1．证：因为$m=r(\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{AB})\le r(\boldsymbol{A})\le m$,所以$r(\boldsymbol{A})=m$
因为$m=r(\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{AB})\le r(\boldsymbol{B})\le m$,所以$r(\boldsymbol{B})=m$

2．解：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\\ -2 & 4k & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ 0 & 2k-2 & 3k-3\\ 0 & 2k-2 & -3k^2+3\\ 0 & 4k-4 & 6k-6\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ 0 & 2k-2 & 3k-3\\ 0 & 0 & -3k^2-3k+6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

当$k=1$时，$r(\boldsymbol{A})=1$; 当$k=-2$时，$r(\boldsymbol{A})=2$;
当$k\ne 1$且$k\ne -2$时，$r(\boldsymbol{A})=3$

3．解：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -3 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$r(\boldsymbol{A})=3$

4．证：由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，得$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，

根据性质5-6可得

$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-n\le r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})]=r(\boldsymbol{O})=0$，

即$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n$.

根据性质5-8又可得

$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\ge r[\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})]=r(\boldsymbol{E})=n$，

所以$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

5. 证法1：因为向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关，$\mathbf{b}_2$不能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示，

所以向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_2$线性无关。

因为$\mathbf{b}_1$能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示，所以可设$\mathbf{b}_1=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3$.

$r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2\right]\right)=r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\lambda_1\mathbf{a}_1+k\lambda_2\mathbf{a}_2+k\lambda_3\mathbf{a}_3+\mathbf{b}_2\right]\right)$

$\overset{c_4-(k\lambda_1)c_1-(k\lambda_2)c_2-(k\lambda_3)c_3}{=} r\left(\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_2\right]\right)=4$

所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$线性无关。

证法2：因为向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性无关，$\mathbf{b}_2$不能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示，

所以向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_2$线性无关。

因为$\mathbf{b}_1$能由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$线性表示，所以可设$\mathbf{b}_1=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\lambda_3\mathbf{a}_3$

为了证明$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$线性无关，设$l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+l_3\mathbf{a}_3+l_4(k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)=0$,.

则有$l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+l_3\mathbf{a}_3+l_4(k\lambda_1\mathbf{a}_1+k\lambda_2\mathbf{a}_2+k\lambda_3\mathbf{a}_3+\mathbf{b}_2)=0$

即（$l_1+l_4k\lambda_1)\mathbf{a}_1+(l_2+l_4k\lambda_2)\mathbf{a}_2+(l_3+l_4k\lambda_3)\mathbf{a}_3+l_4\mathbf{b}_2=0$

因为向量组$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{b}_2$线性无关，

所以$\begin{cases} l_1 + l_4 k\lambda_1 = 0 \\ l_2 + l_4 k\lambda_2 = 0 \\ l_3 + l_4 k\lambda_3 = 0 \\ l_4 = 0 \end{cases}$， 解得$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \\ l_3 = 0 \\ l_4 = 0 \end{cases}$

所以$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,k\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$线性无关。

6. 证：由 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，得

$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$, $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_2$。

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$， (1)

用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 乘以（1）式，得

$2k_2\boldsymbol{\alpha}_1+3k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$ （2）

再用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 乘以（2）式，得 $6k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,所以$k_3=0$。由（2）式可得，$k_2=0$，再由(1)式可得，$k_1=0$。

所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关。

7.以所给向量组为列构造矩阵$\mathbf{A}$,并用**初等行变换**将$\mathbf{A}$化为**行最简形矩阵**$\mathbf{B}$

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5]=\begin{bmatrix}1&1&3&0&1\\0&-2&-2&2&0\\1&1&3&1&2\\-1&1&-1&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&3&0&1\\0&-2&-2&2&0\\0&0&0&1&1\\0&2&2&3&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\div(-2)}\begin{bmatrix}1&1&3&0&1\\0&1&1&-1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&5&5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-5r_3]{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&1&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所给向量组的秩为 3，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$为所给向量组的一个极大无关组.

$$\mathbf{a}_3=2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_5=\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_4$$