考试须知

1. 考试结束时，将答题报告的电子版发送到邮箱 wwm1986@mail.dlut.edu.cn. 邮件所带附件的名称是姓名+学号.
2. 考试结束后的一天内，将答题报告纸质版交给本班负责人，由负责人统一交到上课老师信箱（大黑楼10楼信箱）或者办公室。
3. 每位同学一道考试题。每位同学的考题是自己学号尾号对应的题目。比如学号为201600159的同学，尾号为9，考题为第9题，尾号为0的同学，考题为第10题。

1. 已知函数 $y = x^2 \sin(x^2 - x - 2)$, $x \in [-2, 2]$, 按要求完成下面的任务
(1) 用 Matlab 软件求函数 y 的一阶、二阶导函数;
(2) 画出函数 y 及其一阶、二阶导函数曲线, 观察单调区间, 凸凹区间以及极值点, 拐点等;
(3) 用区间二分法（fzero 函数），结合（2）中的观察结果，找出函数的一个零点, 三个极值点和三个拐点.

2. (1) 求函数 $f(x) = x^2$ 在 $[-1, 1]$ 上的傅里叶级数的系数；
(2) 分别取此傅里叶级数的前 n 项（其中 $n = 3, 5, 15, 20$），在不同窗口绘制该傅里叶展开式的曲线;
(3) 同时在这些窗口绘制函数 $f(x)$ 的曲线；
(4) 对比这些图形, 你能得到什么结论?

3. 分别写出 $y = e^x$ 在 $x = 0$ 处的 1 次, 2 次, 3 次直至 5 次泰勒多项式, 在同一坐标系下用不同的颜色绘出这些多项式曲线和曲线 $y = e^x$, 并给每条曲线加标记用以区分. 观察这些多项式曲线跟曲线 $y = e^x$ 的逼近程度与多项式的次数, 由此你可以得出什么结论?

4. 试求解

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = ax + b, \quad x(0) = x_0,$$

并分别对 a, b, x_0 取正负值的 8 种不同情况 (例如 a 为+1，b 为-1，x_0为+1)，讨论解曲线的单调性及 $t \to \infty$ 时的性状. 用 Matlab 画出解曲线图形. 将它们合理分类.

5. (1) 利用 fzero 计算 $y = xsin(x^2 - x + 1)$ 在 (-2, 0) 内的所有零点. (提示：先通过画图估计 $y = 0$ 的零点位置，然后用 fzero 命令每次计算一个零点)
(2) 计算定积分 $\int_{-2}^{0} xsin(x^2 - x + 1)$ 的近似值，误差 $< 10^{-10}$.

6. 一阶 Bézier 曲线是由两个控制点 $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ 决定的直线段，它的参数方程为 $(t \in [0, 1])$:

$$\begin{aligned} x &= (1-t)x_0 + tx_1, \\ y &= (1-t)y_0 + ty_1 \end{aligned}$$

平面二阶 Bézier 曲线就是由三个控制点 $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 确定的抛物线，它的参数方程为 $(t \in [0, 1])$:

$$\begin{aligned} x &= (1-t)^2 x_0 + 2(t-1)tx_1 + t^2 x_2, \\ y &= (1-t)^2 y_0 + 2(t-1)ty_1 + t^2 y_2 \end{aligned}$$

该抛物线从 P_0 出发，向着 P_1 方向，再转向 P_2 并在 P_2 结束。
易见，P_0 和 P_1 处曲线的切线都经过 P_1。
平面上三阶 Bézier 曲线就是由四个控制点$P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_2(x_3, y_3)$ 确定的抛物线，它的参数方程为$(t \in [0, 1])$:

$$
\begin{aligned}
x &= (1-t)^3 x_0 + 3(t-1)^2 t x_1 + 3(1-t)t^2 x_2 + t^3 x_3, \\
y &= (1-t)^3 y_0 + 3(t-1)^2 t y_1 + 3(1-t)t^2 y_2 + t^3 y_3
\end{aligned}
$$

注意，当 $t=0$ 时有 $(x,y)=(x_0,y_0)$，当 $t=1$ 时有 $(x,y)=(x_3,y_3)$。因此，曲线从P_0出发，向着P_1,P_2方向，再转向P_3，并在P_3处结束。下面考虑三阶 Bézier 曲线：

（1）取控制点$P_0(10,5),P_1(28,48),P_2(50,39),P_3(40,8)$，画出相应的Bézier曲线，然后在同一屏幕上画出线段P_0P_1,P_1P_2,P_2P_3 (用 plot 命令画图).

（2）通过改变问题（1）中的第三个控制点 P_2，尝试作出有环的 Bézier 曲线，即曲线出现自交. 并解释你选取第三个控制点的原因.

7. (1) 求解初值问题

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + 2xy, y(1) = 1$$

(2) 设 $y = f(x)$ 是上述方程的解，利用 quad 命令求定积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 的近似值，误差 $< 10^{-12}$.

8. 按要求实现下面的求导运算.
(1) 已知 $y = e^{2x}\ln(x^2+1)\tan(-x)$, 求 $y', y^{(3)}$;
(2) 已知 $z = e^{x^2+y^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

9. 设$f(x)=\begin{cases}\{\frac{1}{x}\}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中函数 $\{x\}$ 表示取数 x 的小数部分, 可以证明 $f(x)$ 在 [0,1] 上可积，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1-C$, C 是欧拉常数. 使用此常数计算欧拉常数 C.

10. 画出下面两个椭圆的图形, 并求出所有交点的坐标及画出交点（提示：可先画图，通过观察交点位置，利用 fsolve 函数计算每个交点）:

$$(x-2)^2+(y+2x-3)^2=5,\quad 18(x-3)^2+y^2=36.$$