第七章 多元数量值函数积分学

本章将一元函数微分学，推广到多元函数上来。

7．1 多元数量值函数积分的概念与性质

7.1.1 引例 非均匀分布的几何形体的质量问题

例 1 平面薄板的质量

设有一平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D，它在点(x ，y)处的面密度为$\mu(x,y)$，这里 $\mu(x,y)$ >0 且在 D 上连续.现在要计算该薄片的质量 M.

将区域 D 任意划分为 n 个小区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$.同时这个小闭区域的面积也记作 $\Delta\sigma_i$，由于$\mu(x,y)$连续，所以薄板在每个小区域上的质量可以看作是均匀分布的。在每个小区域$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i,η_i),则该小区域上的质量的近似值为$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$（$i$ = 1,2,$\cdots$, n）.

从而整个薄板的质量 m 近似值为

$$m=\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

记$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\}$。所谓$\Delta\sigma_i$的直径指的是$\Delta\sigma_i$上任意两点间距离的最大值。当 $d\to 0$ 时。每个小$\Delta\sigma_i$的面积将趋于零，并且小区域的树木无限增大，这样上述近似值就无限接近薄板的质量，因此可把上面和式的极限规定为该薄板的质量，即

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

类似地，使用同样的方法可以讨论其他几何形体上的物体的质量问题。它们都可以归结为上面形式的极限，这一类型的极限，在物理、力学、几何和工程技术中有广泛的应用.

7.1.2 多元数量值函数积分的概念

定义 设Ω是可度量（即可求长度、面积或体积）的有界闭几何形体，$f(M)$是定义在Ω

上的数量值函数。将Ω任意划分为 n 个小几何形体$\Delta\Omega_i$（I=1,2,⋯,n），$\Delta\Omega_i$同时表示其度量。在$\Delta\Omega_i$上任取一点M_i，作乘积$f(M_i)\ \Delta\Omega_i$，并作和式$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ \Delta\Omega_i$，记$d=\max_{1\le i\le i}\{\Delta\Omega_i\text{的直径}\}$，如果不论对$\Omega$怎样分划，也不论点$M_i$在$\Delta\Omega_i$上怎样选取，只要$d\to 0$，上述和式都趋于同一常数 I,，则称$f(M)$在Ω上可积，并把 I 称为函数$f(M)$在Ω的积分，记做$\int_{\Omega} f(M)d\Omega$，即

$$\int_{\Omega} f(M)d\Omega = I = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ \Delta\Omega_i$$

其中 $f\ (M)$叫做被积函数，Ω叫做积分区域，$f\ (M)d\,\Omega$叫做被积表达式，$\int$ 为积分号，$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ \Delta\Omega_i$叫做积分和.

可积的必要条件 若函数$f(M)$在几何形体Ω上可积，则$f(M)$在Ω上闭有界。

可积的充分条件 若函数$f(M)$在有界闭几何形体Ω上连续，则$f(M)$在Ω上必可积。

7.1.3 多元数量值函数积分的性质

性质 1 当$f(M)\equiv 1$时，它在Ω上的积分等于Ω的度量，即

$$\int_{\Omega} 1 d\Omega = \int_{\Omega} d\Omega = \Omega .$$

性质 2 线性性质 设α、β为常数，则

$$\int_{\Omega}[\alpha f(M)+\beta g(M)]d\Omega = \alpha\int_{\Omega} f(M)d\Omega + \beta\int_{\Omega} g(M)d\Omega .$$

性质 3 积分区域的可加性 若将Ω分为两部分Ω_1，Ω_2，则

$$\int_{\Omega} f(M)d\Omega = \int_{\Omega_1} f(M)d\Omega + \int_{\Omega_2} f(M)d\Omega$$

性质 4 比较性质 如果在Ω上，$f(M)\le g(M)$，则

$$\int_{\Omega} f(M)d\Omega \le \int_{\Omega} g(M)d\Omega$$

由此显然有

$$\left|\int_{\Omega} f(M)d\Omega\right| \le \int_{\Omega} |f(M)|\,d\Omega$$

性质 5 估值性质 设M,m分别是$f(M)$在闭几何形体Ω上的最大值和最小值，则

$$m\Omega \le \int_{\Omega} f(M)d\Omega \le M\Omega$$

性质 6 积分中值定理 设函数 $f(M)$在闭几何形体 Ω 上连续，则在 Ω 上至少存在一点 M_0，使得

$$\int_\Omega f(M)d\Omega = f(M_0)\Omega$$

7.1.4 多元数量值函数积分的分类

按几何形体 Ω 的类型，多元数量值函数积分可以分为以下四种类型：

1．二重积分

当几何形体 Ω 为 xOy 平面上的区域 D 时，则 f 就是定义在 D 上的二元函数 $f(x, y)$，$\Delta\Omega_i$ 就是小区域的面积 $\Delta\sigma_i$，这时称 $\int_\Omega f(M)d\Omega$ 为函数 $f(x, y)$在平面区域 D 上的二重积分，记做 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，即 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 。

例 2 试估计二重积分 $I = \iint\limits_D \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}d\sigma$ 的取值范围，其中 $D=\{(x,y)$ $||x|+|y|\le 10\}$。

解 由于被积函数连续，由积分中值定理，存在 $(\xi,\eta)\in D$，使

$$I = \iint\limits_D \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}d\sigma = \frac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\cdot S(D)$$

这里 $S(D)$表示区域 D 的面积，易知 $S(D)$=200。又

$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\le\frac{1}{100}$$

故 $$\frac{200}{102}\le I\le\frac{200}{100}，即\frac{100}{51}\le I\le 2$$

2．三重积分

当几何形体 Ω 为空间区域 V 时，则 $f(\Omega)$ 是 V 上的三元函数 $f(x, y, z)$，$\Delta\Omega_i$ 就是小立体区域的体积 ΔV_i，这时称 $\int_\Omega f(M)d\Omega$ 为函数 $f(x, y, z)$在空间区域 V 上的三重积分，记作 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$，即

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta v_i \qquad (1)$$

其中 dv 叫做体积微元.

3．对弧长的曲线积分

当几何形体Ω为平面或空间曲线弧段 L 时，则$f(\Omega)$是定义在 L 上的二元或三元函数 $f(x, y)$或$f(x, y, z)$，$\Delta\Omega_i$是小弧段的弧长Δs_i，这时称$\int_\Omega f(M)d\Omega$为函数$f(x, y)$或$f(x, y, z)$在曲线 L 上对弧长的曲线积分，或称第一型的曲线积分，记作$\int_L f(x,y)ds$或$\int_\Gamma f(x,y,z)ds$，即

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

或

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

这里 ds 是弧长微元。

4．对面积的曲面积分

当几何形体Ω为空间曲面块 S 时，则$f(\Omega)$是定义在 S 上的三元函数$f(x, y, z)$，$\Delta\Omega_i$是小曲面块的面积ΔS_i，这时称$\int_\Omega f(M)d\Omega$为函数$f(x, y, z)$在曲面 S 上对面积的曲面积分，或称第一型的曲面积分，记作$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS$，即

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\,,$$

这里 dS 为曲面的面积微元。

例 3 已知曲面块 S 上带静电，电荷分布面密度$\mu=\mu(x,y,z)$，按照与求几何形体质量完全类似的方法，可知 S 上静电总量为

$$q=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

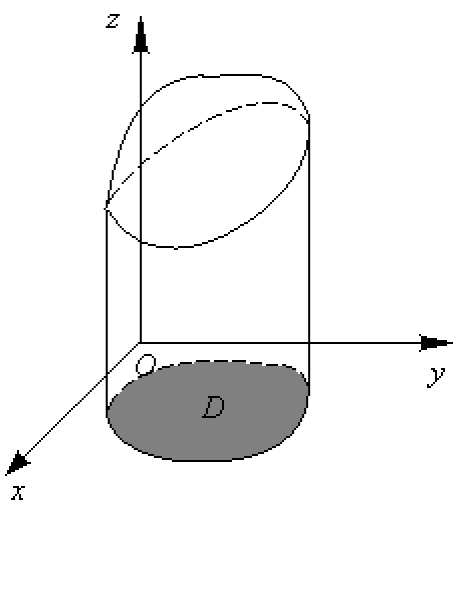
即
$$q=\iint\limits_\Sigma \mu(x,y,z)dS$$

作业 2（1），5，6，8，10

7．2 二重积分的计算

7．2．1 二重积分的几何意义

设有一立体，它的底是 xOy 面上的闭区域 D，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面，它的顶是曲面 $z=f(x, y)$,这里 $f(x, y)\geqslant 0$ 且在 D 上连续（图 7－1）.这种立体叫做曲顶柱体.现在我们来讨论如何定义并计算上述曲顶柱体的体积 V.



在二重积分定义中的$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$是以$\Delta\sigma_i$为底以$f(\xi_i,\eta_i)$为高的平顶柱体的体积，当

$\Delta\sigma_i$的　　　　　　　　　图 7－1

直径很小时，$f(x, y)$在$\Delta\sigma_i$上的变化很小，因此可将以$\Delta\sigma_i$为底以$z=f(x,y)$为顶的小曲顶柱体近似地看作平顶柱体，其体积的近似值可取为$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，从而积分和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$就是整个曲顶柱体的体积的近似值.显然$d\to 0$时，积分和以曲顶柱体的体积为极限，即二重积分等于曲顶柱体的体积。这就是二重积分的几何意义。如果$f(x)\le 0$，则曲顶柱体就在 xOy 平面的下方，二重积分的值是负的。因而曲顶柱体的体积就是二重积分的负值。如果$f(x,y)$在 D 的某区域上为正，在某些区域上为负，则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$就等于这些区域上曲顶柱体体积的代数和。

7．2．2 直角坐标系下二重积分的计算

当积分存在时，我们以平行线划分区域，这时除边界的小区域外，区域都是矩形，其面积元素等于$\Delta\sigma=\Delta x\cdot\Delta y$，因而在直角坐标系下常把微元$d\sigma=dxdy$，而把二重积分记为$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$。

下面用几何观点来讨论二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$的计算问题.在讨论中我们假定

$f(x,y)\ge 0$.

设积分区域D可以用不等式

$$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)，\quad a\le x\le b$$

来表示（图 7－2），其中函数$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$在区间[a,b]上连续.

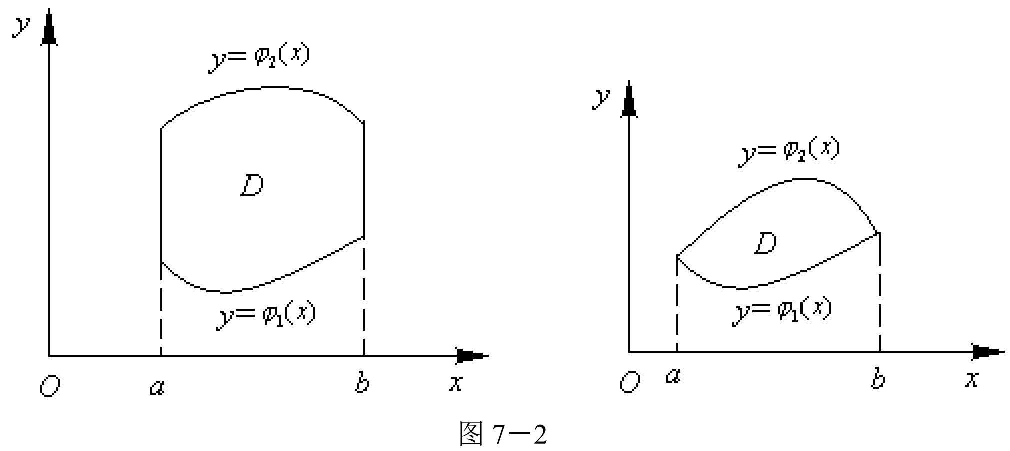


图 7－2

该类型的区域称为 X－型区域。

按照二重积分的几何意义，二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$的值等于以$D$为底，以曲面

$z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积（图 7－3）.下面我们应用第三章中计算“平行截面面积已知的立体的体积”的方法，来计算这个曲顶柱体的体积.

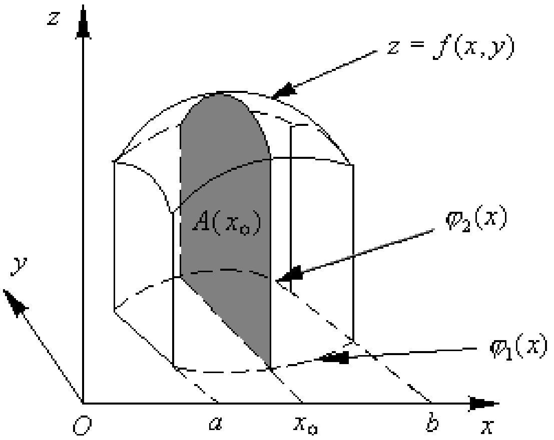
先计算截面面积.为此，在区间[a ,b]上任取一点 x_0，作平行于 yOz 面的平面 $x=x_0$.这平面截曲顶柱体所得的截面是一个以区间

[$\varphi_1(x_0)$, $\varphi_2(x_0)$]为底、曲线 $z=f(x_0,y)$ 为曲边的曲边梯形（图 7－3 中阴影部分），所以这截面的面积为

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy\,.$$

一般地，过区间[a ,b]上任一点 x 且平行于 yOz 面的平面截面曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,.$$



于是，应用计算平行截面面积为已知的立体体积的方法，得曲顶柱体体积为

图 7－3

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx\,.$$

这个体积也就是所求二重积分的值，从而有等式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx\,. \qquad (1)$$

上式右端的积分叫做先对 y、后对 x 的二次积分.就是说，先把 x 看作常数，把 $f(x,y)$ 只看作 y 的函数，并对 y 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分；然后把算得的结果（是 x 的函数）在对 x 计算在区间[a ,b]上定积分.这个先对 y 再对 x 的二次积分也常记作

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

因此（1）式也写成

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,, \qquad (1')$$

这就是把二重积分化为先对 x 再对 y 的二次积分的公式.

公式（1）对 $f(x,y)$ 的符号为任何都成立.

类似地，如果积分区域 D 可以用不等式

$$\phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\,,\quad c\le y\le d$$

来表示（图 7－4），其中函数 $\phi_1(y)$ 、$\phi_2(y)$ 在区间[c , d]上连续，称为 Y－型区域。那么就

有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d \left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy\ ,\qquad（2）$$

上式右端的积分叫做先对 x、后对 y 的二次积分，这个积分也常记作

$$\int_c^d dy\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx\ ,$$

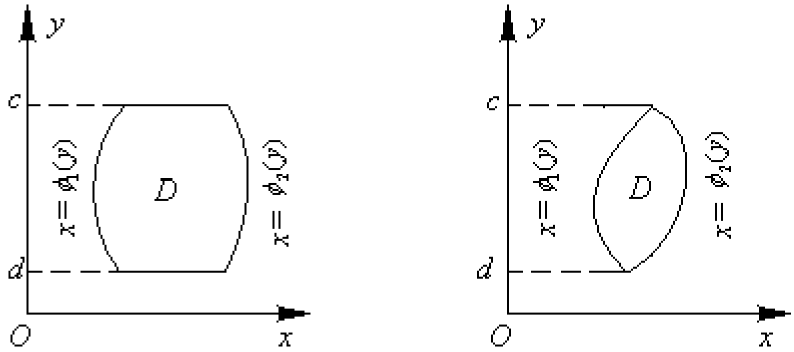


图 7-4

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx\ ,\qquad（2’）$$

这就是把二重积分化为先对 x、后对 y 的二次积分的公式.

使用公式（1），D 必须是 X－型区域，使用公式（2）D 必须是 Y－型区域.当积分区域不是 X－型区域也不是 Y－型区域时，我们可以通过划分，将其转化为几个 X－型区域或 Y－型区域，然后利用积分区间的可加性，将在它们上的积分相加即得原积分.比如如图 7－5 所示的区域

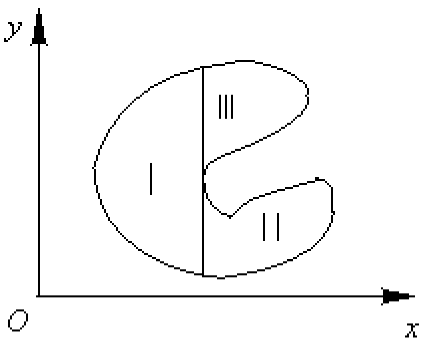


图 7－5

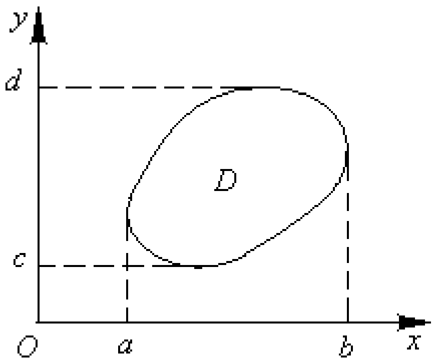


图 7－6

如果积分区域即是 X－型的，可用不等式 $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x), a\le x\le b$ 表示，又是 Y－型的，可用不等式 $\phi_1(y)\le x\le\phi_2(y), c\le y\le d$ 表示（图 7－6），则由公式(1’)及(2’)可得

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx\qquad（3）$$

例 1 计算$\iint\limits_D xy^2 d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1$、$x=0$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

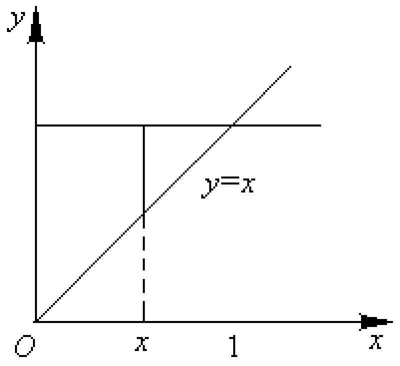


图 7-7

解 积分域 D 的图形如图 7-7 所示，它显然既是 y 型区域，也是 x 型区域

若将 D 看作 x 型域,则 D 可以表示为：

$$D：\ x \le y \le 1, 0 \le x \le 1$$

于是先对 y 积分，再对 x 积分，便得

$$\iint\limits_D xy^2 d\sigma = \int_0^1 dx \int_x^1 xy^2 dy$$

$$= \int_0^1 x\left[\frac{1}{3}y^3\right]_x^1 dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}\right)dx = \frac{1}{10}.$$

例 2 计算$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 由双曲线 $xy=1$ 及直线 $y=x, x=2$ 围成.

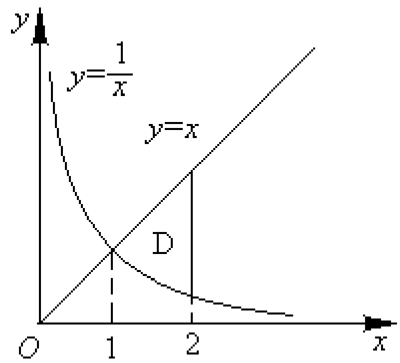


图 7－8

解 积分区域如图 7－8 所示，它显然是 x 型的，则 D 可以表示为 $D：\ \frac{1}{x} \le y \le x, 1 \le x \le 2$.

于是，先对 y 积分再对 x 积分，便得

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^2}dy = \int_1^2 x^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx$$

$$= \int_1^2 (x^3 - x)dx = 2\frac{1}{4}$$

本题如果将积分区域看作 y 型区域，则要计算两个积分相对比较麻烦一些。

例 3 计算二重积分$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x$ 与抛物线 $y^2=x$ 所围成的区域.

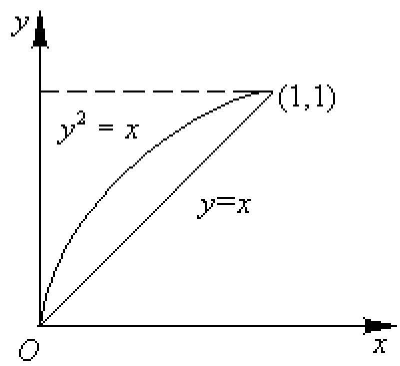


图 7－9

解 积分区域 D 为

$$D：\ y^2 \le x \le y, 0 \le y \le 1$$

于是先对 x 积分后对 y 积分，便得

$$\iint_D \frac{\sin y}{y} dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} [x]_{y^2}^{y} dy = \int_0^1 (1-y)\sin y dy = 1 - \sin 1$$

如果使用 x 型区域则无法积分.

例 4 求两个底圆半径都等于 R 的直交圆柱面所围成的立体的体积.

解 设这两个圆柱面的方程分别为

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad 及 \quad x^2 + z^2 = R^2$$

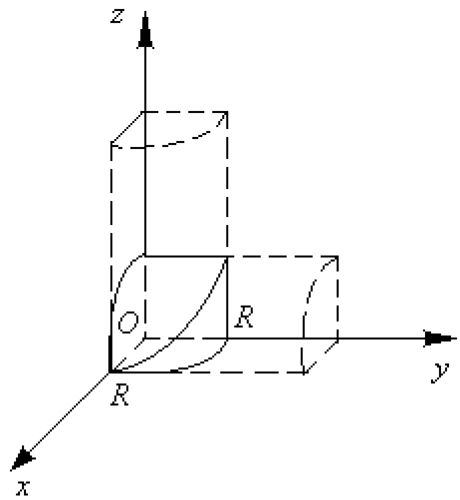


图 7－10

利用对称性，只需算出第一卦限部分的体积 V，然后乘以 8.

在第一卦限，立体可以看作以柱面 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ 为曲顶，积分区域为

D：$\{(x, y) | 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}\ , 0 \le x \le R\}$,

于是

$$V_1 = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} d\sigma = \int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dy \right] dx$$

$$= \int_0^R \left[\sqrt{R^2 - x^2}\, y \right]_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3$$

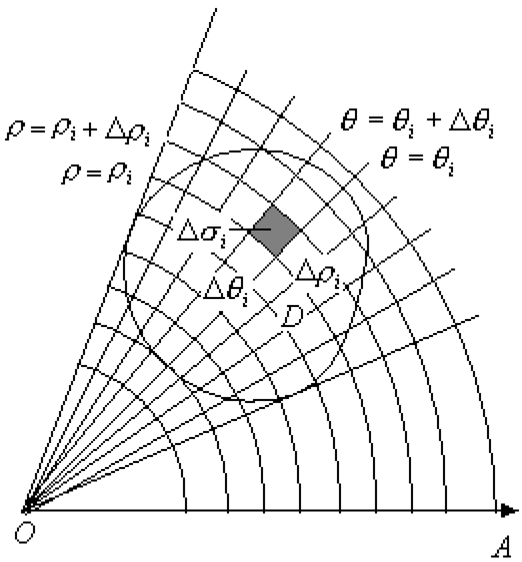
从而所求立体的体积为

$$V = 8V_1 = \frac{16}{3} R^3 .$$

7.2.3 极坐标系下二重积分的计算

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，现将 D 用 ρ=常数的一族同心圆及 θ = 常数的一族发自原点的射线进行分划（如图 7－11），此时 D 被分割成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i (i = 1,2,\cdots,n)$，将 $\Delta\sigma_i$ 的面积也记为 $\Delta\sigma_i$，于是除了包含边界点的一些小区域外，小区域的面积 $\Delta\sigma_i$ 可计算如下：

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \cdot \Delta\theta_i - \frac{1}{2}\rho_i{}^2 \cdot \Delta\theta_i$$



$$=\frac{1}{2}(2\rho_i+\Delta\rho_i)\Delta\rho_i\cdot\Delta\theta_i \quad =\frac{\rho_i+(\rho_i+\Delta\rho_i)}{2}\cdot\Delta\rho_i\cdot\Delta\theta_i$$

图 7－11

$$=\bar{\rho}_i\cdot\Delta\rho_i\cdot\Delta\theta_i,$$

其中 $\bar{\rho}_i$ 表示相邻两圆弧的半径的平均值。在这小区域内取圆周 $\rho=\bar{\rho}_i$ 上的一点 $(\bar{\rho}_i,\bar{\theta}_i)$，该点的直角坐标设为 ξ_i,η_i，则由直角坐标与极坐标之间的关系有

$\xi_i=\bar{\rho}_i\cos\bar{\theta}_i,\eta_i=\bar{\rho}_i\sin\bar{\theta}_i$，于是

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\bar{\rho}_i\cos\bar{\theta}_i,\bar{\rho}_i\sin\bar{\theta}_i)\,\bar{\rho}_i\,\Delta\rho_i\Delta\theta_i,$$

即 $$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

在直角坐标系下为

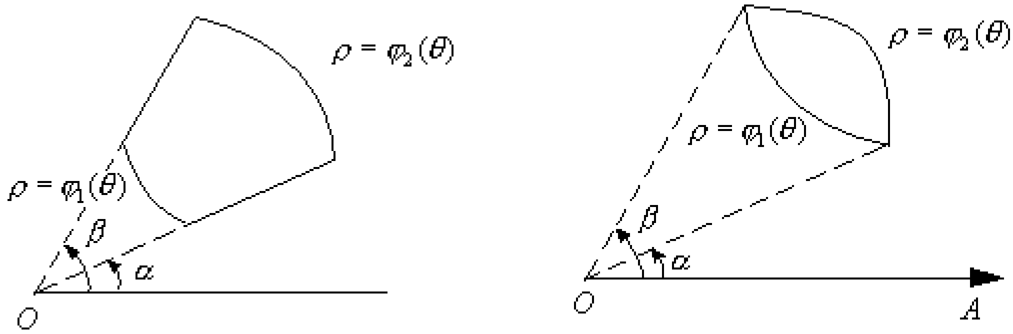
$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

极坐标系下的二重积分，同样可以化为二次积分来计算

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta),\ \alpha\le\theta\le\beta$$

来表示（图 7－11），其中函数 $\varphi_1(\theta)$、$\varphi_2(\theta)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续



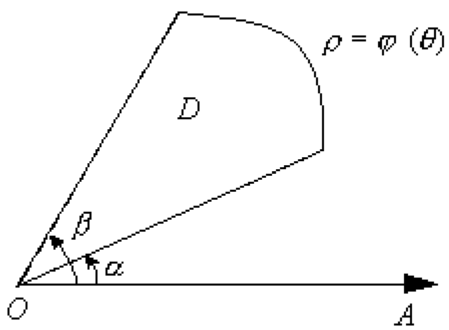
（a） （b）

图 7－11

则类似于在直角坐标系下的讨论，可得

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \quad (5)$$

如果积分区域 D 是图 7-12 所示的曲边梯形，你们可以把它看作图 7－10（a）中当 $\varphi_1(\theta)\equiv 0,\varphi_2(\theta)=\varphi(\theta)$ 时的特例.这时闭区域 D 可以用不等式

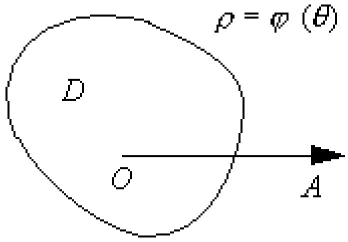


$$0 \le \rho \le \varphi(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$$

来表示，从而积分变为

图 7－12

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$



如果积分区域 D 如图 7－13 所示，极点在 D 的内部，那么可以把它看作图 7－12 中当 $\alpha = 0$、$\beta = 2\pi$ 时的特例。这时闭区域 D 可以用不等式 $0 \le \rho \le \varphi(\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$ 来表示，这时积分公式变为

图 7－13

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

在极坐标中，面积元素 $d\sigma = \rho d\rho d\theta$，上式成为 $\sigma = \iint_D \rho d\rho d\theta$

如果闭区域 D 如图 7－10（a）所示，则由公式（5）有

$$\sigma = \iint_D \rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \rho d\rho = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\varphi_2^2(\theta) - \varphi_1^2(\theta)] d\theta$$

特别地，如果闭区域 D 如图 7－12 所示，则 $\sigma = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta) d\theta$

一般地，当积分区域 D 是圆或圆的一部分，且被积函数特别简单或被积函数能写成 $z = f(x^2 + y^2)$ 的形式时，二重积分 $\iint_D f dxdy$ 可以采用极坐标来计算.

例 5 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$，其中 D 是由中心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域.

解，这时 D 可以表示为 $0 \le \rho \le a, 0 \le \theta \le 2\pi$.

由公式（4）及（5）有

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^a d\theta = \frac{1}{2}(1 - e^{-a^2})\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \pi(1 - e^{-a^2})$$

下面我们利用上述结果来计算工程上常用的反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$。

设

$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2R^2, x\ge 0, y\ge 0\}$,

$S=\{(x,y)\mid 0\le x\le R, 0\le y\le R\}$.

显然 $D_1\subset S\subset D_2$（图 7－14）.由于 $e^{-x^2-y^2}>0$，从而在这些闭区域上的二重积分之间有不等式

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy<\iint_{S} e^{-x^2-y^2}dxdy<\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

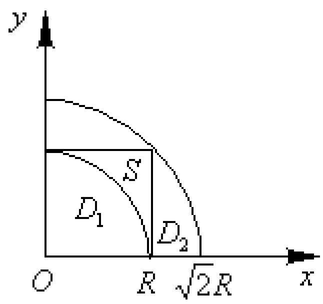


图 7－14

因为 $$\iint_{S} e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^R e^{-x^2}dx\cdot\int_0^R e^{-y^2}dy$$

$$=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2,$$

又应用上面已得的结果有

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}),\quad \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})。$$

于是上面的不等式可写成

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})\le\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2\le\frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

令 $R\to+\infty$，上式两端趋于同一极限 $\frac{\pi}{4}$，从而 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例 6　在一个形状为抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器中，装有 $2\pi\mathbf{cm}^3$ 的液体，今再倒进 $8\pi\,\mathrm{cm}^3$ 的液体，问液面升高多少 cm?

解　设容器的高为 h，则容器的容量课看作由 $z=h$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积，故容器的容量为

$$V=\iint_D[h-(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{h}}(h-\rho^2)\rho d\rho$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{2}h\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{\sqrt{h}}$$

$$=\frac{1}{2}\pi h^2.$$

将 $v=2\pi$ 与 $V=10\pi$ 代入上式，得 $h_1=2$ 与 $h_2=2\sqrt{5}$.因此液面升高为 $h_2-h_1=2\sqrt{5}-2$（cm）.

7.2.4 二重积分的换元法

定理　设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续，变换

$$T：x=x(u,v), y=y(u,v) \tag{7}$$

将 uOv 平面上的闭区域 D' 变为 xOy 平面上的 D，且满足

（1）$x=x(u,v), y=y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数；

（2）在 D' 上雅克比式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0；$$

（3）变换 $T:D'\to D$ 是一对一的，

则有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,dudv. \tag{8}$$

公式（8）称为二重积分的换元公式.

例 7　计算 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$，其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域.

解　令 $u=y-x, v=y+x$，则 $x=\dfrac{v-u}{2}, y=\dfrac{v+u}{2}$.

作变换 $x=\dfrac{v-u}{2}, y=\dfrac{v+u}{2}$，则 xOy 平面上的闭区域 D 和它在 uOv 平面上的对应区域 D' 如图 9－25 所示

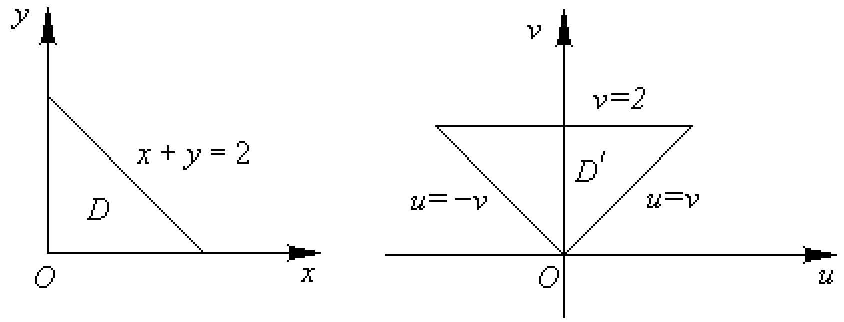


图 9－25

雅克比式为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

利用公式（8）

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dv\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (e-e^{-1})vdv = e-e^{-1}.$$

例 9 计算$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$，其中$D$为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的闭区域.

解　作广义极坐标变换

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta, \\ y = b\rho\sin\theta, \end{cases}$$

其中$a>0, b>0, \rho\ge 0, 0\le\theta\le 2\pi$.在这变换下，与$D$对应的闭区域为$D'=\{(\rho,\theta)\mid 0\le \rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi\}$，雅克比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=ab\rho.$$

J在D'内仅当$\rho=0$处为零，故换元公式仍成立，从而有

$$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy=\iint\limits_{D'}\sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho d\rho d\theta=\frac{2}{3}\pi ab.$$

作业　　3(1)(3)(5)，4(2)(4)，5(1)(3)，6(1)(3)(5)，9(2)(4)，10(1)

7.3　三重积分的计算

7.3.1 直角坐标系下三重积分的计算

如图 7－15，区域Ω可以表示为$\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$

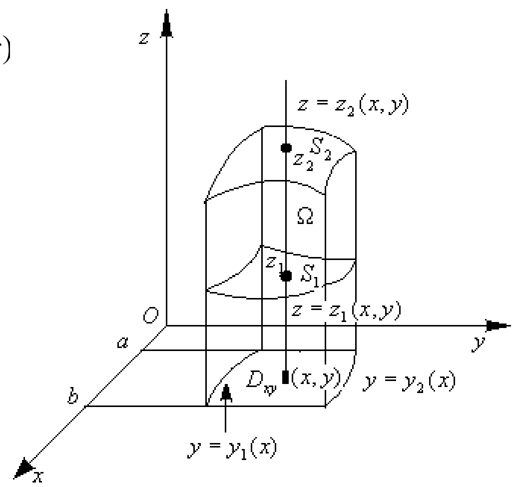
其中

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)$$

为 X－型区域，称Ω为 XY－型区域

我们将x,y看作定值，将$f(x,y,z)$只看作z的函数，在区间$[z_1(x,y),z_2(x,y)]$上对z积分。积分的结果是x,y的函数，记为$F(x,y)$，即

$$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$



然后计算 $F(x,y)$ 闭区域 D_{xy} 上的二重积分

$$\iint_{D_{xy}} F(x,y)d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] d\sigma$$

再由二重积分的计算得到

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz . \qquad (2)$$

公式（2）把三重积分化为线对 z、次对 y、最后对 x 的三重积分. 如果闭区域 Ω 不是 XY－型区域，则可以将其划分称几个 XY－型区域。然后利用积分的可加性，进行计算。

图 7－15

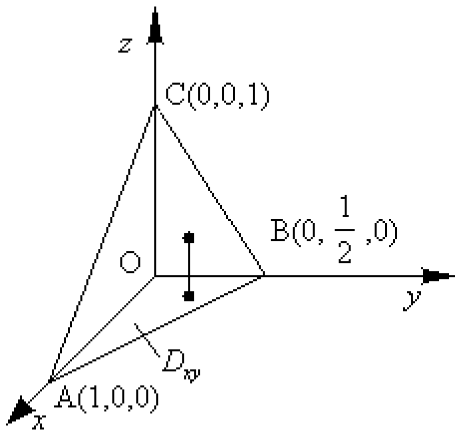


图 7－16

例 1 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} xdxdydz$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

解　作闭区域 Ω 如图 7－16 所示。

将 Ω 投影到 xOy 面上，得投影区域 D_{xy} 为三角形闭区域 OAB，直线 OA、OB 及 AB 得方程依次为 $y=0$ 、$x=0$ 及 $x+2y=1$，所以

$$D_{xy} = \{(x,y) \mid 0 \le y \le \frac{1-x}{2}, 0 \le x \le 1\}$$

在 D_{xy} 内任取一点 (x,y)，过次点作平行于 z 轴的直线，该直线通过平面 $z=0$ 穿入 Ω 内，然后通过平面 $z=1-x-2y$ 穿出 Ω 外。

于是，由公式（2）得

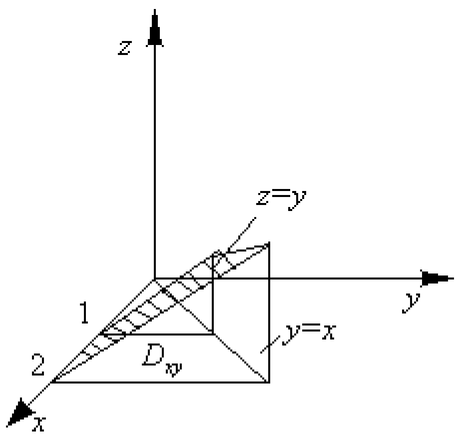
$$\iiint_{\Omega} xdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} xdz = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y)dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx = \frac{1}{48}.$$

例 2 计算 $\iiint_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2}$，其中 V 是由平面 $x=1, x=2, z=0, y=x$ 及 $z=y$ 围成得区域.

不难画出 V 的图形如图 7－17。由图可知，V 同时是三种类型的区域。下面按 XY－型区域来计算，这时 V 可以表示为

$$V \quad : 0 \le z \le y, 0 \le y \le x, 1 \le x \le 2,$$



因此　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　图 7－17

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2} = \int_1^2 dx\int_0^x dy\int_0^y \frac{dz}{x^2+y^2} = \int_1^2 dx\int_0^x \frac{y}{x^2+y^2}dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \ln(x^2+y^2)\Big|_0^x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln 2dx = \frac{1}{2}\ln 2.$$

有时，我们计算一个三重积分也可以先计算一个二重积分、再计算一个定积分，即有下述计算公式

设空间闭区域

$$\Omega = \{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D_z, c_1 \le z \le c_2\},$$

其中 D_z 是竖坐标为 z 的平面截闭区域 Ω 所得到的一个平面闭区域（图 7－18），则有

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy. \qquad (3)$$

例 3 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega z^2 dxdydz$，其中 Ω 是由

椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域.

解　空间闭区域 Ω 以表示为

$$\{(x,y,z)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1-\frac{z^2}{c^2}, -c \le z \le c\}$$

如图 9－33 所示，由公式（3）得

$$\iiint\limits_\Omega z^2 dxdydz = \int_{-c}^{c} z^2 dz \iint\limits_{D_z} dxdy$$

$$= \pi ab\int_{-c}^{c}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$= \frac{4}{15}\pi abc^2$$

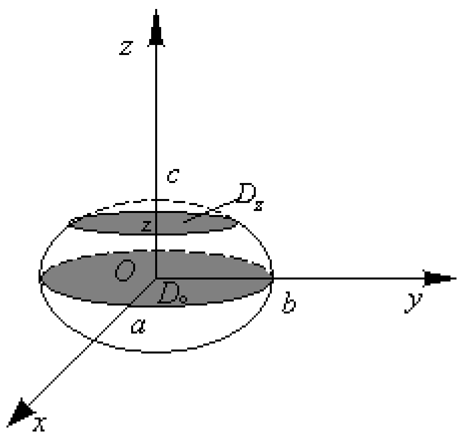


图 7－18

7.3.2　　柱面坐标系与球面坐标系下三重积分的计算

1．三重积分的换元法

和定积分、二重积分类似，三重积分也可以利用换元法来计算。这里只给出结论

定理 设 V 是 xOy 坐标系中的有界闭区域，函数 $f(x,y,z)$ 在 V 上连续；V' 是 $O'uvw$ 坐标系中的有界闭区域，函数 $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$　（2.4）

在 V' 上有连续的一阶偏导数，且 Jacobi 行列式

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (u,v,w)\in V'\text{；} \qquad （2.5）$$

当变换（2.4）把V'一对一地变到V时，则有

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{V'}F(u,v,w)\,|\,J\,|\,dudvdw \qquad （2.6）$$

其中

$$F(u,v,w)=f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\text{。}$$

例 4 求由曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$围成的空间闭区域$V$的体积.

解 根据三重积分的性质

$$V=\iiint_V dxdydz\text{，}$$

作变量代换

$$\begin{cases}x=au\\ y=bv\\ z=cw\end{cases}$$

由于

$$V=\{(x,y,z)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$$

从而得

$$V'=\{(u,v,w)\,|\,u^2+v^2+w^2\le 1\}$$

即V'是$O'uvw$中得单位球型闭区域。又

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=abc\neq 0\text{，}$$

于是，由变量代换公式（2.6）得

$$V=\iiint_V abcdudvdw=abc\iiint_V dudvdw=\frac{4}{3}\pi abc$$

2. 柱面坐标系下三重积分的计算

设$M(x,y,z)$为空间内一点，并设点M在xOy面上的投影P的极坐标为ρ,θ，则这样

的三个数 ρ,θ,z 就叫做点 M 的柱面坐标，如图 7－19 所示，这里规定 ρ,θ,z 的变化范围为

$$0 \le \rho < +\infty$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$-\infty < z < +\infty$$

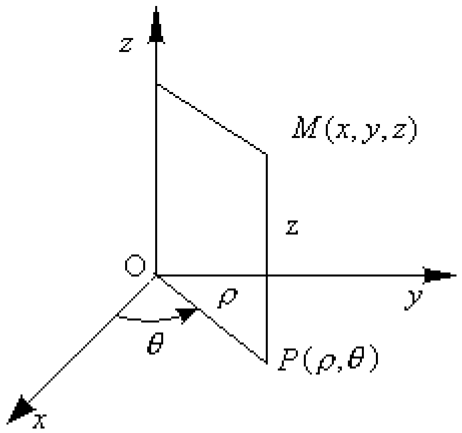


图 7－19

三组坐标面分别为

ρ ＝常数，即以 z 轴为轴的圆柱面；

θ ＝常数，即过 z 轴的版平面；

z ＝常数，即与 xOy 面平行的平面.

显然，点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad （4）$$

现在要把三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 中的变量化为柱面坐标。由柱坐标变换得

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

再由三重积分的变换公式得

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\rho d\rho d\theta dz \qquad （5）$$

其中 $F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$

这时 Ω 与 Ω' 是同一立体，只是坐标系不同。

一般来说，当被积函数可化为 $\varphi(x^2+y^2,z)$ 的形式，而积分域 V 是以 z 轴为轴得旋转体或部分旋转体时，利用柱面坐标计算三重积分觉简单.

例 5 利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成得闭区域.

解：Ω 在 xOy 面上的投影区域为半径为 2 的闭区域 $D_{xy} = \{(\rho,\theta) \mid 0 \le \rho \le 2,$

$0 \le \theta \le 2\pi\}$。而 z 是从抛物面 $z = x^2 + y^2$ 到 $z = 4$，故 $\rho^2 \le z \le 4$，即闭区域 Ω 可以表示为

$$\rho^2 \le z \le 4, 0 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \iiint\limits_{\Omega} z\rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 zdz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho(16-\rho^4)d\rho=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[8\rho^2-\frac{1}{6}\rho^6\right]_0^2=\frac{64}{3}\pi.$$

3. 利用球面坐标计算三重积分

设$M(x,y,z)$为空间内一点，则点M也可用这样三个有次序的数r,φ,θ来确定，其中r为原点O与点M间的距离，φ为有向线段$\overrightarrow{OM}$与z轴正向所夹的角，θ为从正z轴来看自x轴按逆时针方向转到有向线段$\overrightarrow{OP}$的角，这里P为点M在xOy面上的投影（图 7－20)。这样的三个数r,φ,θ叫做点M的球面坐标。这里r,φ,θ的变化范围为

$$0\le r<+\infty$$
$$0\le\varphi\le\pi$$
$$0\le\theta\le 2\pi$$

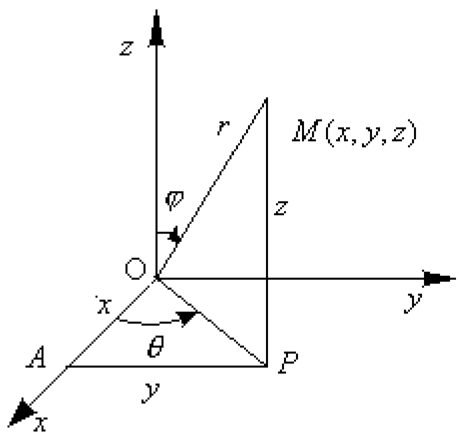


图 7－20

三组坐标面分别为

r＝常数，即以原点为心的球面;

φ＝常数，即以原点为顶点、z轴为轴的圆锥面;

θ＝常数，即过z轴的半平面.

设点M在xOy面上的投影为P，点P在x轴上的投影为A，则 OA＝x，AP＝y，PM＝z。又

OP＝$r\sin\varphi$，z＝$r\cos\varphi$

因此，点M的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases}x=OP\cos\theta=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=OP\sin\theta=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

由球坐标变换得

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta\\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta\\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi\end{vmatrix}=-r^2\sin\phi$$

从而$|J|=r^2\sin\phi$

由三重积分的换元公式得，

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Omega}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta \qquad （7）$$

其中$F(r,\varphi,\theta)=f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)$

若积分区域Ω得边界曲面是一个包围原点在内的闭曲面，其球面坐标方程为$r=r(\varphi,\theta)$，则

$$\begin{aligned}I&=\iiint_{\Omega}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr.\end{aligned}$$

当积分区域Ω为球面$r=a$所围成时，则

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr.$$

特别地，当$F(r,\varphi,\theta)=1$时，由上式即得球的体积.

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{a}r^2dr=2\pi\cdot2\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3}\pi a^3。$$

一般来说，当被积函数可写成$x^2+y^2+z^2$的函数，而积分域为球体或其一部分时，利用球面坐标计算三重积分比较简单.

例 6　求半径为 a 的球面域半顶角为α 的内接锥面所围成的立体（图 7－21）的体积.

解　设球面通过原点 O，球心在 z 轴上，又内接锥面的顶点在原点 O，其轴与 z 轴重合，则球面方程为$r=2a\cos\varphi$，锥面方程为$\varphi=a$。因为立体所占有的空间闭区域Ω可用不等式

$$0\le r\le 2a\cos\varphi,0\le\varphi\le\alpha,0\le\theta\le2\pi$$

来表示，所以

$$\begin{aligned}V&=\iiint_{\Omega}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi dr\\&=2\pi\int_0^{\alpha}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2dr=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi\\&=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha).\end{aligned}$$

作业　2 奇数，3，4 奇数，5 偶数，6，8，10

7.4 数量值函数的曲线与曲面积分的计算

7.4.1 第一型曲线积分的计算

定理　设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\phi(t), \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$

其中 $\varphi(t)$、$\phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 存在，且

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\phi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta). \tag{1}$$

证　设当参数 t 由 α 变到 β 时，L 上的点 $M(x,y)$ 依点 A 至点 B 的方向描出曲线 L. 在 L 上取一列点

$$A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_{n-1},M_n=B,$$

它们对应于一列单调增加的参数值

$$\alpha=t_0<t_1<t_2\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta.$$

由于

$$\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt,$$

由积分中值定理，有

$$\Delta s_i=\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\phi'^2(\tau_i)}\Delta t_i,$$

其中 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}, t_{i-1}\le\tau_i\le t_i$.

根据对弧长的曲线积分的定义，有

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

取点 (ξ_i,η_i) 对应于参数值 τ_i，即 $\xi_i=\varphi(\tau_i)$、$\eta_i=\phi(\tau_i)$，于是

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f[\varphi(\tau_i),\phi(\tau_i)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\phi'^2(\tau_i)}\Delta t_i$$

上式右端的和的极限，就是函数 $f[\varphi(t),\phi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的定积分，由于这个函数在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，所以这个定积分是存在的，因此上式右端的曲线积分

$\int_L f(x,y)ds$ 也存在，并且有

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\phi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt \qquad (\alpha < t < \beta) \qquad （1）$$

使用（1）时要注意，积分下限 α 一定要小于上限 β .

如果曲线 L 由参数方程

$$y=\phi(x) \qquad (x_0 \le x \le X)$$

给出，那么可以把这种情形看作是特殊的参数方程

$$x=t, y=\phi(t) \qquad (x_0 \le t \le X)$$

的情形，从而由公式（1）得出

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{x_0}^X f[x,\phi(x)]\sqrt{1+\phi'^2(x)}dx \qquad (x_0 < X) \qquad （2）$$

类似地，如果曲线 L 由方程

$$x=\varphi(y) \qquad (y_0 \le y \le Y)$$

给出，则有

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{y_0}^Y f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy \qquad (y_0 < Y) \quad . \qquad （3）$$

完全类似地，若空间曲线 Γ 由参数方程

$$x=\varphi(t), y=\phi(t), z=\omega(t) \quad (\alpha \le t < \beta)$$

给出的情形，这样就有

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt \quad (\alpha < \beta) （4）$$

例 1 计算 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds$ ，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=ax$.记号 $\oint_L$ 表示沿封闭曲线 L 积分.

解　L 可以表示为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

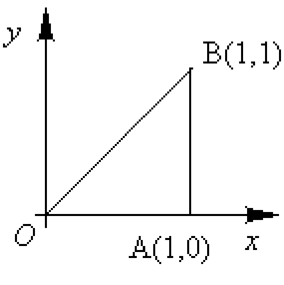
其参数方程为 $x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta, y=\frac{a}{2}\sin\theta \qquad 0\le\theta\le 2\pi$ ，

于是

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\cos\theta)}\sqrt{\frac{a^2}{4}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}d\theta - \int_\pi^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta\right] = 2a^2 .$$

例 2 计算 $\oint\limits_L (x+y)ds$ ，其中 L 是以



$O(0,0), A(1,0), B(1,1)$ 为顶点的三角形的边界（如图 7－22）

解　由积分的性质知

$$\oint_L (x+y)ds = \oint_{OA}(x+y)ds + \oint_{AB}(x+y)ds + \oint_{BO}(x+y)ds$$

图 7－22

因为在 OA 上 $y=0$，所以

$$ds = \sqrt{1+y'^2}dx = dx;$$

在 AB 上 $x=1$，所以

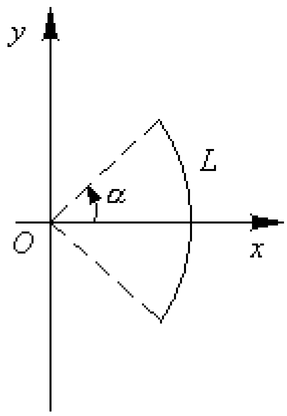
$$ds = \sqrt{1+x'^2}dy = dy;$$

在 BO 上 $y=x$，所以

$$ds = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{2}dx$$

于是

$$\oint_L (x+y)ds = \int_0^1 xdx + \int_0^1 (1+y)dy + \int_0^1 (x+x)\sqrt{2}dx$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \sqrt{2} = 2+\sqrt{2}.$$



例 3　计算半径为 R、中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I（设线密度 $\mu=1$）.

解　取坐标系如图 7－23，则　$I=\int_L y^2 ds$

为了便于计算，利用 L 的参数方程

$$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta \ (-\alpha \le \theta \le \alpha).$$

于是

$$I = \int_L y^2 ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta d\theta = \frac{R^3}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$= \frac{R^3}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) = R^3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha).$$

例 4 计算 $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}ds$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x=y$ 的交线

解　L 是平面 $y=x$ 上的圆.将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$，消去 x，得 L 向 yOz 面的投影柱面方程

$$\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$$

由此可知，曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin t, \\ y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin t, \qquad 0\le t\le 2\pi. \\ z=a\cos t, \end{cases}$$

于是

$$\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds=\int_0^{2\pi} a\cdot a dt=2\pi a^2.$$

下面给出第一型曲线积分的几何解释。

设有柱面 S（图 7－24），它的母线平行于 z 轴，准线为 xOy 平面上的曲线段 L。柱面的“高度”$f(x,y)$($(x,y)\in L$)是一个变量，这里$f(x,y)$是定义在 L 上的非负连续函数。现用 L 上的点 $M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n$ 将 L 分为 n 个小弧段，在每个分点处作平行于 z 轴的直线，就把 S 分为 n 个小柱面。在每个小弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，这样第 i 个小柱面的面积可近似表示为 $\Delta S_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，其中 ΔS_i 表示 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 的弧长。于是柱面面积为

$$S=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1,\eta_i)\Delta s_i \qquad 即$$

$$S=\int_L f(x,y)ds。$$

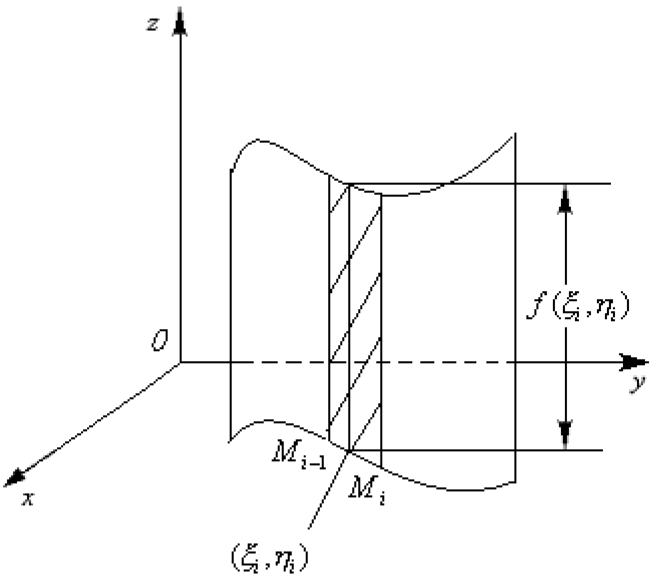
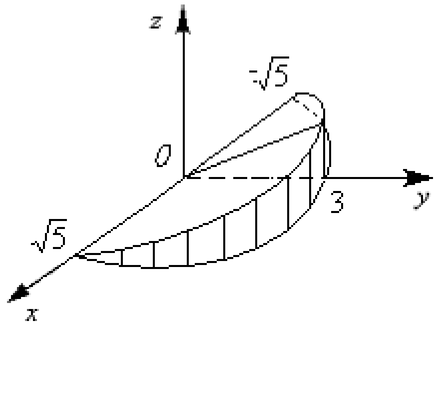


图 7－24

可见，第一型曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$，当 $f(x,y)\ge 0$ 时，表示以 xOy 平面上的曲线段 L 为准线。母线平行于 z 轴，高度为$f(x,y)$的柱面面积。

例 5 设椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 被平面 $z=y$ 及 $z=0$ 所截。求位于第一、二卦限内所截下部分的侧面积（图 7-25）。

解 由第一型曲线积分的几何意义，得所求侧面



积

$$S=\int_L yds$$

其中 L 为 xOy 平面上的半个椭圆，将 L 用参数方程表示，有　　　　　　图 7－25

$$x=\sqrt{5}\cos t,\ y=3\mathrm{int},(0\le t\le\pi)$$

于是

$$S=\int_L yds=\int_0^{\pi}3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}dt$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}d\cos t=9+\frac{15}{4}\ln 5$$

7.4.2 第一型曲面积分的计算

设曲面 S 的方程　$z=f(x,y)$　给出，D 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有连续的偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$。我们计算曲面 S 的面积 A.

在闭区域 D 上任取一直径很小的闭区域 $d\sigma$（这小闭区域的面积也记作 $d\sigma$）。在 $d\sigma$ 上任取一点 P（x，y），对应地曲面 S 上有一点 $M(x,y,f(x,y))$，点 M 在 xOy 面上的投影即点 P. 点 M 处曲面 S 的切平面设为 T（图 9－38）.以小闭区域 $d\sigma$ 的边界为准线做母线平行于 z 轴的柱面，这柱面在曲面 S 上截下一小片曲面，在切平面 T 上截下一小片平面。由于 $d\sigma$ 的直径很小，且平面 T 上的那一小片平面的面积 dA 可以近似代替相应的那小片曲面的面积. 设点 M 处曲面 S 上的法线（指向朝上）与 z 轴所成的角为 γ，则 $dA=\dfrac{d\sigma}{\cos\gamma}$

因为 $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$，所以 $dA=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\ d\sigma$.这就是曲面 S 的面积元素，以它为被积表达式在闭区域 D 上积分，得

$$A=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}d\sigma$$

上式也可以写为 $A=\iint_D\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$。

这就是计算曲面面积的公式.

该公式也可以应用到曲面方程为 $x=g(y,z)$ 或 $y=h(z,x)$，可分别把曲面投影到 yOz 面上或 zOx 平面上.

例 6 求半径为 a 的球的表面积.

解　取上半球面方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则它在 xOy 面上的投影区域 D＝{(x, y)| $x^2+y^2\le a^2$ }.

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,

得 $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

因为这函数在闭区域 D 上无界，我们不能直接应用曲面面积公式.所以先取区域 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le b^2\}(0<b<a)$ 为积分区域，算出相应于 D_1 上的球面面积 A_1 后，令 $b\to a$ 取 A_1 的极限就得半球面的面积.

$$A_1=\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

利用极坐标，得

$$A_1=\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho d\theta=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^b\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

$$=2\pi a\int_0^b\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

于是 $$\lim_{b\to a}A_1=\lim_{b\to a}2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2})=2\pi a^2.$$

这就是半个球面的面积，因此整个球面的面积为 $A=4\pi a^2$.

类似于第一型曲线积分的推导，我们可以得到第一型曲面积分的计算公式如下：

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy \tag{2}$$

其中 $z(x,y)$ 为曲面 Σ 的方程, D_{xy} 为 Σ 在 xOy 面上的投影.

当积分曲面 Σ 由方程 $x=x(y,z)$ 或 $y=y(z,x)$ 给出，也可类似地把对面积的曲面积分转化为相应的二重积分.

例 7 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中 S 是锥面 $z^2=4(x^2+y^2)$ 被柱面 $x^2+y^2-2ax=0$ 截下的一块面积（$z\ge 0$）.

解 S 的方程为

$$z=2\sqrt{x^2+y^2},\quad D_{xy}:x^2+y^2-2ax\le 0,$$

用极坐标表示为：

$$0\le r\le 2a\cos\theta,\qquad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

于是由公式（2），得

$$I=\iint_{D_{xy}}[x^2+y^2+4(x^2+y^2)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}5(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{4x^2+4y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}5\sqrt{5}(x^2+y^2)dxdy=5\sqrt{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3dr$$

$$=5\sqrt{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4a^4\cos^4\theta d\theta=40\sqrt{5}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=40\sqrt{5}a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{15\sqrt{5}}{2}\pi a^4.$$

例 8　计算曲面积分$\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h\ (0<h<a)$截出的顶部（图 7－26）.

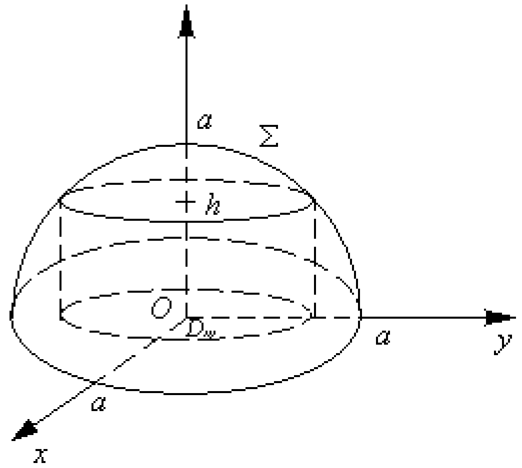


图 7－26

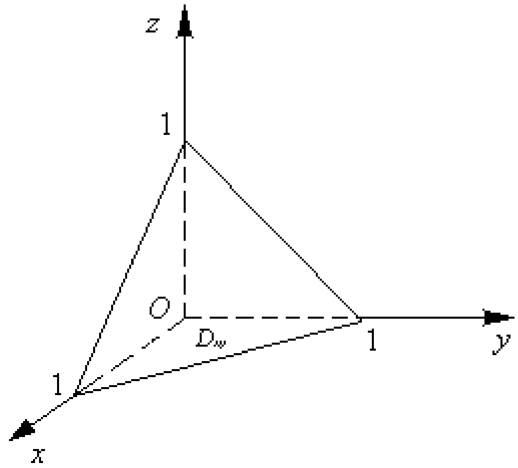


图 7－27

解　Σ的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

Σ　在 xOy 面上的投影区域D_{xy}为圆形闭区域$\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2-h^2\}$.又

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

根据公式（2），有

$$\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{adxdy}{a^2-x^2-y^2}.$$

利用极坐标，得

$$\iint_{\Sigma}\frac{dS}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\rho d\rho d\theta}{a^2-\rho^2}=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho d\rho}{a^2-\rho^2}$$

$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-\rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

例 9　计算 $\oiint\limits_{\Sigma}xyzdS$，其中 Σ 是由平面 $x=0,y=0,z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面（图 7－27）.

解　整个边界曲面 Σ 在平面 $x=0$、$y=0$、$z=0$ 及 $x+y+z=1$ 上的部分依次记为 Σ_1、Σ_2、Σ_3 及 Σ_4，于是

$$\oiint\limits_{\Sigma}xyzdS=\oiint\limits_{\Sigma_1}xyzdS+\oiint\limits_{\Sigma_2}xyzdS+\oiint\limits_{\Sigma_3}xyzdS+\oiint\limits_{\Sigma_4}xyzdS.$$

由于在 Σ_1、Σ_2、Σ_3 上，被积函数 $f(x,y,z)$ 均为零，所以

$$\oiint\limits_{\Sigma_1}xyzdS=\oiint\limits_{\Sigma_2}xyzdS=\oiint\limits_{\Sigma_3}xyzdS=0.$$

在 Σ_4 上，$z=1-x-y$，所以

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3},$$

从而

$$\oiint\limits_{\Sigma}xyzdS=\oiint\limits_{\Sigma_4}xyzdS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}xy(1-x-y)dxdy$$

其中 D_{xy} 是 Σ_4 在 xOy 面上的投影区域,即由直线 $x=0$、$y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的闭区域.

因此

$$\oiint\limits_{\Sigma}xyzdS=\sqrt{3}\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}y(1-x-y)dydx$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}dx$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x\cdot\frac{(1-x)^3}{6}dx$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1(x-3x^2+3x^3-x^4)dx=\frac{\sqrt{3}}{120}.$$

作业　1 偶数，4，5，6 奇数，8，9

7.5 数量值函数积分应用举例

本节我们将把定积分应用中的元素法推广到重积分的应用中，利用重积分的元素法来讨论重积分在几何、物理上的一些其他应用.

对几何形体Ω来说，Ω上的可加量Q的微元的一般形式为$f(M)d\Omega$，即

$$dQ = f(M)d\Omega, \qquad M \in d\Omega,$$

其中$d\Omega$为Ω的任一子量，$f(M)$为Ω上的连续函数，而且$\Delta Q - f(M)d\Omega$是当$d \to 0$时的无穷小。找到微元后$dQ = f(M)d\Omega$以后，对$f(M)$在Ω上积分即得Q，也即

$$Q = \int_{\Omega} f(M)d\Omega$$

7.5.1 几何问题举例

例 1　假设在某海湾中有个小岛，其陆地高度为$z = 30\left(1 - \dfrac{x^2 + y^2}{10^6}\right)$（单位：m），水平面$z = 0$对应于低潮的位置，$z = 2$为高潮位置。求高潮与低潮时海岛露出水面得面积之比.

解　本题为求曲面面积的问题，设低潮时海岛与水平面的截平面区域为D_0，设高潮时海岛与水平面的截平面区域为D_2. 设$z = 0$，从而$0 = 30\left(1 - \dfrac{x^2 + y^2}{10^6}\right)$.

由此得
$$D_0 : x^2 + y^2 \le 10^6.$$

令$z = 2$, 即
$$2 = 30\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{10^6}\right)$$

由此得
$$D_2 : x^2 + y^2 \le 10^6\left(1 - \frac{1}{15}\right) = 10^6 \cdot \frac{14}{15}.$$

经计算
$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{36(x^2 + y^2)}{10^{10}}}.$$

利用极坐标计算，低潮时海岛的表面积

$$S_0 = \iint_{D_0} \sqrt{1 + \frac{36(x^2 + y^2)}{10^{10}}}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{10^3} \sqrt{1 + \frac{36r^2}{10^{10}}}rdr$$

$$=2\pi\frac{10^{10}}{72}\int_0^{10^3}\left(1+\frac{36r^2}{10^{10}}\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+\frac{36r^2}{10^{10}}\right)$$

$$=\frac{10^{10}}{36}\pi\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{36r^2}{10^{10}}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{10^3}$$

$$=\frac{10^{10}}{54}\pi\cdot 5404.857.$$

同样可求得，高潮时海岛得表面积 $S_2\approx\frac{10^4}{54}\pi\cdot 5044.2313.$

面积之比为 $\frac{S_2}{S_1}=0.9333.$

7.5.2 质心与转动惯量

设在 xOy 平面上有 n 个质点，它们分别位于点 $(x1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 处，质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$。由力学知道，该质点系得质心的坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},$$

其中 $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$ 为该质点系的总质量,

$$M_y=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i\quad M_x=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i$$

分别为该质点系对 y 轴和 x 轴的静矩.

设有一平面薄片，占有 xOy 面上闭区域 D，在点（x,y）处的面密度 $\mu(x,y)$，假定 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，现在要找该薄片的质心的坐标.

取 D 上的小闭区域 $d\sigma$，则质量元素为 $\mu(x,y)\ d\sigma$，从而微力矩 dM_y 及 dM_x：

$$dM_y = x\ \mu(x,y)\ d\sigma，\ dM_x = y\ \mu(x,y)\ d\sigma$$

从而在区域 D 上积分，便得薄片的力矩

$$M_y=\iint_D x\mu(x,y)d\sigma,M_x=\iint_D y\mu(x,y)d\sigma$$

由第一节知道，薄片得质量为 $M=\iint_D\mu(x,y)d\sigma.$

所以薄片得质心为，薄片的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma},\ \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma}$$

如果薄片是均匀的，即面密度为常量，则薄片的质心为

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D xd\sigma,\ \bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D yd\sigma,$$

其中 $A=\iint\limits_D d\sigma$ 为闭区域 D 的面积.这时薄片的质心完全由闭区域 D 的形状所决定。称均匀平面薄片的质心叫做这平面薄片所占的平面图形的形心。因此，平面图形 D 的形心的坐标，就可用公式（1）计算.

例 2 求位于两圆 $\rho=2\sin\theta$ 和 $\rho=4\sin\theta$ 之间得均匀薄片得质心

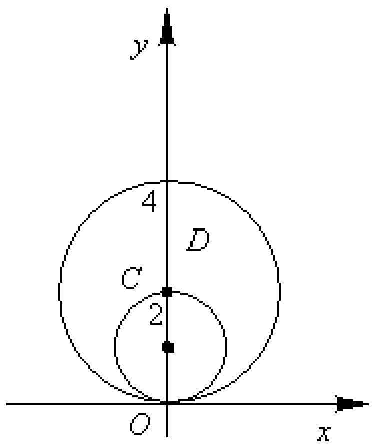


图 7-28

解　因为闭区域 D 对称于 y 轴，所以质心 $C(\bar{x},\bar{y})$ 必位于 y 轴上，于是 $\bar{x}=0$。

在按公式

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D yd\sigma$$

这时 D 得面积等于 3π，这时

$$\iint\limits_D yd\sigma=\iint\limits_D \rho^2\sin\theta d\rho d\theta=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2 d\rho$$

$$=\frac{56}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta=7\pi.$$

因此　$\bar{y}=\frac{7\pi}{3\pi}=\frac{7}{3}$，所求质心为 $C(0,\frac{7}{3})$.

类似地，占有空间有界闭区域 Ω、在点 (x,y,z) 处得密度为 $\rho(x,y,z)$（假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续）的物体的质心坐标是

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)dv,\ \bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_\Omega y\rho(x,y,z)dv,\ \bar{z}=\frac{1}{M}\iint\limits_\Omega z\rho(x,y,z)dv$$

其中 $M=\iint\limits_\Omega \rho(x,y,z)dv$

例 3 求均匀半球体的质心

解：取半球体的对称轴为 z 轴，原点取在球心上，又设求半径为 a，则半球体所占空间闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le a^2,z\ge 0\}。$$

显然，质心在 z 轴上，故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z\rho dv=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega} zdv$$

其中 $V=\frac{2}{3}\pi a^3$ 为半球体的体积

$$\iiint_{\Omega} zdv=\iiint_{\Omega} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^3dr$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{4}.$$

假设质量为 m 的质点 M 绕定轴 l 旋转，M 到 l 的距离为 r，力学上称 $I=mr^2$ 为质点 M 对 l 的转动惯量.

设在 xOy 平面上有 n 个质点，它们分别位于点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 处，质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$。由力学知道，该质点系对于 x 轴以及 y 轴的转动惯量依次为

$$I_x=\sum_{i=1}^{n}y_i^2m_i;I_y=\sum_{i=1}^{n}x_i^2m_i.$$

设有一薄片，占有 xOy 面上的闭区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\mu(x,y)$，假定 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，则利用元素法，可得该薄片对 x 轴及 y 轴的转动惯量为

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)d\sigma,\quad I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)d\sigma$$

例 4 求半径为 a 的均匀半圆薄片（面密度为常量 μ）对于其直径边的转动惯量.

解　取坐标系如图 7－29 所示，则薄片所占闭区域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2,y\ge 0\},$$

而所求转动惯量即半圆薄片对于 x 轴的转动惯量 I_x.

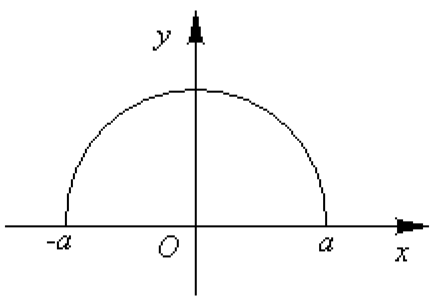


图 7－29

$$I_x=\iint_D \mu y^2d\sigma=\mu\iint_D \rho^3\sin^2\theta d\rho d\theta$$

$$=\mu\int_0^{\pi}d\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta d\rho$$

$$=\mu\cdot\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\mu a^4\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}Ma^2,$$

其中$M=\frac{1}{2}\pi a^2\mu$为半圆薄片的质量.

类似地，占有空间有界闭区域Ω、在点(x,y,z)处的密度为$\rho(x,y,z)$（假定$\rho(x,y,z)$在Ω上连续）的物体对于x、y、z轴的转动惯量为

$$I_x=\iiint_\Omega(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv,$$
$$I_y=\iiint_\Omega(z^2+x^2)\rho(x,y,z)dv$$
$$I_z=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv$$

例 5 求密度为ρ的均匀球体对于过球心的一条轴l的转动惯量.

解 取球心为坐标原点，z轴与轴l重合，又设球的半径为a，则球体所占空间闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le a^2\},$$

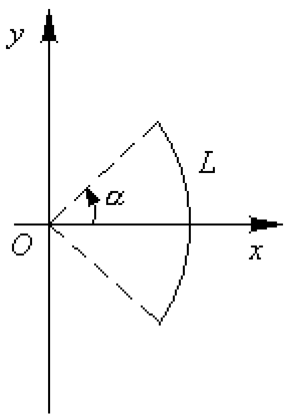
所求转动惯量即球体对于z轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}I_z&=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\rho dv\\&=\rho\iiint_\Omega(r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta\\&=\rho\iiint_\Omega r^4\sin^3\varphi drd\varphi d\theta=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr\\&=\rho\cdot2\pi\cdot\frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi-1)d(\cos\varphi)\\&=\frac{2}{5}\pi a^5\rho\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{5}a^2M,\end{aligned}$$

其中$M=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$为球体的质量.

类似地，对线积分也有相应的公式。

例 6 计算半径为R、中心角为2α的圆弧L对于它的对称轴的转动惯量I（设线密度$\mu=1$）.



解 取坐标系如图 10－3，则

$$I=\int_L y^2ds$$

为了便于计算，利用L的参数方程

$$x=R\cos\theta,y=R\sin\theta\ (-\alpha\le\theta\le\alpha).$$

于是

$$I=\int_L y^2 ds=\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\sin^2\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\theta d\theta=\frac{R^3}{2}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$=\frac{R^3}{2}(2\alpha-\sin 2\alpha)=R^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha).$$

7．5．3 引力

设物体占有空间有界闭区域Ω，它在点(x,y,z)处的密度为$\rho(x,y,z)$，并假定$\rho(x,y,z)$在Ω上连续.在物体内任取一直径很小的闭区域dv（这闭区域的体积也记作dv），(x,y,z)为这一小块中的一点.把这一小块物体的质量ρdv近似地看作集中在点(x,y,z)处.于是按两质点间的引力公式，可得在这一小块物体对位于$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的单位质量的质点的引力近似地为

$$dF=(dF_x,dF_y,dF_z)$$

$$\left(G\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dv,G\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dv,G\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dv\right),$$

其中dF_x,dF_y,dF_z为引力元素dF在三个坐标轴上的分量，

$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，$G$为引力常数，将$dF_x,dF_y,dF_z$在$\Omega$上分别积分，即得

$$\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$$

$$=\left(\iiint_{\Omega}\frac{G\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dv,\iiint_{\Omega}\frac{G\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dv,\iiint_{\Omega}\frac{G\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dv\right).$$

另外，平面薄片对薄片外一点的单位质量的引力，也可以类似地得到，只要改成对x、y的二重积分就行了.

例 7 设半径为R的均质球占有空间闭区域$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le R^2\}$.求它对位于$M_0(0,0,a)$ $(a>R)$处的单位质量的质点的引力.

解 设球的密度为ρ_0，由球体的对称性及质量分布的均匀性知$F_x=F_y=0$，所求引力沿z轴的分量为

$$F_z=\iiint_{\Omega}G\rho_0\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}dv$$

$$= G\rho_0 \int_{-R}^{R} (z-a)dz \iint\limits_{x^2+y^2 \le R^2-z^2} \frac{dxdy}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= G\rho_0 \int_{-R}^{R} (z-a)dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho d\rho}{[\rho^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\pi G\rho_0 \int_{-R}^{R} (z-a)\left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)dz$$

$$= 2\pi G\rho_0 \left[-2R + \frac{1}{a}\int_{-R}^{R} (z-a)d\sqrt{R^2-2az+a^2}\right]$$

$$= 2\pi G\rho_0 \left(-2R + 2R - \frac{2R^3}{3a^2}\right)$$

$$= -G \cdot \frac{4\pi R^3}{3}\rho_0 \cdot \frac{1}{a^2} = -G\frac{M}{a^2},$$

其中$M = \dfrac{4\pi R^3}{3}\rho_0$为球的质量.上述结果表明：均质球对球外一质点的引力如同球的质量集中于球心时两质点间的引力.

作业　2，，5，7，9，10，11