6.1 线性方程组解的存在性

为了讲述本节内容，我们先介绍下面的概念。

1. 当 $\mathbf{A}$ 的行向量组**线性相关**时，称方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 中的方程是**线性相关**的。
   当 $\mathbf{A}$ 的行向量组**线性无关**时，称方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 中的方程是**线性无关**的。

   例如，$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-2x_2+x_3=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$ 中的方程是线性相关的，第三个方程等于前两个方程之和。

2. 当 $[\mathbf{A},\mathbf{b}]$ 的行向量组**线性相关**时，称方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 中的方程是**线性相关**的。

   当 $[\mathbf{A},\mathbf{b}]$ 的行向量组**线性无关**时，称方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 中的方程是**线性无关**的。

6.1.1 齐次线性方程组有非零解的充要条件

1. 齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 一定有解，它的解分为两种情况：（1）只有零解；（2）有非零解.

2. **定理 6-1** $m\times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $r(\mathbf{A})<n$.

   $m\times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ $r(\mathbf{A})=n$.

   注意：n 为 A 的列数，即未知数的个数。

   证明 令 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$，即 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 为 $\mathbf{A}$ 的列向量组，则

   齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解

   $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{0}$ 有非零解

   $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关

   $\Leftrightarrow r(\mathbf{A})<n.$.

3. **定理 6-1 的直观解析：** $r(\mathbf{A})<n$ 意味着将 $\mathbf{A}$ 化为行阶梯矩阵时非零行的个数小于 n，即对方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 化简以后所留下方程的个数小于 n, 一个方程只能确定一个未知数，这时有自由变化的未知数，所以有非零解.

   注：当方程的个数小于未知数的个数时，一定有自由变化的未知数（简称自由未知数）。

4. **例** （1）关于方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$ 是否有非零解，可按下面的两种方式来想。

   第一种方式：因为方程的个数小于未知数的个数，所以该方程组有自由未知数，因而该方程组有非零解。

   例如，把 x_3 作为自由未知数，求得 $\begin{cases} x_1=-2x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$，让 x_3 取成非零的数，求出的解一定是非零解，该方程组有无穷多个非零的解。

第二种方式：$r(\mathbf{A})<3$，根据定理 6-1 可知，该方程组有非零解。

（2）对于方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases}$，

直观想法：因为该方程组中的三个方程是线性无关的，也可以说不能再消掉了，三个方程把三个未知数给限制死了，所以只有零解。

注：无关方程的个数等于未知数的个数时，没有自由未知数，方程组有唯一解。

第二种想法：$r(\mathbf{A})=3$，根据定理 6-1 可知，该方程组只有零解。

5. 在第三章第二节学过定理 3-5，定理 3-5 的结论是：

$n\times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}|=0$.

$n\times n$ 型齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}|\neq 0$.

注：定理 3-5 可看成定理 6-1 的特例。

当 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵时，$|\mathbf{A}|=0 \Leftrightarrow r(\mathbf{A})<n$，　　$|\mathbf{A}|\neq 0 \Leftrightarrow r(\mathbf{A})=n$.

6.1.2　非齐次线性方程组解的存在性

1. 对于非齐次线性方程组，它可能有解，也可能无解；有解时，可能是有唯一解，也可能是有无穷多个解。下面我们将利用矩阵的秩给出其判别方法。

2. **定理 6-2**　设 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 是 $m\times n$ 型非齐次线性方程组，则

（1）$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})$

（2）$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=n$

注：第一个结论在“第 5 章第 4 次课的学习指导”中已经讲过，下面再给出一种证明方法。

证明（1）必要性. 设 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解 $\mathbf{u}$，则 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$，

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r([\mathbf{A},\mathbf{Au}])=r(\mathbf{A}[\mathbf{E},\mathbf{u}])\le r(\mathbf{A})$. 【注：把 $\mathbf{b}$ 换成 $\mathbf{Au}$ 是关键的一步】

由 $[\mathbf{A},\mathbf{b}]$ 为 $\mathbf{A}$ 的增广矩阵又知，$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\ge r(\mathbf{A})$，所以 $r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})$.

充分性. 设 $r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=r$，并设 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 是 $\mathbf{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，则 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 也是 $[\mathbf{A},\mathbf{b}]$ 的列向量组一个极大无关组. 由定理 5-7 可知，$\mathbf{b}$ 能由 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 线性表示，从而能由 $\mathbf{A}$ 的列向量组线性表示.再由定理 5-1 可知，$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有解.

（2）必要性 设 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{u}$,由（1）的结论可得

$$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})\leqslant n.$$

【注：有唯一解属于有解的情况，所以根据前面的结论首先可得 $r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})$.

另外，$r(\mathbf{A})$一定小于或等于$\mathbf{A}$的列数n.所以$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})\leqslant$n.】

假设$r(\mathbf{A})$<n,则由定理 6-1 可知，$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$有非零解，即存在$\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$，使得$\mathbf{Av}=\mathbf{0}$.

由$\mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{Au}+\mathbf{Av}=\mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b}$可知，$\mathbf{u}+\mathbf{v}$也是$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的解。由于$\mathbf{u}+\mathbf{v}\neq\mathbf{u}$，这与$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有唯一解$\mathbf{u}$矛盾，所以$r(\mathbf{A})=n$.　因而$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=n$.

充分性　由$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=n$可知，$\mathbf{A}$的列向量组线性无关且为$[\mathbf{A},\mathbf{b}]$的列向量组的极大无关组.由定理 5-7 可知，$\mathbf{b}$能由$\mathbf{A}$的列向量组唯一地线性表示，再根据定理 5-1 可知$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有唯一解.证毕.

【注：由$\mathbf{A}$的列数为n及$r(\mathbf{A})=n$可知，$\mathbf{A}$的n个列向量线性无关。由$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=n$可知，$[\mathbf{A},\mathbf{b}]$的列向量组的极大无关组含$n$个向量.】

3. 对于$m\times n$型非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$,由定理 6-2 可知：

（1）当$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\neq r(\mathbf{A})$时，$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$无解；

（2）当$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=n$时，$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有唯一解；

（3）当$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})<n$时，$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有无穷多个解.

具体判别时，用**初等行变换将增广矩阵**$[\mathbf{A},\mathbf{b}]$**化为行阶梯矩阵**$[\mathbf{B},\mathbf{c}]$，由$\mathbf{B}$的非零行的个数可知$\mathbf{A}$的秩，由$[\mathbf{B},\mathbf{c}]$的非零行的个数可知$[\mathbf{A},\mathbf{b}]$的秩.

注 1：上面的结论很重要，同学们要好好掌握。

注 2：当$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})$时，$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有解；当$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\neq r(\mathbf{A})$时，$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$无解.

注 3：在有解的情况下，再通过$r(\mathbf{A})$等于n还是小于n来判断有唯一解还是有无穷多个解。没有自由未知数时，有唯一解；有自由未知数时，有无穷多个解。

4. **例 6-1**　当k取何值时，方程组$\begin{cases}kx_1+x_2-x_3=k\\x_1+kx_2+x_3=1\\x_1+x_2-kx_3=k\end{cases}$

(1)有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？

解

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}k&1&-1&k\\1&k&1&1\\1&1&-k&k\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&-k&k\\1&k&1&1\\k&1&-1&k\end{bmatrix}$$

这个对调要好好注意。
一方面，如果不对调，做起来很麻烦。
另一方面，当k=0时，如果不对调，
无法把第1列下方全化为0

$$\xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&-k&k\\0&k-1&k+1&1-k\\0&1-k&k^2-1&k-k^2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&-k&k\\0&\boxed{k-1}&k+1&1-k\\0&0&\boxed{k^2+k}&1-k^2\end{bmatrix}$$

【注：怎样对k讨论是做这种题的一个关键点，**注意，要先抓住对角元进行讨论。**

原因是：只要$k-1$和k^2+k中有一个等于 0，**A** 的秩都会变小，从而会影响到方程组有没有解，有什么样的的解】

(1)当$k-1\neq 0$且$k^2+k\neq 0$，即 $k\neq 0$ 且 $k\neq\pm 1$ 时，$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=3$,方程组有唯一解.

【注：要先讨论$k-1\neq 0$且$k^2+k\neq 0$的情况，然后再对取等号的情况逐个讨论】

(2)当 $k=0$ 时，由开头的化简可知，

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3, r(\mathbf{A})=2, r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\neq r(\mathbf{A})$，方程组无解.

【注：$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$的第三行对应的方程为$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=1$，肯定无解】

(3)当 $k=-1$ 时，由开头的化简可知，

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&-2&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2$,方程组有无穷多个解.

【注：当 $k=-1$ 时，$[\mathbf{A},\mathbf{b}]$化简以后剩下两个非零行，这意味着原方程组化简以后剩下两个方程，一个方程能确定一个未知数，两个方程只能确定两个未知数，对于这种情况，一定有自由未知数，所以有无穷多个解。】

当 $k=1$ 时，由开头的化简可知，

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&0&2&0\\0&0&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2$,方程组有无穷多个解.

【注：对于这种情况，一定有自由未知数，所以有无穷多个解。】

注意　对于例 6-1,也可先通过$|\mathbf{A}|\neq 0$求出使方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$有唯一解的 k，然后再对使$|\mathbf{A}|=0$的 k 的取值情况加以讨论.

5. **例**　当 k 取何值时，方程组$\begin{cases}x_1+x_2-kx_3=-k\\2x_1+kx_2-x_3=2\\kx_1+2x_2+x_3=k\\3x_1+(k+1)x_2-(k+1)x_3=k^2\end{cases}$

(1)有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？

解：$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&1&-k&-k\\2&k&-1&2\\k&2&1&k\\3&k+1&-k-1&k^2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-kr_1}}\begin{bmatrix}1&1&-k&-k\\0&k-2&2k-1&2k+2\\0&2-k&k^2+1&k^2+k\\0&k-2&2k-1&k^2+3k\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&-k&-k\\0&k-2&2k-1&2k+2\\0&0&k^2+2k&k^2+3k+2\\0&0&0&k^2+k-2\end{bmatrix}$

当 $k^2+k-2\neq 0$，即 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时，该方程组无解；

【注　做这个题的关键点是：要先讨论 $k^2+k-2\neq 0$ 的情况。因为当 $k^2+k-2\neq 0$ 时，$[\mathbf{A},\mathbf{b}]$ 化简以后所得矩阵的第 4 行对应的方程为 $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=k^2+k-2$，一定无解，所以要先讨论这种情况。剩下再对 $k=1$ 和 $k=-2$ 的情况讨论。】

当 $k=1$ 时，$[\mathbf{A},\mathbf{b}]\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\0&-1&1&4\\0&0&3&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=3$, 该方程组有唯一解；

当 $k=-2$ 时，$[\mathbf{A},\mathbf{b}]\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&-4&-5&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2<3$, 该方程组有无穷多个解。

例　当 k 取何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-kx_3=-k\\2x_1+kx_2-x_3=2\\kx_1+2x_2+x_3=k\\3x_1+(k+1)x_2-(k+1)x_3=2-k\end{cases}$

(1)有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？

【注：这个例题是把上一个例题稍微改动了一下。】

解：$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&1&-k&-k\\2&k&-1&2\\k&2&1&k\\3&k+1&-k-1&2-k\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-kr_1}}\begin{bmatrix}1&1&-k&-k\\0&k-2&2k-1&2k+2\\0&2-k&k^2+1&k^2+k\\0&k-2&2k-1&2k+2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&-k&-k\\0&\boxed{k-2}&2k-1&2k+2\\0&0&\boxed{k^2+2k}&k^2+3k+2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

【注意：对于该题，还是要抓住对角元位置上的数进行讨论，并且要先讨论它们都不为 0 的情况】

（1） 当 $k-2\neq 0$ 且 $k^2+2k\neq 0$，即 $k\neq 0$ 且 $k\neq \pm 2$ 时，$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=3$，方程组有唯一解.

(2)当 $k=0$ 时，由开头的化简可知，

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-2&-1&2\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3, r(\mathbf{A})=2, r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\neq r(\mathbf{A})$，方程组无解.

【注： $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-2&-1&2\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 第三行对应的方程为 $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=2$，肯定无解**】**

当 $k=2$ 时，由开头的化简可知，

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&1&-2&-2\\0&0&3&6\\0&0&8&12\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2}\begin{bmatrix}1&1&-2&-2\\0&0&3&6\\0&0&0&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3, r(\mathbf{A})=2, r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\neq r(\mathbf{A})$，方程组无解.

（3）当 $k=-2$ 时，由开头的化简可知，

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1&1&-k&-k\\0&-4&-5&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2$,方程组有无穷多个解.

6.1.3 几何应用

（一）设有三个平面

$$\pi_1: a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,$$
$$\pi_2: a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,$$
$$\pi_3: a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3.$$

令 $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{3\times 3}, \mathbf{u}=[x,y,z]^T, \mathbf{b}=[b_1,b_2,b_3]^T$. 则三个平面间的位置关系就化为方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 的解的存在性问题，而求三个平面的交点或交线等计算就化为解方程组的计算.根据定理 6-2，可得：

1. 上面的三个平面交于一点 $\Leftrightarrow$ 方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 有唯一解

$\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=3.$

2．上面的三个平面重合$\Leftrightarrow$方程组$\mathbf{Au}=\mathbf{b}$有无穷多个解并且只有一个线性无关的方程$\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=1.$

3．上面的三个平面交于一条直线$\Leftrightarrow$方程组$\mathbf{Au}=\mathbf{b}$有无穷多个解并且有两个线性无关的方程$\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2.$**【对于这种情况，可通过同轴平面束来思考，第三个方程能通过前两个方程线性表示，做消元法能消去第三个方程】**

例 6-2 根据参数 k 的取值，判别三个平面

$$\pi_1: kx+y-z=k,$$
$$\pi_2: x+ky+z=1,$$
$$\pi_3: x+y-kz=k$$

的相对位置.

解 将这三个平面的方程联立组成一个方程组，按照例 6-1 的做法，可得

(1) 当 $k\neq 0$ 且 $k\neq \pm 1$ 时，$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=3$，该方程组有唯一解，这三个平面交于一点.

(2) 当 $k=1$ 或 $k=-1$ 时，$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2$，该方程组有无穷多个解，这三个平面交于一条直线.

(3）当 $k=0$ 时，$r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3, r(\mathbf{A})=2, r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\neq r(\mathbf{A})$，该方程组无解，这三个平面无公共交点．进一步分析可知，这三个平面两两相交.

当三个平面的方程组成的方程组无解时，平面的相对位置有多种情况，在此不再探讨．有兴趣的读者可自行探讨和研究.

对于例 6-2，我们再稍微扩展一下。

当 $k=1$ 时，三个平面交于一条直线，这条直线的一般式方程为$\begin{cases}x+y-z=1\\x+y+z=1\end{cases}$，

进一步可求出该直线的对称式方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z-0}{0}$

（二）下面我们来研究直线与平面之间的位置关系。

直线$l:\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\end{cases}$ 与平面$\pi: a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3$之间的关系可以看成三个平面之间的关系．可按上述方法处理，有如下的结论：

1. 直线 l 与平面 π 相交$\Leftrightarrow$方程组$\mathbf{Au}=\mathbf{b}$有唯一解$\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=3.$

2. 直线 l 在平面 π 上$\Leftrightarrow$方程组$\mathbf{Au}=\mathbf{b}$有无穷多个解且 l 的两个方程的系数不成比例$\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=r(\mathbf{A})=2$ 且 $\mathbf{A}$ 的前两个行向量线性无关.

【对于这种情况可通过同轴平面束来思考，平面 π 的方程可通过 l 的两个方程表示出来，做消元法能消去】

3. 直线 l 与平面 π 平行$\Leftrightarrow$方程组$\mathbf{Au}=\mathbf{b}$无解且 l 的两个方程的系数不成比例

$\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3, r(\mathbf{A})=2$ 且 $\mathbf{A}$ 的前两个行向量线性无关.

【注：方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 无解 $\Leftrightarrow r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\neq r(\mathbf{A})$，由 l 的两个方程的系数不成比例可知 $r(\mathbf{A})\geq 2$，由 $[\mathbf{A},\mathbf{b}]$ 的行数为3可知 $r([\mathbf{A},\mathbf{b}])\leq 3$**，所以 $r([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3, r(\mathbf{A})=2$】**

求直线 l 与平面 π 的交点就相当于求方程组 $\mathbf{Au}=\mathbf{b}$ 的唯一解.

求 m 条直线（其方程为一般式方程）的交点就相当于求 $2m\times 3$ 型非齐次方程组的唯一解.

两条直线之间的关系也可以用矩阵的秩来判别，请读者研究.