## 8.2　相似矩阵

### 8.2.1　相似矩阵的概念与性质

1. **定义 8-2** 设 $\mathbf{A}$ , $\mathbf{B}$ 为 $n$ 阶方阵,如果存在 $n$ 阶**可逆矩阵** $\mathbf{P}$ ,使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$ ,则称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **相似**; $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 称为对 $\mathbf{A}$ 进行相**似变换**; $\mathbf{P}$ 称为**相似变换矩阵**.

注：若 $\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{B}$ ，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 也相似。

因为 $\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{B}$ 可写成 $(\mathbf{M}^{-1})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{B}$ ，满足定义 8-2.

如果相似变换矩阵 $\mathbf{P}$ 是正交矩阵，则称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **正交相似**；$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$ 称为对 $\mathbf{A}$ 进行**正交相似变换**.

2. 相似矩阵具有如下性质：

（1）若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，则 $\mathbf{A}^k$ 与 $\mathbf{B}^k$ 相似（$k$ 为正整数）;

（2）若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值、行列式、迹、秩均相同.

**证明**（1）设 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$ ，则

$$\mathbf{B}^k=(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^k=\overbrace{(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})\cdots(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})}^{k\text{个}}$$

$$=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}（\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}）\mathbf{A}（\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}）\cdots\mathbf{A}（\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}）\mathbf{A}\mathbf{P}$$ 【这里用到矩阵乘法的结合律】

$$=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}$$

【注：记住这里是从 $\mathbf{B}^k$ 出发开始证明】

(2)设 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$ ，则

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|=|\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{E})\mathbf{P}-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}|$$ **【注：把 $\lambda\mathbf{E}$ 变形成 $\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{E})\mathbf{P}$ 是一个很重要的想法】**

$$=|\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{P}|=|\mathbf{P}^{-1}|\cdot|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{P}|=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|$$

所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值相同.

由性质 8-2 可知，行列式等于特征值之积，迹等于特征值之和。
因为刚才证明了 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值相同，所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的行列式和迹也都相同.

因为乘可逆矩阵秩不变，所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的秩也相同。

**例** 已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & x & 1\\ 1 & -6 & -1\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & y\end{bmatrix}$ 相似，求 $x$ 和 $y$.

**注：**当 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似时，$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值、行列式、迹、特征多项式均相同，可根据这些相等关系来建立方程，从而求出 $x$ 和 $y$。

**解法 1：**由 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似，得 $\begin{cases}tr(\mathbf{A})=tr(\mathbf{B})\\ |\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|\end{cases}$，即 $\begin{cases}x-2=y+3\\ x-6=2y\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=4\\ y=-1\end{cases}$.

**解法 2：**由 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似可知，$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的特征值相同。显然，1 是 $\mathbf{B}$ 的特征值，因而 1 也是 $\mathbf{A}$ 的特征值。由 $|\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$，得 $\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1-x & -1\\ -1 & 6 & 2\end{vmatrix}=0$，解得 $x=4$. 再由 $tr(\mathbf{A})=tr(\mathbf{B})$，求得 $y=-1$.

**例** 设方阵 $\mathbf{A}$ 相似于矩阵 $\mathrm{diag}(0,1,3)$，求 $|\mathbf{A}^2-2\mathbf{E}|$.

**解：**由 $\mathbf{A}$ 与 $\mathrm{diag}(0,1,3)$ 相似可知，$\mathbf{A}$ 的特征值为 $0,1,3$，因而 $\mathbf{A}^2-2\mathbf{E}$ 的特征值为 $-2,-1,7$，所以 $|\mathbf{A}^2-2\mathbf{E}|=(-2)\times(-1)\times 7=14$.

### 8.2.2 相似对角化

1. **定义 8-3** 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 能与对角矩阵相似，则称 $\mathbf{A}$ **可相似对角化**. 当 $\mathbf{A}$ 可相似对角化时，与 $\mathbf{A}$ 相似的对角矩阵叫做 $\mathbf{A}$ 的**相似标准形**.

2. 设 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$ 为对角矩阵，按照上面的定义，$\mathbf{\Lambda}$ 是 $\mathbf{A}$ 的相似标准形。

由 $\mathbf{\Lambda}$ 为对角矩阵可知，$\mathbf{\Lambda}$ 的对角元就是它的特征值。
由 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{\Lambda}$ 相似又知，$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{\Lambda}$ 的特征值相同。
所以 $\mathbf{\Lambda}$ 的对角元是 $\mathbf{A}$ 的特征值。

结论：$\mathbf{A}$ 的相似标准形是以 $\mathbf{A}$ 的特征值为对角元的对角矩阵。

注意：求 $\mathbf{A}$ 的相似标准形本质上就是求 $\mathbf{A}$ 的特征值。

3. 我们先举例说明不是所有方阵都可相似对角化，然后再给出方阵可相似对角化的条件及判定方法.

**例 8-5** 证明: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 不可相似对角化.

证明 反证法 显然，$\mathbf{A}$ 的特征值为 1,1.

**【注：上三角矩阵、下三角矩阵、对角矩阵的特征值就是它们的对角元】**

假设 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，则存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$ 为对角矩阵.

因为相似矩阵的特征值相同，所以 $\mathbf{\Lambda}$ 的特征值也为 1,1.

又因为对角矩阵的对角元是它的特征值，所以 $\mathbf{\Lambda}=\mathbf{E}$ .

由 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$ ，得 $\mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}\mathbf{E}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{E}$ ，

这与已知条件矛盾，所以 $\mathbf{A}$ 不可相似对角化.

4. 下面我们来讨论方阵可相似对角化的条件.

**下面的定理非常重要，结论和证明都要好好掌握。**

**定理 8-3** $n$ 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可相似对角化的充要条件是 $\mathbf{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

**证明** 必要性 因为 $\mathbf{A}$ 可相似对角化，所以存在可逆矩阵 $\mathbf{P}=\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n\right]$，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 为对角矩阵. 设 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ ，则有

$$\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

即 $$\mathbf{A}\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n\right]=\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n\right]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},.$$

$$\left[\mathbf{A}\mathbf{p}_1,\mathbf{A}\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{A}\mathbf{p}_n\right]=\left[\lambda_1\mathbf{p}_1,\lambda_2\mathbf{p}_2,\cdots,\lambda_n\mathbf{p}_n\right],$$

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i=\lambda_i\mathbf{p}_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

因为 $\mathbf{P}$ 为可逆矩阵，所以 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$ 都是非零向量且线性无关. 由性质 8-3 可知，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$ 是它们分别对应的特征向量.故 $\mathbf{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量.

**【从上面的证明可以得出结论：$\mathbf{P}=\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n\right]$ 的列向量是 $\mathbf{A}$ 的 $n$ 个线性无关的特征向量，$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 的对角元是 $\mathbf{A}$ 的 $n$ 个特征值，并且排列次序互相对应。这里说的互相对应是指：特征向量在 $\mathbf{P}$ 中排在第几个位置，对应的特征值也要在 $\mathbf{\Lambda}$ 中排在第几个位置】**

充分性 设 $\mathbf{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$ ,它们分别对应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$， 则有 $\mathbf{A}\mathbf{p}_1=\lambda_1\mathbf{p}_1$ , $\mathbf{A}\mathbf{p}_2=\lambda_2\mathbf{p}_2$ , $\cdots$, $\mathbf{A}\mathbf{p}_n=\lambda_n\mathbf{p}_n$.

令 $\mathbf{P}=\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n\right]$，则有

$$\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{A}\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n\right]=\left[\mathbf{A}\mathbf{p}_1,\mathbf{A}\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{A}\mathbf{p}_n\right]=\left[\lambda_1\mathbf{p}_1,\lambda_2\mathbf{p}_2,\cdots,\lambda_n\mathbf{p}_n\right]$$

$$=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\mathbf{P}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

$$\mathbf{AP}=\mathbf{P}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

由 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$ 线性无关可知，$\mathbf{P}$ 可逆. 于是得出 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，所以 $\mathbf{A}$ 可相似对角化.

【从充分性的证明可以看出：当 $\mathbf{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$ 时，只要令 $\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n]$，则 $\mathbf{P}$ 一定可逆，一定有 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$】

5. 从定理 8-3 的证明可得出下面的结论【该结论非常重要】:

用来把 $\mathbf{A}$ 相似对角化的相似变换矩阵 $\mathbf{P}$ 是以 $\mathbf{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量为列所构成的矩阵，所化为的对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 的对角元恰为 $\mathbf{A}$ 的 $n$ 个特征值，并且特征值在 $\mathbf{\Lambda}$ 中的排列次序与特征向量在 $\mathbf{P}$ 中的排列次序相对应.

注：通过求方程组 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系可找到 $\lambda_i$ 对应的线性无关的特征向量。

6. **推论 8-2** 若 $n$ 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值都是单特征值，则 $\mathbf{A}$ 可相似对角化.

**证**：设 $\mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都是单特征值，

$\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$ 是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 对应的特征向量，

【注：在上一节讲过，每个特征值都能对应出特征向量。】

根据定理 8-1 可知，相异特征值对应的特征向量一定无关，

因而 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots,\mathbf{p}_n$ 一定线性无关。

这样，$\mathbf{A}$ 就有 $n$ 个线性无关的特征向量，再根据定理 8-3 可知，$\mathbf{A}$ 一定相似对角化.

7. 为了对 $\mathbf{A}$ 有重特征值的情况加以研究，我们先讲一个定理。

**定理 8-4** 方阵 $\mathbf{A}$ 的每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数一定小于或等于它的重数. 也就是说，每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数不会超过它的重数。

关于该定理的证明可以看教材或视频，下面重点讲一下关于这个定理的理解。

**例** 2 是 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3&3\\0&2&3\\0&0&2\end{bmatrix}$ 的三重特征值，由于 $r(2\mathbf{E}-\mathbf{A})=r\left(\begin{bmatrix}0&-3&-3\\0&0&-3\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=2$，所以方程组 $(2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系只含一个向量，2 只对应出一个线性无关的特征向量。

注：齐次方程组$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系所含向量的个数为$n-r(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})$【第六章定理 6-3 的结论】

按照上面的方法进行讨论还可知：

2 也是$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&3&3\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$和$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$的三重特征值，2 对应的线性无关的特征向量的个数分别为 2 个和 3 个。

可见，同样是三重特征值，但是对应的线性无关特征向量的个数可以是 1 个，2 个或 3 个。

**例** 设$\mathbf{A}$为三阶方阵，$\alpha$为三元非零列向量，$\mathbf{A}\alpha=-\alpha$，$r(5\mathbf{E}-\mathbf{A})=1$，求$\mathbf{A}$的特征值。

**解：** 由$\mathbf{A}\alpha=-\alpha$及性质 8-3 可知，$-1$是$\mathbf{A}$的特征值。

$r(5\mathbf{E}-\mathbf{A})=1\Rightarrow|5\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$，5 是$\mathbf{A}$的特征值。

由$r(5\mathbf{E}-\mathbf{A})=1$可知，方程组$(5\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系含 2 个向量，5 对应出 2 个线性无关的特征向量，根据定理 8-4 可知，5 至少是$\mathbf{A}$的 2 重特征值。

因为三阶方阵$\mathbf{A}$总共有 3 个特征值，所以 5 就是$\mathbf{A}$的 2 重特征值。

综合上面的讨论可知，$\mathbf{A}$的特征值为$-1,5,5$.

8. **定理 8-5** $n$阶方阵$\mathbf{A}$可相似对角化的充要条件是$\mathbf{A}$的每个特征值所对应的线性无关特征向量的个数都恰好等于其重数.

**证明** 设$\mathbf{A}$的互异特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，重数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_m$,则

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{n_m}$$

因为$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|$的次数为$n$，所以$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$.

**注：特征值的重数之和等于$n$.**

充分性　根据定理 8-2，若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$对应的线性无关特征向量的个数都恰好等于其重数，则合并起来正好有$n$个线性无关的特征向量。再根据定理 8-3 可知，$\mathbf{A}$可相似对角化.

必要性　因为$\mathbf{A}$可相似对角化，所以存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}$为对角矩阵. $\mathbf{\Lambda}$的$n$个对角元为$\mathbf{A}$的全部特征值，其中有$n_i$个$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$. 由于$\mathbf{P}$中与$\lambda_i$相对应的$n_i$个列向量为$\lambda_i$对应的线性无关的特征向量，由定理 8-4 还知$\lambda_i$最多只能对应出$n_i$个线性无关的特征向量，所以$\lambda_i$所对应的线性无关特征向量的个数恰好等于其重数$n_i$.

9. 由$(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系中所含向量的个数等于$n-r(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})$,可得：

**推论 8-3** $n$阶方阵$\mathbf{A}$可相似对角化的充要条件是每个特征值$\lambda_i$都满足$r(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})=n-n_i$，

其中，$n_i$ 为 $\lambda_i$ 的重数.

证 　　　　$n$ 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可相似对角化

$\overset{\text{定理8-5}}{\Leftrightarrow}$ $\lambda_i$ 对应出 $n_i$ 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系含 $n_i$ 个向量

$\Leftrightarrow$ $n-r(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})=n_i$

$\Leftrightarrow$ $r(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})=n-n_i$

10. 例　当$k$取何值时，方阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&-2&k\\1&0&2\\0&0&1\end{bmatrix}$可相似对角化？

解　$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&-k\\-1&\lambda&-2\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-3&2\\-1&\lambda\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)\ =(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=1$(2重），$\lambda_2$=2（单）

要使$\mathbf{A}$可相似对角化，$\lambda_1$需对应出2个线性无关的特征向量，需$r(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})=1$.

因为$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&2&-k\\-1&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&1&-2\\-2&2&-k\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&1&-2\\0&0&4-k\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以$k=4$.

**注意**　讨论方阵 $\mathbf{A}$ 是否可相似对角化时，要对每一个重特征值加以讨论，看是否满足定理 8-5 的条件。由于单特征值一定能对应出一个线性无关的特征向量，所以单特征值不需讨论.

**例 8-6**　设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}$,

（1）求一个可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 为对角矩阵，并写出该对角矩阵.

(2) 求 $\mathbf{A}^k$,其中 $k$ 为正整数.

**解**　（1）$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&1\\-1&\lambda-2&1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&1\\-(\lambda-1)&\lambda-1&0\\-(\lambda-1)&0&\lambda-1\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

由$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$求得$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=2$（单）.

对于$\lambda_1=1$，$\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

$(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$化简成$-x_1-x_2+x_3=0$, 即$x_1=-x_2+x_3$

【注：把$x_2,x_3$作为自由未知数】

齐次线性方程组$(\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系为$\mathbf{p}_1=[-1,1,0]^T$，$\mathbf{p}_2=[1,0,1]^T$ .

注：$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$是$\lambda_1=1$对应的线性无关的特征向量。

对于$\lambda_2=2$，$\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1-r_2}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

$(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$化简成$\begin{cases}-x_2+x_3=0\\ -x_1+x_3=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x_2=x_3\\ x_1=x_3\end{cases}$

【注：把$x_3$作为自由未知数】

齐次线性方程组$(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系为$\mathbf{p}_3=[1,1,1]^T$

注：　$\mathbf{p}_3$是$\lambda_2=2$对应的线性无关的特征向量。

令$\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, 则$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$.

（2）根据相似变换的性质可知，$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}^k$，其中,$\mathbf{\Lambda}$为前面所求得的对角矩阵.

故

$$\mathbf{A}^k=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2^k & 2^k-1 & 1-2^k \\ 2^k-1 & 2^k & 1-2^k \\ 2^k-1 & 2^k-1 & 2-2^k \end{bmatrix}.$$

**对于例 8-6，我们做一些知识扩展：**

（1）因为 $\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$ 是 $\lambda_1=1$ 对应的线性无关特征向量，所以当 $k_1$，$k_2$ 不全为 0 时，$k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2$ 也是 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量。

证：$\begin{cases}\mathbf{Ap}_1=\lambda_1\mathbf{p}_1\\ \mathbf{Ap}_2=\lambda_1\mathbf{p}_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{A}(k_1\mathbf{p}_1)=\lambda_1(k_1\mathbf{p}_1)\\ \mathbf{A}(k_2\mathbf{p}_2)=\lambda_1(k_2\mathbf{p}_2)\end{cases} \overset{\text{两式相加}}{\Rightarrow} \mathbf{A}(k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2)=\lambda_1(k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2)$

由线性无关的定义可知，当 $k_1$，$k_2$ 不全为 0 时，$k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2\neq\mathbf{0}$

根据性质 8-3 可知，$k_1\mathbf{p}_1+k_2\mathbf{p}_2$ 也是 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量。

（2）因为 $\mathbf{p}_3$ 是 $\lambda_2=2$ 对应的特征向量，所以当 $k\neq 0$ 时，$k\mathbf{p}_3$ 也是 $\lambda_2=2$ 对应的特征向量。

证：$\mathbf{Ap}_3=\lambda_2\mathbf{p}_3 \Rightarrow \mathbf{A}(k\mathbf{p}_3)=\lambda_2(k\mathbf{p}_3)$

根据性质 8-3 可知，当 $k\neq 0$ 时，$k\mathbf{p}_3$ 也是 $\lambda_2=2$ 对应的特征向量。

（3）因为 $\mathbf{A}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3)\neq\lambda_1(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3)$，$\mathbf{A}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3)\neq\lambda_2(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3)$，所以 $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3$ 不是特征向量。

注：不同的特征值对应的特征向量的线性组合就不再是特征向量了。

（4）若令 $\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_2]$，则有 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{bmatrix}$

注：特征向量的位置变了，对应的特征值的位置也要变。

（5）若令 $\mathbf{P}=[2\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2,3\mathbf{p}_3]$，则有 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$

（6）若令 $\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2,3\mathbf{p}_3]$，则有 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$

注：$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2$ 仍然是是 $\lambda_1=1$ 对应的线性无关特征向量。