第三节　空间中的平面及其方程

（一）　平面的点法式方程

1. **定义**　与平面垂直的**非零向量**叫做该**平面的法向量**.

2. 注意：习惯用 π 表示平面，用 $\vec{n}, \boldsymbol{n}$ 表示法向量。

3. 一个平面由其上一点和它的法向量唯一确定.

设 $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ 是平面 π 上一点，$\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ 为平面 π 的法向量．则

点 $P(x, y, z)$ 在平面 π 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}=0,$ 即

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0 \quad, \qquad (4.1)$$

称这个方程为**平面的点法式方程**.

注：（1）"点 $P(x, y, z)$ 在平面 π 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}=0$" 是求平面的点法式方程的主要想法，需重点注意。

（2）点法式方程的形式要好好记住，要记住点法式方程中的三个系数 A, B, C 是法向量的坐标，括号里减的三个数是平面上的已知点 P_0 的坐标，做题时经常要套这个公式。

例 4-7　已知平面过点 $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ 且平行于两个不共线的向量

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \quad \text{和} \quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

求该平面的方程.

解法 1　因为所求平面平行于向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，所以平面的法向量同时垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$．从而平面的法向量 $\vec{n}$ 可取为 $\vec{a}\times\vec{b}$，即

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} \,.$$

由平面的点法式方程可知所求平面的方程为

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\left(x-x_0\right)-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\left(y-y_0\right)+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\left(z-z_0\right)=0 \,.$$

注：解法 1 的关键是"把平面的法向量 $\vec{n}$ 取为 $\vec{a}\times\vec{b}$"，这是一个要点，需记住。求出法向量，套上点法式方程的公式，就可求出该平面的方程。

解法 2　设 $P(x, y, z)$ 为该平面上的任一点，则 $\overrightarrow{P_0P}, \vec{a}, \vec{b}$ 共面，$\left(\overrightarrow{P_0P}, \vec{a}, \vec{b}\right)=0$.

代入向量 $\overrightarrow{P_0P}, \vec{a}, \vec{b}$ 的坐标，可得该平面的方程为 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0$.

注：解法 2 可称为“三个向量共面法”，用这个方法时，要先设 $P(x,y,z)$ 为该平面上的任一点，设完以后，可知道 $\overrightarrow{P_0P},\vec{a},\vec{b}$ 共面。

（二）平面的一般式方程

1. 将平面的点法式方程（4.1）整理，得

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (4.2)$$

其中 $D=-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right)$．把这个方程称为平面的一般式方程.

注：（1）平面的方程是一个关于 x,y,z 的三元一次方程，平面与 x,y,z 的三元一次方程相对应。注意，不能说成一一对应，因为方程可以相差一个倍数的。

（2）要记住平面的一般式方程中的系数是法向量的坐标。

（3）注意，如果没有特殊说明，求平面方程时都要整理成（4.2）的形式。

2. 特殊的三元一次方程对应的平面的特点：

（1）当 $D=0$ 时，方程(4.2)表示一个过原点的平面.

（2）当 $D\neq 0$ 且 A,B,C 中只有一个为 0 时，则平面平行于某个坐标轴.（这个结论要重点掌握，下面的讨论要用到这个结论）。**我们先对这个结论的正确性加以说明。**

例：当只有 $A=0$ 时，平面的法向量为 $\mathbf{n}=\left[0,B,C\right]^T$。由 $\vec{n}\cdot\vec{i}=0$ 知，平面的法向量 $\vec{n}$ 与 x 轴垂直，所以平面平行于 x 轴．注意：$\vec{i}=1\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}$，$\vec{i}$ 的坐标向量为 $\left[1,0,0\right]^T$.

（3）当 $D\neq 0$ 且 A,B,C 中有两个为 0 时，则平面平行某个坐标面（即垂直于某个坐标轴）.

例：对于方程 $2z+3=0$，根据（2）的结论，这个方程所表示的平面既平行于 x 轴又平行于 y 轴，所以这个平面平行于 Oxy 面（即垂直于 z 轴）.

（4）当 $D=0$ 且 A,B,C 中只有一个为 0 时，则平面经过某个坐标轴.

例：对于方程 $y+2z=0$，根据（1）的结论，这个方程所表示的平面过原点，根据（2）的结论，这个方程所表示的平面平行于 x 轴。因为这个平面既过原点又平行于 x 轴，所以这个平面过 x 轴。

3. 对于特殊的平面，可采用待定系数的方法来求平面的方程。按照上面的结论先把平面的方程设出来，再根据其它条件把待定的系数算出来，就可求出平面的方程。

（三）平面的截距式方程（这一部分稍作了解即可）

1.一个不过原点的平面与 x 轴的交点的横坐标叫做该平面在 x 轴上的**截距**．类似地，可给出平面在 y 轴和 z 轴上的截距的定义。

2.当 $abc\neq 0$ 时，平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别为 a、b、c．这种形式的平面方程称为**平面的截距式方程**.

（四）平面的三点式方程

1.三个不共线的点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$、$P_3(x_3,y_3,z_3)$ 可以确定一个平面.

设 $P(x,y,z)$ 为该平面上的任一点，则向量 $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ 共面，它们的混合积为 0，

即 $(\overrightarrow{P_1P},\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3})=0$，代入坐标，得 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$，通过算行列式可求到这个平面的方程。

2. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ 称为**平面的三点式方程**.

3. **通过平面上三个不共线的点来求平面的方程，也是求平面方程的一种重要的方法。**

（五）同轴平面束

1. 经过同一条直线的所有平面的集合叫做**同轴平面束**.

现在举个例子，很多宾馆的大厅的门都是转动的，这扇门在转动的每一瞬间都对应一个平面，所有这些平面合在一起就构成一个同轴平面束。

2. 当平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与平面 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 相交时，它们交于一条直线，经过这条直线的所有平面（即同轴平面束）可以用下面方程来表示，

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (4.3)$$

其中，λ_1 与 λ_2 是两个不同时为零的实参数。

下面给大家做个说明：

（1）当 λ_1,λ_2 取为两个具体数时，方程（4.3）是关于 x,y,z 的一个具体的三元一次方程，根据前面的讨论可知，这样的方程表示一个平面。

（2）因为平面 π_1 与 π_2 的交线上的点既满足 π_1 的方程又满足 π_2 的方程，所以交线上的点都满足方程（4.3）。也就是说，方程（4.3）表示的平面都过这两个平面的交线。

（3）当 λ_1,λ_2 取遍所有的实数时，方程（4.3）可以表示无数多个经过这条交线的平面。

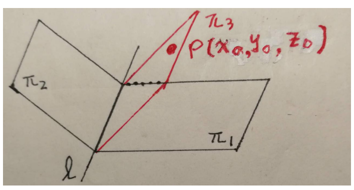
（4）（下面的讨论比较复杂，可以不看）

记这条交线为 l，每一个经过这条交线的平面也都可用方程（4.3）来表示。

（i）当 $\lambda_1\neq0,\lambda_2=0$ 时，方程（4.3）所表示的平面是 π_1.

（ii）当 $\lambda_1=0,\lambda_2\neq0$ 时，方程（4.3）所表示的平面是 π_2.

（iii）设 π_3 是经过交线 l 且不为 π_1,π_2 的任一平面，见下图



在平面π_3上任取一个不在直线l上的点$P(x_0,y_0,z_0)$，则P既不π_1上也不在π_2上，这时$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1\neq 0,\ A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2\neq 0$.

记$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=k_1$，$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=k_2$，则 $k_1\neq 0,\ k_2\neq 0.$

将点$P(x_0,y_0,z_0)$的坐标代入方程（4.3），得

$$\lambda_1(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)+\lambda_2(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0\ ,$$

即$\lambda_1k_1+\lambda_2k_2=0$，$\lambda_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\lambda_2$.

将$\lambda_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\lambda_2$ 代回方程（4.3）可求出平面π_3的方程。

由上面的讨论可知，方程（4.3）确实能表示经过这条直线的所有平面（即同轴平面束）。

注：（1）当所求的平面是经过某两个平面的交线时，我们可以按式（4.3）先把这个平面的方程设出来，然后再根据别的已知条件来确定λ_1和λ_2的关系，从而求出平面的方程。

（2）这一部分的内容看似在讲同轴平面束，实质是在讲求平面方程的一种新方法。

（六）求平面方程的方法

求平面的方程主要是下面的五种方法:

方法 1: 根据点法式方程来求平面的方程。这种方法主要是先找已知的点和法向量。

方法 2: 三个向量共面的方法。

方法 3: 待定系数法。主要用于求特殊平面的方程.

方法 4: 三点式。找不共线的三个点。

方法 5: 同轴平面束的方法。这种方法适合于：所求平面经过某两个平面的交线。