

# Rapport de projet mathématiques : Méthodes numériques pour la résolution de systèmes linéaires

Alix ANNERAUD - Amandine BURCON - Myriem ABID

# Sommaire

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Motivation . . . . .	3
1.2	Théorie . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Références</b>	<b>5</b>
2.1	Bibliographie . . . . .	5
2.2	Biographies . . . . .	5
2.2.1	Johann Carl Friedrich Gauss . . . . .	5
2.2.2	André-Louis Cholesky . . . . .	5
2.2.3	Jacobi . . . . .	6
2.2.4	Philipp von Seidel . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Travail préliminaire</b>	<b>7</b>
3.1	Type de données . . . . .	7
3.2	Structure des données . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Méthodes directes</b>	<b>10</b>
4.1	Méthode triangulaire inférieure . . . . .	10
4.2	Méthode triangulaire supérieure . . . . .	11
4.3	Élimination de Gauss . . . . .	12
4.4	Factorisation “LU” . . . . .	13
4.5	Factorisation de Cholesky . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Méthodes itératives</b>	<b>16</b>
5.1	Méthode de Jacobi . . . . .	16
5.2	Méthode de Gauss-Seidel . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Code complet</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>32</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Motivation

La résolution des systèmes linéaires est utile à un bon nombres de domaines. Voici quelques exemples de problèmes que nous avons rencontrés précédemment :

- Électricité (P3) : Calcul d'intensité dans un circuit électronique en utilisant les lois des noeuds / mailles.
- Chimie (C3) : Calcul de l'équilibre des équations des réactions chimiques.
- Algèbre linéaire (M4) : Recherche des vecteurs propres d'une matrice carrée associés à une valeur propre donnée, déterminer le noyau d'un endomorphisme en dimension finie (système homogène).
- Géométrie analytique (Projet Informatique) : Déterminer la position relative de droite et de plan dans l'espace.

Nous allons nous intéresser au dernier cas, où nous devons, en projet informatique, détecter et déterminer la collision entre un parallélépipède rectangle ( $IJKLMNPO$ ) et une droite ( $D$ ).

En images de synthèse, les objets dans l'espaces sont définis par des points dans  $\mathbb{R}^3$ .

Ainsi, pour une droite définie par les points  $A$  et  $B$ , il est relativement aisé de retrouver son vecteur directeur :

$$\vec{D} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Ensuite, à partir du parallélépipède rectangle, on peut déterminer une base de l'espace :

$$\alpha \times \overrightarrow{JI} + \beta \times \overrightarrow{JK} + \gamma \times \overrightarrow{JL} = \alpha \times \begin{pmatrix} x_I - x_J \\ y_I - y_J \\ z_I - z_J \end{pmatrix} + \beta \times \begin{pmatrix} x_K - x_J \\ y_K - y_J \\ z_K - z_J \end{pmatrix} + \gamma \times \begin{pmatrix} x_L - x_J \\ y_L - y_J \\ z_L - z_J \end{pmatrix}, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on peut exprimer la le vecteur  $\vec{D}$ , c'est à dire déterminer les valeurs de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  :

$$\alpha \times \overrightarrow{JI} + \beta \times \overrightarrow{JK} + \gamma \times \overrightarrow{JL} = \vec{D}$$

$$\alpha \times \begin{pmatrix} x_I - x_J \\ y_I - y_J \\ z_I - z_J \end{pmatrix} + \beta \times \begin{pmatrix} x_K - x_J \\ y_K - y_J \\ z_K - z_J \end{pmatrix} + \gamma \times \begin{pmatrix} x_L - x_J \\ y_L - y_J \\ z_L - z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

On a donc une équation matricielle de la forme :

$$AX = B$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_I - x_J & x_K - x_J & x_L - x_J \\ y_I - y_J & y_K - y_J & y_L - y_J \\ z_I - z_J & z_K - z_J & z_L - z_J \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}}_B$$

Une fois trouvé  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  ( $X$ ), on connaît alors la position relative de la droite  $D$  par rapport au parallélépipède rectangle. Ainsi, avec de simples comparaisons, on peut déduire si la droite est en collision avec le parallélépipède rectangle, et si oui, a quels endroits.

## 1.2 Théorie

Notre but sera de résoudre pour  $X$  l'équation linéaire de matrices  $AX = B$  dans  $\mathbb{R}^N$  sans avoir à calculer  $A^{-1}$ . En effet, trouver l'inverse de  $A$  peut poser problèmes de par le temps de calcul lorsque  $N$  devient très grand. Par exemple, pour une taille  $N = 20$ , il faudrait 5 fois l'âge de l'univers ( $5 \times 13,7 \times 10^9$  années) pour calculer  $A^{-1}$ . Nous allons donc, à l'aide de plusieurs méthodes, tenter de résoudre l'équation sans réaliser ce calcul, en décomposant le problème en sous-problèmes plus simples à résoudre. Nous procéderons à des optimisations graduelles d'une méthode à l'autre du coût en temps de calcul et en espace mémoire utilisé pour le calcul. On utilisera tout au long de ce rapport, les matrices  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et  $B, X \in \mathbb{R}^N$ .

## 2 Références

### 2.1 Bibliographie

#### Références

### 2.2 Biographies



#### 2.2.1 Johann Carl Friedrich Gauss

Avant d'étudier la méthode de Gauss, il peut être pertinent d'établir une courte biographie de son auteur. Surnommé "prince des mathématiques" par ses pairs, ce mathématicien, né le 30 avril 1777, a contribué de bien des manières à développer non seulement les mathématiques mais également les méthodes en astrophysique et en électromagnétisme. Johann Carl Friedrich Gauss a pu se pencher sur des problèmes dits classiques (depuis l'antiquité) en adoptant des méthodes et raisonnements modernes. Il démontre alors le théorème fondamental de l'algèbre que l'on connaît aujourd'hui sous le nom du théorème de d'Alembert-Gauss, il dédie également un ouvrage à la théorie des nombres contenant plusieurs démonstrations qui révolutionnent l'arithmétique, on lui doit en partie la forme actuelle des nombres complexes. En astrophysique, il met au point la méthode des moindres carrés permettant de minimiser les incertitudes dues aux mesures ce qui lui permet de déterminer exactement la position de Ceres, une planète naine du système solaire. Avec la contribution de Wilhem Weber, Gauss formule deux théorèmes essentiels en électromagnétisme réfutant l'existence de monopôle magnétique et établissant une relation entre le flux d'un champ électrique sur une surface fermée et la charge électrique totale à l'intérieur de cette surface. Cette liste est loin de résumer tous ses travaux, dont une partie a été publiée après son décès le 23 février 1855, ces derniers sont très nombreux et ont servi de base de recherche pour d'autres mathématiciens et physiciens après lui. Il est donc intéressant d'étudier la solution apportée par Gauss et de l'appliquer à notre problématique. L'élimination de Gauss est expliquée ci-après.

#### 2.2.2 André-Louis Cholesky

André-Louis Cholesky, également appelé René Cholesky, est un polytechnicien français qui s'est engagé dans l'armée suite à sa formation. Au cours de sa carrière militaire, on lui assigne différentes missions qui l'emmènent à plusieurs endroits où il effectue notamment des travaux de triangulation. Il participe à la Première Guerre mondiale où il est blessé et il meurt le 31 août 1918 des suites de ses blessures. Cependant, on le connaît plus pour ses contributions aux mathématiques que pour sa carrière de militaire. En effet, il

est l'auteur d'un manuscrit intitulé "Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires". Cette méthode est en fait une nouvelle approche de la méthode des moindres carrés et sera publiée 6 ans après sa mort.

### 2.2.3 Jacobi

Charles Gustave Jacob Jacobi est un mathématicien allemand né le 10 décembre 1804. Après avoir soutenu une thèse sur la théorie des fractions, il enseigne les mathématiques à l'université de Königsberg. En parallèle de sa fonction de professeur, il effectue des travaux de recherche en physique mathématique, en théorie des nombres et en analyse mathématique pour n'en citer que quelques uns. On lui doit notamment la théorie des déterminants et en particulier l'invention du déterminant d'une matrice (jacobienne). Il publie également un traité fondamental sur les fonctions elliptiques qui révolutionne la physique mathématique mais il dédie aussi un ouvrage aux équations différentielles. Malgré sa mort prématurée en 1851, à l'âge de 46 ans, ses travaux furent nombreux et on retrouve parmi eux une méthode de résolution de systèmes linéaires. Contrairement aux méthodes de Gauss, de Cholesky ou encore de factorisation LU qui sont des méthodes directes, la méthode de Jacobi est une méthode dite itérative. Il est alors pertinent de s'intéresser à cette méthode et de l'implémenter en C si l'on veut réaliser une comparaison entre les deux types de méthode.

### 2.2.4 Philipp von Seidel

Philipp von Seidel est un mathématicien et physicien Allemand. Né le 24 octobre 1821, il étudie dans de nombreuses villes dû au travail de son père, puis suit des cours privés sous la tutelle de L.C. Schnürlein, ancien élève de Gauss, pendant un an. Il suit ensuite l'enseignement d'autres grands représentants de leur discipline tels que Dirichlet, Encke, Jacobi ou encore Neumann dans trois universités différentes. En 1846, Seidel obtient son doctorat grâce à sa thèse : "Sur la meilleure forme des miroirs dans un télescope", puis publie une autre thèse six mois plus tard sur un sujet entièrement différent : "Études sur la convergence et divergence des fractions continues", ce qui lui permet de devenir professeur à l'université de Munich. Des problèmes de vue le forcent à prendre une retraite anticipée, et n'étant pas marié, ce sont sa sœur puis une veuve qui s'occupent de lui en fin de vie. Il meurt le 13 août 1896.

Seidel se concentre tout au long de sa carrière sur ses travaux en optique et en astronomie ainsi que sur l'analyse mathématique, et décompose les aberrations optiques du premier ordre en cinq équations, appelées "équations de Seidel". Il applique la théorie des probabilités à l'astronomie, et l'utilise également pour étudier la fréquence de certaines maladies ou le climat. Il est particulièrement connu pour la méthode de Gauss-Seidel de résolution d'équation numérique, que nous décrirons dans ce rapport.

## 3 Travail préliminaire

### 3.1 Type de données

Tout d'abord, en C comme dans la plupart des langages de programmation, il est impossible d'exprimer l'intégralité des réels, entiers, complexes ... car il faudrait disposer d'une mémoire infinie pour représenter une infinité de nombres. Comme nous utilisons des nombres réels pour les vecteurs et matrices, il faut choisir parmi les types signés flottant du C qui sont :

Type	Taille	Portée	Précision maximale
float	32 bits / 4 octets	$1,2 \cdot 10^{-38}$ à $3,4 \cdot 10^{38}$	6 chiffre après la virgule
double	64 bits / 8 octets	$2,3 \cdot 10^{-308}$ à $1,7 \cdot 10^{308}$	15 chiffres après la virgule
long double	80 bits / 10 octets	$3,4 \cdot 10^{-4932}$ à $1,1 \cdot 10^{4932}$	19 chiffres après la virgule

Dans ce projet, le point qui nous intéresse le plus est celui de la performance de la résolution, cette dernière étant très exigeante en temps processeur. Ainsi, le choix du type est crucial. Au final, nous avons choisi le type "double" car il offre une précision et une portée amplement suffisante, sans compromettre les performances de nos algorithmes. En effet, contrairement au type « long double », le type « double » ne nécessite pas de temps processeur supplémentaire par rapport à un type « float » sur les ordinateurs modernes, pour lesquels, les processeur possèdent des registres de calculs flottant de 64 bits / 8 octets. Il est à noter que cette considération aurait été différente il y a 10 - 20 ans car les processeurs plus anciens possédaient seulement unités et registres de calcul flottant de 32 bits, 16 bits voir 8 bits (pour les plus anciens). Ainsi, il fallait des cycles d'horloges supplémentaires pour un calcul flottant sur 64 bits par rapport à un calcul flottant sur 32 bits. Idem dans le cas de calculateurs scientifiques qui possèdent généralement des unités de calculs et registres flottants de 128 bits (voir plus). De plus, bien que le type « double » occupe deux fois plus de mémoire que le type « float », ici l'impact sur la mémoire reste relativement limité comparé à la précision supplémentaire offerte.

### 3.2 Structure des données

Ensuite, les concepts de matrice et de vecteur ne sont pas directement implémentés dans le langage C. Cependant, nous pouvons utiliser une liste simple de « double » pour les vecteurs et des listes de « double » imbriquées dans des listes (tableau à 2 dimension) pour les matrices.

Ainsi, pour l'allocation des vecteurs et des matrices, nous avons implémenté les fonctions suivantes :

```
double *Allocation_Vecteur(int Taille)
{
    // Allocation d'un espace de mémoire de taille = Taille Vecteur *
    // Taille du type (8 octets).
    double * Vecteur = (double *)malloc(Taille * sizeof(double));

    // Nettoyage du vecteur.
    Nettoyage_Vecteur(Vecteur, Taille);

    return Vecteur;
}

double **Allocation_Matrice(int Taille)
{
    // Allocation de la première dimension
    double **Matrice = (double **)malloc(Taille * sizeof(double));

    // Allocation de la deuxième dimension
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        Matrice[i] = Allocation_Vecteur(Taille);
    }
}
```

```

    // Nettoyage de la matrice (remplissage par des 0)
    Nettoyage_Matrice(Matrice, Taille);

    return Matrice;
}

```

Ces fonctions appellent les fonctions “Nettoyage\_Vecteur” et “Nettoyage\_Matrice”, qui vont remplir de 0 les matrices et vecteurs. En effet, la mémoire alloué par le système n’est pas toujours « propre » ; elle peut contenir des valeurs aléatoires.

```

void Nettoyage_Vecteur(double *Vecteur, int Taille)
{
    // Itère parmi les éléments du vecteur
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        // Remplissage par des 0
        Vecteur[i] = 0;
    }
}

void Nettoyer_Matrice(double **A, int Taille)
{
    // Itère parmi la première dimension
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        // Nettoyage de la deuxième dimension
        Nettoyage_Vecteur(A[i], Taille);
    }
}

```

Ensuite, afin de rendre l’affichage des vecteurs et matrices lisible, nous avons implémenté les fonctions suivantes :

```

void Afficher_Vecteur(double *Vecteur, int Taille)
{
    // Saut de ligne.
    printf("\n");
    // Itère parmi les éléments du vecteur.
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        // Affichage de la valeur suivi d’un saut de ligne.
        printf("%f\n", Vecteur[i]);
    }
}

void Afficher_Matrice(double **Matrice, int Taille)
{
    // Itère parmi la première dimension de la matrice.
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        // Retour à la ligne.
        printf("\n");

        // Itère parmi la deuxième dimension de la matrice.
        for (int j = 0; j < Taille; j++)

```



```

    {
        // Affichage de la valeur avec un séparateur.
        printf("|_%.f_", Matrice[i][j]);
    }
    // Retour à la ligne.
    printf("|\\n");
}
}

```

Enfin, comme nous utilisons de l'allocation dynamique pour les vecteurs et matrices, la libération de la mémoire (dés-allocation) doit être faite manuellement :

## 4 Méthodes directes

On considère qu'une méthode de résolution de systèmes linéaires  $AX = B$  est directe lorsque celle-ci permet d'aboutir à une solution, si cette dernière existe, au terme d'un nombre fini d'opérations élémentaires, c'est-à-dire les additions, soustractions, multiplications et divisions. Les solutions obtenues via ce type de méthodes sont exactes mais cela ne signifie qu'elles sont infaillibles. En effet, plus le nombre d'opérations à effectuer est important, plus le risque d'avoir des erreurs de calcul augmente. Généralement, ce nombre est proportionnel à la taille du système étudié. Il existe de nombreuses méthodes directes, nous en avons sélectionné quelques-unes que nous décrirons dans ce rapport. Nous commencerons par introduire deux algorithmes, un premier pour le cas des matrices triangulaires inférieures et un second pour les matrices triangulaires supérieures. Nous pourrions ensuite nous intéresser à la méthode d'élimination de Gauss, à la factorisation LU ainsi qu'à la méthode de Cholesky.

### 4.1 Méthode triangulaire inférieure

#### Principe

Pour cette première méthode,  $A$  est une matrice triangulaire inférieure. On peut donc facilement trouver  $X$  en suivant un algorithme dit « de la descente ».

#### Méthode

Soit  $N = 3$ , on a donc :

$$\begin{aligned} AX &= B \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 \\ \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit alors une formule générale pour les coefficients de  $X$  :

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, i = 1, \dots, N.$$

#### Code

```
double *Sol_Inf(double **a, double *b, int Taille)
{
    // Allocation du vecteur X.
    double *x = Allocation_Vecteur(Taille);

    // Calcul du premier terme de X.
    x[0] = b[0] / a[0][0];

    // Itère parmi les lignes de la matrice.
    for (int i = 1; i < Taille; i++)
```

```

{
    // Calcul de la somme des a[i][j] * x[j]
    double Sum = 0;
    for (int j = 0; j < i; j++)
    {
        Sum = Sum + a[i][j] * x[j];
    }
    // Calcul du terme X[i].
    x[i] = (b[i] - Sum) / a[i][i];
}

return x;
}

```

### Exemple

Pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ , l'algorithme nous retourne  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , ce qui est correct.

### Conclusion

Ainsi, cet algorithme possède une complexité temporelle maximale quadratique  $O(N^2)$  car nous avons deux boucles imbriquées les unes dans les autres qui dépendent de la taille  $N$  de  $A, B$  et  $X$ .

## 4.2 Méthode triangulaire supérieure

### Principe

Cette méthode est similaire à la précédente, mais  $A$  est ici une matrice triangulaire supérieure. On va donc cette fois trouver  $X$  en suivant un algorithme dit « de la remontée ».

### Méthode

Soit  $N = 3$ , on a :

$$\begin{aligned}
 AX &= B \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} a_{33}x_3 = b_3 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \end{cases} \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 \\ \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 \\ \frac{b_3}{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 \\ \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 \\ \frac{b_3 - \sum_{k=1}^2 a_{3k}x_k}{a_{33}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On en déduit alors une formule générale pour les coefficients de  $X$  :

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j}{a_{ii}}, i = N, \dots, 1$$

## Code

Ecrire algorithme ici

## Exemple

Ainsi, pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}$ , l'algorithme nous retourne  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , ce qui est correct.

## Conclusion

De la même manière que le précédent, cet algorithme possède une complexité quadratique ( $O(N^2)$ ).

## 4.3 Élimination de Gauss

### Introduction

On veut maintenant résoudre l'équation  $AX = B$  lorsque  $A$  est une matrice carrée quelconque. Nous allons utiliser la méthode de l'élimination Gauss pour transformer l'expression  $AX = B$  en  $UX = e$  avec  $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , une matrice triangulaire supérieure. Ainsi, il ne restera plus qu'à résoudre  $UX = e$  avec la fonction « Sol\_Sup » pour obtenir  $X$ .

### Méthode

Soit  $N = 3$ , on a :

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_B \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}_e$$

On a donc :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ dx_2 + fx_3 \\ gx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \\ (2) \quad & \\ (3) \quad & \end{aligned}$$

On va maintenant éliminer  $x_1$  des équations (2) et (3) en utilisant (1) :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ (2) - \frac{3}{3}(1) \\ (3) - \frac{6}{3}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + 4x_3 \\ -x_2 - 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (2') \quad & \\ (3') \quad & \end{aligned}$$

Puis, on va éliminer  $x_2$  de l'équation (3') en utilisant (2') :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ (2) - \frac{3}{3}(1) \\ (3') - \frac{-1}{1}(2') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + 4x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (2') \quad & \\ (3'') \quad & \end{aligned}$$

On remarque que pour éliminer un  $x_i$  d'une équation (2) en utilisant l'équation précédente ((1)), on utilise une formule très simple :  $(2) - \frac{a_1}{a_2} \times (1)$  avec  $a_k$  le coefficient  $x_i$  dans l'équation (k).

Si on factorise par  $X$ , on a donc bien  $U$  une matrice triangulaire supérieure carrée :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_e$$

Il ne reste plus qu'à utiliser « Sol\_Sup » pour résoudre cette équation.

## Code

```
Code de mes fesses
void KILL_ME()
```

## Exemple

Ainsi, pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ , l'algorithme nous retourne  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , ce qui est correct.

## Conclusion

Cette méthode est de complexité  $O\left(\frac{2N^3}{3}\right)$ , ce qui est relativement efficace. Cependant, elle demande de modifier entièrement  $A$  et  $B$ . Lors de résolution de problèmes, il arrive que certaines données changent, ce qui modifierait  $A$  mais surtout  $B$ . Il faudrait donc recalculer entièrement l'équation  $UX = e$  puis la solution  $X$  à chaque modification, ce qui est coûteux en temps de calcul.

## 4.4 Factorisation "LU"

### Principe

Afin d'éviter de recalculer  $U$  et  $e$  lorsque  $B$  change, on factorise  $A$  en  $LU$ , où  $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , une matrice triangulaire supérieure et  $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , une matrice triangulaire inférieure. Cette opération sera réalisée par la fonction « LU ». On a donc  $LUX = B$ . On peut maintenant passer à la résolution qui va se faire en deux étapes :

- Tout d'abord, nous allons poser  $Y = UX$ . Ce qui donne :  $LY = B$ .  $L$  étant une matrice triangulaire supérieure carrée, il suffit d'utiliser la fonction « Sol\_Sup » afin d'obtenir  $Y$ .
- Enfin, comme  $UX = Y$  avec  $U$  une matrice inférieure carrée, on peut utiliser « Sol\_Inf » pour obtenir  $X$ .

### Méthode

Pour faciliter les calculs, on décide que la diagonale de  $L$  sera composée de 1. On utilise ensuite l'élimination de Gauss pour calculer  $L$ , mais sans modifier la matrice  $B$ .

<A finir!!!!!!>

## Code

```
void LU(double **L, double **A, int Taille)
{
    Nettoyer_Matrice(L, Taille, Taille);

    // Rempli les 1 en diagonale
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        L[i][i] = 1;
    }

    // Calcule L et U
    for (int i = 0; i < Taille - 1; i++)
    {
        for (int k = i + 1; k < Taille; k++)
        {
            double C = A[k][i] / A[i][i];

```

```

    L[k][i] = C;

    for (int j = 0; j < Taille; j++)
    {
        A[k][j] = A[k][j] - (C * A[i][j]);
    }
}
}
}

```

### Exemple

Pour  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , l'algorithme nous retourne  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0,875 & 1 \end{pmatrix}$ .

Puis, pour  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}$  et  $L$ , « Sol\_Sup » retourne  $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \\ 8,5 \end{pmatrix}$ , ce qui est correct.

Enfin, pour  $U$  et  $Y$ , « Sol\_Inf » retourne  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , ce qui est correct.

### Conclusion

Cette fonction est de complexité temporelle  $O\left(\frac{N^3}{6}\right)$ .

Cependant, dans le cas où  $A$  est symétrique, il est possible de procéder à d'autres optimisations et diminuer le temps de calcul.

## 4.5 Factorisation de Cholesky

### Principe

Cette nouvelle méthode nous permet d'optimiser encore plus le code dans le cas où  $A$  est symétrique ( $A = A^T$ ) et définie positive (positive et inversible  $\Leftrightarrow \langle AY, Y \rangle > 0, \forall Y \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$ ). On peut alors exprimer  $A$  en fonction de  $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$  une matrice triangulaire inférieure dont la diagonale est strictement positive :  $A = L \cdot L^T$ .

Si on remplace dans notre expression initiale, on a :  $AX = B \Leftrightarrow L \cdot L^T \cdot X = B$

On peut passer maintenant à la résolution. De manière similaire à la méthode « LU », nous allons procéder en deux étapes.

- Tout d'abord, la résolution de l'expression  $LY = B$  où  $Y = L^T X$  avec la fonction « Sol\_Inf ».  $L$  étant une matrice triangulaire inférieure carrée.
- Enfin, la résolution de l'expression  $L^T X = Y$  avec la fonction « Sol\_Sup ».  $L^T$  étant également une matrice triangulaire inférieure carrée.

### Méthode

Soit  $N = 4$ ,  $L$  une matrice de taille  $N * N$  :

On crée une matrice  $L$  tel que  $L \cdot L^T = A$ , on a :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix}}_{L^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_A \\
& \Leftrightarrow \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} & l_{11}l_{41} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{21}l_{41} + l_{22}l_{42} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 & l_{31}l_{41} + l_{32}l_{42} + l_{33}l_{43} \\ l_{41}l_{11} & l_{41}l_{21} + l_{42}l_{22} & l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} & l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc pour les termes en diagonale :

$$\begin{aligned}
& - l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\
& - l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\
& - l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33} \Rightarrow l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} \\
& - l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = a_{44} \Rightarrow l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2}
\end{aligned}$$

On constate que :  $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$

On a également pour les autres termes :

$$\begin{aligned}
& - l_{21}l_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} \\
& - l_{31}l_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} \\
& - l_{41}l_{11} = a_{41} \Rightarrow l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}}
\end{aligned}$$

On constate que  $l_{ij} = \frac{a_{ij}}{l_{jj}} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}$

## Code

[Ecrire code](#)

## Exemple

Ainsi, pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 15 \end{pmatrix}$ , l'algorithme nous retourne  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

Puis, pour  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $L$ , « Sol\_Inf » retourne  $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \\ 8, 5 \end{pmatrix}$ , ce qui est correct.

Enfin, pour  $A$  et  $Y$ , « Sol\_Inf » retourne  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , ce qui est correct.

## Conclusion

Lors de la factorisation, on effectue

## 5 Méthodes itératives

Les méthodes itératives sont une autre approche à la résolution de systèmes linéaires  $AX = B$ . Afin d'aboutir à une solution via ces méthodes, on part d'une approximation de solution que l'on considérera comme une ébauche et non comme notre résultat final, on peut par exemple l'obtenir à l'aide d'une méthode directe. On effectue ensuite des itérations qui établissent une suite de solutions intermédiaires qui se rapprochent de plus en plus de la solution finale. L'idée est donc de construire une suite de vecteurs intermédiaires  $X^k$  qui converge vers  $X$ , solution du système. Procéder de cette manière permet de limiter la propagation d'erreurs et ainsi obtenir la solution la plus proche possible de la solution réelle. Nous avons sélectionné deux méthodes itératives à décrire, la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel. Même si nous n'avons pas eu l'occasion d'aborder en détails la méthode de Gauss-Seidel en cours, il nous semblait pertinent de tout de même l'inclure dans notre rapport afin d'avoir un élément supplémentaire de comparaison dans notre étude des différentes méthodes de résolutions de systèmes linéaires.

### 5.1 Méthode de Jacobi

#### Principe

Soit  $B, X \in \mathbb{R}^N$  et  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , on cherche toujours à résoudre l'équation  $AX = B$ .

On peut décomposer  $A$  en 3 matrices tel que  $A = E + F + G$  :

$$\begin{aligned} \text{--- } D \text{ la matrice contenant la diagonale de } A : D &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nn} \end{pmatrix} \\ \text{--- } E \text{ la matrice contenant la partie inférieure de } A \text{ (sans sa diagonale)} : E &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{1j} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{ij} & \cdots & A_{(i-1)j} & 0 \end{pmatrix} \\ \text{--- } F \text{ la matrice contenant la partie supérieure de } A \text{ (sans la diagonale)} : F &= \begin{pmatrix} 0 & A & \cdots & A_{ij} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} e \end{aligned}$$

L'équation initiale  $AX = B$  devient alors :  $(E + D + F)X = B$ , ce qui donne

$$\Rightarrow DX = B - (E + F)X$$

$$\Rightarrow X = D^{-1}(B - [E + F]X)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^0 & k = 0 \\ X_i^{k+1} = D^{-1}(B - [E + F]X^k) & k = 1, \dots, N \end{cases}$$

Si il y a convergence,  $X^{k+1} \approx X^k = X^*$

#### Méthode

Ainsi, pour un  $X_i^{k+1}$  donné, on peut calculer  $X_i^{k+1} = \frac{B_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} X_j^k}{A_{ii}}$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

A chaque itération,  $x_k$  va converger vers  $x_{k+1}$ . On définit alors un  $\varepsilon$  pour que la boucle continue d'itérer jusqu'à ce que :  $\|x_{k+1} - x_k\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} (x_{k+1}[n] - x_k[n])^2} \leq \varepsilon$ .

On définit également un nombre d'itération maximale pour limiter le nombre maximale d'itération si jamais l'algorithme n'atteint pas  $\varepsilon$ .



## Code

### Exemple

Pour  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon = 0,01$  et un nombre d'itération maximale de 10, l'algorithme retourne  $X = \begin{pmatrix} 0,157701 \\ 0,236300 \\ 0,137924 \end{pmatrix}$ , ce qui semble correct car  $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1,005028 \\ 1,004525 \\ 1,005022 \end{pmatrix} \approx B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Conclusion

### 5.2 Méthode de Gauss-Seidel

#### Principe

Dans la méthode précédente, les coefficients du vecteur  $X^{k+1}$  sont plus précis que ceux de  $X^k$ . Lorsque l'on calcule  $X^{k+1}$ , on calcule les coefficients de ce vecteur un par un : on peut donc utiliser les coefficients de ce vecteur déjà calculés plutôt que ceux du vecteur précédent. Une fois que la formule générale est trouvée, on suit les mêmes étapes de comparaison de la norme avec un epsilon choisi, et on a de la même façon  $X$  qui sera la limite d'une suite avec  $X^0$  choisi.

#### Méthode

En calculant  $X_i^{k+1}$  on ne connaît les coefficients de  $X^{k+1}$  que jusqu'à  $i - 1$ , on utilise ceux de  $X^k$  pour le reste de la somme. On sépare donc la somme de la formule précédente en deux.

## Code

[Code](#)

## Conclusion

Cette méthode permet de gagner en précision par rapport à la précédente, bien qu'il faille encore choisir  $X^0$  arbitrairement.

## 6 Code complet

```
// - Importation des librairies nécessaires.

#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <malloc.h>

// - Gestion des vecteurs et matrices

// - - Nettoyage

// Fonction qui nettoie un vecteur (remplissage par des 0).
void Nettoyage_Vecteur(double *Vecteur, int Taille)
{
    // Itère parmi les éléments du vecteur
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        // Remplissage par des 0
        Vecteur[i] = 0;
    }
}

// - Fonction qui nettoie une matrice (remplissage par des 0).
void Nettoyage_Matrice(double **A, int Taille)
{
    // Itère parmi la première dimension
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        // Nettoyage de la deuxième dimension
        Nettoyage_Vecteur(A[i], Taille);
    }
}

// - - Allocation

// Fonction qui alloue un vecteur de taille N.
double *Allocation_Vecteur(int Taille)
{
    // Allocation d'un espace de mémoire de taille = Taille Vecteur *
    // Taille du type (8 octets).
    double *Vecteur = (double *)malloc(Taille * sizeof(double));

    // Nettoyage du vecteur.
    Nettoyage_Vecteur(Vecteur, Taille);

    return Vecteur;
}

// Fonction qui alloue une matrice carrée de taille N * M
double **Allocation_Matrice(int Taille)
{
    // Allocation de la première dimension
```

```

    double **Matrice = (double **)malloc(Taille * sizeof(double));

    // Allocation de la deuxième dimension
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        Matrice[i] = Allocation_Vecteur(Taille);
    }

    return Matrice;
}

// - - Désallocation

// Fonction qui désalloue un vecteur de taille N.
void Desallocation_Vecteur(double *Vecteur)
{
    free(Vecteur);
}

// Fonction qui désalloue une matrice carrée de taille N.
void Desallocation_Matrice(double **Matrice, int Taille)
{
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        Desallocation_Vecteur(Matrice[i]);
    }
}

// - - Affichage

// Fonction qui affiche un vecteur de taille N.
void Afficher_Vecteur(double *Vecteur, int Taille)
{
    // Itère parmi les éléments du vecteur.
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        // Affichage de la valeur suivi d'un saut de ligne.
        printf("%f\n", Vecteur[i]);
    }
}

// Fonction qui affiche une matrice carrée de taille N.
void Afficher_Matrice(double **Matrice, int Taille)
{
    // Itère parmi la première dimension de la matrice.
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        // Itère parmi la deuxième dimension de la matrice.
        for (int j = 0; j < Taille; j++)
        {
            // Affichage de la valeur avec un séparateur.
            printf("|_ %f_", Matrice[i][j]);
        }
    }
}

```

```

        // Retour à la ligne.
        printf("\n");
    }
}

// - Méthodes directes de résolution.

// - - Resolution de matrices triangulaires carrées

// Fonction qui résoud  $AX = B$  avec  $A$  une matrice triangulaire inférieure
// carrée et  $B$  un vecteur (algorithme de la redescente).
double *Sol_Inf(double **A, double *B, int Taille)
{
    // Allocation du vecteur  $X$ .
    double *X = Allocation_Vecteur(Taille);

    // Calcul du premier terme de  $X$ .
    X[0] = B[0] / A[0][0];

    // Itère parmis les lignes de la matrice.
    for (int i = 1; i < Taille; i++)
    {
        // Calcul de la somme des  $a[i][j] * x[j]$ 
        double Sum = 0;
        for (int j = 0; j < i; j++)
        {
            Sum = Sum + A[i][j] * X[j];
        }
        // Calcul du terme  $X[i]$ .
        X[i] = (B[i] - Sum) / A[i][i];
    }

    return X;
}

// Fonction qui résoud  $AX = B$  avec  $A$  une matrice triangulaire supérieure
// carrée et  $B$  un vecteur (algorithme de la remontée).
double *Sol_Sup(double **A, double *B, int Taille)
{
    // Allocation du vecteur  $X$ .
    double *X = Allocation_Vecteur(Taille);

    // Calcul du dernier terme de  $X$  (terme initial).
    X[Taille - 1] = B[Taille - 1] / A[Taille - 1][Taille - 1];

    // Itère parmis les lignes de la matrice.
    for (int i = Taille - 2; i >= 0; i--)
    {
        // Calcul de la somme des  $a[i][j] * x[j]$ 
        double Sum = 0;
        for (int j = i + 1; j < Taille; j++)
        {
            Sum += A[i][j] * X[j];
        }
    }
}

```

```

        X[i] = (B[i] - Sum) / A[i][i];
    }

    return X;
}

// - - Elimination de Gauss

// Fonction qui effectue l'élimination de Gauss pour transformer A en U,
// une matrice triangulaire supérieure carrée (algorithme de Gauss).
void Gauss(double **A, double *B, double **U, double *e, int Taille)
{
    for (int i = 0; i < Taille - 1; i++)
    {
        for (int k = i + 1; k < Taille; k++)
        {
            double C = A[k][i] / A[i][i];
            for (int j = 0; j < Taille; j++)
            {
                U[k][j] = A[k][j] - (C * A[i][j]);
            }
            e[k] = B[k] - (C * B[i]);
        }
    }
}

// - - Factorisation LU

// Fonction qui effectue la factorisation LU pour transformer A en L et U,
// deux matrices triangulaires carrées inférieures et supérieures (
// algorithme de LU).
void LU(double **L, double **A, int Taille)
{
    Nettoyage_Matrice(L, Taille);

    // Rempli les 1 en diagonale
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        L[i][i] = 1;
    }

    // Calcule L et U
    for (int i = 0; i < Taille - 1; i++)
    {
        for (int k = i + 1; k < Taille; k++)
        {
            double C = A[k][i] / A[i][i];

            L[k][i] = C;

            for (int j = 0; j < Taille; j++)
            {
                A[k][j] = A[k][j] - (C * A[i][j]);
            }
        }
    }
}

```

```

    }
}

}

// - - Factorisation de Cholesky

// Fonction qui transforme A en L*L^T. Renvoi L.
double **Cholesky(double **A, int Taille)
{
    // Allocation de la matrice L.
    double **L = Allocation_Matrice(Taille);

    // Itère parmi les lignes de la matrice.
    for (int j = 0; j < Taille; j++)
    {
        double Sum = 0;

        // - Calcul de la somme.
        for (int k = 0; k < j; k++)
        {
            Sum += L[j][k] * L[j][k];
        }

        // - Calcul des termes de la diagonale de L.
        L[j][j] = sqrt(A[j][j] - Sum);

        // - Calcul des termes pour i = j+1 à N.
        for (int i = j + 1; i < Taille; i++)
        {
            Sum = 0;
            for (int k = 0; k < j; k++)
            {
                Sum += L[i][k] * L[j][k];
            }
            L[i][j] = (A[i][j] - Sum) / L[j][j];
        }
    }
    return L;
}

// Fonction qui transpose une matrice carrée inférieure en matrice carrée
// supérieure.
double **Transposer(double **Matrice, int Taille)
{
    // On itère parmi les colonnes.
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        // On itère parmi les lignes.
        for (int j = i + 1; j < Taille; j++)
        {
            // On inverse les termes (en coordonnées) de la matrice.
            Matrice[i][j] = Matrice[j][i];
        }
    }
}

```

```

        // On supprime les termes inférieurs.
        Matrice[j][i] = 0;
    }
}
return Matrice;
}

// - Méthodes itératives de résolution.

// - - Jacobi

double *Jacobi(double **A, double *B, int Taille)
{
    double *X_k = Allocation_Vecteur(Taille);

    // Remplissage de X_k par des 1.
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        X_k[i] = 1;
    }

    double *X_k_1 = Allocation_Vecteur(Taille);

    double Norme;
    int it = 0;
    int it_max = 10;
    double Epsilon = 0.001;

    do
    {
        printf("it=%d", it);
        // - Calcul de X_k_1.
        for (int i = 0; i < Taille; i++)
        {
            // - Calcul de la somme des a[i][j] * x_k[j].
            double Somme = 0;
            for (int j = 0; j < Taille; j++)
            {
                if (i != j)
                {
                    Somme += A[i][j] * X_k[j];
                }
            }
            X_k_1[i] = (B[i] - Somme) / A[i][i];
        }

        // - Calcul de la norme.
        Norme = 0;
        for (int i = 0; i < Taille; i++)
        {
            Norme += (X_k_1[i] - X_k[i]) * (X_k_1[i] - X_k[i]);
        }
        Norme = sqrt(Norme);
    }

```

```

        // - On remplace X_k par X_k_1.
        for (int i = 0; i < Taille; i++)
        {
            X_k[i] = X_k_1[i];
        }
        it++;
    } while ((Norme > Epsilon) && (it < it_max));

    return X_k_1;
}

// - - Gauss-Seidel

double *Gauss_Seidel(double **A, double *B, int Taille)
{
    // - Allocation des vecteurs.
    double *X_k = Allocation_Vecteur(Taille);
    double *X_k_1 = Allocation_Vecteur(Taille);

    // - Remplissage de X_k par des 1.
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        X_k[i] = 1;
    }

    double Norme;
    int it = 0;
    int it_max = 10;
    double Epsilon = 0.001;

    do
    {
        // - Calcul de X_k_1.
        for (int i = 0; i < Taille; i++)
        {
            // - Calcul de la somme des A[i][j] * X_k_1[j].
            double Somme = 0;
            for (int j = 0; j < i; j++)
            {
                Somme += A[i][j] * X_k_1[j];
            }
            // - Calcul de la somme des a[i][j] * x_k[j].
            for (int j = i + 1; j < Taille; j++)
            {
                Somme += A[i][j] * X_k[j];
            }
            X_k_1[i] = (B[i] - Somme) / A[i][i];
        }

        // - Calcul de la norme entre X_k_1 et X_k.
        Norme = 0;
        for (int i = 0; i < Taille; i++)
        {
            Norme += (X_k_1[i] - X_k[i]) * (X_k_1[i] - X_k[i]);
        }
    } while (Norme > Epsilon);

    return X_k_1;
}

```



```

    }
    Norme = sqrt(Norme);

    // - On remplace X_k par X_{k-1}.
    for (int i = 0; i < Taille; i++)
    {
        X_k[i] = X_{k-1}[i];
    }
    it++;
} while ((Norme > Epsilon) && (it < it_max));

return X_{k-1};
}

// - Fonction principale.
int main()
{
    // Les différentes parties sont mises entre accolades afin que les
    // variables aient une portée locale (propres à chaque partie).

    // - Méthodes directes

    // - - Méthode triangulaire inférieure.

    {
        // Définition de la taille.
        int Taille = 3;
        // Allocation des matrices et vecteurs.
        double **A = Allocation_Matrice(Taille);
        double *B = Allocation_Vecteur(Taille);

        // Remplissage des matrices et vecteurs.
        A[0][0] = 1;
        A[0][1] = 0;
        A[0][2] = 0;
        A[1][0] = 2;
        A[1][1] = 3;
        A[1][2] = 0;
        A[2][0] = 1;
        A[2][1] = 4;
        A[2][2] = -1;

        B[0] = 1;
        B[1] = 8;
        B[2] = 10;

        double *X = Sol_Inf(A, B, Taille);

        printf("La solution X de l'équation AX=B avec la méthode \n\n");
        Afficher_Vecteur(X, Taille);

        // Désallocation des matrices et vecteurs.
    }
}

```

```

    Desallocation_Matrice(A, Taille);
    Desallocation_Vecteur(B);
    Desallocation_Vecteur(X);
}

// - - Méthode triangulaire supérieure.

{
    // Définition de la taille.
    int Taille = 3;
    // Allocation des matrices et vecteurs.
    double **A = Allocation_Matrice(Taille);
    double *B = Allocation_Vecteur(Taille);

    // Remplissage des matrices et vecteurs.
    A[0][0] = 1;
    A[0][1] = 2;
    A[0][2] = 3;
    A[1][0] = 0;
    A[1][1] = 4;
    A[1][2] = 8;
    A[2][0] = 0;
    A[2][1] = 0;
    A[2][2] = 5;

    B[0] = 6;
    B[1] = 16;
    B[2] = 15;

    double *X = Sol_Sup(A, B, Taille);

    printf("La solution X de AX=B d'après la méthode triangulaire  
supérieure est :\n");
    Afficher_Vecteur(X, Taille);

    // Désallocation des matrices et vecteurs.
    Desallocation_Matrice(A, Taille);
    Desallocation_Vecteur(B);
    Desallocation_Vecteur(X);
}

// - - Elimination de Gauss.

{
    // Définition de la taille.
    int Taille = 3;
    // Allocation des matrices et vecteurs.
    double **A = Allocation_Matrice(Taille);
    double *B = Allocation_Vecteur(Taille);

    // Remplissage de A.
    A[0][0] = 1;
    A[0][1] = 2;
    A[0][2] = 3;

```

```

A[1][0] = 5;
A[1][1] = 2;
A[1][2] = 1;
A[2][0] = 3;
A[2][1] = -1;
A[2][2] = 1;

// Remplissage de B.
B[0] = 5;
B[1] = 5;
B[2] = 6;

// Transformation de A en matrice triangulaire supérieure.
Gauss(A, B, A, B, Taille);

// Résolution de l'équation.
double *X = Sol_Sup(A, B, Taille);

// Affichage de X.
printf("La solution X de AX=B d'après la méthode de l'
    élimination de Gauss est:\n");
Afficher_Vecteur(X, Taille);

// Désallocation des matrices et vecteurs.
Desallocation_Matrice(A, Taille);
Desallocation_Vecteur(B);
Desallocation_Vecteur(X);
}

// - - Résolution par factorisation LU.
{
    // Définition de la taille.
    int Taille = 3;
    // Allocation des matrices et vecteurs.
    double **A = Allocation_Matrice(Taille);
    double *B = Allocation_Vecteur(Taille);

    A[0][0] = 1;
    A[0][1] = 2;
    A[0][2] = 3;
    A[1][0] = 5;
    A[1][1] = 2;
    A[1][2] = 1;
    A[2][0] = 3;
    A[2][1] = -1;
    A[2][2] = 1;

    B[0] = 5;
    B[1] = 5;
    B[2] = 6;

    double **L = Allocation_Matrice(Taille);

```

```

// Factorisation de  $A = LU$ .
LU(L, A, Taille);

// Résolution de  $LY = B$ .
double *Y = Sol_Inf(L, B, Taille);

// Résolution de  $UX = Y$ .
double *X = Sol_Sup(A, Y, Taille);

// Affichage.
printf("La solution  $X$  de  $AX = B$  d'après la méthode de la  

    factorisation  $LU$  est : \n");
Afficher_Vecteur(X, Taille);

// Désallocation des matrices et vecteurs.
Desallocation_Matrice(L, Taille);
Desallocation_Matrice(A, Taille);
Desallocation_Vecteur(B);
Desallocation_Vecteur(Y);
Desallocation_Vecteur(X);
}

// - - Cholesky.
{
    // Définition de la taille.
    int Taille = 4;
    // Allocation des matrices et vecteurs.
    double **A = Allocation_Matrice(Taille);
    double *B = Allocation_Vecteur(Taille);

    // Remplissage de A.
    A[0][0] = 1;
    A[0][1] = 1;
    A[0][2] = 1;
    A[0][3] = 1;
    A[1][0] = 1;
    A[1][1] = 5;
    A[1][2] = 5;
    A[1][3] = 5;
    A[2][0] = 1;
    A[2][1] = 5;
    A[2][2] = 14;
    A[2][3] = 14;
    A[3][0] = 1;
    A[3][1] = 5;
    A[3][2] = 14;
    A[3][3] = 15;

    // Remplissage de B.
    B[0] = 5;
    B[1] = 1;
    B[2] = 3;
    B[3] = 1;
}

```

```

// Factorisation de  $A = L * L^T$ .
double **L = Cholesky(A, Taille);

// Résolution de  $LY = B$ .
double *Y = Sol_Inf(L, B, Taille);

// Transposition de L en  $L^T$ .
Transposer(L, Taille);

// Résolution de  $L^T * X = Y$ .
double *X = Sol_Sup(L, Y, Taille);

// Affichage de la solution X.
printf("La solution X de AX=B après la méthode de Cholesky est\n");
Afficher_Vecteur(X, Taille);

// Désallocation des matrices et vecteurs.
Desallocation_Matrice(A, Taille);
Desallocation_Matrice(L, Taille);
Desallocation_Vecteur(Y);
Desallocation_Vecteur(B);
Desallocation_Vecteur(X);
}

// - Méthodes itératives.

// - - Jacobi.

{
    // Définition de la taille
    int Taille = 3;
    // Allocation des matrices et vecteurs.
    double **A = Allocation_Matrice(Taille);
    double *B = Allocation_Vecteur(Taille);

    // Remplissage de A
    A[0][0] = 4;
    A[0][1] = 1;
    A[0][2] = 1;
    A[1][0] = 1;
    A[1][1] = 3;
    A[1][2] = 1;
    A[2][0] = 2;
    A[2][1] = 0;
    A[2][2] = 5;

    // Remplissage de B
    B[0] = 1;
    B[1] = 1;
    B[2] = 1;

    // Résolution pour X.

```

```

double *X = Jacobi(A, B, Taille);

// Affichage de la solution X.
printf("La solution X de AX=B avec la méthode Jacobi est : \n"
);
Afficher_Vecteur(X, Taille);

// Désallocation des matrices et vecteurs.
Desallocation_Matrice(A, Taille);
Desallocation_Vecteur(B);
Desallocation_Vecteur(X);
}

// - - Gauss-Seidel.
{
    // Définition de la taille
    int Taille = 3;

    // Allocation des matrices et vecteurs.
    double **A = Allocation_Matrice(Taille);
    double *B = Allocation_Vecteur(Taille);

    // Remplissage de A (matrice quelconque).
    A[0][0] = 4;
    A[0][1] = 1;
    A[0][2] = 1;
    A[1][0] = 1;
    A[1][1] = 3;
    A[1][2] = 1;
    A[2][0] = 2;
    A[2][1] = 0;
    A[2][2] = 5;

    // Remplissage de B.
    B[0] = 1;
    B[1] = 1;
    B[2] = 1;

    // Résolution pour X.
    double *X = Gauss_Seidel(A, B, Taille);

    // Affichage de la solution X.
    printf("La solution X de AX=B avec la méthode de Gauss-Seidel : \n");
    Afficher_Vecteur(X, Taille);

    // Désallocation des matrices et vecteurs.
    Desallocation_Matrice(A, Taille);
    Desallocation_Vecteur(B);
    Desallocation_Vecteur(X);
}

return 0;

```

}

## 7 Conclusion

Ainsi, nous avons découvert plusieurs méthodes possibles pour la résolution d'une équation de matrice de la forme  $AX = B$ , sans calculer  $A^{-1}$ . Voici un récapitulatif des différentes méthodes :

Méthode	Complexité temporelle	Avantages	
Triangulaire inférieure	$O(N^2)$	-	
Triangulaire supérieure	$O(N^2)$		- Fonctionne un
Élimination de Gauss	$O\left(\frac{2N^3}{3}\right)$	- Résolution d'un	
La factorisation LU	$O\left(\frac{N^3}{3}\right)$	Méthode optimisée lorsque $A$ reste constant.	
La factorisation de Cholesky	$O\left(\frac{N^3}{6}\right)$		- Fonctionne un
Méthode de Jacobi	$O(3N^2 + 2N)$		
Méthode Gauss-Seidel	$O(N^2)$		

Ainsi, on constate que les méthodes ci-dessus sont complémentaires car elles présentent chacune des avantages et des inconvénients. Ainsi, le choix de la méthode doit se faire en fonction :

- La forme de  $A$  et  $B$ , afin d'optimiser le temps de calcul et éventuellement l'empreinte mémoire.
- La précision de la résolution.

Ainsi, il en revient à l'utilisateur de choisir quelle méthode convient le mieux. Nous aurions pu éventuellement rédiger un algorithme qui fait le choix automatiquement.