第五节　位置关系、夹角与距离

这一节的讨论，总是从平面的法向量和直线的方向向量出发来讨论问题的，抓住了法向量和方向向量，也就抓住了这一节的核心内容。这一节的学习重点放在讨论方法和公式的掌握上。

一、两平面间的关系

两个平面之间有重合、平行、相交、垂直这样四种关系，下面给出其判别方法.

设有两个平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则它们的法向量分别为 $\mathbf{n}_1=[A_1,B_1,C_1]^T$ 和 $\mathbf{n}_2=[A_2,B_2,C_2]^T$.

（1）平面 π_1 与 π_2 重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$;

（2）平面 π_1 与 π_2 平行 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$;

（3）平面 π_1 与 π_2 相交 $\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$.

（4）平面 π_1 与 π_2 垂直 $\Leftrightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$.

二、直线与平面间的关系

设直线 l 的方程为 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ ，平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则直线 l 的方向向量为 $\mathbf{s}=[m,n,p]^T$，平面 π 的法向量为 $\mathbf{n}=[A,B,C]^T$.

（1）l 在 π 上 $\Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n}$（即 $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$）且点 (x_0,y_0,z_0) 满足 π 的方程.

（2）　l 与 π 平行 $\Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n}$（即 $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$）且点 (x_0,y_0,z_0) 不满足 π 的方程.

（3）l 与 π 相交 $\Leftrightarrow \vec{s}$ 与 $\vec{n}$ 不垂直（即 $\vec{s}\cdot\vec{n}\neq 0$）.

（4）l 与 π 垂直 $\Leftrightarrow \vec{s}\,/\!/\,\vec{n}\Leftrightarrow \dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$.

三、两直线间的关系

设空间中有两条直线 $l_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ 和 $l_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ ，从直线的方程可知，l_1 过点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 且方向向量为 $\mathbf{s}_1=[m_1,n_1,p_1]^T$，$l_2$ 过点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 且方向向量为 $\mathbf{s}_2=[m_2,n_2,p_2]^T$，向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标向量为 $[x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1]^T$.

我们首先研究直线 l_1 与 l_2 共面的判别方法。

直线 l_1 与 l_2 共面 $\Leftrightarrow$ 向量 $\vec{s_1},\vec{s_2},\overrightarrow{P_1P_2}$ 共面 $\Leftrightarrow$（$\vec{s_1},\vec{s_2},\overrightarrow{P_1P_2}$）$=0$，　即

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.7)$$

当l_1与l_2共面时，它们之间有重合、平行和相交三种情况，判别方法如下：

（1）l_1与l_2重合$\Leftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2 // \overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow m_1:n_1:p_1=m_2:n_2:p_2=(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$.

（2）l_1与l_2平行$\Leftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2$且不平行于$\overrightarrow{P_1P_2}$

$$\Leftrightarrow m_1:n_1:p_1=m_2:n_2:p_2 \neq (x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$$

（2）l_1与l_2交于一点$\Leftrightarrow \vec{s}_1$、$\vec{s}_2$、$\overrightarrow{P_1P_2}$共面且$\vec{s}_1$与$\vec{s}_2$不平行

$\Leftrightarrow$式（4.7）成立并且$m_1:n_1:p_1 \neq m_2:n_2:p_2$.

若式（4.7）不成立，则直线l_1与l_2异面.

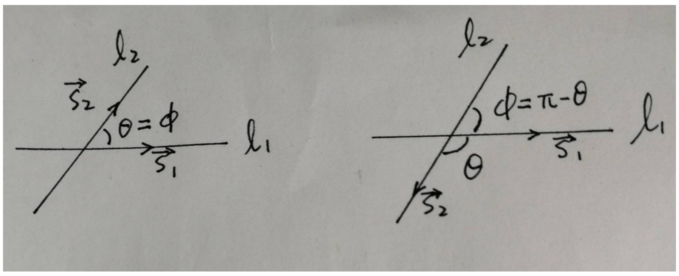
注：讨论两条直线的位置关系有两条思路，一条思路是：先通过公式（4.7）来看这两条直线是共面还是异面，共面时再通过方向向量$\vec{s_1}$，$\vec{s_2}$及向量$\overrightarrow{P_1P_2}$来看是重合、平行、相交中的哪一种情况；另一条思路是：先通过方向向量$\vec{s_1}$，$\vec{s_2}$来观察这两条直线是否会重合或平行，如果不重合也不平行，再通过公式（4.7）来看是相交还是异面。

四、 直线和平面相互间的夹角

1. 两条直线之间的夹角

注：两条直线的夹角指的是这两条直线所夹的那个锐角，我们现在是要通过方向向量之间的夹角来求出这两条直线之间的夹角。要注意，方向向量的夹角可能是锐角，也可能是钝角。

设直线l_1和l_2的方向向量分别为$\vec{s}_1$和$\vec{s}_2$，$\vec{s}_1$与$\vec{s}_2$的夹角为θ，**直线l_1与l_2的夹角为φ**，

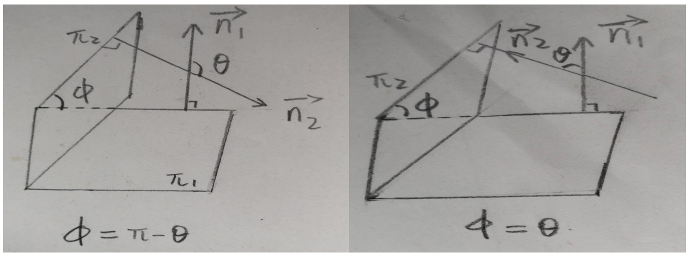


从上面的两个图可知，$\varphi=\min\{\theta,\pi-\theta\}$，所以$\cos\varphi=|\cos\theta|=\dfrac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$.

2. 两个平面之间的夹角

注：两个平面的夹角指的是这两个平面所夹的那个锐角，这与二面角有所区别，我们现在要通过法向量之间的夹角来求出这两个平面之间的夹角。要注意，法向量的夹角可能是锐角，也可能是钝角。

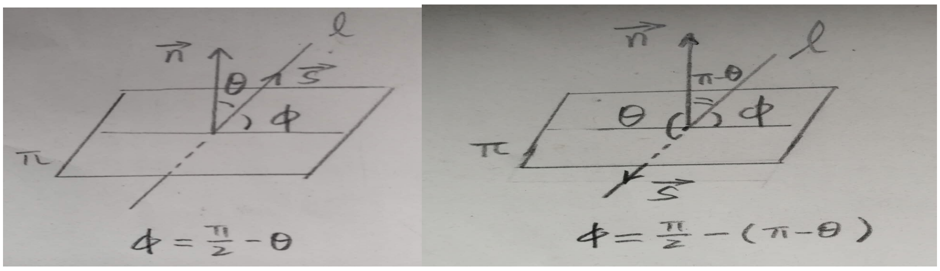
设平面π_1和π_2的法向量分别为$\vec{n}_1$和$\vec{n}_2$，$\vec{n}_1$与$\vec{n}_2$的夹角为θ，**平面π_1与π_2的夹角为**φ，



从上面的两个图可知，$\varphi = \min\{\theta, \pi - \theta\}$， 所以 $\cos\varphi = |\cos\theta| = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$.

注：求两个平面的夹角的公式和求两条直线的夹角的公式几乎一样。

3. 直线与平面的夹角



设直线 l 的方向向量为 $\vec{s}$，平面 π 的法向量为 $\vec{n}$，$\vec{s}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角为 θ，则直线 l **和平面** π **的夹角**为 $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \min\{\theta, \pi - \theta\}$（见上图），

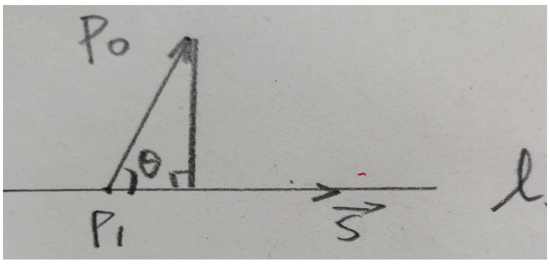
$$\sin\varphi = \cos(\min\{\theta, \pi - \theta\}) = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{s}_1||\vec{n}_1|}.$$

注意，上面三个关于角度的公式，最后都是用数量积表示的。

五、距离

1．点到直线的距离

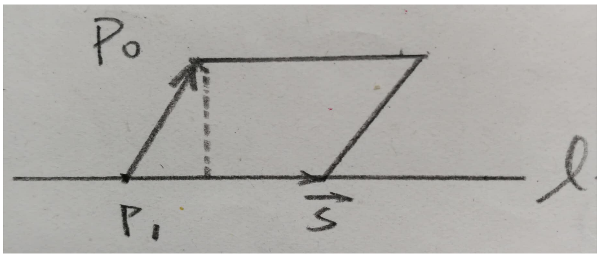
设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为空间一点，l 为过点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 且方向向量为 $\vec{s}$ 的直线（如下图所示），点 P_0 到直线 l 的距离用 $d(P_0, l)$ 表示.



连接 P_1, P_0,然后从 P_0 向直线 l 作垂线，可作出一个直角三角形。

$d(P_0, l) = |\overline{P_1P_0}|\sin\theta$（其中 θ 为 $\vec{s}$ 与 $\overline{P_1P_0}$ 的夹角）. 由 $|\vec{s} \times \overline{P_1P_0}| = |\vec{s}||\overline{P_1P_0}|\sin\theta$，

可得 $d(P_0, l) = \dfrac{|\vec{s} \times \overline{P_1P_0}|}{|\vec{s}|}$.

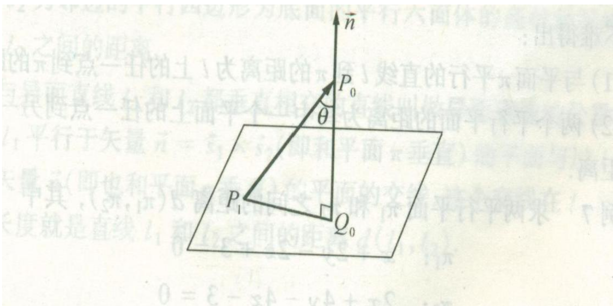


注：（1）点 P_0 到直线 l 的距离可以看成上面图形中平行四边形的高，它等于平行四边形的面积除以底边的长度，这就是公式 $d\left(P_0,l\right)=\dfrac{\left|\vec{s}\times\overrightarrow{P_1P_0}\right|}{\left|\vec{s}\right|}$。

（2）两条平行直线之间的距离就是其中一条直线上的一点到另一条直线的距离。

2.点到平面的距离

设平面 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$， $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 π 上的一点，则平面 π 的法向量为 $\mathbf{n}=\left[A,B,C\right]^T$.另设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面 π 外的一点，过 P_0 作平面 π 的垂线，与 π 交于点 Q_0.



用 $d(P_0,\pi)$ 表示点 P_0 到平面 π 的距离，则 $d(P_0,\pi)=\left|\overrightarrow{Q_0P_0}\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\left|\cos\theta\right|$（其中 θ 为 $\vec{n}$ 与 $\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|$ 的夹角）.

由 $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\left|\cos\theta\right|$，得

$$d(P_0,\pi)=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

由 P_1 在平面 π 上可知， $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$，即 $-Ax_1-By_1-Cz_1=D$.

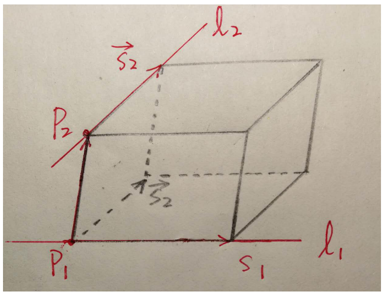
所以点 P_0 到平面 π 的距离为 $d(P_0,\pi)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

注 （1）与平面 π 平行的直线 l 到 π 的距离为 l 上的任一点到 π 的距离.

（2）两个平行平面的距离为其中一个平面上的任一点到另一个平面的距离.

***3. 两条异面直线之间的距离**

设直线 l_1 和 l_2 为异面直线， $\vec{s}_1$ 与 $\vec{s}_2$ 分别为它们的方向向量， P_1 为直线 l_1 上一点， P_2 为直线 l_2 上的一点，用 $d(l_1,l_2)$ 表示直线 l_1 和 l_2 的距离，则 $d(l_1,l_2)=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2},\overrightarrow{P_1P_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}\right|}$.



异面直线 l_1 与 l_2 之间的距离可看成上面图形中的平行六面体的高，它等于体积除以底面积，这就可得出上面的公式。

与异面直线 l_1 和 l_2 都垂直相交的直线叫做**异面直线的公垂线。**