第二章　连续时间系统的时域分析

§2.1 引　言

- 线性时不变（Linear time-invariant—LTI）连续时间系统的分析，可以归结为建立和求解线性常系数微分方程。
- 如果不经过任何变换，直接在时域求解方程，这种分析方法称为时域分析法（Time-domain analysis method）。
- 如果为了便于求解方程，将时间变量变换成其它变量，则称为变换域分析法（Transform domain analysis method），如频域分析法、复频域分析法等。

系统分析的核心思想：

充分利用LTI系统的特性(齐次性、叠加性和时不变性)，将激励信号分解为不同单元信号加权和的形式。

- 时域法的单元信号：$\delta(t), \delta(t-t_0)\ldots\ldots$
- 频域法的单元信号：$A_1\sin(\omega_1 t), A_2\sin(\omega_2 t)\ldots\ldots$
- 复频域法的单元信号：$e^{s_1 t}, e^{s_2 t}\ldots\ldots$ 或

$$e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t), e^{\sigma_2 t}\sin(\omega_2 t)\ldots\ldots$$

§2.2 系统数学模型的建立

一、线性系统的数学模型

对于电路系统而言，建立系统的数学模型需要掌握两方面的知识：

（1）构成电路各个元件上的电压和电流的关系。

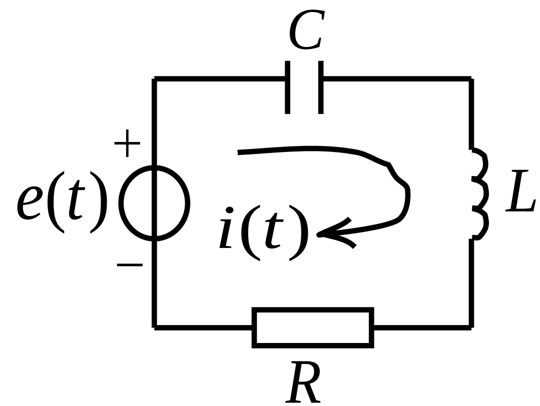
电阻R：$u_R(t) = Ri_R(t)$

电容C：$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$，　　$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$

电感L：$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$，　　$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)d\tau$

(2)基尔霍夫电压定律和电流定律。

讨论：下图所示RLC串联电路，激励电压源的电压为$e(t)$，回路的响应电流为$i(t)$，写出其系统方程。



解：根据电路，可以写出微分方程

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\cdot i(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=e(t)$$

方程两边求一次微分

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}$$

经整理得

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{CL}i(t)=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{CL}i(t) = \frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt}$$

- 上例是线性系统，得到的系统数学模型是**线性常系数微分方程**。由于以上系统中只含有两个储能元件，因此微分方程是二阶的。

- 由此推广可得**n阶线性系统**的**数学模型**为：

$$\frac{d^n r(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) = b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

- 这种微分方程描述了系统**输入（激励）函数**与**输出（响应）函数**之间的关系，称为输入－输出描述法。

- 其中**a，b均为常数**，由系统**元件的参数**确定。

二、系统方程的算子表示法

引入微分算子 p 和积分算子 $\frac{1}{p}$ 来表示微分操作和积分操作，

则有 $pr(t)=\frac{dr(t)}{dt}$， $p^2r(t)=\frac{d^2r(t)}{dt^2}$，⋯ $\frac{1}{p}r(t)=\int_{-\infty}^{t}r(\tau)d\tau$

所以，n阶线性系统的微分方程可以用算子法表示为

$$\frac{d^nr(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dr(t)}{dt}+a_0r(t)=b_m\frac{d^me(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{de(t)}{dt}+b_0e(t)$$

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)r(t)=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0)e(t)$$

令

$$D(p)=p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0$$

$$N(p)=b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0$$

则有 $D(p)r(t)=N(p)e(t)$， $r(t)=\frac{N(p)}{D(p)}e(t)=H(p)e(t)$

其中 $H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0}$ **定义为转移算子。**

三、时域分析法

时域分析法就是直接求解微分方程的方法，共有两种解法。

解法一：经典法(高等数学中已介绍)

方程的解(系统的全响应)= 通解 + 特解

解法二：近代时域法(本课程重点介绍)

方程的解(系统的全响应)= 零输入响应 + 零状态响应

$$\boxed{r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)}$$

§2.3 系统的零输入响应

- 零输入响应是指当外加激励为0时，仅由系统的初始状态单独作用所产生的响应，记为$r_{zi}(t)$。
- 根据零输入响应的定义，有$e(t)=0$，因此n阶系统的微分方程就变为：

$$\frac{d^n r_{zi}(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1} r_{zi}(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d r_{zi}(t)}{dt}+a_0 r_{zi}(t)=0$$

- 系统的零输入响应就是线性齐次微分方程的解，其解的形式取决于特征方程和特征根的性质。

$$\frac{d^n r_{zi}(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} r_{zi}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d r_{zi}(t)}{dt} + a_0 r_{zi}(t) = 0$$

上面的齐次微分方程的**特征多项式**为

$$D(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

其**特征方程**（**Characteristic equation**）为

$$D(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$$

特征方程的根称为**特征根**（**Characteristic root**），也称作系统的**自然频率**（**Natural frequency**）。

一、特征根为单根的情况

设 $p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$ 的根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

且 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$，则其特征方程为

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$
$$= (p - \lambda_1)(p - \lambda_2)\cdots(p - \lambda_n) = 0$$

故其零输入响应的形式解为

$$\boxed{r_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}}$$

其中，$c_1, c_2, \cdots c_n$是由系统的初始条件确定的待定系数。

$$r_{zi}(0), r'_{zi}(0), r''_{zi}(0), \cdots, r_{zi}{}^{(n-1)}(0)$$

二、特征根有重根的情况

假设λ_1是特征方程的 k阶重根，即特征方程有$(p-\lambda_1)^k$因子，其余为单根，其特征方程为：

$$(p-\lambda_1)^k(p-\lambda_{k+1})\cdots(p-\lambda_n)=0$$

故其零输入响应的形式解为

$$\boxed{\begin{aligned} r_{zi}(t) = &\left(c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{k-1}t^{k-1}\right)e^{\lambda_1 t} \\ &+c_{k+1}e^{\lambda_{k+1}t}+\cdots+c_n e^{\lambda_n t}\end{aligned}}$$

其中$c_0,c_1,\cdots c_{k-1},c_{k+1},\cdots c_n$也是由系统的初始条件确定的待定系数。

$$r_{zi}(0),r'_{zi}(0),r''_{zi}(0),\cdots,{r_{zi}}^{(n-1)}(0)$$

例：已知线性时不变连续时间系统的微分方程如下，

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+5\frac{dr(t)}{dt}+6r(t)=e(t)$$

系统的初始条件为 $r_{zi}(0)=2,\ r_{zi}{}'(0)=1$，求系统的零输入响应。

解：根据系统的微分方程，可得其特征方程为

$$p^2+5p+6=0$$

得到特征根为：$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3$

则零输入响应为：$r_{zi}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$

并且 $r_{zi}'(t)=\lambda_1c_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2c_2e^{\lambda_2 t}=-2c_1e^{-2t}-3c_2e^{-3t}$

带入初始条件：
$$\begin{aligned}r_{zi}(0)&=c_1+c_2=2\\ r_{zi}'(0)&=-2c_1-3c_2=1\end{aligned}\ \Longrightarrow\ \begin{aligned}c_1&=7,\\ c_2&=-5\end{aligned}$$

故系统的零输入响应为：$r_{zi}(t)=7e^{-2t}-5e^{-3t}$，$t\geq 0$

例：已知线性时不变连续时间系统的转移算子如下，

$$H(p)=\frac{p^2+p+1}{p^2+5p+4}$$

系统的初始条件为 $r_{zi}(0)=2,\ r_{zi}{}'(0)=1$**，求系统的零输入响应。**

解：根据系统的转移算子，可得其特征方程为

$$p^2+5p+4=0$$

得到特征根为： $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-4$

则零输入响应为： $r_{zi}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^{-t}+c_2e^{-4t}$

并且 $r_{zi}'(t)=\lambda_1c_1e^{\lambda_1 t}+\lambda_2c_2e^{\lambda_2 t}=-c_1e^{-t}-4c_2e^{-4t}$

带入初始条件： $\begin{aligned} r_{zi}(0)&=c_1+c_2=2 \\ r_{zi}'(0)&=-c_1-4c_2=1 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} c_1&=3, \\ c_2&=-1 \end{aligned}$

故系统的零输入响应为： $r_{zi}(t)=3e^{-t}-e^{-4t}$，$t\geq 0$

三、零输入响应求解步骤的总结

（1） 建立系统的数学模型；

（2） 求出特征根；

（3） 确定零输入响应的形式解；

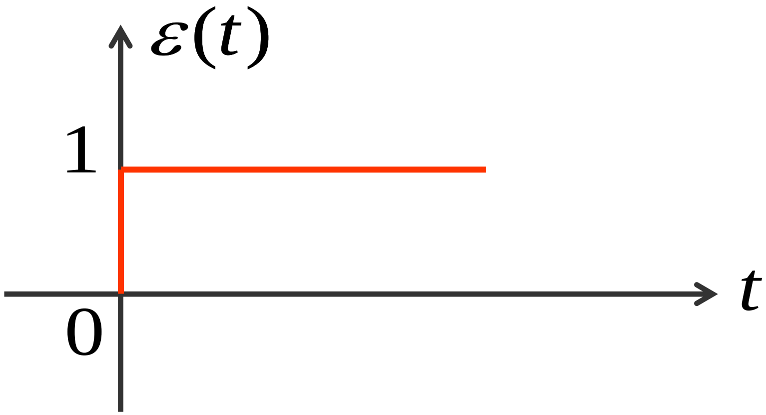
（4） 用初始条件确定待定系数。

§2.4 奇异函数

函数本身或其导数有一个或多个间断点，在间断点上的导数用一般方法无法确定，这样的函数统称为奇异函数（Singularity function）。

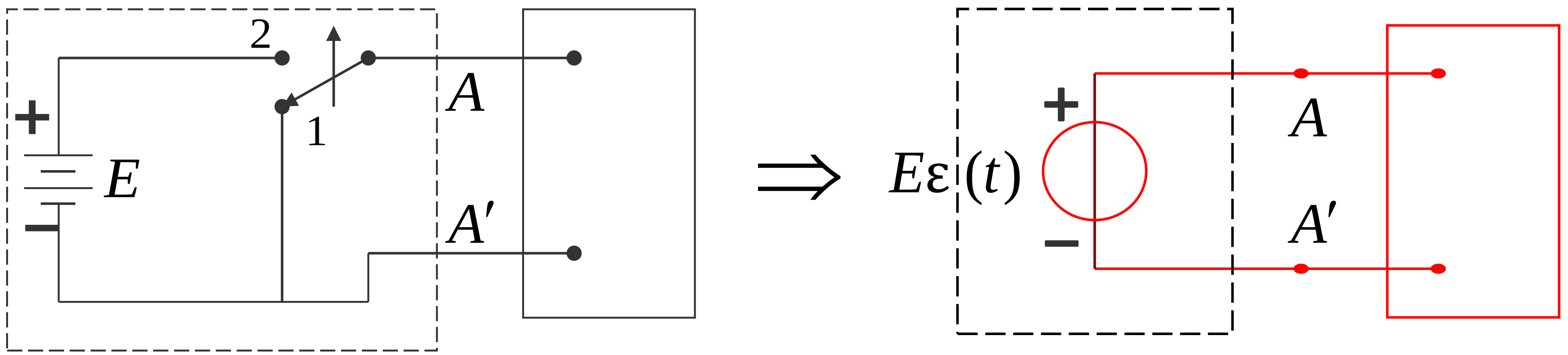
一、单位阶跃函数（Unit step function）

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$t = 0$ 时，函数值有跃变。

阶跃函数可用来表示**理想化**了的**开关接通**信号源的情况：



接通直流电压源的模型

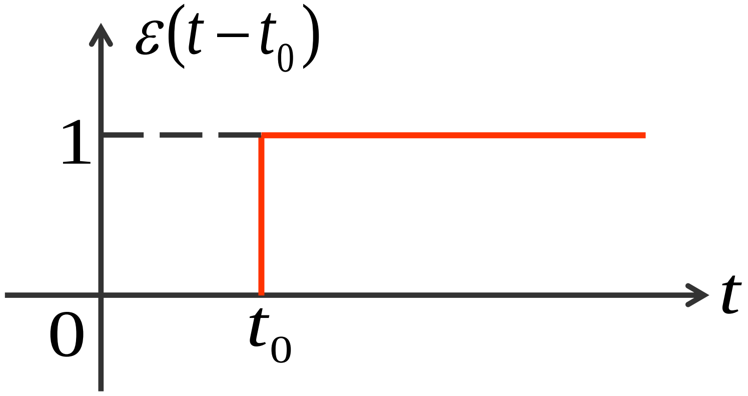
则在AA'处的电压可表示为如下的阶跃函数：

$$u_A(t)=\begin{cases}E & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}=E\varepsilon(t)$$

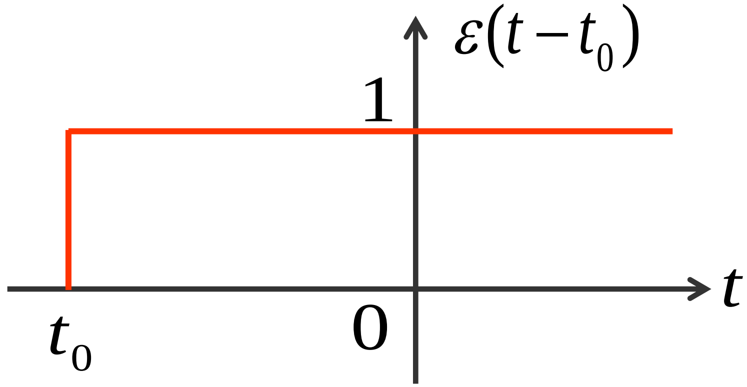
延时的单位阶跃函数：

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$

$t_0>0$

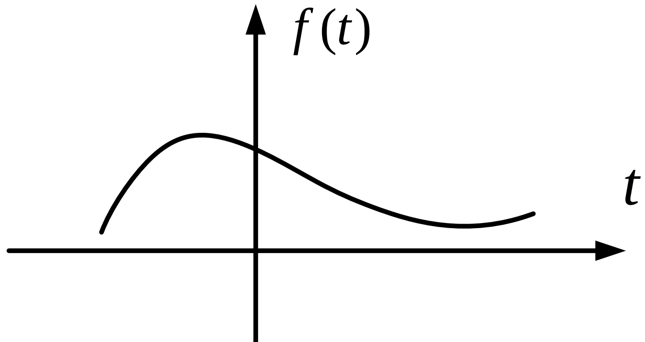


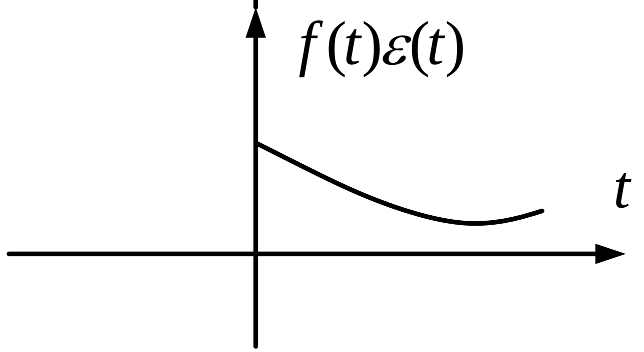
$t_0<0$



任一信号与单位阶跃信号相乘都变为单边信号。

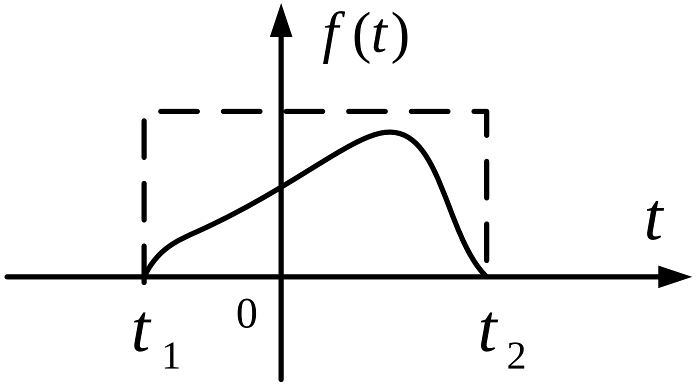
$$f(t)\varepsilon(t)=\begin{cases} f(t) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$





可以用单位阶跃信号表示有限时长的信号。

$$f(t)=\begin{cases} f(t) & t_1<t<t_2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$



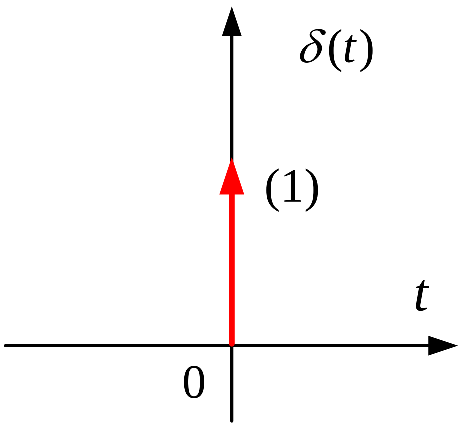
$$f(t)=f(t)[\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)]$$

二、单位冲激函数（Unit impulse function）

冲激函数可以用来理想化那些作用时间极短、取值极大的信号，如力学中瞬间作用的冲击力、电学中的雷击等。

1. 单位冲激函数的积分定义法

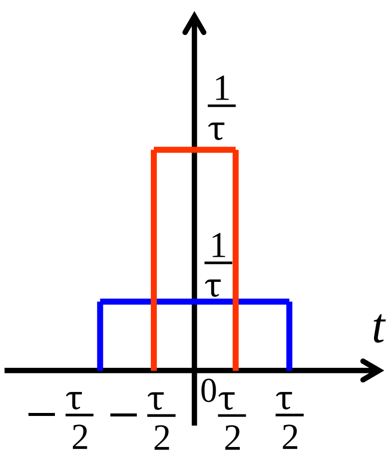
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases}$$



$\delta(t)$在t=0处，函数值为无穷大，但和横轴围成的面积为1。

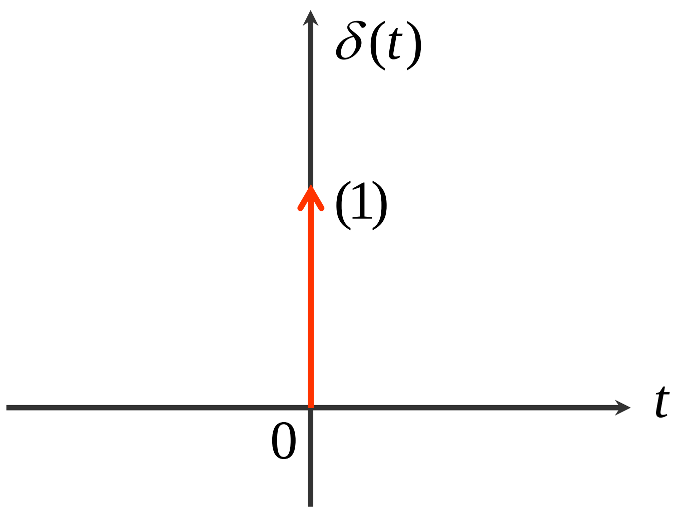
2. 单位冲激函数的极限定义法

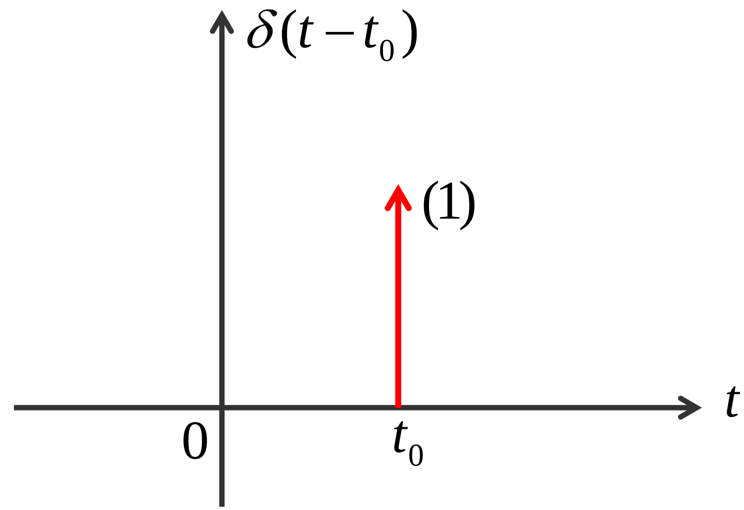
$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}[\varepsilon(t+\frac{\tau}{2}) - \varepsilon(t-\frac{\tau}{2})]$$



定义单位冲激函数的积分值为冲激函数的冲激强度。如果某冲激函数的积分值为A，则其冲激强度为A，可表示为$A\delta(t)$。

冲激函数的延迟





$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

3. 单位冲激函数的性质

(a) **抽样性**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt$$

$$= f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

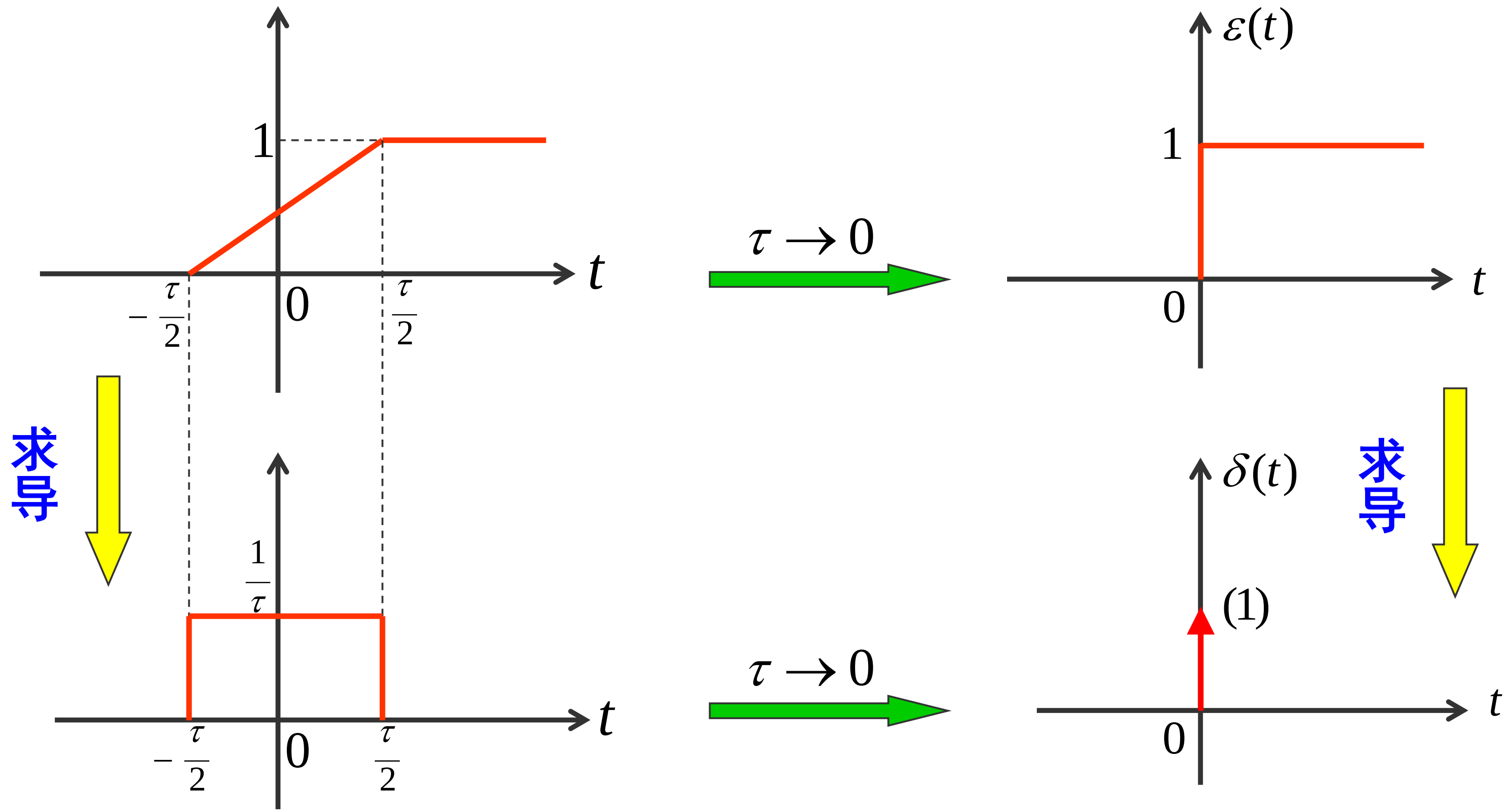
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_1)\delta(t-t_0)dt = f(t_0-t_1)$$

(b) **偶函数性** $\delta(t) = \delta(-t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-t)dt = \int_{\infty}^{-\infty} f(-\tau)\delta(\tau)d(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-\tau)\delta(\tau)d(\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(\tau)d(\tau) = f(0)$$

(c) 与单位阶跃函数的关系



$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \qquad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

这一性质说明，函数在间断点处的导数一定有一个冲激。

例：求以下几个函数的值。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin t\, \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}t$； (2) $\int_{-2}^{3} \mathrm{e}^{-5t} \delta(t-1) \mathrm{d}t$；

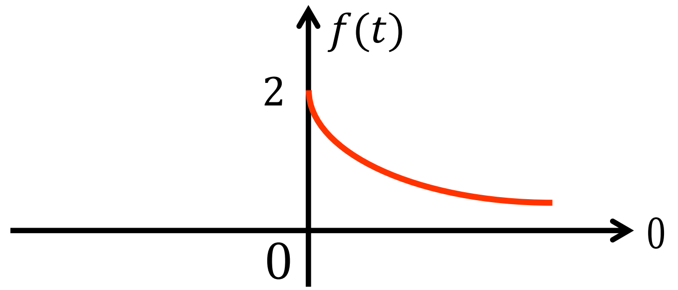
(3) $\int_{-4}^{6} \mathrm{e}^{-2t} \delta(t+8) \mathrm{d}t$；

解： (1) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin t\, \delta(t - \frac{\pi}{4}) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\frac{\pi}{4} \delta(t - \frac{\pi}{4}) \mathrm{d}t = \sin\frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{\pi}{4}) \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\int_{-2}^{3} \mathrm{e}^{-5t} \delta(t-1) \mathrm{d}t = \int_{-2}^{3} e^{(-5)\times 1} \delta(t-1) dt = e^{-5} \int_{-2}^{3} \delta(t-1) dt = e^{-5}$

(3) $\int_{-4}^{6} \mathrm{e}^{-2t} \delta(t+8) \mathrm{d}t = \int_{-4}^{6} e^{-2\times(-8)} \delta(t+8) dt = e^{16} \int_{-4}^{6} \delta(t+8) dt = 0$

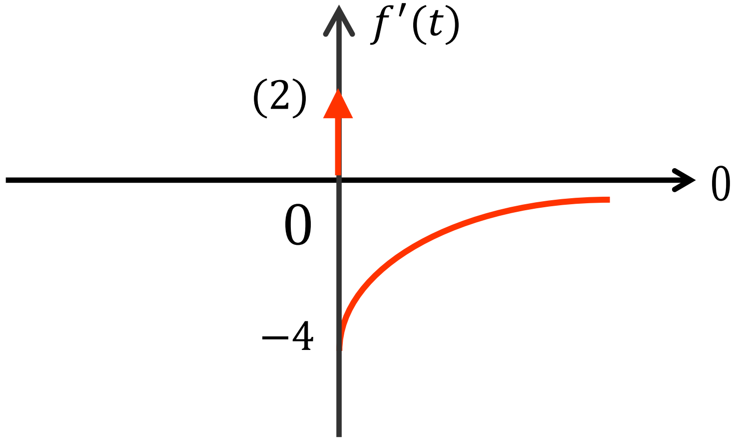
例：函数$f(t)=2e^{-2t}\varepsilon(t)$的图像如图所示，试画出$f'(t)$的图像。



解： $f'(t)=-4e^{-2t}\varepsilon(t)+2e^{-2t}\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{dt}$

$$=-4e^{-2t}\varepsilon(t)+2e^{-2t}\delta(t)$$

$$=-4e^{-2t}\varepsilon(t)+2\delta(t)$$



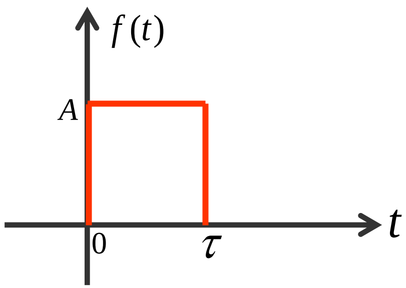
§2.5 信号的时域分解

信号的时域分解就是将信号分解为单元信号的加权和，时域法中采用的单元信号是阶跃信号和冲激信号。

一、规则信号表示为奇异函数之和

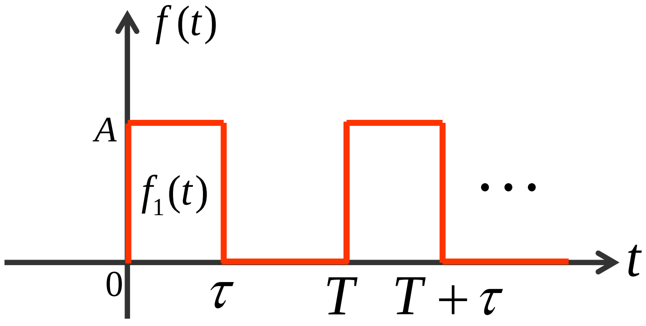
1. 单个脉冲

$$f(t) = A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)]$$



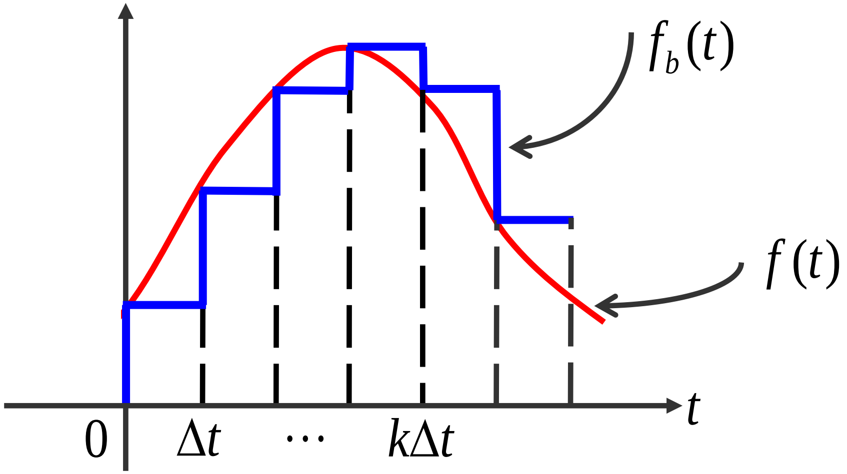
2. 有始周期方波

$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t-nT)$$
$$= A\sum_{n=0}^{\infty}[\varepsilon(t-nT) - \varepsilon(t-nT-\tau)]$$



二、任意函数表示为冲激函数的积分

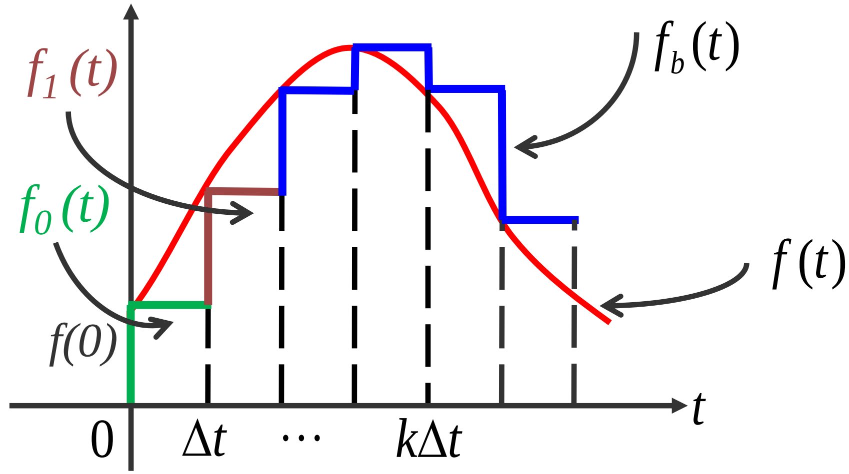
任意有始函数都可以表示为一系列冲激函数的加权和。



$$f_0(t) = f(0)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \Delta t)]$$

$$f_1(t) = f(\Delta t)[\varepsilon(t - \Delta t) - \varepsilon(t - \Delta t - \Delta t)]$$

$$f_k(t) = f(k\Delta t)[\varepsilon(t - k\Delta t) - \varepsilon(t - k\Delta t - \Delta t)]$$



则阶梯波$f_b(t)$为

$$f_b(t) = f_0(t) + f_1(t) + \cdots + f_k(t) + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t)[\varepsilon(t - k\Delta t) - \varepsilon(t - k\Delta t - \Delta t)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(k\Delta t)\frac{\varepsilon(t - k\Delta t) - \varepsilon(t - k\Delta t - \Delta t)}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

当Δt趋于无穷小时，有

$$\Delta t \to d\tau,\ k\Delta t \to \tau,\ \sum_{k=0}^{n} \to \int_0^t$$

所以

$$\boxed{f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} f_b(t) = \int_0^t f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau}$$

进一步推广

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau}$$

§2.6 阶跃响应和冲激响应

单位阶跃响应(Unit step response)：以单位阶跃信号作为激励信号时, 系统的零状态响应，记为$r_\varepsilon(t)$。

$$\boxed{\varepsilon(t) \to r_\varepsilon(t)}$$

单位冲激响应(Unit impulse response)：以单位冲激信号作为激励信号时, 系统的零状态响应，记为$h(t)$。

$$\boxed{\delta(t) \to h(t)}$$

0^-时刻：代表施加激励前一瞬的时刻。如不加说明，所有的初始状态均代表0^-时刻的状态。

0^+时刻：代表施加激励后一瞬的时刻。

一、单位冲激响应

1. 以一阶系统为例说明：

$$\frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) = e(t)$$

根据定义有：
$$\frac{dh(t)}{dt} + a_0 h(t) = \delta(t)$$

方程两边同时乘$e^{a_0 t}$有：

$$e^{a_0 t}\frac{dh(t)}{dt} + a_0 e^{a_0 t} h(t) = e^{a_0 t}\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}[e^{a_0 t}h(t)] = e^{a_0 t}\delta(t)$$

方程两边同时从0^-到t取定积分有：

$$e^{a_0 t}h(t) - h(0^-) = \int_{0^-}^{t} e^{a_0 \tau}\delta(\tau)\, d\tau$$

在冲激施加之前，系统的初始状态为0, 即$h(0^-)=0$，故

$$e^{a_0 t}h(t)-h(0^-)=\int_{0^-}^{t}e^{a_0\tau}\delta(\tau)d\tau \longrightarrow e^{a_0 t}h(t)=\int_{0^-}^{t}e^{a_0\tau}\delta(\tau)d\tau$$

$$h(t)=e^{-a_0 t}\int_{0^-}^{t}e^{a_0\tau}\delta(\tau)d\tau=e^{-a_0 t}\int_{0^-}^{t}\delta(\tau)d\tau=e^{-a_0 t}\varepsilon(t)$$

总结：

$$\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=e(t) \longrightarrow H(p)=\frac{1}{p+a_0} \longrightarrow \boxed{h(t)=e^{-a_0 t}\varepsilon(t)}$$

运用相同的解法可得：

$$\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=b_0 e(t) \longrightarrow H(p)=\frac{b_0}{p+a_0} \longrightarrow \boxed{h(t)=b_0 e^{-a_0 t}\varepsilon(t)}$$

$$\frac{dr(t)}{dt}+a_0 r(t)=\frac{de(t)}{dt}+b_0 e(t) \longrightarrow H(p)=\frac{p+b_0}{p+a_0}=1+\frac{b_0-a_0}{p+a_0}$$

$$h(t)=H(p)\delta(t)=(1+\frac{b_0-a_0}{p+a_0})\delta(t) \qquad \boxed{h(t)=\delta(t)+(b_0-a_0)e^{-a_0 t}\varepsilon(t)}$$

2. 对于高阶系统，可以运用部分分式法处理转移算子：

$$\frac{d^n h(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}h(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dh(t)}{dt} + a_0 h(t)$$
$$= b_m\frac{d^m\delta(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}\delta(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{d\delta(t)}{dt} + b_0\delta(t)$$

转移算子为 $H(p) = \dfrac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$

- **当$n > m$且系统的特征根均为单根时，**

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)\cdots(p-\lambda_n)}$$

$$= \frac{k_1}{p-\lambda_1} + \frac{k_2}{p-\lambda_2} + \cdots + \frac{k_n}{p-\lambda_n}$$

$$\boxed{h(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t) + k_2 e^{\lambda_2 t}\varepsilon(t) + \cdots + k_n e^{\lambda_n t}\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t}\varepsilon(t)}$$

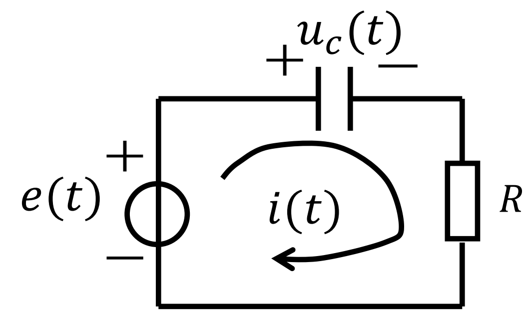
- 当$\mathbf{n}=\boldsymbol{m}$，且系统的特征根均为单根时，则$h(t)$中含有$k_i e^{\lambda_i t}\varepsilon(t)$项和冲激函数$\delta(t)$项。

- 当$\mathbf{n}<\boldsymbol{m}$，且系统的特征根均为单根时，则$h(t)$中含有$k_i e^{\lambda_i t}\varepsilon(t)$项、冲激函数$\delta(t)$项和冲激函数的导数$\delta'(t),\delta''(t),\cdots,\delta^{(m-n)}(t)$项。

- 如果系统的特征根为n阶重根，则$h(t)$中还含有如下项

$$k\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}\varepsilon(t)$$

例：RC电路如图所示，其初始状态为0，当$e(t)=\delta(t)$时，试求$i(t)$和$u_c(t)$。



1. 解：根据电路，系统的微分方程为

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = e(t)$$

方程两边求一次微分并整理得

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{RC}i(t)=\frac{1}{R}\frac{de(t)}{dt}$$

其转移算子为

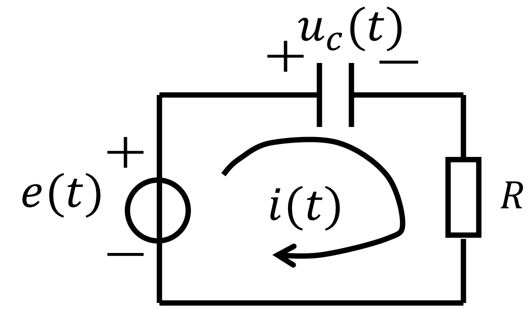
$$H(p)=\frac{\frac{1}{R}p}{p+\frac{1}{RC}}=\frac{1}{R}-\frac{\frac{1}{R^2C}}{p+\frac{1}{RC}}$$

特征根为 $\lambda=-\frac{1}{RC}$

所以 $i(t)=h(t)=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)$

$$\boxed{i(t)=\frac{1}{R}\cdot\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)}$$

2. 根据电路，可得



$$u_c(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau-\frac{1}{R^2C^2}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{1}{RC}\tau}\varepsilon(\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{RC}\varepsilon(t)-\frac{1}{R^2C^2}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{1}{RC}\tau}\overset{\mathbf{0}}{\varepsilon(\tau)}\,d\tau-\frac{1}{R^2C^2}\int_{0}^{t}e^{-\frac{1}{RC}\tau}\overset{\mathbf{1}}{\varepsilon(\tau)}\,d\tau$$

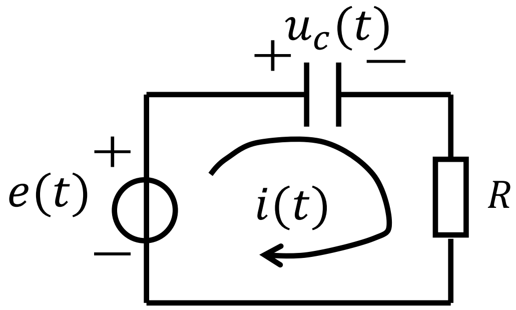
$$=\frac{1}{RC}\varepsilon(t)-\frac{1}{R^2C^2}(-RC)\int_{0}^{t}e^{-\frac{1}{RC}\tau}\,d(-\frac{1}{RC}\tau)$$

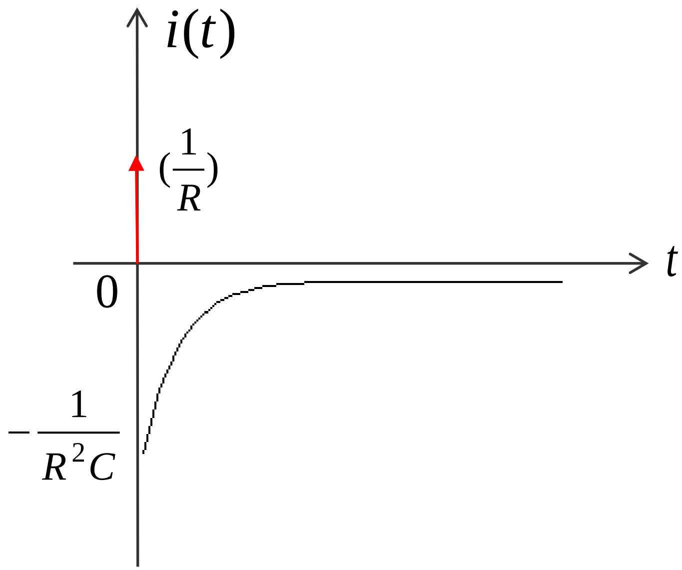
$$=\frac{1}{RC}\varepsilon(t)+\frac{1}{RC}(e^{-\frac{1}{RC}t}-1)\boxed{\varepsilon(t)}$$

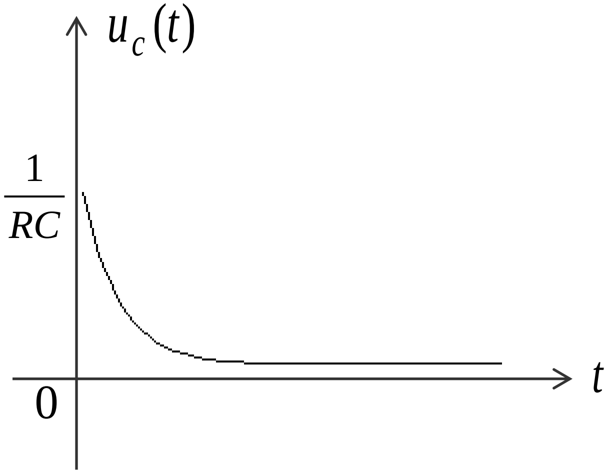
$$=\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} \cdot \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{1}{RC}t} \varepsilon(t)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \varepsilon(t)$$

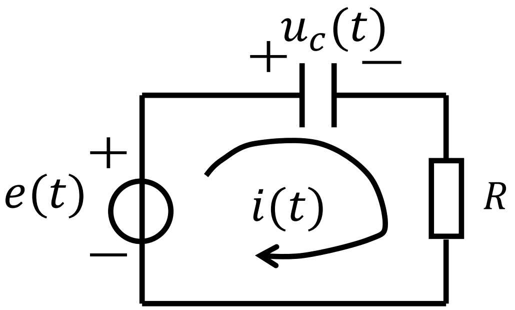






$$\boxed{u_c(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{i(t)=\frac{1}{R}\cdot\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)}$$



$$i(t)=i_C(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}=C\cdot\frac{1}{RC}\cdot\frac{d\left[e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)\right]}{dt}$$

$$=\frac{1}{R}\left[\frac{d(e^{-\frac{1}{RC}t})}{dt}\cdot\varepsilon(t)+e^{-\frac{1}{RC}t}\cdot\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right]$$

$$=\frac{1}{R}\left[-\frac{1}{RC}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)+e^{-\frac{1}{RC}t}\delta(t)\right]$$

$$=\frac{1}{R}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t)$$

例：已知一个因果系统的转移算子如下，求系统的单位冲激响应。

$$H(p)=\frac{2p^2+11p+16}{p^2+4p+4}$$

解:根据转移算子有 $H(p)=\dfrac{2p^2+11p+16}{p^2+4p+4}$

$$=\frac{2(p+2)^2+3(p+2)+2}{(p+2)^2}$$

$$=2+\frac{3}{p+2}+\frac{2}{(p+2)^2}$$

得其特征根$\lambda=-2$**，且为二阶重根。**

$$\boxed{k\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}\varepsilon(t)}$$

故系统的单位冲激响应为

$$h(t)=2\delta(t)+3e^{-2t}\varepsilon(t)+2te^{-2t}\varepsilon(t)$$

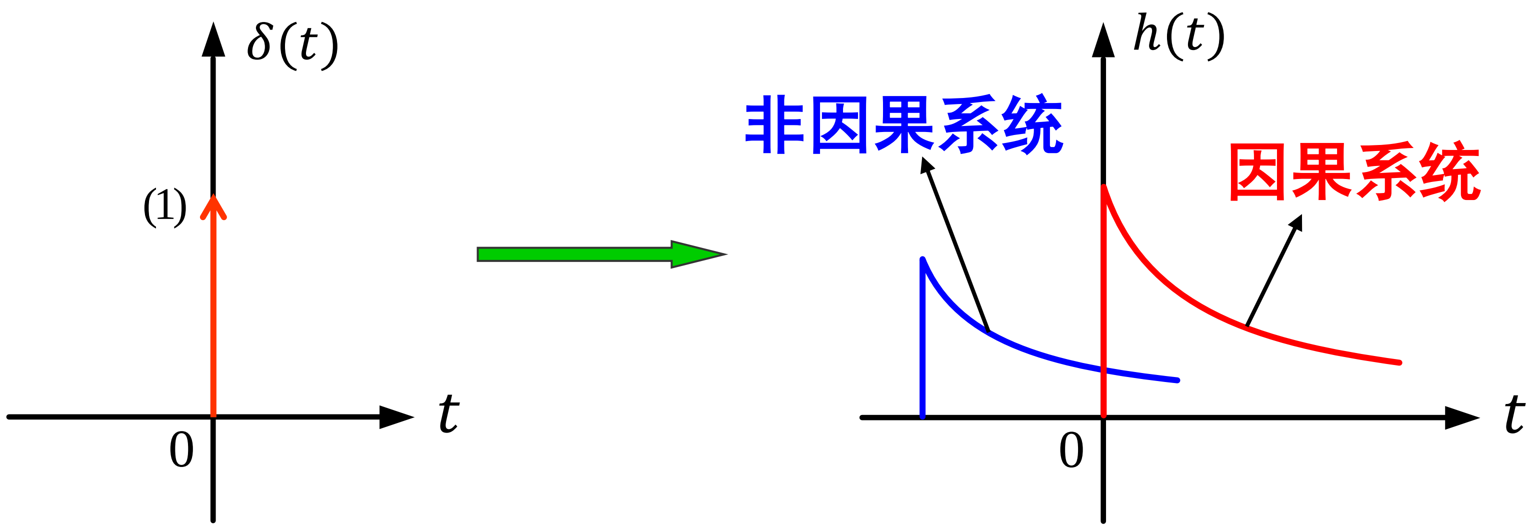
二、单位阶跃响应

根据线性时不变系统的性质

$$\delta(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \longrightarrow h(t)=\frac{dr_\varepsilon(t)}{dt} \longrightarrow r_\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$

单位阶跃响应可以通过对单位冲激响应求定积分得到。

三、单位冲激响应与系统因果性的关系



如果一个系统是因果系统，则其充要条件是$t<0, h(t)=0$。

§2.7 叠加积分

由2.5节可知，任意信号都可以表示为一系列冲激信号的加权和。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

若将激励信号$e(t)$按照上式分解，可得

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

根据线性时不变系统的齐次性、叠加性和时不变性，则系统对激励信号$e(t)$的零状态响应$r_{zs}(t)$为

$$r_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

此式就称为卷积积分（Convolution integral）。

在数学上，卷积积分是**卷积运算方法**的应用。两个具有相同变量t的**函数**$f_1(t)$**和**$f_2(t)$**相卷积**成为第三个具有相同变量t的**函数**$g(t)$，可表示为

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

$$\boxed{r_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau = e(t) * h(t)}$$

也就是说，系统对任意激励信号的**零状态响应**$r_{zs}(t)$是**激励信号**$e(t)$与**系统单位冲激响应**$h(t)$**相卷积**的结果。

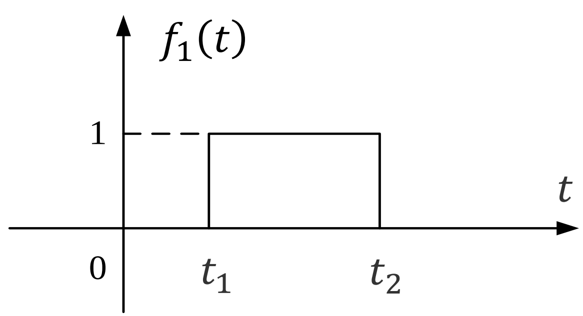
§2.8 卷积及其性质

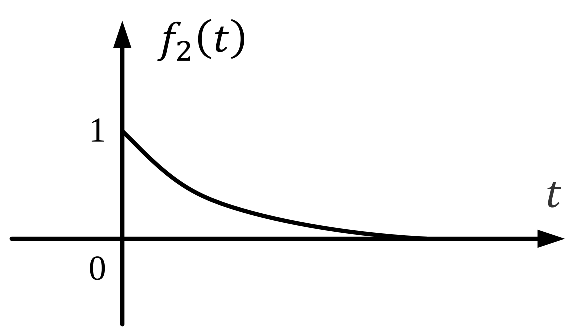
一、卷积的几何图解法

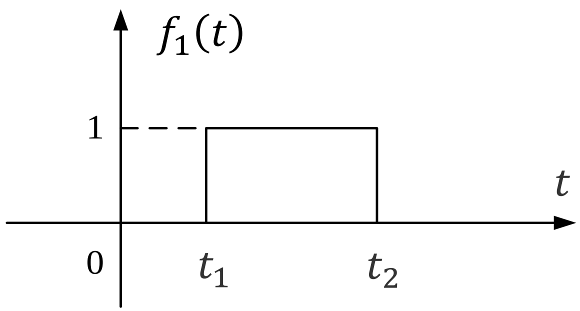
$$g(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2[-(\tau-t)]d\tau$$

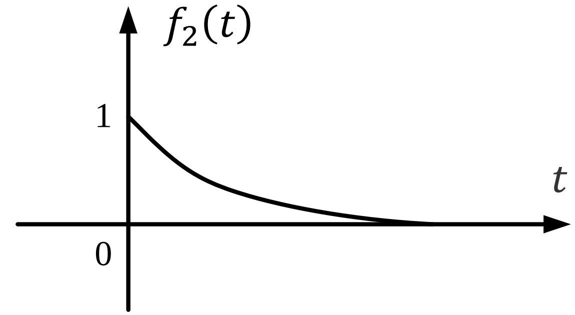
反褶 → 平移 → 相乘 → 积分

讨论：求矩形脉冲$f_1(t)=\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2), t_2>t_1>0$
与指数信号$f_2(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$**的卷积**$g(t)$**。**

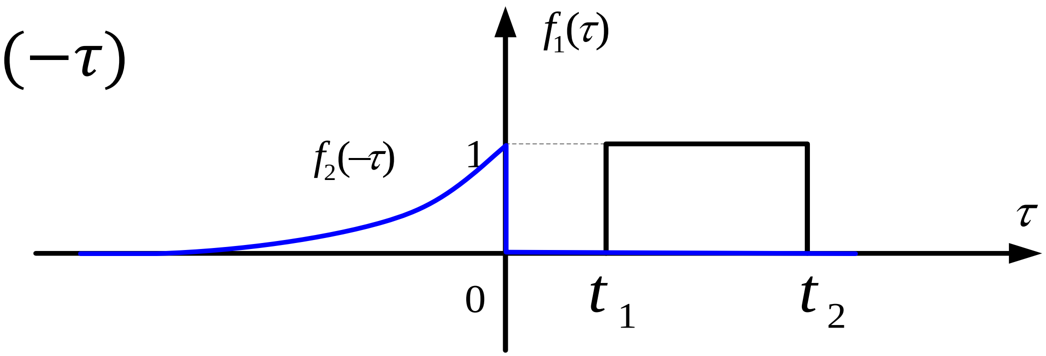




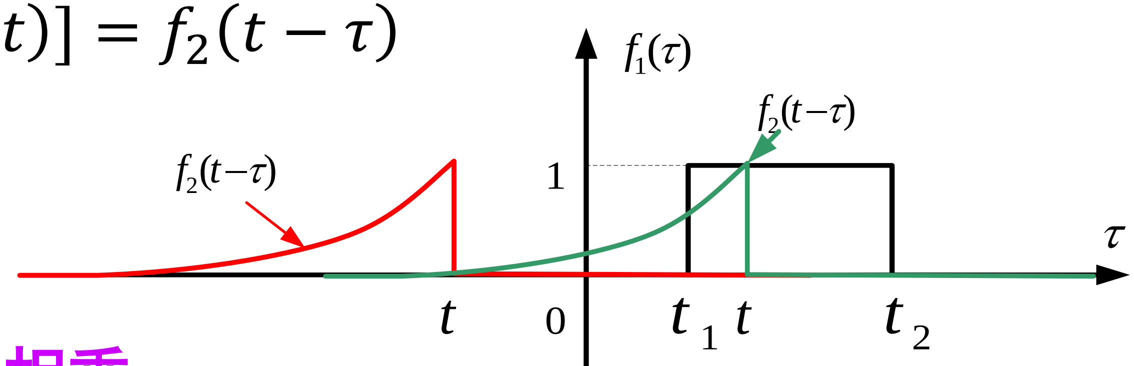




1. $f_1(\tau)$不动，$f_2(\tau)$**反褶**为$f_2(-\tau)$



2. $f_2(-\tau)$**平移**为$f_2[-(\tau-t)]=f_2(t-\tau)$



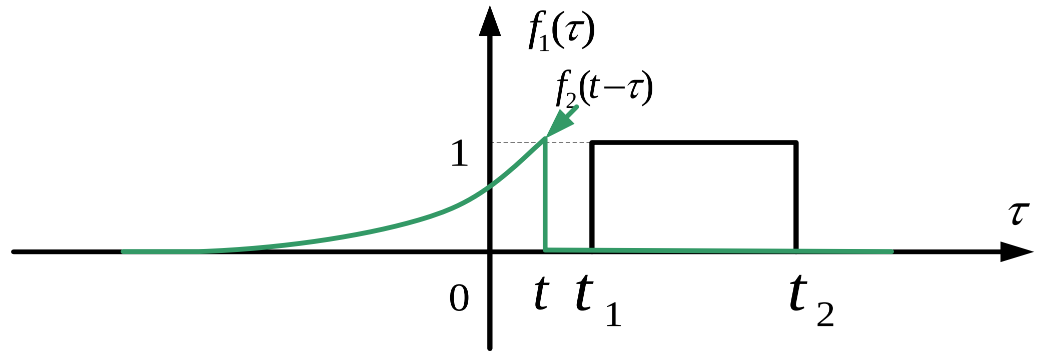
3. $f_1(\tau)$与$f_2(t-\tau)$函数值**相乘**

4. 根据$f_1(\tau)$与$f_2(t-\tau)$相交部分确定积分区间，**求积分**

由题已知 $f_1(t)=\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2), t_2>t_1>0 \qquad f_2(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$

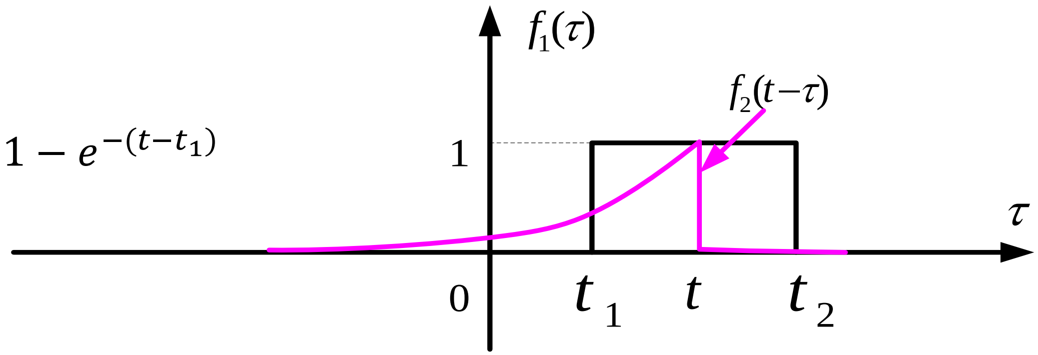
解:当 $t \le t_1$ 时,

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t} 0d\tau=0$$



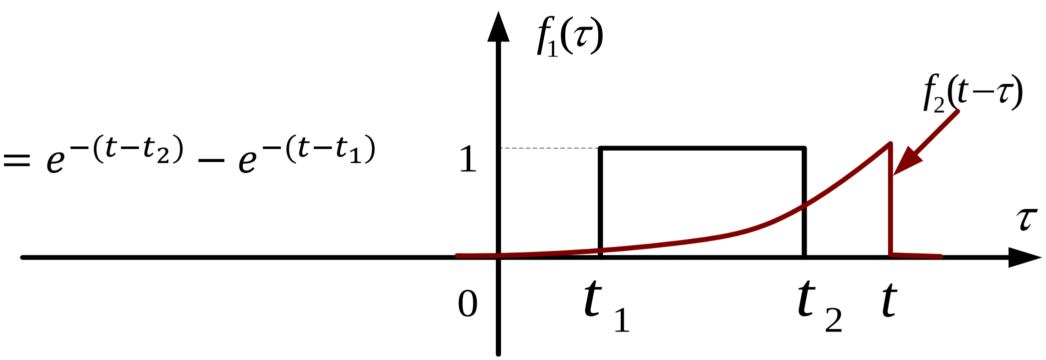
当 $t_1<t<t_2$ 时,

$$g(t)=\int_{t_1}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{t_1}^{t} e^{-(t-\tau)}d\tau=1-e^{-(t-t_1)}$$



当 $t \ge t_2$ 时,

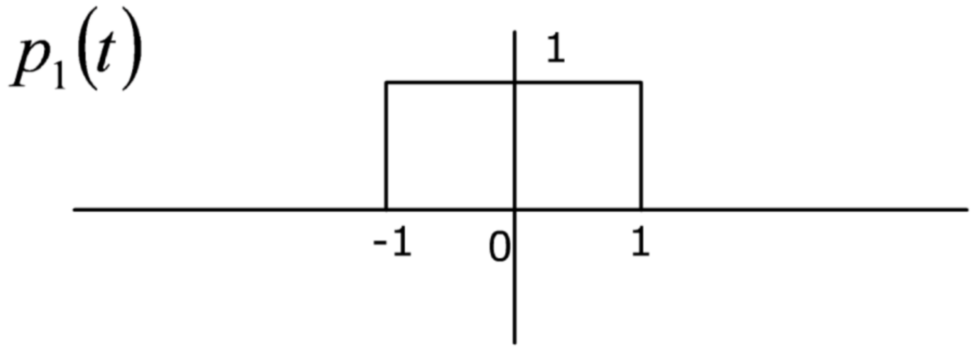
$$g(t)=\int_{t_1}^{t_2} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{t_1}^{t_2} e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-(t-t_2)}-e^{-(t-t_1)}$$

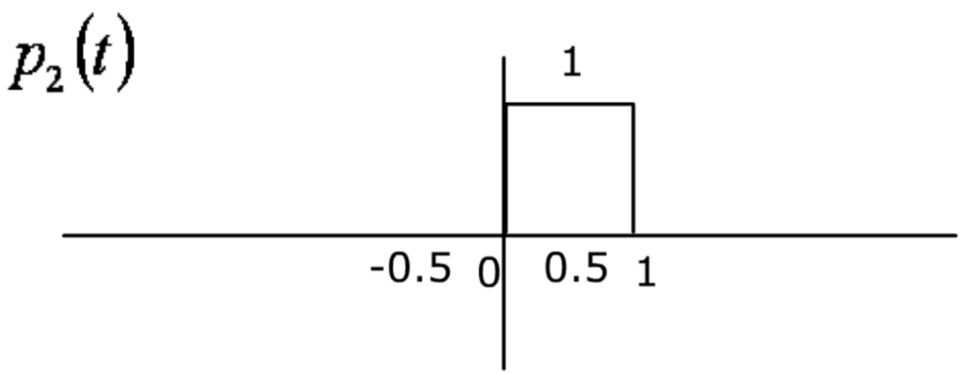


综上可得,

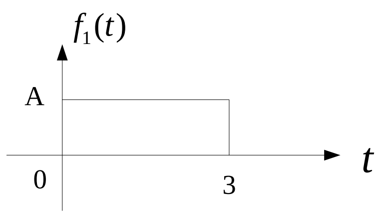
$$g(t)=\left[1-e^{-(t-t_1)}\right]\cdot[\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)]+\left[e^{-(t-t_2)}-e^{-(t-t_1)}\right]\varepsilon(t-t_2)$$

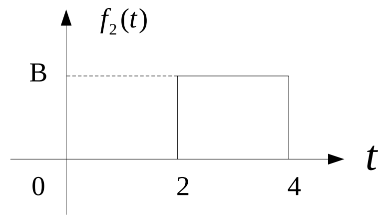
例：求信号$p_1(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$ **与信号**$p_2(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$**的卷积。**

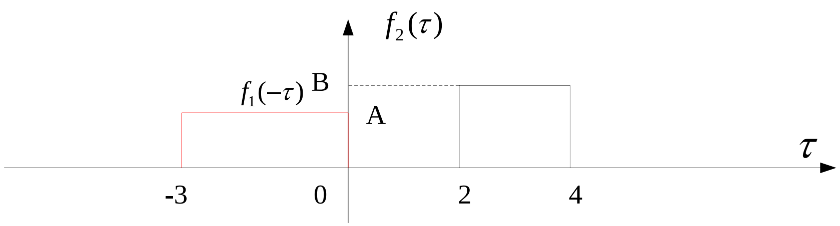


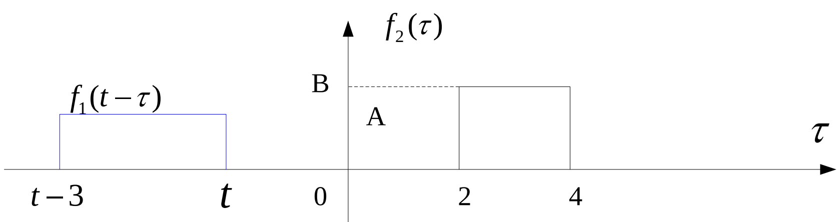


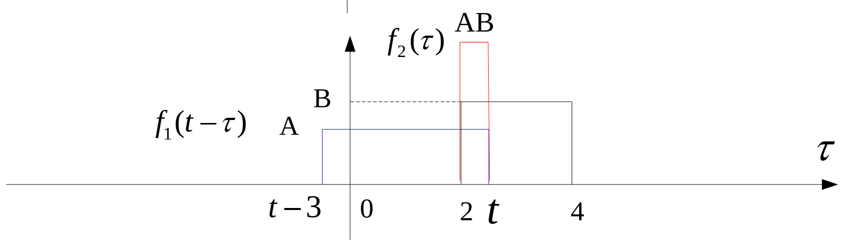
例:求信号的卷积积分$g(t) = f_2(t) * f_1(t)$，画出$g(t)$的图像。

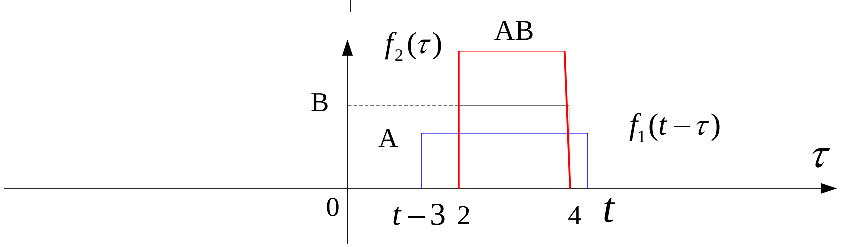


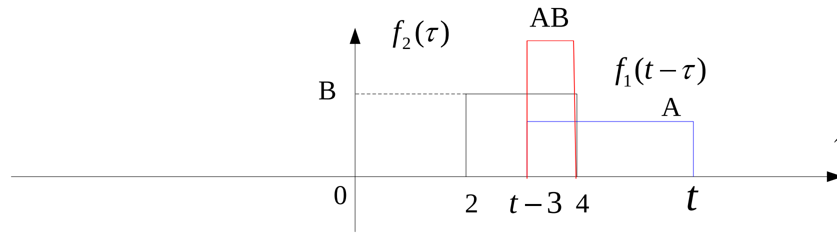


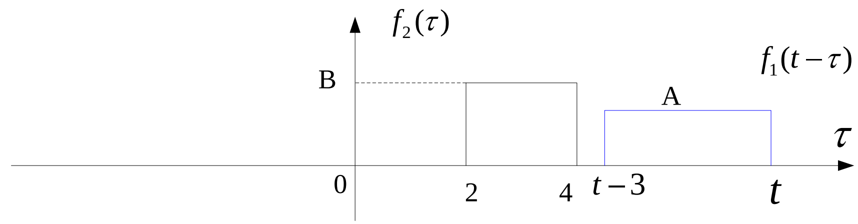












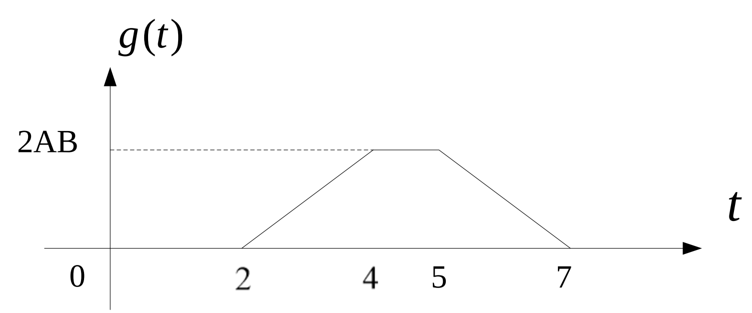
$$t < 2, g(t) = f_2(t) * f_1(t) = 0$$

$$2 \le t < 4, g(t) = f_2(t) * f_1(t) = AB(t-2)$$

$$4 \le t < 5, g(t) = f_2(t) * f_1(t) = 2AB$$

$$5 \le t \le 7, g(t) = f_2(t) * f_1(t) = AB(7-t)$$

$$t > 7, g(t) = f_2(t) * f_1(t) = 0$$



二、卷积的性质

1. 互换律（交换律）

$$u(t)*v(t)=v(t)*u(t)$$

2. 分配律

$$u(t)*[v(t)+w(t)]=u(t)*v(t)+u(t)*w(t)$$

3. 结合律

$$u(t)*[v(t)*w(t)]=[u(t)*v(t)]*w(t)$$

4. 函数相卷积后的微分

$$\frac{d}{dt}[u(t)*v(t)]=\frac{du(t)}{dt}*v(t)=u(t)*\frac{dv(t)}{dt}$$

5. 函数相卷积后的积分

$$\int_{-\infty}^{t}[u(x)*v(x)]dx=\int_{-\infty}^{t}u(x)dx*v(t)=u(t)*\int_{-\infty}^{t}v(x)dx$$

综合性质4和性质5可得

$$u(t)*v(t)=\frac{du(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}v(x)dx=\int_{-\infty}^{t}u(x)dx*\frac{dv(t)}{dt}$$

6. 函数延时后的卷积

如果 $f_1(t) * f_2(t) = g(t)$

则 $f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = g(t-t_1-t_2)$

7. 与冲激函数和阶跃函数的卷积

$f(t) * \delta(t) = f(t)$　　　　$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$

$$f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx * \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx * \delta(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

例：求$t^3\varepsilon(t) * t^5\varepsilon(t)$的卷积。

解： $t^3\varepsilon(t) * t^5\varepsilon(t) = \dfrac{d[t^3\varepsilon(t)]}{dt} * \int_{-\infty}^{t} \tau^5\varepsilon(\tau)d\tau = 3t^2\varepsilon(t) * \dfrac{1}{6}t^6\varepsilon(t)$

运用同样的方法可得：

$$
\begin{aligned}
3t^2\varepsilon(t) * \frac{1}{6}t^6\varepsilon(t) &= \frac{d[3t^2\varepsilon(t)]}{dt} * \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{6}\tau^6\varepsilon(\tau)d\tau \\
&= 3 \cdot 2t\varepsilon(t) * \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}t^7\varepsilon(t) \\
&= 3 \cdot 2 \cdot 1\varepsilon(t) * \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}t^8\varepsilon(t) \\
&= 3 \cdot 2 \cdot \delta(t) * \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}t^9\varepsilon(t) \\
&= \frac{1}{504}t^9\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

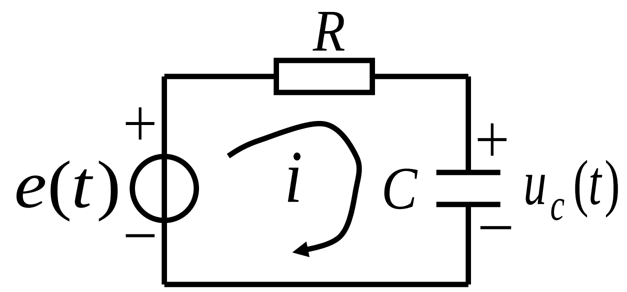
§2.9 线性系统响应的时域求解

线性时不变系统的全响应$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$

零输入响应$r_{zi}(t)$ + 零状态响应$r_{zs}(t)$

零输入响应$r_{zi}(t)$	零状态响应$r_{zs}(t)$
(1) 写出微分方程；	(1) 写出微分方程；
(2) 求得特征根；	(2) 求得特征根；
(3) 给出形式解；	(3) 列单位冲激响应；
(4) 确定形式解的待定系数。	(4) 求激励与单位冲激响应的卷积。

例：电路如图所示，其中$R=1\Omega, C=1F$，电容两端的初始电压为$u_c(0^-)=1V$。若激励电压为$e(t)=(1+e^{-3t})\varepsilon(t)$，试求电容两端的电压$u_c(t)$。



解：(1) 求零输入响应$r_{zi}(t)$

根据电路，可以写出微分方程

$$RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=e(t)$$

代入参数得

$$\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=e(t)$$

其特征方程为：$p+1=0$ **特征根为：**$\lambda=-1$

则零输入响应为：$r_{zi}(t)=c_1e^{\lambda t}=c_1e^{-t}$

带入初始条件求出 $c_1=1$

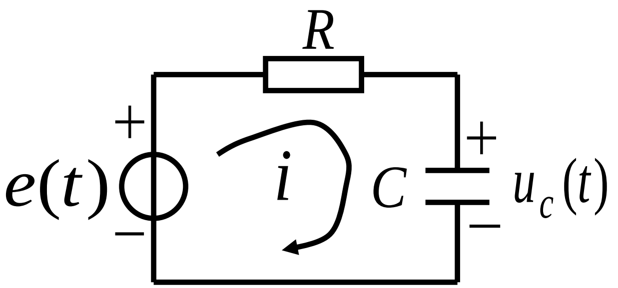
为什么这里没写$t>0$？

故系统的零输入响应为：$u_{c(zi)}(t)=r_{zi}(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$

激励电压为$e(t) = (1+e^{-3t})\varepsilon(t)$

(2) 求零状态响应$r_{zs}(t)$

$$\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = e(t)$$



根据微分方程，得其转移算子为

$$H(p) = \frac{1}{p+1}$$

其特征根为：$\lambda = -1$

故系统的单位冲激响应为 $h(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$

则系统的零状态响应为：

$$u_{c(zs)}(t) = r_{zs}(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} (1+e^{-3\tau})\varepsilon(\tau)\cdot e^{-(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$= (1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t})\varepsilon(t)$$

故系统的全响应为：

$$u_c(t) = u_{c(zi)}(t) + u_{c(zs)}(t) = e^{-t}\varepsilon(t) + (1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t})\varepsilon(t)$$

系统的特征根为
$\lambda = -1$
激励信号为
$e(t) = (1 + e^{-3t})\varepsilon(t)$

系统的全响应：

$$u_c(t) = \underbrace{e^{-t}\varepsilon(t)}_{\text{零输入响应分量}} + \underbrace{(1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t})\varepsilon(t)}_{\text{零状态响应分量}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}e^{-t}\varepsilon(t)}_{\text{自然响应分量}} + \underbrace{(1 - \frac{1}{2}e^{-3t})\varepsilon(t)}_{\text{受迫响应分量}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right)\varepsilon(t)}_{\text{瞬态响应分量}} + \underbrace{\varepsilon(t)}_{\text{稳态响应分量}}$$

自然响应分量：由系统的自然频率（特征根）所带来的响应分量。
受迫响应分量：由激励信号的特征频率所带来的响应分量。
瞬态响应分量：随着时间的增加而趋于零的响应分量。
稳态响应分量：随着时间的增加而趋于稳定的响应分量。

本章小结

基本概念：系统的数学模型、特征方程和特征根、奇异函数、零输入响应、零状态响应、单位冲激响应、卷积积分、自然响应、受迫响应、瞬态响应、稳态响应。

基本运算：零输入响应的求解、单位冲激响应的求解、零状态响应的求解、卷积的几何图解法、卷积的性质和应用。