5.1.2 向量组的秩和极大无关组

1. 方程组与其增广矩阵是一一对应的，增广矩阵的每个行向量对应于方程组中的一个方程，我们可以将向量组的线性表示、线性相关和线性无关的概念推广到方程组上.

当增广矩阵的行向量组线性相关时，其中至少有一个行向量可由其余的行向量线性表示，这意味着方程组中至少有一个方程可由其余的方程线性表示，通过消元法可将这个方程消掉，也可以说这个方程是“多余”的. 我们研究方程组时，希望去掉“多余”的方程，只保留“最大个数”的线性无关的那些方程，对于增广矩阵就是要保留“最大个数”的线性无关的行向量.

这是为什么要研究极大无关组的其中一个原因，极大无关组还有其它重要应用，在后面会慢慢学到。

2. **定义 5-3** 在向量组 V 中，若有含 r 个向量的子向量组线性无关，并且 V 中任何含 $r+1$ 个向量的子向量组（当 V 中的向量多于 r 个时）都线性相关，则把 r 叫做**向量组 V 的秩**.

若向量组 V 的秩为 r，则 V 中含 r 个向量的线性无关的子向量组叫做 **V 的极大线性无关组**（**简称极大无关组，或称最大无关组**）.

注 1 如果向量组 V 中只含 r 个向量，并且这 r 个向量线性无关，则向量组 V 的秩就是 r.
当向量组 V 中所含向量的个数超过 r 个时，向量组 V 的秩是 r 需满足：V 中有含 r 个向量的子向量组线性无关，并且 V 中任何含 $r+1$ 个向量的子向量组都线性相关。

注 2 向量组 V 的秩反映的是向量组 V 中所含线性无关向量的最大个数。也可以说，向量组 V 的秩反映的是 V 中最多能找到多少个向量放在一起看是线性无关的。

3. 由定义 5-3 可知，

向量组 V **线性无关** $\Leftrightarrow$ 向量组 V 的**秩等于其所含向量的个数.**

向量组 V **线性相关** $\Leftrightarrow$ 向量组 V 的**秩小于其所含向量的个数**.

请同学们注意：这个结论是很重要的。根据这一结论，只要求出向量组的秩，马上就可知道该向量组的线性相关性.

4. 只含零向量的向量组的秩规定为零，它没有极大无关组.

对于含有非零向量的向量组，它的秩存在且唯一；它的极大无关组存在，但一般不唯一.

5. **例** 求向量组 $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix},\mathbf{a}_4=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$ 的秩和一个极大无关组.

注：由于极大无关组一般不唯一，所以通常只要求求出其中的一个极大无关组就可以了。

解 由于 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 不成倍数关系，所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 线性无关。

【 注意：找到两个向量线性无关以后，为了求出所给向量组的秩，下一步需要看一看能否找到含三个向量的子向量组线性无关。】

含三个向量的子向量组总共有四个：$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$； $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$； $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$； $\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$.

【对于上面这四个子向量组，可通过线性相关、线性无关的定义来讨论，也可通过定理 5-3 来讨论，还可通过行列式来讨论。我们下面通过线性相关的定义来讨论。】

通过观察可得：$\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$，$2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_4=\mathbf{0}$，$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3+0\cdot\mathbf{a}_4=\mathbf{0}$，$\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4=\mathbf{0}$

根据线性相关的定义可知，所给向量组中的任三个向量都是线性相关的，所以所给向量组的秩为 2， $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 是所给向量组的一个极大无关组。

注 1： 因为该向量组的秩为 2，所以该向量组中任何两个无关的向量都是该向量组的极大无关组。$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_4$；$\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$；$\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$；$\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ 也都是该向量组的极大无关组。

注 2： 一般来说，根据定义来求向量组的秩和极大无关组都是比较麻烦的，我们将在后面给出一种简便的求法.

6. 由定义 5-3 及定理 5-4 可得下面的定理.

定理 5-7 向量组 V 中的每个向量都可由其极大无关组唯一地线性表示.

证 设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 是向量组 V 的极大无关组。

首先，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 中的每个向量一定能由这个极大无关组唯一地线性表示。例如，

$\mathbf{a}_1 = 1\cdot\mathbf{a}_1 + 0\cdot\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\cdot\mathbf{a}_r$. 按照定理 5-4 的证明还可知，这个表达式一定是唯一的。

因为 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 是向量组 V 的极大无关组，所以根据定义 5-3 可知，V 中任意 $r+1$ 个向量都是线性相关的。

于是，对于 V 中任一个不在极大无关组中的向量 $\mathbf{b}$ 来说，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r,\mathbf{b}$ 都是线性相关的。根据定理 5-4 可知，$\mathbf{b}$ 可由极大无关组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_r$ 唯一地线性表示。证毕

注： 定理 5-7 反映了极大无关组的一个非常重要的特性，这个特性给我们的感觉是：极大无关组可看成是从向量组 V 中选出来的“一组代表”，“这组代表”能把向量组 V 中的所有向量唯一地表示出来。

根据定理 5-7，当一个方程组有无穷多个解时，找到该方程组的所有解向量所构成集合的一个极大无关组，就可用它将该方程组的所有解表示出来，这样我们就找到了表达方程组的解的方法.

7. 向量组的线性相关、线性无关、秩和极大无关组的概念对于行向量组和列向量组都适合，可重点掌握列向量组的情况，对于行向量组可仿照列向量组的情况进行讨论，也可通过转置化为列向量组来讨论.

5.2 矩阵的秩

矩阵的秩是矩阵的一个重要的数值特性,它既可用于求向量组的秩,从而判断向量组的线性相关性,又在方程组等问题的研究中起着非常重要的作用.

5.2.1 矩阵的秩的概念

1. **例 5-4** 分别求列向量组Ⅰ: $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{a}_4=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}$

和行向量组Ⅱ: $\mathbf{b}_1^T=[1,1,0,2],\mathbf{b}_2^T=[1,0,1,1],\mathbf{b}_3^T=[3,2,1,5]$ 的秩和一个极大无关组.

解 (1)由于 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 不成倍数关系，所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 线性无关。

找到 2 个向量线性无关以后，下面要看一看能否找到 3 个向量是线性无关的。

. 通过观察可以看出: $\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4=2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4=2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$.

由定理 5-3 可知，向量组Ⅰ中任何含 3 个向量的子向量组都线性相关，所以向量组Ⅰ的秩为 2; $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 为它的一个极大无关组.

(2)显然，$\mathbf{b}_1^T,\mathbf{b}_2^T$ 线性无关. 由 $\mathbf{b}_3^T=2\mathbf{b}_1^T+\mathbf{b}_2^T$ 及定理 5-3 可知，$\mathbf{b}_1^T,\mathbf{b}_2^T,\mathbf{b}_3^T$ 线性相关，所以向量组Ⅱ的秩为 2; $\mathbf{b}_1^T,\mathbf{b}_2^T$ 为它的一个极大无关组.

2. **定义 5-4** 矩阵 $\mathbf{A}$ 的行向量组的秩和列向量组的秩分别叫做矩阵 $\mathbf{A}$ 的**行秩**和**列秩**.

我们现在来观察一个具体的 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&1\\3&2&1&5\end{bmatrix}$

注意，矩阵 $\mathbf{B}$ 的列向量组就是例 5-4 中的列向量组Ⅰ，矩阵 $\mathbf{B}$ 的行向量组就是例 5-4 中的行向量组Ⅱ.由例 5-4 的结论可知, $\mathbf{B}$ 的行秩和列秩相等,都为 2.

在后面我们将给出结论：任何矩阵的行秩和列秩都是相等的，并且和下面所定义的矩阵的秩也是相等的. 为此，我们先介绍 k 阶子阵的概念。

3. **定义 5-5** 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$1\leqslant k\leqslant \min\{m,n\}$,由矩阵 $\mathbf{A}$ 的 k 个行和 k 个列相交处的 k^2 个元素按照原来的相对位置所构成的方阵叫做矩阵 $\mathbf{A}$ 的 ***k* 阶子阵**，其行列式叫做矩阵 $\mathbf{A}$ 的 ***k* 阶子式**。

对于上面的矩阵 $\mathbf{B}$，它的 1,2 行和 1,3 列相交处的元素所构成的 2 阶子阵为 $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$,对应的二阶子式为 $\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\neq 0$.

$\mathbf{B}$ 的三个行和前三列所构成的 3 阶子阵为 $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\3&2&1\end{bmatrix}$，对应的三阶子式为 $\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\3&2&1\end{vmatrix}=0$.

因为 $\mathbf{B}$ 的每个三阶子式都是由 $\mathbf{B}$ 的三个列所构成的，由例 5-4 可知，$\mathbf{B}$ 的任何三个列向量都是线性相关的，所以 $\mathbf{B}$ 的所有三阶子式都为 0.

【注：在定理 5-2 中讲过，当 $\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$ 为方阵时，向量组 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}|=0$ 】

从上面的讨论中可以看出，矩阵 **B** 中不为 0 的子式的最高阶数是 2，等于 **B** 的行秩、列秩，因而想到把一个矩阵的最高阶非零子式的阶数定义为矩阵的秩应该是合适的.

4. 定义 5-6 矩阵 **A** 中非奇异子阵的最高阶数（即非零子式的最高阶数）称为**矩阵 A 的秩，记作 $r(\mathbf{A})$.**

当 **A** 为零矩阵时，规定 $r(\mathbf{A})=0$.

注：A 为非奇异矩阵 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}|\neq 0$，非奇异子阵对应的子式一定为非零子式 .

5. 设 **A** 为 $m\times n$ 型矩阵，由矩阵的秩的定义可知：

（1）$r(\mathbf{A})\leqslant m$ 且 $\mathrm{r}(\mathbf{A})\leqslant n$.

【注：因为矩阵 **A** 的子式的阶数不会超过 **A** 的行数 m，也不会超过 **A** 的列数 n，所以 $r(\mathbf{A})\leqslant m$ 且 $\mathrm{r}(\mathbf{A})\leqslant n$】

（2）$r(\mathbf{A})=m \Leftrightarrow$ **A** 中有 m 阶子式不为零；

【注：因为矩阵 **A** 中总共有 m 行，所以只要 **A** 中有 m 阶子式不为 0，那么这个子式一定是 **A** 的最高阶非零子式】

$\mathrm{r}(\mathbf{A})=n \Leftrightarrow$ **A** 中有 n 阶子式不为零；

【注：因为矩阵 **A** 中总共有 n 列，所以只要 **A** 中有 n 阶子式不为 0，那么这个子式一定是 **A** 的最高阶非零子式】

$r(\mathbf{A})=r(\mathrm{r}<m$ 且 $\mathrm{r}<n) \Leftrightarrow$ **A** 中有 r 阶子式不为零并且 **A** 的所有 $r+1$ 阶子式都为零.

（3） **A** 的增广矩阵的秩不小于 **A** 的秩.例如，$r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\geq r(\mathbf{A})$.

【注：因为 $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ 包含 **A**，所以 **A** 的子式也都是 $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ 的子式，$[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ 中非零子式的最高阶数一定大于或等于 **A** 中非零子式的最高阶数。类似的结论还有

$$r([\mathbf{A},\mathbf{B}])\geq r(\mathbf{B}),\quad r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\geq \mathrm{r}(\mathbf{A}),\quad r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)\geq \mathrm{r}(\mathbf{B}),\quad r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{A}),$$

$$r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{B}),\ r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{C}),\ r\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}\right)\geq r(\mathbf{D})$$ 】

（4）当 $k\neq 0$ 时，$r(k\mathbf{A})=r(\mathbf{A})$.

【注：我们通过三阶矩阵来观察为什么这个结论是正确的。

设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，则 $k\mathbf{A}=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & ka_{12}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33}\end{bmatrix}$.

$k\mathbf{A}$ 的左上角二阶子式为 $\begin{vmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ ka_{21} & ka_{22}\end{vmatrix}$，它等于 $k^2\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ 是 **A** 中的一个二阶子式。

可见，$k\mathbf{A}$ 中的一个子式与 **A** 中对应的子式只相差一个非零倍数。这两个子式要么同时为 0，要么同时不为 0，非零子式的最高阶数一定相同，所以 $r(k\mathbf{A})=r(\mathbf{A})$的最高阶数。

这个结论也可通过后面讲的行阶梯矩阵来思考】

6. 根据矩阵的秩的定义,求出矩阵 $\mathbf{A}$ 的各阶子式，找到最高阶非零子式,即可求出 $\mathbf{A}$ 的秩.

这样做计算量一般很大，下面我们来研究矩阵的秩的性质，然后给出通过初等变换求秩的简便方法.

5.2.2 矩阵的秩的性质

1. **性质 5-1** $r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})$.

证明 因为 $\mathbf{A}$ 的子阵转置后是 $\mathbf{A}^T$ 的子阵，而**转置运算不改变行列式的值**，所以 $\mathbf{A}$ 的非奇异子阵转置后成为 $\mathbf{A}^T$ 的非奇异子阵，$\mathbf{A}$ 的奇异子阵转置后成为 $\mathbf{A}^T$ 的奇异子阵，$\mathbf{A}$ 的非奇异子阵与 $\mathbf{A}^T$ 的非奇异子阵互相对应，非奇异子阵的最高阶数相同，因而 $r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A})$.

2. **性质 5-2** $r(\mathbf{A})=\mathbf{A}$ 的行秩= $\mathbf{A}$ 的列秩.

该结论通常称为“三秩相等定理”，性质 5-2 的证明在书上本节后面的附录中给出.

【注：性质 5-2 把 A 的秩与 A 的行向量组、列向量组的秩联系到一起了】

3. **定理 5-8** 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{P}$ 为 m 阶可逆矩阵，$\mathbf{B}=\mathbf{P}\mathbf{A}$, 则 $\mathbf{A}$ 中任意 r 个列向量 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 和 $\mathbf{B}$ 中相应的列向量 $\mathbf{b}_{i_1},\mathbf{b}_{i_2},\cdots,\mathbf{b}_{i_r}$ 满足相同的线性表达式，从而具有相同的线性相关性.

【注 1：定理 5-8 非常重要，同学们一定要好好理解、好好掌握】

证明 将 $\mathbf{B}=\mathbf{PA}$ 中的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 按列分块，得 $[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]=\mathbf{P}[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n]$，

即 $[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n]=[\mathbf{Pa}_1,\mathbf{Pa}_2,\cdots,\mathbf{Pa}_n]$，

$$\mathbf{b}_j=\mathbf{Pa}_j\ (j=1,2,\cdots,n).$$

【注意：这个式子非常重要，它反映了 A 的列向量与 B 中对应的列向量之间的关系】

若 $k_1\mathbf{a}_{i_1}+k_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{a}_{i_r}=\mathbf{0}$ 成立，在该式两边左乘 $\mathbf{P}$，得

$$k_1(\mathbf{Pa}_{i_1})+k_2(\mathbf{Pa}_{i_2})+\cdots+k_r(\mathbf{Pa}_{i_r})=\mathbf{0}$$

即 $k_1\mathbf{b}_{i_1}+k_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{b}_{i_r}=\mathbf{0}$ 也成立。

反过来，若 $l_1\mathbf{b}_{i_1}+l_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+l_r\mathbf{b}_{i_r}=\mathbf{0}$ 成立，则

$$l_1(\mathbf{Pa}_{i_1})+l_2(\mathbf{Pa}_{i_2})+\cdots+l_r(\mathbf{Pa}_{i_r})=\mathbf{0}$$

成立。因为 $\mathbf{P}$ 可逆，所以上式中的 $\mathbf{P}$ 可消去。于是，可知

$$l_1\mathbf{a}_{i_1}+l_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+l_r\mathbf{a}_{i_r}=\mathbf{0}$$

也成立。

下面我们来讨论这两个向量组具有相同的线性相关性。

若向量组 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 线性相关，则存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使得

$k_1\mathbf{a}_{i_1}+k_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{a}_{i_r}=\mathbf{0}$ 成立，从前面的证明可知，$k_1\mathbf{b}_{i_1}+k_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{b}_{i_r}=\mathbf{0}$ 也成立，所以向量组 $\mathbf{b}_{i_1},\mathbf{b}_{i_2},\cdots,\mathbf{b}_{i_r}$ 也线性相关。

反过来， 若向量组 $\mathbf{b}_{i_1},\mathbf{b}_{i_2},\cdots,\mathbf{b}_{i_r}$ 线性相关，则存在不全为 0 的数 $l_1,l_2,\cdots,l_r$，使得 $l_1\mathbf{b}_{i_1}+l_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+l_r\mathbf{b}_{i_r}=\mathbf{0}$ 成立，从前面的证明可知，$l_1\mathbf{a}_{i_1}+l_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+l_r\mathbf{a}_{i_r}=\mathbf{0}$ 也成立，所以向量组 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 也线性相关。

可见，这两个向量组相关时都相关，所以这两个向量组具有相同的线性相关性。

注意，这两个向量组不会出现其中一个线性相关，而另一个线性无关的情况。如果其中一个线性无关，那么另一个向量组也一定线性无关。最后这句话可用反证法来证的。

综合上面的讨论可知，定理 5-8 的结论成立.

4. **推论 5-1** 在定理 5-8 的条件下，下列结论正确.

（1） $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的列向量组的极大无关组一一对应，$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{A})$；

（2） $\mathbf{a}_j=k_1\mathbf{a}_{i_1}+k_2\mathbf{a}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{a}_{i_r}\Leftrightarrow\mathbf{b}_j=k_1\mathbf{b}_{i_1}+k_2\mathbf{b}_{i_2}+\cdots+k_r\mathbf{b}_{i_r}$，其中 $1\le j\le n$.

注 1： 因为在定理 5-8 中证明了“$\mathbf{A}$ 中任意 r 个列向量 $\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 与 $\mathbf{B}$ 中相应的列向量 $\mathbf{b}_{i_1},\mathbf{b}_{i_2},\cdots,\mathbf{b}_{i_r}$ 相关时都相关，无关时也都无关”，所以可以想到 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的列向量组的极大无关组一定是一一对应的，进一步可知 $r(\mathbf{B})=r(\mathbf{A})$.

注 2： 按照定理 5-8 的证明方法可类似地证明推论 5-1 的第二个结论。当然，推论 5-1 的第二个结论也可看作定理 5-8 所讲结论的一种变形。

注 3： 当 $\mathbf{P}$ 为可逆矩阵时，$\mathbf{B}=\mathbf{PA}$ 表示用初等行变换将 $\mathbf{A}$ 化成了 $\mathbf{B}$。因而，定理 5-8 和推论 5-1 表明，若用初等行变换将矩阵 $\mathbf{A}$ 化成矩阵 $\mathbf{B}$，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的秩相等，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的列向量组的极大无关组一一对应，并且 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 中对应的列向量满足相同的线性表达式.

5. **性质 5-3** 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵，则

$$r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{AQ})=r(\mathbf{PAQ})=r(\mathbf{A}).$$

注意，性质 5-3 的结论可简述为“在矩阵 A 的左侧、右侧或两侧乘可逆矩阵，秩都不变。”

证明 注意：$\mathbf{PA}$ 可看成推论 5-1 中的 $\mathbf{B}$. 由推论 5-1 的（1）可得，$r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{A})$.

由性质 5-1 及 $\mathbf{Q}$ 可逆，又可得

$$r(\mathbf{AQ})=r((\mathbf{AQ})^T)=r(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A}).$$

【注：$r(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}^T)=r(\mathbf{A}^T)$ 是根据刚才证明的公式 $r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{A})$ 得来的】

进一步利用刚证明完的两个结论，可得

$$r(\mathbf{PAQ})=r(\mathbf{P}(\mathbf{AQ}))=r(\mathbf{AQ})=r(\mathbf{A}).\quad 证毕$$

6. 由于在矩阵 $\mathbf{A}$ 的左侧（右侧）乘以可逆矩阵相当于对 $\mathbf{A}$ 进行初等行（列）变换，于是有下面的推论。

推论 5-2 **初等变换不改变矩阵的秩.**

根据推论 5-2, 我们可以先对矩阵进行化简，然后再来求它的秩.

7. **例 5-5** 求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 的秩，并判断 $\mathbf{A}$ 的行向量组和列向量组的线性相关性.

解 对 $\mathbf{A}$ 进行初等行变换，得

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{1}{5}r_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{B}.$$

由于 $\mathbf{B}$ 中每个非零行的第一个非零元素所在的那些行和列相交处的元素所构成的子式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}\neq 0,$$

而 $\mathbf{B}$ 中任何 4 阶子式都为 0，所以 $r(\mathbf{B})=3$. 由推论 5-2 可知，$r(\mathbf{A})=3$.

【注：构造 B 的 4 阶子式时一定要用到 B 的第 4 行，因为 B 的第 4 行全为 0，所以 B 的 4 阶子式一定都为 0】

由三秩相等定理可知，$\mathbf{A}$ 的行秩= $\mathbf{A}$ 的列秩=3,所以 $\mathbf{A}$ 的行向量组和列向量组都是线性相关的.

【注：向量组 V 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组 V 的秩等于其所含向量的个数.
向量组 V 线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组 V 的秩小于其所含向量的个数. 】

注；求矩阵的秩时，行变换、列变换都可用。由于我们讲完例 5-5 以后，还想在此基础上继续讲行最简形的概念，所以我们在前面只做了行变换。

8. 类似于例 5-5 中矩阵 $\mathbf{B}$ 的矩阵称为行阶梯矩阵，其特点是：

（1）它的非零行向量都位于矩阵的前几行;

（2）用一条折线将左下角全为 0 的部分与右上角不全为 0 的部分分割时，折线在每个拐角处的高度为一个行。

下面这两个矩阵都不是行阶梯矩阵。

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\qquad\qquad\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

注意：这两个矩阵的折线都有一个拐角的高度是两个行，用红色虚线标出来了。对于这两个矩阵，进一步做行变换，还能减少非零行的个数。

9. **用初等行变换求矩阵的秩的方法为：用初等行变换把该矩阵化为行阶梯矩阵，这个行阶梯矩阵的非零行向量的个数就是该矩阵的秩.**

10. 下面对例 5-5 中的矩阵 **B** 继续做初等行变换，观察能将 **B** 化为何种更简单的形式.

$$\mathbf{B}\xrightarrow[r_3\div 5]{r_2\div 2}\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&0&1&1&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{bmatrix}1&-1&1&0&2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{C}.$$

矩阵 C 称为矩阵 A 的行最简形，它具有下面特点：

（1）首先是行阶梯矩阵。

（2）非零行的第一个非零元素都为 1 且这些 1 所在列的其它元素都为零。

再对矩阵 **C** 进行初等列变换可将 **C** 化成 $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，即 $\begin{bmatrix}\mathbf{E}_3&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{bmatrix}$. 从上面的化简过程我们可得出下面的结论。

11. **性质 5-4** $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 的秩为 $r\Leftrightarrow\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{bmatrix}$ 等价，即存在可逆矩阵 **P** 和 **Q**，使得 **PAQ**=**F**.

证明 由推论 5-2 可知，充分性正确.

必要性　由定理 1-2 可知，用初等变换能把 **A** 化为 $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_s&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{bmatrix}$ 的形式.由推论 5-2 可知 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{F})$, 即 r=s，所以 **A** 与 $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_r&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{bmatrix}$ 等价。由推论 3-4 知，存在可逆矩阵 **P** 和 **Q**,使得 **PAQ**=**F**

根据性质 5-4 可知，矩阵 **A** 的等价标准形 **F** 由 **A** 的秩唯一确定，即 **A** 的等价标准形是唯一的.