1.第1题

因为任意n元非零列向量都是$\mathbf{A}$的特征向量，所以$\mathbf{A}e_i=\lambda_i e_i$，

即$\mathbf{A}$的第i列为$\lambda_i e_i$，$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$

由于任意n元非零列向量都是$\mathbf{A}$的特征向量，所以还可得到$\mathbf{A}(e_i+e_j)=\lambda(e_i+e_j)$,

即$\lambda_i e_i+\lambda_j e_j=\lambda(e_i+e_j)$,也即$(\lambda_i-\lambda)e_i+(\lambda_j-\lambda)e_j=0$.

因为向量组e_i,e_j线性无关，所以$\lambda_i-\lambda=0$，$\lambda_j-\lambda=0$，进一步可得$\lambda_i=\lambda_j=\lambda$,

从上面的讨论可得$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{bmatrix}$，$\mathbf{A}$是数量矩阵.

第2题

由$|\mathbf{A}|=0$可得，$r(\mathbf{A}^*)=0$或1.

若$\mathbf{A}^*$的秩为0，则$\mathbf{A}^*=\mathbf{O}$，$\mathbf{A}^*$的特征值全为零。

若$\mathbf{A}^*$的秩为1，则$\mathbf{A}^*\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系含$n-1$个向量，根据第 8 章第 2 节定理 8-4 可知，0 至少是$\mathbf{A}^*$的n-1 重特征值。这说明要么$\mathbf{A}^*$的特征值全为零，要么 0 是$\mathbf{A}^*$的n-1 重特征值。若 0 是$\mathbf{A}^*$的n-1 重特征值，则$\mathbf{A}^*$还应该有一个非零特征值。因为$\mathbf{A}^*$的特征值之和等于$\mathbf{A}^*$的对角元之和，所以$\mathbf{A}^*$的那个非零特征值为$\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$

2. 答案选 C

选项 A 错的原因：重特征值可对应出线性无关的特征向量，可以不成倍数.

选项 B 错的原因：

若$\alpha_1+\alpha_2$是λ_3对应的特征向量，则有$\mathbf{A}(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_3(\alpha_1+\alpha_2)$.

由已知还可得$\mathbf{A}\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$\mathbf{A}\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$.

$\mathbf{A}(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_3(\alpha_1+\alpha_2)$变成$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\lambda_3(\alpha_1+\alpha_2)$，即$(\lambda_1-\lambda_3)\alpha_1+(\lambda_2-\lambda_3)\alpha_2=0$, **所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线**

由$\lambda_1\neq\lambda_2$可知，α_1,α_2线性无关，因而$\lambda_1-\lambda_3=0$，$\lambda_2-\lambda_3=0$，

进一步可得$\lambda_1=\lambda_2$，这与$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾。

从上面的讨论可知，当$\lambda_1\neq\lambda_2$时，$\alpha_1+\alpha_2$不可能是$\mathbf{A}$的特征向量.

3. 答案为 AD

选项A正确的原因：设λ是$\mathbf{A}$的特征值，则$\lambda^2+\lambda+1=0$，λ一定为虚数.

选项B错的原因：例如，$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&2\\&0&3\\&&0\end{bmatrix}$的特征值都是0，但$\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$.

选项C错的原因:1是$\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}$的特征值，$-1$是$\begin{bmatrix}-1&0\\-1&1\end{bmatrix}$的特征值，

但是$1+(-1)$不是$\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$的特征值

选项D正确的原因：举例说明，设$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}$，则$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\&0&0\\&&0\end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$是$\mathbf{A}^2$的特征向量，但不是$\mathbf{A}$的特征向量

4. 由α是$\mathbf{Ax}=0$的非零解可知,0是$\mathbf{A}$ 的特征值。

$\mathbf{A}$的特征值为$-2,-2,0$， $tr(\mathbf{A})=-4,\ |\mathbf{A}|=0$

5. 由已知可得$\mathbf{A}p=\mu p$, 则有$\begin{bmatrix}3&2&-2\\1&x&2\\-1&2&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$, 即$\begin{bmatrix}2\\4-x\\y-4\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$,

$\mu=1, x=5, y=5$

6.设λ是$\mathbf{A}$的特征值，则$\lambda^2+\lambda-6=0$，$\lambda=2$或-3.

故$\mathbf{A}$的特征值的可能取值为2或-3.

7.注：当$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相似时，$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$的特征值、行列式、迹、特征多项式均相同，可根据这些相等关系来建立方程，从而求出x和y。

由$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相似，得$\begin{cases}tr(\mathbf{A})=tr(\mathbf{B})\\|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|\end{cases}$，即$\begin{cases}x+2=y+1\\-2=-2y\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$.

8. $P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}, P_2^{-1}AP_2=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$

9. 由$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}=\mathrm{diag}(1,3,4)$可知，$\mathbf{A}$ 的特征值为1, 3, 4

$\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}-2\mathbf{E}$的特征值为$-3,1,6$, $|\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}-2\mathbf{E}|=-18$

因为$\mathbf{A}$的特征值都是单特征值，所以$\mathbf{A}$ 可相似对角化，

进一步可知$\mathbf{A}-3\mathbf{E}$可相似对角化。

当一个矩阵可相似对角化时，它的秩等于其非零特征值的个数.

$\mathbf{A}-3\mathbf{E}$的特征值为$-2,0,1$, 所以$r(\mathbf{A}-3\mathbf{E})=2$.

10. 由$\mathbf{A}$为实对称矩阵可知，$\mathbf{A}+2\mathbf{E}, 4\mathbf{E}-\mathbf{A}^2, 2\mathbf{E}-\mathbf{A}^2$ 也都是实对称矩阵

当一个矩阵可相似对角化时，它的秩等于其非零特征值的个数.

由于实对称矩阵都可相似对角化，所以上面三个矩阵的秩都等于其非零特征值的个数.

$\mathbf{A}+2\mathbf{E}$的特征值为3(单), 4(3重),0(4重)，$r(\mathbf{A}+2\mathbf{E})=4$

$4\mathbf{E}-\mathbf{A}^2$ 的特征值为3(单),0(7重)，$r(4\mathbf{E}-\mathbf{A}^2)=1$

$2\mathbf{E}-\mathbf{A}^2$ 的特征值为1(单),-2(7重)，$r(2\mathbf{E}-\mathbf{A}^2)=8$