§ 4. 衍射光栅

一、光栅的构成及定性解释

广义：任何能够等间隔地分割光波阵面的装置。

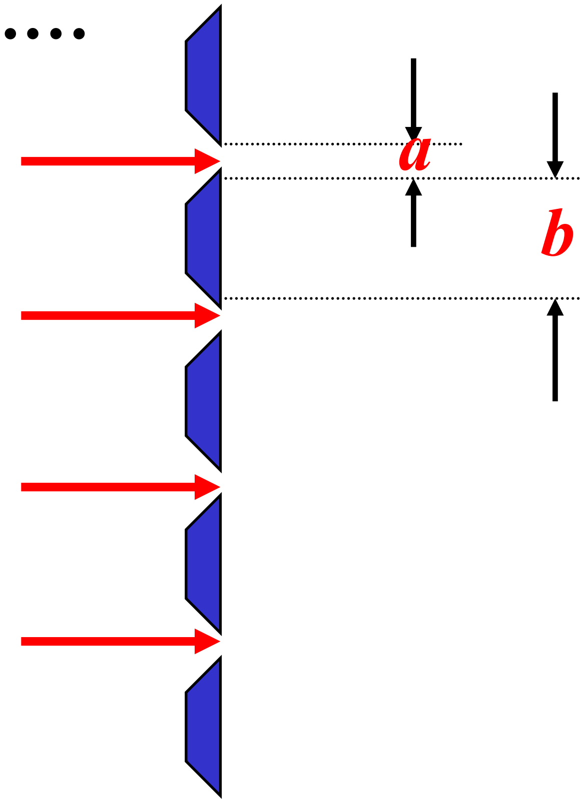
如：沙网、编的席子、扇子、眼睫毛……

最简单：一组平行等宽等间隔的狭缝。

$d=a+b$ 光栅常数

总缝数N

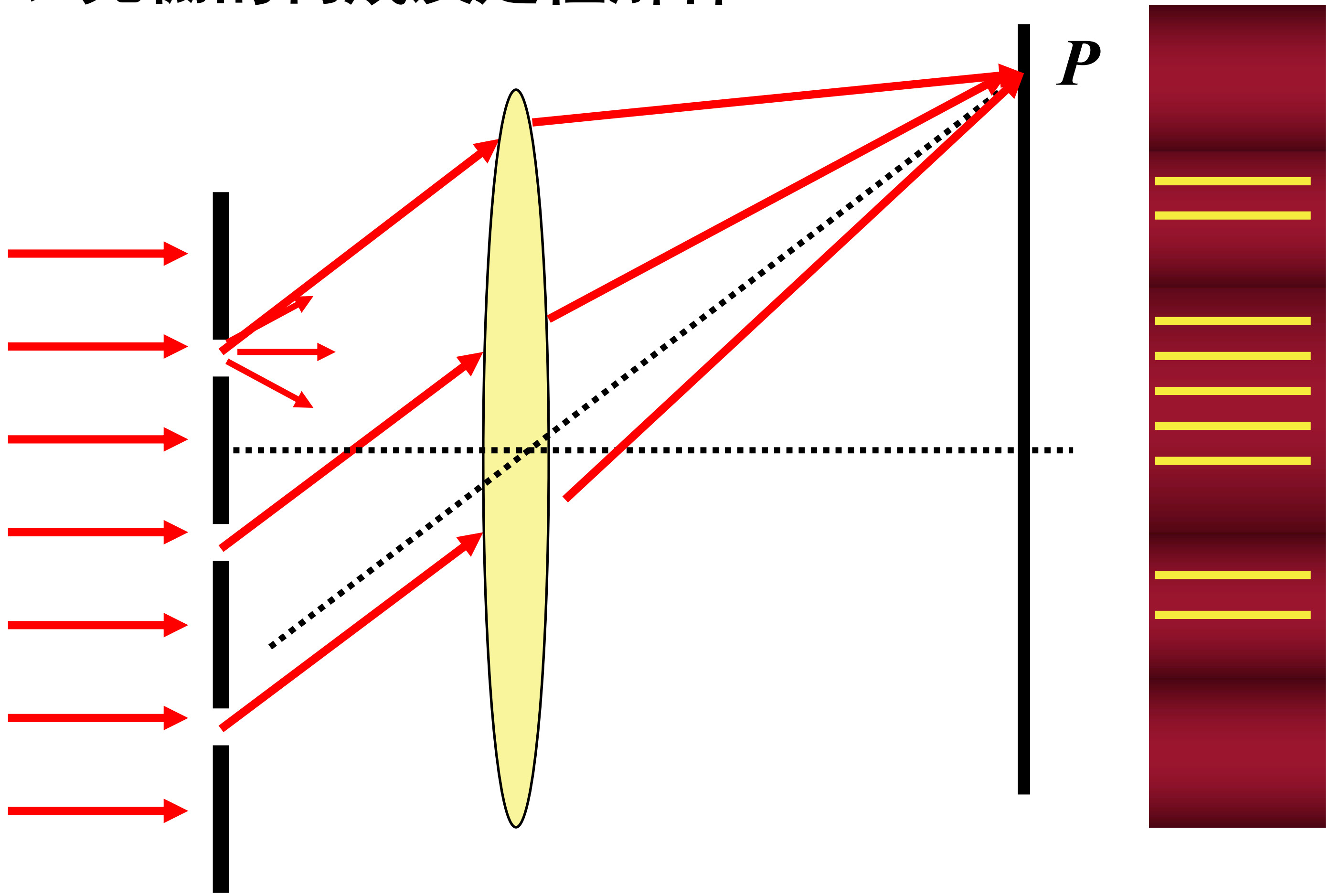
1000~10000条/mm



透射光栅

§ 4. 衍射光栅

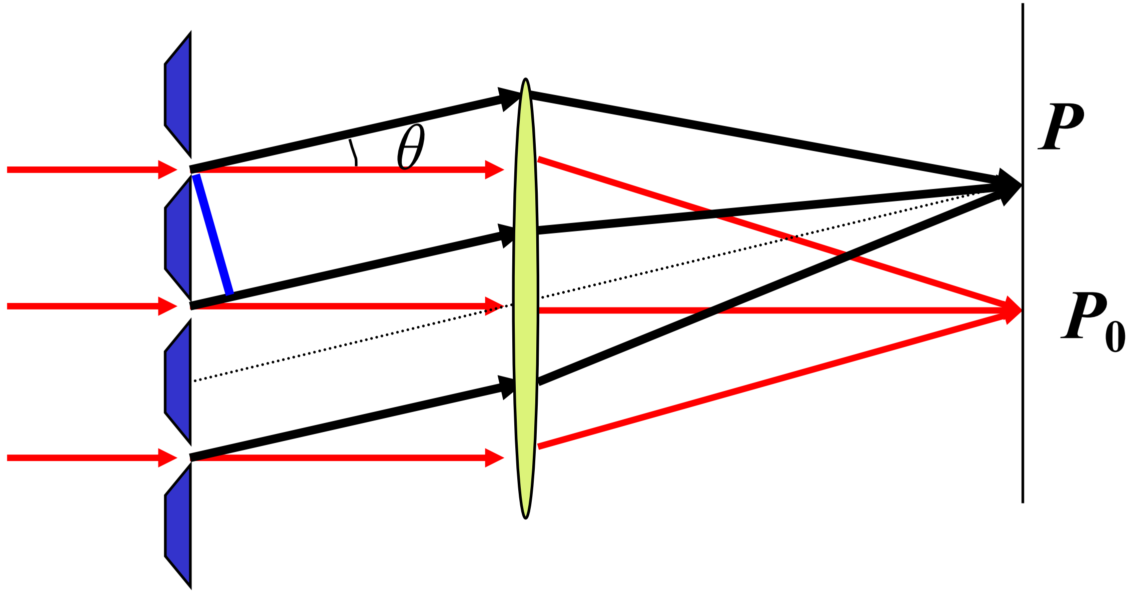
一、光栅的构成及定性解释



物理本质：**在单缝衍射的基础上的多缝干涉**

在原单缝衍射的基础上，条纹变得更多、更亮、更细。N 越大、条纹越细

二、光栅方程



正入射：

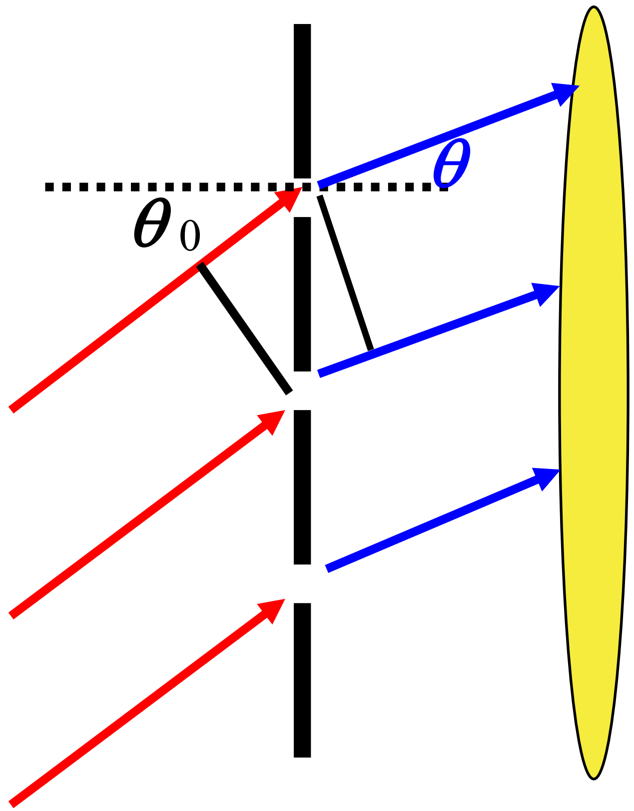
相邻缝发出的沿 θ 角方向衍射光之间的光程差：

$$d\sin\theta = \pm m\lambda$$ 主极大 m =0,1,2…

$\boxed{\text{光栅方程}}$

斜入射：

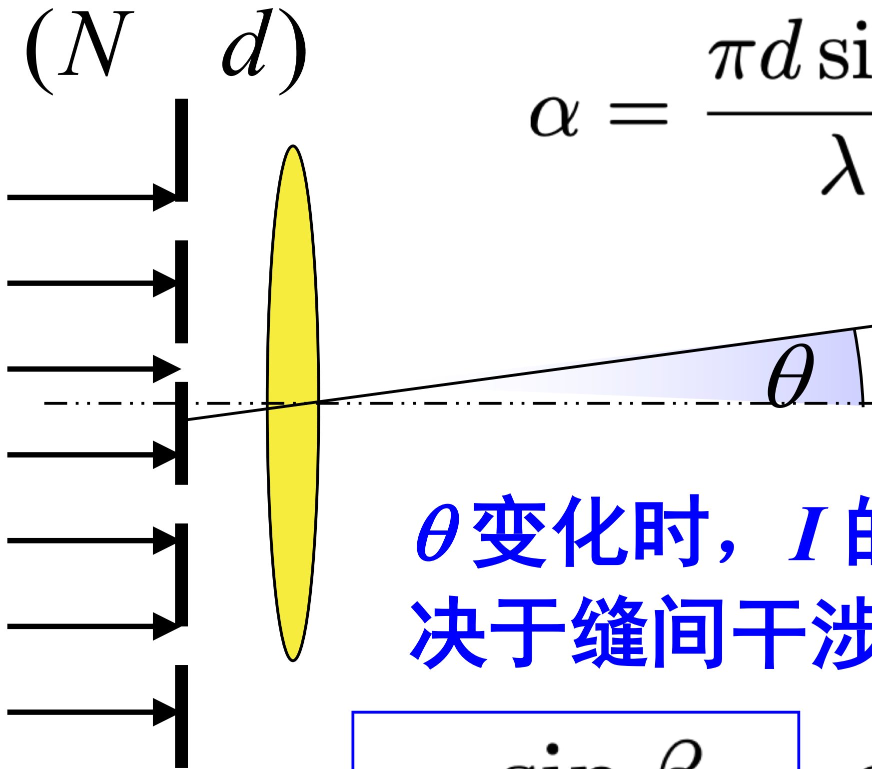
$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = \pm m\lambda$$

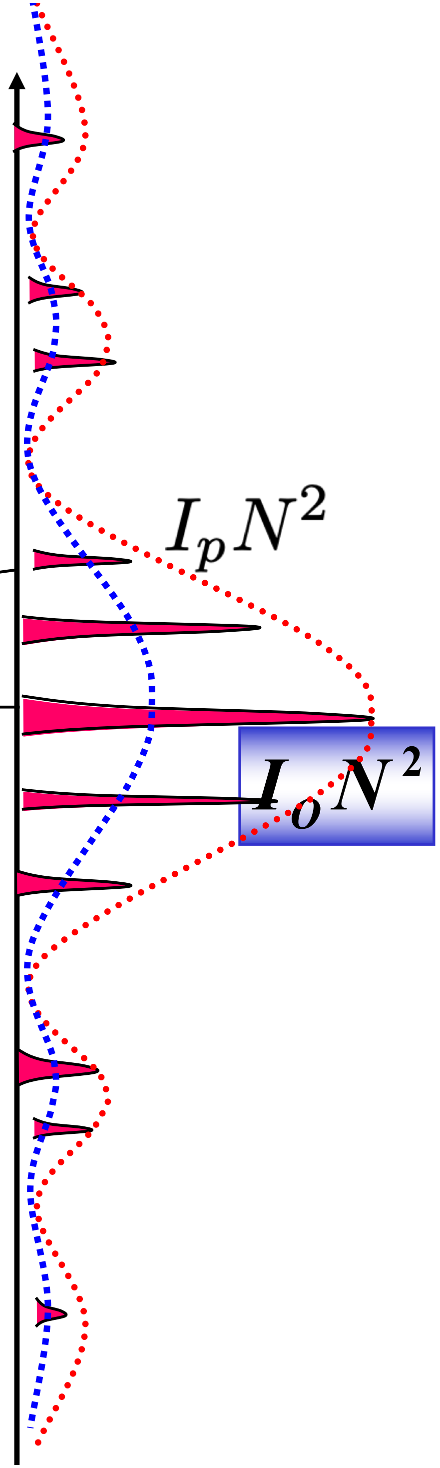


三、光强分布

$$\beta = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

$$\alpha = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$





θ变化时，I 的极值取决于缝间干涉因子

$$I = \boxed{I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2}\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

I_P--单缝衍射光强　**G--缝间干涉因子**

三、光强分布

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

1、主极大— G 有极大值的位置

G--缝间干涉因子

$$\alpha = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad \alpha = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

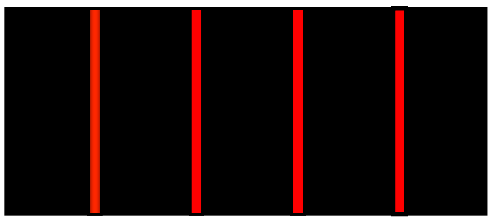
$$\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha} = N \to G^2 \quad \text{极大}$$

θ满足 $\dfrac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = m\pi$ 处光强极大 $\boxed{I = I_p N^2}$

主极大的级次

$$d\sin\theta = m\lambda$$

光栅方程



三、光强分布

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

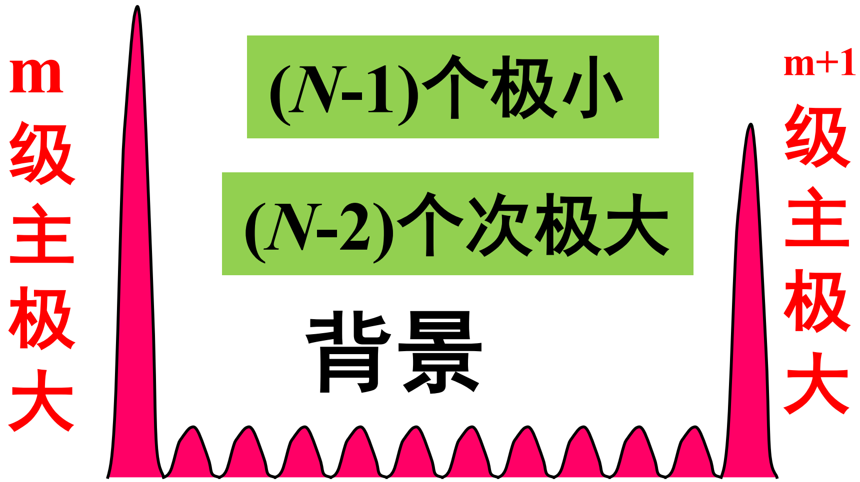
2、极小— $G=0$ 的位置

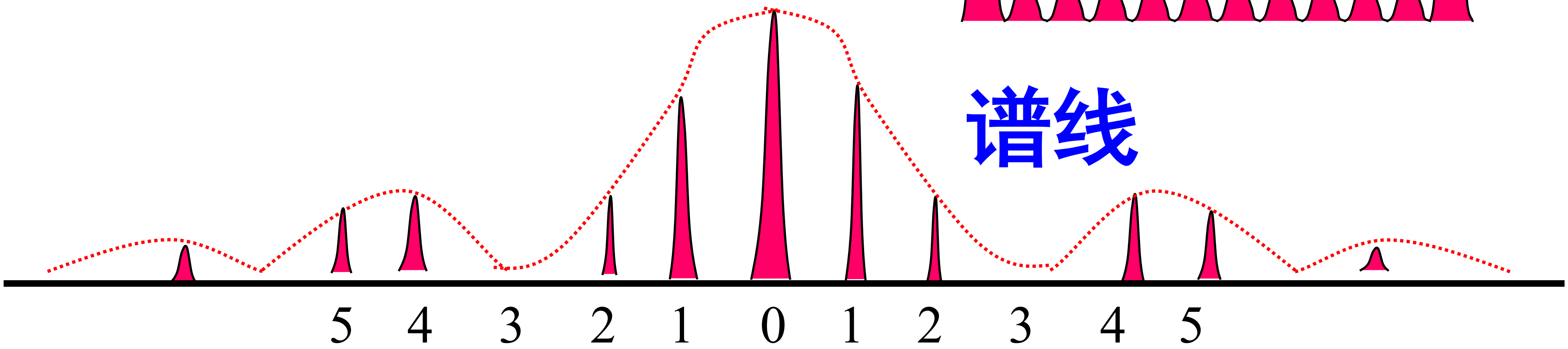
$$G=0 \rightarrow \begin{matrix} \sin N\alpha = 0 \\ \sin\alpha \neq 0 \end{matrix}$$

$$\alpha = \left(m+\frac{k}{N}\right)\pi$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$k = 1, 2, \ldots, N-1$$





三、光强分布

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2$$

3、$\frac{d}{a}$ 值的影响

缺级

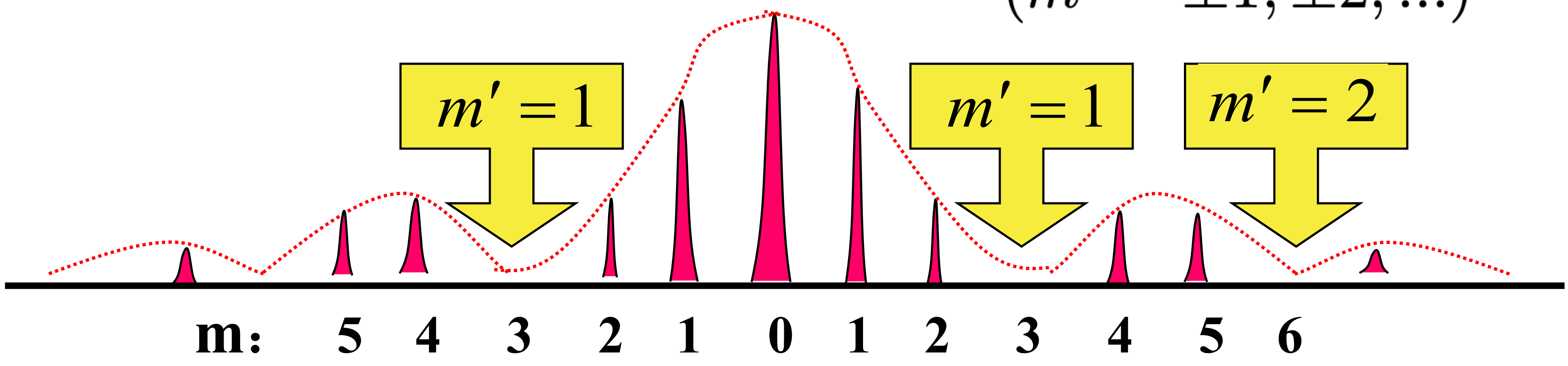
G^2 极大 → $d\sin\theta = m\lambda$

$I_P = 0$ → $a\sin\theta = m'\lambda$

$\Big\}\ I = I_p G^2 = 0$

缺级条件：$\dfrac{d}{a} = \dfrac{m}{m'}$　　所缺的级次：$m = \dfrac{d}{a}m'$

$(m' = \pm 1, \pm 2, \ldots)$

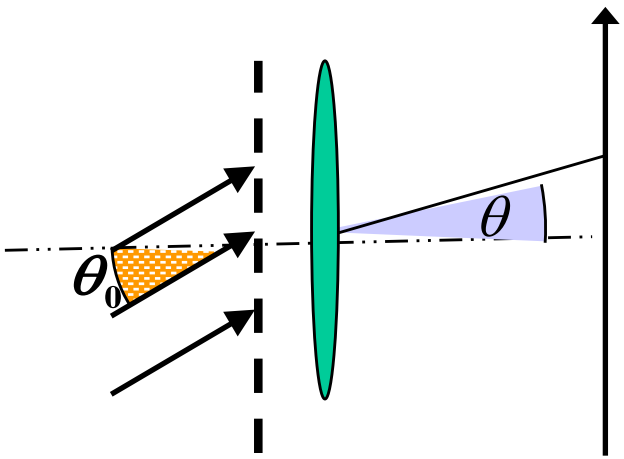


例题 λ=500nm 的平行光以 $\theta_0=30^0$ 斜入射,已知 d=0.01mm .

求：（1）0 级谱线的衍射角；

（2）两侧可能见到的谱线的最高级次和总的谱线数。

解 （1） $d(\sin\theta - \sin\theta_o) = m\lambda$



$m = 0 \Longrightarrow \theta = \theta_0 = 30^0$

（2） 两侧能见到的最高级次谱线？

$|\sin\theta| < 1$

$$\begin{cases} \theta \to \dfrac{\pi}{2} & \sin\theta < 1 \quad \Rightarrow m_+ < 10 \\ \theta \to -\dfrac{\pi}{2} & \sin\theta > -1 \quad \Rightarrow m_- > -30 \end{cases}$$

最高29级；

共39条谱线

例题 波长600nm的单色光垂直入射光栅，第2级明条纹出现在 $\sin\theta_2 = 0.20$ 的方向上，第 4级缺级，试求：

（1）光栅常数　（2）光栅上狭缝的最小宽度。

（3）按上述选定的*a*，*d*值，屏上实际呈现的条纹数目是多少？

解：1、$d\sin\theta = \pm m\lambda$　　$m = 2$　　$d = 6\mu m$

2、$a+b=d$　第四级缺级

$$d\sin\theta = \pm m\lambda$$
$$a\sin\theta = \pm m'\lambda$$

$$\frac{d}{a} = \frac{m}{m'} = \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = \frac{4}{3}$$

$a+b=d=6$ μm　　a =1.5 μm，3.0 μm，4.5 μm

3、可能呈现的级次　$\boxed{\sin\theta < 1}$　m <10

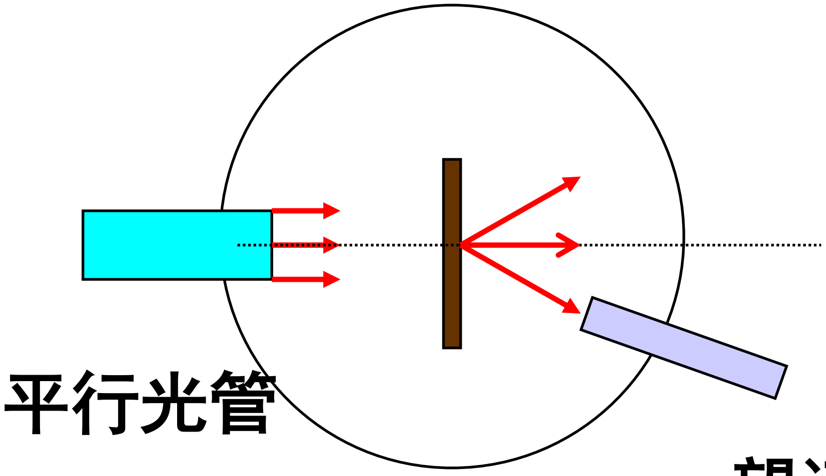
$m = 0, \pm1, \pm2, \pm3,$
$\pm5, \pm6, \pm7, \pm9$

屏上实际呈现的条纹数目是15条

四、光栅光谱

1. 光栅光谱的应用

(a) 测光波波长——分光计



$$d\sin\theta = \pm m\lambda$$

(b) 对光谱进行光谱分析

分析物质成分

d 一定： $\lambda\uparrow \rightarrow \theta\uparrow$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{出现哪些谱线——判定元素的存在}\\ \text{谱线的强度——判断含量}\end{array}\right.$$

要求：

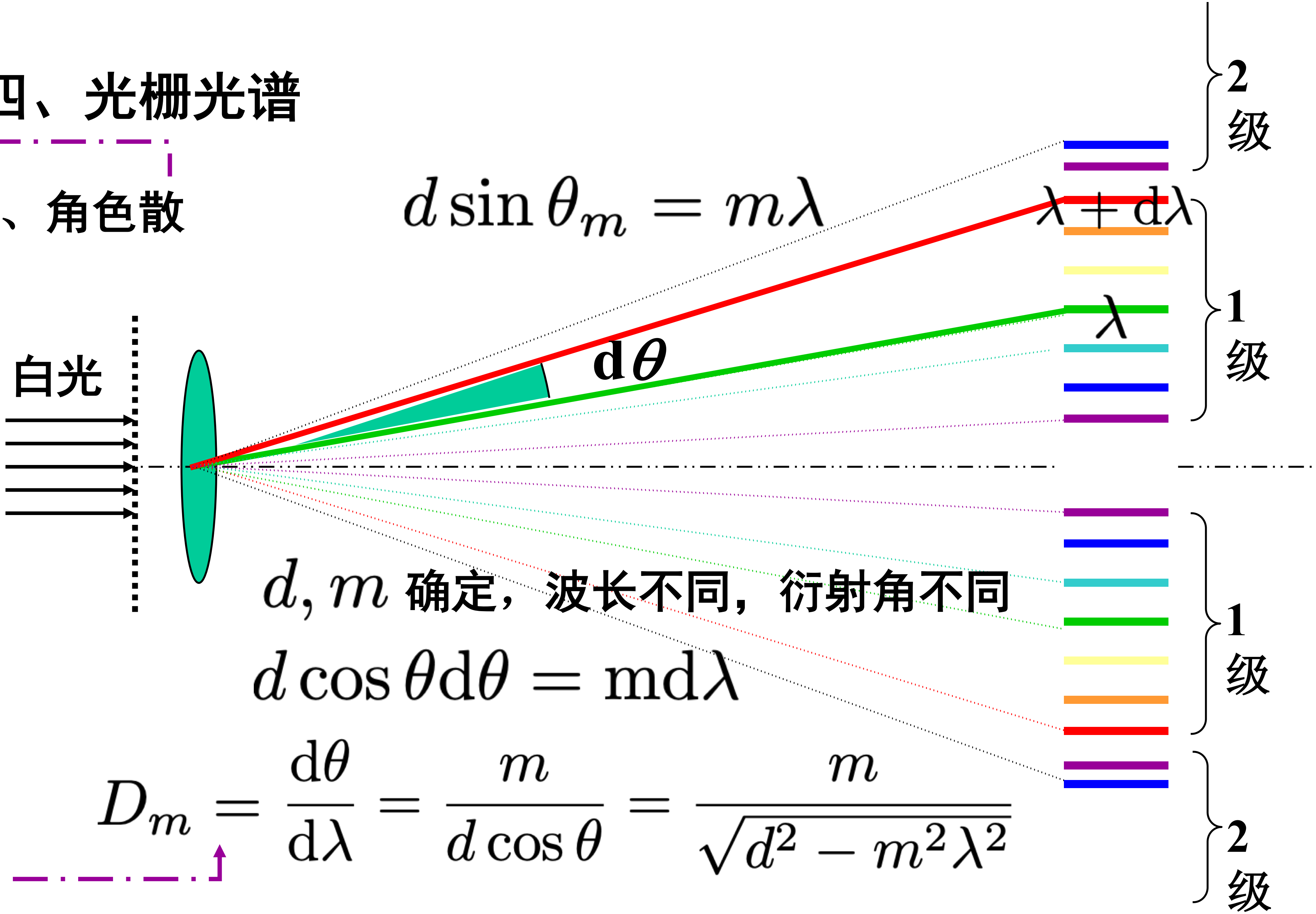
1、谱线窄而明—读数准

2、能区分不同波长的谱线

四、光栅光谱

2、角色散

$$d\sin\theta_m = m\lambda$$



d, m 确定，波长不同，衍射角不同

$$d\cos\theta \mathrm{d}\theta = \mathrm{m}\mathrm{d}\lambda$$

$$D_m = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}}$$

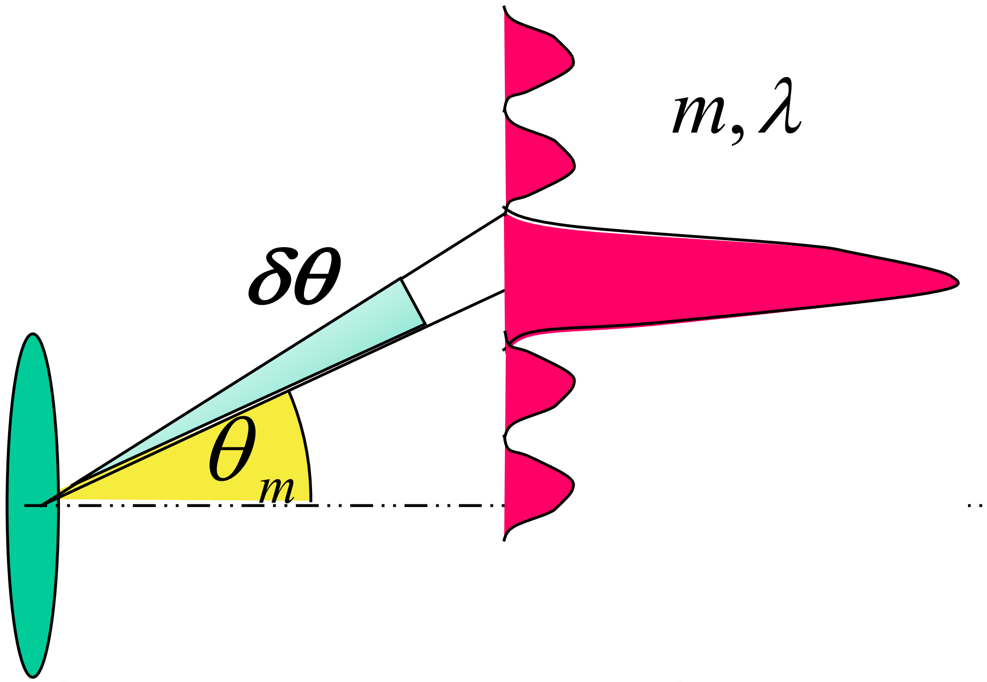
$d\downarrow, m\uparrow$ 谱线分得开

四、光栅光谱

3、半角宽度

$$d\sin\theta_m = m\lambda$$

$$d\sin(\theta_m + \delta\theta) = (m + \frac{1}{N})\lambda$$



$$\sin(\theta_m + \delta\theta) = \sin\theta_m \underbrace{\cos\delta\theta}_{\approx 1} + \cos\theta_m \underbrace{\sin\delta\theta}_{\approx \delta\theta}$$

$$d(\sin\theta_m + \cos\theta_m \cdot \delta\theta) = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m} = \frac{\lambda}{N\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} N\uparrow \\ d\uparrow \\ m\downarrow \end{array}\right.$$

条纹细

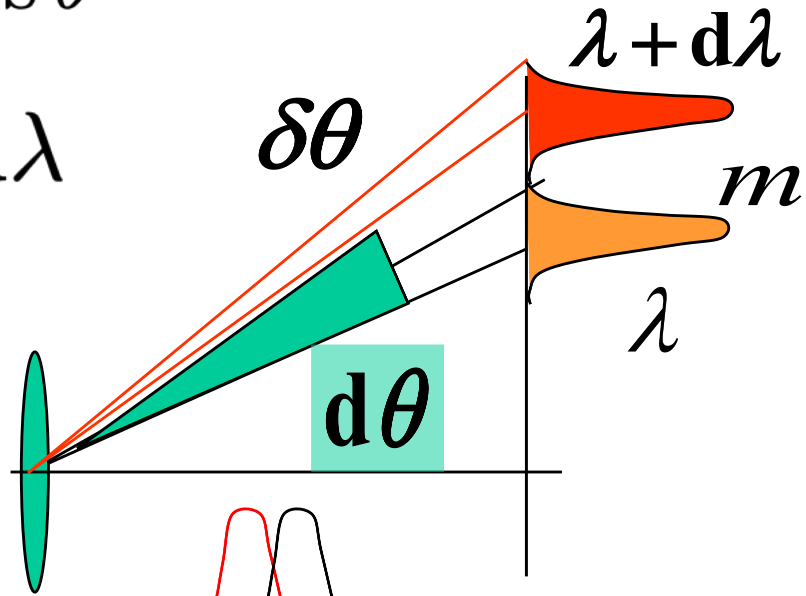
四、光栅光谱

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$$

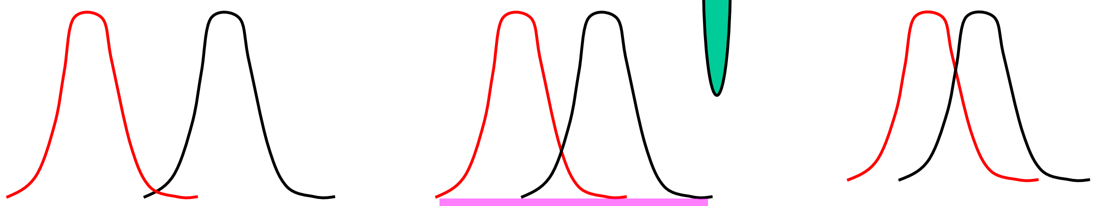
4、光栅的分辨本领

中心角距离：$\mathrm{d}\theta = \dfrac{m}{d\cos\theta}\mathrm{d}\lambda$

半角宽：$\delta\theta = \dfrac{\lambda}{Nd\cos\theta}$



瑞利判据：



$\mathrm{d}\theta > \delta\theta$	$\mathrm{d}\theta = \delta\theta$	$\mathrm{d}\theta < \delta\theta$
可分辨	恰好可分辨	不可分辨

$$m\mathrm{d}\lambda = \frac{\lambda}{N}$$

$$R \equiv \frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = mN$$

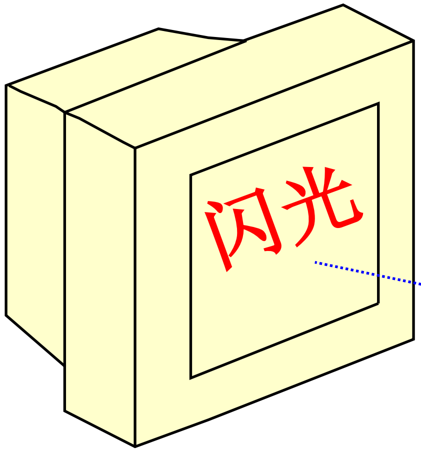
分辨本领

§ 5. 伦琴射线的衍射

一、伦琴射线的获得

1895年伦琴发现X 射线。 **1901年获首届诺贝尔物理奖。**

肉眼看不见、能使荧光发光、穿透力强



亚铂氰化钡荧光屏

流，是电磁波！

场 $\vec{E}$， $\vec{B}$

射线

射线不改变方向

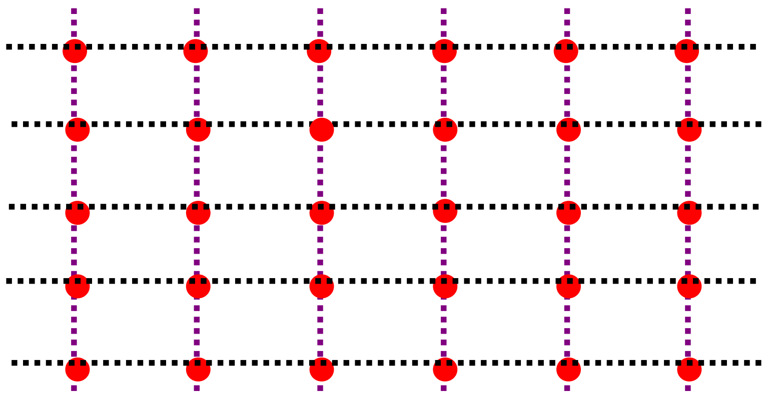
$\lambda \sim 0.1\text{nm}$

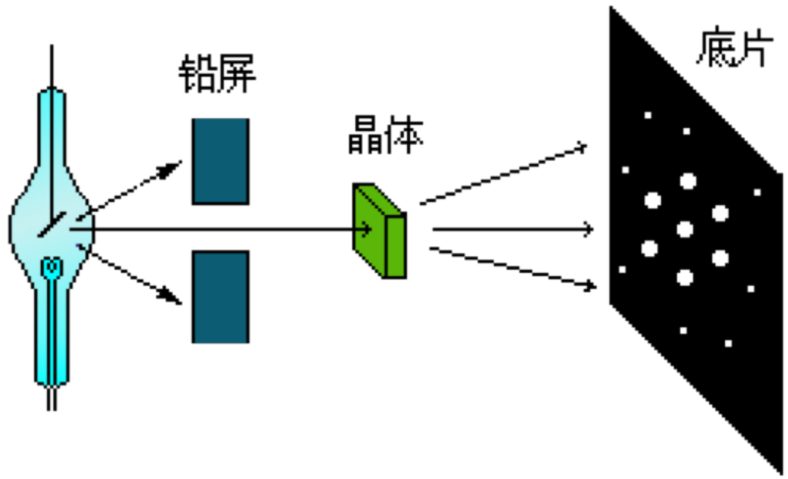
本质： 由原子内层电子运动状态发生变化而辐射的电磁波。波长为 **0.01---10 nm**

§ 5. 伦琴射线的衍射

二、伦琴射线晶体衍射

劳厄（Laue）实验（1912）





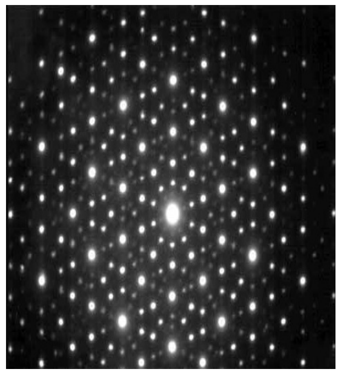
证实了X射线的波动性

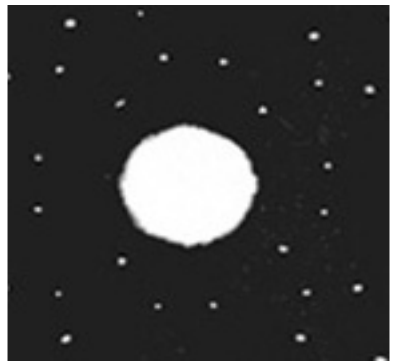
光栅分辨本领虽高,

$d >> \lambda$ **(0.01---10nm)**

晶体—天然光栅

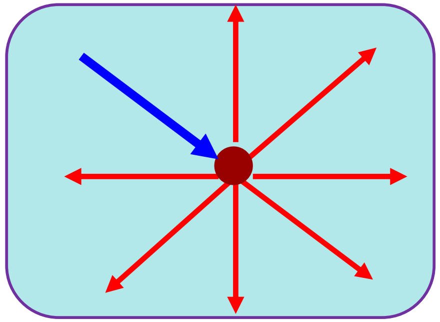
点阵间距　　0.1nm





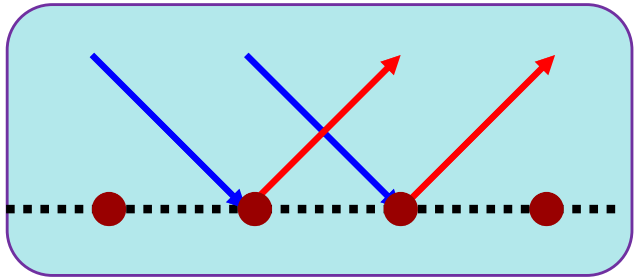
二、伦琴射线晶体衍射

布拉格方法



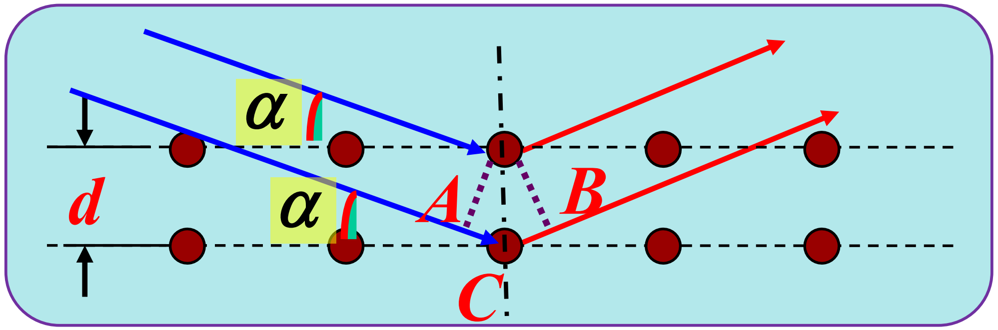
X 射线照射原子，原子作受迫振动，向各个方向散射电磁波。

单层原子在反射方向最强→镜面反射。



双层原子→满足 $\delta = m\lambda$ 干涉加强

$$\delta = AC + BC = 2d\sin\alpha$$



$$2d\sin\alpha = m\lambda$$ **布拉格公式** α 为掠射角

三、应用

1、*X*射线光谱分析

$$2d\sin\alpha = m\lambda$$

d 一定，α 随λ变化 → **伦琴射线的光谱分析**

——研究原子结构极为重要。

2、晶体结构分析

λ 一定，α 随 d 变化→ **伦琴射线的晶体结构分析**

——研究晶体结构，材料性能等。

注意：

同一晶体，沿不同方向的晶格常数不同