习题参考答案与解析

第一篇　高等数学

第一章　函数　极限　连续

基础单项训练

1.D 【解析】 因$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}$，存在$\delta>0$，当$0<x<\delta$时$f(x)$有界. 因$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{x^3+x^2}=1$，存在$X>0$，当$x\in(X,+\infty)$时，$\frac{x^3+x+1}{x^3+x^2}$有界，又$|1-\cos x|\leqslant 2$，所以当$x\in(X,+\infty)$时$f(x)$有界. 又$f(x)$在$[\delta,X]$上连续，从而有界. 综合之，$f(x)$在$(0,+\infty)$上有界. 选(D).

2.C 【解析】 若$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在，而由已知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在矛盾，故$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$必不存在. 选(C).

3.A 【解析】 ①、②、③、④ 都不正确. 选(A).

① 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ -1, & \text{当 } x<0.\end{cases}$ $f(x)$在$x=0$处间断，而$|f(x)|$在$x=0$处连续.

② 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, x\neq x_0,\\ 0, x=x_0.\end{cases}$ 有$\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0-h)=1$，而$f(x)$在$x=x_0$处并不连续.

③ 的反例：设$f(x)$在$x=x_0$连续且$f(x_0)=0$，$g(x)$在$x=x_0$的邻域有定义且有界但不连续，则显然有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0=f(x_0)g(x_0)$，$f(x)g(x)$在$x=x_0$连续.

④ 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $f(x)+g(x)\equiv 0$，它在$x=0$是连续的.

4.C 【解析】 由题设$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=c_1\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0}=c_2\neq 0$.

故$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0}=0\cdot c_2=0$. 选(C).

5.$\begin{cases}\frac{1}{x+1}, & \text{当 } x>0\\ x, & \text{当 } x=0\\ \frac{1}{x-1}, & \text{当 } x<0\end{cases}$ 【解析】 按复合关系先写出

$$f(f(x))=\begin{cases}-f(x), & \text{当 } f(x)\geqslant 0\\ \frac{1}{1-f(x)}, & \text{当 } f(x)<0\end{cases},$$

再将题给的$f(x)$的表达式代入上式右边，得

$$f(f(x))=\begin{cases}-(-x), & 当\ -x\geqslant 0, x\geqslant 0\\ -\dfrac{1}{1-x}, & 当\ x<0, \dfrac{1}{1-x}\geqslant 0\\ \dfrac{1}{1-(-x)}, & 当\ x\geqslant 0, -x<0\\ \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}, & 当\ x<0, \dfrac{1}{1-x}<0\end{cases}$$

化简上式右边，第 4 式的定义域为空集，删去之，得

$$f(f(x))=\begin{cases}x, & 当\ x=0\\ \dfrac{1}{x-1}, & 当\ x<0\\ \dfrac{1}{x+1}, & 当\ x>0\end{cases} 或记为 \frac{\operatorname{sgn}x}{1+|x|}, 当\ x\in(-\infty,+\infty).$$

6. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{\sqrt{2}\left[\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x}{\sqrt{2}\cdot\dfrac{x}{4}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. e 【解析】 $(1+e^{\frac{1}{x}})^{\ln(1+x)}=e^{\ln(1+x)\cdot\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$，

$\lim\limits_{x\to0^+}[\ln(1+x)\cdot\ln(1+e^{\frac{1}{x}})]=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(1+e^{\frac{1}{x}})=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^u)}{u}\xlongequal{洛}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{1+e^u}=1$，所以原式 $=e$.

8. $e^{\frac{1}{2}}$ 【解析】 $\left(\sin^2\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{x^2\ln(\sin^2\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})}$，

$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(\sin^2\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(\sin^2t+\cos t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin^2t+\cos t-1}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\cos t(1-\cos t)}{t^2}=\dfrac{1}{2}$，

所以原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

9. $\frac{\sqrt{2}}{32}$ 【解析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{(2x)^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{8x^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\dfrac{\sqrt{2}}{32}$.

10. e^{-1} 【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{3x+1}\right)^{(-\frac{3x+1}{x})(-\frac{1}{3x+1})}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}(-\frac{1}{3x+1})}=e^{-1}$.

11. e^2 【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}\xlongequal{洛}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+e^x}{x+e^x}=2$，所以原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)}=e^2$.

基础综合训练

1. D 【解析】 由 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=b$，$a<b$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^-}(g(x)-f(x))=b-a>0$. 由保号性定理知，存在去心邻域 $\mathring{U}_\delta(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，有 $g(x)-f(x)>0$. 选(D). 其他均可举出反例.

2. B 【解析】 考虑分母为 0 处. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{洛}-1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}=1$. 所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. 选(B).

3. C 【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}e^x\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x-x}-1}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^n}\xlongequal{洛}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2x}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{nx^{n-1}}$

$\xlongequal{当\ n=3\ 时}\dfrac{1}{3}$. 所以 $n=3$，选(C).

4. C 【解析】 先写出选项中各个函数的具体表达式.

(A) 因在 $x=0$ 的去心邻域 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|}$，所以 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$，故 $\max\{f(x),g(x)\}=1$，它处处连续.

(B) $\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$ 它在 $x=0$ 处也连续.

(C) $f(x)-g(x)=\begin{cases}1-x\sin\dfrac{1}{x}, 当\ x\neq 0\\ -1, \quad 当\ x=0\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin\dfrac{1}{x})=1\neq f(0)-g(0)=-1$,所以 $x=0$ 为它的间断点.

(D) $f(x)+g(x)=\begin{cases}1+x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=1=f(0)+g(0)$. 所以 $x=0$ 为它的连续点. 选(C).

5. B 【解析】 先求极限得出 $f(x)$ 的表达式: $f(x)=\begin{cases}1+x, |x|<1\\ \dfrac{1+x}{2}, |x|=1\\ 0, \quad |x|>1\end{cases}$, 可知 $x=\pm 1$ 为 $f(x)$ 的分段点. 由表达式可知 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点, $x=-1$ 为 $f(x)$ 的连续点. 选(B).

【注】 由极限表示的函数,欲讨论此函数的性质,必须分两步,先写出此函数的表达式再讨论.

6. $\dfrac{1}{2}$ 【解析】 由于 $\dfrac{i}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{i}{n^2+n+i}\leqslant\dfrac{i}{n^2+n+1}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 两边从 $i=1$ 到 $i=n$ 相加,得

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)},$$

命 $n\to\infty$ 取极限,由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i}=\dfrac{1}{2}$.

7. $\dfrac{4}{e}$ 【解析】 $\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln 2-1,$$

所以原式 $=e^{2\ln 2-1}=\dfrac{4}{e}$.

8. $\dfrac{1}{e}$ 【解析】 因为在 $[0,1]$ 上 $f(x)=nx(1-x)^n$ 可取最大值,最大值 >0. 但在端点处 $f(0)=f(1)=0$. 故存在 $x_0\in(0,1)$ 使 $f(x)$ 在 x_0 取最大值,故 $f'(x_0)=0$, 即 $f'(x_0)=n(1-x_0)^n-n^2x_0(1-x_0)^{n-1}=0$, 解得 $x_0=\dfrac{1}{n+1}$, 故 $M(n)=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}M(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}.$$

9. 1 【解析】 由题设有 $y''=-(x-1)y'-x^2y+e^x$. 因为 $y(0)=0$, $y'(0)=1$, 所以 $y''(0)=2$. 由 y'' 的表达式知, y'' 在 $x=0$ 处连续,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-x}{x^2}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{y'(x)-1}{2x}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{y''(x)}{2}=1.$$

10. $\dfrac{\pi}{2}$ 【解析】 $\int_{-1}^{2}\arctan(nx)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\arctan(nx)\mathrm{d}x+\int_1^2\arctan(nx)\mathrm{d}x=\int_1^2\arctan(nx)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}\int_n^{2n}\arctan u\mathrm{d}u$. 当 u 足够大时, $\arctan u>1$, 所以 $\int_n^{2n}\arctan u\mathrm{d}u>(2n-n)=n$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{2n}\arctan u\mathrm{d}u=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_n^{2n}\arctan u\mathrm{d}u$ 为"$\dfrac{\infty}{\infty}$型",由洛必达法则, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_x^{2x}\arctan u\mathrm{d}u=\lim\limits_{x\to+\infty}(2\arctan 2x-\arctan x)=\pi-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$, 所以原式 $=\dfrac{\pi}{2}$.

11. 0,第二类,1,第一类 【解析】 由 $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{\frac{x}{x-1}})=0$ 有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$, 可知 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

又因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{x}{x-1}}=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$, 可知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

12.【解】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-\sin(x-1)}{\sqrt[3]{2x-x^2}-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-\sin t}{\sqrt[3]{1-t^2}-1}=3\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-\sin t}{-t^2}$

$$= 3\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-\cos t}{-2t} = -\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+t)^2}+\sin t}{1} = \frac{3}{2}.$$

也可用佩亚诺余项泰勒公式展开做(略).

13.【解】 用佩亚诺余项泰勒公式展至$o(x^2)$，$\sqrt{1-x^2} = 1+\frac{1}{2}(-x^2)+o_1(x^2)$，$\cos 3x = 1-\frac{1}{2}(3x)^2+o_2(x^2)$ $= 1-\frac{9}{2}x^2+o_2(x^2)$，$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o_3(x^2)$，代入

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2+o_1(x^2)-o_2(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o_3(x^2)} = 8$. 本题也可用洛必达法则做(略).

14.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(e^{\tan x - x}-1)}{x-\sin x} = 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x} \xlongequal{洛} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = 2.$

15.【解】 因为$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i}} \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$，所以根据夹逼定理，

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i}} = 1.$

16.【解】
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+x^{-1}+x^{-2}}+x+1}{-x\sqrt{1+x^{-2}\sin x}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+x^{-1}+x^{-2}}-x(-1-x^{-1})}{-x\sqrt{1+x^{-2}\sin x}} = \frac{2-1}{1} = 1.$$

17.【解】
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-\sin x}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = -1+2 = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}+0 = 1.$$

【注】 注意$\sqrt{x^2} = |x|$.

18.【解】
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}-1\right],$$

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\cos x-1}{3} = 0$，由$u\to 0$时$e^u-1\sim u$，故

$$原式 = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x-1}{3}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{6x^2} = -\frac{1}{6}.$$

19.【解】 方法一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}-2}{x^2} \xlongequal{洛} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{a}{2}(1+ax)^{-\frac{1}{2}}+\frac{b}{3}(1+bx)^{-\frac{2}{3}}}{2x}$. 当$x\to 0$时分子$\to\dfrac{a}{2}$ $+\dfrac{b}{3}$. 若$\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}\neq 0$，则由洛必达法则知，上式右边$\to\infty$，从而左边$\to\infty$，矛盾，故$\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3} = 0$.

再由洛必达法则，

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^2}{2}(-\frac{1}{2})(1+ax)^{-\frac{3}{2}}+\frac{b^2}{3}(-\frac{2}{3})(1+bx)^{-\frac{5}{3}}}{2} = -\frac{a^2}{8}-\frac{b^2}{9} \xlongequal{题设} -\frac{3}{2},$$

由$\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3} = 0$及$-\dfrac{a^2}{8}-\dfrac{b^2}{9} = -\dfrac{3}{2}$，解得$a = 2, b = -3$.

方法二：用佩亚诺余项泰勒公式展开：

$$\sqrt{1+ax} = 1+\frac{1}{2}(ax)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(ax)^2+o_1(x^2),$$
$$\sqrt[3]{1+bx} = 1+\frac{1}{3}(bx)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)(bx)^2+o_2(x^2),$$

代入原式，原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{a}{2}+\frac{b}{3})x-(\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{9})x^2+o(x^2)}{x^2} \xlongequal{题设} -\dfrac{3}{2}$，所以$\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3} = 0$，$\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{b^2}{9} = \dfrac{3}{2}$，解得$a$，

b 同方法一.

20.【解】　方法一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1+bx+cx^2)-1-ax}{x^4}\overset{洛}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1+bx+cx^2)+e^x(b+2cx)-a}{4x^3}$.

若 $1+b-a\neq 0$，则上式右边趋于 ∞. 与题设矛盾，故 $1+b-a=0$. 再用洛必达法则，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+bx+cx^2)+2e^x(b+2cx)+2ce^x}{12x^2},$$

仿上讨论有 $1+2b+2c=0$. 继续用洛必达法则，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+bx+cx^2)+3e^x(b+2cx)+6ce^x}{24x},$$

仿上讨论有 $1+3b+6c=0$. 综合之，由以上 3 个等式解得 $a=\dfrac{1}{3},b=-\dfrac{2}{3},c=\dfrac{1}{6}$. 以 a,b,c 之值代入，再由洛必达法则，可得原式极限为 $\dfrac{1}{72}$.

方法二：将 e^x 在 $x_0=0$ 处按佩亚诺余项泰勒公式展开到 $o(x^4)$，有 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$，于是

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b-a)x+(\frac{1}{2}+b+c)x^2+(\frac{1}{6}+\frac{b}{2}+c)x^3+(\frac{1}{24}+\frac{b}{6}+\frac{c}{2})x^4+o(x^4)}{x^4}$$

可见上述极限存在的充要条件是

$$1+b-a=0,\frac{1}{2}+b+c=0,\frac{1}{6}+\frac{b}{2}+c=0.$$

解之得 a,b,c 如方法一. 以 a,b,c 之值代入，立即可得原式极限为 $\dfrac{1}{72}$.

【注】　若式中有待定系数且用洛必达法则时，必须步步讨论，方法二比方法一方便、快捷.

21.【证】　只要证 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$，视 $y=\Delta x$，由原题设有 $f(x+\Delta x)=f(x)+f(\Delta x)$，并且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=0$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$，证毕.

思维拓展训练

1.【解】　① 设 $a_j=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，有

$$a_j\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant f(x)=a_j\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\left[\left(\frac{a_1}{a_j}\right)^x+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_j}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}\leqslant a_j\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot n^{\frac{1}{x}}=a_j,$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=1$，由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a_j=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

② 命 $b_i=a_i^{-1}(i=1,\cdots,n)$，$t=-x$，$\varphi(t)=(f(x))^{-1}$，由①，$\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=\max\{b_1,\cdots,b_n\}$，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=(\max\{b_1,\cdots,b_n\})^{-1}=\min\{a_1,\cdots,a_n\}$.

③ 由洛必达法则得：

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}=\frac{\ln(a_1a_2a_3\cdots a_n)}{n},$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln f(x)}=e^{\frac{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

2.【解】　$\dfrac{k}{(n+k)(n+k+1)}\leqslant\dfrac{k}{(n+k)^2}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\frac{k}{n}}{(1+\frac{k}{n})^2}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{\frac{k}{n}}{(1+\frac{k}{n})^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{(1+\frac{k}{n})^2}\xrightarrow{n\to\infty}\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}dx=\ln 2-\frac{1}{2},$$ 另一方面，

$$\frac{k}{(n+k)(n+k+1)}=\frac{k}{n(n+1)(1+\frac{k}{n})(1+\frac{k}{n+1})}\geqslant\frac{k}{n(n+1)(1+\frac{k}{n})(1+\frac{k}{n})}$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{k}{n}}{(1+\frac{k}{n})^2}\xrightarrow{n\to\infty}1\cdot\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\ln2-\frac{1}{2},$$

由夹逼定理知，原式 $=\ln2-\frac{1}{2}$.

3.【解】 因为当 $x\to0$ 时，有 $e^{3x^2}-1\sim3x^2$，于是 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{3x^2}=2$，由极限与无穷小的关系，有 $f(x)\sin2x=((2+\alpha)3x^2+1)^2-1\xrightarrow{\text{当 }x\to0\text{ 时}}0$，

所以当 $x\to0$ 时 $\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\sin2x$，于是可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{6}\frac{f(x)\cdot2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\frac{f(x)}{x}=2,$$

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=6.$$

4.【解】 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$. 因为 $f(x)+k=2f(x+1)$，所以 $f(0)+k=2f(1)$. 因为 $f(1)=1^{\sin1}=1$，所以 $f(0)+k=2$，又因为 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x\ln x}=1$，所以 $1+k=2$，所以 $k=1$.

5.【解】 由 $x_1>0,x_{n+1}=3+\frac{4}{x_n}$，可见 $x_{n+1}>3(n=1,2,\cdots)$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 a，则 $a\geqslant3$，对 $x_{n+1}=3+\frac{4}{x_n}$ 两边取极限，得 $a=3+\frac{4}{a}$，即 $a^2-3a-4=0$，得 $a=4$，($a=-1$ 舍弃).

考虑 $x_{n+1}-4=3+\frac{4}{x_n}-4=\frac{4-x_n}{x_n}$，$0\leqslant|x_{n+1}-4|=\frac{|x_n-4|}{|x_n|}<\frac{1}{3}|x_n-4|<\cdots<\frac{1}{3^{n-1}}\frac{|x_1-4|}{|x_1|}$.

令 $n\to\infty$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-4|=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且等于 4.

6.【解】 分 $|x|<1$，$|x|=1$，$|x|>1$ 讨论，得

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 }|x|<1,\\ x, & \text{当 }|x|>1,\\ -\frac{a}{a+1}, & \text{当 }x=1,\\ \text{无定义}, & \text{当 }x=-1.\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}x=-1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=1$，在 $x=-1$ 处 $f(x)$ 为跳跃间断点，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$，$f(1)=-\frac{a}{a+1}$. 当 $-\frac{a}{a+1}=1$ 即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续；当 $a\neq-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 为可去间断点，其他情形其他点处 $f(x)$ 均连续.

7.【证】 命 $\varphi(x)=f(x)-f(x-1)$，$x\in[a,a+1]$. $\varphi(a)=f(a)-f(a-1)$，$\varphi(a+1)=f(a+1)-f(a)=f(a-1)-f(a)=-\varphi(a)$. 若 $\varphi(a)=0$，则 $f(x)-f(x-1)$ 在点 $x=a$ 处为零. 若 $\varphi(a)\neq0$，则 $\varphi(a)$ 与 $\varphi(a+1)$ 反号. 所以 $f(x)-f(x-1)$ 在区间 $(a,a+1)$ 上至少有一实根，证毕.