第二章　连续时间系统的时域分析

(time-domain analysis method)

§2.1　引　言

LTI连续时间系统的分析，归结为建立并且求解线性常系数微分方程。

LTI——Linear Time Invariant

从数学解方程角度：

- 如果不经过任何变换，直接在时域求解方程，这种分析方法称为**时域分析法**。

- 如果为了便于求解方程而将时间变量变换成其它变量，则相应地称为**变换域分析法**。

- 例如，对系统的数学模型先进行傅里叶变换，将时间变量变换为频率变量去进行求解，这种方法称为频域分析法。

从系统分析角度：

充分利用LTI系统的特性——线性、时不变性，

将激励信号分解为不同单元信号加权和的形式，

时域法的单元信号： $\delta(t), \delta(t-t_0)\ldots\ldots$

频域法的单元信号： $A_1\sin(\omega_1 t), A_2\sin(\omega_2 t)\ldots\ldots$

复频域法的单元信号： $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}\ldots\ldots$

或 $e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t), e^{\sigma_2 t}\sin(\omega_2 t)\ldots\ldots$

§2.2 系统数学模型的建立

进行系统分析时，首先要建立系统的数学模型。对于电路系统而言，建立系统的数学模型需要掌握两方面的知识：

（1） 构成电路各个元件上的电压和电流的关系。由于所讨论的电路系统最终可以等效为由理想元件电阻 R 、电容 C 、电感 L 所构成，因此应掌握这些元件电压与电流的关系：

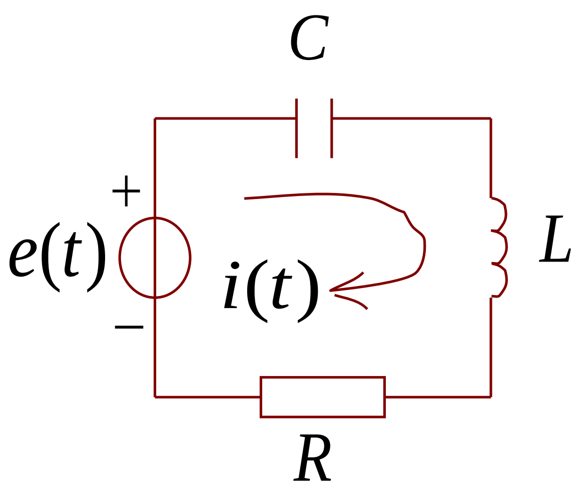
$$R: \qquad u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$L: \qquad u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$C: \qquad u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

（2） 基尔霍夫电压和电流定律。

例：下图所示RLC串联电路，激励电压源$e(t)$，回路响应电流 $i(t)$，列写系统方程。



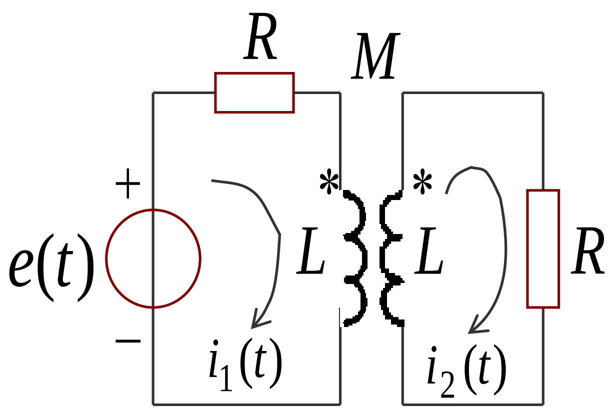
解：

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\cdot i(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau=e(t)$$

或

$$\boxed{L\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}}$$

例：下图所示的互感耦合电路，$e(t)$ 为激励信号，次级回路电流 $i_2(t)$ 为响应信号，列写方程。



解：列方程有

$$
\begin{cases}
L\dfrac{di_1(t)}{dt}+R\cdot i_1(t)-M\dfrac{di_2(t)}{dt}=e(t)\\[2ex]
L\dfrac{di_2(t)}{dt}+R\cdot i_2(t)-M\dfrac{di_1(t)}{dt}=0
\end{cases}
$$

整理得

$$
\boxed{(L^2-M^2)\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}+2RL\frac{di_2(t)}{dt}+R^2 i_2(t)=M\frac{de(t)}{dt}}
$$

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{CL}i(t)=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt}$$

$$(L^2-M^2)\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}+2RL\frac{di_2(t)}{dt}+R^2 i_2(t)=M\frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}+\frac{2RL}{L^2-M^2}\frac{di_2(t)}{dt}+\frac{R^2}{L^2-M^2}i_2(t)=\frac{M}{L^2-M^2}\frac{de(t)}{dt}$$

以上两例均是线性系统，得到的系统的数学模型是线性常系数微分方程，方程的系数完全取决于系统的参数。由于系统中只含有两个储能元件，因此微分方程是二阶的。推广得到n阶系统的数学模型为：

$$\frac{d^{n}r(t)}{dt^{n}}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{1}\frac{dr(t)}{dt}+a_{0}r(t)=$$

$$b_{m}\frac{d^{m}e(t)}{dt^{m}}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_{1}\frac{de(t)}{dt}+b_{0}e(t)$$

这种微分方程描述了系统输入（激励）$e(t)$，输出（响应）$r(t)$之间的关系，因此称这种描述法为**输入—输出描述法**。其中a，b是由系统元件参数确定的常数。

实系统：a，b均为实数。

◆ 时域分析法就是直接求解微分方程的方法。

解法有经典法，分解解法。

◆ 经典法（数学中的方法）：

全响应=通解+特解

◆分解解法：

全响应=零输入响应+零状态响应

§2.3　系统的零输入响应(zero-input response)

零输入响应—— 外加激励信号为0，仅仅由系统的初始条件(状态)所产生的响应，记为 $r_{zi}(t)$。

根据零输入响应的定义，有 $e(t)=0$ ，因此系统的微分方程变为：

$$\frac{d^n r_{zi}(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1} r_{zi}(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dr_{zi}(t)}{dt}+a_0 r_{zi}(t)=0$$

•系统的零输入响应是齐次微分方程的解，齐次微分方程解的形式取决于特征方程和特征根的性质。

上面的齐次微分方程的特征多项式为

$$D(p)=p^{n}+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_{1}p+a_{0}$$

$$\frac{d^{n}r(t)}{dt^{n}}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{1}\frac{dr(t)}{dt}+a_{0}r(t)=$$
$$b_{m}\frac{d^{m}e(t)}{dt^{m}}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_{1}\frac{de(t)}{dt}+b_{0}e(t)$$

特征方程(characteristic equation)为

$$p^{n}+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_{1}p+a_{0}=0$$

或 $D(p)=0$

特征根为特征方程的根（也叫系统的自然频率）。

(characteristic root) (natural frequency)

一、特征根为单根的情况

设 $p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$ 的根为

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，且彼此不等，即

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$$

$$(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\cdots(p-\lambda_n) = 0$$

则零输入响应的形式为

$$r_{zi}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}$$

其中 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 是由系统响应的初始状态确定的待定系数。

$$r_{zi}(0), r'_{zi}(0), r''_{zi}(0), \cdots, r_{zi}^{(n-1)}(0)$$

注意，这里是响应的初始条件。

二、特征根有重根的情况

假设 λ_1 是特征方程的 k 阶重根，即特征方程有 $(p-\lambda_1)^k$ 因子，其余为单根，即特征方程可表示为：

$$(p-\lambda_1)^k(p-\lambda_{k+1})\cdots(p-\lambda_n)=0$$

则零输入响应的形式为

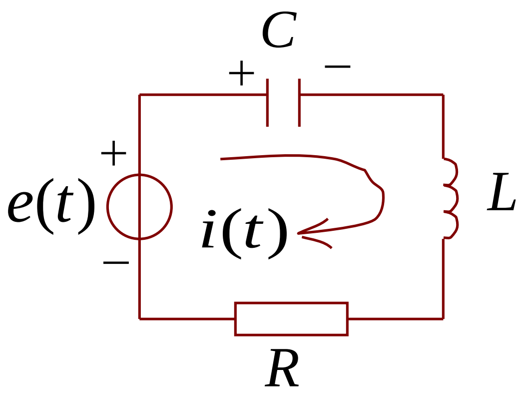
$$\boxed{\begin{aligned} r_{zi}(t) = &(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{k-1}t^{k-1})e^{\lambda_1 t} \\ &+ C_{k+1}e^{\lambda_{k+1}t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} \end{aligned}}$$

其中 $C_0,\cdots,C_{k-1},C_{k+1},\cdots,C_n$

也是由系统响应的初始状态确定的待定系数。

$$r_{zi}(0), r'_{zi}(0), r''_{zi}(0), \cdots, r_{zi}^{(n-1)}(0)$$

例： **电路如图所示** $L=1H, C=1F, R=2\Omega,\ \ e(t)$ **为激励电压，** $i(t)$ **为响应电流，**



初始条件：

1. $i(0^+)=0, i'(0^+)=1A/S$

2. $i(0^+)=0, u_c(0^+)=10V$

$u_c(0)$ **的正方向如图所示。**

求上述两种初始条件下的电路的零输入响应。

解：（1）列微分方程

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}$$

代入参数： $$\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+2\frac{di(t)}{dt}+i(t)=\frac{de(t)}{dt}$$

$\because$求零输入响应 $\therefore$ $$\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+2\frac{di(t)}{dt}+i(t)=0$$

(2) 求特征根

特征方程为： $P^2+2P+1=(P+1)^2=0$

$\therefore$特征根为 $\lambda=-1$ （二阶重根）

(3) 零输入响应

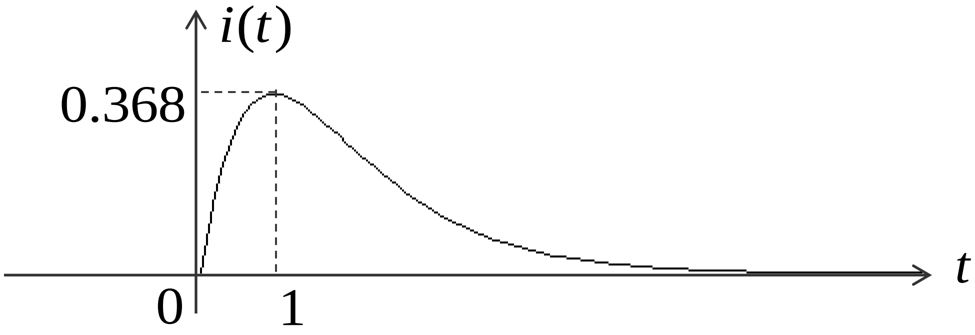
$$i(t)=(C_0+C_1 t)e^{-t}$$

$$i'(t)=C_1 e^{-t}-(C_0+C_1 t)e^{-t}$$

利用初始条件确定待定系数 C_0 和 C_1

1. $i(0^+)=0, i'(0^+)=1A/S$

$$\begin{cases} i(0)=C_0=0 \\ i'(0)=C_1-C_0=1 \end{cases}$$



解得 $\begin{cases} C_0=0 \\ C_1=1 \end{cases}$

$$\therefore \quad i(t)=te^{-t} \qquad t>0$$

注意：这里的初始条件是0^+时刻的初始条件

2. $i(0^+) = 0, u_c(0^+) = 10V$ ➡ $i(0^+), i'(0^+)$

由系统结构有：

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) = e(t)$$

因为 $e(t) = 0$ **，所以代入元件值得：**

$$\frac{di(t)}{dt} + 2i(t) + u_c(t) = 0$$

令时间 $t=0$ 并代入初始条件得：

$$i'(0^+) = -2i(0^+) - u_c(0^+) = -10A/S$$

所以代入 $i(0^+)$, $i'(0^+)$ 可求得

$$\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = -10 \end{cases}$$

$$\therefore \quad i(t) = -10te^{-t} \qquad t > 0$$

这里的负值表明实际电流方向与假定的方向相反。

思考题：为什么两组初始条件产生的电流有正有负，电流的正负与什么有关？

例：将上题中的电阻改为1Ω，初始条件为

$$i(0^+)=0, i'(0^+)=1A/S$$

求零输入响应$i_{zi}(t)$。

$$\boxed{L\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}}$$

解：在此情况下系统的微分方程为

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2}+\frac{di(t)}{dt}+i(t)=e(t)$$

$\therefore$ **特征方程为** $P^2+P+1=0$

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

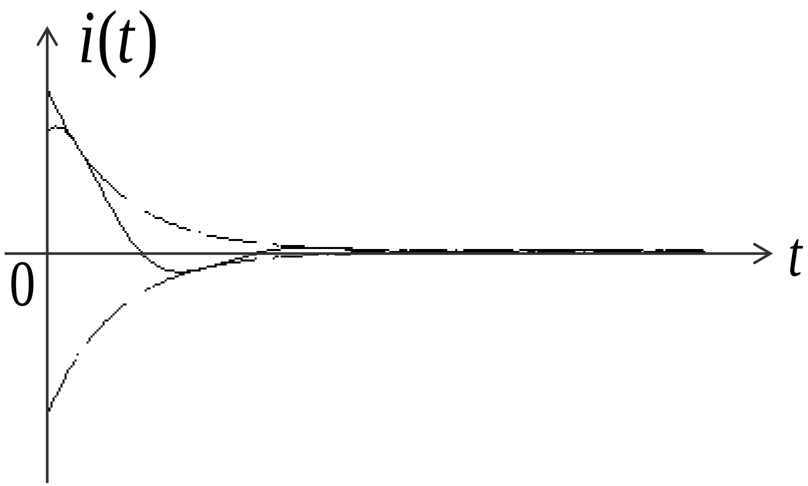
$$i(t)=C_1 e^{\lambda_1 t}+C_2 e^{\lambda_2 t} \qquad i'(t)=C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

代入初始条件

$$\begin{cases} i(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ i'(0) = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

解得 $C_{1,2} = \pm j\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \quad i(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \qquad\qquad t > 0$$



已知LTI因果连续时间系统的微分方程如下

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+5\frac{dr(t)}{dt}+6r(t)=e(t)$$

系统的初始条件为 $r_{zi}(0)=2,\ r_{zi}'(0)=1$

求系统的零输入响应，指出系统的自然频率。

解：特征方程为： $p^2+5p+6=0$

特征根： $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3$

零输入响应： $r_{zi}(t)=c_1e^{-\lambda_1 t}+c_2e^{-\lambda_2 t}=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$

$$r_{zi}'(t)=-2c_1e^{-2t}-3c_2e^{-3t}$$

带入初始条件：

$$r_{zi}(0)=c_1+c_2=2$$
$$r_{zi}'(0)=-2c_1-3c_2=1$$

$$\Rightarrow\quad c_1=7,\quad c_2=-5$$

$$\therefore\quad r_{zi}(t)=7e^{-2t}-5e^{-3t},\qquad t>0$$

已知LTI因果连续时间系统的转移算子如下

$$H(p)=\frac{p^{2}+p+1}{p^{2}+5p+4}$$

系统的初始条件为 $r_{zi}(0)=2,\ r_{zi}'(0)=1$

求系统的零输入响应，指出系统的自然频率。

什么是转移算子？

引进符号 p，表示微分操作，即 $p=\dfrac{d}{dt}$ $\rightarrow$ 微分算子

$$p\cdot e(t)=\frac{de(t)}{dt},\quad p^{2}\cdot e(t)=\frac{d^{2}e(t)}{dt^{2}},\mathrm{L}$$

$$\frac{d^{2}r(t)}{dt^{2}}+5\frac{dr(t)}{dt}+6r(t)=\frac{de(t)}{dt}+e(t)\ \Rightarrow$$

$$p^{2}r(t)+5pr(t)+6r(t)=pe(t)+e(t)$$

$$p^2 r(t) + 5pr(t) + 6r(t) = pe(t) + e(t)$$

$$\Downarrow$$

$$(p^2 + 5p + 6)r(t) = (p+1)e(t)$$

$$\Downarrow$$

$$r(t) = \frac{p+1}{p^2 + 5p + 6} e(t)$$

令

$$H(p) = \frac{p+1}{\boxed{p^2 + 5p + 6}} \Rightarrow \text{转移算子}$$

$$r(t) = H(p)e(t)$$

$$\Updownarrow \quad \text{等价！}$$

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 5\frac{dr(t)}{dt} + 6r(t) = \frac{de(t)}{dt} + e(t)$$

$$H(p)=\frac{p^2+p+1}{p^2+5p+4}$$

特征方程为： $p^2+5p+4=0$

特征根： $\lambda_1=-1$， $\lambda_2=-4$

零输入响应： $r_{zi}(t) = c_1e^{-\lambda_1 t} + c_2e^{-\lambda_2 t} = c_1e^{-t} + c_2e^{-4t}$

$$r'_{zi}(t) = -c_1e^{-t} - 4c_2e^{-4t}$$

带入初始条件：

$$r_{zi}(0)=c_1+c_2=2$$

$$r'_{zi}(0)=-c_1-4c_2=1$$

$\Rightarrow$

$$c_1=3$$

$$c_2=-1$$

$$\therefore \quad r_{zi}(t) = 3e^{-t} - e^{-4t}, \qquad t>0$$

零输入响应的求解需要以下几步：

（1） 建立系统的数学模型；

（2） 求特征根；

（3） 确定零输入响应的模式；

（4） 用初始条件确定待定系数。

需要注意的就是初始条件{起始状态(0-)、初始状态(0+)}的使用。

§2.4 奇异函数(singularity function)

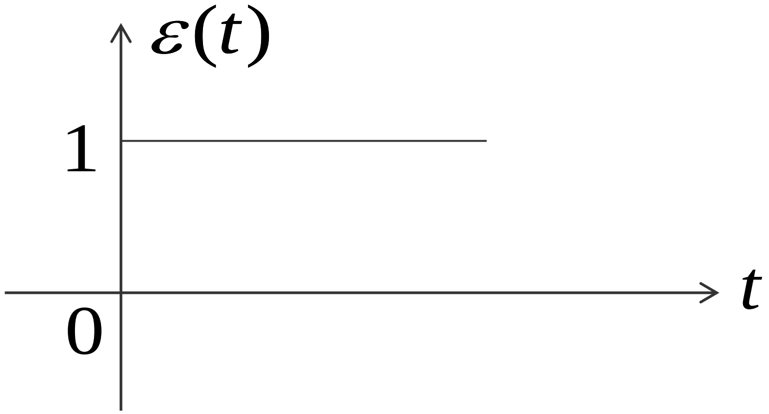
有一类函数有一个或多个间断点，在间断点上的导数用一般方法无法确定。这样的函数统称为<u>奇异函数</u>。

<u>奇异函数</u>——函数本身或其导数与积分有不连续点。

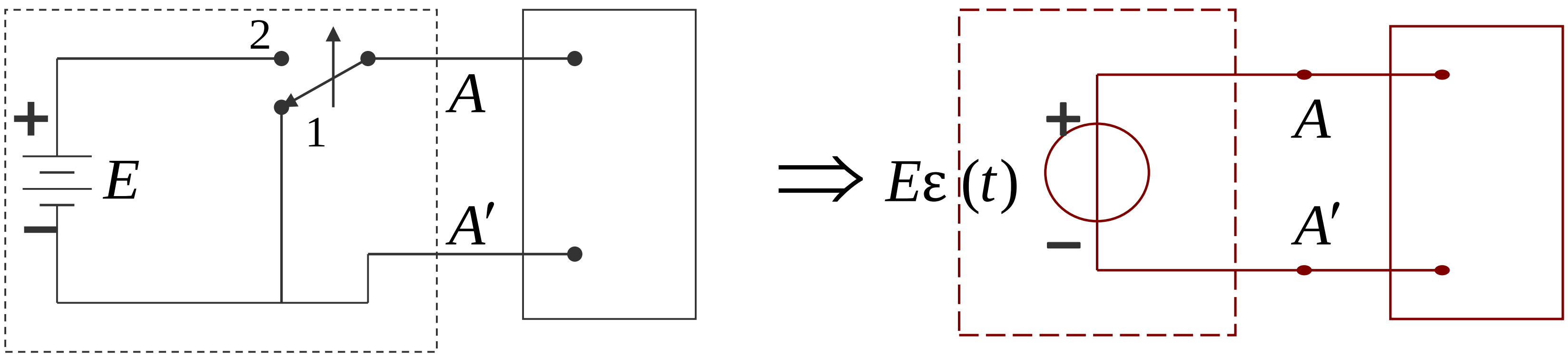
一、阶跃函数(step function)

单位阶跃函数(unit step function):

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



阶跃函数可用来表示理想化了的开关接通信号源的情况。如下图示：



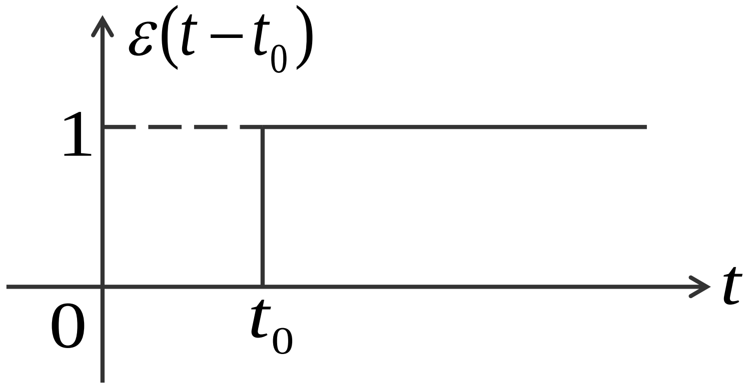
接通电压源的模型

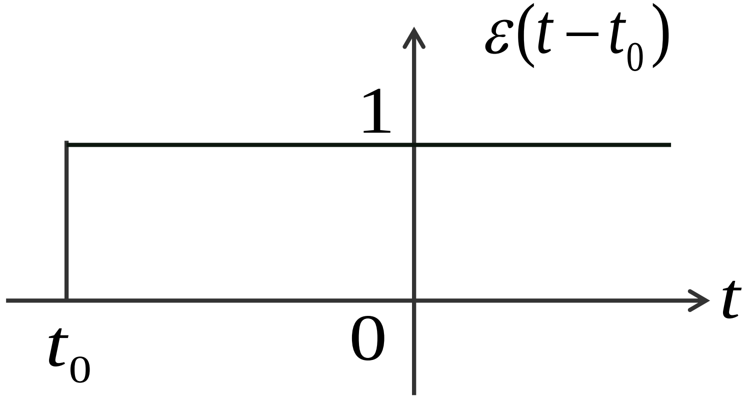
则在 AA' 处的电压可表示为如下的阶跃函数：

$$u_A(t)=\begin{cases}E & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}=E\varepsilon(t)$$

延时的单位阶跃函数：

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$

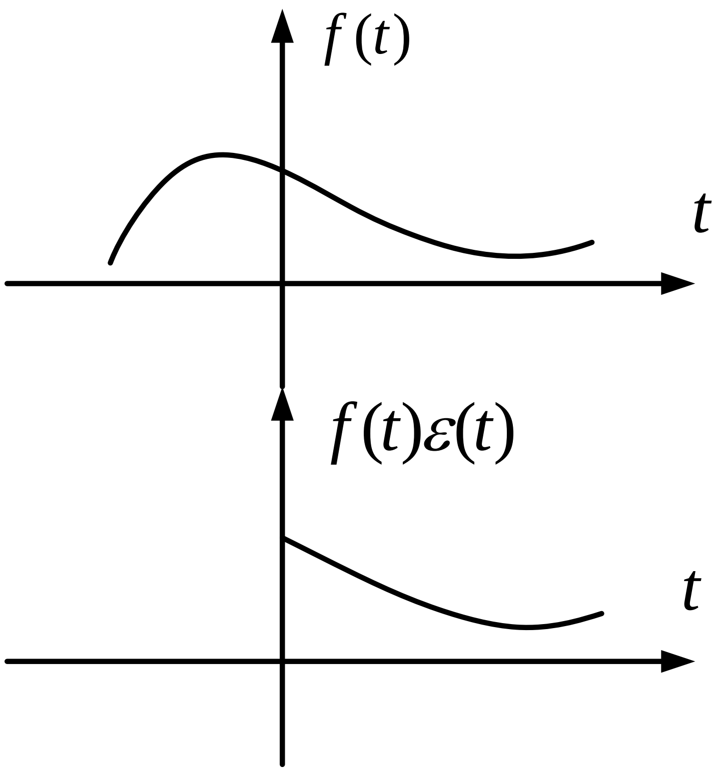


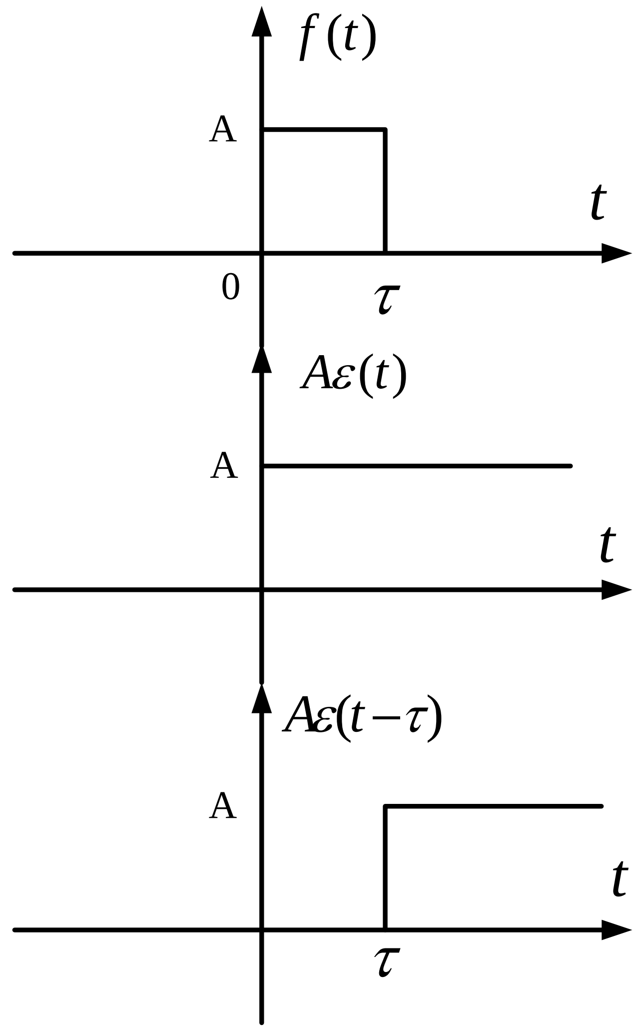


单位阶跃函数的最大特点是<u>单边性</u>。

如任一信号与单位阶跃信号相乘都为单边信号。

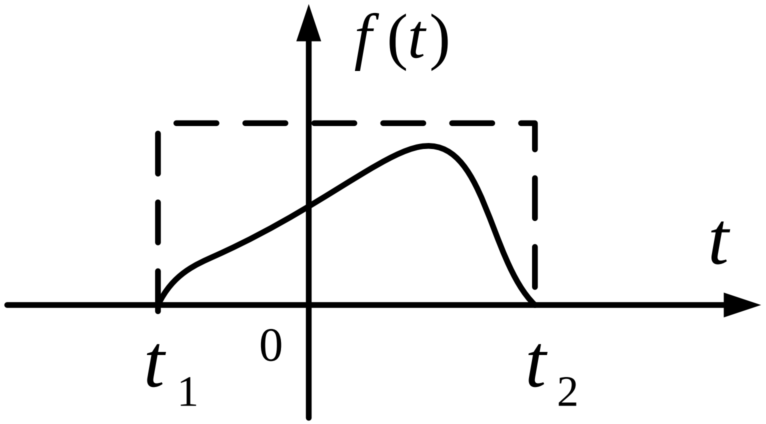
$$f(t)\varepsilon(t)=\begin{cases} f(t) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$





$$f(t)=A[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)]$$

用单位阶跃信号表示有限时长信号：



$$f(t)=\begin{cases} f(t) & t_1<t<t_2 \\ 0 & other \end{cases}$$

$$=f(t)[\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)]$$

$$f(t)=\begin{cases} t & -1<t<0 \\ e^{-t} & 0<t<1 \\ 1-t & 1<t<2 \\ 0 & other \end{cases}$$

系统的数学模型建立；

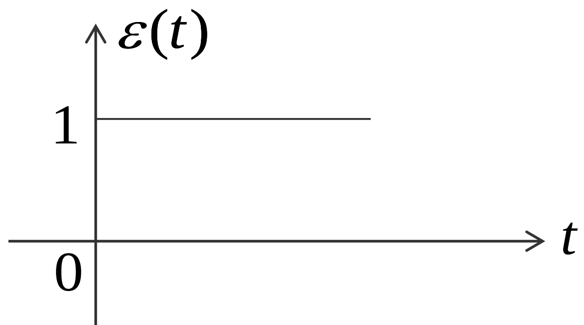
零输入响应的求解；

奇异函数；

一、阶跃函数(step function)

<u>单位阶跃函数</u>(unit step function)：

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



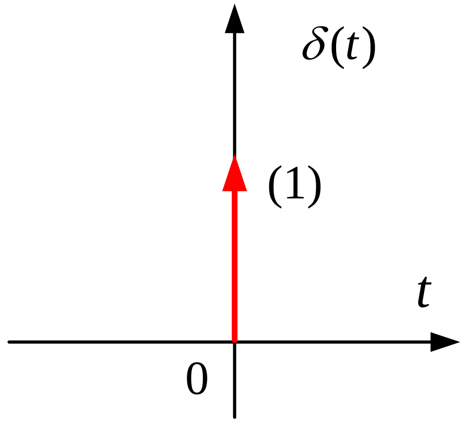
二、单位冲激函数 $\delta(t)$ (unit impulse function)

(delta funtion)

冲激函数可以用来理想化那些作用时间极短、取值极大的信号，如力学中瞬间作用的冲击力、电学中的雷击电闪等。

1. 定义

$\delta(t)$ 的三种定义方法



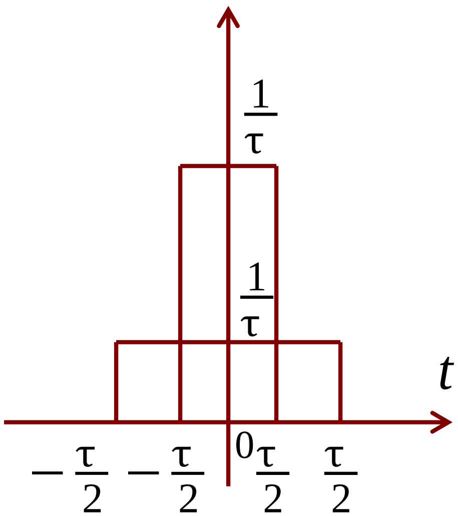
◆ 积分定义法：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

$$\boxed{f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)}$$

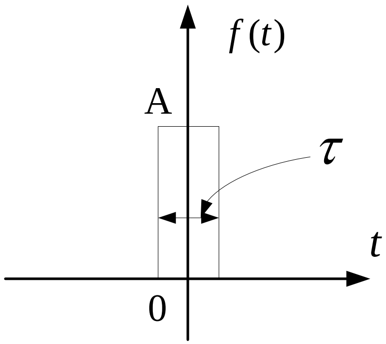
◆ **极限定义法：**

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}[\varepsilon(t+\frac{\tau}{2})-\varepsilon(t-\frac{\tau}{2})]$$



◆ **广义函数定义法：**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

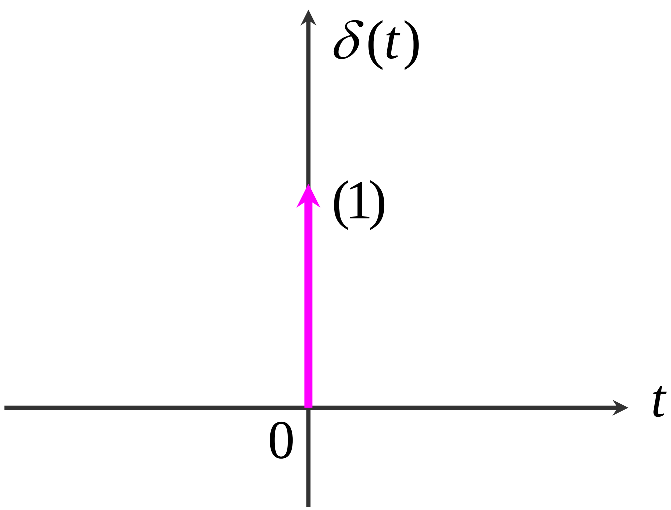


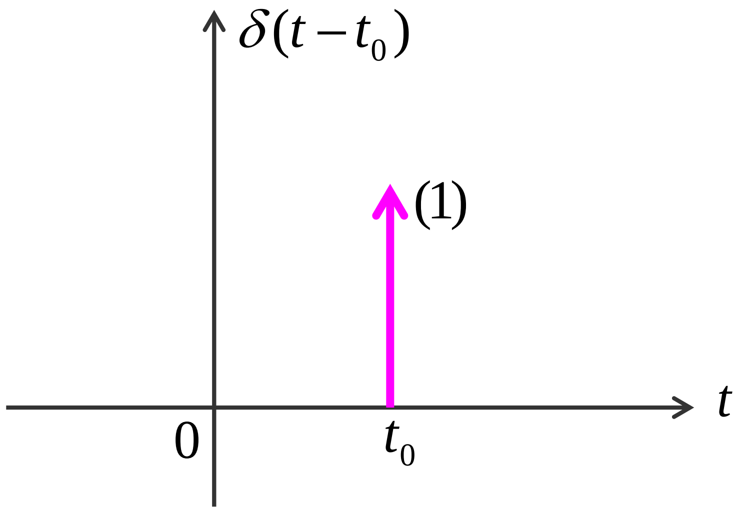
或，若 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_1(t)dt = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_2(t)dt$$

则 $$\varphi_1(t)=\varphi_2(t)=\delta(t)$$

定义单位冲激函数的积分值为冲激函数的<u>冲激强度</u>，若冲激函数的积分为 A ，则此冲激函数的冲激强度为 A ，表示为 $A\delta(t)$ 。

冲激函数的图形表示法为：





$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

2. 性质

（a） 抽样性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_1)\delta(t-t_0)dt = f(t_0-t_1)$$

(b) 与函数乘

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

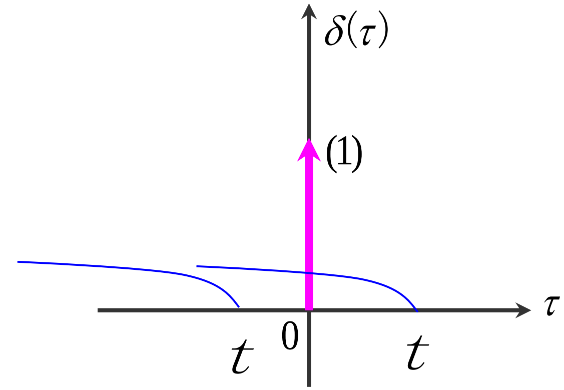
$$f(t-t_1)\delta(t-t_0) = f(t_0-t_1)\delta(t-t_0)$$

（c） 偶函数性

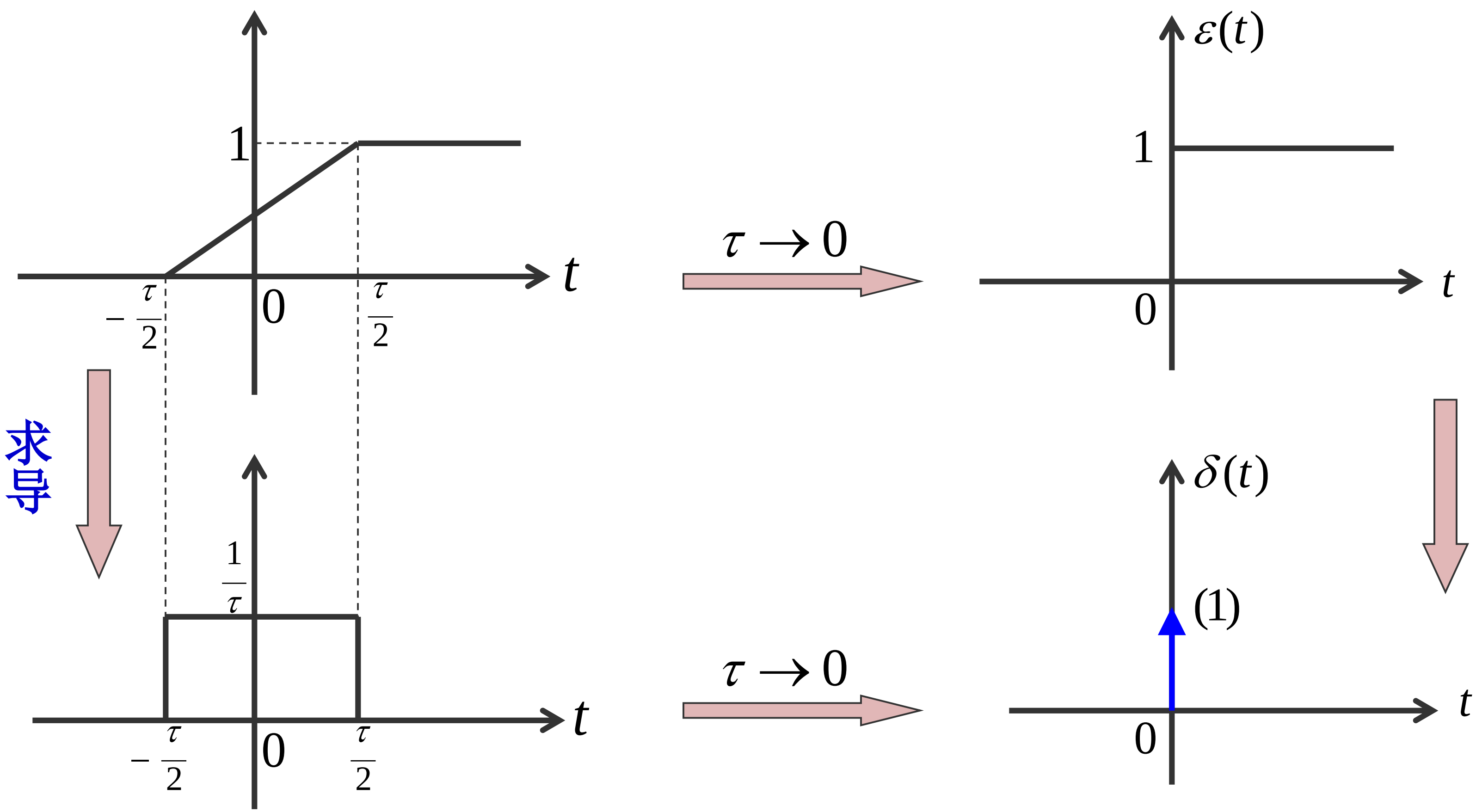
$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-t)dt = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau) f(-\tau)d(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(-\tau)d\tau = f(0)$$

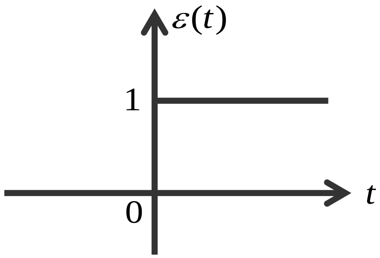
(d) $$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

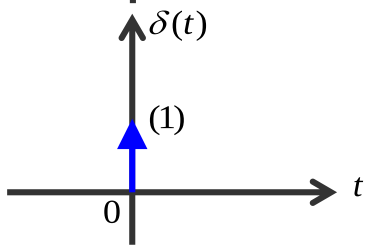


(e) $$\delta(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

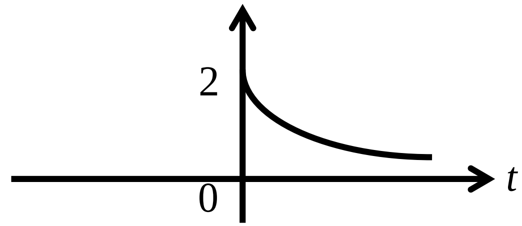


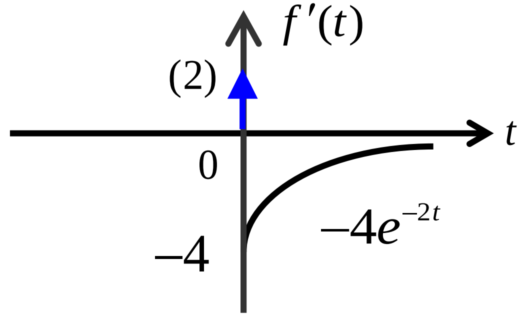
这一性质说明，间断处的导数一定有一个冲激。





$$f(t) = 2e^{-2t}\varepsilon(t)$$





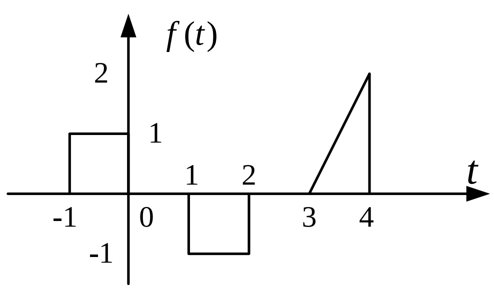
$$f(t) = 2e^{-2t}\varepsilon(t)$$

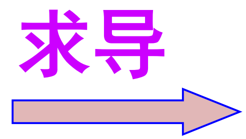
$$f'(t) = -4e^{-2t}\varepsilon(t) + 2e^{-2t}\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

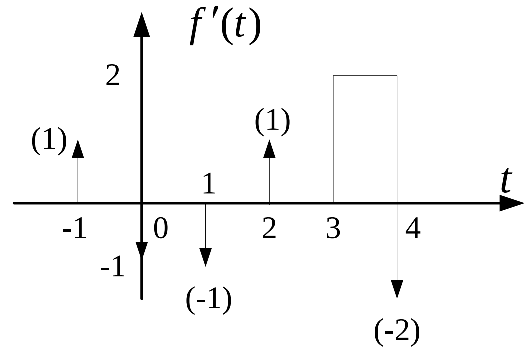
$$= -4e^{-2t}\varepsilon(t) + 2e^{-2t}\delta(t)$$

$$= -4e^{-2t}\varepsilon(t) + 2\delta(t)$$

$$f'(t) = 2\delta(t) - 4e^{-2t}\varepsilon(t)$$





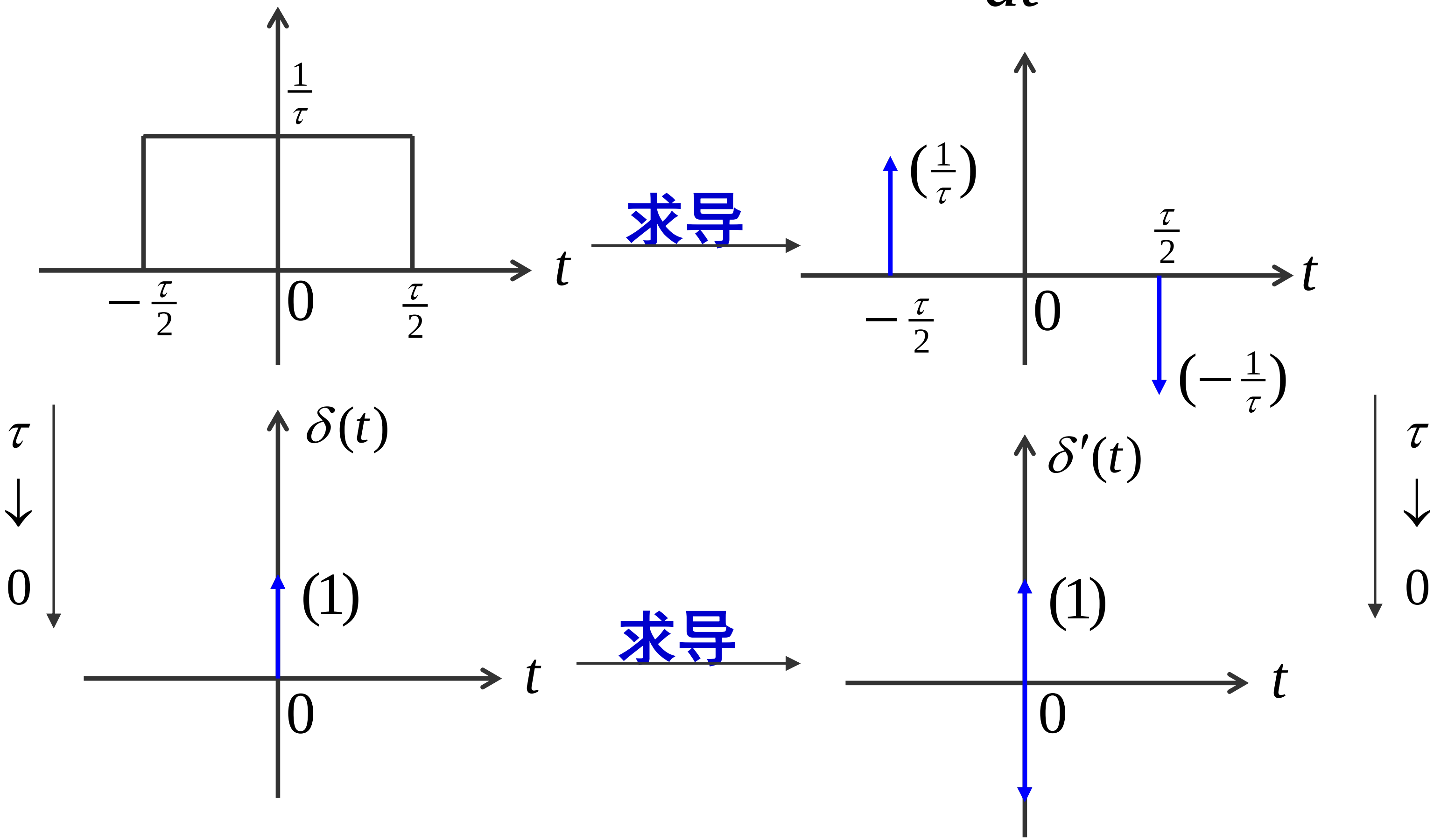


(f) 尺度变换

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

(g) 冲激偶函数 $\delta'(t)$

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$



冲激偶函数是奇函数： $\delta'(t) = -\delta'(-t)$

冲激偶函数与函数相乘： $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(t)\cdot\delta(t-\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t=\sin(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}/2$$

$$(2)\int_{-2}^{+3}\mathrm{e}^{-5t}\cdot\delta(t-1)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-5\times1}=1/\mathrm{e}^{5}$$

$$(3)\int_{-4}^{+6}\mathrm{e}^{-2t}\cdot\delta(t+8)\mathrm{d}t=0$$

$$(4)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\delta(2-2t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{1}{2}\delta(t-1)\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

$$(5)\int_{-2}^{+2}(t^{2}+3t)\cdot3\delta(t-3)\cdot\mathrm{d}t=0$$

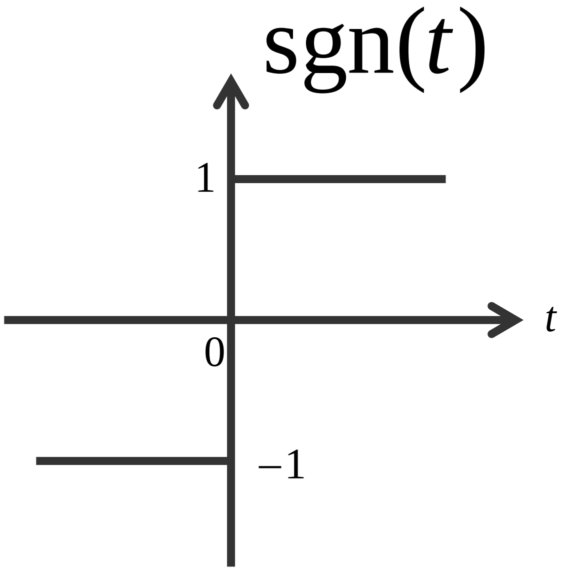
$$(6)(t^{3}+2t^{2}+3)\cdot\delta(t-2)=(2^{3}+2\cdot2^{2}+3)\cdot\delta(t-2)=19\cdot\delta(t-2)$$

$$(7)\mathrm{e}^{-4t}\cdot\delta(2+2t)=\mathrm{e}^{-4t}\cdot\frac{1}{2}\delta(t+1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4\times(-1)}\delta(t+1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4}\delta(t+1)$$

$$(8)\mathrm{e}^{-2t}u(t)\cdot\delta(t+1)=\mathrm{e}^{-2\times(-1)}u(-1)\cdot\delta(t+1)=0\times\delta(t+1)=0$$

三、符号函数（正负号函数）

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

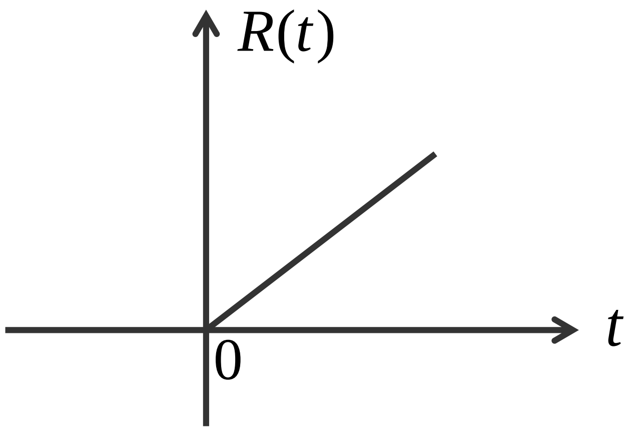


符号函数与阶跃函数的关系：

$$\operatorname{sgn}(t)=2\varepsilon(t)-1$$

四、单位斜变函数

$$R(t)=\begin{cases} t & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



$$R(t)\ \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftharpoons}}\ \varepsilon(t)\ \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftharpoons}}\ \delta(t)\ \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftharpoons}}\ \delta'(t)$$

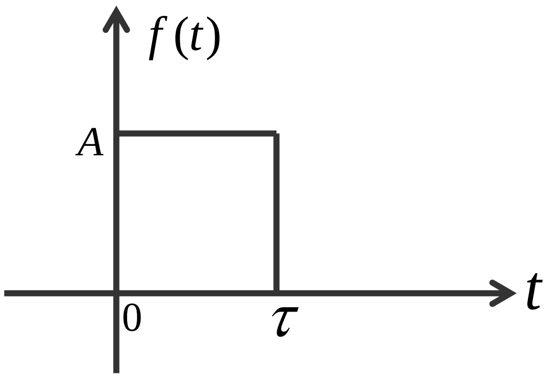
§2.5　信号的时域分解

即如何将信号分解为单元信号的和，时域法中采用的单元信号就是前面介绍的<u>阶跃信号</u>和<u>冲激信号</u>　。

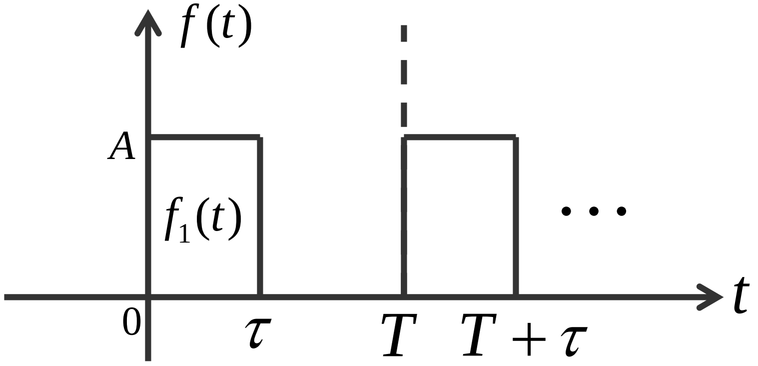
一、规则信号表示为奇异函数之和

单个脉冲

$$f(t) = A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)]$$



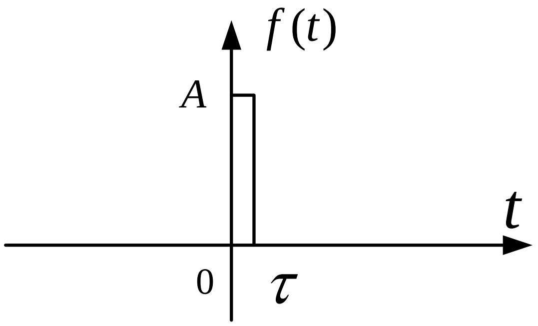
有始周期方波



$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_1(t-kT) = A\sum_{k=0}^{\infty}[\varepsilon(t-kT) - \varepsilon(t-kT-\tau)]$$

窄脉冲信号：



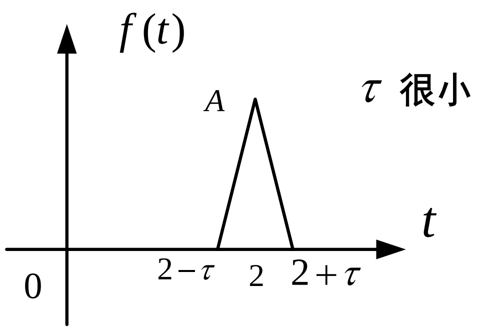
$$f(t) = A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)]$$

$$= A\frac{[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)]}{\tau}\tau$$

$$\approx A\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\tau$$

$$= A\tau \cdot \delta(t)$$

类似：

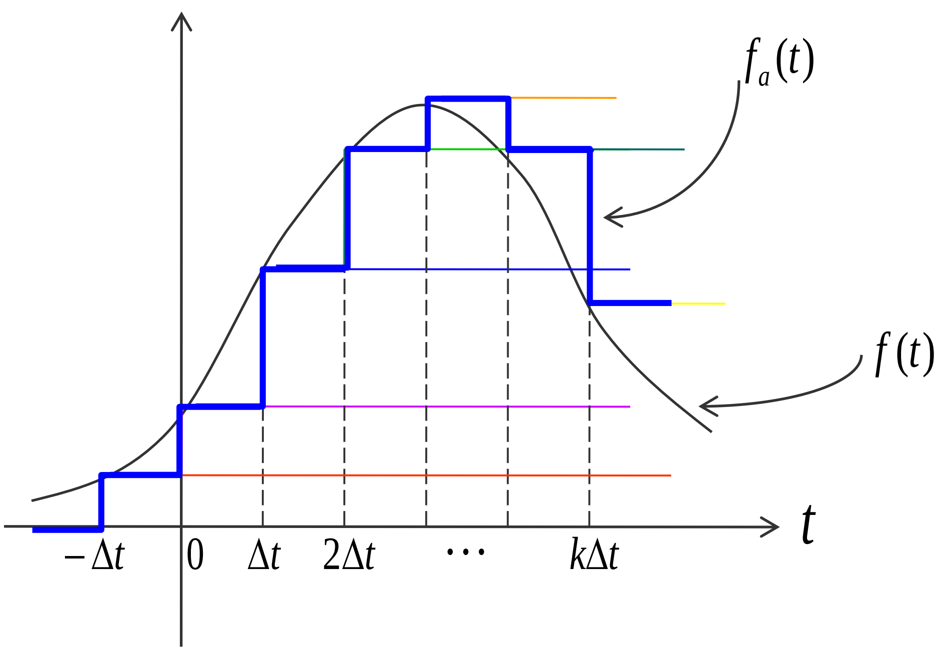


$$f(t) \approx A\tau \cdot \delta(t-2)$$

二、任意信号表示为阶跃信号的积分

任意函数的分解方法

- 阶跃信号的加权和
- 冲激函数的加权和



阶跃信号的加权和图示

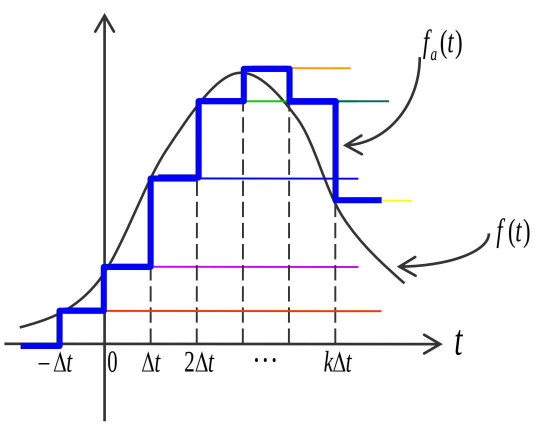
$$t=0 \quad f_0(t)=[f(0)-f(-\Delta t)]\varepsilon(t)$$

$$t=\Delta t \quad f_1(t)=[f(\Delta t)-f(0)]\varepsilon(t-\Delta t)=\frac{f(\Delta t)-f(0)}{\Delta t}\cdot\Delta t\varepsilon(t-\Delta t)$$

$$=[\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}]_{t=\Delta t}\cdot\Delta t\cdot\varepsilon(t-\Delta t)$$

$$t=k\Delta t \quad f_k(t)=[f(k\Delta t)-f(k\Delta t-\Delta t)]\cdot\varepsilon(t-k\Delta t)$$

$$=[\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}]_{t=k\Delta t}\cdot\Delta t\cdot\varepsilon(t-k\Delta t)$$



将上述阶跃函数叠加起来得到阶梯型函数 $f_a(t)$

$$f_a(t) = \cdots + f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_k(t) + \cdots$$

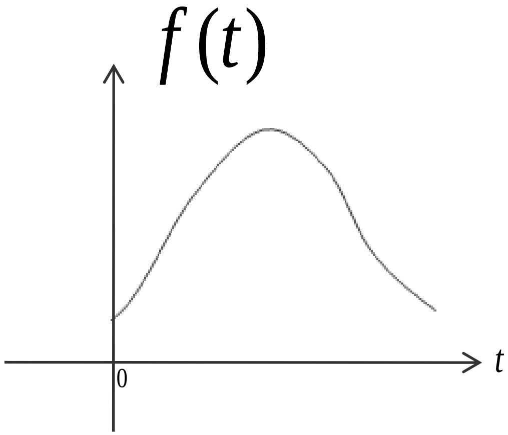
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}\right]_{t=k\Delta t} \cdot \Delta t \cdot \varepsilon(t - k\Delta t)$$

当 $\Delta t \to 0$ **时，** $f_a(t) \to f(t)$ **，即** $f(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} f_a(t)$

$$\Delta t \to d\tau \quad k\Delta t \to \tau \quad \left[\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}\right]_{t=k\Delta t} \to \frac{df(\tau)}{d\tau} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\boxed{\therefore\ f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau}$$



当 $f(t)$ 是有始信号时，上式变为

$$f(t)=f(t)\cdot\varepsilon(t)$$

$$f'(t)=f(t)\cdot\delta(t)+f'(t)\cdot\varepsilon(t)=f(0^{+})\cdot\delta(t)+f'(t)\cdot\varepsilon(t)$$

$$\therefore\quad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

=0

$$=\int_{-\infty}^{0^-} f'(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau+\int_{0^-}^{t} f'(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau+\int_{t}^{\infty} f'(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$\boxed{\tau>t}$

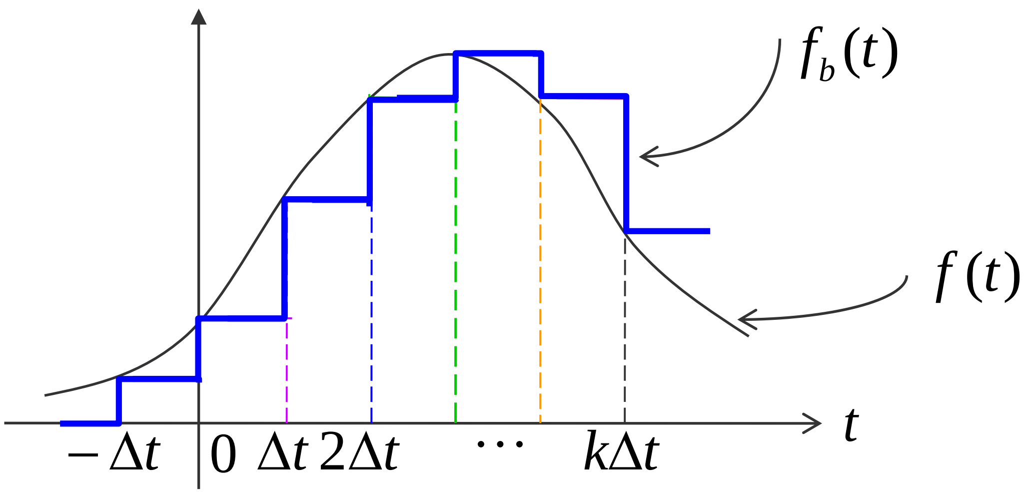
$$=\int_{0^-}^{t} f'(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$=f(0^{+})\cdot\varepsilon(t)+\int_{0^+}^{t} f'(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

三、任意信号表示为冲激函数的积分

$$\boxed{f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau}$$

三、任意信号表示为冲激函数的积分



冲激信号的加权和图示

$$f_0(t) = f(0)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\Delta t)] = f(0)\frac{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta t)}{\Delta t}\cdot \Delta t$$

$$f_1(t) = f(\Delta t)[\varepsilon(t-\Delta t) - \varepsilon(t-2\Delta t)]$$

$$= f(\Delta t)\frac{\varepsilon(t-\Delta t)-\varepsilon(t-2\Delta t)}{\Delta t}\cdot \Delta t$$

$$f_k(t) = f(k\Delta t)[\varepsilon(t-k\Delta t)-\varepsilon(t-k\Delta t-\Delta t)]$$

$$\boxed{= f(k\Delta t)\frac{\varepsilon(t-k\Delta t)-\varepsilon(t-k\Delta t-\Delta t)}{\Delta t}\cdot\Delta t}$$

则阶梯波 $f_b(t)$ **为**

$$f_b(t)=\cdots+f_0(t)+f_1(t)+\cdots+f_k(t)+\cdots$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\frac{\varepsilon(t-k\Delta t)-\varepsilon(t-k\Delta t-\Delta t)}{\Delta t}\cdot\Delta t$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\cdot\Delta t$$

$$\Delta t \to d\tau \qquad k\Delta t \to \tau \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} f_b(t) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau$$

即 $$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau}$$

当 $f(t)$ 为有始信号时，上式变为

$$\boxed{f(t) = \int_{0^-}^{t} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau}$$

单元信号： $\delta(t), \varepsilon(t)$

任意信号的分解：

$$\boxed{\therefore\ f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau}$$

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau}$$

§2.6 阶跃响应和冲激响应

(step response impulse response)

单位冲激响应—— 以单位冲激信号作为激励信号时，系统的零状态响应，记为$h(t)$。

Unit impulse response

$$\boxed{\delta(t) \rightarrow h(t)}$$

单位阶跃响应—— 以单位阶跃信号作为激励信号时，系统的零状态响应，记为$r_\varepsilon(t)$。

Unit step response

$$\boxed{\varepsilon(t) \rightarrow r_\varepsilon(t)}$$

一、冲激响应

$$\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=e(t)$$

$$e(t)=\delta(t)\rightarrow r(t)=h(t) \qquad \frac{dh(t)}{dt}+a_0 h(t)=\delta(t)$$

两边同乘 $e^{a_0 t}$

$$e^{a_0 t}\frac{dh(t)}{dt}+a_0 h(t)e^{a_0 t}=\delta(t)e^{a_0 t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{a_0 t}h(t)\right]=\delta(t)e^{a_0 t}$$

两边积分： $0^{-} : t$

$$e^{a_0 t}h(t)-h(0^{-})=\int_{0^{-}}^{t} e^{a_0\tau}\delta(\tau)d\tau$$

如果系统是因果系统： $h(0^{-})=0$

$$h(t)=e^{-a_0 t}\int_{0^{-}}^{t} e^{a_0\tau}\delta(\tau)d\tau=e^{-a_0 t}\varepsilon(t)$$

即： $\dfrac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=e(t) \Rightarrow H(p)=\dfrac{1}{p+a_0}$

$$\boxed{h(t)=e^{-a_0 t}\varepsilon(t)}$$

同理：

$$\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=b_0 e(t) \rightarrow H(p)=\frac{b_0}{p+a_0}$$

$$\boxed{h(t)=b_0 e^{-a_0 t}\varepsilon(t)}$$

$$\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=\frac{de(t)}{dt}+b_0 e(t)$$

$$h(t)=\left[1+\frac{b_0-a_0}{p+a_0}\right]\delta(t)$$

$$H(p)=\frac{p+b_0}{p+a_0}=1+\frac{b_0-a_0}{p+a_0}$$

$$h(t)=\delta(t)+\frac{b_0-a_0}{p+a_0}\delta(t)$$

$$\boxed{h(t)=\delta(t)+(b_0-a_0)e^{-a_0 t}\varepsilon(t)}$$

对于高阶系统：

$$\frac{d^n h(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}h(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dh(t)}{dt}+a_0 h(t)=$$

$$b_m\frac{d^m\delta(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}\delta(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{d\delta(t)}{dt}+b_0\delta(t)$$

$$H(p)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0}$$

$$=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\cdots(p-\lambda_n)}$$

$$=\frac{k_1}{p-\lambda_1}+\frac{k_2}{p-\lambda_2}+\cdots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}\qquad m<n$$

$$H(p)=\frac{k_1}{p-\lambda_1}+\frac{k_2}{p-\lambda_2}+\cdots+\frac{k_n}{p-\lambda_n}\qquad m<n$$

$$\boxed{h(t)=k_1e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t)+k_2e^{\lambda_2 t}\varepsilon(t)+\cdots+k_ne^{\lambda_n t}\varepsilon(t)}$$

$m=n$ $h(t)$ **中含有冲激函数项**

$m>n$ $h(t)$ **中含有冲激函数的导数项**

二、阶跃响应

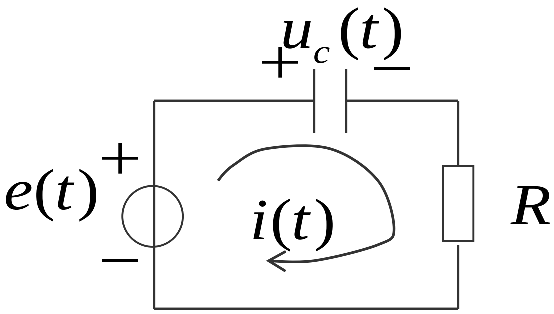
根据线性时不变系统的性质

$$\delta(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \longrightarrow h(t)=\frac{dr_{\varepsilon}(t)}{dt}$$

$$\varepsilon(t)=\int_{0^-}^{t}\delta(\tau)d\tau \longrightarrow r_{\varepsilon}(t)=\int_{0^-}^{t}h(\tau)d\tau$$

即 $h(t)$ 与 $r_{\varepsilon}(t)$ 之间满足微积分的关系，因此阶跃响应可以通过对冲激响应积分求解得到。

三、例题



RC 电路初始状态为0，

$e(t)=\delta(t)$，求 $u_c(t)$ 和 $i(t)$。

解：系统的微分方程为

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = e(t)$$

或
$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{RC}i(t)=\frac{1}{R}\frac{de(t)}{dt}$$

$$H(p)=\frac{\frac{1}{R}p}{p+\frac{1}{RC}}$$

$$p+\frac{1}{RC}=0$$

$$\lambda=-\frac{1}{RC}$$

$$H(p)=\frac{\frac{1}{R}p}{p+\frac{1}{RC}}=\frac{1}{R}-\frac{\frac{1}{R^2C}}{p+\frac{1}{RC}}$$

$$h(t)=\frac{1}{R}\cdot\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)=i(t)$$

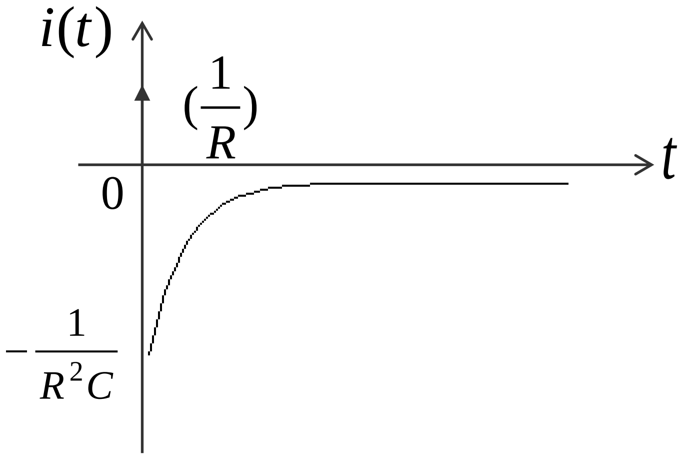
即 $$i(t)=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)$$

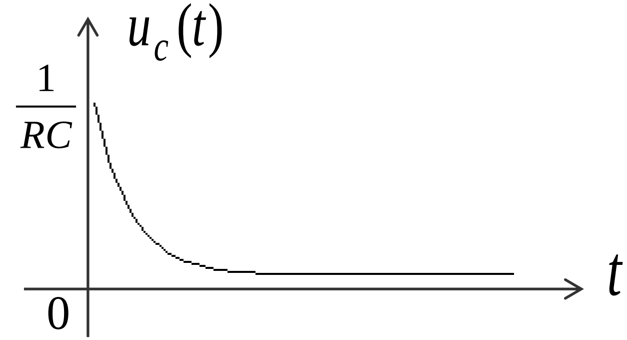
$$u_c(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{R}\delta(\tau)d\tau+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}[\frac{-1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}\tau}\varepsilon(\tau)]d\tau$$

$$=\frac{1}{RC}\varepsilon(t)-\frac{1}{RC}(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\varepsilon(t)$$

$$=\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)$$


$i(t)$
$(\frac{1}{R})$
t
0
$-\frac{1}{R^2C}$


$u_c(t)$
$\frac{1}{RC}$
t
0

例题　已知因果系统转移算子如下，求 $h(t)$

$$H(p)=\frac{1}{p^2+4p+3}$$

解：

$$H(p)=\frac{1}{p^2+4p+3}=\frac{1}{(p+1)(p+3)}$$

$$=\frac{1/2}{p+1}+\frac{-1/2}{p+3}$$

$$h(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

例　一个LTI系统，其输入输出关系如下方程描述：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$

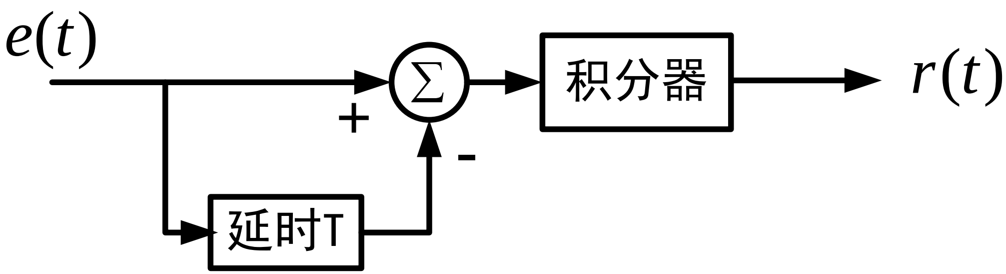
求系统的单位冲激响应。

$$x(t)=\delta(t)\rightarrow y(t)=h(t)$$

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}\delta(\tau-2)d\tau$$

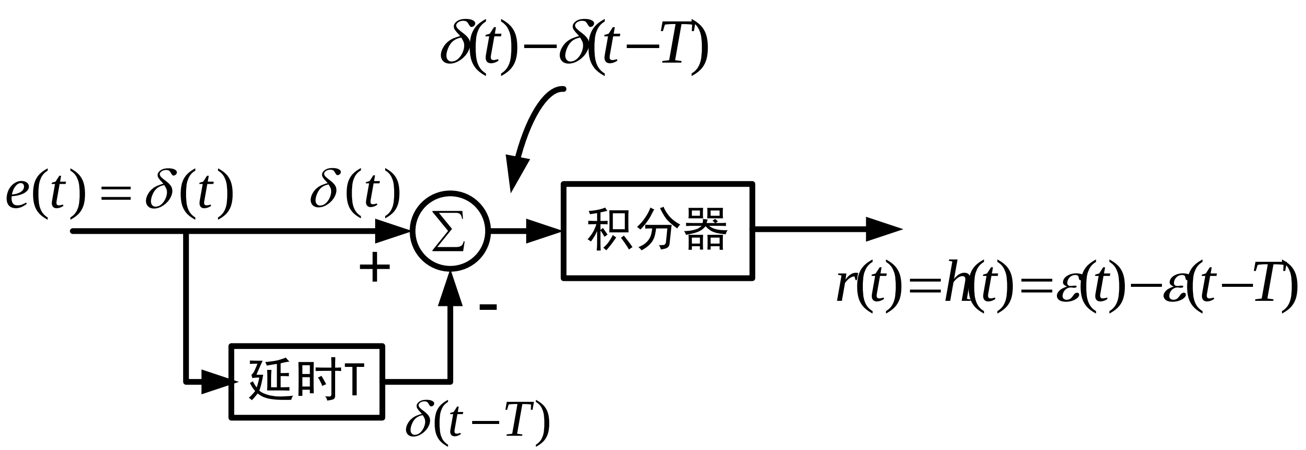
$$=e^{-(t-2)}\varepsilon(t-2)$$

例　系统结构如图示

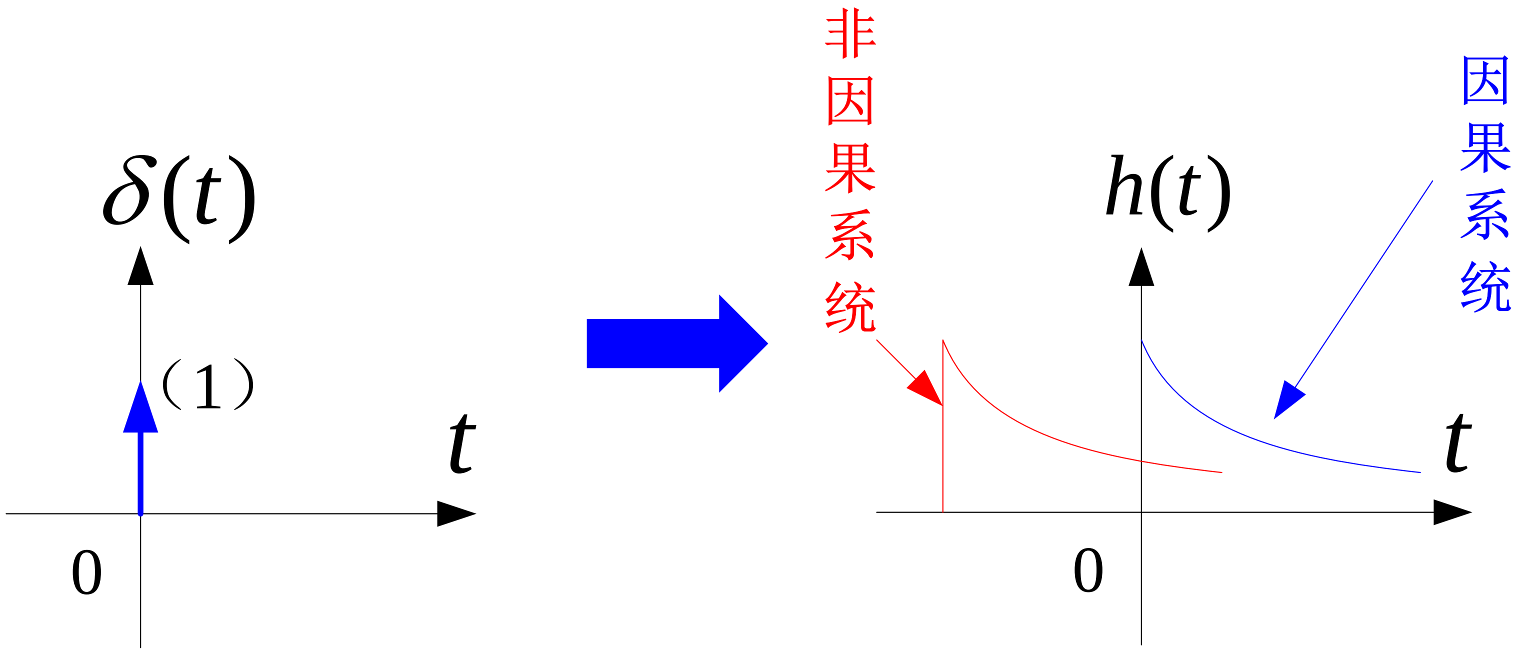


求系统的单位冲激响应。

$$e(t)=\delta(t) \Rightarrow r(t)=h(t)$$



因果系统、非因果系统



因果系统充要条件： $t<0, h(t)=0$

系统的数学模型建立

零输入响应的求解

求特征根；

列基本模式；

确定待定系数；

给出最终解；

零状态响应的求解

单元信号 $\varepsilon(t)$ $\delta(t)$ ；

信号时域分解；

单位冲激响应，单位阶跃响应；

零状态响应。

§2.7　叠加积分

$$\boxed{f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau}$$

一、杜阿美尔积分

假设系统由单位阶跃信号产生的零状态响

应 $r_\varepsilon(t)$ 已知，即

$$\boxed{\varepsilon(t)\rightarrow r_\varepsilon(t)}$$

则系统的任意激励信号为 $e(t)$

$$\boxed{e(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e'(\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)d\tau}$$

即

$$\boxed{r_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e'(\tau)\cdot r_\varepsilon(t-\tau)d\tau}$$

杜阿美尔积分

二、卷积积分(convolution integral)

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau$$

激励信号用冲激信号近似表示的形式为

$$e(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau$$

$$\delta(t)\rightarrow h(t)$$

即

$$r_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

此式称为卷积积分

当系统和输入信号是因果的：

$$\boxed{\begin{aligned} h(t) &= h(t)\varepsilon(t) \\ e(t) &= e(t)\varepsilon(t) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} r_{zs}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{0^-} e(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau + \int_{0^-}^{t} e(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau + \int_{t}^{\infty} e(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{0^-}^{t} e(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

变量代换：

$$\boxed{r_{zs}(t) = \int_{0^-}^{t} e(t-\tau)\cdot h(\tau)d\tau}$$

卷积积分通常表示为：

$$\boxed{r_{zs}(t) = e(t)*h(t) = h(t)*e(t)}$$

$$\boxed{= \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e(t-\tau)\cdot h(\tau)d\tau}$$

上述分析过程也适用于线性时变系统：

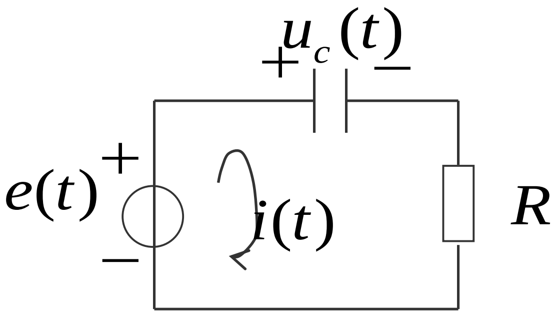
$$\delta(t-\tau) \to h(t,\tau)$$

$$\boxed{e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t,\tau) d\tau}$$

三、例题



RC 电路初始状态为0，

$e(t)=\delta(t)$，求 $u_c(t)$ 和 $i(t)$。

解：系统的微分方程为

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = e(t)$$

或
$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{RC}i(t)=\frac{1}{R}\frac{de(t)}{dt}$$

$$H(p)=\frac{\frac{1}{R}p}{p+\frac{1}{RC}}$$

$$p+\frac{1}{RC}=0$$

$$\lambda=-\frac{1}{RC}$$

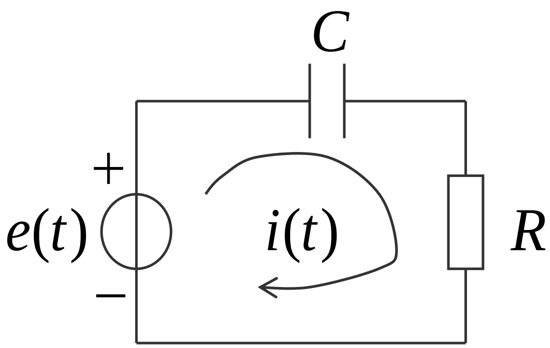
$$H(p)=\frac{1}{R}-\frac{\frac{1}{R^2C}}{p+\frac{1}{RC}}$$

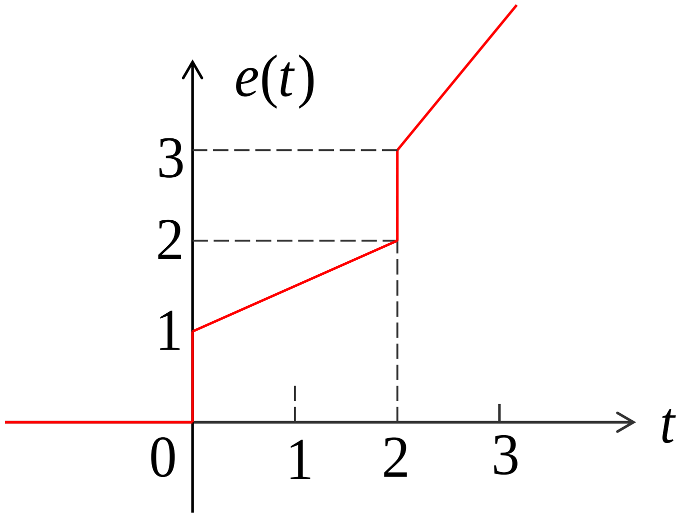
$$h(t)=\frac{1}{R}\cdot\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)$$

例：电路如图示，元件参数为 $R=0.5\Omega, C=2F$

系统的初始状态为 0 ，激励信号如图示

求响应电流 $i(t)$ 。



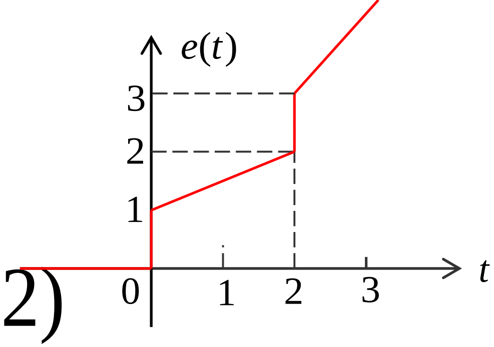


解：由前面的例题知，系统的冲激响应为

$$h(t)=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t) \quad =2\delta(t)-2e^{-t}\varepsilon(t)$$

$$\boxed{r_{zs}(t)=e(t)*h(t)=h(t)*e(t)}$$

激励电压 $e(t)$ 为



$$e(t)=(\frac{1}{2}t+1)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]+(t+1)\varepsilon(t-2)$$

$$=(\frac{1}{2}t+1)\varepsilon(t)+\frac{1}{2}t\varepsilon(t-2)$$

则响应电流 $i(t)$ 为

$$i(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[(\frac{1}{2}\tau+1)\varepsilon(\tau)+\frac{1}{2}\tau\varepsilon(\tau-2)]\cdot[2\delta(t-\tau)-2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[(\frac{1}{2}\tau+1)\varepsilon(\tau)+\frac{1}{2}\tau\varepsilon(\tau-2)]\cdot[2\delta(t-\tau)-2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)]d\tau$$

$$\boxed{=\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2}\tau+1)\varepsilon(\tau)\cdot 2\delta(t-\tau)d\tau} \quad =(t+2)\varepsilon(t)$$

$$\boxed{+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\tau\varepsilon(\tau-2)\cdot 2\delta(t-\tau)d\tau} \quad =t\varepsilon(t-2)$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2}\tau+1)\varepsilon(\tau)\cdot 2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\tau\varepsilon(\tau-2)\cdot 2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$= (t+2)\varepsilon(t) + t\varepsilon(t-2) \underline{-\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2}\tau+1)\varepsilon(\tau)\cdot 2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau}$$

$$\underline{-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\tau\varepsilon(\tau-2)\cdot 2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau}$$

$$= (t+2)\varepsilon(t) + t\varepsilon(t-2) \underline{-[\cancel{\int_{-\infty}^{0}(\frac{1}{2}\tau+1)\varepsilon(\tau)\cdot 2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau}}$$

$$\underline{+\int_{0}^{t}(\frac{1}{2}\tau+1)\varepsilon(\tau)\cdot 2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau + \cancel{\int_{t}^{\infty}(\frac{1}{2}\tau+1)\varepsilon(\tau)\cdot 2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau}]}$$

$$\underline{-[\cancel{\int_{-\infty}^{2}\frac{1}{2}\tau\varepsilon(\tau-2)\cdot 2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau} + \int_{2}^{t}\frac{1}{2}\tau\varepsilon(\tau-2)\cdot 2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau}$$

$$\underline{+\cancel{\int_{t}^{\infty}\frac{1}{2}\tau\varepsilon(\tau-2)\cdot 2e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau}]}$$

$$= (t+2)\varepsilon(t) + t\varepsilon(t-2) - e^{-t}\int_{0^-}^{t}(\tau+2)e^{\tau}d\tau\cdot\varepsilon(t)$$

$$-e^{-t}\int_{2}^{t}\tau e^{\tau}d\tau\cdot\varepsilon(t-2)$$

$$= (1+e^{-t})\varepsilon(t) + [1+e^{-(t-2)}]\varepsilon(t-2)$$

§2.8 卷积及其性质

一、卷积的数学定义

$$\boxed{g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau}$$

$$\boxed{g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau}$$

当 $t < 0$ $f_1(t) = f_2(t) = 0$ **时，上式变为**

$$\boxed{\begin{aligned} g(t) &= f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \end{aligned}}$$

二、卷积的几何含义

$$\boxed{g(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau}$$

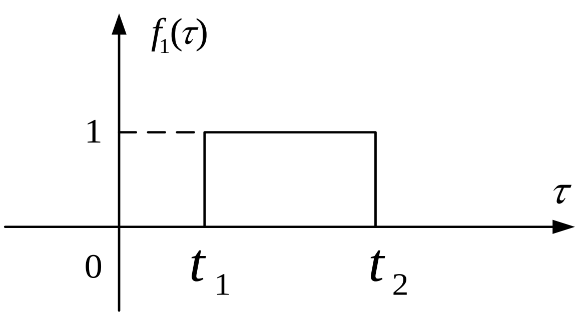
$$f_2(t-\tau)=f_2[-(\tau-t)]$$

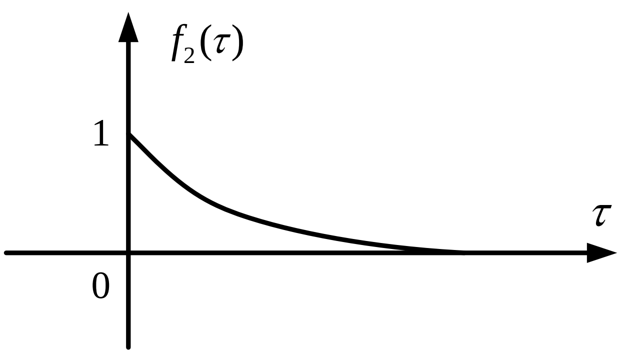
翻转 —— 平移 —— 相乘 —— 积分

例：求矩形脉冲 $f_1(t)=\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)\quad t_2>t_1$

与指数函数 $f_2(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$ **的卷积。**

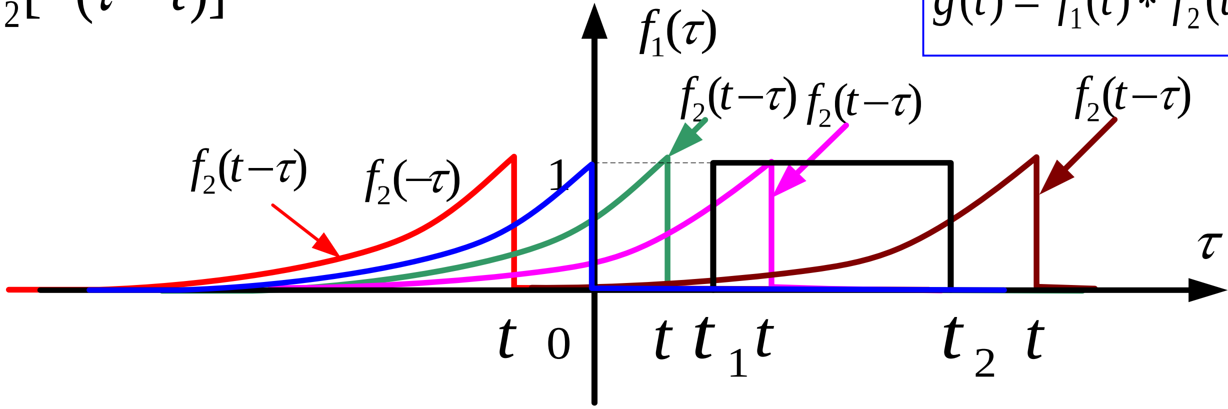
解：





$$f_2(t-\tau)=f_2[-(\tau-t)]$$

$$\boxed{g(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)d\tau}$$



$$t<t_1 \qquad g(t)=f_1(t)*f_2(t)=0$$

$$t_1<t<t_2 \qquad g(t)=\int_{t_1}^{t} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{t_1}^{t} e^{-(t-\tau)}d\tau \;=1-e^{-(t-t_1)}$$

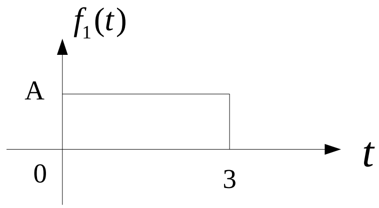
$$t>t_2 \qquad g(t)=\int_{t_1}^{t_2} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau \;=\int_{t_1}^{t_2} e^{-(t-\tau)}d\tau$$

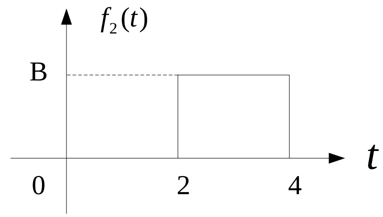
$$=e^{-(t-t_2)}-e^{-(t-t_1)}$$

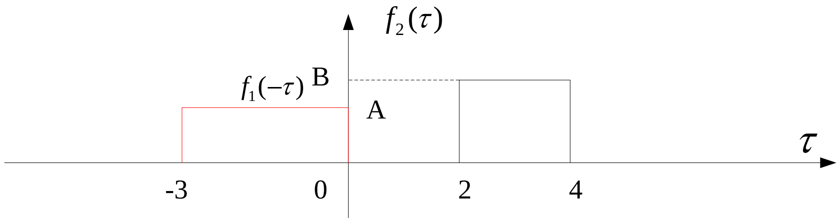
$$\therefore g(t)=[1-e^{-(t-t_1)}][\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)]+[e^{-(t-t_2)}-e^{-(t-t_1)}]\varepsilon(t-t_2)$$

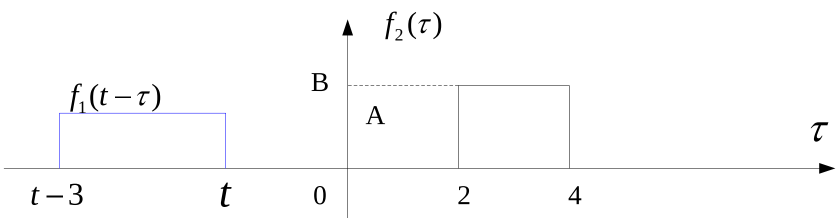
例题 求图示信号的卷积积分

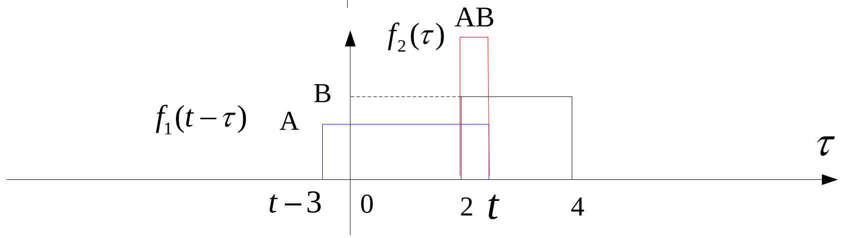
$$g(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

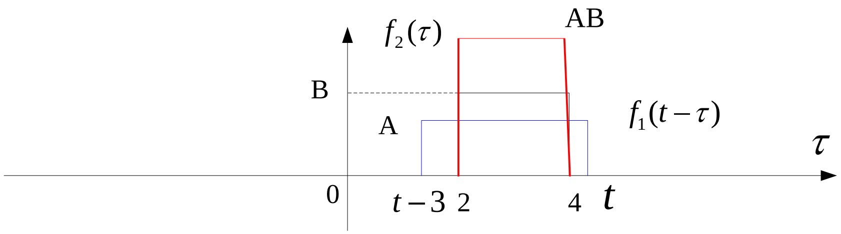


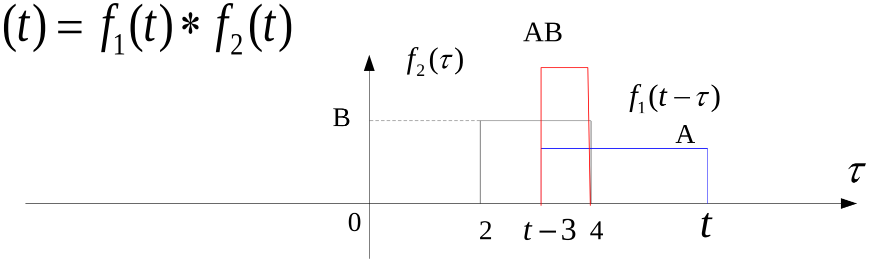


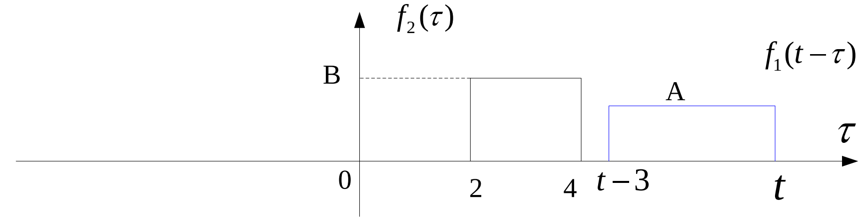












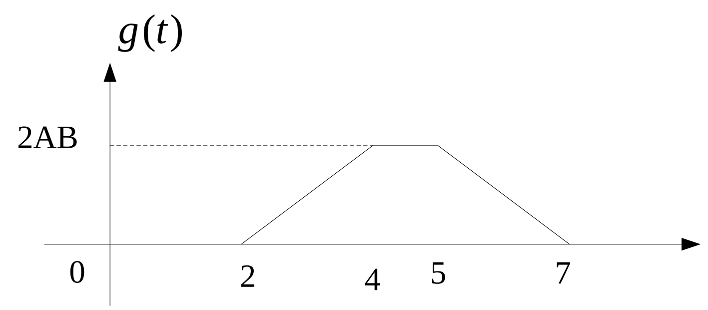
$$t<2, g(t)=f_1(t)*f_2(t)=0$$

$$2<t<4, g(t)=f_1(t)*f_2(t)=AB(t-2)$$

$$4<t<5, g(t)=f_1(t)*f_2(t)=2AB$$

$$5<t<7, g(t)=f_1(t)*f_2(t)=AB(7-t)$$

$$t<7, g(t)=f_1(t)*f_2(t)=0$$



三、卷积的性质

1. 互换律

设有 $u(t)$ 和 $v(t)$ 两函数，则

$$u(t)*v(t) = v(t)*u(t)$$

2. 分配律

设有 $u(t)$ 、$v(t)$ 和 $w(t)$ 三函数，则

$$u(t)*[v(t)+w(t)] = u(t)*v(t)+u(t)*w(t)$$

3. 结合律

设有 $u(t)$ 、$v(t)$ 和 $w(t)$ 三函数，则

$$u(t)*[v(t)*w(t)] = [u(t)*v(t)]*w(t)$$

4. 函数相卷积后的微分

设有 $u(t)$ 和 $v(t)$ 两函数，则

$$\frac{d}{dt}[u(t)*v(t)]=\frac{du(t)}{dt}*v(t)=u(t)*\frac{dv(t)}{dt}$$

5. 函数相卷积后的积分

设有 $u(t)$ 和 $v(t)$ 两函数，则

$$\int_{-\infty}^{t}[u(x)*v(x)]dx=\int_{-\infty}^{t}u(x)dx*v(t)=u(t)*\int_{-\infty}^{t}v(x)dx$$

综合性质4，5有

$$u(t)*v(t)=\frac{du(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}v(x)dx=\int_{-\infty}^{t}u(x)dx*\frac{dv(t)}{dt}$$

6. 与冲激函数或阶跃函数的卷积

$$\boxed{f(t)*\delta(t)=f(t)}$$

$$\boxed{f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)}$$

$$\boxed{f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx*\frac{d\varepsilon(t)}{dt}}$$

$$\boxed{=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx*\delta(t)}$$

$$\boxed{=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx}$$

7. 相关与卷积

两个时间信号 $x(t), y(t)$ ，其互相关函数定义为：

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau - t)d\tau \qquad R_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(\tau - t)d\tau$$

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + t)y(\tau)d\tau \qquad R_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau + t)x(\tau)d\tau$$

$$R_{xy}(t) = R_{yx}(-t)$$

信号 $x(t)$ 的自相关函数定义为：

$$\boxed{R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(\tau - t)d\tau \qquad R_{xx}(t) = R_{xx}(-t)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau - t)d\tau = x(t) * y(-t) \\ R_{yx}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(\tau - t)d\tau = x(-t) * y(t) \end{aligned}}$$

例：求 $t^3\varepsilon(t)*t^5\varepsilon(t)$

解： $$t^3\varepsilon(t)*t^5\varepsilon(t)=\frac{dt^3\varepsilon(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}\tau^5\varepsilon(\tau)d\tau$$

$$=3t^2\varepsilon(t)*\frac{1}{6}t^6\varepsilon(t)=3\cdot 2t\varepsilon(t)*\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}t^7\varepsilon(t)$$

$$=3\cdot 2\cdot 1\cdot\varepsilon(t)*\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}t^8\varepsilon(t)$$

$$=3!\cdot\delta(t)*\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}t^9\varepsilon(t)$$

$$=\frac{3!\cdot 5!}{9!}t^9\varepsilon(t)$$

§2.9　线性系统响应的时域求解

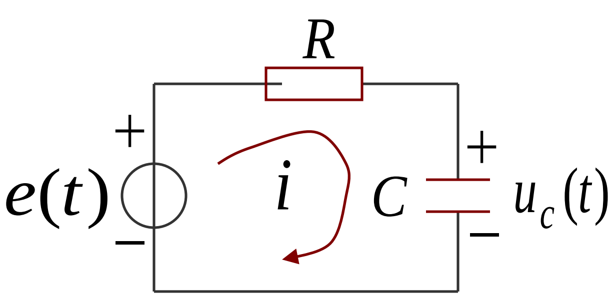
系统的全响应 $r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

$r_{zi}(t)$ 的变化模式取决于系统的特征根；

$r_{zs}(t)$ 是激励信号与单位冲激响应的卷积。

例：电路如图示 $R=1\Omega,\quad C=1F$ ，激励电压

$$e(t)=(1+e^{-3t})\varepsilon(t)$$

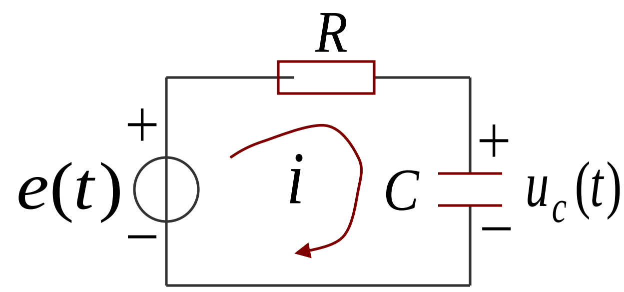


电容上的初始电压 $u_c(0)=1V$

求电容两端电压 $u_c(t)$ 。

解：列系统的微分方程有

$$RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=e(t)$$



代入元件参数

$$\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=e(t) \qquad H(p)=\frac{1}{p+1}$$

由此可得系统的特征根为 $\lambda=-1$

$$\therefore u_{czi}(t)=C_1e^{-t}$$

代入初始条件得 $C_1=1$ $\quad \therefore u_{czi}(t)=e^{-t} \quad t>0$

此系统的单位冲激响应为: $\quad h(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$

$$\therefore u_{czs}(t) = e(t) * h(t) = \int_{0^-}^{t} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t (1+e^{-3\tau})\varepsilon(\tau)\cdot e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau \quad = (1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$u_c(t) = u_{czi}(t) + u_{czs}(t)$$

$$= \underline{e^{-t}} + \underline{(1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t})}, \quad t>0$$

输入零分量 零状态分量

$$= \underline{\frac{1}{2}e^{-t}} + \underline{(1-\frac{1}{2}e^{-3t})} \qquad = \underline{(\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t})} + \underline{1}, \quad t>0$$

自然响应分量 (natural response)

受迫响应分量 (forced response)

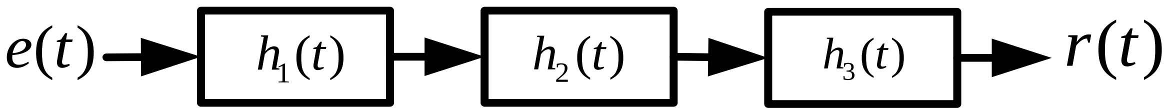
瞬态响应分量 (transient response)

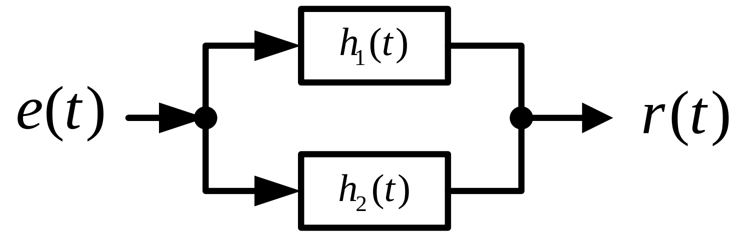
稳态响应分量 (steady-state response)

本章小结

基本概念：系统的数学模型、特征方程、特征根、奇异函数、零输入响应、零状态响应 、单位冲激响应、单位阶跃响应、自然响应、受迫响应、瞬态响应、稳态响应、卷积。

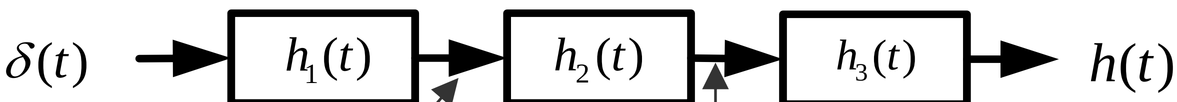
基本运算：零输入响应的求解、单位冲激响应及单位阶跃响应的求解、零状态响应的求解、卷积的几何含义、卷积性质的应用。





求系统的单位冲激响应。

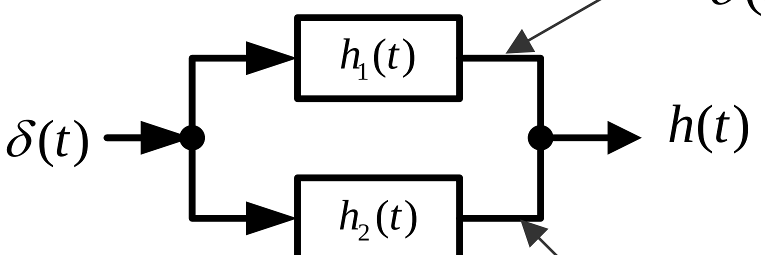
$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * h_3(t)$$

$$\delta(t) * h_1(t) = h_1(t)$$

$$h_1(t) * h_2(t)$$



$$\delta(t) * h_1(t) = h_1(t)$$

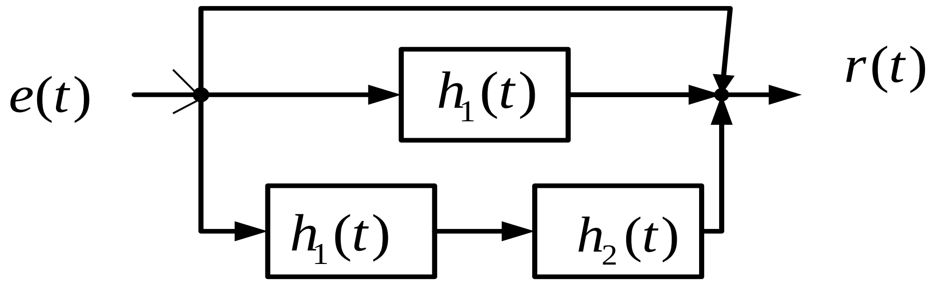
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$\delta(t) * h_2(t) = h_2(t)$$

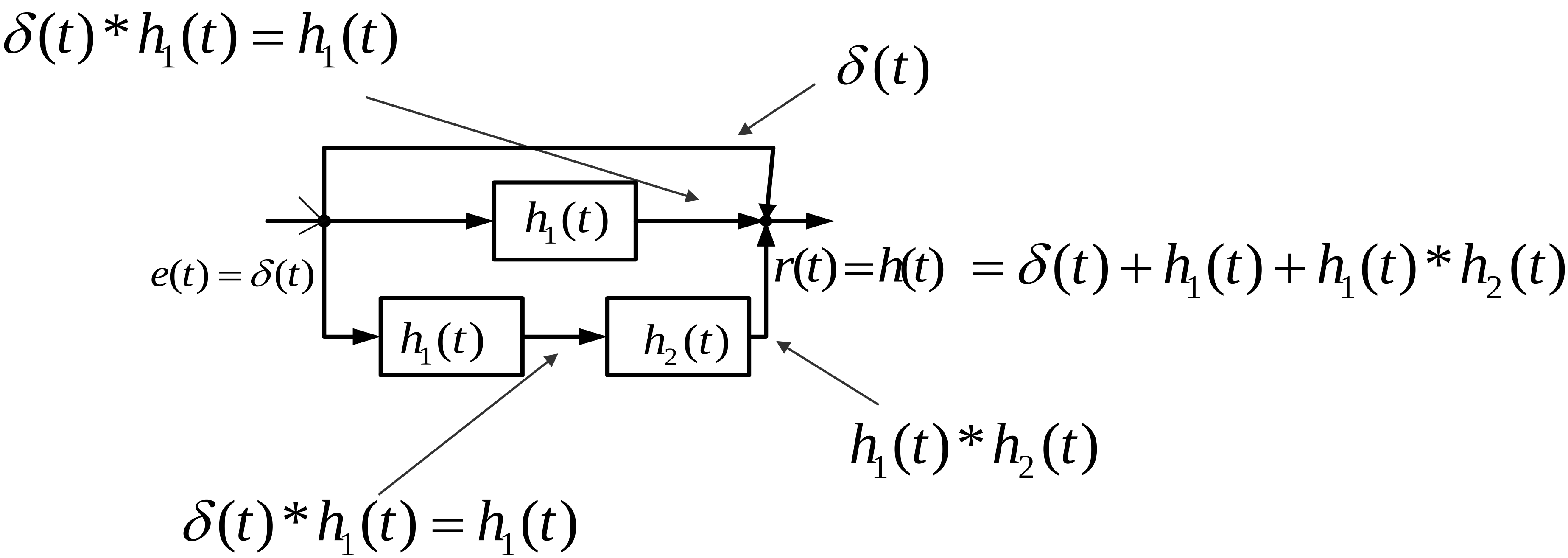
$$\delta(t) \longrightarrow h(t)$$

$$h(t) = \delta(t)$$

课后题2.17



$e(t)$
$h_1(t)$
$r(t)$
$h_1(t)$
$h_2(t)$



$\delta(t) * h_1(t) = h_1(t)$
$\delta(t)$
$h_1(t)$
$e(t) = \delta(t)$
$r(t) = h(t) = \delta(t) + h_1(t) + h_1(t) * h_2(t)$
$h_1(t)$
$h_2(t)$
$h_1(t) * h_2(t)$
$\delta(t) * h_1(t) = h_1(t)$

2.27 已知图 P2-27 所示电路，在 $t=0$ 时合上开关 S_1，经 0.1 s 后又合上开关 S_2，求流过电阻 R_2 的电流 $i(t)$。

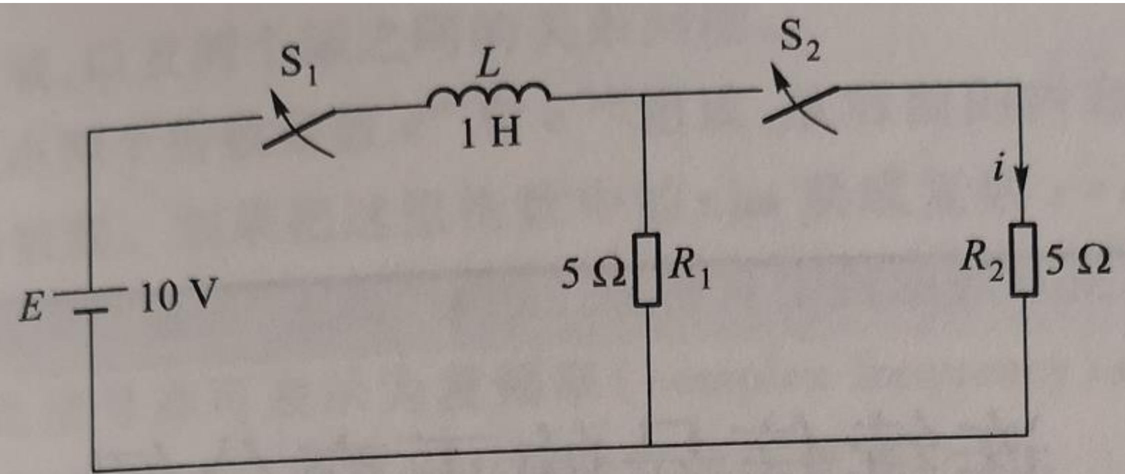
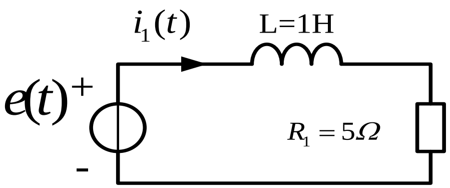


图 P2-27

2.27 开关S1合上后的等效电路图

$$e(t)=E\varepsilon(t)$$



$$L\frac{di_1(t)}{dt}+R_1 i_1(t)=e(t) \qquad \frac{di_1(t)}{dt}+5i_1(t)=e(t)$$

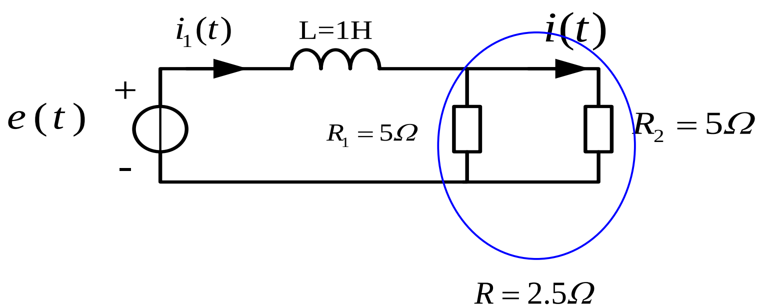
$$H(p)=\frac{1}{p+5} \qquad h(t)=e^{-5t}\varepsilon(t)$$

$$i_1(t)=e(t)*h(t)\ =10\varepsilon(t)*e^{-5t}\varepsilon(t)=2(1-e^{-5t})\varepsilon(t)$$

$$i_1(0.1)=2(1-e^{-0.5})(A) \qquad e(t)=E\varepsilon(t-0.1)$$

T=0.1s开关S2合上后的等效电路图

$$L\frac{di_1(t)}{dt}+Ri_1(t)=e(t)$$



$$\frac{di_1(t)}{dt}+2.5i_1(t)=e(t) \qquad H(p)=\frac{1}{p+2.5}$$

$$h(t)=e^{-2.5t}\varepsilon(t)$$

$$i_{1zi}(t)=Be^{-2.5t}$$ **带入初始条件** $$i_{1zi}(0.1)=Be^{-2.5\times 0.1}=2(1-e^{-0.5})$$

$$B=2(1-e^{-0.5})e^{0.25}$$

$$\boxed{i_{1zi}(t)=2(1-e^{-0.5})e^{0.25}e^{-2.5t}\ =2(1-e^{-0.5})e^{-2.5(t-0.1)},\ t>0.1}$$

$$i_{1zs}(t) = e(t) * h(t)$$

$$= 10\varepsilon(t-0.1) * e^{-2.5t}\varepsilon(t) = 4(1-e^{-2.5(t-0.1)})\varepsilon(t-0.1)$$

$$i_1(t) = i_{1zi}(t) + i_{1zs}(t)$$

$$= 2(1-e^{-0.5})e^{-2.5(t-0.1)} + 4(1-e^{-2.5(t-0.1)})$$

$$= 4 - 2e^{-2.5(t-0.1)} - 2e^{-0.5} \cdot e^{-2.5(t-0.1)} \quad t > 0.1$$

$$i(t) = \frac{1}{2} i_1(t) = 2 - e^{-2.5(t-0.1)} - e^{-0.5} \cdot e^{-2.5(t-0.1)} \quad t > 0.1$$