第 8 章　方阵的特征值与相似对角化

1. 特征值是矩阵的又一个重要的数值特性。工程技术中的振动问题和稳定性问题，数学中矩阵的对角化、曲面方程的化简、微分方程组的求解及解的稳定性分析等问题，都可归结为求一个方阵的特征值和特征向量的问题.

2. 这一章是本课程中的一个难点，本章理论性很强、结论很多，与前面学过的内容联系也很多，希望同学们多下些功夫。刚开始的时候节奏放慢一点，把学过的结论好好记住。

8.1　方阵的特征值及其特征向量

8.1.1 特征值与特征向量的概念及计算

1. **定义 8-1**　设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，λ 为变量，把 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 的根叫做 $\mathbf{A}$ 的**特征值**（单根称为**单特征值**，重根称为**重特征值**）.

设 λ_i 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则齐次线性方程组 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ **的非零解向量**叫做 $\mathbf{A}$ 的对应于（或属于）λ_i 的**特征向量**.

注 1： 特征值与特征向量有着相互对应的关系。做题时，一般都是先通过 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 求出 $\mathbf{A}$ 的特征值，再对每个特征值 λ_i，通过解方程组 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 来求 λ_i 对应的特征向量。

注 2： $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0 \Leftrightarrow |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$，也可通过 $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$ 来求特征值。

注 3： 要好好记住定义 8-1。

2. $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 称为 $\mathbf{A}$ 的**特征方程**.

3. 下面这些结论书上没有，是补充内容，但很有用。

（1）若 λ_i 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 $|\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$. 根据第三章定理 3-5 可知，方程组 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 一定有非零解。这说明：只要 λ_i 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，那么 λ_i 一定能对应出特征向量。

（2）当 λ_i 是 $\mathbf{A}$ 的特征值时，$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系是 λ_i 对应的线性无关的特征向量，$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的通解去掉零向量后是 λ_i 对应的全部特征向量。

（3）若 $\mathbf{p}$ 是 λ_i 对应的特征向量，则 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}=\mathbf{0}$，用数 k 乘上式两边，得 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})(k\mathbf{p})=\mathbf{0}$. 当 $k\neq 0$ 时，$k\mathbf{p}$ 也是 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的非零解向量，所以 $k\mathbf{p}$ 也是 λ_i 对应的特征向量.

注意：根据这一结论可知，当 $\mathbf{p}$ 是 λ_i 对应的特征向量时，$-\mathbf{p}$, $2\mathbf{p}, 3\mathbf{p}$, $\frac{1}{2}\mathbf{p}, \frac{1}{3}\mathbf{p}$ 等也都是 λ_i 对应的特征向量.

（4）若 $\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_r$ 都是 λ_i 对应的特征向量，由特征向量的定义和解的性质可知，

当 $k_1\mathbf{p}_1+\cdots+k_r\mathbf{p}_r\neq\mathbf{0}$ 时，$k_1\mathbf{p}_1+\cdots+k_r\mathbf{p}_r$ 也是 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的非零解向量，

所以 $k_1\mathbf{p}_1+\cdots+k_r\mathbf{p}_r$ 也是 λ_i 对应的特征向量.

4. 由定义可知，**上（下）三角矩阵及对角矩阵的特征值就是它们的对角元.**

例 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}$，则 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\0&\lambda-4&-5\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-6)$，

$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 的根为 $1,4,6$，所以 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $1,4,6$.

5. **例 8-1** 求 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ 的特征值.

解 由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$ 可知，$\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$.

其中, i 为虚数单位.

注： 此例表明，实方阵的特征值不一定都是实数.

6. 注意：如果通过初等变换将 $\mathbf{A}$ 化成 $\mathbf{B}$，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的特征值**一般不相等**。

例 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\mathbf{B}$，

$\mathbf{A}$ 的特征值为 $-1,1$，而 $\mathbf{B}$ 的特征值为 $i,-i$, 可见 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的特征值不相等。

例 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times 3]{r_1\times 0.1}\begin{bmatrix}-0.1&0\\0&3\end{bmatrix}=\mathbf{C}$，

$\mathbf{A}$ 的特征值为 $-1,1$，而 $\mathbf{C}$ 的特征值为 $-0.1, 3$, 可见 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{C}$ 的特征值不相等。

7. 特征值、特征向量的计算

例 求方阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$ 的特征值。

解法 1： $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}$

注意：开头这个行列式一定要写对了，写完最好再检查一遍。对角元是 λ 减 $\mathbf{B}$ 的对角元，非对角元要改变正负号。

$$\overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3+2r_1}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2\lambda+2&\lambda-1&0\\2\lambda-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

这一步的化简非常重要，其好处是：第2 行有一个数化成0 ，而另两个数有公因式 λ-1. 第3 行也具有同样的特点。不一定每个矩阵都能化成这种形式，但我们要往这方面试一下，倍加行变换和倍加列变换都要试一下。

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&1&0\\2&0&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)\text{，}$$

由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$（2 重），$\lambda_2=10$（单）.

解法 2： $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-2)(\lambda-5)^2-16-16-4(\lambda-5)-4(\lambda-5)-16(\lambda-2)$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-5)^2-8(\lambda-5)-16(\lambda-2)-32$$

$$=\lambda^3-12\lambda^2+21\lambda-10$$

【注 1：这种方法是先把 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|$ 算出来，然后再考虑怎样分解因式。如果特征值不是整数，一般很难做】

【分析：设 $\lambda^3-12\lambda^2+21\lambda-10$ **分解成** $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$**，则** $-\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-10$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 -10 的因数，**我们可以先参照** -10 的因数进行因式分解。

注意： -10 的因数有 $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$，**可先参照这些数进行因式分解】**

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$（2 重），$\lambda_2=10$（单）.

例 求方阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 的特征值。

解法 1： $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -\lambda+3 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-1)$$

由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=1$.

解法 2： $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda-2)-2(\lambda-3)$

$$=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-1)$$

由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 求得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=1$.

例 8-2 求方阵 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ 的特征值及其对应的全部特征向量.

注意 若 λ 是 $\mathbf{B}$ 的特征值，则 $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的全部非零解向量（即通解中去掉零向量）就是 λ 所对应的全部

特征向量.

解 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ -2 & \lambda+3 & 2\\ 2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$ 注意：开头这个行列式一定要写对了，写完最好再检查一遍。对角元是λ减$\mathbf{B}$的对角元，非对角元要改变正负号。

$$\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3+r_1}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ -\lambda-1 & \lambda+1 & 0\\ \lambda+1 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

这一步的化简非常重要，其好处是：第2 行有一个数化成0 ，而另两个数有公因式λ+1. 第3 行也具有同样的特点。不一定每个矩阵都能化成这种形式，但我们要往这方面试一下，倍加行变换和倍加列变换都要试一下。

$$=(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1),$$

由$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|=0$求得$\mathbf{B}$的特征值为$\lambda_1=-1$（二重），$\lambda_2=1$（单）.

对于$\lambda_1=-1$，通过解方程组$(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$来求$\lambda_1$对应的特征向量.

$$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\div(-2)}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

【注：可参照$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 2\\ -2 & \lambda+3 & 2\\ 2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$来写$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -2\end{bmatrix}$】

$(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$化简成$x_1-x_2-x_3=0$

求得$(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系为$\mathbf{p}_1=[1,1,0]^T$，$\mathbf{p}_2=[1,0,1]^T$.

故$\lambda_1=-1$对应的全部特征向量为$k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2$（其中，$k_1,k_2$不全为零）.

注： $\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$是$\lambda_1=-1$对应的线性无关的特征向量。

对于$\lambda_2=1$，通过解齐次线性方程组$(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$来求$\lambda_2$对应的特征向量.

$$\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ -2 & 4 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\div2]{r_1\div2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$化简成$\begin{cases}x_1-x_2=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}$

求得$(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系为$\mathbf{p}_3=[1,1,-1]^T$.

故$\lambda_2=1$对应的全部特征向量为$k_3\mathbf{p}_3$（$k_3\neq0$）.

注：$\lambda_1=-1$ 对应出一个线性无关的特征向量 $\mathbf{p}_3$.

例 8-3 求方阵 $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}3&3&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}$ 的特征值及其对应的全部特征向量.

解 由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{C}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-3&-1\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0,$

可求得 $\mathbf{C}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$ （三重）.

$$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-2&-3&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2+r_3}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$

$(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{C})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 化简成 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$

方程组 $(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{C})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\mathbf{p}=[-1,1,-1]^T$，

故 $\lambda_1=1$ 对应的全部特征向量为 $k\mathbf{p}\ (k\neq0)$.

8.1.2 特征值与特征向量的性质

1. **性质 8-1** n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 在复数范围内有且只有 n 个特征值（k 重特征值看作 k 个）.
   当 n=2 时，

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}).$$

当 $n>2$ 时，用归纳法可证明：

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\lambda^n-\mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\mathbf{A}|. \qquad (8.1)$$

其中，**$\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ 叫做 A 的迹，它等于 A 的 n 个对角元之和.**

n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 在复数范围内有且只有 n 个根，故性质 8-1 正确.

$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|$ 称为 A 的特征多项式。

注：迹和特征多项式都是比较重要的概念，要好好掌握。

2. **性质 8-2** 若 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

（1）$tr(\mathbf{A})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

（2）$|\mathbf{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

【注：这两个公式经常用到，要熟练掌握。从上面的结论还可知道：A 的特征值之和总是等于 A 的对角元之和】

证明 由 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，得

$$\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

比较上式与式(8.1)的系数和常数项可知性质 8-2 成立.

3. 由性质 8-2 和“$\mathbf{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow \left|\mathbf{A}\right|\neq 0$”可得:

推论 8-1 方阵 $\mathbf{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ 的特征值都不为零.

4. **性质** 8-3 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，则 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值且 $\mathbf{p}$ 是 λ 对应的特征向量 $\Leftrightarrow$ 数 λ 和 n 元非零向量 $\mathbf{p}$ 满足 $\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$.

证明 必要性 由 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mathbf{p}$ 是 λ 对应的特征向量可知，$\mathbf{p}$ 是 $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的非零解向量，所以 $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}=\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$，即 $\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$ 且 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$.

充分性 由 $\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$，得 $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{p}=\mathbf{0}$,

这说明 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$ 是方程组 $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的非零解向量，根据定理 3-5 可知 $\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=\mathbf{0}$，所以 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值。再由 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$ 是方程组 $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的非零解向量可知，$\mathbf{p}$ 是 λ 对应的特征向量.

这个性质很重要，它描述了矩阵与其特征值及其对应的特征向量之间的关系，常用于讨论有关特征值和特征向量的问题,也可用这个充要条件来定义方阵的特征值及其特征向量.

5. 在这一章经常会遇到证明 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值的问题，证明方法总结如下:

方法 1：证明 $\left|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=\mathbf{0}$.

方法 2：找非零向量 $\mathbf{p}$，证明 $\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$.【注：一般都是围绕已知条件提到的向量来找 $\mathbf{p}$，有时要考虑与已知向量正交的向量、已知向量的线性组合】

方法 3：利用特征值的性质进行证明。

6. **性质 8-4** 若 λ 是方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mathbf{p}$ 是对应的特征向量，k 是正整数，则 λ^k 是 $\mathbf{A}^k$ 的特征值，$\mathbf{p}$ 仍是对应的特征向量.

证明 由已知条件及性质 8-3，得 $\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$ 且 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$.

【注意：$\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$ 这个式子给我们的感觉是：$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{p}$ 相乘时，$\mathbf{A}$ 变成了 λ. 下面的证明如果按 $\mathbf{A}$ 变成 λ 来想，会比较容易理解】

$$\mathbf{A}^k\mathbf{p}=\mathbf{A}^{k-1}(\mathbf{Ap})=\lambda\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{p}=\lambda\mathbf{A}^{k-2}(\mathbf{Ap})=\lambda^2\mathbf{A}^{k-2}\mathbf{p}=\cdots=\lambda^k\mathbf{p},$$

【上式给我们的感觉是：$\mathbf{A}^k$ 中的 $\mathbf{A}$ 逐个变成了 λ】

根据性质 8-3 可知，λ^k 是 $\mathbf{A}^k$ 的特征值，$\mathbf{p}$ 仍然是对应的特征向量.

7. 性质 8-4 的结论可推广到多项式的情况。

设 $f(\mathbf{A})=l_m\mathbf{A}^m+l_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}+\cdots+l_1\mathbf{A}+l_0\mathbf{E}$， $f(\lambda)=l_m\lambda^m+l_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+l_1\lambda+l_0$

若 $\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$，则有

$$\begin{aligned}f(\mathbf{A})\mathbf{p}&=(l_m\mathbf{A}^m+l_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}+\cdots+l_1\mathbf{A}+l_0\mathbf{E})\mathbf{p}\\&=l_m\mathbf{A}^m\mathbf{p}+l_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}\mathbf{p}+\cdots+l_1\mathbf{Ap}+l_0\mathbf{Ep}\\&=l_m\lambda^m\mathbf{p}+l_{m-1}\lambda^{m-1}\mathbf{p}+\cdots+l_1\lambda\mathbf{p}+l_0\mathbf{p}\\&=(l_m\lambda^m+l_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+l_1\lambda+l_0)\mathbf{p}\\&=f(\lambda)\mathbf{p}\end{aligned}$$

因为 $f(\mathbf{A})$ 是一个矩阵， $f(\lambda)$ 是一个数，所以根据上式和性质 8-3 可知， $f(\lambda)$ 是 $f(\mathbf{A})$ 的特征值， $\mathbf{p}$ 仍是对应的特征向量.

注：通常称 $f(\mathbf{A})$ 为矩阵多项式，上面这个结论用的特别多。

8. **例 8-4** 设方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$， 证明: $\mathbf{A}$ 的特征值只能为 1 或-2.

证明 令 $f(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-2\mathbf{E}$，则 $f(\mathbf{A})=\mathbf{O}$, $f(\mathbf{A})$ 只有零特征值.

设 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 $f(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2$ 是 $f(\mathbf{A})$ 的特征值，所以

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

故 λ=1 或 -2． 结论正确.

注 1： $\mathbf{A}$ 的特征值可能都能为 1，也可能都为-2，还可能部分为 1 部分为-2，这些情况都可能出现。但是 $\mathbf{A}$ 的特征值一定不会是别的数。

注 2： 从上面的证明可以看出，只要 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 λ 一定满足 $\lambda^2+\lambda-2=0$， λ 只能为 1 或-2.

9. **性质 8-5** 设 λ 是可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mathbf{p}$ 是对应的特征向量，则 λ^{-1} 和 $|\mathbf{A}|\lambda^{-1}$ 分别是 $\mathbf{A}^{-1}$ 和 $\mathbf{A}^*$ 的特征值， $\mathbf{p}$ 仍是对应的特征向量.

证明 由 $\mathbf{A}$ 可逆及推论 8-1 可知， $\lambda\neq0$.

由性质 8-3 可得， $\mathbf{Ap}=\lambda\mathbf{p}$ 且 $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$.

用 λ^{-1} $\mathbf{A}^{-1}$ 左乘上式的两端，得 $\lambda^{-1}\mathbf{p}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}$，即 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}=\lambda^{-1}\mathbf{p}$.

根据性质 8-3 可知， λ^{-1} 是 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值， $\mathbf{p}$ 仍是对应的特征向量.

注意：当 $\mathbf{A}$ 可逆时， $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$. 根据上面的讨论可得

$$\mathbf{A}^*\mathbf{p}=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}=|\mathbf{A}|\lambda^{-1}\mathbf{p}=(|\mathbf{A}|\lambda^{-1})\mathbf{p},$$

根据性质 8-3 可知， $|\mathbf{A}|\lambda^{-1}$ 是 $\mathbf{A}^*$ 的特征值， $\mathbf{p}$ 仍是对应的特征向量.

10. 将刚刚讲过的几个结论总结如下：

若 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值， $\mathbf{p}$ 是对应的特征向量，

则 $\lambda^k,\ f(\lambda),\ \lambda^{-1},\ |\mathbf{A}|\lambda^{-1}$ 分别是 $\mathbf{A}^k,\ f(\mathbf{A}),\ \mathbf{A}^{-1},\ \mathbf{A}^*$ 的特征值，$\mathbf{p}$ 仍然是对应的特征向量.

注：这里的结论都有将 $\mathbf{A}$ 换成 λ 的感觉. 另外要注意：$\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$.

11. **性质 8-6** 方阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 的特征值相同.

证明 由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}^T| = |(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})^T| = |\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|$ 可知，

$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 的特征多项式相同，所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 的特征方程的根相同，故 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 的特征值相同.

12. **定理 8-1** 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\mathbf{A}$ 的互异特征值，则它们分别对应的特征向量 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_m$ 一定线性无关.

证明 对 $s(1\le s\le m)$ 用数学归纳法.

当 $s=1$ 时，由 $\mathbf{p}_1\ne\mathbf{0}$ 可知结论成立.

假设结论对 $s-1$ 成立，也就是假设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{s-1}$ 是 $\mathbf{A}$ 的互异特征值，它们分别对应的特征向量 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_{s-1}$ 线性无关.

下面证明结论对 s 也成立，也就是证明互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 分别对应的特征向量 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_s$ 也线性无关.

设 $k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2+\cdots+k_{s-1}\mathbf{p}_{s-1}+k_s\mathbf{p}_s=\mathbf{0}$ （8.2）

用 $\mathbf{A}$ 左乘上式的两端，并注意 $\mathbf{A}\mathbf{p}_i=\lambda_i\mathbf{p}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$，得

$$k_1\mathbf{A}\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{A}\mathbf{p}_2+\cdots+k_{s-1}\mathbf{A}\mathbf{p}_{s-1}+k_s\mathbf{A}\mathbf{p}_s=\mathbf{0}$$

$$k_1\lambda_1\mathbf{p}_1+k_2\lambda_2\mathbf{p}_2+\cdots+k_{s-1}\lambda_{s-1}\mathbf{p}_{s-1}+k_s\lambda_s\mathbf{p}_s=\mathbf{0} \qquad (8.3)$$

用 λ_s 乘以式（8.2）的两端，再与式（8.3 相减，得

$$k_1(\lambda_s-\lambda_1)\mathbf{p}_1+k_2(\lambda_s-\lambda_2)\mathbf{p}_2+\cdots+k_{s-1}(\lambda_s-\lambda_{s-1})\mathbf{p}_{s-1}=\mathbf{0}.$$

由归纳法的假设可知 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_{s-1}$ 线性无关，于是可得

$$k_i(\lambda_s-\lambda_i)=0\ (i=1,2,\cdots,s-1).$$

因为 $\lambda_s\ne\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,s-1)$,所以 $k_i=0\ (i=1,2,\cdots,s-1)$.这时，式（8.2）成为

$$k_s\mathbf{p}_s=\mathbf{0}.$$

由特征向量 $\mathbf{p}_s\ne\mathbf{0}$，又可得 $k_s=0$.

因为我们证明了式（8.2）成立时其系数都为 0，所以 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_s$ 线性无关.

13. 可以将定理 8-1 推广到下面更一般的情形：

定理 8-2 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\mathbf{A}$ 的互异特征值，$\mathbf{p}_{i1},\mathbf{p}_{i2},\cdots,\mathbf{p}_{ir_i}$ 是 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$ 对应的线性无关的特征向量，则 $\mathbf{p}_{11},\mathbf{p}_{12},\cdots,\mathbf{p}_{1r_1},\cdots,\mathbf{p}_{m1},\mathbf{p}_{m2},\cdots,\mathbf{p}_{mr_m}$ 线性无关.

该定理的证明与定理 8-1 类似，留作练习.

注意　对于一般的向量组，如果各个部分都线性无关，则合并起来不一定线性无关.上面定理反映的是特征向量所独有的性质.

14. **例** 设 $\mathbf{A}$ 是三阶方阵，由下列条件可知道谁是 $\mathbf{A}$ 的特征值？

（1）$|\mathbf{A}-2\mathbf{E}|=0$　　（2）$|3\mathbf{A}+\mathbf{E}|=0$　　（3）$r(\mathbf{A}+3\mathbf{E})<3$

解　（1）$|\mathbf{A}-2\mathbf{E}|=0 \Rightarrow |-(2\mathbf{E}-\mathbf{A})|=0 \Rightarrow |2\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$

这说明 2 是 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 的根，所以 2 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值

（2）$|3\mathbf{A}+\mathbf{E}|=0 \Rightarrow \left|\mathbf{A}+\frac{1}{3}\mathbf{E}\right|=0 \Rightarrow \left|-\frac{1}{3}\mathbf{E}-\mathbf{A}\right|=0$

这说明 $-\frac{1}{3}$ 是 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 的根，所以 $-\frac{1}{3}$ 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值

（3）$r(\mathbf{A}+3\mathbf{E})<3 \Rightarrow |\mathbf{A}+3\mathbf{E}|=0 \Rightarrow |-3\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$

这说明 -3 是 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 的根，所以 -3 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值

例 设 $\mathbf{A}$ 是三阶方阵，由下列条件可知道谁是 $\mathbf{A}$ 的特征值？

（1）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 是方程组 $\mathbf{Ax=0}$ 的解　　（2）$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 且 $\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$，$\mathbf{B}$ 为三阶方阵

（3）$\mathbf{A}$ 的各行元素之和都为 2

解　（1）方法 1：$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 是方程组 $\mathbf{Ax=0}$ 的解 $\Rightarrow \mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\mathbf{0}=0\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

根据性质 8-3 可知，0 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值

方法 2：$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 是方程组 $\mathbf{Ax=0}$ 的解 $\Rightarrow \mathbf{Ax=0}$ 有非零解 $\Rightarrow |\mathbf{A}|=0$

因为 $|\mathbf{A}|$ 等于 $\mathbf{A}$ 的特征值之积，所以 $\mathbf{A}$ 一定有一个特征值为 0.

（2）$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 且 $\mathbf{B}\neq\mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{Ax=0}$ 有非零解 $\Rightarrow |\mathbf{A}|=0$

因为 $|\mathbf{A}|$ 等于 $\mathbf{A}$ 的特征值之积，所以 $\mathbf{A}$ 一定有一个特征值为 0.

（3） $\mathbf{A}$ 的各行元素之和都为 $2 \Rightarrow \mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

根据性质 8-3 可知，2 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值

例 设 $\mathbf{A}$ 是三阶方阵，$|\mathbf{A}-\mathbf{E}|=0, |\mathbf{A}-2\mathbf{E}|=0, |\mathbf{A}-3\mathbf{E}|=0$，求 $|\mathbf{A}-4\mathbf{E}|$.

解 由 $|\mathbf{A}-\mathbf{E}|=0, |\mathbf{A}-2\mathbf{E}|=0, |\mathbf{A}-3\mathbf{E}|=0$ 可知，$\mathbf{A}$ 的特征值为 $1,2,3$.

注：$\mathbf{A}-4\mathbf{E}$ 可看成 $\mathbf{A}$ 的多项式，若 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 $\lambda-4$ 是 $\mathbf{A}-4\mathbf{E}$ 的特征值.

$\mathbf{A}-4\mathbf{E}$ 的特征值为 $-3,-2,-1$.

$|\mathbf{A}-4\mathbf{E}|=(-3)\times(-2)\times(-1)=-6$