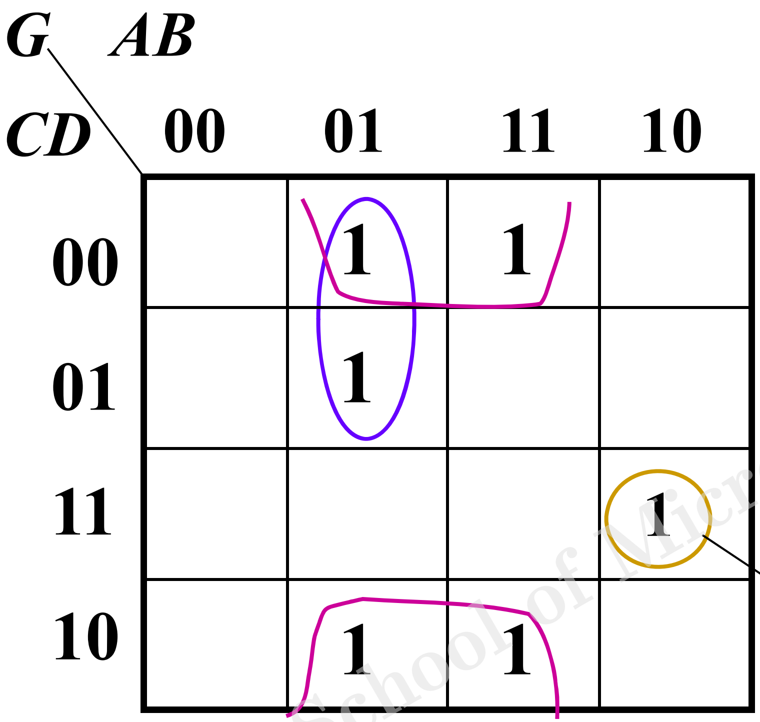
与或式和或与式可以互相转换

总结：　与或式圈 1

或与式圈 0

例 5 将下图化简成最简与或表达式

与或式 圈 1



$$G = B\overline{D} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}CD$$

孤立的 1 一定要圈

例 6 将下图化简成最简与或式

C \ AB	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

C \ AB	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

$$\left.\begin{aligned} F &= A\overline{C} + \overline{A}C + AB \\ &= A\overline{C} + \overline{A}C + BC \end{aligned}\right\}$$ **取其一**

最简式不是唯一的

例 7 分别将下式化简成最简与或式和最简或与式

$$F(A,B,C,D)=\overbrace{(\overline{A}+\overline{C})}^{0}\overbrace{(\overline{A}+B+\overline{D})}^{0}\overbrace{(\overline{B}+D)}^{0}\overbrace{(\overline{A}+B+\overline{C}+D)}^{0}$$

1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0

解: 在卡诺图中直接填 0

F CD \ AB	00	01	11	10
00		0	0	
01				0
11			0	0
10		0	0	0

最简或与式: 圈 0

$$F(A,B,C,D)=(\overline{B}+D)(\overline{A}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{D})$$

最简与或式: 圈 1

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}D+B\overline{C}D+\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$

例 8 化简

$$F(W,X,Y,Z)=\overline{\bar{W}\bar{X}+\bar{Y}Z+(\bar{W}+Y)X\bar{Z}+\overline{(W+Z)(\bar{W}+\bar{Y})}}$$

$$\overline{(W+Z)(\bar{W}+\bar{Y})}=\overline{W+Z}+\overline{\bar{W}+\bar{Y}}$$

$$\bar{F}=\bar{W}\bar{X}+\bar{Y}Z+\bar{W}X\bar{Z}+XY\bar{Z}+\bar{W}\bar{Z}+WY$$

$\bar{F}$ YZ \ WX	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	1
11	1		1	1
10	1	1	1	1

直接在 $\bar{F}$ K-Map中填1, 圈0

$$\bar{F}=(\bar{W}+Y+Z)(W+\bar{X}+\bar{Y}+\bar{Z})$$

$$F=\bar{\bar{F}}=\overline{\bar{W}+Y+Z}+\overline{W+\bar{X}+\bar{Y}+\bar{Z}}$$

$$=W\bar{Y}\bar{Z}+\bar{W}XYZ$$

例9 已知 $F = A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{D} + AB\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D}$ **吸收**

化简上式，并分别用最少的与非门和或非门实现

解：填卡诺图

F CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	
01				
11				1
10	1	1	1	1

1) 用与非门实现

$\Longrightarrow$ **圈 1**

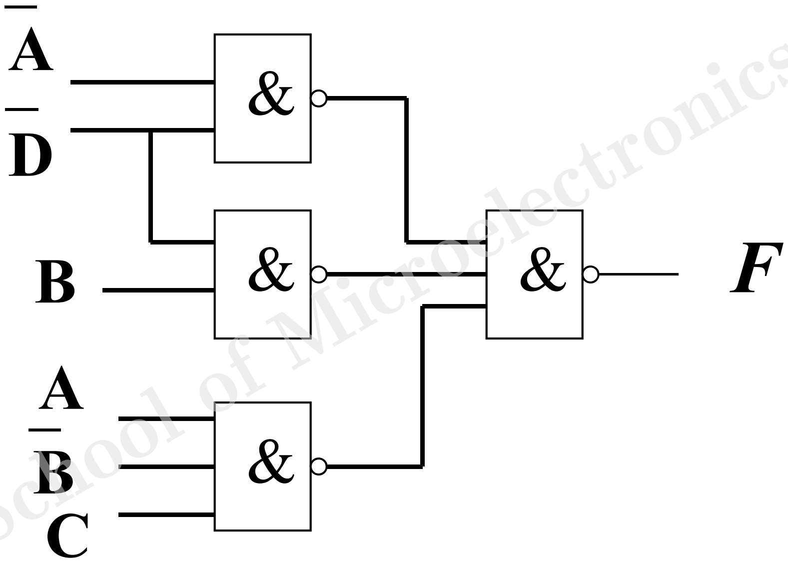
$$F = \overline{\overline{\overline{A}\,\overline{D} + B\overline{D} + A\overline{B}C}}$$

$$= \overline{\overline{\overline{A}\,\overline{D}} \bullet \overline{B\overline{D}} \bullet \overline{A\overline{B}C}}$$

与或 $\Longrightarrow$ **与非 - 与非**

$$F = \overline{\overline{\bar{A}\bar{D}} \bullet \overline{B\bar{D}} \bullet \overline{A\bar{B}C}}$$

与非－与非门



2) 或非门 ⟹ 圈 0

$CD \backslash AB$ (F)	00	01	11	10
00	1	1	1	
01				
11				1
10	1	1	1	1

$$F = \overline{\overline{(A+\bar{D})(\bar{B}+\bar{D})(\bar{A}+B+C)}}$$

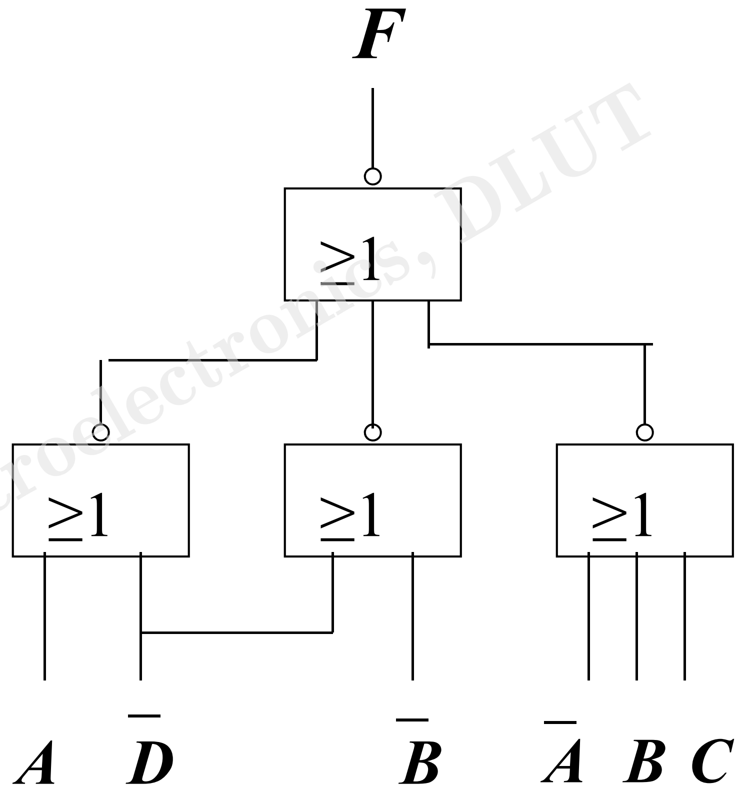
$$F = \overline{\overline{A+\bar{D}}+\overline{\bar{B}+\bar{D}}+\overline{\bar{A}+B+C}}$$

或与 ⟹ 或非 - 或非

化简: 每个圈需一个门实现, 各圈之间加一个门

$$F=\overline{\overline{A+\overline{D}}+\overline{\overline{B}+\overline{D}}+\overline{\overline{A}+B+C}}$$

或非 – 或非门



3.4.4 具有随意项的逻辑函数的化简

Simplification of Logic Function with “Don’t Care” Terms

实际逻辑电路中，有些变量(输入)组合不会出现或不允许出现，如 BCD 码中 1010~1111；这些组合对输出不产生任何影响(是 1 是 0 不影响输出)，这种组合称 “随意项” (Don’t care) 。

例:

用 A, B, C 分别表示电机的正转、反转和停止三种状态:

A=1　　正转

B=1　　反转　　　　任何时刻只存在一个状态

C=1　　停

$$ABC\begin{cases}100 \text{ or}\\ 010 \text{ or}\\ 001\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}000\\ 011\\ 101\\ 110\\ 111\end{matrix}\right\}$$

没有意义

"随意项"

随意项

卡诺图
真值表 $\left.\right\}$ X 或 φ

逻辑函数 $\begin{cases} \sum d(\quad) \\ = 0 \end{cases}$

d（ ）括号中为最小项编号

化简时，根据化简需要，φ可作1 或作0；

但不能既当1 同时又当0。

例 1: 用卡诺图化简函数

$$F(A,B,C,D)=\sum m(1,3,7,11,15)+d(0,2,5)$$

解：卡诺图

标脚标： Φ_1,Φ_2,Φ_3

F CD \ AB	00	01	11	10
00	Φ_1			
01	1	Φ_3		
11	1	1	1	1
10	Φ_2			

采用 $\Phi_3=1,$

$\Phi_1=\Phi_2=0$

圈 1：

$$F=CD+\overline{A}D$$

圈 0：

$$F=D(\overline{A}+C)$$

若采用 $\Phi_1 = \Phi_2 = 1, \quad \Phi_3 = 0$

F $CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	Φ_1			
01	1	Φ_3		
11	1	1	1	1
10	Φ_2			

圈 1:

$$F = \overline{A} \cdot \overline{B} + CD$$

是否可令: $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 1$

例 2: Simplify the logic function with don't care terms:

$$G=\overline{A}\,\overline{C}+\overline{A}B\text{，}\qquad AB+AC=0$$

$AB=\Phi$ $\qquad$ $AC=\Phi$

物理意义: 这两项在函数中不起作用, 不是数学上的等于0

G (C \ AB)	00	01	11	10
0	1	1	φ	
1		1	φ	φ

$$G=B+\overline{A}\cdot\overline{C}$$

3.4.5 引入变量卡诺图 (VEM)

Variable Entered Map

一般，变量超过5个时，采用引入变量卡诺图方法化简逻辑函数。将n 变量函数中一个变量作为引入变量，填入(n-1) 变量卡诺图中。

例 1: 用VEM方法化简下列逻辑函数

$$F(A,B,C)=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}\cdot\overline{C}+ABC$$ **3变量**

将变量 *C* 拿出作为引入变量，将函数填入2变量卡诺图中

F \ B \ A	0	1
0	$\overline{C}$	$\overline{C}$
1	0	$C+\overline{C}\rightarrow 1$

当A=0, B=0 时，$F=\overline{C}$，在m_0 格填 $\overline{C}$

圈的原则与圈1相同,合并相同变量

$$F=\overline{B}\cdot\overline{C}+AB$$

例 2: $F(C,D,E) = C\overline{D} + C\overline{E} + \overline{C}E + \overline{D}E + CDE$

将 E 分出作为引入变量（一般最后一个变量作为引入变量）

F \ C / D	0	1
0	E	$E + \overline{E}$
1	E	$E + \overline{E}$

$F = E + C$

F \ C / D	0	1
0	E	$E + \overline{E}$
1	E	$E + \overline{E}$

F \ C / D	0	1
0	E	$E + \overline{E}$
1	E	$E + \overline{E}$

例 3: 化简

F (B \ A)	0	1
0	C	$C+\overline{C}$
1	C	$\overline{C}$

$$F = A\overline{C} + A\overline{C} + \overline{B}C$$

F (B \ A)	0	1
0	C	$C+\overline{C}$
1	C	$\overline{C}$

$$F = A\overline{C} + A\overline{C} + A\overline{B}$$

答案不是唯一的！

例 4: 化简下面引入变量卡诺图（VEM）：

F C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	D
1	D	D	1	D

$$F = D + AB + \overline{A} \cdot \overline{C}$$

作业：

3 . 8 (1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 18, 19, 20)

3 . 11 (1, 3, 7)

3 . 12 (1, 3, 5)

3 . 15 (1, 3, 6)

3 . 18 (1, 3, 7)

3 . 19 (1, 3)

3 . 20

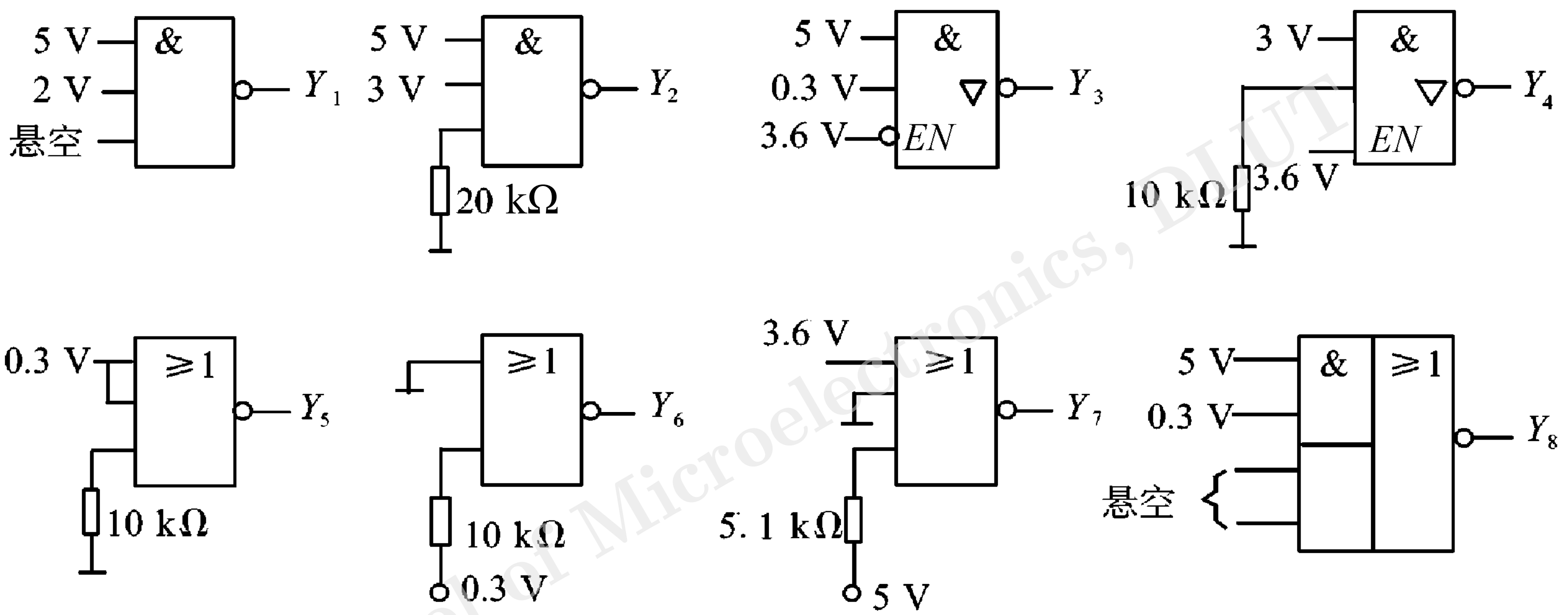
3 . 21(1, 3, 5)

3 . 22(1, 3, 5)

3 . 23 (2)

3 . 24 (2)

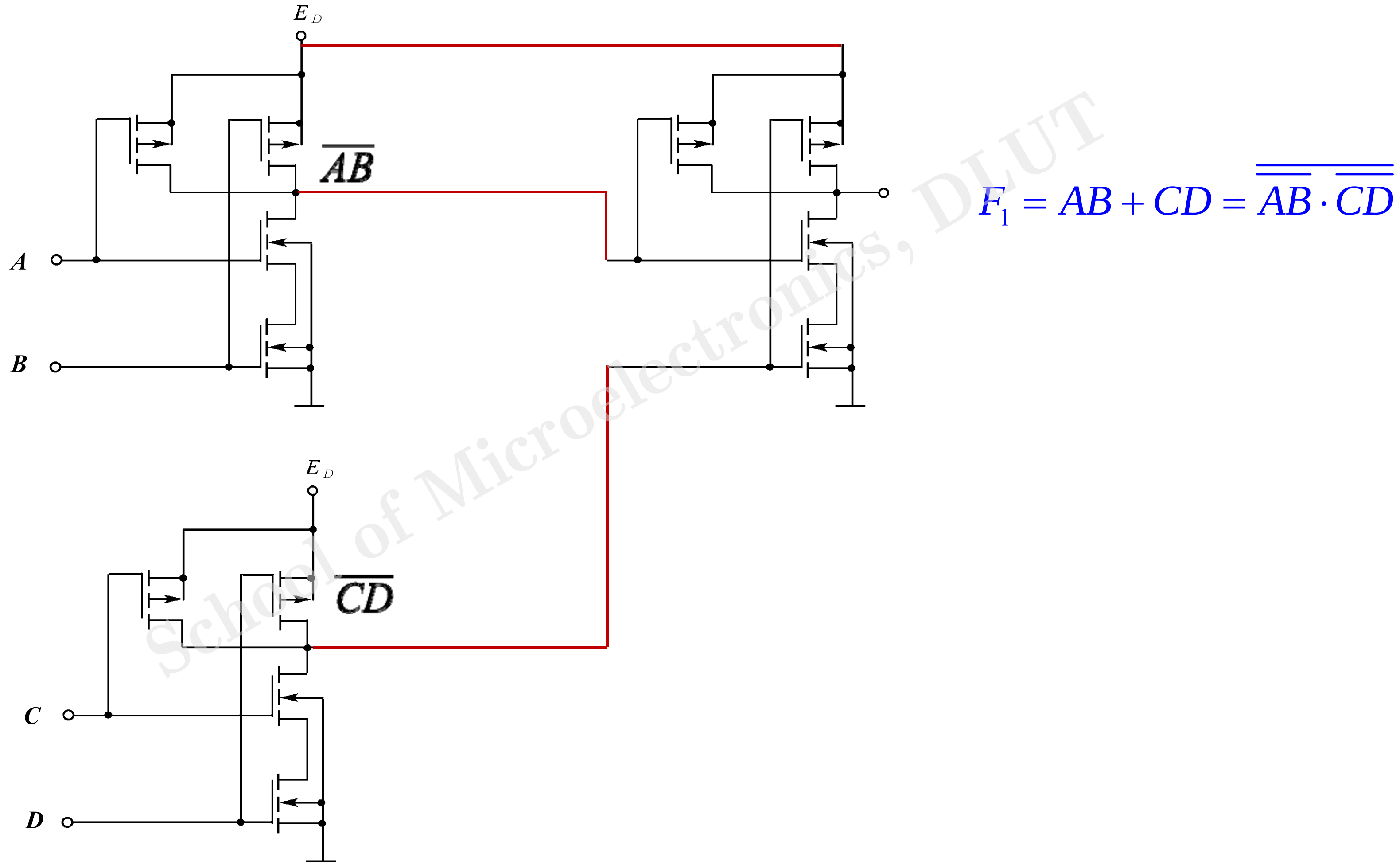
2.3 题图2.3中的电路均为TTL门电路，试写出各电路输出Y_1～Y_8状态



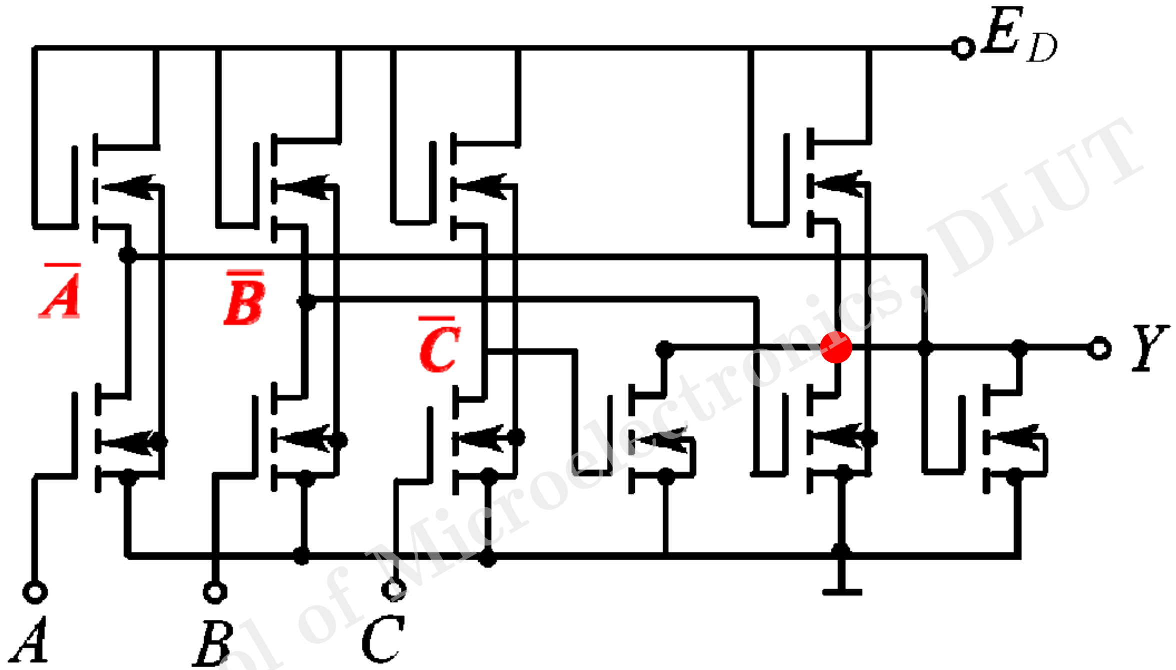
解：Y_1=0，Y_2=0，Y_3=Hi-Z，Y_4=0，Y_5=0，Y_6=0，Y_7=0，Y_8=0

2.13 按下列函数画出CMOS电路图。

$$F_1 = AB + CD$$

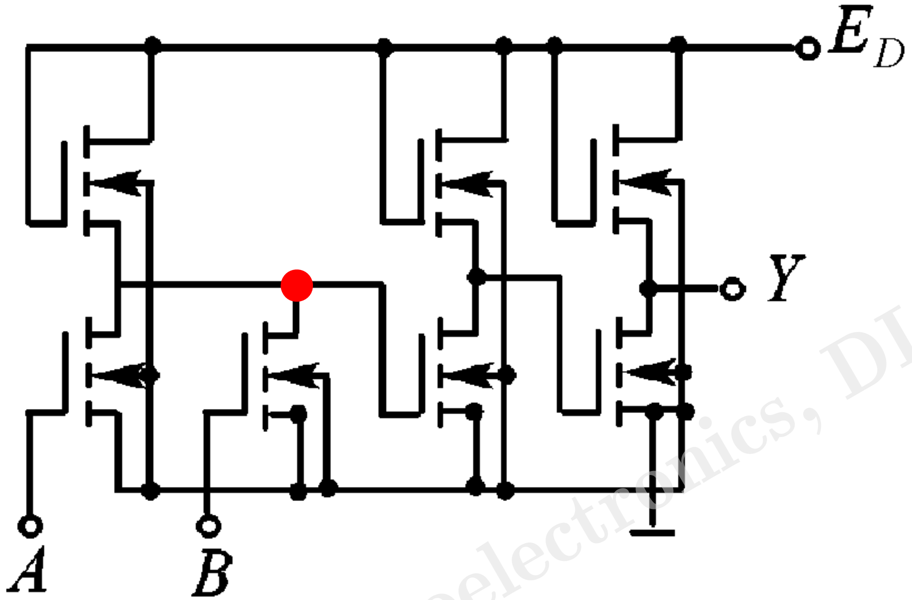


2.17 写出题图2.17中NMOS 电路的逻辑表达式。



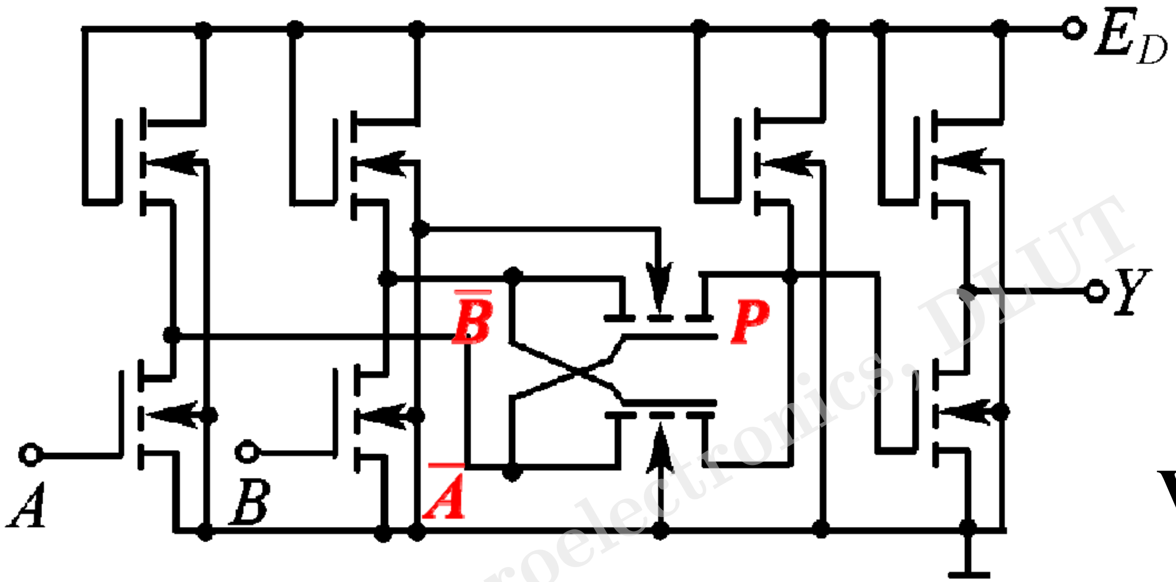
(a)

$$Y_1 = \overline{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}} = ABC$$



(b)

$$Y_2 = \overline{\overline{\overline{A+B}}} = \overline{A+B}$$



(c)

$V_{GS}>V_T$

$\overline{A}$	$\overline{B}$	P	Y
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$Y_3 = \overline{A} \oplus \overline{B} = A \oplus B$$