高等数学2015级下学期期末试卷

A卷

一、填空题 (每题6分,共30分)1、$2(x-1)+4(y-1)+3(z-2)=0$ 或

$2x+4y+3z=12$ ，$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{x-2}{3}$ ；2、$(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}),2\sqrt{14}$ ；

3、$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}},-1<x<3$ 或 $|x-1|<2$ ；4、$S\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$ ，$S(9)=0$ ；

5、$\frac{1}{2}\sin 1, 2\pi a^2+\pi a^3$ 。

二、单项选择题 (每题4分,共20分)1、A；2、A；3、B；4、C；5、D。

三、(工科)求微分方程 $y''-5y'+6y=e^{2x}$ 的通解。

解：特征方程 $r^2-5r+6=0$ ，特征根 $r_1=2,r_2=3$

齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ （4分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=Axe^{2x}$ （7分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$A=-1$ ，所以 $y^*(x)=-xe^{2x}$ ，

∴通解 $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}-xe^{2x}$ 。 （10分）

三、(高数)已知直线 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 和平面 $\pi:2x+y+z+5=0$ 。

1、判别直线 L 和平面 π 之间是平行还是相交？ 2、若平行，求直线 L 和平面 π 之间的距离；若相交，求直线 L 和平面 π 之间的夹角。

解：1、直线 L 的方向向量 $\vec{s}=(1,-1,2)$ 和平面 π 的法向量 $\vec{n}=(2,1,1)$ 的数量积：

$$\vec{s}\bullet\vec{n}=1\bullet 2+(-1)\bullet 1+2\bullet 1=3\neq 0$$

故 $\vec{s}=(1,-1,2)$ 与 $\vec{n}=(2,1,1)$ 不垂直，所以直线 L 与平面 π 不平行，即直线 L 与平面 π 相交。 （5分）

2、由于直线 L 和平面 π 之间的夹角 φ 与直线 L 的方向向量 $\vec{s}=(1,-1,2)$ 和平面 π 的法向量 $\vec{n}=(2,1,1)$ 之间的夹角 θ 互余，即

$$\sin\varphi=\cos\theta=\frac{\left|\vec{s}\bullet\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\bullet\left|\vec{n}\right|}=\frac{3}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\bullet\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

得$\theta=\dfrac{\pi}{3},\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，即直线 L 和平面 π 之间的夹角 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$。 （10 分）

三、（微积分）求二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\big|0\le y\le x,x^2+y^2\le 2x\}$。

解：$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\bullet rdr$ (4 分)

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\frac{8}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{10}{9}\sqrt{2}$$ （10 分）

四、已知幂级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n^2-n)x^n$，求:1、收敛域；2、和函数。

解： 1、收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{(n+1)^2-(n+1)}=1$，

左端点 $x=-1$ 时，级数为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n^2-n)$，发散。

右端点 $x=1$ 时，级数为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n^2-n)$，发散。

收敛域$(-1,1)$。 （4 分）

2、令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n^2-n)x^n=x^2\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=x^2\bullet S_1(x)$

其中 $S_1(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$，

$$\int_0^x S_1(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2})dx=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x n(n-1)x^{n-2}dx=\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}，$$

$$\int_0^x(\int_0^x S_1(x)dx)dx=\int_0^x(\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1})dx=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x}，$$

所以 $S_1(x)=(\dfrac{x^2}{1-x})''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$，

即 $S(x)=\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$。　（10 分）

五、求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(xy^2+2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，取下侧。

解：将曲面方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 代入化简得

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy^2+2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{，}\qquad（2 分）$$

补有向曲面 Σ_1 ：$z=z(x,y)=0\quad(x^2+y^2\le 1)$，取上侧。

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+x+2y)\mathrm{d}V$，　（5 分）

由对称性，得 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}2y\mathrm{d}V=0$，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{5}\text{，}$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}(xy^2+2xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}ydxdy$，

由对称性，得 $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}ydxdy=0$，故 $I=\dfrac{2\pi}{5}$。　（10 分）

六、计算曲线积分 $I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{a^2x^2+b^2y^2}(a,b>0,a\ne b)$，其中 L 是以点 $(1,1)$ 为中心，$R(R>\sqrt{2})$ 为半径的圆周，取逆时针方向。

解：$P=\dfrac{-y}{a^2x^2+b^2y^2},Q=\dfrac{x}{a^2x^2+b^2y^2},\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{b^2y^2-a^2x^2}{(a^2x^2+b^2y^2)^2}$，（2 分）

取充分小的正数 ε，补有向曲线 C ：$a^2x^2+b^2y^2=\varepsilon^2$，取顺时针方向。由格林公式，$I+\oint_C\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{a^2x^2+b^2y^2}=\iint\limits_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，　（5 分）

所以

$$I=\oint_{C^-}\frac{x\,dy-y\,dx}{a^2x^2+b^2y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C^-}x\,dy-y\,dx=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{a^2x^2+b^2y^2\le\varepsilon^2}2\,dx\,dy=\frac{2}{\varepsilon^2}\bullet\pi\bullet\frac{\varepsilon}{a}\bullet\frac{\varepsilon}{b}=\frac{2\pi}{ab}\text{。}$$

（10 分）

七、求函数 $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2+3y^2$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大值。

解：在 $x^2+y^2<1$ 内部，由 $\begin{cases}f_x=3x^2+6x=0\\ f_y=3y^2+6y=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=0\\ y_1=0\end{cases}$ ， $f(0,0)=0$ 。

在 $x^2+y^2=1$ 时， $L(x,y,\lambda)=x^3+y^3+3x^2+3y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$ 。

由 $\begin{cases}L_x=3x^2+6x+2\lambda x=0\\ L_y=3y^2+6y+2\lambda y=0\\ L_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}$，得 （5 分）

$$\begin{cases}x_2=0\\ y_2=1\end{cases},\begin{cases}x_3=0\\ y_3=-1\end{cases},\begin{cases}x_4=1\\ y_4=0\end{cases},\begin{cases}x_5=-1\\ y_5=0\end{cases},\begin{cases}x_6=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y_6=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases},\begin{cases}x_7=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ y_7=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$f(0,1)=f(1,0)=4,\quad f(0,-1)=f(-1,0)=2,$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3+\frac{1}{\sqrt{2}},\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以最大值为 4。 （10 分）

B 卷

一、填空题（每题 6 分,共 30 分)1、 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}},-1<x<3$ 或 $|x-1|<2$ ；

2、 $2(x-1)+4(y-1)+3(z-2)=0$ 或 $2x+4y+3z=12$ ， $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{x-2}{3}$ ；

3、 $(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}),2\sqrt{14}$ ；4、 $\frac{1}{2}\sin 1,2\pi a^2+\pi a^3$ ；5、 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$ ， $S(9)=0$ 。

二、单项选择题（每题 4 分,共 20 分)1、A；2、B；3、A；4、D；5、C。

三、（工科）求微分方程 $y''-5y'+6y=e^{3x}$ 的通解。

解：特征方程 $r^2-5r+6=0$ ，特征根 $r_1=2,r_2=3$

齐次方程通解 $Y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ （4 分）

特解形式 $y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=Axe^{3x}$ （7 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$A=1$，所以 $y^*(x)=xe^{3x}$，

∴通解 $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+xe^{3x}$。（10 分）

三、（高数）已知直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ 和平面 $\pi: x-y+2z+5=0$。

1、判别直线 L 和平面 π 之间是平行还是相交？2、若平行，求直线 L 和平面 π 之间的距离；若相交，求直线 L 和平面 π 之间的夹角。

解：1、直线 L 的方向向量 $\vec{s}=(2,1,1)$ 和平面 π 的法向量 $\vec{n}=(1,-1,2)$ 的数量积：

$$\vec{s}\bullet\vec{n}=2\bullet1+1\bullet(-1)+1\bullet2=3\neq0$$

故 $\vec{s}=(2,1,1)$ 与 $\vec{n}=(1,-1,2)$ 不垂直，所以直线 L 与平面 π 不平行，即直线 L 与平面 π 相交。（5 分）

2、由于直线 L 和平面 π 之间的夹角 φ 与直线 L 的方向向量 $\vec{s}=(2,1,1)$ 和平面 π 的法向量 $\vec{n}=(1,-1,2)$ 之间的夹角 θ 互余，即

$$\sin\varphi=\cos\theta=\frac{\left|\vec{s}\bullet\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\bullet\left|\vec{n}\right|}=\frac{3}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\bullet\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{2}$$

得 $\theta=\dfrac{\pi}{3},\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，即直线 L 和平面 π 之间的夹角 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$。（10 分）

三、（微积分）求二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le x, x^2+y^2\le x\}$。

解：$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\cos\theta}r\bullet rdr$ （4 分）

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\frac{1}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{36}\sqrt{2}$$ （10 分）

四、已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^n$，求:1、收敛域；2、和函数。

解： 1、收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{(n+1)^2+(n+1)}=1$，

左端点 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^2+n)$，发散。

右端点 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)$，发散。

收敛域$(-1,1)$。　　　　　　　　　　（4分）

2、令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\bullet S_1(x)$

其中 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$ ，

$$\int_0^x S_1(x)dx=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1})dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n ,$$

$$\int_0^x(\int_0^x S_1(x)dx)dx=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x} ,$$

所以 $S_1(x)=(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2}{(1-x)^3}$ ，

即 $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$。　　（10分）

五、求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(xy^2+xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+2xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$\sum$ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，取下侧。

解：将曲面方程$x^2+y^2+z^2=1$代入化简得

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(xy^2+xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+2xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,\qquad （2分）$$

补有向曲面$\sum_1$ ：$z=0$　　$(x^2+y^2\le 1)$ ，取上侧。

由高斯公式，$I+\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+2x+y)\mathrm{d}V$ ，　　　　（5分）

由对称性，得$\iiint\limits_{\Omega}2x\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V=0$ ，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{5} ,$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}(xy^2+xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2+2xy)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1}xdxdy$ ，

由对称性，得 $\iint\limits_{D_{xy}:x^2+y^2\le 1} xdxdy=0$，故 $I=\dfrac{2\pi}{5}$。（10 分）

六、计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{x\,dy-y\,dx}{b^2x^2+a^2y^2}(a,b>0,a\ne b)$，其中 L 是以点 $(1,1)$ 为中心，$R(R>\sqrt{2})$ 为半径的圆周，取逆时针方向。

解：$P=\dfrac{-y}{b^2x^2+a^2y^2}, Q=\dfrac{x}{b^2x^2+a^2y^2}, \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{a^2y^2-b^2x^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^2}$，（2 分）

取充分小的正数 ε，补有向曲线 C：$b^2x^2+a^2y^2=\varepsilon^2$，取顺时针方向。由格林公式，$I+\oint_C \dfrac{x\,dy-y\,dx}{b^2x^2+a^2y^2}=\iint\limits_D 0\,dxdy=0$，（5 分）

所以

$$I=\oint_{C^-}\frac{x\,dy-y\,dx}{b^2x^2+a^2y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C^-}x\,dy-y\,dx=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{b^2x^2+a^2y^2\le\varepsilon^2}2\,dxdy=\frac{2}{\varepsilon^2}\bullet\pi\bullet\frac{\varepsilon}{b}\bullet\frac{\varepsilon}{a}=\frac{2\pi}{ab}。$$

（10 分）

七、求函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上的最小值。

解：在 $x^2+y^2<1$ 内部，由 $\begin{cases} f_x=3x^2-6x=0 \\ f_y=3y^2-6y=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}$，$f(0,0)=0$。

在 $x^2+y^2=1$ 时，$L(x,y,\lambda)=x^3+y^3-3x^2-3y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$。

由 $\begin{cases} L_x=3x^2-6x+2\lambda x=0 \\ L_y=3y^2-6y+2\lambda y=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$，得（5 分）

$$\begin{cases} x_2=0 \\ y_2=1 \end{cases},\begin{cases} x_3=0 \\ y_3=-1 \end{cases},\begin{cases} x_4=1 \\ y_4=0 \end{cases},\begin{cases} x_5=-1 \\ y_5=0 \end{cases},\begin{cases} x_6=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_6=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases},\begin{cases} x_7=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_7=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$f(0,1)=f(1,0)=-2,\ f(0,-1)=f(-1,0)=-4,\ f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}-3,\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{\sqrt{2}}-3$$

所以最小值为 -4。（10 分）