第四章　微分方程

4.1 微分方程的基本概念

例 1 一曲线通过点（1，2），且在该曲线上任一点 M(x, y)处的切线的斜率位 2x，求这曲线方程。

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$。根据导数的几何意义，可知未知函数 $y=y(x)$应满足关系式

$$\frac{dy}{dx}=2x \qquad (1)$$

此外，未知函数 $y=y(x)$还应满足下列条件：

$$x=1 \text{ 时，} y=2. \qquad (2)$$

把（1）式两端积分，得

$$y=\int 2xdx \quad \text{即} \quad y=x^2+C \qquad （3）$$

其中 C 是任意常数。

把条件“x=1 时，y=2”代入（3）式，得 C＝1，代入（3）式，即得曲线方程为

$$y=x^2+1$$

例 2 设有一弹簧，它的上端固定，下端挂一个质量为 m 的物体，弹簧伸长一段 l 后就会处于静止状态，这个位置就是物体的平衡。如果用力将物体向下拉至某一位置，然后突然放开，那么物体就会在平衡位置附近作上下振动，试确定物体的运动规律。

解 取物体的平衡位置坐标原点，x 轴竖直向下建立坐标系（如图 4－1）。要确定物体的振动规律，就是求物体在任意时刻 t 离开平衡位置的位移函数 $x(t)$。这是个动力学问题，需要分析物体在振动过程中所受的外力。

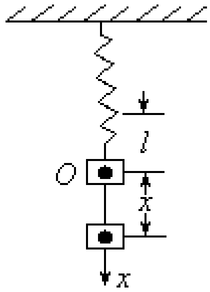

图 4－1

（1）如果不计摩擦力和介质阻力，则物体在任意时刻所受的力只有弹性力和重力。但因为物体在平衡位置时处于静止状态，作用在物体上的重力 mg 与弹性力 cl 大小相等，方向相反，所以使物体回到平衡位置的力弹性恢复力：$f=-cx$ 其中 $c(c>0)$为弹簧的弹性系数，x 为物体离开平衡位置的位移（如图 4－1），负号表示弹性恢复力的方向和物体的位移方向相反。

根据牛顿第二定律，有 $m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx$ 或 $m\frac{d^2x}{dt^2}+cx=0$ （3）

方程（3）代表的振动叫无阻尼自由振动或简谐振动。

（2）如果物体在振动过程中还受到阻力作用，由实验知道，阻力 R 总是与运动方向相反，当振动不大时，其大小与物体的速度成正比，设比例系数为 $\mu(\mu>0)$，则有

$$R=-\mu\frac{dx}{dt}$$

此时物体的微分运动方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx-\mu\frac{dx}{dt}$$

令 $2n=\frac{\mu}{m},k^2=\frac{c}{m}$，则上式可化为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0 \tag{4}$$

方程（4）称为有阻尼的自由振动的方程。

（3）如果物体在振动过程中，还受铅直干扰力 $F=H\sin pt$

令 $h=\frac{H}{m}$，则有 $\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=h\sin pt$ （5）

方程（5）称为有阻尼的强迫振动的方程。

微分方程：一般地，包含自变量，未知函数及其导数或微分的等式称为微分方程。如果微分方程的未知函数是一元函数，则称为常微分方程。如果微分方程中的未知函数是多元函数，则称为偏微分方程。

微分方程的阶：微分方程中未知函数导数的最高阶数称为该微分方程的阶。

如果微分方程是关于未知函数和各阶导数的一次有理整式，则称它为线性微分方程。n 阶线性微分方程的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=g(x)$$

其中 $a_0(x),a_1(x),\cdots a_n(x)$ $a_0(x)y^{(n)}$ 及 $g(x)$ 为 x 的已知函数，且 $a_0(x)\neq 0$。不是线性方程的微分方程称为非线性微分方程。

当微分方程中的未知函数用已知函数代替时，方程变为恒等式，则该已知函数称为方程的解。

如果微分方程解中含有独立的任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则这样的解称为微分方程的通解。微分方程通解的图形是一族曲线，称为微分方程的积分曲线族。

在通解中，令任意常数取确定的值而得到的解称为特解。特解的图形是一条曲线，称为微分方程的积分曲线。

从通解中确定特解的条件称为定解条件。因为 n 阶方程的通解中含有 n 个任意常数，所以需要 n 个条件，即定解条件有 n 个。若定解条件都是在自变量的同一个点上（此点常称为初始点）给定的，则称为初始条件。一个 n 阶方程的初始条件即为

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

微分方程与初始条件一起称为初值问题。

作业　3，4

4.2 某些简单微分方程的初等积分法

4.2.1 一阶变量分离方程

形如 $\dfrac{dy}{dx}=h(x)g(y)$ （1）

的微分方程称为一阶变量分离方程，其中$h(x),g(y)$分别是x,y的连续函数。

其解法是先分离变量$\dfrac{dy}{g(y)}=h(x)dx \quad (g(y)\neq 0)$然后两边积分得

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int h(x)dx+c$$

令 $G(y)=\int\dfrac{dy}{g(y)},H(x)=\int h(x)dx$，则上式可写为 $G(y)=H(x)+c$ （2）

（2）式给出所求微分方程（1）的解，由于（2）式含有任意常数，又是以隐式方式给出解，所以（2）式称为（1）式的隐式通解。这种求解的方法称为分离变量法。

例 1 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}=2xy$的通解。

解 分离变量 $\dfrac{dy}{y}=2xdx$ 两端积分得 $\ln|y|=x^2+C_1$ 从而$y=\pm e^{c^2+C1}$

$=\pm e^{C_1}e^{x^2}$，因为$\pm e^{C_1}$仍是任意常数，将它记做 C，便得原微分方程的通解为$y=Ce^{x^2}$。

例 2 设降落伞从跳伞塔下落后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时（他＝0）速度为零，求降落伞下落速度与时间的函数关系。

解 设降落伞下落速度为$v(t)$。降落伞在空中下落时，同时受到重力P与阻力R的作用。重力大小为mg，方向与v一致；阻力大小为kv（k为比例常数)，方向与v相反，从而降落伞所受外力为$F=mg-kv$。

根据牛顿第二运动定律 $F=ma$，得函数 $v(t)$应满足的方程为 $m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv$（9）

按题意，初始条件为 $v|_{t=0}=0$。

方程（9）是可分离变量的。分离变量后得 $\dfrac{dv}{mg-kv}=\dfrac{dt}{m}$，两端积分，并考虑到

$mg-kv>0$，得 $-\dfrac{1}{k}\ln(mg-kv)=\dfrac{t}{m}+C_1$，即$mg-kv=e^{-\frac{k}{m}t-kC_1}$ 或

$$v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}}\left(C=-\frac{e^{-kC_1}}{k}\right),\qquad（10）$$

这就是方程（9）的通解。

将初始条件$v|_{t=0}=0$代入（1）式，得 $C=-\frac{mg}{k}$。

于是所求的特解为 $$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})\qquad（11）$$

4.2.2 一阶线性微分方程

形如 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ （3）的方程称为一阶线性微分方程。若$q(x)$不恒为零，称方程（3）为一阶线性微分方程。若$q(x)\equiv 0$，则方程（3）变为$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$（4）称方程（4）为一阶齐次线性微分方程。

对于齐次方程（4）。分离变量得 $\frac{dy}{y}=-p(x)dx$ 两边积分 $\ln|y|=-\int p(x)dx+c_1$

取对数，即得方程（4）的通解 $$y=ce^{-\int p(x)dx}\ (c=\pm e^{c_1})\qquad（5）$$

再看非齐次方程（3）。将方程变形为 $\frac{dy}{dx}=q(x)-p(x)y$，分离变量得

$\frac{dy}{y}=\left[\frac{q(x)}{y}-p(x)\right]dx$ 两边积分，可形式的得到$y=(\pm e^{\int\frac{q(x)}{y}dx})e^{-\int p(x)dx}$，注意到$\pm e^{\int\frac{q(x)}{y}dx}$

是 x 的函数，因此我们猜想方程（3）的解应为$y=u(x)e^{-\int p(x)dx}$ （6） 形式，即把（5）的任意常数 c 视为待定函数 $u(x)$。将式（6）代入方程（3），得到

$$\frac{d}{dx}(ue^{-\int p(x)dx})+p(x)ue^{-\int p(x)dx}=q(x)$$

整理化简，得 $$\frac{du}{dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

这是个可分离变量的方程，求解得 $$u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c\qquad（7）$$

将（7）代入方程（6），便得 $$y=e^{-\int p(x)dx}\left(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)\qquad（8）$$

式（8）即为一阶线性微分方程的通解。

上述解决非齐次线性微分方程通解的方法称为常数变易法。在由（8）式，我们可得下述结论：非齐次线性微分方程的通解等于它对应的齐次线性微分方程的通解加上原非齐次方程的一个特解。

例 3 求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解。

解 这是一个非齐次线性微分方程。先求对应的齐次方程的通解。

$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0$，$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1}$，$\ln|y|=2\ln|x+1|| \ln C_1|$，即 $y=C(x+1)^2$。

使用常数变易法，把 C 换成 u，即令 $y=u(x+1)^2$ （6）

那么 $\frac{dy}{dx}=u'(x+1\big(^2+2u(x+1)\big)$ 代入所给非齐次方程，得 $u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$。两端积分，得

$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$，再把上式代入（6），即得所求方程的通解为

$$y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$$

例 4 求一曲线的方程，这曲线通过原点，并且它在点$(x\ ,\ y)$处的切线斜率等于 $2x+y$。

解 设所求的曲线为 $y(x)$。由题意可知，$y(x)$满足下面初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=2x+y\\ y(0)=0\end{cases}$$

这是一个一阶非齐次线性方程。先求解对应的齐次方程，得

$$y=ce^x。$$

令 $y=c(x)e^x$ 为原方程的解，代入原方程，求得

$$c'(x)=2xe^{-x}$$

积分得 $c(x)=-2(1+x)e^{-x}+c_1$

因此原方程通解为 $y=-2(1+x)+c_1e^x$

由初始条件 $y(0)=0$，得 $c_1=2$

所求曲线方程为 $y=2(e^x-1-x)$

4.2.3 利用变量代换求解微分方程

1．齐次方程 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$

形如 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程称为齐次方程。对于齐次方程，只要作变换 $\frac{y}{x}=u$，就可将此方程化为 u 与 x 的变量分离方程。实际上由 $\frac{y}{x}=u$，即 $y=xu$, 可得 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，代入原方程，有 $u+x\frac{du}{dx}=f(u)$ 分离变量得 $\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$ 求解后把 $u=\frac{y}{x}$ 代回即得齐次方程的通解。

例 4 解方程 $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$

解　原方程可写成 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}$，因此是齐次方程。令 $\frac{y}{x}=u$，则

$y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，于是原方程变为 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}$，即 $x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}$ 分离变量，得 $\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x}$，两端积分，得 $u-\ln|u|+C=\ln|x|$ 或 $\ln|xu|=u+C$，以 $\frac{y}{x}$ 代入上式中的 u，便得所给方程的通解为 $\ln|y|=\frac{y}{x}+C$

2．伯努利方程

形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq 0,1)$ 的方程称为伯努利方程，当 $n\neq 0,1$ 时，将方程两边同除 y^n，得 $y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$　　（11）

令 $z=y^{1-n}$，求导代入式（11）得 $\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$ 这是一个一阶线性微分方程，求解后将 $z=y^{1-n}$ 代回即可。

例 5 求方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=a(\ln x)y^2$ 的通解，其中 a 为常数。

解　这是伯努利方程，令 $z=y^{-1}$，代入原方程得 $\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-a\ln x$，其通解为

$z=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$，以 $z=y^{-1}$ 代回，得所求方程的通解为 $yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$

对于方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$，可以将方程方程变形为 $\frac{dx}{dy}=x+y$ 来解。

4.2.4 某些可降阶的高阶微分方程

1．$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

微分方程 $y^{(n)}=f(x)$ 由于右端只含有自变量 x，只要把上式关于 x 积分一次就得到一个 n—1 阶的微分方程 $y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$。同理可得 $y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)dx+C_1\right]dx+C_2$，以此法继续进行，接连积分 n 次，便得到微分方程 $y^{(n)}=f(x)$ 的含有 n 个任意常数的通解。

例 1 求微分方程 $y'''=e^{2x}-\cos x$ 的通解。

解　对所给方程接连积分三次，得 $y''=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C$，$y'=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+Cx+C_2$ $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$ 这就是所给方程的通解。

2．不显含未知函数的微分方程 $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0$

形如 $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0$ 的 n 阶微分方程，其中 $1\le k\le n$。对于这种方程，只要作变换 $z=y^{(k)}$，则可化为 $F(x,z,z',\cdots,z^{(n-k)})=0$，从而将原方程降了 k 阶。特别地，对于二阶微分方程 $F(x,y',y'')=0$ 就变成一阶微分方程了。

例 2 求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=3$ 的特解。

解　设 $z=y'$，则代入原方程分离变量后，得 $\frac{dz}{z}=\frac{2x}{1+x^2}dx$，两端积分，得 $\ln|z|=\ln(1+x^2)+C$，即 $z=y'=C_1(1+x^2)$，由初始条件 $y'|_{x=0}=3$，得 $C_1=3$，所以 $y'=3(1+x^2)$，两端再积分，得 $y=x^3+3x+C_2$，又由条件 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$，于是所求的特解为 $y=x^3+3x+1$。

3．不显含自变量的微分方程 $F(y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$

对于这种方程可作变换：令 $y' = z(y)$，则 $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z$，

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \cdot z$$

…

代入原方程，得到关于 $y, z, z', \cdots, z^{(n-1)}$ 的方程式，我们把它记做 $F_1(y, z, z', \cdots, z^{(n-1)}) = 0$，这是以 y 为自变量，z 为未知函数的 n—1 阶方程，比原方程降了一阶。特别地对于二阶方程 $F(y, y', y'') = 0$ 就变成了一阶方程。

例 3 求方程 $y'' = 3\sqrt{y}(x \geq 0)$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的解。

解　此方程不显含自变量 x。令 $y' = z(y)$，则 $y'' = z\frac{dz}{dy}$。代入原方程，得 $z\frac{dz}{dy} = 3y^{\frac{1}{2}}$

分离变量并积分，得 $\frac{1}{2}z^2 = 2y^{\frac{3}{2}} + c_1$。由 $y(0) = 1$ 及 $y'(0) = 2$ 可确定出 $c_1 = 0$，于是

$z = \pm 2y^{\frac{3}{4}}$，由方程 $y'' = 3\sqrt{y}$ 知 $y'' > 0$，故 y' 单调上升；又 $y'(0) = 2$，所以

$y' = z > 0(x \geq 0)$，从而上式取正号，即 $y' = z = 2y^{\frac{3}{4}}$ 再积分得 $4y^{\frac{1}{4}} = 2x + c_2$ 代入 $y(0) = 1$

可确定 $c_2 = 4$，从而所求解为 $y^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}x + 1$ 或 $y = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^4$。

4．首次积分方法

若 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 则称 $\Phi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = c$ 为方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 的首次积分。这样就把原方程降了一阶。特别地，二阶的就变成一阶方程了。

例 4　求解方程 $yy'' + (y')^2 = 0$。

解　原方程可写为 $\frac{d}{dx}(yy') = 0$，从而 $yy' = c$，这是可分离变量方程求解后，得

$$y^2 = c_1 x + c_2 \qquad (c_1 = 2c)$$

例 5 求解方程 $\frac{y''}{y'} = \frac{2yy'}{1 + y^2}$。

解　原方程变形为 $\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1 + y^2} = 0$，因为此方程左端为

$\frac{y''}{y'}-\frac{2yy'}{1+y^2}=\frac{d}{dx}[\ln|y'|-\ln(1+y^2)]$，所以$\ln|y'|-\ln(1+y^2)=\ln|c|$，即

$y'=c_1(1+y^2)$，积分得$y=\tan(c_1x+c_2)$。

作业 1。 偶数（分离） 2。 （1），（4）（一阶） ；4。（1），（3）（伯努利）
5. 奇数 8，9

4.4 高阶线性方程

4.4.1 线性微分方程通解的结构

形如 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$ （1）

的微分方程称为线性方程。若$n>1$称之为高阶线性微分方程。

若$f(x)\not\equiv 0$，则称式（1）为非齐次线性微分方程。若$f(x)\equiv 0$，则式（1）变为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0 \qquad (2)$$

称式（2）为齐次线性微分方程或称式（2）为式（1）所对应的齐次线性方程。

若引入算子符号 $L=\frac{d^n}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)$

则 $$L[y(x)]\equiv\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)\ y^{(n-i)}$$

其中$a_0(x)=1$。于是方程（1）和方程（2）可分别简记为$L(y)=f(x)$和$L(y)=0$。

易证 $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$，$L(cy)=cL(y)$，其中 c 为常数。

定理 1（叠加原理） 设$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是齐次线性微分方程（2）的解，则它们的线性组合 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jy_j(x)$也是方程（2）的解，其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$是任意常数。

定理 2 设$\tilde{y}(x)$是非齐次方程（1）的一个解， $y_1(x),y_2(x),\cdots y_n(x)$是方程（1）对应的齐次方程（2）的解，则$\sum_{j=1}^{n}c_jy_j(x)+\tilde{y}(x)$也是方程（1）的解，其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$是任意常数。

定义　设 $y_1(x),y_2(x),\cdots y_n(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一组函数，如果存在一组不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得在区间 $[a,b]$ 上有 $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$，则说这组函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是线性相关的，否则说它们是线性无关的。

易证函数组 $1,\sin^2 x,\cos^2 x$ 是线性相关的，$1,x,x^2,\cdots,x^n$ 是线性无关的。对于两个函数的情形，若它们的比为常数则线性相关，否则线性无关。

定理 3 （二阶齐次线性微分方程通解的结构） 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)(a\le x\le b)$ 是方程

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{3}$$

的两个线性无关特解，则 $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ （c_1,c_2 是任意常数）是方程（3）的通解。

对于二阶非齐次线性微分方程

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x) \tag{4}$$

有如下的定理。

定理 4（二阶非齐次线性微分方程通解的结构） 设 $y^*(x)$ 是方程（4）的一个特解，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)(a\le x\le b)$ 是方程（4）对应的齐次线性方程（3）的两个线性无关解，则

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y^*(x) \tag{5}$$

是方程（4）的通解。

4.4.2 高阶常系数齐次线性微分方程的解法

形如

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x) \tag{6}$$

的方程称为高阶（n>1 时）常系数线性方程，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是已知常数，$f(x)$ 是已知函数。当 $f(x)\equiv 0$ 时，方程（6）变为

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0 \tag{7}$$

称方程（7）为常系数非齐次线性方程（6）对应的常系数齐次线性方程。

由上节通解的结构，可知求（7）的通解转化为求它的 n 个线性无关解，称为基本解组，下面使用欧拉待定指数函数法求解其基本解组。

由于函数 $e^{\lambda x}$ 的各阶导数都只差一个常数因子，根据这个特点，我们使用 $y=e^{\lambda x}$ 来尝试，看能否选取适当的常数 λ，使 $y=e^{\lambda x}$ 满足方程（7），将其各阶导数阿弟如（7）后整理得

$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$因为$e^{\lambda x} \neq 0$，所以上式化为 $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$（8）

于是得出$y=e^{\lambda x}$是方程（7）的解的充要条件是λ为一元n次函数代数方程（8）的根。称（8）式为微分方程（7）的特征方程，它的根称为特征根。下面我们分特征根的不同情形对二次方程讨论其基本解组。

1．特征根式单根

设λ_1、λ_2是互不相等的实根时，有解$y_1 = e^{\lambda_1 x}$，$y_2 = e^{\lambda_2 x}$，且$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq$常数。于是得到方程（3）的通解为$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$，其中$c_1, c_2$是任意常数。

如果λ_1、λ_2为复根，若系数为实数则必为共轭复根，设其为$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$，复根对应的解为$e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$，由欧拉公式（$e^{ix} = \cos x + i\sin x$）可知

$$y_1^* = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), y_2^* = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

再由叠加原理可知$y_1 = \dfrac{y_1^* + y_2^*}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = \dfrac{y_1^* - y_2^*}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$也是方程（3）的解，且为实数解，并且是线性无关的，所以方程（3）的通解为$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

2．特征根有两个相等的实根：$\lambda_1 = \lambda_2$

这时齐次方程（3）只有一个解$y_1 = e^{\lambda_1 x}$，味求出另外一个解y_2，并要求$\dfrac{y_2}{y_1}$不是常数。

设$\dfrac{y_2}{y_1} = u(x)$，将y_2求导代入原方程得到$u'' = 0$，由于只需要得到一个不为常数的解。所以不妨选取$u = x$，由此得到微分方程（3）的另外一个解$y_2 = xe^{\lambda_1 x}$，从而微分方程的通解为$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x}$

综上所述，求二阶常系数齐次线性微分方程$y'' + py' + qy = 0$的通解的步骤如下：

第一步　写出微分方程的特征方程$r^2 + pr + q = 0$

第二步　求出特征方程的两个根λ_1, λ_2。

第三步　根据特征方程两个根的不同情形，按照下列表格写出微分方程（3）的通解

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 λ_1,λ_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 λ_1,λ_2	$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$
两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 3 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解

解　特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$，其根 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=3$ 是两个不相等的实根，因此所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

例 4 求方程 $\dfrac{d^2s}{dt^2}+2\dfrac{ds}{dt}+s=0$ 满足初始条件 $s|_{t=0}=4,s'|_{t=0}=-2$ 的特解。

解　特征方程为 $r^2+2r+1=0$，其根 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 是两个相等的实根，因此所求微分方程的通解为 $s=(C_1+C_2t)e^{-t}$

将条件 $s|_{t=0}=4$ 代入通解，得 $C_1=4$，从而 $s=(4+C_2t)e^{-t}$，将上式对 t 求导，得 $s'=(C_2-4-C_2t)e^{-t}$，再把条件 $s'|_{t=0}=-2$ 代入上式，得 $C_2=2$，于是所求特解为 $s=(4+2t)e^{-t}$

例 5　求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解

解　特征方程为 r^2-2r+5，其根 $r_{1,2}=1\pm 2i$ 为一对共轭复根。因此所求通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

对于高阶常系数齐次线性微分方程可以根据下表给出的特征方程的根写出对应齐次线性微分方程的解如下：

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 λ	给出一项 $Ce^{\lambda x}$
一对单复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出两项 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

k 重实根 λ	给出 k 给出 k 项：$e^{\lambda x}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$ 项
k 重复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	给出 2k 项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$ ＋ $(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

例 6 求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解。

解　特征方程为 $r^4-2r^3+5r^2=0$，其根为 $r_1=r_2=0$ 和 $r_{3,4}=1\pm 2i$，因此所给微分方程的通解为 $y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$。

4.4.3　高阶常系数非齐次线性微分方程的解法

由非齐次线性微分方程通解的结构，可知在求出齐次线性微分方程通解后，只需求出非齐次线性微分方程的一个特解饥渴。对于二阶常系数非齐次线性微分方程并不是对于 $f(x)$ 的所有情形都能解出，下面只讨论 $f(x)$ 的两种情形。

1．设 $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$

其中 α 是常数，$P_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式。此时设非齐次方程（6）有如下形式的特解

$$y^*(x)=x^ke^{\alpha x}Q_m(x) \qquad （9）$$

其中 k 是特征方程含根 α 的重复次数，当 α 不是特征根时，可取 0。$Q_m(x)$ 仍为 m 次多项式，其系数求法是将特解代入方程（6），通过待定系数方法求出。

例 7 求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解。

解　这是二阶常系数非齐次线性微分方程，且函数 $f(x)$ 是 $P_m(x)e^{\alpha x}$ 型。

与所给方程对应的齐次方程为 $y''-2y'-3y=0$，它的特征方程为 $r^2-2r-3=0$。

由于这里 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，所以应设特解为 $y^*=b_0x+b_1$，把它代入所给方程，

得 $-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1$，比较两端系数得 $\begin{cases}-3b_0=3\\-2b_0-3b_1=1\end{cases}$

由此求得 $b_0=-1, b_1=\dfrac{1}{3}$。于是求得一个特解为 $y^*=-x+\dfrac{1}{3}$

例 8 求方程 $y''+y=xe^x$ 的通解。

解　特征方程为$\lambda^2+1=0$，其根为$\lambda=\pm i$。而$\alpha=1$不是特征根，又$P(x)=x,m=1$，故特解设为$y^*=(ax+b)e^x$，代入原方程得$2a+2b+2ax=x$，比较x的同次幂的系数得

$\begin{cases}a+b=0\\2a=1\end{cases}$解得$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$，故特解为$y^*=\frac{1}{2}(x-1)e^x$。从而通解为

$y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}(x-1)e^x$。

2．设$f(x)=e^{\alpha x}[A_l(x)\cos\beta x+B_n(x)\sin\beta x]$

其中α,β为常数，$A_l(x)$和$B_n\ (x)$分别为l次和n次多项式。此时设非齐次方程（6）有如下形式特解$y^*=x^ke^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$　（10）

其中 k 是特征方程含根$\alpha+i\beta$的重复次数，当$\alpha+i\beta$不是特征根时，可取 0。$m=\max\{l,n\}$ $P_m(x)$和$Q_m(x)$分别是x的m次多项式，其系数待定。

例 9 问方程$y''-2y'+2y=e^x(x\cos x+2\sin x)$具有什么形式的特解？

解　因特征方程$\lambda^2-2\lambda+2=0$的特征根为$\lambda=\pm i$，而$\alpha=0,\beta=2,\alpha+i\beta=2i$不是特征根，故$k=0$；

又　$A_l(x)=x,B_n(x)=0,m=\max\{l,n\}=1$，故特解应设为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$$

代入原方程得$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$

先比较$\cos 2x,\sin 2x$同类项系数，得$\begin{cases}-3ax-3b+4c=x\\3cx+3d+4a=0\end{cases}$

再比较x的同次幂系数，得$\begin{cases}-3a=1\\-3b+4c=0\\3c=0\\3d+4a=0\end{cases}$，解得$a=-\frac{1}{3},b=0,c=0,d=\frac{4}{9}$。于是求得一个特解为$y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$。

当非齐次方程（6）的右端是由多个项相加而成的，可利用下面的叠加原理求得其特解。

设$\tilde{y}_1(x)$和$\tilde{y}_2(x)$分别是线性方程$L(y)=f_1(x)$和$L(y)=f_2(x)$的解，那么$\tilde{y}_1(x)$＋

$\tilde{y}_2(x)$ 是方程 $L(y)=f_1(x)+f_2(x)$ 的解。

4.4.4 变系数线性微分方程的解法

1．欧拉方程

形如 $x^n y^{(n)}+a_1 x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_n y=f(x)$ （14）的微分方程称为欧拉方程，其中 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 是常数。它的特点是，y 的 k 阶导数（k＝0，1，…，n，规定 $y^{(0)}=y$）的系数是 x 的 k 次方乘以常数。

作自变量的变换 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}，\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)，\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)\cdots$$

若引入微分算子符号 $D=\dfrac{d}{dt}$，则上述结果可简记为

$$xy'=Dy，\ x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=(D^2-D)y=D(D-1)y$$

$$x^3y'''=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}=(D^3-3D^2+2D)y=D(D-1)(D-2)y \qquad \cdots$$

一般地 $x^k y^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y$，将上述结果代入方程（14）就可以化为关于 $y(t)$ 的常系数线性方程，于是可求解。下面通过具体例子说明。

例 13 求解方程 $x^2y''+xy'-y=x^2$。

解 与方程（14）对照，这是欧拉方程，利用上述微分算子符号，可直接将变换后的方程写成 $D(D-1)y+Dy-y=e^{2t}$，即 $D^2y-y=e^{2t}$ 或 $\dfrac{d^2y}{dt^2}-y=e^{2t}$，求其通解为 $y=c_1e^t+c_2e^{-t}+\dfrac{1}{3}e^{2t}$，将 e^t 换成 x，即得 $y=c_1x+c_2\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}x^2$。

作业 5，偶数； 6， 8 ，9（1）（欧拉方程）