第一单元

【事件的逻辑关系问题】（一般就是用韦恩图来解决）

3．设 A 和 B 为任意二事件，且 $P(A)+P(B)=0.9, P(AB)=0.2$，求 $P(\bar{A}B)+P(\bar{B}A)$

2. 设 $P(A)=P(B)=0.4, P(A|B)=0.3$，求 $P(\bar{A}|\bar{B})$.

3. 设 $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\bar{B})=0.5$，求 $P(B|A\cup\bar{B})$.

【古典概型的习题】

**第一类：抽签类问题**

**例 1.3.1** 设有 6 个白球和 4 个红球混合后装入袋中，从这 10 个球中任取 5 个，

(1) 在有放回的情形下，求这 5 个球中恰有 3 个白球的概率；

(2) 在不放回的情形下，求这 5 个球中恰有 3 个白球的概率；

(3) 在不放回取球下，求第 3 个球为白球的概率.

（4）在有放回取球下，求第 3 个球为白球的概率

【解答】

（1）第一问有两种理解方式，第一种是理解成独立重复试验，直接用原先学的二项分布

第二种就是用基本事件的个数来说明，总共有 $10^5$ 种基本事件，符合要求的事件有 $C_5^3\times 6^3\times 4^2$ 种

（2）这一问问题要稍微复杂一些，不放回可以理解成直接取出 5 个,也就是说基本事件的总数应该是 $C_{10}^5$，那么符合要求的就是 $C_6^3\times C_4^2$，用排列组合的理解可能更加方便

如果用之前的方式去理解的话，因为是无放回的，首先就有 10 种可能，每一种还不相同，所以比较麻烦

（3）和（4）可以推导出一个重要的结论就是抽签问题和先后次序是无关的，注意前两个问题显然是有区别的，和次序无关的是“第几个抽到什么”的概率。

**第二类：分配类问题（核心的意思就是把 n 个东西分到 m 个位置上）**

**例 1.3.2(分房问题)** 将 $n$ 个人随机分到 $N$ 个房间中去($n\leqslant N$)，每个人分到哪个房间是等可能的，且假设每个房间可容纳的人数没有限制，求：

(1) 某个指定的房间(比如第一个房间)恰有 $m$ 个人的概率($m\leqslant n$)；

(2) 每两个人都不在同一个房间的概率.

**解** (1) 设 $A=\{$某个指定的房间恰有 $m$ 个人$\}$，由于每一个人都有 $N$ 种分法，分完 $n$ 个人才算结束，所以样本点总数为 $N^n$. 对于 $A$ 中样本点数，房间是固定的，但哪 $m$ 个人分到此房间是不确定的，也就是说哪 $m$ 个人分到此房间都可以，那么我们就先从 $n$ 个人中选出 $m$ 个人来，让这 $m$ 个人分到此房间，剩下的 $n-m$个人分到其他的 $N-1$ 个房间中. 所以事件 $A$ 中的样本点数为 $C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$，故得

$$P(A)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

(2) 设 $B=\{$每两个人都不在同一个房间$\}$. 样本点总数仍为 $N^n$，$B$ 中样本点

数为 $N(N-1)\cdots(N-n+1)=C_N^n\cdot n!$，故得

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

5. 将 3 个球随机放入 4 个杯子，求杯子中球数的最大值分别为 1、2、3 的概率.

这个题是很典型的一类分配问题，就是用基本事件去解决，首先有 64 种基本事件（这个实际上是考虑了顺序，实际的“形态”要少一些）

杯子中球数为 3 显而易见是 4 种可能

杯子中球数为 1，注意不是 4 种可能而是 4×3×2 种可能

杯子中球数为 2，直接相减就可以得到答案了

4. 设 6 位同学每位都等可能地进入 10 间教室的任何一间自习. 求下列事件的概率：

(1) 某指定教室有两位同学；

(2) 6 位同学所在的教室都不相同；

(3) 至少有 2 位同学在同一个教室.

基本事件的数目问题

这一类的题，最大的问题是要注意不能把基本事件的数量写错，这个题里面基本事件一共有 $10^6$ 而不是 $6^{10}$ 种，和上一个往杯子里面放球是一样的效果，可以理解成是箱子接人，然后乘方一项是人数（相当于是进行多少次）

第三类问题：分组问题

**例 1.3.5(分组法)** 将 $n$ 个不同的球分成 $k$ 个不同的组，使得这 $k$ 个组各有 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 个球，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 问：共有多少种分法？

**解** 显然同一组内的物体是不用考虑次序的，且取法是不放回的. 所以，从 $n$ 个球中取出 $n_1$ 个组成第一组有 $C_n^{n_1}$ 种取法，再从 $n-n_1$ 个球中取出 $n_2$ 个组成第二组有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种取法，……，最后剩下的必是 $n_k$ 个球，正好组成第 $k$ 组. 所以总的取法为

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdots C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-2}}^{n_{k-1}} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

此结果说明，若要将 $n$ 个不同的物体分成 $k$ 个不同的组，各组分别有 $n_1$，$n_2$，…，$n_k$ 个物体，那么总的分法就是物体总个数的阶乘除以每组中物体个数阶乘的乘积.

【条件概率，全概率公式，贝叶斯公式的问题】

求条件概率

已知第一个箱中装有50件产品，其中一等品30件，第二个箱中装有 30 件产品，含一等品19件，先随机选择一箱，然后在该箱中取出两件产品，事件$A$表示第一件是一等品，事件$B$表示第二件是一等品，

求 $P(A|B)$ 和$P(B|A)$

这个题的题目要求是求条件概率，那么利用条件概率的定义式就可以

首先求 A 和 B 单独发生的概率，再求 A 和 B 的概率

（1）A 和 B 发生的概率实际上是一样的，因为刚才说过，这个实际上是一个抽签问题，概率和先后顺序无关

（2）A 和 B 一起发生的概率，就用分步求就可以

【条件概率套定义问题】

8. 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表. 其中女生的报名表依次为 3 份、7 份和 15 份. 现任取一个地区的报名表，从中先后抽出 2 份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率；

(2) 已知后抽到的是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率.

（1）这类题就是利用条件概率的定义去求，就是求 AB 同时发生的概率，A 和 B 单独发生的概率，中间需要用一个抽签原则（抽中概率和顺序无关）

【巧妙求出可能有无限种可能的方法——概率重现法】

**例 1.6.5** 甲乙二人比赛下棋，每局胜者得一分，甲在每局比赛中胜的概率为 $\alpha$，乙在每局比赛中胜的概率为 $\beta(\alpha+\beta=1)$. 独立地进行比赛，直到有一人超过对方 2 分就停止，多得 2 分者胜. 求甲最终获胜的概率.

**解** 设 $A_i=\{$前两局中甲胜 $i$ 局$\}$，$i=0,1,2$，则 $A_0,A_1,A_2$ 为 $\Omega$ 的一个划分，又设 $B=\{$甲最终获胜$\}$，则

$$P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2).$$

由题意知 $P(B|A_0)=0$，$P(B|A_1)=P(B)$，$P(B|A_2)=1$，所以

$$P(B)=P(A_1)P(B)+P(A_2).$$

容易求出 $P(A_1)=2\alpha\beta$，$P(A_2)=\alpha^2$，故得

$$P(B)=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

如何概率重现，最重要的是要在之后重新制造出两人平等的概率，显然甲和乙分数相同的时候是关键，如果再能求出同分的概率，就可以求出来整体的概率了。

10. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 $\Omega$ 的一个划分，且 $P(A_i)=p_i>0$，求事件 $A_i$ 比 $A_j$ 先发生的概率.

同样，这个题也是要在右边重现概率，那么关键就是第一局的问题，有可能甲比乙先发生，也有可能是乙比甲先发生，每一次事件是独立的，那么如果两者都没有发生，相当于仍然是一个概率重现，这样就可以解出了

【要点】事件的可能性是无限的，并且能够通过某几次的实验，一部分能够定出结果，另一部分能够重现出概率

11. 设有 4 名战士每人在晚上睡觉之前都把枪放在门口，早晨紧急集合，每人随意拿一把枪参加集合，求至少有一个人拿到自己的枪的概率. 如果是 $n$ 名战士，概率又是多少？

n 名战士

如果是 $n$ 名战士，则概率 $p=\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right)$

12. 设某种微生物恰好繁殖 $n$ 个幼虫的概率为 $\frac{6^n}{n!}e^{-6}$，每个幼虫能够成长为成虫的概率为 0.5，且每个幼虫能否成长为成虫是相互独立的，求恰有 $m$ 个幼虫能成长为成虫的概率.

涉及到无穷级数的求和问题

直接用一般的结论去解决

解：设 X 为某种微生物繁殖的幼虫个数，X~P(6)，Y 为幼虫成长为成虫的个数. 则 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, ⋯，Y 的可能取值为 0, 1, 2, 3, ⋯, X. 因此由条件概率公式有

$$P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m|X=n)=\frac{6^n}{n!}e^{-6}C_n^m 0.5^m 0.5^{n-m},\quad n\geq m;$$

当 $n<m$ 时，$P(X=n,Y=m)=0$.

由全概率公式得，恰有 m 个幼虫能成长为成虫的概率为

$$P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}P(X=n,Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6^n}{n!}e^{-6}C_n^m 0.5^m 0.5^{n-m}$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6^n}{m!(n-m)!}e^{-6}0.5^m 0.5^{n-m}=\frac{e^{-6}(6\times0.5)^m}{m!}\sum_{n-m=0}^{\infty}\frac{(6\times0.5)^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$=\frac{e^{-6}(6\times0.5)^m}{m!}e^{6\times0.5}=\frac{(6\times0.5)^m}{m!}e^{-6\times0.5}=\frac{3^m}{m!}e^{-3}$$

所以 Y~P(3).

# 第二单元

首先注意分布函数的写法，特别是区间的开闭问题，是左闭右开，因为分布函数是右连续的。然后注意密度函数的写法，密度函数在一个点的取值不会有影响，因此统一写成开区间。

然后几种分布的简写，正态分布是$N$，均匀分布是$U$，指数分布是$E$

几何分布是$G$，超几何分布是$H$，二项分布是$B$，泊松分布是$P$

（1）非标准正态分布化成标准正态分布

这样就可以通过查标准正态分布表来求一般的正态分布的概率了. 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$F(x)=P(X\leqslant x)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$P(a<X\leqslant b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \qquad (2.3.14)$$

9. 假设随机变量 $X\sim N(108,9)$，试求：

(1) 常数 $a$，使 $P(X\leqslant a)=0.9$；

(2) 常数 $b$，使 $P(|X-b|>b)=0.1$.

（2）正态分布的求极值问题

6. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，问：当 $\sigma$ 取何值时，$X$ 落入区间$(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$的概率最大？

（3）求函数的分布的问题

7. 设随机变量 $X$ 服从参数为 $\ln 3$ 的指数分布，求 $Y=[X]+1$ 的分布列. 其中$[x]$为向下取整函数.

这个题属于连续型随机变量转化成离散型随机变量，结论是可以视为几何分布。

几何分布的主参数为$1-e^{-\lambda}$

7. 设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty<x<+\infty,$$

求 $Y=\tan X$ 的密度函数.

（4）多过程的分布列

**9. 设在一段时间内进人某一商店的顾客人数 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，每个顾客购买某种物品的概率为 $p$，并且各个顾客是否购买该种物品相互独立，求进人商店的顾客购买这种物品的人数 $Y$ 的分布列.**

利用全概率公式，并且要注意 m 和 k 之间制约关系。

分成两步去画，第一步是先看有多少人，以其中的一种情况为例

$$P(Y=m)=\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}C_{k}^{m}p^{m}(1-p)^{k-m}$$

然后要涉及到组合数的公式问题 $C_{m}^{k}=\dfrac{m!}{(m-k)!\ k!}$

# 第三单元

第一部分是离散型随机变量的条件分布律，边缘分布律

1. 在方形区域$[0,1]\times[0,1]$上均匀投点，X 和 Y 分别表示投点的横坐标和纵坐标，求$(X,Y)$的联合分布函数和边缘分布律

【注意】分区的问题

**例2一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$,射击直至击中目标两次为止.设以$X$表示首次击中目标所进行的射击次数,以$Y$表示总共进行的射击次数,试求$X$和$Y$的联合分布律及条件分布率.**

连续型随机变量的边缘密度函数和分布函数的求法的理解

**例 3.3.1** 设二维连续随机变量$(X,Y)$的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy, & 0<x<1, x^2<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中常数$A<0$. 试求:(1) 常数$A$;(2) $X$与$Y$的边际密度函数$f_X(x)$与$f_Y(y)$;(3) $P(X>Y)$.

边际概率密度实际上是联合概率密度用一根长直线穿起来投影到某一个轴上
条件概率密度，注意写法
联合概率密度如何用前两个求出来
一．离散型随机变量的分布列以及独立性的判断

5. 已知$(X,Y)$的联合分布列为

$$P(X=n,Y=m)=\frac{(p\lambda)^m(q\lambda)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda},$$

其中$\lambda>0,q=1-p,n=0,1,2,\cdots,m=0,1,\cdots,n$.(1) 求$Z=X-Y$的分布列；(2) 证明$Y$与$Z$相互独立.

8. 设某班车起点站上客人数$X$服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为$p(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立，以$Y$表示在中途下车的人数，求：(1) 在发车时有$n$个乘客的条件下，中途有$m$人下车的概率；(2) 二维随机变量$(X,Y)$的联合分布律.

二．一个离散型，一个连续型的求解——主要是利用全概率公式和分布函数的定义
第一个例题是求一元的，第二个难一些是求二元的

**7. 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 独立，其中 $X$ 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，而 $Y$ 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $Z=Y-X^2$ 的概率密度.**

22.设随机变量 $X_1$，$X_2$，$X_3$ 相互独立，其中 $X_1$ 与 $X_2$ 均服从标准正态分布，$X_3$ 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}, Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（1）求二维随机变量（$X_1$，$Y$）的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.

（2）证明随机变量 $Y$ 服从标准正态分布.

三．连续型随即变量较为复杂的情况

2. 设$(X,Y)$的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy), & -1<x,y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$证明$X$与$Y$不独立，但是$X^2$与$Y^2$独立.

3. 设$(X,Y)$的联合密度为$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}(1+\sin x\sin y),x,y\in\mathbf{R}$,证明：

(1) $X$与$Y$都服从标准正态分布，但$(X,Y)$不是二维正态分布；

(2) $X$与$Y$不独立，但是$|X|$与$|Y|^2$独立.

根据几种密度之间的关系互相推导

6. 设$X\sim U(0,1)$，且对$0<x<1$，当$X=x$时，$Y\sim U(0,x)$，(1) 求$P(X>2Y)$；(2) 求$Z=X-Y$的密度函数.

求解表达式比较复杂的情况

22. 在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为$X$，较长一段的长度记为$Y$. 令$Z=\dfrac{Y}{X}$.

（1）求$X$的概率密度；

（2）求$Z$的概率密度；

（3）求$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.



4. 设 $X$ 和 $Y$ 分别表示两个不同电子器件的寿命(单位:h)，并设 $X$ 和 $Y$ 相互独立，且服从同一分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1\ 000}{x^2}, & x>1\ 000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度.

对于正态分布而言，如何求 $aX+bY$ 的分布，第一种是按照定义，第二种是直接求参数，求完这个分布之后，根据两个参数可以直接推出相应的密度函数，然后可以根据相应结论去求绝对值的分布

**2. 设两个随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，且都服从均值为 0，方差为 1/2 的正态分布，求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.**

积分问题，分布积分的表格法以及部分无穷积分的结论

**4. 设随机变量 $X$ 的概率密度为**

$$f(x)=\begin{cases} cx\mathrm{e}^{-k^2x^2}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

**求(1) 常数数 $c$;(2) $EX$;(3) $DX$.**

4. 设$(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求协方差$\mathrm{Cov}(X,Y)$和相关系数$\rho_{X,Y}$.

几种分布的归类

| 分布名称 | 期望 | 方差 |
| --- | --- | --- |
| 二项分布 | $np$ | $np(1-p)$ |
| 泊松分布 | $\lambda$ | $\lambda$ |
| 几何分布 | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| 超几何分布 | $n\frac{M}{N}=np$ | $n\frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}=np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$ |
| 均匀分布 | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| 正态分布 | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| 指数分布 | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |

最大值分布问题——有的分布直接求出来比较难，需要间接结论

**例 4.5.3** 设$(X,Y)\sim N(1,1,2^2,3^2,0.5)$，求 $E\max\{X,Y\}$.

**例 4.5.2** 从区间$[0,1]$上任取 $n$ 个点，求最大点与最小点之间距离的数学期望.

把一个事件拆成一系列事件求期望方差

求期望不需要独立性，但是求方差需要独立性的约束才能满足线性的特性，所以方差需要慎重，有可能需要求协方差

**例 4.5.4** 将 $n$ 个球随机地放入 $N$ 个盒子中，假设每个球落入各个盒子是等可能的，求有球盒子数的数学期望.

**例 4.5.5** 将 $n$ 个编号为 $1,2,\cdots,n$ 的球随机地放入编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 $n$ 个盒子中，一个盒子只能装一个球，如果第 $i$ 号球正好放入了第 $i$ 号盒子，称为一个配对. 求配对数的期望与方差.