第　八　讲

解析函数的Laurent展开

北京大学　物理学院
数学物理方法课程组

2007年春

讲授要点

1. Laurent展开
   - 展开定理
   - 举例
   - 多值函数的Laurent展开
2. 单值函数的孤立奇点
   - 孤立奇点
   - 孤立奇点的分类
   - 函数在无穷远处的奇异性
3. 解析延拓
   - 一个例子
   - 解析延拓的概念

讲授要点

1. Laurent展开
   - 展开定理
   - 举例
   - 多值函数的Laurent展开
2. 单值函数的孤立奇点
   - 孤立奇点
   - 孤立奇点的分类
   - 函数在无穷远处的奇异性
3. 解析延拓
   - 一个例子
   - 解析延拓的概念

讲授要点

1. Laurent展开
   - 展开定理
   - 举例
   - 多值函数的Laurent展开
2. 单值函数的孤立奇点
   - 孤立奇点
   - 孤立奇点的分类
   - 函数在无穷远处的奇异性
3. 解析延拓
   - 一个例子
   - 解析延拓的概念

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§5.4 — 5.7
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§3.5, 3.4
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§3.4, 3.5

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§5.4 — 5.7
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§3.5, 3.4
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§3.4, 3.5

References

- 吴崇试，《数学物理方法》，§5.4 — 5.7
- 梁昆淼，《数学物理方法》，§3.5, 3.4
- 胡嗣柱、倪光炯，《数学物理方法》，§3.4, 3.5

解析函数的Laurent展开

- 一个函数除了可在解析点作Taylor展开外，有时还需要将它在奇点附近展开成幂级数
- 这就是Laurent展开

解析函数的Laurent展开

- 一个函数除了可在解析点作Taylor展开外，有时还需要将它在奇点附近展开成幂级数
- 这就是Laurent展开

解析函数的Laurent展开

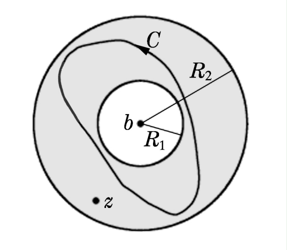
- 一个函数除了可在解析点作Taylor展开外，有时还需要将它在奇点附近展开成幂级数
- 这就是Laurent展开

讲授要点

1. Laurent展开
   - 展开定理
   - 举例
   - 多值函数的Laurent展开
2. 单值函数的孤立奇点
   - 孤立奇点
   - 孤立奇点的分类
   - 函数在无穷远处的奇异性
3. 解析延拓
   - 一个例子
   - 解析延拓的概念

展开定理(Laurent)

设函数$f(z)$在以b为圆心的环形区域$R_1 \le |z-b| \le R_2$上单值解析，则对于环域内的任何z点，$f(z)$可以展开为Laurent级数



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \quad R_1 < |z-b| < R_2$$

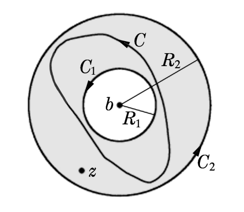
$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

C是环域内绕内圆一周的任意一条闭合曲线

展开定理(Laurent)　　(要点)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \qquad R_1<|z-b|<R_2$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



将环域的内外边界分别记为C_1和C_2，根据复连通区域的Cauchy积分公式，对于环形区域内的任意一点z，有

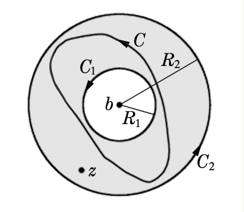
$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

下面分别计算沿C_1和C_2的积分

展开定理(Laurent)　　(要点)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \qquad R_1<|z-b|<R_2$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



将环域的内外边界分别记为C_1和C_2，根据复连通区域的Cauchy积分公式，对于环形区域内的任意一点z，有

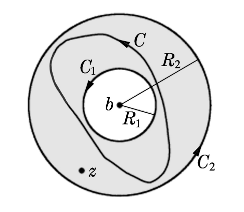
$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

下面分别计算沿C_1和C_2的积分

展开定理(Laurent) (要点)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \quad R_1 < |z-b| < R_2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$



将环域的内外边界分别记为C_1和C_2，根据复连通区域的Cauchy积分公式，对于环形区域内的任意一点z，有

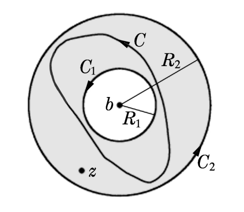
$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

下面分别计算沿C_1和C_2的积分

展开定理(Laurent)　　(要点)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \qquad R_1<|z-b|<R_2$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



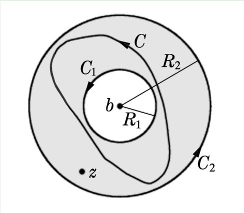
对于沿C_1的积分

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(z-b)-(\zeta-b)}\mathrm{d}\zeta$$

展开定理(Laurent)（要点）

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \qquad R_1<|z-b|<R_2$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



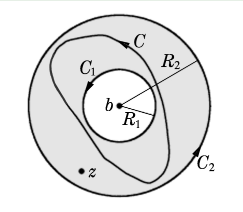
对于沿C_1的积分

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{z-b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-b}{z-b}\right)^k\mathrm{d}\zeta$$

展开定理(Laurent) (要点)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \qquad R_1<|z-b|<R_2$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



对于沿C_1的积分

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{z-b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-b}{z-b}\right)^k\mathrm{d}\zeta$$

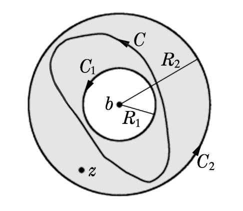
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1} f(\zeta)(\zeta-b)^k\mathrm{d}\zeta\right](z-b)^{-k-1}$$

$$(|z-b|>R_1)$$

展开定理(Laurent) (要点)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \qquad R_1 < |z-b| < R_2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$



对于沿C_1的积分

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{z-b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-b}{z-b}\right)^k \mathrm{d}\zeta$$

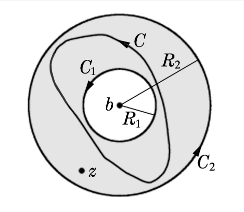
$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta\right] (z-b)^{-n}$$

$$(|z-b| > R_1)$$

展开定理(Laurent)　　(要点)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \qquad R_1<|z-b|<R_2$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



对于沿C_2的积分，可直接引用Taylor展开的结果

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-b}{\zeta-b}\right)^n\mathrm{d}\zeta$$

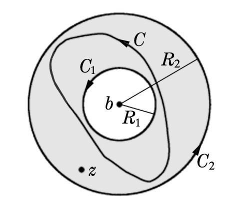
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-b)^n$$

$$(|z-b|<R_2)$$

展开定理(Laurent)　　（要点）

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \qquad R_1<|z-b|<R_2$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



将两部分合并起来，就有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \qquad (R_1<|z-b|<R_2)$$

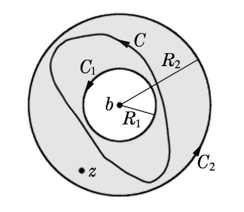
$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

积分路径统一写成了C，为什么能这样?

展开定理(Laurent) (要点)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \quad R_1<|z-b|<R_2$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$



将两部分合并起来，就有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n \qquad (R_1<|z-b|<R_2)$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

积分路径统一写成了C，为什么能这样?

讨论

1. Laurent展开的条件也可以放宽为$f(z)$在环形区域$R_1<|z-b|<R_2$内单值解析即可
2. Laurent展开的系数(即使是正幂项的系数)

$$a_n \neq \frac{1}{n!}f^{(n)}(b)$$

讨论

❶ Laurent展开的条件也可以放宽为$f(z)$在环形区域$R_1<|z-b|<R_2$内单值解析即可

❷ Laurent展开的系数(即使是正幂项的系数)

$$a_n \neq \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)$$

讨论

3. $f(z)$在C_1内不解析
   - 一般说来，在C_1上有奇点
   - 至于b点，可能是$f(z)$的奇点，也可能是$f(z)$的解析点
   - 如果b点是C_1内的唯一奇点，则C_1可以无限缩小，收敛范围就变成$0<|z-b|<R$，这时就得到$f(z)$在孤立奇点b的邻域内的Laurent展开

讨论

❸ $f(z)$在C_1内不解析

- 一般说来，在C_1上有奇点
- 至于b点，可能是$f(z)$的奇点，也可能是$f(z)$的解析点
- 如果b点是C_1内的唯一奇点，则C_1可以无限缩小，收敛范围就变成$0 < |z - b| < R$．这时就得到$f(z)$在孤立奇点b的邻域内的Laurent展开

讨论

3. $f(z)$在C_1内不解析
   - 一般说来，在C_1上有奇点
   - 至于b点，可能是$f(z)$的奇点，也可能是$f(z)$的解析点
   - 如果b点是C_1内的唯一奇点，则C_1可以无限缩小，收敛范围就变成$0 < |z-b| < R$．这时就得到$f(z)$在孤立奇点b的邻域内的Laurent展开

讨论

3. $f(z)$在C_1内不解析
   - 一般说来，在C_1上有奇点
   - 至于b点，可能是$f(z)$的奇点，也可能是$f(z)$的解析点
   - 如果b点是C_1内的唯一奇点，则C_1可以无限缩小，收敛范围就变成$0 < |z-b| < R$．这时就得到$f(z)$在孤立奇点b的邻域内的Laurent展开

讨论

❹ $f(z)$在C_2外不解析

- 一般说来，在C_2上有奇点
- 外圆C_2的半径也可以为∞，甚至在∞点也收敛

讨论

❹ $f(z)$在C_2外不解析

- 一般说来，在C_2上有奇点
- 外圆C_2的半径也可以为∞，甚至在∞点也收敛

讨论

❹ $f(z)$在C_2外不解析

- 一般说来，在C_2上有奇点
- 外圆C_2的半径也可以为∞，甚至在∞点也收敛

讨论

❺ Laurent展开既有正幂项，又有负幂项

- 正幂项在圆C_2内($|z-b|<R_2$)绝对收敛，在C_2内的任意一个闭区域中一致收敛，称为Laurent级数的正则部分

- 负幂项在圆C_1外($|z-b|>R_1$)绝对收敛，在C_1外的任意一个闭区域中一致收敛，称为Laurent级数的主要部分

讨论

❺ Laurent展开既有正幂项，又有负幂项

- 正幂项在圆C_2内($|z-b|<R_2$)绝对收敛，在C_2内的任意一个闭区域中一致收敛， 称为Laurent级数的正则部分
- 负幂项在圆C_1外($|z-b|>R_1$)绝对收敛，在C_1外的任意一个闭区域中一致收敛， 称为Laurent级数的主要部分

讨论

5 Laurent展开既有正幂项，又有负幂项

- 正幂项在圆C_2内$(|z-b|<R_2)$绝对收敛，在C_2内的任意一个闭区域中一致收敛，称为Laurent级数的正则部分
- 负幂项在圆C_1外$(|z-b|>R_1)$绝对收敛，在C_1外的任意一个闭区域中一致收敛，称为Laurent级数的主要部分

讨论

5. Laurent展开既有正幂项，又有负幂项

- 两部分合起来，就构成Laurent级数，在环域$R_1 < |z-b| < R_2$内绝对收敛，在环域内的任意一个闭区域中一致收敛
- 当$R_1 = 0$时，Laurent级数的主要部分就完全反映了$f(z)$在$z=b$点的奇异性

讨论

❺ Laurent展开既有正幂项，又有负幂项

- 两部分合起来，就构成Laurent级数，在环域 $R_1 < |z-b| < R_2$ 内绝对收敛，在环域内的任意一个闭区域中一致收敛
- 当 $R_1 = 0$ 时，Laurent级数的主要部分就完全反映了 $f(z)$ 在 $z = b$ 点的奇异性

讨论

❻ Taylor展开的唯一性

设$f(z)$在$R_1<|z-b|<R_2$内有两个Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n'(z-b)^n$$

两端同乘以$(z-b)^{-k-1}$，沿环域内绕内圆一周的任一围道C积分(这两个级数在围道上显然一致收敛，因而可以逐项积分)

则由于$\oint_C (z-b)^{n-k-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\delta_{nk}$，故有$a_k=a_k'$

因为k任意，故有　$a_k=a_k'$　$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ □

讨论

❻ Taylor展开的唯一性

设$f(z)$在$R_1<|z-b|<R_2$内有两个Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a'_n(z-b)^n$$

两端同乘以$(z-b)^{-k-1}$，沿环域内绕内圆一周的任一围道C积分(这两个级数在围道上显然一致收敛，因而可以逐项积分)

则由于$\oint_C(z-b)^{n-k-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\delta_{nk}$，故有$a_k=a'_k$

因为k任意，故有 $a_k=a'_k$ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ □

讨论

❻ Taylor展开的唯一性

设$f(z)$在$R_1<|z-b|<R_2$内有两个Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a'_n(z-b)^n$$

两端同乘以$(z-b)^{-k-1}$，沿环域内绕内圆一周的任一围道C积分(这两个级数在围道上显然一致收敛，因而可以逐项积分)

则由于$\oint_C (z-b)^{n-k-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\delta_{nk}$，故有$a_k=a'_k$

因为k任意，故有 $a_k=a'_k \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ $\square$

讨论

❻ Taylor展开的唯一性

设$f(z)$在$R_1<|z-b|<R_2$内有两个Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a'_n(z-b)^n$$

两端同乘以$(z-b)^{-k-1}$，沿环域内绕内圆一周的任一围道C积分(这两个级数在围道上显然一致收敛，因而可以逐项积分)

则由于$\oint_C(z-b)^{n-k-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\delta_{nk}$，故有$a_k=a'_k$

因为k任意，故有 $a_k=a'_k\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ □

讨论

❻ Taylor展开的唯一性

设$f(z)$在$R_1<|z-b|<R_2$内有两个Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n'(z-b)^n$$

两端同乘以$(z-b)^{-k-1}$，沿环域内绕内圆一周的任一围道C积分(这两个级数在围道上显然一致收敛，因而可以逐项积分)

则由于$\oint_C(z-b)^{n-k-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\delta_{nk}$，故有$a_k=a_k'$

因为k任意，故有 $a_k=a_k'$ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ □

评述

Laurent展开的唯一性告诉我们

- 不论用什么方法，得到的$f(z)$在同一个环形区域内的Laurent展开是唯一的
- 如果(在同环域的)两个Taylor级数相等，则可以逐项比较系数

评述

Laurent展开的唯一性告诉我们

- 不论用什么方法，得到的$f(z)$在同一个环形区域内的Laurent展开是唯一的
- 如果(在同环域的)两个Taylor级数相等，则可以逐项比较系数

在无穷远点的Laurent展开

如果无穷远点是函数$f(z)$的奇点，而在无穷远点的邻域内单值解析的话， 则可将$f(z)$在∞点的邻域内作Laurent展开(有时就简单地说成在 ∞点作Laurent展开)

- 所谓$f(z)$在∞点的邻域内(∞点除外)单值解析，就意味着作变换$t=1/z$， 函数$f(1/t)$在$t=0$点的邻域内($t=0$除外)单值解析，因而

$$f(1/t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \qquad 0<|t|<r$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \qquad 1/r<|z|<\infty$$

在无穷远点的Laurent展开

如果无穷远点是函数$f(z)$的奇点，而在无穷远点的邻域内单值解析的话，则可将$f(z)$在∞点的邻域内作Laurent展开(有时就简单地说成在 ∞点作Laurent展开)

- 所谓$f(z)$在∞点的邻域内(∞点除外)单值解析，就意味着作变换$t = 1/z$，函数$f(1/t)$在$t = 0$点的邻域内($t = 0$除外)单值解析，因而

$$f(1/t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \qquad 0 < |t| < r$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \qquad 1/r < |z| < \infty$$

在无穷远点的Laurent展开

$$f(1/t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nt^n \qquad 0<|t|<r$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^{-n} \qquad 1/r<|z|<\infty$$

- 收敛范围可以看成是以∞点为圆心的环域
- $f(1/t)$在$t=0$的Laurent级数中正幂项(包括常数项)部分是正则部分，负幂项是主要部分
- $f(z)$在$z=\infty$点邻域内的Laurent级数中，z的负幂项称为正则部分，正幂项称为主要部分
- 正幂项完全反映了函数$f(z)$在∞点的奇异性

在无穷远点的Laurent展开

$$f(1/t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n t^n \qquad 0<|t|<r$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^{-n} \qquad 1/r<|z|<\infty$$

- 收敛范围可以看成是以∞点为圆心的环域
- $f(1/t)$在$t=0$的Laurent级数中正幂项(包括常数项)部分是正则部分，负幂项是主要部分
- $f(z)$在$z=\infty$点邻域内的Laurent级数中，z的负幂项称为正则部分，正幂项称为主要部分
- 正幂项完全反映了函数$f(z)$在∞点的奇异性

在无穷远点的Laurent展开

$$f(1/t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \qquad 0 < |t| < r$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \qquad 1/r < |z| < \infty$$

- 收敛范围可以看成是以∞点为圆心的环域
- $f(1/t)$在$t=0$的Laurent级数中正幂项(包括常数项)部分是正则部分，负幂项是主要部分
- $f(z)$在$z=\infty$点邻域内的Laurent级数中，z的负幂项称为正则部分，正幂项称为主要部分
- 正幂项完全反映了函数$f(z)$在∞点的奇异性

在无穷远点的Laurent展开

$$f(1/t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \qquad 0 < |t| < r$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \qquad 1/r < |z| < \infty$$

- 收敛范围可以看成是以∞点为圆心的环域
- $f(1/t)$在$t=0$的Laurent级数中正幂项(包括常数项)部分是正则部分，负幂项是主要部分
- $f(z)$在$z=\infty$点邻域内的Laurent级数中，z的负幂项称为正则部分，正幂项称为主要部分
- 正幂项完全反映了函数$f(z)$在∞点的奇异性

讲授要点

1. Laurent展开
   - 展开定理
   - 举例
   - 多值函数的Laurent展开
2. 单值函数的孤立奇点
   - 孤立奇点
   - 孤立奇点的分类
   - 函数在无穷远处的奇异性
3. 解析延拓
   - 一个例子
   - 解析延拓的概念

- 求Laurent展开，可以直接利用公式求系数(这时要计算围道积分，一般比较麻烦)．除此之外，没有求Laurent展开的特殊方法
- 由于函数在给定环域内的Laurent展开是唯一的，因此，不论用什么方法，只要得到了在这个环域内收敛到$f(z)$的幂级数，那它就一定是$f(z)$的Laurent展开
- Taylor展开中讲过的方法，以及有关的结果，都可以应用来求Laurent展开

- 求Laurent展开，可以直接利用公式求系数(这时要计算围道积分，一般比较麻烦)．除此之外， 没有求Laurent展开的特殊方法
- 由于函数在给定环域内的Laurent展开是唯一的，因此，不论用什么方法， 只要得到了在这个环域内收敛到$f(z)$的幂级数，那它就一定是$f(z)$的Laurent展开
- Taylor展开中讲过的方法，以及有关的结果，都可以应用来求Laurent展开

- 求Laurent展开，可以直接利用公式求系数(这时要计算围道积分，一般比较麻烦)．除此之外，没有求Laurent展开的特殊方法
- 由于函数在给定环域内的Laurent展开是唯一的，因此，不论用什么方法，只要得到了在这个环域内收敛到$f(z)$的幂级数，那它就一定是$f(z)$的Laurent展开
- Taylor展开中讲过的方法，以及有关的结果，都可以应用来求Laurent展开

例8.1　求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式

方法1　$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开形式一定是$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 所以

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1$$

例8.1　求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式

方法1　$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开形式一定是$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 所以

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1$$

例8.1　求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式

方法1　$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开形式一定是$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 所以

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1$$

例8.1 求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式

方法1 $\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开形式一定是$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 所以

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1$$

例8.1　求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式

方法1　$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开形式一定是$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$．所以

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1$$

例8.1 求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式

方法1 $\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开形式一定是$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. 所以

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1$$

例8.1　求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式

方法2　用部分分式的方法

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}\\ &= -\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n\\ &= -\sum_{n=-1}^{\infty}z^n \qquad 0<|z|<1\end{aligned}$$

例8.1 求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式

方法2 用部分分式的方法

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}\\ &= -\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty} z^n\\ &= -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1\end{aligned}$$

例8.1　求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式

方法2　用部分分式的方法

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$$
$$= -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$
$$= -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1$$

例8.1 求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$内的展开式

方法2 用部分分式的方法

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}\\ &= -\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty} z^n\\ &= -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1\end{aligned}$$

例8.2 求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$|z|>1$内的展开式

此题中的函数与例8.1相同，但展开区域不同

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(1/z)} \\
&= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\
&= \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1
\end{aligned}$$

例8.2　求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$|z|>1$内的展开式

此题中的函数与例8.1相同，但展开区域不同

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(1/z)}\\ &= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\\ &= \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1\end{aligned}$$

例8.2　求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$|z|>1$内的展开式

此题中的函数与例8.1相同，但展开区域不同

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(1/z)} \\ &= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1\end{aligned}$$

例8.2　求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$|z|>1$内的展开式

此题中的函数与例8.1相同，但展开区域不同

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(1/z)} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1$$

例8.2 求$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$|z|>1$内的展开式

此题中的函数与例8.1相同，但展开区域不同

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(1/z)} \\ &= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1\end{aligned}$$

评述

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1$$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1$$

- 同一个函数在不同的区域内有不同的的Laurent展开式
- $1/z(z-1)$在$0<|z|<1$内的Laurent展开只有一个负幂项，而在$|z|>1$内的Laurent展开有无穷多个负幂项，却没有正幂项

评述

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \qquad 0<|z|<1$$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1$$

- 同一个函数在不同的区域内有不同的的Laurent展开式
- $1/z(z-1)$在$0<|z|<1$内的Laurent展开只有一个负幂项， 而在 $|z|>1$内的Laurent展开有无穷多个负幂项，却没有正幂项

评述

$$\frac{1}{z(z-1)} = \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1$$

- 这个级数既可以看成是函数在以$z=0$为心的环域$1<|z|<\infty$内的展开
- 也可以看成是函数在$z=\infty$邻域内的幂级数展开式
- 而且是函数在$z=\infty$邻域内的Taylor展开
- 事实上，函数$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$z=\infty$处解析

评述

$$\frac{1}{z(z-1)}=\sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1$$

- 这个级数既可以看成是函数在以$z=0$为心的环域$1<|z|<\infty$内的展开
- 也可以看成是函数在$z=\infty$邻域内的幂级数展开式
- 而且是函数在$z=\infty$邻域内的Taylor展开
- 事实上，函数$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$z=\infty$处解析

评述

$$\frac{1}{z(z-1)} = \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1$$

- 这个级数既可以看成是函数在以$z=0$为心的环域$1<|z|<\infty$内的展开
- 也可以看成是函数在$z=\infty$邻域内的幂级数展开式
- 而且是函数在$z=\infty$邻域内的Taylor展开
- 事实上，函数$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$z=\infty$处解析

评述

$$\frac{1}{z(z-1)} = \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n \qquad |z|>1$$

- 这个级数既可以看成是函数在以$z=0$为心的环域 $1<|z|<\infty$内的展开
- 也可以看成是函数在$z=\infty$邻域内的幂级数展开式
- 而且是函数在$z=\infty$邻域内的Taylor展开
- 事实上，函数$\dfrac{1}{z(z-1)}$在$z=\infty$处解析

例8.3 用待定系数法求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

【解】 $$\cot z=\sum_{n=-1}^{\infty}b_{2n+1}z^{2n+1}=\frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\therefore\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}z^{2n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}\sum_{l=0}^{\infty}b_{2l-1}z^{2l-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}b_{2l-1}z^{2(k+l)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^{n-l}}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}\right]z^{2n}$$

例8.3　用待定系数法求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

【解】

$$\cot z=\sum_{n=-1}^{\infty} b_{2n+1} z^{2n+1}=\frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}z^{2n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}\sum_{l=0}^{\infty} b_{2l-1} z^{2l-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}b_{2l-1}z^{2(k+l)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^{n-l}}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}\right]z^{2n}$$

例8.3 用待定系数法求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

【解】 $$\cot z=\sum_{n=-1}^{\infty}b_{2n+1}z^{2n+1}=\frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}z^{2n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}\sum_{l=0}^{\infty}b_{2l-1}z^{2l-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}b_{2l-1}z^{2(k+l)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^{n-l}}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}\right]z^{2n}$$

例8.3 用待定系数法求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

【解】
$$\cot z=\sum_{n=-1}^{\infty}b_{2n+1}z^{2n+1}=\frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}z^{2n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}\sum_{l=0}^{\infty}b_{2l-1}z^{2l-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}b_{2l-1}z^{2(k+l)}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^{n-l}}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}\right]z^{2n}$$

例8.3　求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

由此得到递推关系
$$\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^l}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}=\frac{1}{(2n)!}$$

令$n=0,1,2,\cdots$，逐次求解，即得

$$n=0 \qquad b_{-1}=1$$

$$n=1 \qquad \frac{1}{3!}b_{-1}-\frac{1}{1!}b_1=\frac{1}{2!} \qquad b_1=-\frac{1}{3}$$

$$n=2 \qquad \frac{1}{5!}b_{-1}-\frac{1}{3!}b_1+\frac{1}{1!}b_3=\frac{1}{4!} \qquad b_3=-\frac{1}{45}$$

$$n=3 \qquad \frac{1}{7!}b_{-1}-\frac{1}{5!}b_1+\frac{1}{3!}b_3-\frac{1}{1!}b_5=\frac{1}{6!} \qquad b_5=-\frac{2}{945}$$

$$\vdots$$

例8.3　求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

由此得到递推关系
$$\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^l}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}=\frac{1}{(2n)!}$$

令$n=0,1,2,\cdots$，逐次求解，即得

$$n=0 \qquad b_{-1}=1$$

$$n=1 \qquad \frac{1}{3!}b_{-1}-\frac{1}{1!}b_1=\frac{1}{2!} \qquad b_1=-\frac{1}{3}$$

$$n=2 \qquad \frac{1}{5!}b_{-1}-\frac{1}{3!}b_1+\frac{1}{1!}b_3=\frac{1}{4!} \qquad b_3=-\frac{1}{45}$$

$$n=3 \qquad \frac{1}{7!}b_{-1}-\frac{1}{5!}b_1+\frac{1}{3!}b_3-\frac{1}{1!}b_5=\frac{1}{6!} \qquad b_5=-\frac{2}{945}$$

$$\vdots$$

例8.3 求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

由此得到递推关系 $\displaystyle\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^l}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}=\frac{1}{(2n)!}$

令$n=0,1,2,\cdots$，逐次求解，即得

$n=0$ $\qquad b_{-1}=1$

$n=1$ $\qquad \dfrac{1}{3!}b_{-1}-\dfrac{1}{1!}b_1=\dfrac{1}{2!}$ $\qquad b_1=-\dfrac{1}{3}$

$n=2$ $\qquad \dfrac{1}{5!}b_{-1}-\dfrac{1}{3!}b_1+\dfrac{1}{1!}b_3=\dfrac{1}{4!}$ $\qquad b_3=-\dfrac{1}{45}$

$n=3$ $\qquad \dfrac{1}{7!}b_{-1}-\dfrac{1}{5!}b_1+\dfrac{1}{3!}b_3-\dfrac{1}{1!}b_5=\dfrac{1}{6!}$ $\qquad b_5=-\dfrac{2}{945}$

$\vdots$

例8.3 求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

由此得到递推关系 $\displaystyle\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^l}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}=\frac{1}{(2n)!}$

令$n=0,1,2,\cdots$，逐次求解，即得

$n=0$ $\qquad b_{-1}=1$

$n=1$ $\quad \displaystyle\frac{1}{3!}b_{-1}-\frac{1}{1!}b_1=\frac{1}{2!}$ $\qquad b_1=-\frac{1}{3}$

$n=2$ $\quad \displaystyle\frac{1}{5!}b_{-1}-\frac{1}{3!}b_1+\frac{1}{1!}b_3=\frac{1}{4!}$ $\qquad b_3=-\frac{1}{45}$

$n=3$ $\quad \displaystyle\frac{1}{7!}b_{-1}-\frac{1}{5!}b_1+\frac{1}{3!}b_3-\frac{1}{1!}b_5=\frac{1}{6!}$ $\qquad b_5=-\frac{2}{945}$

$\vdots$

例8.3　求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

由此得到递推关系 $\displaystyle\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^l}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}=\frac{1}{(2n)!}$

令$n=0,1,2,\cdots$，逐次求解，即得

$n=0$ $\qquad$ $b_{-1}=1$

$n=1$ $\qquad$ $\dfrac{1}{3!}b_{-1}-\dfrac{1}{1!}b_1=\dfrac{1}{2!}$ $\qquad$ $b_1=-\dfrac{1}{3}$

$n=2$ $\qquad$ $\dfrac{1}{5!}b_{-1}-\dfrac{1}{3!}b_1+\dfrac{1}{1!}b_3=\dfrac{1}{4!}$ $\qquad$ $b_3=-\dfrac{1}{45}$

$n=3$ $\qquad$ $\dfrac{1}{7!}b_{-1}-\dfrac{1}{5!}b_1+\dfrac{1}{3!}b_3-\dfrac{1}{1!}b_5=\dfrac{1}{6!}$ $\qquad$ $b_5=-\dfrac{2}{945}$

$\vdots$

例8.3 求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

由此得到递推关系 $$\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^l}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}=\frac{1}{(2n)!}$$

令$n=0,1,2,\cdots$，逐次求解，即得

$$n=0 \qquad\qquad b_{-1}=1$$

$$n=1 \qquad \frac{1}{3!}b_{-1}-\frac{1}{1!}b_1=\frac{1}{2!} \qquad\qquad b_1=-\frac{1}{3}$$

$$n=2 \qquad \frac{1}{5!}b_{-1}-\frac{1}{3!}b_1+\frac{1}{1!}b_3=\frac{1}{4!} \qquad\qquad b_3=-\frac{1}{45}$$

$$n=3 \qquad \frac{1}{7!}b_{-1}-\frac{1}{5!}b_1+\frac{1}{3!}b_3-\frac{1}{1!}b_5=\frac{1}{6!} \qquad\qquad b_5=-\frac{2}{945}$$

$\vdots$

例8.3 求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

由此得到递推关系 $\displaystyle\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^l}{(2n-2l+1)!}b_{2l-1}=\frac{1}{(2n)!}$

令$n=0,1,2,\cdots$，逐次求解，即得

$$
\begin{array}{lll}
n=0 & & b_{-1}=1 \\
n=1 & \dfrac{1}{3!}b_{-1}-\dfrac{1}{1!}b_1=\dfrac{1}{2!} & b_1=-\dfrac{1}{3} \\
n=2 & \dfrac{1}{5!}b_{-1}-\dfrac{1}{3!}b_1+\dfrac{1}{1!}b_3=\dfrac{1}{4!} & b_3=-\dfrac{1}{45} \\
n=3 & \dfrac{1}{7!}b_{-1}-\dfrac{1}{5!}b_1+\dfrac{1}{3!}b_3-\dfrac{1}{1!}b_5=\dfrac{1}{6!} & b_5=-\dfrac{2}{945} \\
\vdots & &
\end{array}
$$

例8.3　求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \cdots$$

根据$\cot z$的奇点分布，可判断此级数的收敛范围为$0<|z|<\pi$

☞ 还可以采用级数除法

▸▸ Example 4

例8.3　求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \cdots$$

根据$\cot z$的奇点分布，可判断此级数的收敛范围为$0<|z|<\pi$

☞ 还可以采用级数除法

Example 4

例8.3　求$\cot z$在$z=0$邻域内的Laurent展开

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \cdots$$

根据$\cot z$的奇点分布，可判断此级数的收敛范围为$0<|z|<\pi$

☞ 还可以采用级数除法

Example 4

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\cot z &= \left[z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left\{1 - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]\right. \\
&\qquad + \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^2 \\
&\qquad \left. - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^3 + - \cdots\right\}
\end{aligned}$$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\cot z &= \left[z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left\{1 - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]\right. \\
&\qquad + \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^2 \\
&\qquad \left. - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^3 + - \cdots\right\}
\end{aligned}$$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\cot z &= \left[z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left\{1 - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]\right. \\
&\qquad + \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^2 \\
&\qquad \left. - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^3 + - \cdots\right\}
\end{aligned}$$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\cot z &= \left[z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left\{1 - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]\right. \\
&\qquad + \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^2 \\
&\qquad \left. - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^3 + - \cdots\right\}
\end{aligned}$$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\cot z &= \left[z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left\{1 - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]\right. \\
&\quad + \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^2 \\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^3 + - \cdots\right\}
\end{aligned}$$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\cot z &= \left[z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left\{1 - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]\right. \\
&\quad + \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^2 \\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^3 + - \cdots\right\}
\end{aligned}$$

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

$$\begin{aligned}
\cot z &= \left[z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z}\left\{1 - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]\right. \\
&\qquad + \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^2 \\
&\qquad \left. - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]^3 + - \cdots\right\}
\end{aligned}$$

$$\cot z = \frac{1}{z}\left\{1 - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]\right.$$

$$+ \left[\frac{1}{9}z^4 + \frac{4}{45}z^6 + \cdots\right]$$

$$\left. - \left[\frac{1}{27}z^6 + \cdots\right] + - \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{z}\left\{1 - \frac{1}{3}z^2 + \left[-\frac{2}{15} + \frac{1}{9}\right]z^4\right.$$

$$\left. + \left[-\frac{17}{315} + \frac{4}{45} - \frac{1}{27}\right]z^6 + - \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{z}\left[1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 - \frac{2}{945}z^6 - \cdots\right]$$

$$\begin{aligned}\cot z = \frac{1}{z}\Bigg\{1 &- \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right] \\ &+ \left[\frac{1}{9}z^4 + \frac{4}{45}z^6 + \cdots\right] \\ &- \left[\frac{1}{27}z^6 + \cdots\right] + - \cdots\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \frac{1}{z}\Bigg\{1 - \frac{1}{3}z^2 &+ \left[-\frac{2}{15} + \frac{1}{9}\right]z^4 \\ &+ \left[-\frac{17}{315} + \frac{4}{45} - \frac{1}{27}\right]z^6 + - \cdots\Bigg\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z}\left[1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 - \frac{2}{945}z^6 - \cdots\right]$$

$$\cot z = \frac{1}{z}\left\{1 - \left[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right]\right.$$

$$+ \left[\frac{1}{9}z^4 + \frac{4}{45}z^6 + \cdots\right]$$

$$\left. - \left[\frac{1}{27}z^6 + \cdots\right] + - \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{z}\left\{1 - \frac{1}{3}z^2 + \left[-\frac{2}{15} + \frac{1}{9}\right]z^4\right.$$

$$\left. + \left[-\frac{17}{315} + \frac{4}{45} - \frac{1}{27}\right]z^6 + - \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{z}\left[1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 - \frac{2}{945}z^6 - \cdots\right]$$

$$\cot z = \frac{1}{z}\Big\{1 - \Big[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\Big]$$
$$+ \Big[\frac{1}{9}z^4 + \frac{4}{45}z^6 + \cdots\Big]$$
$$- \Big[\frac{1}{27}z^6 + \cdots\Big] + - \cdots\Big\}$$

$$= \frac{1}{z}\Big\{1 - \frac{1}{3}z^2 + \Big[-\frac{2}{15} + \frac{1}{9}\Big]z^4$$
$$+ \Big[-\frac{17}{315} + \frac{4}{45} - \frac{1}{27}\Big]z^6 + - \cdots\Big\}$$

$$= \frac{1}{z}\Big[1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 - \frac{2}{945}z^6 - \cdots\Big]$$

$$\begin{aligned}
\cot z = \frac{1}{z}\Big\{1 &- \Big[\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\Big] \\
&+ \Big[\frac{1}{9}z^4 + \frac{4}{45}z^6 + \cdots\Big] \\
&- \Big[\frac{1}{27}z^6 + \cdots\Big] + - \cdots\Big\} \\
= \frac{1}{z}\Big\{1 &- \frac{1}{3}z^2 + \Big[-\frac{2}{15} + \frac{1}{9}\Big]z^4 \\
&+ \Big[-\frac{17}{315} + \frac{4}{45} - \frac{1}{27}\Big]z^6 + - \cdots\Big\} \\
= \frac{1}{z}\Big[1 &- \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 - \frac{2}{945}z^6 - \cdots\Big]
\end{aligned}$$

例8.4 求$\exp\left\{\dfrac{z}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\right\}$在$0<|t|<\infty$内的Laurent展开

【解】 用级数乘法

$$e^{zt/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\frac{t^k}{k!} \qquad |t|<\infty$$

$$e^{-z/(2t)}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^l\frac{(-)^l}{l!}\left(\frac{1}{t}\right)^l \qquad \left|\frac{1}{t}\right|<\infty$$

即$|t|>0$

例8.4 求$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$在$0<|t|<\infty$内的Laurent展开

【解】 用级数乘法

$$e^{zt/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\frac{t^k}{k!} \qquad |t|<\infty$$

$$e^{-z/(2t)}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^l\frac{(-)^l}{l!}\left(\frac{1}{t}\right)^l \qquad \left|\frac{1}{t}\right|<\infty$$

即$|t|>0$

例8.4 求$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$在$0<|t|<\infty$内的Laurent展开

【解】 用级数乘法

$$e^{zt/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\frac{t^k}{k!}\qquad |t|<\infty$$

$$e^{-z/(2t)}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^l\frac{(-)^l}{l!}\left(\frac{1}{t}\right)^l\qquad \left|\frac{1}{t}\right|<\infty$$

即$|t|>0$

例8.4 求$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$在$0<|t|<\infty$内的Laurent展开

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\frac{t^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^l\frac{(-)^l}{l!}\left(\frac{1}{t}\right)^l$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{k!l!}\left(\frac{z}{2}\right)^{k+l}t^{k-l}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\right]t^n$$

$$+\sum_{n=-1}^{-\infty}\left[\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\right]t^n$$

例8.4　求$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$在$0<|t|<\infty$内的Laurent展开

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}\frac{t^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{l}\frac{(-)^l}{l!}\left(\frac{1}{t}\right)^{l}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{k!l!}\left(\frac{z}{2}\right)^{k+l}t^{k-l}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\right]t^n$$

$$+\sum_{n=-1}^{-\infty}\left[\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\right]t^n$$

例8.4 求$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$在$0<|t|<\infty$内的Laurent展开

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}\frac{t^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{l}\frac{(-)^l}{l!}\left(\frac{1}{t}\right)^{l}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{k!l!}\left(\frac{z}{2}\right)^{k+l}t^{k-l}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\right]t^n$$
$$+\sum_{n=-1}^{-\infty}\left[\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\right]t^n$$

例8.4 求$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$在$0<|t|<\infty$内的Laurent展开

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)t^n$$

其中

$$\mathrm{J}_n(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} & n=0,1,2,\cdots\\ \displaystyle\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$$

称为n阶Bessel函数

例8.4 求$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$在$0<|t|<\infty$内的Laurent展开

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)t^n$$

其中

$$\mathrm{J}_n(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} & n=0,1,2,\cdots\\ \displaystyle\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$$

称为n阶Bessel函数

评述

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)t^n \qquad 0<|t|<\infty$$

$$\mathrm{J}_n(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} & n=0,1,2,\cdots\\ \displaystyle\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$$

- 这是$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$在$t=0$点的Laurent展开
- 同时也是此函数在$t=\infty$的Laurent展开

评述

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)t^n \qquad 0<|t|<\infty$$

$$\mathrm{J}_n(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} & n=0,1,2,\cdots\\ \displaystyle\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n} & n=-1,-2,\cdots\end{cases}$$

- 这是$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$在$t=0$点的Laurent展开
- 同时也是此函数在$t=\infty$的Laurent展开

讲授要点

例8.5 求函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$1<|z|<2$内的幂级数展开

【解】本题中指定的展开区域是环形区域，所以，如果能作幂级数展开的话，得到的一定是Laurent级数

函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$有两个枝点：$z=1$和$z=2$，因此绝不可能在环域$1<|z|<2$内解析

结论：函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$不可能在$1<|z|<2$内作幂级数展开

例8.5　求函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$1<|z|<2$内的幂级数展开

【解】本题中指定的展开区域是环形区域，所以，如果能作幂级数展开的话，得到的一定是Laurent级数

函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$有两个枝点：$z=1$和$z=2$，因此绝不可能在环域$1<|z|<2$内解析

结论：函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$不可能在$1<|z|<2$内作幂级数展开

例8.5　求函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$1<|z|<2$内的幂级数展开

【解】本题中指定的展开区域是环形区域，所以，如果能作幂级数展开的话，得到的一定是Laurent级数

函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$有两个枝点：$z=1$和$z=2$，因此绝不可能在环域$1<|z|<2$内解析

结论：函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$不可能在$1<|z|<2$内作幂级数展开

例8.5　求函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$1<|z|<2$内的幂级数展开

【解】本题中指定的展开区域是环形区域，所以，如果能作幂级数展开的话，得到的一定是Laurent级数

函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$有两个枝点：$z=1$和$z=2$，因此绝不可能在环域$1<|z|<2$内解析

结论：函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$不可能在$1<|z|<2$内作幂级数展开

例8.5 求函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$1<|z|<2$内的幂级数展开

【解】本题中指定的展开区域是环形区域，所以，如果能作幂级数展开的话，得到的一定是Laurent级数

函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$有两个枝点：$z=1$和$z=2$，因此绝不可能在环域$1<|z|<2$内解析

结论：函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$不可能在$1<|z|<2$内作幂级数展开

例8.6 求$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$2<|z|<\infty$内的幂级数展开

【解】在环域$2<|z|<\infty$内，$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$单值解析，但必须明确规定单值分枝，方可作Laurent展开

例如，沿正实轴作割线，且规定割线上岸$\arg(z-2)-\arg(z-1)=\pi$，则

$$\ln\frac{z-2}{z-1}\bigg|_{z=\infty}=\ln\frac{1-2/z}{1-1/z}\bigg|_{z=\infty}=0$$

不妨取

$$\ln\left(1-\frac{2}{z}\right)\bigg|_{z=\infty}=\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)\bigg|_{z=\infty}=0$$

例8.6　求$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$2<|z|<\infty$内的幂级数展开

【解】在环域$2<|z|<\infty$内，$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$单值解析，但必须明确规定单值分枝，方可作Laurent展开

例如，沿正实轴作割线，且规定割线上岸
$\arg(z-2)-\arg(z-1)=\pi$，则

$$\ln\frac{z-2}{z-1}\bigg|_{z=\infty}=\ln\frac{1-2/z}{1-1/z}\bigg|_{z=\infty}=0$$

不妨取

$$\ln\left(1-\frac{2}{z}\right)\bigg|_{z=\infty}=\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)\bigg|_{z=\infty}=0$$

例8.6　求$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$2<|z|<\infty$内的幂级数展开

【解】在环域$2<|z|<\infty$内，$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$单值解析，但必须明确规定单值分枝，方可作Laurent展开

例如，沿正实轴作割线，且规定割线上岸$\arg(z-2)-\arg(z-1)=\pi$，则

$$\ln\frac{z-2}{z-1}\bigg|_{z=\infty}=\ln\frac{1-2/z}{1-1/z}\bigg|_{z=\infty}=0$$

不妨取

$$\ln\left(1-\frac{2}{z}\right)\bigg|_{z=\infty}=\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)\bigg|_{z=\infty}=0$$

例8.6　求$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$2<|z|<\infty$内的幂级数展开

【解】在环域$2<|z|<\infty$内，$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$单值解析，但必须明确规定单值分枝，方可作Laurent展开

例如，沿正实轴作割线，且规定割线上岸 $\arg(z-2)-\arg(z-1)=\pi$，则

$$\ln\frac{z-2}{z-1}\bigg|_{z=\infty}=\ln\frac{1-2/z}{1-1/z}\bigg|_{z=\infty}=0$$

不妨取

$$\ln\left(1-\frac{2}{z}\right)\bigg|_{z=\infty}=\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)\bigg|_{z=\infty}=0$$

例8.6　求$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$2<|z|<\infty$内的幂级数展开

$$\therefore \quad \ln\frac{z-2}{z-1}=\ln\left(1-\frac{2}{z}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

$$=\left[-\frac{2}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{z}\right)^3-\cdots\right]$$

$$-\left[-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\right)^3-\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{z}-\frac{3}{2}\frac{1}{z^2}-\frac{7}{3}\frac{1}{z^3}-\cdots-\frac{2^n-1}{n}\frac{1}{z^n}-\cdots$$

例8.6 求$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$2<|z|<\infty$内的幂级数展开

$$\therefore\quad \ln\frac{z-2}{z-1}=\ln\left(1-\frac{2}{z}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

$$=\left[-\frac{2}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{z}\right)^3-\cdots\right]$$

$$-\left[-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\right)^3-\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{z}-\frac{3}{2}\frac{1}{z^2}-\frac{7}{3}\frac{1}{z^3}-\cdots-\frac{2^n-1}{n}\frac{1}{z^n}-\cdots$$

例8.6　求$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$2<|z|<\infty$内的幂级数展开

$$\therefore \quad \ln\frac{z-2}{z-1} = \ln\left(1-\frac{2}{z}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{z}\right)$$
$$= \left[-\frac{2}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{z}\right)^3-\cdots\right]$$
$$-\left[-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\right)^3-\cdots\right]$$
$$= -\frac{1}{z}-\frac{3}{2}\frac{1}{z^2}-\frac{7}{3}\frac{1}{z^3}-\cdots-\frac{2^n-1}{n}\frac{1}{z^n}-\cdots$$

例8.6 求$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$2<|z|<\infty$内的幂级数展开

规定$\ln\dfrac{z-2}{z-1}\Big|_{z=\infty}=0$

$$\ln\frac{z-2}{z-1}=-\frac{1}{z}-\frac{3}{2}\frac{1}{z^2}-\frac{7}{3}\frac{1}{z^3}-\cdots$$
$$-\frac{2^n-1}{n}\frac{1}{z^n}-\cdots\qquad 2<|z|<\infty$$

☞ 此展开式也可以看成是函数$\ln\dfrac{z-2}{z-1}$在$z=\infty$点的Taylor展开

讲授要点

1. Laurent展开
   - 展开定理
   - 举例
   - 多值函数的Laurent展开
2. 单值函数的孤立奇点
   - 孤立奇点
   - 孤立奇点的分类
   - 函数在无穷远处的奇异性
3. 解析延拓
   - 一个例子
   - 解析延拓的概念

孤立奇点

设$f(z)$为单值函数(或多值函数的一个单值分枝)，b点是它的奇点．如果在b点存在一个邻域，在该邻域内(除b点外)，$f(z)$处处可导，则称b为$f(z)$的孤立奇点

非孤立奇点的例子

- 对于函数$\dfrac{1}{\sin(1/z)}$，$\dfrac{1}{z}=n\pi$ 即 $z=\dfrac{1}{n\pi}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$是它的奇点
- $z=0$是这些奇点的聚点：在$z=0$的任意一个邻域中，总存在无穷多个奇点
- 因此$z=0$是非孤立奇点

孤立奇点

设$f(z)$为单值函数(或多值函数的一个单值分枝)，b点是它的奇点．如果在b点存在一个邻域，在该邻域内(除b点外)，$f(z)$处处可导，则称b为$f(z)$的孤立奇点

非孤立奇点的例子

- 对于函数$\dfrac{1}{\sin(1/z)}$，$\dfrac{1}{z}=n\pi$ 即 $z=\dfrac{1}{n\pi}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$是它的奇点
- $z=0$是这些奇点的聚点：在$z=0$的任意一个邻域中，总存在无穷多个奇点
- 因此$z=0$是非孤立奇点

孤立奇点

设$f(z)$为单值函数(或多值函数的一个单值分枝)，b点是它的奇点．如果在b点存在一个邻域，在该邻域内(除b点外)，$f(z)$处处可导，则称b为$f(z)$的孤立奇点

非孤立奇点的例子

- 对于函数$\dfrac{1}{\sin(1/z)}$，$\dfrac{1}{z} = n\pi$ 即 $z = \dfrac{1}{n\pi}$，$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$是它的奇点
- $z = 0$是这些奇点的聚点：在$z = 0$的任意一个邻域中，总存在无穷多个奇点
- 因此$z = 0$是非孤立奇点

孤立奇点

设$f(z)$为单值函数(或多值函数的一个单值分枝)，b点是它的奇点．如果在b点存在一个邻域，在该邻域内(除b点外)，$f(z)$处处可导，则称b为$f(z)$的孤立奇点

非孤立奇点的例子

- 对于函数$\dfrac{1}{\sin(1/z)}$，$\dfrac{1}{z}=n\pi$ 即 $z=\dfrac{1}{n\pi}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$是它的奇点
- $z=0$是这些奇点的聚点：在$z=0$的任意一个邻域中，总存在无穷多个奇点
- 因此$z=0$是非孤立奇点

讲授要点

1. Laurent展开
   - 展开定理
   - 举例
   - 多值函数的Laurent展开
2. 单值函数的孤立奇点
   - 孤立奇点
   - 孤立奇点的分类
   - 函数在无穷远处的奇异性
3. 解析延拓
   - 一个例子
   - 解析延拓的概念

如果$z=b$是单值函数$f(z)$的孤立奇点，则一定存在一个环域$0<|z-b|<R$，在该环域内，$f(z)$可以展开成Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n$$

可能出现三种情况:

1. 级数展开式不含负幂项

如果$z=b$是单值函数$f(z)$的孤立奇点，则一定存在一个环域$0<|z-b|<R$，在该环域内，$f(z)$可以展开成Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n$$

可能出现三种情况：

1. 级数展开式不含负幂项

   b点称为$f(z)$的可去奇点

2. 级数展开式只含有限个负幂项

如果$z=b$是单值函数$f(z)$的孤立奇点，则一定存在一个环域$0<|z-b|<R$，在该环域内，$f(z)$可以展开成Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n$$

可能出现三种情况：

1. 级数展开式不含负幂项

   b点称为$f(z)$的可去奇点 Removal Singularity

2. 级数展开式只含有限个负幂项

   b点称为$f(z)$的极点 Pole Point

3. 级数展开式只有无穷多个负幂项

   b点称为$f(z)$的本性奇点

如果$z = b$是单值函数$f(z)$的孤立奇点，则一定存在一个环域$0 < |z - b| < R$，在该环域内，$f(z)$可以展开成Laurent级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - b)^n$$

可能出现三种情况：

1. 级数展开式不含负幂项

   b点称为$f(z)$的可去奇点 ▸ Removal Singularity

2. 级数展开式只含有限个负幂项

   b点称为$f(z)$的极点 ▸ Pole Point

3. 级数展开式只有无穷多个负幂项

   b点称为$f(z)$的本性奇点

如果$z=b$是单值函数$f(z)$的孤立奇点，则一定存在一个环域$0<|z-b|<R$，在该环域内，$f(z)$可以展开成Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n$$

可能出现三种情况：

1. 级数展开式不含负幂项
   b点称为$f(z)$的可去奇点 ▸ Removal Singularity
2. 级数展开式只含有限个负幂项
   b点称为$f(z)$的极点 ▸ Pole Point
3. 级数展开式只有无穷多个负幂项
   b点称为$f(z)$的本性奇点 ▸ Essential Singularity

如果$z=b$是单值函数$f(z)$的孤立奇点，则一定存在一个环域$0<|z-b|<R$，在该环域内，$f(z)$可以展开成Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n$$

可能出现三种情况：

1. 级数展开式不含负幂项

   b点称为$f(z)$的可去奇点 ▸ Removal Singularity

2. 级数展开式只含有限个负幂项

   b点称为$f(z)$的极点 ▸ Pole Point

3. 级数展开式只有无穷多个负幂项

   b点称为$f(z)$的本性奇点 ▸ Essential Singularity

如果$z=b$是单值函数$f(z)$的孤立奇点，则一定存在一个环域$0<|z-b|<R$，在该环域内，$f(z)$可以展开成Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n$$

可能出现三种情况：

1. 级数展开式不含负幂项
   b点称为$f(z)$的可去奇点 ▸ Removal Singularity
2. 级数展开式只含有限个负幂项
   b点称为$f(z)$的极点 ▸ Pole Point
3. 级数展开式只有无穷多个负幂项
   b点称为$f(z)$的本性奇点 ▸ Essential Singularity

如果$z=b$是单值函数$f(z)$的孤立奇点，则一定存在一个环域$0<|z-b|<R$，在该环域内，$f(z)$可以展开成Laurent级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n$$

可能出现三种情况：

1. 级数展开式不含负幂项
   b点称为$f(z)$的可去奇点 ▸ Removal Singularity
2. 级数展开式只含有限个负幂项
   b点称为$f(z)$的极点 ▸ Pole Point
3. 级数展开式只有无穷多个负幂项
   b点称为$f(z)$的本性奇点 ▸ Essential Singularity

可去奇点

举例

$z=0$就是函数

$$\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{2n} \qquad |z|<\infty$$

$$\frac{1}{z}-\cot z=\frac{1}{3}z+\frac{1}{45}z^3+\frac{2}{945}z^5+\cdots \qquad |z|<\pi$$

的可去奇点

函数在可去奇点处的行为

由于在可去奇点处，级数展开式中不含负幂项，故级数不只是在环域内收敛，而且在环域的中心，即可去奇点$z=b$处也收敛

$\Downarrow$

收敛区域是一个圆，圆心在可去奇点$z=b$，级数在收敛圆内的任一闭区域中一致收敛

$\Downarrow$

和函数连续 $$\lim_{z\to b} f(z) = \lim_{z\to b}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n = a_0$$

函数在可去奇点处的极限值是有限的

函数在可去奇点处的行为

由于在可去奇点处，级数展开式中不含负幂项，故级数不只是在环域内收敛，而且在环域的中心，即可去奇点$z=b$处也收敛

⇓

收敛区域是一个圆，圆心在可去奇点$z=b$，级数在收敛圆内的任一闭区域中一致收敛

⇓

和函数连续 $\lim\limits_{z\to b} f(z) = \lim\limits_{z\to b}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n = a_0$

函数在可去奇点处的极限值是有限的

函数在可去奇点处的行为

由于在可去奇点处，级数展开式中不含负幂项，故级数不只是在环域内收敛，而且在环域的中心，即可去奇点$z=b$处也收敛

$\Downarrow$

收敛区域是一个圆，圆心在可去奇点$z=b$，级数在收敛圆内的任一闭区域中一致收敛

$\Downarrow$

和函数连续
$$\lim_{z\to b} f(z) = \lim_{z\to b}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n = a_0$$
函数在可去奇点处的极限值是有限的

函数在可去奇点处的行为

$\Downarrow$

用此极限值作为$f(z)$的定义

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq b \\ \lim\limits_{z\to b} f(z) & z=b \end{cases}$$

这样得到的$F(z)$就在b点也解析

这正是可去奇点这一称谓的由来

函数在可去奇点处的行为

$\Downarrow$

用此极限值作为$f(z)$的定义

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq b \\ \lim\limits_{z\to b} f(z) & z = b \end{cases}$$

这样得到的$F(z)$就在b点也解析

这正是可去奇点这一称谓的由来

函数在可去奇点处的行为

函数在可去奇点处的极限值是有限的

反之，如果$z=b$是函数$f(z)$的孤立奇点，而且$f(z)$在$z=b$的邻域内有界，则$z=b$是$f(z)$的可去奇点

Return

函数在可去奇点处的行为

函数在可去奇点处的极限值是有限的

反之，如果$z=b$是函数$f(z)$的孤立奇点，而且$f(z)$在$z=b$的邻域内有界，则$z=b$是$f(z)$的可去奇点

Return

极点

函数在极点邻域内Laurent展开有有限个负幂项

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-b)^n \\
&= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \cdots \\
&\quad + a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + \cdots \\
&= (z-b)^{-m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \cdots\right] \\
&= (z-b)^{-m}\phi(z)
\end{aligned}
$$

$\phi(z)$在$z=b$点及其邻域内解析，$a_{-m}\neq 0$

b点就称为$f(z)$的m阶极点

极点

函数在极点邻域内Laurent展开有有限个负幂项

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-b)^n \\
&= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \cdots \\
&\quad + a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + \cdots \\
&= (z-b)^{-m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \cdots\right] \\
&= (z-b)^{-m}\phi(z)
\end{aligned}
$$

$\phi(z)$在$z=b$点及其邻域内解析，$a_{-m}\neq 0$

b点就称为$f(z)$的m阶极点

极点

函数在极点邻域内Laurent展开有有限个负幂项

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-b)^n \\
&= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \cdots \\
&\quad + a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + \cdots \\
&= (z-b)^{-m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \cdots\right] \\
&= (z-b)^{-m}\phi(z)
\end{aligned}
$$

$\phi(z)$在$z=b$点及其邻域内解析，$a_{-m}\neq 0$

b点就称为$f(z)$的m阶极点

极点

函数在极点邻域内Laurent展开有有限个负幂项

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-b)^n \\
&= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \cdots \\
&\quad + a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + \cdots \\
&= (z-b)^{-m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \cdots\right] \\
&= (z-b)^{-m}\phi(z)
\end{aligned}
$$

$\phi(z)$在$z=b$点及其邻域内解析，$a_{-m} \neq 0$

b点就称为$f(z)$的m阶极点

极点

函数在极点邻域内Laurent展开有有限个负幂项

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-b)^n \\
&= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \cdots \\
&\quad + a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + \cdots \\
&= (z-b)^{-m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \cdots\right] \\
&= (z-b)^{-m}\phi(z)
\end{aligned}$$

$\phi(z)$在$z=b$点及其邻域内解析，$a_{-m} \neq 0$

b点就称为$f(z)$的m阶极点

极点

函数在极点邻域内Laurent展开有有限个负幂项

$$
\begin{aligned}
f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-b)^n \\
&= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \cdots \\
&\quad + a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + \cdots \\
&= (z-b)^{-m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \cdots\right] \\
&= (z-b)^{-m}\phi(z)
\end{aligned}
$$

$\phi(z)$在$z=b$点及其邻域内解析，$a_{-m}\neq 0$

b点就称为$f(z)$的m阶极点

函数在极点处的行为

只要$|z-b|$足够小，$|f(z)|$可以大于任何正数，即

$$\lim_{n\to b} f(z)=\infty$$

函数在极点处的极限值是∞，或者说，函数在极点附近是无界的

反之，若b是$f(z)$的孤立奇点，且$\lim\limits_{z\to b} f(z)=\infty$，则$b$是$f(z)$的极点

(证明见下页)

函数在极点处的行为

只要$|z-b|$足够小，$|f(z)|$可以大于任何正数，即

$$\lim_{n\to b} f(z) = \infty$$

函数在极点处的极限值是∞，或者说，函数在极点附近是无界的

反之，若b是$f(z)$的孤立奇点，且$\lim\limits_{z\to b} f(z) = \infty$，则$b$是$f(z)$的极点

(证明见下页)

函数在极点处的行为

若b是$f(z)$的孤立奇点，且$\lim\limits_{z\to b} f(z)=\infty$，则$b$是$f(z)$的极点

因为$\lim\limits_{z\to b} f(z) = \infty$，故当$|z-b| < \delta$时

$$|f(z)| > M \quad \text{即} \quad \lim_{z\to b}\frac{1}{f(z)} = 0$$

于是可令 $\dfrac{1}{f(z)} = (z-b)^m g(z)$，其中

$\lim\limits_{z\to b} g(z) \neq 0$，且$g(z)$在$z=b$及其邻域内解析

所以 $f(z)=(z-b)^{-m}\cdot\dfrac{1}{g(z)}=(z-b)^{-m}\phi(z)$ □

函数在极点处的行为

若b是$f(z)$的孤立奇点，且$\lim\limits_{z\to b} f(z)=\infty$，
则b是$f(z)$的极点

因为$\lim\limits_{z\to b} f(z) = \infty$，故当$|z-b| < \delta$时

$$|f(z)| > M \quad 即 \quad \lim_{z\to b}\frac{1}{f(z)} = 0$$

于是可令 $\dfrac{1}{f(z)} = (z-b)^m g(z)$，其中

$\lim\limits_{z\to b} g(z) \neq 0$，且$g(z)$在$z=b$及其邻域内解析

所以 $f(z)=(z-b)^{-m}\cdot\dfrac{1}{g(z)}=(z-b)^{-m}\phi(z)$ □

函数在极点处的行为

若b是$f(z)$的孤立奇点，且$\lim\limits_{z\to b} f(z)=\infty$，
则b是$f(z)$的极点

因为$\lim\limits_{z\to b} f(z)=\infty$，故当$|z-b|<\delta$时

$$|f(z)|>M \quad 即 \quad \lim_{z\to b}\frac{1}{f(z)}=0$$

于是可令 $\dfrac{1}{f(z)}=(z-b)^m g(z)$，其中

$\lim\limits_{z\to b} g(z)\neq 0$，且$g(z)$在$z=b$及其邻域内解析

所以 $f(z)=(z-b)^{-m}\cdot\dfrac{1}{g(z)}=(z-b)^{-m}\phi(z)$ $\square$

函数在极点处的行为

$$f(z) = (z-b)^{-m}\phi(z)$$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m\frac{1}{\phi(z)} = (z-b)^m g(z)$$

$\cdots$极点与$\cdots$零点的关系

如果$z=b$是$f(z)$的m阶极点，则必定是$1/f(z)$的m阶零点．反之亦然

利用这个关系，可以帮助我们寻找极点

- $z=n\pi$是$1/\sin z$的一阶极点
- $z=1$是$1/(z-1)^2$的二阶极点

函数在极点处的行为

$$f(z) = (z-b)^{-m}\phi(z)$$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m \frac{1}{\phi(z)} = (z-b)^m g(z)$$

$\cdots$极点与$\cdots$零点的关系

如果$z=b$是$f(z)$的m阶极点，则必定是$1/f(z)$的m阶零点．反之亦然

利用这个关系，可以帮助我们寻找极点

- $z=n\pi$是$1/\sin z$的一阶极点
- $z=1$是$1/(z-1)^2$的二阶极点

函数在极点处的行为

$$f(z)=(z-b)^{-m}\phi(z)$$
$$\frac{1}{f(z)}=(z-b)^m\frac{1}{\phi(z)}=(z-b)^m g(z)$$

⋯极点与⋯零点的关系

如果$z=b$是$f(z)$的m阶极点，则必定是$1/f(z)$的m阶零点．反之亦然

利用这个关系，可以帮助我们寻找极点

- $z=n\pi$是$1/\sin z$的一阶极点
- $z=1$是$1/(z-1)^2$的二阶极点

函数在极点处的行为

$$f(z) = (z-b)^{-m}\phi(z)$$
$$\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m \frac{1}{\phi(z)} = (z-b)^m g(z)$$

···极点与···零点的关系

如果$z=b$是$f(z)$的m阶极点，则必定是$1/f(z)$的m阶零点．反之亦然

利用这个关系，可以帮助我们寻找极点

- $z = n\pi$是$1/\sin z$的一阶极点
- $z = 1$是$1/(z-1)^2$的二阶极点

函数在极点处的行为

$$f(z) = (z-b)^{-m}\phi(z)$$
$$\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m \frac{1}{\phi(z)} = (z-b)^m g(z)$$

⋯极点与⋯零点的关系

如果$z=b$是$f(z)$的m阶极点，则必定是$1/f(z)$的m阶零点．反之亦然

利用这个关系，可以帮助我们寻找极点

- $z = 2k\pi\mathrm{i},\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$是$1/(\mathrm{e}^z - 1)$的一阶极点

Return

本性奇点

函数在本性奇点邻域内的Laurent展开具有无穷多个负幂项

如果$z=b$是函数$f(z)$的本性奇点，则当$z\to b$时，$f(z)$的极限不存在

准确地说，$z\to b$的方式不同，$f(z)$可以逼近不同的数值

本性奇点

函数在本性奇点邻域内的Laurent展开具有无穷多个负幂项

如果$z=b$是函数$f(z)$的本性奇点，则当$z\to b$时，$f(z)$的极限不存在

准确地说，$z\to b$的方式不同，$f(z)$可以逼近不同的数值

本性奇点

函数在本性奇点邻域内的Laurent展开具有无穷多个负幂项

如果$z=b$是函数$f(z)$的本性奇点，则当$z\to b$时，$f(z)$的极限不存在

准确地说，$z\to b$的方式不同，$f(z)$可以逼近不同的数值

本性奇点

$z=0$是函数$\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}\quad 0<|z|<\infty$的本性奇点

当z以不同方式趋于0时，就有不同的结果：

- 当z沿正实轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}\to\infty$
- 当z沿负实轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}\to 0$
- 当z沿虚轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$不趋于一个确定的数

本性奇点

$z=0$是函数$\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \quad 0<|z|<\infty$的本性奇点

当z以不同方式趋于0时，就有不同的结果：

- 当z沿正实轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}\to\infty$
- 当z沿负实轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}\to 0$
- 当z沿虚轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$不趋于一个确定的数

本性奇点

$z=0$是函数$\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \quad 0<|z|<\infty$的本性奇点

当z以不同方式趋于0时，就有不同的结果：

- 当z沿正实轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}\to\infty$
- 当z沿负实轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}\to 0$
- 当z沿虚轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$不趋于一个确定的数

本性奇点

$z=0$是函数$\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \quad 0<|z|<\infty$的本性奇点

当z以不同方式趋于0时，就有不同的结果：

- 当z沿正实轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}\to\infty$
- 当z沿负实轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}\to 0$
- 当z沿虚轴趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$不趋于一个确定的数

本性奇点

$z=0$是函数$\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \quad 0<|z|<\infty$的本性奇点

特别是

- 当z以序列$\pm\mathrm{i}/2n\pi,\ n=1,2,3,\cdots$趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$恒为1（因而以1为其聚点）
- 当z以序列$\pm\mathrm{i}/(2n+1)\pi,\ n=0,1,2,3,\cdots$趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$恒为$-1$（因而以$-1$为其聚点）
- 当z以序列$\pm\mathrm{i}/(2n+1/2)\pi,\ n=0,1,2,\cdots$趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$恒为$\mp\mathrm{i}$（因而以$\mp\mathrm{i}$为其聚点）

本性奇点

$z=0$是函数$\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \quad 0<|z|<\infty$的本性奇点

特别是

- 当z以序列$\pm\mathrm{i}/2n\pi,\ n=1,2,3,\cdots$趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$恒为1（因而以1为其聚点）
- 当z以序列$\pm\mathrm{i}/(2n+1)\pi,\ n=0,1,2,3,\cdots$趋于0时， $\mathrm{e}^{1/z}$恒为-1（因而以-1为其聚点）
- 当z以序列$\pm\mathrm{i}/(2n+1/2)\pi,\ n=0,1,2,\cdots$趋于0时， $\mathrm{e}^{1/z}$恒为$\mp\mathrm{i}$（因而以$\mp\mathrm{i}$为其聚点）

本性奇点

$z=0$是函数$\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \quad 0<|z|<\infty$的本性奇点

特别是

- 当z以序列$\pm\mathrm{i}/2n\pi$, $n=1,2,3,\cdots$趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$恒为1（因而以1为其聚点）
- 当z以序列$\pm\mathrm{i}/(2n+1)\pi$, $n=0,1,2,3,\cdots$趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$恒为-1（因而以-1为其聚点）
- 当z以序列$\pm\mathrm{i}/(2n+1/2)\pi$, $n=0,1,2,\cdots$趋于0时，$\mathrm{e}^{1/z}$恒为$\mp\mathrm{i}$（因而以$\mp\mathrm{i}$为其聚点）

本性奇点

对于本性奇点$z=b$来说，任意给定一个数A(有限或∞)，总可以找到一个序列$z_n \to b$，使得$f(z_n) \to A$

（不证）

在本性奇点的任意一个小邻域内，函数$f(z)$可以取(并且取无穷多次)任意的有限数值，顶多可能有一个例外 （不证）

本性奇点

对于本性奇点$z = b$来说，任意给定一个数A(有限或∞)，总可以找到一个序列$z_n \to b$，使得$f(z_n) \to A$

（不证）

在本性奇点的任意一个小邻域内，函数$f(z)$可以取(并且取无穷多次)任意的有限数值，顶多可能有一个例外 （不证）

总结

函数在可去奇点处的极限值是有限的

如果$z=b$是函数$f(z)$的孤立奇点，且$f(z)$在$z=b$的邻域内有界，则$z=b$是$f(z)$的可去奇点

函数在极点处的极限值是∞，或者说，函数在极点附近是无界的

若b是$f(z)$的孤立奇点，且$\lim\limits_{z\to b} f(z)=\infty$，则$b$是$f(z)$的极点

如果$z=b$是函数$f(z)$的本性奇点，则当$z\to b$时，$f(z)$的极限不存在

准确地说，$z\to b$的方式不同，$f(z)$可以逼近不同的数值

总结

函数在可去奇点处的极限值是有限的

如果$z=b$是函数$f(z)$的孤立奇点，且$f(z)$在$z=b$的邻域内有界，则$z=b$是$f(z)$的可去奇点

函数在极点处的极限值是∞，或者说，函数在极点附近是无界的

若b是$f(z)$的孤立奇点，且$\lim\limits_{z\to b} f(z)=\infty$，则$b$是$f(z)$的极点

如果$z=b$是函数$f(z)$的本性奇点，则当$z\to b$时，$f(z)$的极限不存在

准确地说，$z\to b$的方式不同，$f(z)$可以逼近不同的数值

总结

函数在可去奇点处的极限值是有限的

如果$z=b$是函数$f(z)$的孤立奇点，且$f(z)$在$z=b$的邻域内有界，则$z=b$是$f(z)$的可去奇点

函数在极点处的极限值是∞，或者说，函数在极点附近是无界的

若b是$f(z)$的孤立奇点，且$\lim\limits_{z\to b} f(z)=\infty$，则$b$是$f(z)$的极点

如果$z=b$是函数$f(z)$的本性奇点，则当$z\to b$时，$f(z)$的极限不存在

准确地说，$z\to b$的方式不同，$f(z)$可以逼近不同的数值

讲授要点

1. Laurent展开
   - 展开定理
   - 举例
   - 多值函数的Laurent展开
2. 单值函数的孤立奇点
   - 孤立奇点
   - 孤立奇点的分类
   - 函数在无穷远处的奇异性
3. 解析延拓
   - 一个例子
   - 解析延拓的概念

函数在无穷远处的奇异性

通过变换$z=1/t$，把$f(z)$化成$f(1/t)$来讨论

- 若$t=0$点是$f(1/t)$的可去奇点，则$z=\infty$点是$f(z)$的可去奇点
- 若$t=0$点是$f(1/t)$的极点，则$z=\infty$点是$f(z)$的极点
- 若$t=0$点是$f(1/t)$的本性奇点，则$z=\infty$点是$f(z)$的本性奇点开

函数在无穷远处的奇异性

通过变换$z = 1/t$，把$f(z)$化成$f(1/t)$来讨论

- 若$t = 0$点是$f(1/t)$的可去奇点，则$z = \infty$点是$f(z)$的可去奇点
- 若$t = 0$点是$f(1/t)$的极点，则$z = \infty$点是$f(z)$的极点
- 若$t = 0$点是$f(1/t)$的本性奇点，则$z = \infty$点是$f(z)$的本性奇点开

函数在无穷远处的奇异性

通过变换$z = 1/t$，把$f(z)$化成$f(1/t)$来讨论

- 若$t = 0$点是$f(1/t)$的可去奇点，则$z = \infty$点是$f(z)$的可去奇点
- 若$t = 0$点是$f(1/t)$的极点，则$z = \infty$点是$f(z)$的极点
- 若$t = 0$点是$f(1/t)$的本性奇点，则$z = \infty$点是$f(z)$的本性奇点开

函数在无穷远处的奇异性

通过变换$z = 1/t$，把$f(z)$化成$f(1/t)$来讨论

- 若$t = 0$点是$f(1/t)$的可去奇点，则$z = \infty$点是$f(z)$的可去奇点
- 若$t = 0$点是$f(1/t)$的极点，则$z = \infty$点是$f(z)$的极点
- 若$t = 0$点是$f(1/t)$的本性奇点，则$z = \infty$点是$f(z)$的本性奇点开

函数在无穷远处的奇异性

- $z=\infty$是$1/(1+z)$的可去奇点
- $z=\infty$是$1+z^2$的二阶极点
- $z=\infty$是e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\cdots$的本性奇点

函数在无穷远处的奇异性

- $z=\infty$是$1/(1+z)$的可去奇点
- $z=\infty$是$1+z^2$的二阶极点
- $z=\infty$是e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\cdots$的本性奇点

函数在无穷远处的奇异性

- $z=\infty$是$1/(1+z)$的可去奇点
- $z=\infty$是$1+z^2$的二阶极点
- $z=\infty$是e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\cdots$的本性奇点

讲授要点

1. Laurent展开
   - 展开定理
   - 举例
   - 多值函数的Laurent展开
2. 单值函数的孤立奇点
   - 孤立奇点
   - 孤立奇点的分类
   - 函数在无穷远处的奇异性
3. 解析延拓
   - 一个例子
   - 解析延拓的概念

幂级数 $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

- 在以$z=0$点为圆心的单位圆$g_1: |z| < 1$内收敛，代表一个解析函数，记为$f_1(z)$
- 在圆外，级数发散

求出$f_1(z)$在圆内任意一点(例如$z=\mathrm{i}/2$)的函数值及各阶导数值，从而构造出

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$$

可以预期在理论上得到什么结论？

幂级数 $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

- 在以$z=0$点为圆心的单位圆$g_1: |z| < 1$内收敛，代表一个解析函数，记为$f_1(z)$
- 在圆外，级数发散

求出$f_1(z)$在圆内任意一点(例如$z = \mathrm{i}/2$)的函数值及各阶导数值，从而构造出

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z - \mathrm{i}/2)^n$$

可以预期在理论上得到什么结论?

幂级数 $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

- 在以$z=0$点为圆心的单位圆$g_1 : |z| < 1$内收敛，代表一个解析函数，记为$f_1(z)$
- 在圆外，级数发散

求出$f_1(z)$在圆内任意一点(例如$z = \mathrm{i}/2$)的函数值及各阶导数值，从而构造出

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z - \mathrm{i}/2)^n$$

可以预期在理论上得到什么结论?

幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$

- 在以$z=0$点为圆心的单位圆$g_1 : |z| < 1$内收敛，代表一个解析函数，记为$f_1(z)$
- 在圆外，级数发散

求出$f_1(z)$在圆内任意一点(例如$z = \mathrm{i}/2$)的函数值及各阶导数值，从而构造出

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z - \mathrm{i}/2)^n$$

可以预期在理论上得到什么结论?

幂级数 $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

- 在以$z=0$点为圆心的单位圆$g_1 : |z| < 1$内收敛，代表一个解析函数，记为$f_1(z)$
- 在圆外，级数发散

求出$f_1(z)$在圆内任意一点(例如$z = \mathrm{i}/2$)的函数值及各阶导数值，从而构造出

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z - \mathrm{i}/2)^n$$

可以预期在理论上得到什么结论?

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z - \mathrm{i}/2)^n$$

- $f_2(z)$和$f_1(z)$有什么关系?
- 第二个级数的收敛区域g_2?
- g_2是否一定与g_1重合?
- 如果g_2与g_1不重合，是否可能有一部分点超出g_1?
- 如果g_2与g_1不重合，(定义在g_2内的)$f_2(z)$与(定义在g_1内的)$f_1(z)$又是什么关系?

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z - \mathrm{i}/2)^n$$

- $f_2(z)$和$f_1(z)$有什么关系?
- 第二个级数的收敛区域g_2?
- g_2是否一定与g_1重合?
- 如果g_2与g_1不重合，是否可能有一部分点超出g_1?
- 如果g_2与g_1不重合，(定义在g_2内的)$f_2(z)$与(定义在g_1内的)$f_1(z)$又是什么关系?

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z - \mathrm{i}/2)^n$$

- $f_2(z)$和$f_1(z)$有什么关系?
- 第二个级数的收敛区域g_2?
- g_2是否一定与g_1重合?
- 如果g_2与g_1不重合，是否可能有一部分点超出g_1?
- 如果g_2与g_1不重合，(定义在g_2内的)$f_2(z)$与(定义在g_1内的)$f_1(z)$又是什么关系?

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$$

- $f_2(z)$和$f_1(z)$有什么关系?
- 第二个级数的收敛区域g_2?
- g_2是否一定与g_1重合?
- 如果g_2与g_1不重合，是否可能有一部分点超出g_1?
- 如果g_2与g_1不重合，(定义在g_2内的)$f_2(z)$与(定义在g_1内的)$f_1(z)$又是什么关系?

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$$

- $f_2(z)$和$f_1(z)$有什么关系?
- 第二个级数的收敛区域g_2?
- g_2是否一定与g_1重合?
- 如果g_2与g_1不重合，是否可能有一部分点超出g_1?
- 如果g_2与g_1不重合，(定义在g_2内的)$f_2(z)$与(定义在g_1内的)$f_1(z)$又是什么关系?

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z - \mathrm{i}/2)^n$$

事实上，$f_1(z) = \dfrac{1}{1-z}$ $\qquad f_1^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{(1-z)^{n+1}}$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\mathrm{i}/2)^n}{(1-\mathrm{i}/2)^{n+1}} = \frac{1}{1-z} \qquad \left| z - \frac{\mathrm{i}}{2} \right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $f_1(z)$是定义在$g_1: |z| < 1$内的$\dfrac{1}{1-z}$

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$$

事实上，$f_1(z)=\dfrac{1}{1-z}$ $\qquad f_1^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{(1-z)^{n+1}}$

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\mathrm{i}/2)^n}{(1-\mathrm{i}/2)^{n+1}}=\frac{1}{1-z} \qquad \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $f_1(z)$是定义在$g_1: |z|<1$内的$\dfrac{1}{1-z}$
- $f_2(z)$是定义在$g_2: |z-\mathrm{i}/2|<\sqrt{5}/2$内的$\dfrac{1}{1-z}$

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$$

事实上，$f_1(z)=\dfrac{1}{1-z}$ $\qquad f_1^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{(1-z)^{n+1}}$

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\mathrm{i}/2)^n}{(1-\mathrm{i}/2)^{n+1}}=\frac{1}{1-z} \qquad \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $f_1(z)$是定义在$g_1:|z|<1$内的$\dfrac{1}{1-z}$
- $f_2(z)$是定义在$g_2:|z-\mathrm{i}/2|<\sqrt{5}/2$内的$\dfrac{1}{1-z}$

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$$

事实上，$f_1(z)=\dfrac{1}{1-z}$ $\qquad f_1^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{(1-z)^{n+1}}$

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\mathrm{i}/2)^n}{(1-\mathrm{i}/2)^{n+1}}=\frac{1}{1-z} \qquad \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $f_1(z)$是定义在$g_1:|z|<1$内的$\dfrac{1}{1-z}$
- $f_2(z)$是定义在$g_2:|z-\mathrm{i}/2|<\sqrt{5}/2$内的$\dfrac{1}{1-z}$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n = \frac{1}{1-z} \qquad \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $f_1(z)$和$f_2(z)$只不过是同一个函数在不同区域内的不同表达式
- 这两个表达式都有各自的有效范围g_1和g_2
- 在公共区域$g_1 \bigcap g_2$内，$f_1(z) \equiv f_2(z)$
- 这样就从定义在区域g_1内的幂级数出发，得到了在另一区域g_2内的另一幂级数表达式
- 重复这个步骤，就可能超出原来的定义范围，甚至可能扩展到整个z平面

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n = \frac{1}{1-z} \qquad \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $f_1(z)$和$f_2(z)$只不过是同一个函数在不同区域内的不同表达式
- 这两个表达式都有各自的有效范围g_1和g_2
- 在公共区域$g_1 \bigcap g_2$内，$f_1(z) \equiv f_2(z)$
- 这样就从定义在区域g_1内的幂级数出发，得到了在另一区域g_2内的另一幂级数表达式
- 重复这个步骤，就可能超出原来的定义范围，甚至可能扩展到整个z平面

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n = \frac{1}{1-z} \qquad \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $f_1(z)$和$f_2(z)$只不过是同一个函数在不同区域内的不同表达式
- 这两个表达式都有各自的有效范围g_1和g_2
- 在公共区域$g_1 \bigcap g_2$内，$f_1(z) \equiv f_2(z)$
- 这样就从定义在区域g_1内的幂级数出发，得到了在另一区域g_2内的另一幂级数表达式
- 重复这个步骤，就可能超出原来的定义范围，甚至可能扩展到整个z平面

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n = \frac{1}{1-z} \qquad \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $f_1(z)$和$f_2(z)$只不过是同一个函数在不同区域内的不同表达式
- 这两个表达式都有各自的有效范围g_1和g_2
- 在公共区域$g_1 \bigcap g_2$内，$f_1(z) \equiv f_2(z)$
- 这样就从定义在区域g_1内的幂级数出发，得到了在另一区域g_2内的另一幂级数表达式
- 重复这个步骤，就可能超出原来的定义范围，甚至可能扩展到整个z平面

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n = \frac{1}{1-z} \qquad \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $f_1(z)$和$f_2(z)$只不过是同一个函数在不同区域内的不同表达式
- 这两个表达式都有各自的有效范围g_1和g_2
- 在公共区域$g_1 \bigcap g_2$内，$f_1(z) \equiv f_2(z)$
- 这样就从定义在区域g_1内的幂级数出发，得到了在另一区域g_2内的另一幂级数表达式
- 重复这个步骤，就可能超出原来的定义范围，甚至可能扩展到整个z平面

讲授要点

1. Laurent展开
    - 展开定理
    - 举例
    - 多值函数的Laurent展开
2. 单值函数的孤立奇点
    - 孤立奇点
    - 孤立奇点的分类
    - 函数在无穷远处的奇异性
3. 解析延拓
    - 一个例子
    - 解析延拓的概念

解析延拓

设函数$f_1(z)$在区域g_1内解析，函数$f_2(z)$在区域g_2内解析，而在g_1与g_2的公共区域$g_1\bigcap g_2$内$f_1(z)\equiv f_2(z)$，则称$f_2(z)$为$f_1(z)$在g_2内的解析延拓；反之，$f_1(z)$是$f_2(z)$在g_1内的解析延拓

$f_2(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$ 是$f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$在$g_2$内的解析延拓

$f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$是 $f_2(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$在$g_1$内的解析延拓

解析延拓

设函数$f_1(z)$在区域g_1内解析，函数$f_2(z)$在区域g_2内解析，而在g_1与g_2的公共区域$g_1\bigcap g_2$内$f_1(z)\equiv f_2(z)$， 则称$f_2(z)$为$f_1(z)$在g_2内的解析延拓； 反之，$f_1(z)$是$f_2(z)$在g_1内的解析延拓

$f_2(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$ 是$f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 在g_2内的解析延拓

$f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$是 $f_2(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$ 在g_1内的解析延拓

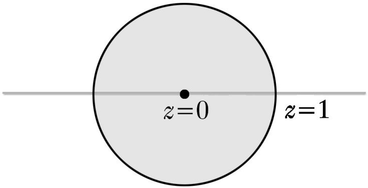
解析延拓

设函数$f_1(z)$在区域g_1内解析，函数$f_2(z)$在区域g_2内解析，而在g_1与g_2的公共区域$g_1\bigcap g_2$内$f_1(z)\equiv f_2(z)$，则称$f_2(z)$为$f_1(z)$在g_2内的解析延拓；反之，$f_1(z)$是$f_2(z)$在g_1内的解析延拓

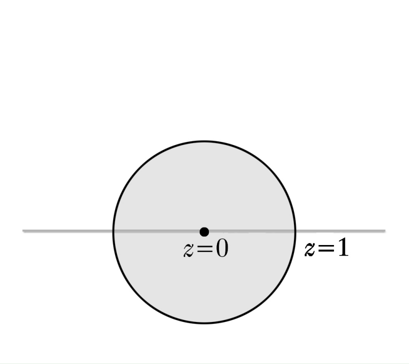
$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n \text{ 是} f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$
在g_2内的解析延拓

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \text{是 } f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f_1^{(n)}(\mathrm{i}/2)(z-\mathrm{i}/2)^n$$
在g_1内的解析延拓

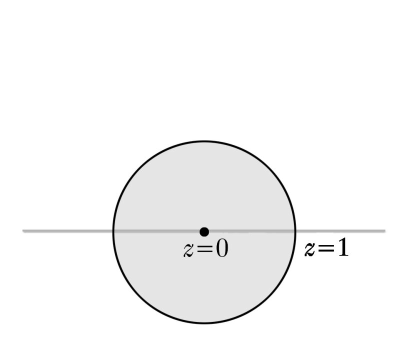
采用解析延拓的办法，可以扩大函数的定义域和解析范围

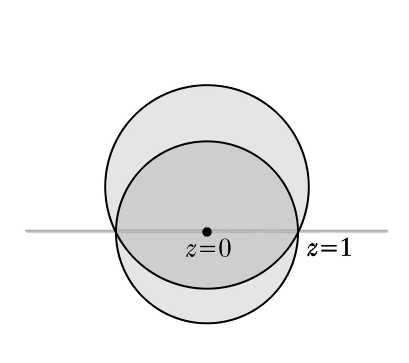


采用解析延拓的办法，可以扩大函数的定义域和解析范围

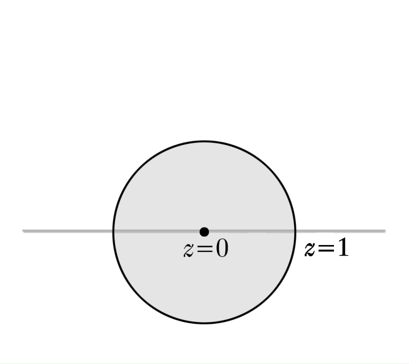


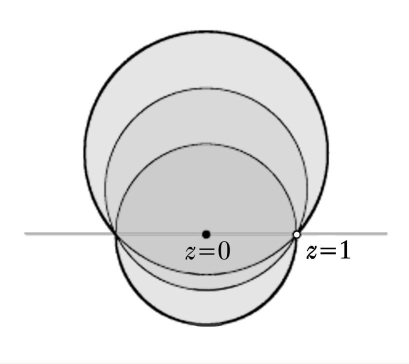
采用解析延拓的办法，可以扩大函数的定义域和解析范围





采用解析延拓的办法，可以扩大函数的定义域和解析范围





采用解析延拓的办法，可以扩大函数的定义域和解析范围

- 例如，用级数或积分定义的函数，本来都有一定的适用范围，通过解析延拓，可能定义出在更大范围内的解析函数
- 上面给出的例子就是一个实例
- 另一个实例是Γ函数．由常用的积分定义(只在右半平面解析)出发，经过解析延拓，从而得到它在全平面的定义
- 从概念上说，求出级数的和函数或积分的解析表达式是最好的解析延拓方法

采用解析延拓的办法，可以扩大函数的定义域和解析范围

- 例如，用级数或积分定义的函数，本来都有一定的适用范围，通过解析延拓，可能定义出在更大范围内的解析函数
- 上面给出的例子就是一个实例
- 另一个实例是Γ函数．由常用的积分定义(只在右半平面解析)出发，经过解析延拓，从而得到它在全平面的定义
- 从概念上说，求出级数的和函数或积分的解析表达式是最好的解析延拓方法

采用解析延拓的办法，可以扩大函数的定义域和解析范围

- 例如，用级数或积分定义的函数，本来都有一定的适用范围，通过解析延拓， 可能定义出在更大范围内的解析函数
- 上面给出的例子就是一个实例
- 另一个实例是Γ函数．由常用的积分定义(只在右半平面解析)出发，经过解析延拓， 从而得到它在全平面的定义
- 从概念上说，求出级数的和函数或积分的解析表达式是最好的解析延拓方法

采用解析延拓的办法，可以扩大函数的定义域和解析范围

- 例如，用级数或积分定义的函数，本来都有一定的适用范围，通过解析延拓，可能定义出在更大范围内的解析函数
- 上面给出的例子就是一个实例
- 另一个实例是Γ函数．由常用的积分定义(只在右半平面解析)出发，经过解析延拓，从而得到它在全平面的定义
- 从概念上说，求出级数的和函数或积分的解析表达式是最好的解析延拓方法

另一类要用到解析延拓的问题是常微分方程的求解问题

有关解析延拓概念的模糊说法

- 同一表达式在两个(甚至多个)不同区域内均有定义，则必互为解析延拓
- 不同区域内的不同表达式不可能互为解析延拓

有关解析延拓概念的模糊说法

- 同一表达式在两个(甚至多个)不同区域内均有定义，则必互为解析延拓
- 不同区域内的不同表达式不可能互为解析延拓

解析延拓的若干重要理论问题

1. 解析延拓能否实现，取决于函数的奇点分布

   如果在幂级数$f_1(z)$的收敛圆g_1的边界上“布满”奇点，即在收敛圆周上任意一点，其任意小的邻域内都有$f_1(z)$的奇点，那么，在g_1内重新作Taylor展开，其收敛范围绝不可能超出g_1

2. 解析延拓的结果是否与路径有关

   - 沿不同路径延拓(到同一区域)结果是否相同?

解析延拓的若干重要理论问题

❶ 解析延拓能否实现，取决于函数的奇点分布

如果在幂级数$f_1(z)$的收敛圆g_1的边界上“布满”奇点，即在收敛圆周上任意一点，其任意小的邻域内都有$f_1(z)$的奇点，那么，在g_1内重新作Taylor展开，其收敛范围绝不可能超出g_1

❷ 解析延拓的结果是否与路径有关

- 沿不同路径延拓(到同一区域)结果是否相同？

解析延拓的若干重要理论问题

1. 解析延拓能否实现，取决于函数的奇点分布

如果在幂级数$f_1(z)$的收敛圆g_1的边界上“布满”奇点，即在收敛圆周上任意一点，其任意小的邻域内都有$f_1(z)$的奇点，那么，在g_1内重新作Taylor展开，其收敛范围绝不可能超出g_1

2. 解析延拓的结果是否与路径有关

- 沿不同路径延拓(到同一区域)结果是否相同?
- 通过解析延拓得到的函数是单值的，还是多值的?

解析延拓的若干重要理论问题

❶ 解析延拓能否实现，取决于函数的奇点分布

如果在幂级数$f_1(z)$的收敛圆g_1的边界上“布满”奇点，即在收敛圆周上任意一点，其任意小的邻域内都有$f_1(z)$的奇点，那么，在g_1内重新作Taylor展开，其收敛范围绝不可能超出g_1

❷ 解析延拓的结果是否与路径有关

- 沿不同路径延拓(到同一区域)结果是否相同?
- 通过解析延拓得到的函数是单值的，还是多值的?

解析延拓的若干重要理论问题

1. 解析延拓能否实现，取决于函数的奇点分布

如果在幂级数$f_1(z)$的收敛圆g_1的边界上“布满”奇点， 即在收敛圆周上任意一点，其任意小的邻域内都有$f_1(z)$的奇点，那么， 在g_1内重新作Taylor展开，其收敛范围绝不可能超出g_1

2. 解析延拓的结果是否与路径有关

- 沿不同路径延拓(到同一区域)结果是否相同?
- 通过解析延拓得到的函数是单值的，还是多值的?