编程起跑线 第 2 课 Big O 分析

前一讲大概了解了这个系列会涉及的内容，这一讲就从最重要的概念，Big O 开始讲起。既然我们要找到效率更高的算法，首先就得知道，怎么样才是高效率。

基本法则

我们先来了解一下程序分析的基本法则。一般来说，常见的输入输出以及简单的赋值语句，可以认为时间复杂度是 O(1)。在算复杂度的时候乘以一个常数复杂度不变，即 O(Cf(n))=O(f(n))，其中C是一个正常数。

我们知道，程序设计中无非是三种形态：顺序，选择和循环，只要能够算清楚这三种形态的复杂度，那么整个算法的复杂度也就不在话下了。

先来看看顺序结构，因为是顺序执行，所以可以通过求和法则来进行计算。若算法的 2 个部分时间复杂度分别为 T1(n)=O(f(n)) 和 T2(n)=O(g(n)),则 T1(n)+T2(n)=O(max(f(n),g(n)))。如果这两个部分的参数不一样的话，即 T1(m)=O(f(m)) 和 T2(n)=O(g(n)),则 T1(m)+T2(n)=O(f(m)+g(n))

然后是选择结构，选择本身判断是耗费 O(1) 时间的，但是主要时间还是在执行不同的子句上，所以转换为分析子句的时间复杂度。

最后来看看循环结构，一般来说可能包括多次循环，所以使用乘法法则。若算法的2个部分时间复杂度分别为 T1(n)=O(f(n)) 和 T2(n)=O(g(n)),则 T1×T2=O(f(n)×g(n)) 。

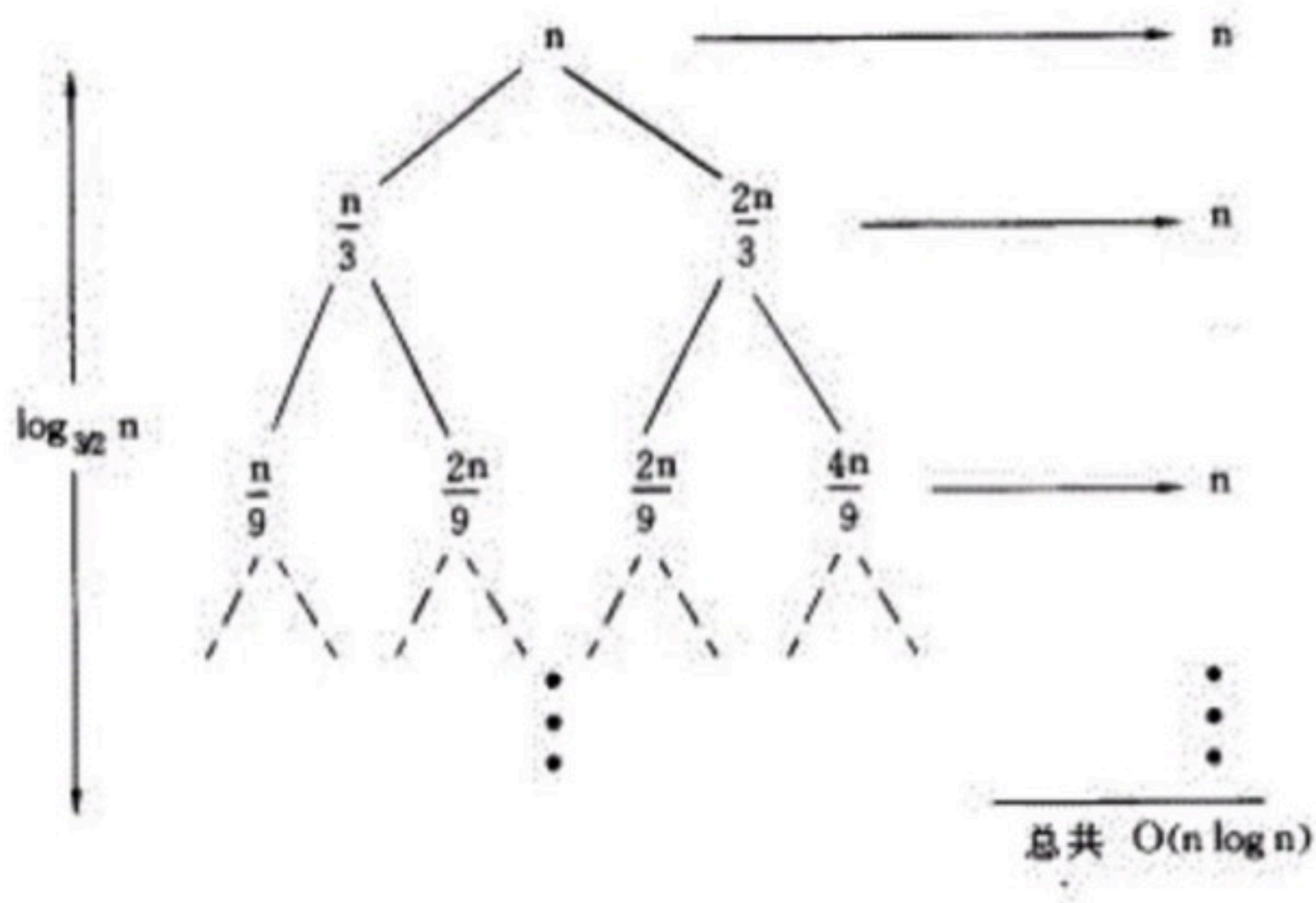
基本上理解了什么时候用求和法则，什么时候用乘法法则，再加上一点点运算，就可以推算出时间复杂度了。

递归

递归问题应该算是求复杂度问题中比较麻烦的了，并不像其他非递归的算法可以用上面提到的基本法则来进行分析。一般来说，遇到递归问题，有两种做法：

1. 主定理法
2. 递归树法

实际上主定理法可以看作是递归树法的一个总结，这里用一个例子来说明，假设我们的递归函数是：T(n)=T(n3)+T(2n3)+n，那么画出递归树就是：



每层都会多出来一个 n，而从根到叶节点的最长路径是：n→23n→(23)2n→⋯→1，假设一共有 k 层，因为 (23)kn=1，所以 k=log3/2n，也就是说 T(n)≤∑ki=0n=(k+1)n=n(log3/2n+1)，即 T(n)=O(nlogn)

我们来看看用主定理方法的话，这个复杂度要怎么算。首先我们要把递推公式转换为如下形式：

f(n)=af(nb)+d(n)

然后分情况进行讨论：

1.当d(n)为常数时：

$$f(n)=\begin{cases} O(n^{\log_b a}) & a \neq 1 \\ O(\log n) & a = 1 \end{cases}$$

2.当d(n) = cn 时：

$$f(n)=\begin{cases} O(n) & a < b \\ O(n\log n) & a = b \\ O(n^{\log_b a}) & a > b \end{cases}$$

3.当d(n)为其他情况时可用递归树进行分析。

而这题中 T(n)=T(n3)+T(2n3)+n，化简之后相当于 a=3,b=3，于是在第二种情况中找到 a=b 的情况，就得到了最后的结果 O(nlogn)

例题

这里主要是提及一些容易出错的地方。

> 不是出现了树结构，就一定会产生 log 的复杂度

假设代码如下：

```
int sum(Node node){
    if (node == null){
        return 0;
    }
    return sum(node.left) + node.value + sum(node.right);
}
```

因为实际上是遍历所有的节点一次，于是复杂度是 O(n)

> 有的时候可以通过这个代码的做用来进行复杂度判断

来看看下面这两个代码片段：

```
boolean isPrime(int n){
    for (int x = 2; x * x <= n; x++){
        if (n % x == 0){
            return false;
        }
    }
    return true;
}



void permuation(String str){
    permutation(str, "");
}
void permutation(String str, String prefix){
    if (str.length() == 0){
        System.out.println(prefix);
    }
    else {
        for (int i = 0; i < str.length(); i++){
            String rem = str.substring(0,i) + str.substring(i+1);
            permutation(rem, prefix + str.charAt(i));
        }
    }
}
```

第一题比较简单，因为是求质数，在 n√ 时间就可以完成，对应的时间复杂也就是出来了。

第二题做得是一个全排列，可以从两个思路：What It Means 和 What It Does。

- What It Means：因为是求排列，如果一个字符串有n个字符，那么所有的可能为 `n*(n-1)*...*2*1 -> O(n!)`
- What It Does：设一共有 n 个字符，第一次循环，有 n 次递归调用，第二次有 n-1 次，到最后一共有 `n*(n-1)*...*2*1 -> O(n!)`

最后再举一个递归的例子

```
int fib(int n){
    if (n <= 0) return 0;
    else if (n == 1) return 1;
    return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

这里每一次递归，都会由原来的一个分成两个，而一共有 n 层，于是时间复杂度为 O(2N)

总结

当然，很多时候还需要具体问题具体分析，最关键的，是对算法过程的清晰理解和掌握，有了这个，哪怕从头开始一点一点分析，也可以推导出正确答案。