第 9 章　二次型与二次曲面

空间的曲面和曲线是空间解析几何的重要组成部分，也是学习多元微积分和大学物理等课程的基础。二次型是线性代数的又一个重要的研究对象，它不仅是研究二次曲面的工具，而且在线性系统的理论和工程技术的许多领域中都有应用。

9.1　二次型的概念及标准形

9.1.1　二次型的定义及矩阵表示

1. 定义 9-1　关于 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**二次齐次函数**

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \qquad (9.1)$$

称为 ***n* 元二次型.**

注 1：在二次型的定义中，平方项的系数都写成单个数，**混合项的系数都写成了 2 倍的形式**，这样做的目的是为了下面讲述问题更方便。

注 2：系数的下标与后面变量的下标有着很好的对应关系。例如，a_{11} 是 x_1x_1（即 x_1^2）的系数；a_{12} 是 x_1x_2 的系数的一半。

2. 系数全为实数的二次型叫做**实二次型.**　我们现在只讨论实二次型，简称为二次型.

3. **只含平方项**的二次型 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 称为**标准二次型.**

形如 $h(z_1,z_2,\cdots,z_n)=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+q}^2$ 的二次型称为**规范二次型.**

例　设 $g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+3y_2^2-4y_3^2$，

上式可写成 $g(y_1,y_2,y_3)=(\sqrt{2}y_1)^2+(\sqrt{3}y_2)^2-(2y_3)^2$

令 $\begin{cases} z_1=\sqrt{2}y_1 \\ z_2=\sqrt{3}y_2 \\ z_3=2y_3 \end{cases}$，可将标准二次型化成规范二次型 $h(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

注：如果不要求写出所做的变换，知道标准二次型以后，马上就能写出规范二次型。做法是：把正的系数变成 1，负的系数变成 -1.

4. 为了便于二次型的研究，我们给出二次型的矩阵形式.

当 $j>i$ 时，令 $a_{ji}=a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，式(9.1)可写成

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\ &+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ &+\cdots \\ &+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

注：第1行每项都含x_1, 对于混合项, 只拿一半
第2行每项都含x_2, 对于混合项, 只拿一半
⋮
第n行每项都含x_n, 对于混合项, 只拿一半

$$
\begin{aligned}
&= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
&\quad + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)
\end{aligned}
$$

注：第1行往外提公因式x_1，
第2行往外提公因式x_2，
⋮
第n行往外提公因式x_n

$$
= [x_1, x_2, \cdots, x_n]\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}
$$

$$
= [x_1, x_2, \cdots, x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.
$$

若记 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}, \mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$,则式（9.1)可写成**矩阵形式 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$**

其中，$\mathbf{A}$ 为对称矩阵，叫做**二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵**.

注 1　$\mathbf{A}$ 的对角元 a_{ii} 为 x_i^2 的整个系数，$\mathbf{A}$ 的非对角元 a_{ij} 为 x_ix_j 的系数的 $\frac{1}{2}$. 【要好好记住】

注 2　如无特别注明,以后讲到二次型的矩阵形式 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 时均假定 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵.

注 3　标准二次型和规范二次型的矩阵都是对角矩阵。

5. 由上述讨论可以看出，二次型与对称矩阵之间是一一对应的. 因此，我们既可把二次型的问题转换成对称矩阵的问题进行研究，又可把对称矩阵的问题转换成二次型的问题进行研究.

注：“二次型与对称矩阵之间是一一对应的”这个结论对学习第九章前两节非常重要，我们经常要把二次型与对称矩阵的问题进行相互转换。

6. 对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩叫做**二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的秩**.

例 9-1　二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ 的矩阵形式为 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$

其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

注：写对称矩阵**A**时可分两步写，
第1步先写对角元，根据平方项的系数来写，
第2步写非对角元，根据混合项的系数来写，
非对角元a_{ij}是混合项x_ix_j的系数的一半，
同时写出a_{ij}和a_{ji}

显然 $r(\mathbf{A}) = 2$，所以该二次型的秩为 2.

9.1.2　线性变换与合同变换

1. 为了研究二次型，我们需要通过变量替换将其化为标准的二次型.为此，先介绍线性变换的概念.

2. **定义 9-2**　设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{x}$ 分别是 $m\times n$ 型矩阵和 n 元列向量，把 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 叫做从 n 元向量 $\mathbf{x}$ 到 m 元向量 $\mathbf{y}$ 的**线性变换**.

当 $\mathbf{A}$ 为可逆矩阵时，$\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$ 叫做**可逆变换**.

当 $\mathbf{A}$ 为正交矩阵时，$\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$ 叫做**正交变换**.

3. 正交变换是一种特殊的可逆变换，它具有下面的性质.

性质 9-1 设 $\mathbf{Q}$ 为 n 阶正交矩阵，$\mathbf{x}_1\in\mathbf{R}^n,\mathbf{x}_2\in\mathbf{R}^n,\mathbf{y}_1=\mathbf{Qx}_1,\mathbf{y}_2=\mathbf{Qx}_2$，$\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 的夹角为 θ，$\mathbf{y}_1$ 与 $\mathbf{y}_2$ 的夹角为 φ，则 $(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),\ \|\mathbf{y}_1\|=\|\mathbf{x}_1\|,\varphi=\theta$.

证明 由 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵，可得 $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{E}$. 于是，有

$$(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)=\mathbf{y}_1^T\mathbf{y}_2=(\mathbf{Qx}_1)^T(\mathbf{Qx}_2)=\mathbf{x}_1^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Qx}_2=\mathbf{x}_1^T\mathbf{Ex}_2=\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),$$

$$\|\mathbf{y}_1\|=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_1)^{\frac{1}{2}}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1)^{\frac{1}{2}}=\|\mathbf{x}_1\|,$$

$$\varphi=\arccos\frac{(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)}{\|\mathbf{y}_1\|\|\mathbf{y}_2\|}=\arccos\frac{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1\|\|\mathbf{x}_2\|}=\theta .$$

性质 9-1 表明，**正交变换保持向量的内积、长度和夹角不变，因而在几何空间中保持几何图形不变.**

4. 下面考察在可逆变换下二次型的变化规律.

对二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 进行可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Py}$，

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=(\mathbf{Py})^T\mathbf{A}(\mathbf{Py})=\mathbf{y}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{AP})\mathbf{y}$$

这时得到一个新的二次型 $g(\mathbf{y})=\mathbf{y}^T\mathbf{By}$，其中 $\mathbf{B}=\mathbf{P}^T\mathbf{AP}$.

根据 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的关系，我们给出下面的定义。

定义 9-3 对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$，若存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}=\mathbf{B}$，则称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **合同**（也称 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **相合**）；变换 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ 叫做对 $\mathbf{A}$ 进行**合同变换**（也叫做**相合变换**）.

当 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵时，由 $\mathbf{B}^T=(\mathbf{P}^T\mathbf{AP})^T=\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^T)^T=\mathbf{P}^T\mathbf{AP}=\mathbf{B}$ 可知，$\mathbf{B}$ 也为对称矩阵，即**合同变换不改变矩阵的对称性**.

注 1：若 $\mathbf{M}$ 可逆，$\mathbf{MAM}^T=\mathbf{B}$，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 也是合同的。因为这时有 $(\mathbf{M}^T)^T\mathbf{AM}^T=\mathbf{B}$.

注 2：当 $\mathbf{Q}$ 为正交矩阵时，$\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\mathbf{B}\Leftrightarrow\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}=\mathbf{B}$.

5. 由上面的讨论可以看出，用可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Py}$ 将二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 化成 $g(\mathbf{y})=\mathbf{y}^T\mathbf{By}$ 的实质是用合同变换将 $\mathbf{A}$ 化成 $\mathbf{B}$，即 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}=\mathbf{B}$.【注：要好好理解这个结论】

9.1.3 用正交变换化二次型为标准形(注：这一部分是本节的重点)

1. 对于二次型，我们要解决的一个主要问题是寻找一个可逆变换将二次型化为标准形（即标准二次型）. 由前面的讨论及标准形的矩阵为对角矩阵可知，若 $\mathbf{P}$ 可逆，且 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}=\mathbf{B}$ 为对角矩阵，则可

逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Py}$ 将二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 化为标准形 $g(\mathbf{y})=\mathbf{y}^T\mathbf{By}$.

2. 由定理 8-8 可知，对于任何实对称矩阵 $\mathbf{A}$，都存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使 $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}=\mathbf{\Lambda}$（即 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\mathbf{\Lambda}$）为对角矩阵，因而通过正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Qy}$ 可将二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 化为标准形.于是，有下面的定理。

定理 9-1 对于任给的 n 元二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$，总有正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Qy}$，把 $f(\mathbf{x})$ 化为标准形 $g(\mathbf{y})=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值.

注 1 $\mathbf{Q}$ 的列向量是 $\mathbf{A}$ 的**两两正交的单位特征向量**，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathbf{A}$ 的 n 个特征值，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 在标准形中的排列次序与特征向量在正交矩阵 $\mathbf{Q}$ 中的排列次序相对应.

注 2 如果不要求求正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Qy}$，那么特征值在标准形中的次序可以随便写. 求出 $\mathbf{A}$ 的特征值，就能写出二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 的标准形.

3. **例 9-2** 求一正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Qy}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 化为标准形.

解 ①该二次型的矩阵形式为 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$,其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

【注：这一步主要是写出 $\mathbf{A}$ 】

②针对 $\mathbf{A}$，按照例 8-9 的方法，可求得正交矩阵 $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$

使 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$，即 $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$

【注：第二步是主要的计算过程，也是在第 8 章第 3 节应该掌握的计算】

③正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Qy}$ 将该二次型化为标准形 $g(\mathbf{y})=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

【注：对 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ 做正交变换 $\mathbf{x}=\mathbf{Qy}$，可得 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}=(\mathbf{Qy})^T\mathbf{A}(\mathbf{Qy})=\mathbf{y}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ})\mathbf{y}=g(\mathbf{y})$.

$g(\mathbf{y})=\mathbf{y}^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ})\mathbf{y}=[y_1,y_2,y_3]\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$ 】

例 在空间直角坐标系下，方程 $2xy+2xz-2yz=1$ 表示什么曲面？

解 方程 $2xy+2xz-2yz=1$ 可写成矩阵形式 $[x,y,z]\mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1$，其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$.

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{\underset{r_3+r_1}{=}}\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ \lambda-1 & \lambda-1 & 0\\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),,$$

$\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$（二重），$\lambda_2=-2$（单）.

通过正交变换可将所给方程化成标准方程 $x_1^2+y_1^2-2z_1^2=1$.

根据标准方程可知，所给方程表示旋转单叶双曲面。【注：正交变换保持几何图形不变】

9.1.4 用配方法化二次型为标准形

[注：配方法所用变换是普通的可逆变换，不是正交变换】

用正交变换化二次型为标准形具有保持几何图形不变的优点. 除了用正交变换，有些问题也可用普通的可逆变换来把二次型化为标准形，方法有很多，这里只介绍拉格朗日配方法.下面举例说明这种方法.

例 9-3 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$，求一可逆变换将该二次型化为标准形.

注：$x_1^2+ax_1x_2+bx_1x_3=(x_1+\frac{a}{2}x_2+\frac{b}{2}x_3)^2-\frac{a^2}{4}x_2^2-\frac{b^2}{4}x_3^2-\frac{ab}{2}x_2x_3$

$x_2^2+cx_2x_3=(x_2+\frac{c}{2}x_3)^2-\frac{c^2}{4}x_3^2$

解 由于该二次型中含有变量 x_1 的平方项，故可先把含 x_1 的项集中起来进行配方，

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3)+2x_2^2+3x_3^2+8x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+2x_3^2$$

上式右端除第一项外已不再含有 x_1.由于剩下的部分含有 x_2 的平方项，再对含有 x_2 的项配方，

可得 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-7x_3^2$.

【注：按照这种格式进行配方的目的是为了保证所做的变换为可逆变换】

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=\quad x_2+3x_3\\ y_3=\qquad x_3\end{cases}$， 即 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3\\ x_2=\quad y_2-3y_3\\ x_3=\qquad y_3\end{cases}$，

则把所给二次型化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-7y_3^2$.

所用的可逆变换为 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，其中 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\mathbf{P}$ 为可逆矩阵.

注意 如果令 $\begin{cases}z_1=y_1\\ z_2=y_2\\ z_3=\sqrt{7}y_3\end{cases}$，则可把所给二次型化为规范形（即规范二次型）

$$h(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2-z_3^2.$$

例 9-4 求一可逆变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 化为标准形.

解 由于该二次型中不含平方项，但含有混合项 x_1x_2， 令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ (9.2)

可得含有平方项的二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-2y_2^2+4y_2y_3$.

对含有 y_2 的项配方，得 $g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-2(y_2-y_3)^2+2y_3^2$.

令 $\begin{cases}z_1=y_1\\z_2=y_2-y_3\\z_3=y_3\end{cases}$， 即 $\begin{cases}y_1=z_1\\y_2=z_2+z_3\\y_3=z_3\end{cases}$ (9.3)

则把所给二次型化为标准形 $h(z_1,z_2,z_3)=2z_1^2-2z_2^2+2z_3^2$.

将式(9.2)和式(9.3)复合，可得所求的可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{z}$， $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

通过以上两个例子可以看出，如果二次型不含有平方项，可先用一个可逆变换将其化为含有平方项的二次型；对于含有 x_i^2 的二次型，可先将含有 x_i 的项集中起来进行配方.对剩下的部分，仍按上述方法进行.如此反复做下去，就可得到标准形.对于多次变换的情况，需要将各次变换合并起来，求出总的可逆变换的表达式及矩阵.

9.1.5 惯性定理

1. 由例 9-2 和例 9-4 可以看出，用不同的方法将二次型所化为的标准形一般是不同的，但是标准形所含的平方项的项数是相同的，并且正、负平方项的项数对应相等，这反映了二次型在可逆变换下的一个不变的性质，通常称为二次型的惯性定理.

2. 设用可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$ 将二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 化为标准形 $g(\mathbf{y})=\mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y}$,则 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$ 且 $\mathbf{B}$ 为对角矩阵.

标准形 $g(\mathbf{y})=\mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y}$ 中平方项的项数

$=\mathbf{B}$ 的非零对角元的个数【注：标准形中平方项的系数为 $\mathbf{B}$ 的对角元】

$=r(\mathbf{B})$

$=r(\mathbf{A})$【注：由 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{P}$ 可逆，可得 $r(\mathbf{B})=r(\mathbf{A})$ 】

由上面的讨论可知，**标准形 $g(\mathbf{y})$ 中平方项的项数等于 $r(\mathbf{A})$.**

3. **定理 9-2** （**惯性定理**）用任何可逆变换将 n 元二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 所化为的标准形的正、负平方项的项数都对应相等. 【该定理的证明不做要求，感兴趣的同学可看一下教材】

该定理的结论也可叙述为:用任何可逆变换将一个二次型所化成的**标准形的正、负平方项的项数都是固定不变的**。

4. 由惯性定理可知,一个二次型的标准形中正、负平方项的项数由该二次型唯一确定，这两个数能反映一个二次型的某些特征，因而我们给出下面的定义.

定义 9-4 一个二次型的标准形的正、负平方项的项数分别叫做该二次型的**正、负惯性指数.**

5. **推论 9-1** 若二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则存在可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$，将该二次型化为规范形 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$.

注：将标准形中正的系数变成1，负的系数变成 -1，就可将标准形化成规范形。

6. 由于用可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$ 将二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 化为标准形等价于用相合变换 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ 将矩阵 $\mathbf{A}$ 化为对角矩阵. 因此，也可给出实对称矩阵的惯性定理及正、负惯性指数的概念.

定理 9-2′ （实对称矩阵的惯性定理） 用任何相合变换将实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 所化为的对角矩阵的正、负对角元的个数都对应相等.

定义 9-4′ 与实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 相合的对角矩阵的正、负对角元的个数分别叫做 $\mathbf{A}$ 的正、负惯性指数.

注：实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的正、负惯性指数等于二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的正、负惯性指数，可通过配方法将二次型化为标准形来求，也可通过 $\mathbf{A}$ 的特征值来求。

7. 与推论 9-1 相对应，我们有下面的推论。

推论 9-1′ 若实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则 $\mathbf{A}$ 相合于对角矩阵 $\operatorname{diag}(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O})$，即存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\operatorname{diag}(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O})$$

通常称 $\operatorname{diag}(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O})$ 为实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的**相合标准形（也叫合同标准形）**.【要记住】

下面给出**推论 9-1′ 的证明：**

证法 1： 推论 9-1 中的规范形的矩阵形式为 $\mathbf{y}^T\begin{bmatrix}\mathbf{E}_p & & \\ & -\mathbf{E}_q & \\ & & \mathbf{O}\end{bmatrix}\mathbf{y}$.

推论 9-1 的结论是：存在可逆变换 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$ 将 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ 化成规范形 $\mathbf{y}^T\begin{bmatrix}\mathbf{E}_p & & \\ & -\mathbf{E}_q & \\ & & \mathbf{O}\end{bmatrix}\mathbf{y}$.

这意味着：

$$(\mathbf{P}\mathbf{y})^T\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{y})=\mathbf{y}^T\begin{bmatrix}\mathbf{E}_p & & \\ & -\mathbf{E}_q & \\ & & \mathbf{O}\end{bmatrix}\mathbf{y}，即\ \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_p & & \\ & -\mathbf{E}_q & \\ & & \mathbf{O}\end{bmatrix}$$

证法 2: 设实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的正、负惯性指数分别为 p 和 q，则 $\mathbf{A}$ 有 p 个正特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ 和 q 个负特征值 $\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}$. 于是，存在正交矩阵 $\mathbf{Q}$，使得

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q},0,\cdots,0),$$

即 $$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,-|\lambda_{p+1}|,\cdots,-|\lambda_{p+q}|,0,\cdots,0).$$

取 $\mathbf{D}=\operatorname{diag}(\lambda_1^{-\frac{1}{2}},\cdots,\lambda_p^{-\frac{1}{2}},|\lambda_{p+1}|^{-\frac{1}{2}},\cdots,|\lambda_{p+q}|^{-\frac{1}{2}},1\cdots,1)$，则

$$\mathbf{D}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}D = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0),$$

即 $$(\mathbf{Q}\mathbf{D})^T\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{D}) = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0).$$

记 $\mathbf{P}=\mathbf{Q}\mathbf{D}$，则 $\mathbf{P}$ 可逆， $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0).$

8. 例 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}$ 的相合标准形（即合同标准形）。

解 $$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix}\lambda&-2&-2\\-2&\lambda&-2\\-2&-2&\lambda\end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-2\\\lambda-4&\lambda&-2\\\lambda-4&-2&\lambda\end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=}} \begin{vmatrix}\lambda-4&-2&-2\\0&\lambda+2&0\\0&0&\lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)(\lambda+2)^2$$

$\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=4(单),\lambda_2=-2(2重)$

$\mathbf{A}$ 的相合标准形（即合同标准形）为 $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}.$

9. **定理** 两个同阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同的充要条件是 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的正、负惯性指数对应相等。

证明：必要性. 设 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B},\ \mathbf{Q}^T\mathbf{B}\mathbf{Q}=diag(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O}),\ \mathbf{P}和\mathbf{Q}都可逆$，则有

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{Q}=diag(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O}),即(\mathbf{P}\mathbf{Q})^T\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{Q})=diag(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O})$$

根据定义 9-4′ 可知，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的正惯性指数都为 p，负惯性指数都为 q.

充分性. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的正惯性指数都为 p，负惯性指数都为 q.

根据推论 9-1′，存在可逆矩阵 $\mathbf{P}_1和\mathbf{P}_2$，使得

$\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1=diag(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O}),\ \ \mathbf{P}_2^T\mathbf{B}\mathbf{P}_2=diag(\mathbf{E}_p,-\mathbf{E}_q,\mathbf{O})$

$\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2^T\mathbf{B}\mathbf{P}_2$，即 $(\mathbf{P}_2^T)^{-1}\mathbf{P}_1^T\mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1}=\mathbf{B}$，也即 $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1})^T\mathbf{A}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1})=\mathbf{B}$

所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 合同.

由上面必要性的证明可得结论：

定理 相合变换保持实对称矩阵的正、负惯性指数不变。

例 设 $\mathbf{A}$ 为实对称矩阵，则与 $\mathbf{A}$ 合同的矩阵为（ ）

（A）$\mathbf{A}-\mathbf{E}$ （B） $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ （C）$\mathbf{A}^3-\mathbf{A}$ （D）$\mathbf{A}^3+\mathbf{A}$

解： 设 λ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 $\lambda-1,\lambda+1,\lambda^3-\lambda,\lambda^3+\lambda$ 依次为 $\mathbf{A}-\mathbf{E}$，$\mathbf{A}+\mathbf{E}$，$\mathbf{A}^3-\mathbf{A}$，$\mathbf{A}^3+\mathbf{A}$ 的特征值。可以看出，$\mathbf{A}$ 的特征值与 $\mathbf{A}^3+\mathbf{A}$ 的特征值的正负号相同，这意味着：$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^3+\mathbf{A}$ 的正负惯性指数相同，所以 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^3+\mathbf{A}$ 合同。