

## §2.4 卡诺图化简逻辑函数

### Simplification Using K-Maps

用公式法化简逻辑函数，有时难以看出是否达到最简式。用**卡诺图 (Karnaugh Map)**化简逻辑函数具有简单、直观、方便的特点，容易判断出函数是否得到最简结果。

#### 2.4.1 卡诺图 Karnaugh Map

- 卡诺图 (K-map)与真值表相似，可以给出所有可能组合的输入所对应的输出值。
- 卡诺图是一个方格图，由小格构成。每个小格代表一个**二进制输入的组合**。

$n$  个变量的卡诺图中有  $2^n$  个小格, 每个小格表示一个最小项。

## 2 变量卡诺图: $F(A,B)$

$F$		$A$	
		$B$	
0	0	$\bar{A} \bar{B}$ $m_0$	$A \bar{B}$ $m_2$
	1	$\bar{A} B$ $m_1$	$A B$ $m_3$

变量取值:  $0 \rightarrow 1$

$\left. \begin{array}{l} 0 \text{ for } \bar{A}, \bar{B} \\ 1 \text{ for } A, B \end{array} \right\} \text{最小项}$

变量(A,B) 位置确定, 每小格代表的最小项就确定

### 3 变量卡诺图: $F(A,B,C)$

$F$ $AB$					
$C$		00	01	11	10
	0	$m_0$	2	6	4
	1	$m_1$	3	7	5

#### AB的排列顺序

• 排列方式要求  
保证相邻格之间只有  
一个变量变化

相邻格排序

几何相邻: 位置相邻

逻辑相邻: 只有一个变量变化

## 卡诺图其他排列方式

		$BC$			
		00	01	11	10
$A$	0	0	1	3	2
	1	4	5	7	6

		$C$	
		0	1
$F$	$AB$		
	00	0	1
	01	2	3
	11	6	7
	10	4	5

对于  $n$  变量卡诺图，每个小格有  $n$  个相邻格，相邻格与排列方式无关

## 4 变量卡诺图: $F(A,B,C,D)$

$F$ $AB$		$CD$			
		00	01	11	10
$CD$	00	0	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

$F$ $AB$		$CD$			
		00	01	11	10
$F$	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

每个小格: 4 个相邻格

## 5变量卡诺图: $F(A,B,C,D,E)$

$$2^5 = 32 \text{ cells}$$

$F \ ABC$									
$DE$									
		000	001	011	010	110	111	101	100
00		0	4	12	8	24	28	20	16
01		1	5	13	9	25	29	21	17
11		3	7	15	11	27	31	23	19
10		2	6	14	10	26	30	22	18

相邻格包括对称位置

14: 6, 15, 10, 12, 30

8 : 12, 9, 24, 0, 10

## 2.4.2 用卡诺图表示逻辑函数

### Mapping a Logic Function

例 1: 将真值表转换成卡诺图

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

<i>AB</i>	00	01	11	10
<i>C</i> 0	0	0	1	0
<i>C</i> 1	0	1	1	1

## 例 2: 用卡诺图表示标准与或式和标准或与式

$$F(X,Y,Z) = \sum m(0,4,6) \quad F(X,Y,Z) = \prod M(1,2,3,5,7)$$

**F 何时为 1 (最小项)**

$F$ $XY$					
		00	01	11	10
$Z$	0	1	0	1	1
	1	0	0	0	0

**F 何时为 0 (最大项)**

$F$ $XY$					
		00	01	11	10
$Z$	0	1	0	1	1
	1	0	0	0	0

等价



### 例3: 将与或式填入卡诺图

$$F(X,Y,Z) = XY + \bar{Y}Z + \bar{X}\bar{Z}$$

$$= XY(Z + \bar{Z}) + \bar{Y}Z(X + \bar{X}) + \bar{X}\bar{Z}(Y + \bar{Y})$$

$$= XYZ + XY\bar{Z} + X\bar{Y}Z + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$

$$= \sum m(0,1,2,5,6,7)$$

直接填 XY:

在  $XY = 11$  的两个格中填1

$F$ $XY$		00	01	11	10
$Z$	0	1	1	1	
	1	1		1	1

$F$ $XY$		00	01	11	10
$Z$	0	1	1	1	
	1	1		1	1

## 2.4.3 卡诺图化简逻辑函数

### K-Map Simplification

#### 1. 求最简与或式

方法：圈相邻格中的1, 合并最小项

圈 1: 根据下面规则将含有 1 的相邻格圈在一起

- 尽可能多地把相邻的矩形的  $2^n$  个 1 圈在一起;
- 消去变化的变量, 留下不变的变量, 是 1 写原变量, 是 0 写反变量, 组成 “与” 项;
- 每个圈中至少有一个别的圈没圈过的 1, 所有的 1 都要圈, 1 可以重复圈;
- 圈之间为 “或” 的关系。

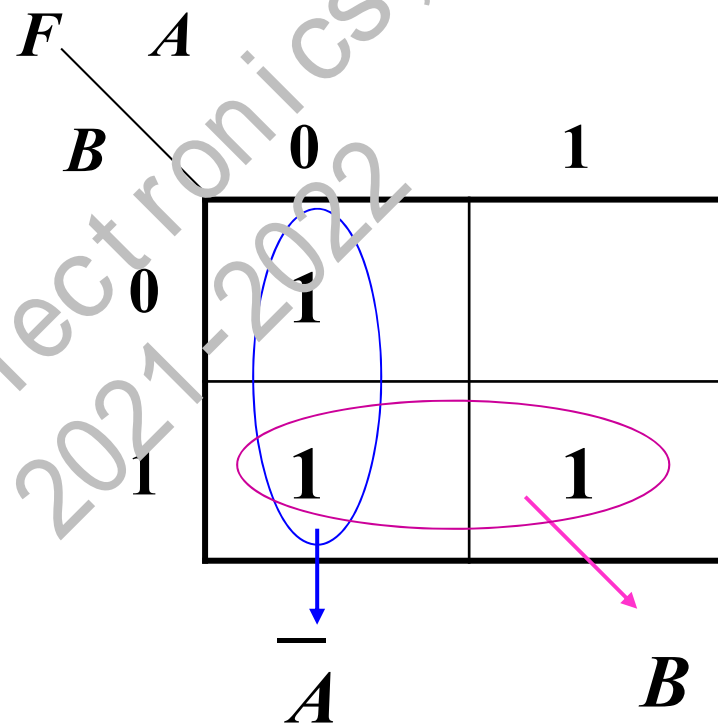
圈 1个1, 2个1, 4个1, 8个1, 16个1

## 例 1: 用卡诺图化简下列函数

$$F(A, B) = \sum (0, 1, 3)$$

解:

- ① 填卡诺图
- ② 圈 1
- ③ 将与项相或



$$F = \overline{A} + B$$

## 例 2: 化简函数

$F$   $AB$

$C$	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	1

$\overline{B}$

$AC$

$$F = \overline{B} + AC$$

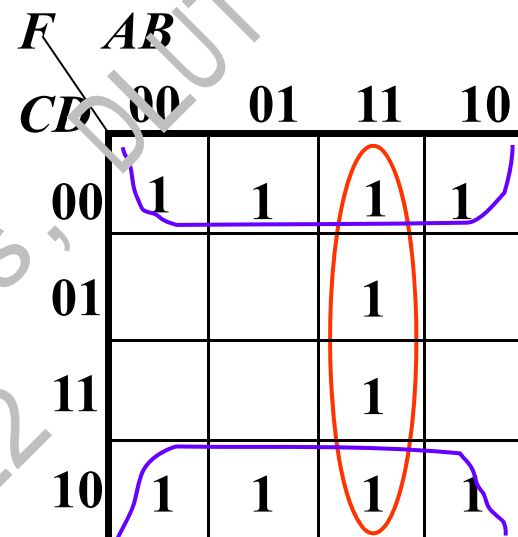
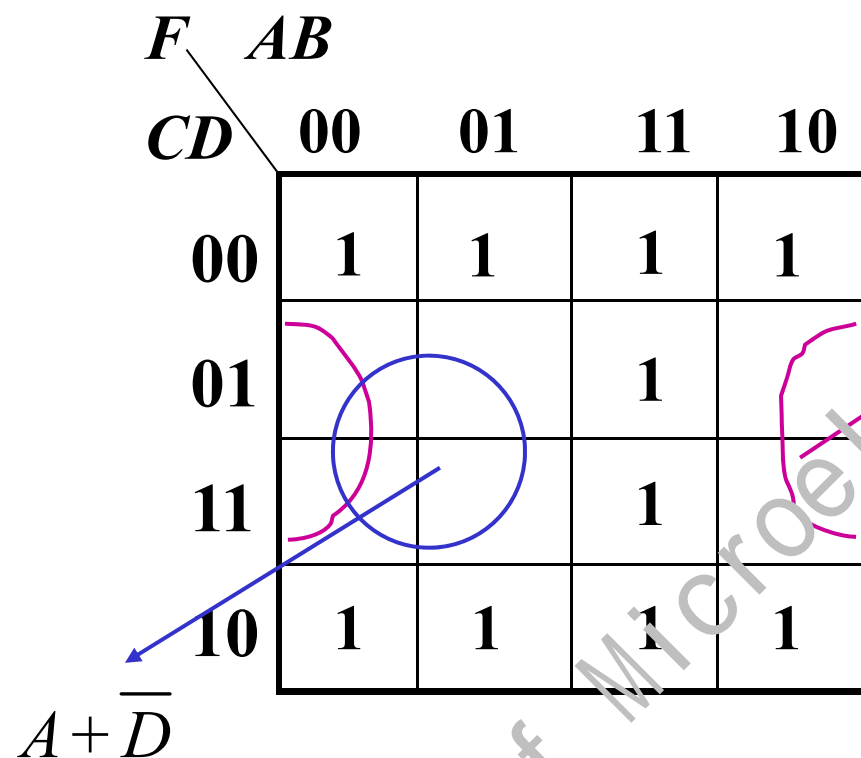
### 例 3:

$F$	$AB$				
$CD$	00	01	11	10	
00	1	1	1	1	$F(A, B, C, D) = \overline{D} + AB$
01			1		
11			1		
10	1	1	1	1	

## 2. 求最简或与式

- 尽可能多的把相邻矩形中  $2^n$  个 0 圈在一起;
- 消去变化了的  $n$  个变量, 留下不变的变量, (是 0 写原变量, 是 1 写反变量) 组成或项;
- 每个圈中至少有一个别的圈没圈过的 0, 所有 0 都要圈, 0 可重复圈;
- 圈之间为与的关系。

## 例 4 卷 0



$$F = \bar{D} + AB$$

$$\begin{aligned} \therefore F &= (A + \bar{D})(B + \bar{D}) \\ &= AB + \bar{D} \end{aligned}$$

与或式和或与式可以互相转换

总结: 与或式圈 1

或与式圈 0

## 例 5 将下图化简成最简与或表达式

$G$ $AB$					
$CD$		00	01	11	10
00			1	1	
01			1		
11					1
10			1	1	

与或式 圈 1

$$G = B\bar{D} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BCD$$

孤立的 1 一定要圈



## 例 6 将下图化简成最简与或式

		AB			
		00	01	11	10
C	0			1	1
	1	1	1	1	

		AB			
		00	01	11	10
C	0			1	1
	1	1	1	1	

$$F = A\bar{C} + \bar{A}C + AB$$

$$= A\bar{C} + \bar{A}C + BC$$

取其一

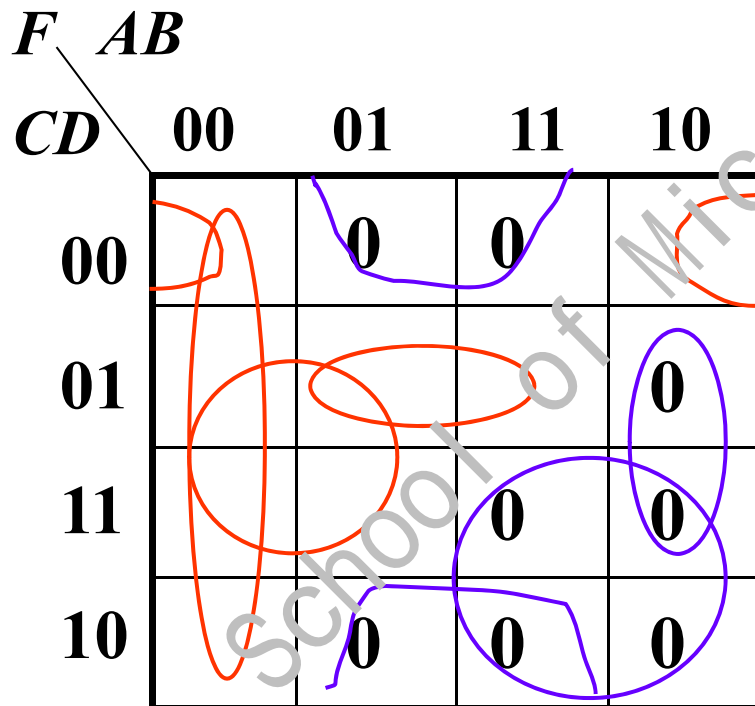
最简式不是唯一的

## 例 7 分别将下式化简成最简与或式和最简或与式

$$F(A, B, C, D) = \overbrace{(\bar{A} + \bar{C})}^0 \overbrace{(\bar{A} + B + \bar{D})}^0 \overbrace{(\bar{B} + D)}^0 \overbrace{(\bar{A} + B + \bar{C} + D)}^0$$

1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0

解: 在卡诺图中直接填 0



最简或与式: 圈 0

$$F(A, B, C, D) = (\bar{B} + D)(\bar{A} + \bar{C})(\bar{A} + B + \bar{D})$$

最简与或式: 圈 1

$$F(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}D + \bar{B}\bar{C}D + \bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

## 例 8 化简

$$F(W, X, Y, Z) = \overline{\overline{W} \overline{X} + \overline{Y} Z + (\overline{W} + Y) X \overline{Z} + (W + Z)(\overline{W} + \overline{Y})}$$

$$\overline{F} = \overline{W} \overline{X} + \overline{Y} Z + \overline{W} X \overline{Z} + X Y \overline{Z} + \overline{W} \overline{Z} + W Y$$

$\overline{F}$

$WX$	00	01	11	10
YZ				
00	1	1		
01	1	1	1	1
11	1		1	1
10	1	1	1	1

直接在  $\overline{F}$  K-Map 中填1, 圈0

$$\overline{F} = (\overline{W} + Y + Z)(W + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})$$

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{W} + Y + Z + W + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}}$$

$$= W \overline{Y} \overline{Z} + \overline{W} X Y Z$$