课程名称：<u>线性代数与解析几何</u>

一、（每小题 4 分，共 60 分）填空题

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=$ ________

2. 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\gamma_1,\gamma_2]$ 和 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta},\gamma_1,\gamma_2]$ 都为三阶方阵，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma_1,\gamma_2$ 都是三元列向量，$|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$，则 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\gamma_1,\gamma_1+2\gamma_2|=$ ________

3. $\begin{vmatrix}2+k & k & k & k\\ k & 1+k & k & k\\ k & k & 1+k & k\\ k & k & k & 1+k\end{vmatrix}=$ ________

4. 在空间直角坐标系下，经过点 $(1,0,-1)$ 且垂直于直线 $\begin{cases}x-y+z=0\\ x+y-2z=2\end{cases}$ 的平面的方程为________________

5. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________

6. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{b}_3=k\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3$ 线性相关，则 $k=$ ________

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=3$, 则 $k=$ ________

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$r(\boldsymbol{A})=2$, $\boldsymbol{u}_1=(2,-1,1)^T$ 和 $\boldsymbol{u}_2=(1,0,0)^T$ 都是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解，则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为__________

9. 设$\boldsymbol{a}_1=(1,1,0)^T, \boldsymbol{a}_2=(1,k,-1)^T, \boldsymbol{a}_3=(1,0,1)^T$所生成的向量空间的维数为2，则$k=$______

10. 设$\boldsymbol{\alpha}$是单位列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$是正交矩阵，则$k$需满足条件____________________

11. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+(k-1)x_3^2+2kx_1x_2$为正定二次型的充要条件是$k$满足______________

12. Oyz面上的抛物线$y^2=z$绕着z轴旋转一周所形成的旋转面的方程为______________

13. 设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=0, r(\boldsymbol{A})=2$，则$\boldsymbol{A}$的相似标准形为____________

14. 设$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$是正交的三元单位列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$，则$\left|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}\right|=$____

15. 设$-2,2,2$为三阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{p}_1=[1,-1,0]^T$为$-2$对应的特征向量，则$\boldsymbol{A}=$______

二、（每小题 2 分，共 10 分）选择题

1. 设$\boldsymbol{A}$为 3 阶方阵，对调$\boldsymbol{A}$的$1,2$行得到$\boldsymbol{B}$，再将$\boldsymbol{B}$的第 2 列加到第 3 列得到单位矩阵，记$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，

则$\boldsymbol{A}=$（　　　　）

（A）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　（B）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　　（C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$　　（D）$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1$

2. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶方阵，$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵，且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，则必有（　　　）

（A）$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right|=0,\left|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right|=0$　　　（B）$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right|=0,\left|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right|\neq 0$

（C）$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right|\neq 0,\left|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right|=0$　　　（D）$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right|\neq 0,\left|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\right|\neq 0$

3. 若向量组α,β,γ线性无关，α,β,δ线性相关，则下列选项中正确的是（　　　）

（A）α必可由β,γ,δ线性表示

（B）β必可由α,γ,δ线性表示

（C）γ必可由α,β,δ线性表示

（D）δ必可由α,β,γ线性表示

4. 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$为$n\times k$矩阵，则下列选项中正确的是（　　　）

（A）当$m>n$时，方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=0$有非零解

（B）当$m>k$时，方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=0$只有零解

（C）当$k>n$时，方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=0$有非零解

（D）当$k>m$时，方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=0$只有零解

5. 设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的三元列向量组，

$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=-\alpha_3$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$，

则$\boldsymbol{P}=($　　　$)$

（A）$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$　　　（B）$\left(2\alpha_3,-\alpha_1,3\alpha_1-\alpha_2\right)$

（C）$\left(\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_1\right)$　　　（D）$\left(-\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3\right)$

三（**10** 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AXA}^{-1}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{XA}^{-1}$，求 $\boldsymbol{X}$.

四（**12** 分）当 k 满足什么条件时，方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+kx_2+2x_3=0\\ kx_1+x_2-x_3=3\end{cases}$

有唯一解；无解；有无穷多解？在有无穷多解时，求出其通解.

五（**8** 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三元列向量组，$\boldsymbol{A}\alpha_1=\alpha_1$，$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2$，$\boldsymbol{A}\alpha_3=\alpha_1-\alpha_3$，证明：$\boldsymbol{A}$ 一定可相似对角化。