

# Регуляризирующие алгоритмы на основе методов Ньютоновского типа и нелинейных аналогов $\alpha$ -процессов

Алия Фиргатовна Скурыдина

01.01.07 — Вычислительная математика

Научный руководитель: д. ф.-м. н., вед. н. с. ИММ УрО РАН Е. Н. Акимова

2018

**Актуальность темы.** Построение итеративно регуляризованных алгоритмов востребовано для решения широкого круга некорректных прикладных задач. Например, решение структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии сводится к решению нелинейных интегральных уравнений первого рода.

Теорию решения некорректных задач развивали А. Н. Тихонов, М. М. Лаврентьев, В. К. Иванов, А. Б. Бакушинский, Б. Т. Поляк, А. В. Гончарский, В. В. Васин, А. Л. Агеев, В. П. Танана, А. Г. Ягола, A. Neubauer, O. Scherzer, B. Kaltenbacher, U. Tautenhahn и др.

Для решения систем нелинейных уравнений проводились исследования в работах Л. В. Канторовича, А. Б. Бакушинского, М. Ю. Кокуриным, Б. Т. Поляка, J. M. Ortega и W. C. Rheinboldt, A. Neubauer, M. J. D. Powell, J. C. Gilbert, J. Nocedal, S. J. Wright. L. Landweber, M. Hanke.

Алгоритмы решения обратных задач математической физики на основе регуляризованных градиентных методов, методов Гаусса – Ньютона, Левенберга – Марквардта разрабатывались в ИММ УрО РАН В. В. Васиным, Е. Н. Акимовой, Л. Ю. Тимерхановой, Г. Я. Пересторониной, В. Е. Мисиловым.

Алгоритмы решения геофизических задач на основе метода локальных поправок разрабатывались в ИГФ УрО РАН П. С. Мартышко, И. Л. Пруткиным, А. Г. Цидаевым.

**Целью** диссертационной работы является построение новых устойчивых и экономичных по времени и памяти алгоритмов на основе методов ньютоновского типа и  $\alpha$ -процессов для решения нелинейных операторных уравнений и исследование их сходимости; реализация параллельных алгоритмов в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах (видеокартах) для вычислений на сетках большого размера.

# Глава 1. Решение уравнений с монотонным оператором

В первой главе рассматриваются методы решения некорректных задач с монотонным оператором. Доказываются теоремы сходимости регуляризованного метода Ньютона. Построены методы минимальной ошибки, наискорейшего спуска и минимальных невязок решения нелинейных уравнений и доказывается их сходимость.

## 1.1. Регуляризованный метод Ньютона (Бакушинский)

Рассматривается нелинейное уравнение с неизвестной функцией  $u$

$$A(u) = f \quad (1.1)$$

с непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором  $A$ , действующим в гильбертовом пространстве, операторы  $A'(u)^{-1}$ ,  $A^{-1}$  в общем случае разрывны в окрестности решения, что влечет некорректность задачи (1.1).

Регуляризация по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \quad (1.2)$$

где  $\alpha > 0$  — параметр регуляризации,  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ ,  $u_0$  — приближение к  $u_\alpha$ ;

Итерации производятся по формуле:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \quad (1.3)$$

где  $A'(u^k)$  — производная по Фреше оператора  $A$  уравнения (1.1),  $\gamma$  — демпфирующий множитель,  $\bar{\alpha} \geq \alpha > 0$  — параметры регуляризации,  $T$  — оператор шага.

В. В. Васин, Е. Н. Акимова, А. Ф. Миниахметова. Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник ЮУрГУ, 6:3 (2013). С. 26–37.

## 1.1. Оценка скорости сходимости РМН с монотонным оператором

### Теорема 1.1.

Пусть  $A$  — монотонный оператор, для которого выполнены условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

известна оценка для нормы производной в точке  $u^0$ , т.е.

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r \quad u^0 \in S_r(u_\alpha),$$

$$r \leq \alpha/N_2, \quad 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}.$$

Тогда для процесса (1.3) с  $\gamma = 1$  имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения  $u_\alpha$  регуляризованного уравнения (1.2)

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \left(1 - \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}}\right).$$

В. В. Васин В.В., Скурыдина, А.Ф. Двухэтапный метод построения регуляризующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН Т.23 В.1 (2017), С. 57–74.

### Определение

Усиленное свойство Фейера (Васин, Еремин, 2009) для оператора  $T$  означает, что для некоторого  $\nu > 0$  выполнено соотношение

$$\|T(u) - z\|^2 \leq \|u - z\|^2 - \nu \|u - T(u)\|^2, \quad (1.4)$$

где  $z \in \text{Fix}(T)$ —множество неподвижных точек оператора  $T$ . Это влечет для итерационных точек  $u^k$ , порождаемых процессом  $u^{k+1} = T(u^k)$ , выполнение неравенства

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \leq \|u^k - z\|^2 - \nu \|u^k - u^{k+1}\|^2. \quad (1.5)$$



Пусть для монотонного оператора  $A$  выполнены условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U, \quad (1.6)$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r, \quad (1.7)$$

$A'(u^0)$  — самосопряженный оператор,

$$\|u_\alpha - u^0\| \leq r \quad 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} \geq 4N_1, \quad r \leq \alpha/8N_2. \quad (1.8)$$

### Теорема 1.2.

Пусть выполнены условия (1.6)–(1.8). Тогда при  $\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2}$  оператор шага  $T$  процесса (1.3) при

$$\nu = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2\gamma(N_1 + \alpha)^2} - 1$$

удовлетворяет неравенству (1.4), для итераций  $u^k$  справедливо соотношение (1.5) и имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0.$$

Если параметр  $\gamma$  принимает значение  $\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2}$ , то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}.$$

## 1.2. Нелинейные аналоги альфа-процессов (new)

$\alpha$ -процессы для линейного самосопряженного положительно определенного оператора были предложены **М. А. Красносельским и др. (1969)**.

Для нелинейного оператора итерационный процесс запишем в виде:

$$u^{k+1} = u^k - \beta_k(A(u^k) + \alpha(u - u^0) - f_\delta).$$

Используя разложение Тейлора в точке  $u^k$  исходного уравнения, строим

- регуляризованный метод минимальной ошибки (ММО):

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\langle B^{-1}(u^k)S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|S_\alpha(u^k)\|^2} S_\alpha(u^k),$$

- регуляризованный метод минимальной ошибки (МНС):

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\langle S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle B(u^k)S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} (A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta)$$

- регуляризованный метод минимальных невязок (ММН):

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\langle B(u^k)S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|B(u^k)S_\alpha(u^k)\|^2} (A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta),$$

где  $B(u^k) = A'(u^k) + \bar{\alpha}I$ ,  $S_\alpha(u^k) = A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta$ .

# Модифицированные варианты на основе $\alpha$ -процессов (new)

Рассматривается случай модификации итерационных методов, когда производная оператора задачи вычисляется в фиксированной точке:

- ММО:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{-1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|S_\alpha(u^k)\|^2} S_\alpha(u^k),$$

- МНС:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\|S_\alpha(u^k)\|^2}{\langle (A'(u^0)) S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k),$$

- ММН:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^0)) S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|(A'(u^0)) S_\alpha(u^k)\|^2} S_\alpha(u^k).$$

Данный прием является более экономичным с точки зрения численной реализации, так как позволяет снизить вычислительные затраты по времени.

## 1.2. Оценка скорости сходимости нелинейных $\alpha$ -процессов

Пусть для монотонного оператора  $A$  выполнены условия (\*)

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U, \quad \|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

и  $A'(u^0)$  — самосопряженный оператор, для ММО

$$\alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/8N_2, \quad \bar{\alpha} \geq N_0.$$

### Теорема 1.3.

Пусть выполнены условия (\*). Тогда при

$$\gamma_\varkappa < \frac{2}{\mu_\varkappa} \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$$

для последовательности  $\{u^k\}$ , порождаемой  $\alpha$ -процессом при

соответствующем  $\varkappa$ , имеет место сходимость  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$ , а при

$\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$  справедлива оценка  $\|u^k - u_\alpha\| \leq q_\varkappa^k r$ , где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^4}{(N_1 + \bar{\alpha})^4}}.$$

## 1.3. Пример

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(u) = y, \quad [F(u)](t) = c_0 e^{\int_0^t u(\tau) d\tau},$$

$F$  действует из  $L^2[0, 1]$  в  $L^2[0, 1]$ .

Правая часть задана с шумом

$$y^\delta(t) = y(t) e^{\frac{\delta}{5} \sin(t/\delta^2)},$$

При  $y^\delta \rightarrow y$  в  $L^2[0, 1]$ ,  $\|u - u^\delta\| = \|\frac{1}{\delta} \cos(t/\delta^2)\| \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

**Данные:**  $\delta = 0.1$ ,  $\|y - y^\delta\| = 0.07 < \delta$ . Точное решение — функция  $z(t) = t^2$ .

Начальное приближение  $u^0(t) = 0$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\bar{\alpha} = 1$ ,  $\alpha = 10^{-3}$ , критерий останова  $\frac{\|u^k - z\|}{\|z\|} \leq \varepsilon = 0.25$ , где  $u^k$  — приближение на  $k$ -й итерации.

**Результаты:** методы сходятся к  $\varepsilon$  за 8–9 итераций.

---

Tautenhahn U. On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill-posed problems // Inverse Problems. 2002. pp. 191–207.

## Глава 2. Решение уравнений с немонотонным оператором

Во второй главе показано, что есть возможность ослабить условие монотонности оператора  $A$  исходного уравнения и обосновать сходимость итераций РМН, ММО, МНС, ММН в конечномерном случае.

Представлены доказательства сходимости метода Ньютона, нелинейных  $\alpha$ -процессов и их модифицированных аналогов, приведены результаты численных расчетов.

### Лемма (Васин, 2017)

Пусть  $n \times n$  матрица  $A'(u)$  не имеет кратных собственных значений  $\lambda_i$  и числа  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) различны и неотрицательны. Тогда при  $\bar{\alpha} > 0$  матрица имеет представление  $A'(u) + \bar{\alpha}I = S(u)\Lambda(u)S^{-1}(u)$  и справедлива оценка

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{\min}} \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}}, \quad (2.1)$$

где столбцы матрицы  $S(u)$  составлены из собственных векторов матрицы  $A'(u) + \bar{\alpha}I$ ,  $\Lambda$  — диагональная матрица, ее элементы — собственные значения матрицы  $A'(u) + \bar{\alpha}I$ ,

$$\mu(S(u)) = \|S(u)\| \cdot \|S^{-1}(u)\|,$$

$\mu(S(u))$  — число обусловленности  $S(u)$ .

## 2.1. Скорость сходимости РМН с немонотонным оператором

### Теорема 2.1.

Пусть выполнены условия леммы, а также:

$$\sup\{\mu(S(u)) : u \in S_r(u_\alpha)\} \leq \bar{S} < \infty,$$

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1\|u - v\|, \quad \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2\|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

$A'(u^0)$  — симметричная матрица,  $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha} \geq 4N_0$ ,  $r \leq \alpha/8N_2\bar{S}$ .

Тогда для метода (1.3) справедливо заключение теоремы (1.3), где

$$\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}, \quad \gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2},$$

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}}.$$



## 2.2. Скорость сходимости $\alpha$ -процессов с немонотонным оператором

### Теорема 2.2.

Пусть выполнены условия леммы.

Тогда при  $\gamma_{\varkappa} < 2/\mu_{\varkappa}$ ,  $\varkappa = -1, 0, 1$ , с соответствующими  $\mu_k$ , последовательности  $u^k$ , порожденные процессом (1.6) при  $\varkappa = -1, 0, 1$ , сходятся к  $u_{\alpha}$ , т.е.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_{\alpha}\| = 0,$$

а при  $\gamma_{\varkappa}^{opt} = \frac{1}{\mu_{\varkappa}}$  справедлива оценка

$$\|u^{k+1} - u_{\alpha}\| \leq q_{\varkappa}^k r,$$

где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{64\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^6}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^6}}.$$

## 2.2. Сходимость модифицированных $\alpha$ -процессов с немонотонным оператором

Пусть выполнены условия (\*):

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1$ ,  $\|u^0 - u_\alpha\| \leq r$ ,  $A'(u^0)$  — самосопряженный оператор, спектр которого состоит из неотрицательных различных собственных значений,  $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ ,  $r = \alpha/6N_2$ ,  $\bar{\alpha} \geq N_0$ .

### Теорема 2.3

Пусть выполнены условия (\*). Тогда при

$$\gamma_\varkappa < \frac{2}{\mu_\varkappa} \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$$

для последовательности  $\{u^k\}$ , порождаемой модифицированным  $\alpha$ -процессом при соответствующем  $\varkappa$ , имеет место сходимость  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$ , а при  $\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$  справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q_\varkappa^k r,$$

где

$$q_\varkappa = \sqrt{1 - \frac{9\alpha^2}{64(N_1 + \alpha)^2}}$$

### Замечание 2.1

Предложенный подход к получению оценок скорости сходимости итерационных процессов полностью переносится на случай, когда спектр матрицы  $A'(u^k)$ , состоящий из различных вещественных значений, содержит набор малых по абсолютной величине отрицательных собственных значений. Пусть  $\lambda_1$  — отрицательное собственное значение с наименьшим модулем  $|\lambda_1|$  и  $\bar{\alpha} - |\lambda_1| = \bar{\alpha}_1 < \alpha^*$ . Тогда оценка

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{min}} \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}},$$

трансформируется в неравенство

$$\|(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u^k))}{\bar{\alpha}^*} \leq \frac{\bar{S}}{\bar{\alpha}^*}$$

Все теоремы остаются справедливыми при замене  $\bar{\alpha}$  на  $\bar{\alpha}^*$ .

### 2.3. Решение модельной задачи магнитометрии

$$[A(u)](x, y) = \Delta J \left\{ \iint_D \frac{H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{3/2}} dx' dy' - \iint_D \frac{u(x', y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{3/2}} dx' dy' \right\} = B_z(x, y, 0),$$

где  $\Delta J$  — скачок  $z$ -компоненты вектора намагниченности,  $z = H$  — асимптотическая плоскость,  $B_z(x, y, 0)$  — функция аномального поля,  $z = u(x, y)$  — искомая функция, описывающая поверхность раздела сред с различными свойствами намагниченности.

Точное решение уравнения магнитометрии задается формулой (Акимова, Мисилов, 2014-2016)

$$\hat{u}(x, y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6 - (y/10-2.5)^6} - 3^{-(x/10-5.5)^6 - (y/10-4.5)^6},$$

**Результаты.** Число обусловленности  $\mu(A'_n(u_n^k)) \approx 1.8 \cdot 10^7$ , спектр неотрицательный, состоящий из различных собственных значений,  $\bar{\alpha} = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^{-4}$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon < 10^{-2}$ . Итерационные методы сходятся за 4–5 итераций, у модифицированных меньше время счета.

# Глава 3. Покомпонентные методы ньютоновского типа решения обратных структурных задач гравиметрии и магнитометрии

В третьей главе предлагаются покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта и вычислительная оптимизация методов типа Ньютона.

Параллельные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах (видеокартах) для вычислений на сетках большого размера. Приводятся результаты расчетов модельных задач на многоядерных процессорах и графических ускорителях.

# Постановка обратной задачи гравиметрии восстановления поверхности раздела сред

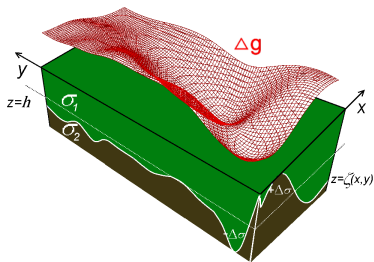
Рассмотрим уравнение гравиметрии в декартовой системе координат с осью  $z$ , направленной вниз

$$A(u) = f\Delta\sigma \left\{ \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{1/2}} dx' dy' - \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{1/2}} dx' dy' \right\} = \Delta g(x, y, 0),$$

где  $f$  — гравитационная постоянная, равная  $6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$ ,

$\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$  — скачок плотности на поверхности раздела сред  $u(x, y)$ ,

$\Delta g(x, y, 0)$  — аномальное гравитационное поле



### 3.1. Покомпонентный метод типа Ньютона (new)

Запишем исходное операторное уравнение (1.1) в виде:

$$P(u) = A(u) - f,$$

где  $A(u) = \int_a^b \int_c^d K(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy$  — интегральный оператор задачи гравиметрии.

Итерации в методе Ньютона строятся по схеме

$$A'(u^k)(\Delta u^k) = -(A(u^k) - f),$$

где  $\Delta u^k = u^{k+1} - u^k$ . Для задачи гравиметрии

$$f \Delta \sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) \Delta u^k dx dy = A(u(x', y')) - f(x', y').$$

**Замечание 3.1.** На значение гравитационного поля в точке  $(x', y')$  наибольшее влияние оказывает глубина залегания поверхности раздела в точке  $(x', y')$ .

Тогда можем записать

$$f \Delta \sigma (\Delta u^k) \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy = A(u(x', y')) - f(x', y').$$

Регуляризованный метод Ньютона:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_{\delta}).$$

Покомпонентный метод типа Ньютона имеет вид:

$$u^{k+1}(x', y') = u^k(x', y') - \gamma \frac{1}{\Psi(x', y')} ([A(u^k)](x', y') - f(x', y')),$$

где

$$\Psi(x', y') = f\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy.$$

Регуляризованный покомпонентный метод типа Ньютона:

$$u^{k+1}(x', y') = u^k(x', y') - \frac{1}{\Psi(x', y') + \bar{\alpha}} ([A(u^k)](x', y') + \alpha(u^k(x', y') - u^0(x', y')) - f_{\delta}(x', y'))$$

где  $\alpha, \bar{\alpha}$  — положительные параметры регуляризации.

---

Akimova E., Skurydina A. A componentwise Newton type method for solving the structural inverse gravity problem // EAGE Geoinformatics 2015



## 3.2. Вычислительная оптимизация метода Ньютона

Производная оператора  $A$  в точке  $u^0(x, y)$  определяется формулой:

- в задаче гравиметрии

$$[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{u^0(x', y')h(x', y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{3/2}} dx' dy',$$

- в задаче магнитометрии

$$[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 - 2(u^0(x', y'))^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{5/2}} h(x', y') dx' dy'.$$

Элементы матрицы  $A'(u^0)$  принимают наибольшие значения при малых значениях  $(x - x')$  и  $(y - y')$ .

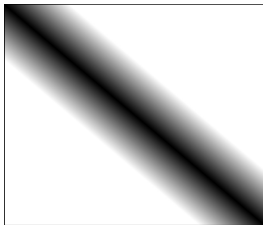


Схема матрицы производной оператора  $A$

### Замечание 3.2.

В структурных обратных задачах грави- магнитометрии при решении методом Ньютона без существенной потери точности можно не учитывать значения элементов, отстоящих от диагонали далее, чем на  $\beta$ -ю часть размерности матрицы производной, то есть те значения  $a_{ij}$ , для которых  $j \in \{i - h(\beta), ..i + h(\beta)\}$ , где  $h(\beta)$  — полуширина ленты матрицы,  $i, j$  — индекс элемента.

---

Akimova E., Miniakhmetova A., Martyshko M. Optimization and parallelization of Newton type methods for solving structural gravimetry and magnetometry inverse problems // EAGE Geoinformatics 2014

# Постановка обратной задачи гравиметрии

## восстановления нескольких поверхностей раздела

Суммарное гравитационное поле получаем путем сложения гравитационных полей от каждой поверхности:

$$A(u) = \sum_{l=1}^L f \Delta \sigma_l \frac{1}{4\pi} \times \\ \times \iint_D \left\{ \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u_l^2(x,y)]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_l^2]^{1/2}} \right\} = \Delta g(x', y'),$$

где  $L$  — число границ раздела,

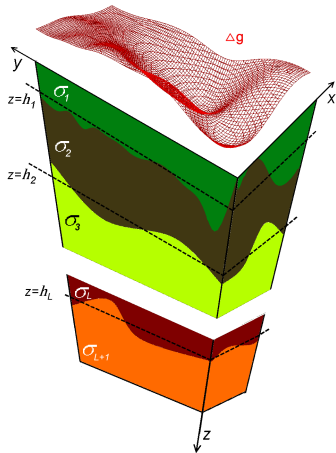
$f = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$ ,  $\Delta \sigma = \sigma_2 - \sigma_1$  — скачок

плотности на поверхности раздела сред  $u(x, y)$ ,

$\Delta g(x, y, 0)$  — аномальное гравитационное поле.

Регуляризованный метод Левенберга – Марквардта

$$u^{k+1} = u^k - \gamma [A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha I]^{-1} [A'(u^k)^* (A(u^k) - f_\delta)]$$



### 3.3. Покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта(new)

Регуляризованный метод Левенберга – Марквардта

$$u^{k+1} = u^k - \gamma [A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha I]^{-1} [A'(u^k)^* (A(u^k) - f_\delta)]$$

По аналогии с покомпонентным методом Ньютона предложен покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта:

$$u_l^{k+1} = u_l^k - \gamma \frac{1}{\varphi_l + \bar{\alpha}} \Lambda [A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta)],$$

где  $l$  — номер границы раздела,  $l = 1, \dots, L$ ,  $\Lambda$  — весовой оператор,

$$\begin{aligned} \varphi_l = & \left[ f \Delta \sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x', y', x, y, u_l^k(x', y')) dy dx \right] \\ & \times \left[ f \Delta \sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u_l^k(x, y)) dx dy \right]. \end{aligned}$$

где  $K'_u(x', y', x, y, u_l^k(x', y'))$  — ядро интегрального оператора.

Skurydina A. F. Regularized Levenberg – Marquardt Type Method Applied to the Structural Inverse Gravity Problem ... // Bulletin of South Ural State University. 2017. V.6, N.3. pp. 5–15

Перепишем в дискретной форме

$$u_{l,i}^{k+1} = u_{l,i}^k - \gamma \frac{1}{\varphi_{l,i} + \bar{\alpha}} w_{l,i} \left[ \{A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta)\}_i \right],$$

где  $w_{l,i}$  —  $i$ -й весовой множитель, зависящий от  $l$ -й границы раздела (Акимова, Мисилов 2015),

$$\begin{aligned} \varphi_{l,i} = & \left[ f \Delta \sigma \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M K'_u(x'_k, y'_m, \{x, y\}_i, u_{l,i}^k) \Delta x' \Delta y' \right] \\ & \times \left[ f \Delta \sigma \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M K'_u(x_k, y_m, \{x', y'\}_i, u_l^k(x_k, y_m)) \Delta x \Delta y \right]. \end{aligned}$$

---

Акимова, Е. Н., Мисилов, В. Е., Скурыдина, А. Ф., Третьяков, А. И.  
Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и  
магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” // Вычислительные методы и  
программирование, 2015. Т. 16, 155–164.

### 3.4. Описание комплекса параллельных программ

- на основе предложенных методов разработаны параллельные алгоритмы для вычислений на многоядерных процессорах и графических ускорителях;
- используются инструменты: OpenMP, CUDA;
- библиотеки Intel MKL, Cublas;
- при больших размерах сеток вычисления производились «на лету»: необходимый элемент матрицы вычисляется в момент умножения его на элемент вектора.

Для оценки производительности параллельных алгоритмов используются показатели ускорения и эффективности

$$S_m = \frac{T_1}{T_m}, \quad E_m = \frac{S_m}{m},$$

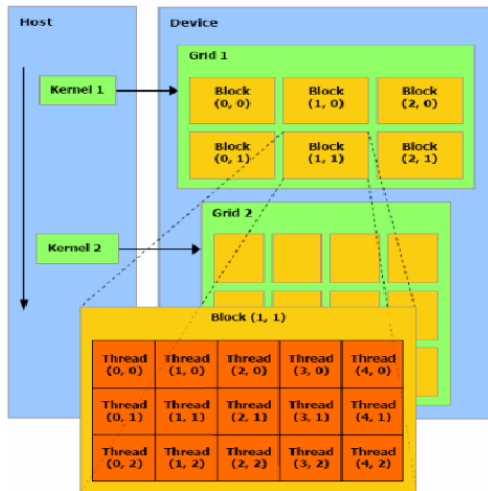
где  $T_1$  — время выполнения последовательного алгоритма,  $T_m$  — время выполнения параллельного алгоритма на  $m$  ( $m > 1$ ) ядрах процессора.

# Технология OpenMP



Принцип работы потоков в OpenMP.

# Технология CUDA



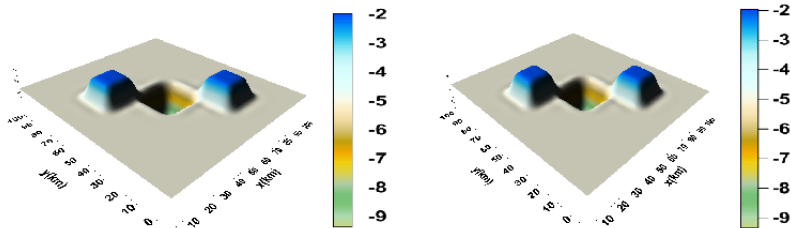
Иерархия компонентов вычислительной сетки GPU.



### 3.5. Задача 1 (сравнение методов типа Ньютона решения задачи гравиметрии в двухслойной среде)

Точное решение уравнения гравиметрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x, y) = 5 - 3.21e^{-(x/10.13-6.62)^6-(y/9.59-2.93)^6} - 2.78e^{-(x/9.89-4.12)^6-(y/8.63-7.435)^6} + 3.19e^{-(x/9.89-4.82)^6-(y/8.72-4.335)^6},$$



Модельная поверхность (слева) и приближенное решение (справа):

$$D = \{0 \leq x \leq 270, 0 \leq y \leq 300\},$$

$$H = 5, \Delta x = \Delta y = 0.1, \Delta \sigma = 0.2 \text{ г/см}^3.$$

Критерий останова итераций  $\delta = \frac{\|u_e - u_a\|}{\|u_e\|} \leq 0.025$ , параметр регуляризации  $\alpha = \bar{\alpha} = 10^{-3}$ , полуширина ленты матрицы производной  $\beta = 1/4$ .

Коэффициент  $\gamma = 1.2$  для покомпонентного метода Ньютона,

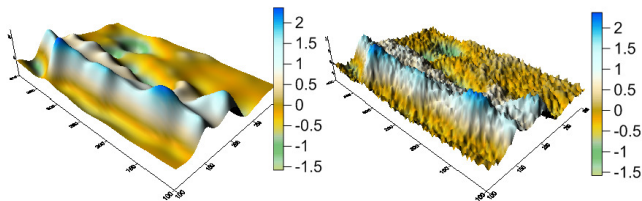
$\Delta = \|A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta\| / \|f_\delta\|$ . Размер  $A'_n(u^k) \approx 2.6 * 10^5 \times 2.6 * 10^5$ .

Табл. Сравнение методов решения задачи гравиметрии на сетке  $512 \times 512$

Метод	$N$	$\Delta$	$T_1$	$T_8$	$T_{GPU}$	$S_8$	$S_{GPU}$
1. Метод Ньютона	3	0.041	64 мин	8,82 мин	1 мин	7.25	65
2. Модиф. метод Ньютона	5	0.042	55 мин	7,5 мин.	45 сек	7.33	73
3. Метод Ньютона с ленточной матрицей	4	0.041	43 мин	6,8 мин.	30	7.41	86
4. Покомпонентный метод Ньютона	6	0.041	20 мин	2,82 мин.	11 сек	7.14	100

**Вывод:** покомпонентный метод типа Ньютона является самым экономичным по вычислительным затратам: в 3 раза быстрее методов 1–2 и в 2 раза быстрее метода 3.

## 3.5. Задача 2 (сравнение методов Левенберга – Марквардта решения задачи гравиметрии в многослойной среде

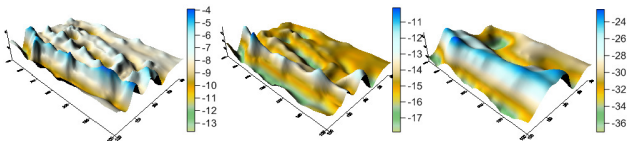


Суммарное поле и поле с шумом 22% (мГал),  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 1.15$ .

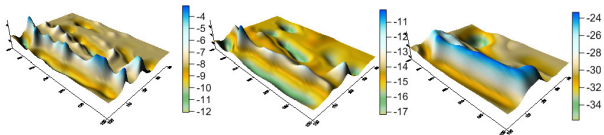
Модельные поверхности имитируют поверхности в работе\*.

$H_1 = 8$  км,  $H_2 = 15$  км и  $H_3 = 30$  км. Скачки плотности  $\Delta\sigma_1 = 0.2$  г/см<sup>3</sup>,  $\Delta\sigma_2 = 0.1$  г/см<sup>3</sup>,  $\Delta\sigma_3 = 0.1$  г/см<sup>3</sup>. Шаги сетки  $\Delta x = 2$  км,  $\Delta y = 3$  км.

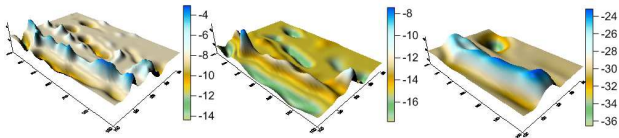
\* Мартышко П.С., Акимова Е.Н., Мисиллов В.Е. О решении структурной обратной задачи гравиметрии модифицированными методами градиентного типа // Физика земли. 2016. № 5. С. 82–86.



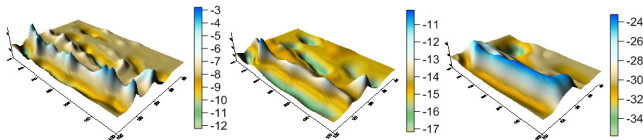
Точные решения  $u_0(x, y)$ ,  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$ .



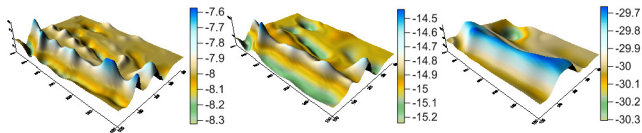
Границы, восстановленные ЛМ  $\hat{u}_0(x, y)$ ,  $\hat{u}_1(x, y)$ ,  $\hat{u}_2(x, y)$ .



Границы, восстановленные ПЛМ  $\hat{u}_0(x, y)$ ,  $\hat{u}_1(x, y)$ ,  $\hat{u}_2(x, y)$ .



Границы, восстановленные ЛМ для данных с шумом  $\tilde{u}_0(x, y)$ ,  $\tilde{u}_1(x, y)$ ,  $\tilde{u}_2(x, y)$ .



Границы, восстановленные ПЛМ для данных с шумом  $\hat{u}_0(x, y)$ ,  $\hat{u}_1(x, y)$ ,  $\hat{u}_2(x, y)$ .

- сетка  $1000 \times 1000$ , матрица производных  $10^6 \times 3 * 10^6$ ,
- параметр регуляризации  $\alpha = 10^{-3}$  и демпфирующий множитель  $\gamma = 1$ ,
- $\varepsilon = \frac{\|A(u_a) + \alpha u_a - f_\delta\|}{\|f_\delta\|} = 0.1$ ,
- относительные погрешности  $\delta_i = \|u_a - u_e\| / \|u_e\|$ ,
- $T_1$  — Intel Xeon (1 ядро),  $T_8$  — Intel Xeon (8 ядер),
- $T_{\text{GPU}}$  — NVIDIA Tesla M2050.

Табл. Результаты расчетов в задаче гравиметрии в многослойной среде

Метод	$N$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$T_1$	$T_8$	$T_{\text{GPU}}$
ЛМ	60	0.052	0.026	0.051	11.7 часа	1.4 часа	35 мин.
ПЛМ	20	0.051	0.035	0.06	1.2 часа	10 мин.	3 мин.

**Вывод:** покомпонентный метод Левенберга – Марквардта решает задачу в 10 раз быстрее.

# Основные результаты

1. Для нелинейного уравнения с монотонным оператором доказаны теоремы о сходимости регуляризованного метода Ньютона. Построены нелинейные аналоги  $\alpha$ -процессов: регуляризованные методы градиентного типа для решения нелинейного уравнения с монотонным оператором: метод минимальной ошибки, метод наискорейшего спуска, метод минимальных невязок. Доказаны теоремы сходимости и сильная фейеровость итерационных процессов. Для задачи с немонотонным оператором, производная которого имеет неотрицательный спектр, доказаны теоремы сходимости для метода Ньютона, нелинейных  $\alpha$ -процессов и их модифицированных вариантов.

# Основные результаты

2. Для решения нелинейных интегральных уравнений обратных задач гравиметрии предложены экономичные покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта. Предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона и его модифицированного варианта при решении задач с матрицей производной, близкой к ленточной.

3. Разработан комплекс параллельных программ для многоядерных и графических процессоров (видеокарт) решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности методами ньютоновского типа и покомпонентными методами.



Основные результаты по материалам диссертационной работы докладывались на конференциях:

1. XIV и XV Уральская молодежная научная школа по геофизике (Пермь, 2013 г., Екатеринбург 2014 г.);
2. Международная конференция "Параллельные вычислительные технологии" (Ростов-на-Дону, 2014 г., Екатеринбург, 2015 г., Казань, 2017 г.);
3. Международная конференция "Геоинформатика: теоретические и прикладные аспекты" (Киев 2014, 2015, 2016 г.)
4. Международная конференция "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 2014 г.)
5. Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, 2015 г.)

- ❶ Васин В.В., Скурыдина, А.Ф. Двухэтапный метод построения регуляризующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН Т.23 В.1 (2017), С. 57–74.
- ❷ Васин В.В., Акимова Е.Н., Миниахметова А.Ф. Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник ЮУрГУ. Т.6 В.3 (2013), С. 26–37.
- ❸ Акимова Е. Н., Мисилов В. Е., Скурыдина А. Ф. Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на МВС // Вестник УГАТУ. 2014. Т.18, № 4 (65). С. 206-215.
- ❹ Skurydina A. F. Regularized Levenberg — Marquardt Type Method Applied to the Structural Inverse Gravity Problem in a Multilayer Medium and its Parallel Realization // Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2017. V.6, N.3. pp. 5–15.
- ❺ Акимова, Е. Н., Мисилов, В. Е., Скурыдина, А. Ф., Третьяков, А. И. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” // Вычислительные методы и программирование, 2015. Т. 16, 155–164.

- ⑥ Akimova E., Miniakhmetova A., Martyshko M. Optimization and parallelization of Newton type methods for solving structural gravimetry and magnetometry inverse problems // EAGE Geoinformatics 2014 – 13th Intern. Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kiev, Ukraine. 12–15 May 2014
- ⑦ Akimova E., Skurydina A. A componentwise Newton type method for solving the structural inverse gravity problem // EAGE Geoinformatics 2015 – 14th Intern. Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kiev, Ukraine. 11–14 May 2015.
- ⑧ Akimova E., Skurydina A. On solving the three-dimensional structural gravity problem for the case of a multilayered medium by the componentwise Levenberg-Marquardt method // EAGE Geoinformatics 2016 – 15th Intern. Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kiev, Ukraine. 10–13 May 2016.

- 9 Мисилов В.Е., Миниахметова А.Ф., Дергачев Е.А. Решение обратной задачи гравиметрии итерационными методами на суперкомпьютере «Уран» // Труды XIV Уральской молодежной научной школы по геофизике. Пермь: ГИ УрО РАН. 2013. С. 187–190
- 10 Миниахметова А.Ф. Сравнение быстрых методов решения структурной обратной задачи магнитометрии // Труды XV Уральской молодежной научной школы по геофизике. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2014. С. 160–162
- 11 E. N. Akimova, A. F. Miniakhmetova, V. E. Misilov. Fast stable parallel algorithms for solving gravimetry and magnetometry inverse problems // The International conference "Advanced mathematics, computations and applications – 2014". Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia. June 8–11, 2014.

- ❶ Акимова Е.Н., Мисилов В.Е., Миниахметова А.Ф. Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Труды межд. конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2014)», Ростов-на-Дону, 31 мар. – 4 апр. 2014 г. Челябинск: ЮУрГУ. 2014. С. 19–29.
- ❷ В.В. Васин, А.Ф. Скурыдина. Регуляризованные модифицированные процессы градиентного типа для нелинейных обратных задач // Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам. Москва, 19 – 21 ноября 2015 г.
- ❸ Акимова, Е. Н., Мисилов, В. Е., Скурыдина, А. Ф., Третьяков, А. И. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” // Труды межд. конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2015)», Екатеринбург, 31 мар. – 2 апр. 2015 г. Челябинск: ЮУрГУ. 2015. С. 8–18.

Спасибо за внимание!