Регуляризованные алгоритмы на основе схем Ньютона, Левенберга – Марквардта и нелинейных аналогов α-процессов для решения нелинейных операторных уравнений

А.Ф. Скурыдина

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

620990, Екатеринбург, Россия

e-mail: afinapal@gmail.com

01.01.05, Вычислительная математика

Научный руководитель: д. ф.-м. н., вед. н.с. Е.Н. Акимова

February 12, 2018

Введение

Доклад посвящен регуляризованным итерационным методам решения нелинейных некорректных операторных уравнений.

Актуальность темы. Построение итеративно регуляризованных алгоритмов востребовано для решения широкого круга прикладных задач. Так, решение структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии сводится к решению нелинейных интегральных уравнений Урысона первого рода.

Некорректные задачи можно решать в два этапа. На первом этапе некорректно поставленная задача методами регуляризации сводится к корректной.

Теорию решения некорректных задач развивали А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьев, В.К. Иванов, А.Б. Бакушинский, Б.Т. Поляк, А.В. Гончарский, В.В. Васин, А.Л. Агеев, В.П. Танана, А.Г. Ягола, A. Neubauer, O. Scherzer, B. Kaltenbacher, U Tautenhahn и др.

Введение

На втором этапе решения корректно поставленной экстремальной задачи применяются методы градиентного типа, линеаризованные методы, или алгоритмы, использующие априорные ограничения. Для решения систем нелинейных уравнений предложены методы в работах Л.В. Канторовича, Б.Т. Поляка, J. M. Ortega и W. C. Rheinboldt, A. Neubauer, M.J.D. Powell, J.C. Gilbert, J. Nocedal, S.J. Wright. L. Landweber, M. Hanke. Градиентные методы с применением метода Ландвебера исследовались М.Ю. Кокуриным. Методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии предложены в работах В.Б. Гласко, В.Н. Страхова. Алгоритмы решения обратных задач математической физики на основе разрабатывались в ИММ УрО РАН В.В. Васиным, Е.Н. Акимовой, Г.Я. Пересторониной и В.Е. Мисиловым, в ИГФ УрО РАН И.Л. Пруткиным, П.С. Мартышко, А.Г. Цидаевым.

Введение

Цель. Построить новые методы решения нелинейных операторных уравнений, исследовать на их сходимость. Реализовать параллельные алгоритмы, провести численные эксперименты.

1.1. Общая постановка задачи

Рассматривается нелинейное уравнение с неизвестной функцией u

$$A(u) = f \tag{1.1}$$

с нелинейным непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором A, действующим на паре гильбертовых пространств, для которого обратные операторы $A'(u)^{-1}$, A^{-1} в общем случае разрывны в окрестности решения, что влечет некорректность задачи (1.1).

Двухэтапный метод аппроксимации решения

Рассматривается двухэтапный метод построения регуляризующего алгоритма (РА):

1. Регуляризация по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \tag{1.2}$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, u_0 — некоторое приближение к u_α;

2. Применение итерационных алгоритмов аппроксимации регуляризованного решения u_α. Рассматриваются методы на основе метода Гаусса-Ньютона и методы градиентного типа на основе нелинейных α-процессов.

Рассматривается линейное уравнение в гильбертовом пространстве

$$Ax = y,$$

с ограниченным, самосопряженным, положительно полуопределенным оператором A.

Пусть $\alpha \in [-1, \infty)$ — некоторое фиксированное вещественное число. Определяется итеррационная последовательность

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\langle A^\alpha \Delta^k, \Delta^k \rangle}{\langle A^{\alpha+1} \Delta^k, \Delta^k \rangle} \Delta^k,$$

где $\Delta^k = Ax^k - y$.

- при $\alpha = 1$ — метод минимальных невязок (Красносельский и др., 1969),
- при $\alpha = 0$ — метод наискорейшего спуска (например, Канторович, Акилов, 1959),
- при $\alpha = -1$ — метод минимальной ошибки.

1.2. Регуляризованный метод Гаусса-Ньютона

Итерации производятся по формуле:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \qquad (2.1)$$

где $A'(u^k)$ — производная по Фреше оператора A уравнения (1.1), γ — демпфирующий множитель, $\bar{\alpha} \geq \alpha > 0$ — параметры регуляризации, T — оператор шага.

Модифицированный вариант:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \qquad (2.2)$$

где $A'(u^0)$ — производная в начальной точке итераций.

1.3. Принципы построения α-процессов для нелинейного оператора (new)

В литературе (например, Васин, Еремин, 2009) изложена схема построения итерационных α-процессов в случае линейного оператора. В случае нелинейного оператора требуется использовать линеаризацию оператора в точке u^k по формуле Тейлора.

Итерационный процесс запишем в виде:

$$u^{k+1} = u^k - \beta_k (A(u^k) - f_\delta),$$

и в случае метода минимальной ошибки (ММО) найдем параметр β из условия

$$\min_{\beta_k} \| u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta) - z \|^2,$$

где z — решение уравнения $A'(u^k)z = y^k$, $y^k = f_\delta + A'(u^k)u^k - A(u^k)$ (используем разложение Тейлора в точке u^k).

Регуляризованный метод минимальной ошибки

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\langle B^{-1}(u^k) S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\| S_\alpha(u^k) \|^2} S_\alpha(u^k),$$

где $B(u^k) = A'(u^k) + \bar{\alpha} I, \quad S_\alpha(u^k) = A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta.$

Если использовать экстремальные принципы

$$\min_{\beta}\{\langle A'(u^k)u^{k+1}, u^{k+1}\rangle - 2\langle u^{k+1}, y^k\rangle\},$$

либо

$$\min_{\beta}\{\|A'(u^k)(u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta) - y^k\|^2\},$$

то получаем нелинейные регуляризованные методы наискорейшего спуска (МНС)

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\langle S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle}{\langle B(u^k)S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta)$$

и минимальных невязок (ММН)

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\langle B(u^k)S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle}{\|B(u^k)S_\alpha(u^k)\|^2}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta).$$

В общем виде итерационную последовательность обозначим

$$u^{k+1} = u^k - \gamma\frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa}S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle}{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1}S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle}S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k) \qquad (2.3)$$

при соответстующем $\varkappa = -1, 0, 1$, γ — демпфирующий множитель.

Модифицированные варианты на основе α-процессов (new)

Рассматривается случай модификации итерационных методов, когда производная оператора задачи вычисляется в начальной точке итераций:

- ММО:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha} I)^{-1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|S_\alpha(u^k)\|^2} S_\alpha(u^k), \tag{2.4}$$

- МНС:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\|S_\alpha(u^k)\|^2}{\langle (A'(u^0)) S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k), \tag{2.5}$$

- ММН:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^0)) S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|(A'(u^0)) S_\alpha(u^k)\|^2} S_\alpha(u^k). \tag{2.6}$$

Данный прием является более экономичным с точки зрения численной реализации, так как позволяет снизить вычислительные затраты по времени.

Определение

Усиленное свойство Фейера (Васин, Еремин, 2009) для оператора T означает, что для некоторого $\nu > 0$ выполнено соотношение

$$\|T(u) - z\|^2 \leq \|u - z\|^2 - \nu\|u - T(u)\|^2, \tag{2.7}$$

где $z \in Fix(T)$—множество неподвижных точек оператора T. Это влечет для итерационных точек u^k, порождаемых процессом $u^{k+1} = T(u^k)$, выполнение неравенства

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \leq \|u^k - z\|^2 - \nu\|u^k - u^{k+1}\|^2. \tag{2.8}$$

Васин, 2013

Пусть $A : U \to U$ — непрерывно дифференцируемый оператор с условиями

$$\|A'(u)\| \le N_1, \quad \|A'(u) - A'(v)\| \le N_2\|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$A'(u^0)$ — самосопряженный неотрицательно определенный оператор. Если начальное приближение u^0 и параметры $\alpha, \bar{\alpha}, r, N_1, N_2$ удовлетворяют условиям:

$$\|u^0 - u_\alpha\| \le r, \quad 0 < \alpha \le \bar{\alpha}, \quad r = \alpha/(6N_2), \quad \bar{\alpha} \ge 3N_1,$$

то при $\gamma < \alpha\bar{\alpha}/(\alpha + N_1^2)^2$ последовательность u^k, порождаемая итерационным процессом, сходится сильно к решению u_α регуляризованного уравнения и выполнено соотношение

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \le \|u^k - z\|^2 - \nu\|u^k - u^{k+1}\|^2.$$

В. В. Васин, Е. Н. Акимова, А. Ф. Миниахметова. Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник ЮУрГУ, 6:3 (2013). С. 26–37.

Теорема 2.1.

Пусть A — монотонный оператор, для которого выполнены условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

известна оценка для нормы производной в точке u^0, т.е.

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r \quad u^0 \in S_r(u_\alpha),$$

$$r \leq \alpha / N_2, \quad 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}.$$

Тогда для процесса (2.1) с $\gamma = 1$ имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения u_α регуляризованного уравнения (1.2)

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = (1 - \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}}).$$

Теорема 2.2.

Пусть для монотонного оператора A выполнены условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1\|u - v\|, \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2\|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

$A'(u^0)$ — самосопряженный оператор,

$\|u_\alpha - u^0\| \leq r \quad 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} \geq 4N_1, \quad r \leq \alpha/8N_2.$

Тогда для оператора

$$F(u) = (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta)$$

справедлива оценка снизу

$$< F(u), u - u_\alpha > \geq \frac{\alpha}{4\bar{\alpha}}\|u - u_\alpha\|^2 \quad \forall u \in S_r(u_\alpha).$$

Теорема 2.3.

Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда при $\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2}$ оператор шага T процесса (2.1) при

$$\nu = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2\gamma(N_1+\alpha)^2} - 1$$

удовлетворяет неравенству (2.3), для итераций u^k справедливо соотношение (2.4) и имеет место сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0.$$

Если параметр γ принимает значение $\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2}$, то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2}}.$$

Сходимость нелинейных α-процессов

Теорема 3.1.

Пусть для монотонного оператора A выполнены условия

$$\|A'(u) - A'(v)\| \le N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \le N_0 \le N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \le r,$$

и $A'(u^0)$ — самосопряженный оператор.

Кроме того, для ММО параметры α, $\bar{\alpha}$, r, N_2, N_0 удовлетворяют дополнительным соотношениям:

$$\alpha \le \bar{\alpha}, \quad r \le \alpha / 8N_2, \quad \bar{\alpha} \ge N_0.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|F^\varkappa(u)\|^2 \le \mu_\varkappa < F^\varkappa(u), u - u_\alpha >, \quad \varkappa = -1, 0, 1,$$

где

$$\mu_{-1} = \frac{4(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}, \quad \mu_0 = \frac{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})}{\alpha\bar{\alpha}^2},$$

$$\mu_1 = \frac{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})^2}{\alpha\bar{\alpha}^3},$$

Теорема 3.2.

Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда при

$$\gamma_\varkappa < \frac{2}{\mu_\varkappa} \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$$

для последовательности $\{u^k\}$, порождаемой α-процессом при соответствующем $\varkappa$, имеет место сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при $\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$ справедлива оценка $\|u^k - u_\alpha\| \le q_\varkappa^k r$, где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^2}{(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^4}{(N_1+\bar{\alpha})^4}}.$$

Теорема 3.5

Пусть выполнены условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

Оператор A монотонный, $A'(u^0)$ — самосопряженный оператор.

Тогда при

$$\gamma = \frac{2\alpha^3}{(N_0 + \alpha)(N_1 + \alpha)^2}$$

каждая из последовательностей, порождаемых процессами (3.3)-(3.5) сходится к регуляризованному решению u_α и удовлетворяет свойству Фейера. Для

$$\gamma = \frac{\alpha^3}{(N_0 + \alpha)(N_1 + \alpha)^2}$$

справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r,$$

где

1. Численные эксперименты.

Рассматривается ДУ с $x(t)$, $y(t)$, $t \in [0,1]$ с заданной константой $c_0 > 0$

$$\frac{dy}{dt} = x(t)y(t), \quad y(0) = c_0, \tag{1}$$

где $x(t), y(t) \in L^2[0,1]$. Интегрируя (1), приходим к нелинейному операторному уравнению

$$F(x) = y, \tag{2}$$

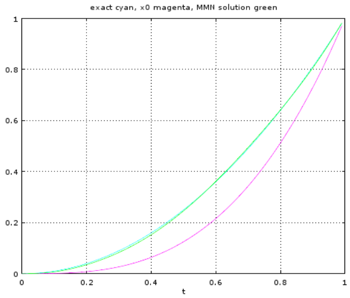
где

$$[F(x)](t) = c_0 e^{\int_0^t x(\tau)d\tau},$$

действует из $L^2[0,1]$ в $L^2[0,1]$. Правая часть задана с шумом $y^\delta(t) = y(t)e^{\frac{\delta}{5} sin(t/\delta^2)}$

Эксперимент для задачи без шума

Точное решение — функция $z(t) = t^2$, начальное приближение $x^0(t) = t^3$, $\bar{\alpha} = \alpha = 10^{-2}$, критерий останова $\frac{\|x^k - z\|}{\|z\|} \leq \varepsilon = 10^{-2}$, где x^k — приближение на k-й итерации. На рисунке изображено восстановленное решение методом ММН. Точное решение отмечено голубым цветом, начальное приближение — малиновым, ММН — зеленым.



Восстановленное ММН решение.

$\Delta = \frac{\|F(x^k)+\alpha(x^k-x^0)-y\|}{\|y\|}$ — относительная норма невязки.

Табл.1. Результаты для правой части без шума

Метод	Параметр шага, γ	Δ	Число итераций, N
ММО	0.5	0.003	25
ММО модиф.	0.5	0.003	22
МНС	0.001	0.003	283
МНС модиф.	0.02 (с 0-й итер.), 0.005 (с 30-й итер.), 0.002 (с 32-й итер.)	0.003	32
ММН	1	0.003	32
ММН модиф.	1	0.003	27
РМН	1	0.003	26
РМН модиф.	0.75	0.003	6

Эксперимент для задачи с возмущенной правой частью с начальным приближением, далеким от точного решения

Правая часть $y^\delta(t) = y(t)e^{\frac{\delta}{5} sin(t/\delta^2)}$, $\delta = 0.1$, $\|y - y^\delta\| = 0.07 < \delta$. Начальное приближение $x^0(t) = 0$, γ, $\bar{\alpha} = 1$, $\alpha = 10^{-3}$, критерий останова $\frac{\|x^k - z\|}{\|z\|} \leq \varepsilon = 0.25$, где x^k — приближение на k-й итерации.

Табл.2. Результаты для задачи с шумом

Метод	Δ	Число итераций, N
ММО	0.042	9
ММО модиф.	0.042	9
МНС	0.041	9
МНС модиф.	0.040	9
ММН	0.045	9
ММН модиф.	0.045	9
РМН	0.042	9
РМН модиф.	0.042	8

2. Сходимость итерационных процессов с немонотонным оператором уравнения

Цель — обосновать сходимость рассматриваемых процессов в конечномерном случае, когда оператор $A\colon R^n \to R^n$, для которого матрица $A'(u)$ в некоторой окрестности решения имеет спектр, состоящий из различных неотрицательных собственных значений.

Лемма (Васин, 2017)

Пусть $n \times n$ матрица $A'(u)$ не имеет кратных собственных значений λ_i и числа λ_i $(i = 1, 2, ..n)$ различны и неотрицательны. Тогда при $\bar{\alpha} > 0$ матрица имеет представление $A'(u) + \bar{\alpha} I = S(u)\Lambda(u)S^{-1}(u)$ и справедлива оценка

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha} I)^{-1}\| \le \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{min}} \le \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}}, \tag{3.1}$$

где столбцы матрицы $S(u)$ составлены из собственных векторов матрицы $A'(u) + \bar{\alpha} I$, Λ— диагональная матрица, ее элементы — собственные значения матрицы $A'(u) + \bar{\alpha} I$,

$$\mu(S(u)) = \|S(u)\| \cdot \|S^{-1}(u)\|,$$

$\mu(S(u))$ — число обусловленности $S(u)$.

2.1. Сходимость регуляризованного метода Ньютона

Оператор $A\colon R^n \to R^n$ и $A'(u)$ имеет неотрицательный спектр, удовлетворяющий условиям леммы.

Теорема 3.1.

Пусть выполнены условия: $\sup\{\mu(S(u)) : u \in S_r(u_\alpha)\} \leq \bar{S} < \infty$,

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1\|u - v\|, \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2\|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$

$A'(u^0)$—симметричная матрица, $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geq 4N_0$, $r \leq \alpha/8N_2\bar{S}$.

Тогда для оператора поправки на итерации

$$F(u) = (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta)$$

справедливо неравенство

$$\|F(u)\|^2 \leq \mu\langle F(u), u - u_\alpha\rangle, \quad \mu = \frac{4\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}$$

и для $\nu < 2/\mu$ выполнено свойство сильной фейеровости оператора шага T итераций

Теорема 3.2.

Пусть выполнены условия леммы, а также:

$$\sup\{\mu(S(u)) : u \in S_r(u_\alpha)\} \leq \bar{S} < \infty,$$

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1\|u - v\|, \quad \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2\|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

$A'(u^0)$—симметричная матрица, $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geq 4N_0$, $r \leq \alpha/8N_2\bar{S}$.

Тогда при $\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}$ оператор шага T процесса (2.1) при установленном ν удовлетворяет неравенству (2.7), для итераций u^k справедливо соотношение (2.8) и имеет место сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0.$$

Если параметр γ принимает значение $\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}$, то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}}.$$

2.2. Сходимость нелинейных α-процессов

Теорема 3.3.

Пусть выполнены условия $\|A(u) - A(v)\| \le N_1 \|u - v\|$,
$\|A'(u) - A'(v)\| \le N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U$, $\|A'(u^0)\| \le N_0 \le N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \le r$,
при $u \in S_r(u_\alpha)$ матрица $A'(u)$ имеет спектр, состоящий из неотрицательных различных собственных значений, $A'(u^0)$ — самосопряженный неотрицательно определенный оператор, параметры удовлетворяют условиям:

$$MMO: \qquad 0 < \alpha \le \bar{\alpha}, \quad r \le \alpha / 6\bar{S} N_2, \quad \bar{\alpha} \ge N_0$$

$$MHC: \qquad 0 < \alpha \le \bar{\alpha}, \quad r \le \alpha / 3N_2,$$

$$MMH: \qquad 0 < \alpha \le \bar{\alpha}, \quad r \le \alpha / 6N_2.$$

Тогда для оператора поправки

$$F^{\varkappa}(u) = \frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha} I)^{\varkappa} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha} I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k)$$

справедливо соотношение

$$\|F^{\varkappa}(u)\|^2 \le \mu_{\varkappa} \langle F^{\varkappa}(u), u - u_\alpha \rangle, \quad \varkappa = -1, 0, 1,$$

Теорема 3.4.

Пусть выполнены условия леммы.

Тогда при $\gamma_\varkappa < 2/\mu_\varkappa$, $\varkappa = -1, 0, 1$, где значения μ_k определяются соотношениями (3.2), последовательности u^k, порождаемые процессом (2.3) при $\varkappa = -1, 0, 1$, сходятся к u_α, т.е.,

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при $\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$ справедлива оценка

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\| \le q_\varkappa^k r,$$

где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{64\bar{S}^2(N_1+\alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^2}{36(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^6}{36(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^6}}.$$

Теорема 3.5

Пусть выполнены условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

$A'(u^0)$ — самосопряженный оператор, спектр которого состоит из неотрицательных различных собственных значений, параметры удовлетворяют условиям:

$$0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r = \alpha / 6N_2, \quad \bar{\alpha} \geq N_0.$$

Тогда для оператора поправки на итерации

$$F^\varkappa(u) = \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha} I)^\varkappa S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha} I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k)$$

имеет место неравенство

$$\|F^\varkappa(u)\|^2 \leq \frac{8(N_1 + \alpha)^2}{2\alpha\bar{\alpha}} \langle F^\varkappa(u), u - u_\alpha \rangle,$$

Теорема 3.6

Пусть выполнены условия теоремы 3.5. Тогда при

$$\gamma_\varkappa < \frac{2}{\mu_\varkappa} \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$$

для последовательности $\{u^k\}$, порождаемой модифицированным α-процессом при соответствующем $\varkappa$, имеет место сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при $\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$ справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \le q_\varkappa^k r,$$

где

$$q^\varkappa = \sqrt{1 - \frac{9\alpha^2}{64(N_1+\alpha)^2}}$$

Замечание 3.1

Предложенный подход к получению оценок скорости сходимости итерационных процессов полностью переносится на случай, когда спектр матрицы $A'(u^k)$, состоящий из различных вещественных значений, содержит набор малых по абсолютной величине отрицательных собственных значений. Пусть λ_1 — отрицательное собственное значение с наименьшим модулем $|\lambda_1|$ и $\bar{\alpha} - |\lambda_1| = \bar{\alpha}_1 < \alpha^*$. Тогда оценка

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{min}} \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}},$$

трансформируется в неравенство

$$\|(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u^k))}{\bar{\alpha}^*} \leq \frac{\bar{S}}{\bar{\alpha}^*} \tag{3.2}$$

Все теоремы остаются справедливыми при замене $\bar{\alpha}$ на $\bar{\alpha}^*$.

3.1. Оптимизация метода Ньютона для обратных задач гравиметрии и магнитометрии

Рассмотрим уравнение гравиметрии в декартовой системе координат с осью z, направленной вниз

$$A(u) = \gamma\Delta\sigma\Big\{ \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H^2]^{1/2}} dx'dy' - \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{1/2}} dx'dy' \Big\} = \Delta g(x,y),$$

где γ — гравитационная постоянная, равная $6.67 \cdot 10^{-8}$ см^3/г$\cdot c^2$, $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ — скачок плотности на поверхности раздела сред, описываемой функцией $u(x,y)$ и подлежащей определению, $\Delta g(x,y)$ — аномальное гравитационное поле, вызванное отклонением поверхности от асимптотической плоскости $z = H$ для искомого решения $u(x,y)$.

Обратная задача магнитометрии при тех же условиях записывается в виде уравнения

$$A(u) = \Delta J \Big\{ \iint_D \frac{H}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H^2]^{3/2}} dx'dy' \\ - \iint_D \frac{u(x',y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{3/2}} dx'dy' \Big\} = \Delta G(x,y), \quad (5.2)$$

где ΔJ — усредненный скачок z-компоненты вектора намагниченности, $z = H$ — асимптотическая плоскость, $\Delta G(x,y)$ — функция, описывающая аномальное поле, $z = u(x,y)$ — искомая функция, описывающая поверхность раздела сред с различными свойствами намагниченности.

Прозводная оператора A в точке $u^0(x,y)$ определяется формулой:

- в задаче гравиметрии

$$[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{u^0(x',y')h(x',y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(u^0(x',y'))^2]^{3/2}}dx'dy',$$

- в задаче магнитометрии

$$[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{(x-x')^2+(y-y')^2-2(u^0(x',y'))^2}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(u^0(x',y'))^2]^{5/2}}h(x',y')dx'dy'.$$

Как видим, элементы матрицы $A'(u^0)$ принимают наибольшие значения при малых значениях $(x-x')$ и $(y-y')$.

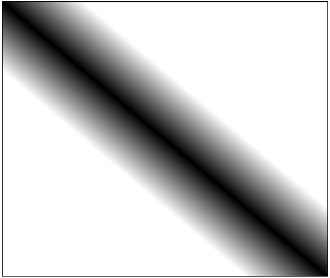


Рис. 1. Схема матрицы производной оператора A

Замечание 4.1.

В структурных обратных задачах грави- магнитометрии при решении методом Ньютона без существенной потери точности можно не учитывать значения элементов, отстоящих от диагонали далее, чем на β-ю часть размерности матрицы производной, то есть те значения a_{ij}, для которых $j \in \{i - h(\beta), ..i + h(\beta)\}$, где $h(\beta)$ — полуширина ленты матрицы, i, j — индекс элемента.

3.2. Покомпонентный метод типа Ньютона для решения задач гравиметрии (new)

Запишем исходное операторное уравнение (1.1) в виде:

$$P(u) = A(u) - f,$$

где $A(u) = \int_a^b \int_c^d K(x, y, x', y', u^k(x, y))dxdy$ — интегральный оператор задачи гравиметрии.

Итерации в методе Ньютона строятся по схеме

$$A'(u^k)(\Delta u^k) = -(A(u^k) - f),$$

где $\Delta u^k = u^{k+1} - u^k$. Для задачи гравиметрии

$$f\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y))\Delta u^k dxdy = A(u(x', y')) - f(x', y'). \quad (4.3)$$

В задаче гравиметрии на изменение гравитационного поля в правой части (4.3) наибольшее значение оказывает отклонение от ассимптотической плоскости в точке (x', y').

Тогда можем записать

$$f\Delta\sigma(\Delta u^k)\int_a^b\int_c^d K'_u(x,y,x',y',u^k(x,y))dxdy = A(u(x',y')) - f(x',y').$$

Итерации осуществляются по схеме:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma\frac{1}{\Psi(x',y')}(A(u^k) - f),$$

где

$$\Psi(x',y') = f\Delta\sigma\int_a^b\int_c^d K'_u(x,y,x',y',u^k(x,y))dxdy.$$

Регуляризованный вариант:

$$u^{k+1} = u^k - \frac{1}{\Psi(x',y') + \bar{\alpha}}(A(u^k) + \alpha u - f_\delta),$$

где $\alpha, \bar{\alpha}$ — положительные параметры регуляризации.

Регуляризованный метод Левенберга – Марквардта (Васин, 2012)

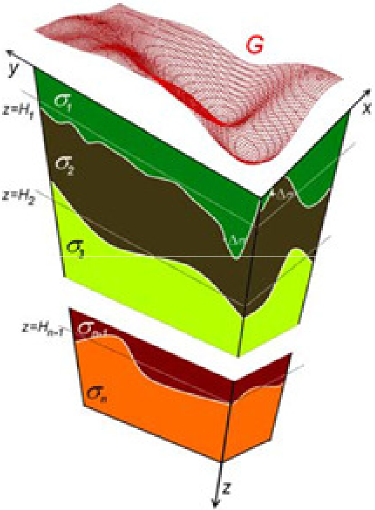
$$u^{k+1} = u^k - \gamma[A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha I]^{-1}[A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta)] \qquad (3)$$

и его модифицированный вариант (Васин, Пересторонина, 2011)

$$u^{k+1} = u^k - \gamma[A'(u^0)^* A'(u^0) + \alpha I]^{-1}[A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta)] \qquad (4)$$

где γ — демпфирующий множитель, u^0 — некоторое приближение к u_α, $\alpha > 0$.

Модель многослойной среды



Модель многослойной среды.

Постановка задачи

Суммарное гравитационное поле получаем путем сложения гравитационных полей от каждой поверхности:

$$A(u) = \sum_{l=1}^{L} f \Delta\sigma_l \frac{1}{4\pi} \iint_D \left\{ \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u_l^2(x,y)]^{1/2}} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_l^2]^{1/2}} \right\} = \Delta g(x', y'). \tag{5}$$

По предположению о локальности изменения гравитационного поля предложен покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта:

$$u_l^{k+1} = u_l^k - \gamma \frac{1}{\varphi_l + \bar{\alpha}} \Lambda [A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta) + \alpha (u_l^k - u_l^0)], \tag{6}$$

где l — номер границы раздела, $l = 1, .., L$, Λ — диагональная матрица, состоящая из весовых множителей (Акимова, Мисилов, 2013),

$$\varphi_l = \left[f \Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x', y', x, y, u_l^k(x, y)) dx' dy' \right] \times \left[f \Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u_l^k(x, y)) dx dy \right],$$

где $K'_u(x', y', x, y, u_l^k(x, y))$ — функция ядра, транспонированного к ядру $K'_u(x, y,\, x', y', u^k(x, y))$. Величина φ_l зависит от u_l^k.

Перепишем в дискретной форме

$$u_{l,i}^{k+1} = u_{l,i}^{k} - \gamma \frac{1}{\varphi_{l,i} + \bar{\alpha}} w_{l,i} \left[\{A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta)\}_i + \alpha(u_{l,i}^k - u_{l,i}^0) \right], \qquad (7)$$

где $w_{l,i}$ — i-й весовой множитель, зависящий от l-й границы раздела,

$$\varphi_{l,i} = \left[f \Delta\sigma \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} K'_u(x'_k, y'_m, \{x, y\}_i, u_{l,i}^k) \Delta x' \Delta y' \right]$$
$$\times \left[f \Delta\sigma \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} K'_u(x_k, y_m, \{x', y'\}_i, u_l^k(x_k, y_m)) \Delta x \Delta y \right].$$

Уравнение гравиметрии в декартовой системе координат с осью z, направленной вниз

$$A(u) = \gamma\Delta\sigma\Big\{ \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H^2]^{1/2}}dx'dy' - \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{1/2}}dx'dy' \Big\} = \Delta g(x,y),$$

Уравнение магнитометрии имеет вид

$$A(u) = \Delta J\Big\{ \iint_D \frac{H}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H^2]^{3/2}}dx'dy' - \iint_D \frac{u(x',y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{3/2}}dx'dy' \Big\} = \Delta G(x,y),$$

Задача 1

Точное решение уравнения гравиметрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x,y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6-(y/10-2.5)^6} - 3e^{-(x/10-5.5)^6-(y/10-4.5)^6},$$

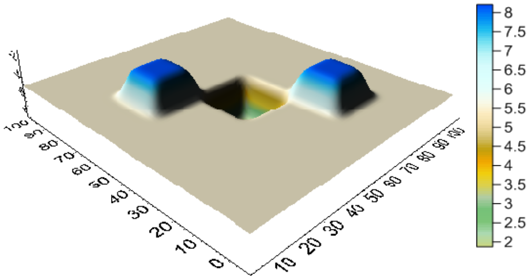


Рис.2. Модельная поверхность: $D = \{0 \le x \le 100,\ 0 \le y \le 110\}$,
$H = 5,\ \Delta x = \Delta y = 1,\ \Delta\sigma = 0.21$г/см^3.

Число обусловленности $\mu(A'_n(u_n^k)) \approx 4.8 * 10^8$, спектр неотрицательный, собственные значения различны. Правило выхода из процесса итераций каждого из методов

$$\frac{\|\hat{u}_n - \tilde{u}_n\|_{R^n}}{\|\tilde{u}_n\|_{R^n}} \leq 10^{-2},$$

где $\hat{u}_n$ — точное решение, а $\tilde{u}_n$ — восстановленное каждым из четырех итерационных методов. Таким образом, точность численного решения, полученного методом Ньютона, α-процессамии их модифицированными аналогами, гарантированно не превышала $\varepsilon = 10^{-2}$.

При значениях параметров $\bar{\alpha} = \alpha = 10^{-3}$, $\gamma = 1$ представлены результаты численных расчетов, где

$$\Delta = \frac{\|A_n(\tilde{u}_n) + \alpha(\tilde{u}_n - u^0) - f_n\|_{R^n}}{\|f_n\|_{R^n}},$$

N — число итераций в процессе для достижения точности 10^{-2}, T — время реализации метода. В позициях для Δ, N, T верхняя строка соответствует основным процессам, а нижняя — их модифицированным вариантам.

Табл.1. Относительные нормы невязок, итерации и времена счета в задаче гравиметрии

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
Δ	0.0048	0.0020	0.0024	0.0023
	0.0094	0.0019	0.0019	0.0021
N	17	21	20	16
	22	23	23	16
T (сек)	20	11	14	16
	25	8	8	8

Точное решение уравнения магнитометрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x,y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6-(y/10-2.5)^6} - 3^{-(x/10-5.5)^6-(y/10-4.5)^6},$$

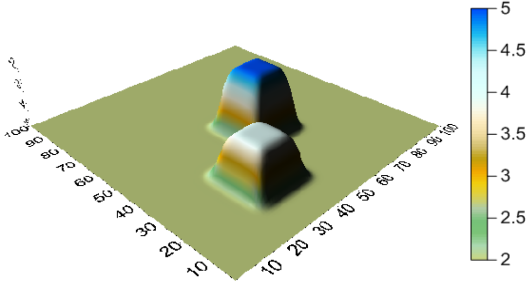


Рис.3. Модельная поверхность: $D = \{0 \le x \le 100,\ 0 \le y \le 100\}$, $H = 5,\ \Delta x = \Delta y = 1,\ \Delta J = 0.4.$

Число обусловленности $\mu(A'_n(u_n^k)) \approx 1.8 \cdot 10^7$, спектр неотрицательный, состоящий из различных собственных значений, $\bar{\alpha} = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-4}$, $\gamma = 1$, $\varepsilon < 10^{-2}$

Табл.2. Относительные нормы невязок, итерации и времена счета в задаче магнитометрии

Метод	N	Δ	T_1	T_8	S_8	E_8
Метод Ньютона	3	0.05	9 мин	1 мин 30 сек	6	0.75
Модифицированный метод Ньютона	6	0.051	15 мин 30 сек	2 мин	7.75	0.96
Метод Ньютона с ленточной матрицей	5	0.05	9 мин 36 сек	1 мин 12 сек	8	1

Применение инструментов параллельного программирования и оптимизация вычислений

- на основе методов и алгоритмов разработаны параллельные алгоритмы для вычислений на многоядерных процессорах и графических ускорителей;
- используются инструменты: OpenMP, CUDA;
- библиотеки Intel MKL, Cublas;
- при больших размерах сеток вычисления производились «на лету»: необходимый элемент матрицы вычисляется в момент умножения его на элемент вектора.

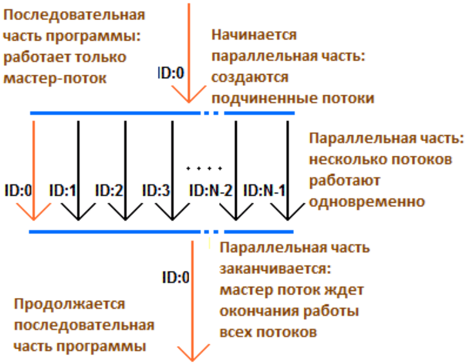
Ускорение, эффективность

$$S_m = \frac{T_1}{T_m},$$

$$E_m = \frac{S_m}{m},$$

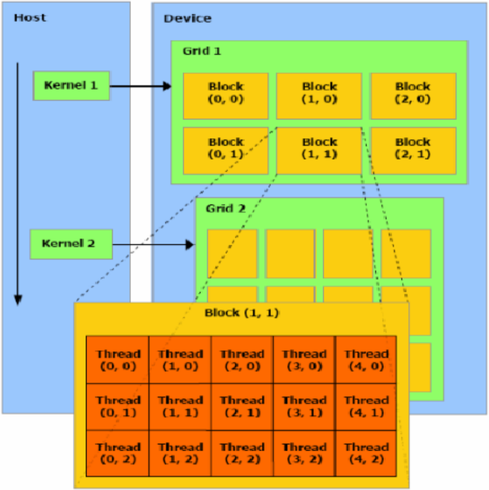
где T_1 — время выполнения последовательного алгоритма на одном процессорном ядре, T_m — время выполнения параллельного алгоритма на m $(m > 1)$ ядрах процессора.

Технология OpenMP



Принцип работы потоков в OpenMP.

Технология CUDA



Иерархия компонентов вычислительной сетки GPU.

Задача 2

Рассматривается эксперимент по восстановлению границы раздела в двухслойной среде модифицированным методом Ньютона и его оптимизированным вариантом (с использованием ленточной матрицы производной оператора).

Точное решение уравнения гравиметрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x,y) = 5 + 4e^{-(x/10-3.5)^4-(y/10-2.5)^4} - 3e^{-(x/10-5.5)^4-(y/10-4.5)^4},$$

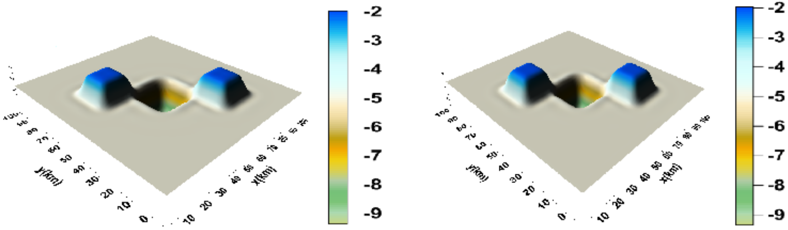


Рис.4. Модельная поверхность (слева) и приближенное решение (справа):

$$D = \{0 \le x \le 270,\ 0 \le y \le 300\},$$

$$H = 5,\ \Delta x = \Delta y = 0.3,\ \Delta\sigma = 0.2\ \text{г/см}^3.$$

В таблице приведены результаты расчетов, критерий останова итераций

$$\delta = \frac{\|u_e - u_a\|}{\|u_e\|} \leq 0.025,$$

параметр регуляризации $\alpha = \bar{\alpha} = 10^{-3}$, полуширина ленты матрицы производной $\beta = 1/4$ для задачи гравиметрии. Демпфирующий коэффициент $\gamma = 1.2$ для покомпонетного метода Ньютона,
$\Delta = \|A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta\|/\|f_\delta\|$

Табл.3. Сравнение методов решения задачи гравиметрии

Метод	N	Δ	T_1	T_8	S_8	E_8
Метод Ньютона	3	0.041	22 мин	2 мин 40 сек	8	1
Модифицированный метод Ньютона	5	0.042	32 мин	4 мин	8	1
Метод Ньютона с ленточной матрицей	4	0.041	24 мин	3 мин	8	1
Покомпонентный метод Ньютона	6	0.041	17 мин	2 мин	8	1

Точное решение уравнения магнитометрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x,y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6-(y/10-2.5)^6} - 3e^{-(x/10-5.5)^6-(y/10-4.5)^6},$$

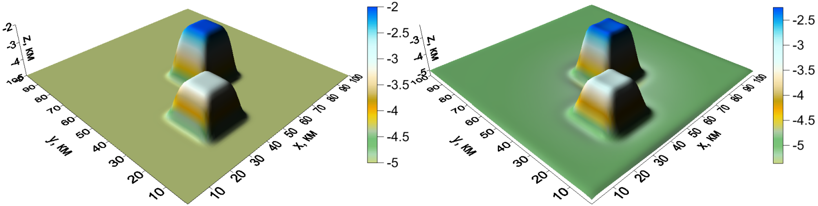


Рис.5. Модельная поверхность (слева) и приближенное решение (справа):

$$D = \{0 \le x \le 300,\ 0 \le y \le 300\},$$

$$H = 5,\ \Delta x = \Delta y = 0.3,\ \Delta J = 0.4 \text{ А/м}.$$

В таблице приведены результаты расчетов, критерий останова итераций

$$\delta = \frac{\|u_e - u_a\|}{\|u_e\|} \leq 0.025,$$

параметр регуляризации $\alpha = \bar{\alpha} = 10^{-3}$, полуширина ленты матрицы производной $\beta = 1/5$ для задачи магнитометрии.

Табл.4. Решение обратной задачи магнитометрии в двухслойной среде

Метод	N	Δ	T_1	T_8	S_8	E_8
Метод Ньютона	3	0.05	9 мин	1 мин 30 сек	6	0.75
Модифицированный метод Ньютона	6	0.051	15 мин 30 сек	2 мин	7.75	0.96
Метод Ньютона с ленточной матрицей	5	0.05	9 мин 36 сек	1 мин 12 сек	8	1

Вывод. Исключение из матрицы производной оператора $A'(u^k)$ элементов, далеко отстоящих от диагонали, почти не влияет на сходимость метода Ньютона.

Задача 3

Рассматривается эксперимент по восстановлению границы раздела в двухслойной среде модифицированным методом Ньютона и покомпонентным методом типа Ньютона.

Точное решение уравнения гравиметрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x,y) = 5 - 3.21e^{-(x/10.13-6.62)^6-(y/9.59-2.93)^6} - 2.78e^{-(x/9.89-4.12)^6-(y/8.63-7.435)^6} + 3.19e^{-(x/9.89-4.82)^6-(y/8.72-4.335)^6},$$

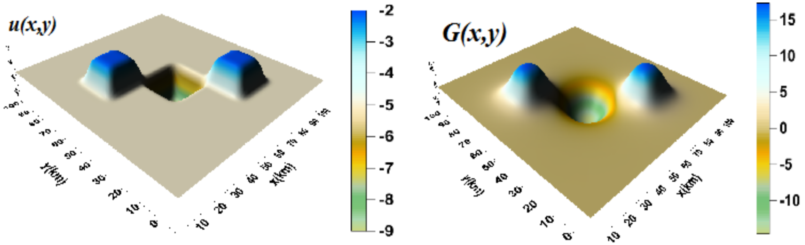


Рис.6. Модельная поверхность (слева) и синтетическое гравитационное поле (справа): $D = \{0 \le x \le 300,\ 0 \le y \le 330\}$,

$H = 5,\ \Delta x = \Delta y = 0.33,\ \Delta\sigma = 0.21$ г/см^3

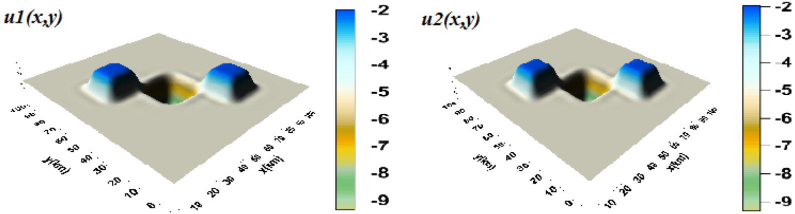


Рис.7. Решение, полученное модиф. методом Ньютона (слева) и решение, полученное покомпонентным методом (справа).

1. Параметр регуляризации взят $\alpha = \bar{\alpha} = 10^{-3}$,
2. Демпфирующий параметр $\gamma = 1.8$ для покомпонентного метода Ньютона.

Критерий останова итераций

$$\varepsilon = \frac{\|u_e - u_a\|}{\|u_e\|} = 10^{-2}.$$

Табл.5. Сравнение ММН и ПМН

Показатели	Модифицированный метод Ньютона	Покомпонентный метод типа Ньютона
Число итераций, N	16	21
Отн. норма невязки, Δ	0.002	0.002
Время, T_1 на сетке 300×330	21 мин	11 мин
Время, T_1 на сетке 512×512	61 мин	19 мин
Время, T_8 на сетке 512×512	7 мин 50 сек	2 мин 33 сек
Ускорение, S_8	7.82	7.45
Эффективность, E_8	0.97	0.93

Замечание. Размерность матрицы производной в модифицированном методе Ньютона $A'(u^0)$ при сетке 300×330 составляет 99000×99000.

Задача 4

Рассматривается эксперимент по восстановлению границ раздела сред в многослойной среде (4 слоя с разной плотностью) в задаче гравиметрии на основе квазиреального аномального поля методами: регуляризованный Левенберга-Марквардта и покомпонентный типа Левенберга-Марквардта.

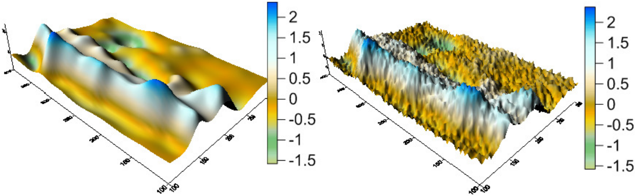
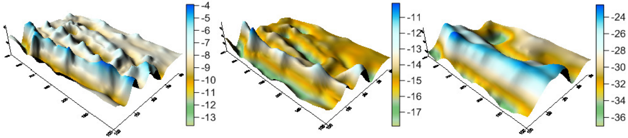


Рис. 10. Суммарное гравитационное поле и поле с шумом 22% (мГал), $\mu = 1$, $\sigma = 1.15$.



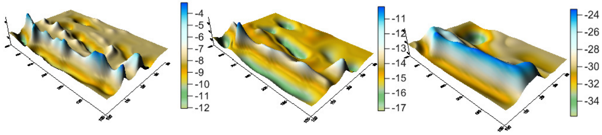


Рис. 12. Границы, восстановленные РМЛМ $\tilde{u}_0(x, y)$, $\tilde{u}_1(x, y)$, $\tilde{u}_2(x, y)$.

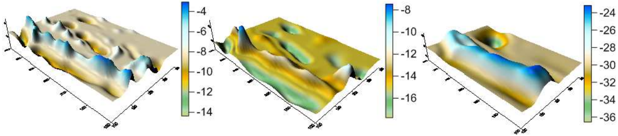


Рис. 13. Границы, восстановленные РПМЛМ $\hat{u}_0(x, y)$, $\hat{u}_1(x, y)$, $\hat{u}_2(x, y)$.

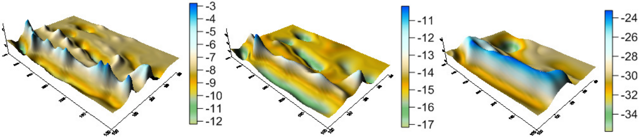


Рис. 14. Границы, восстановленные РМЛМ для данных с шумом $\tilde{u}_0(x,y)$, $\tilde{u}_1(x,y)$, $\tilde{u}_2(x,y)$.

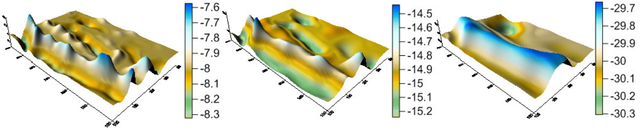


Рис. 15. Границы, восстановленные РПМЛМ для данных с шумом $\hat{u}_0(x,y)$, $\hat{u}_1(x,y)$, $\hat{u}_2(x,y)$.

- сетки 100×100 и 1000×1000,
- параметр регуляризации $\alpha = 10^{-3}$ и демпфирующий множитель $\gamma = 1$,
- $\varepsilon = \frac{\|A(u_a)+\alpha u_a - f_\delta\|}{\|f_\delta\|}| = 0.1$,
- относительные погрешности $\delta_i = \|u_a - u_e\|/\|u_e\|$,
- T_1 — Intel Xeon (1 ядро),
- T_2 — Intel Xeon (8 ядер),
- T_3 — NVIDIA Tesla M2050.

Табл.7. Результаты расчетов в задаче гравиметрии в многослойной среде

Метод	N	δ_1	δ_2	δ_3	Сетка $10^2 \times 10^2$			Сетка $10^3 \times 10^3$		
					T_1	T_8	T_n	T_1	T_8	T_n
ЛМ	60	0.052	0.026	0.051	4 м. 6 с.	1 м. 15 с.	22 с.	11 ч. 40 м.	1 ч. 25 м.	35 м.
ПЛМ	20	0.051	0.035	0.060	33 с.	16 с.	3 с.	1 ч. 12 м.	10 м.	3 м.

Параметр шага $\gamma = 1$, параметры регуляризации $\alpha = 0.1$, $\bar{\alpha} = 1$, критерий останова $\Delta = \|A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta\| / \|f_\delta\| < 0.15$.

Табл.8. Относительные ошибки для задачи с шумом

Метод	N	δ_1	δ_2	δ_3
ЛМ	24	0.048	0.035	0.059
ПЛМ	8	0.048	0.040	0.068

Апробация работы

Основные результаты по материалам диссертационной работы докладывались на конференциях:

1. XIV и XV Уральская молодежная научная школа по геофизике (Пермь, 2013 г., Екатеринбург 2014 г.);

2. Международная коференция "Параллельные вычислительные технологии" (Ростов-на-Дону, 2014 г., Екатеринбург, 2015 г., Казань, 2017 г.);

3. Международная конференция «Геоинформатика: теоретические и прикладные аспекты» (Киев 2014, 2015, 2016 г.)

4. Международная конференция "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 2014 г.)

5. Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, 2015 г.)

Публикации в изданиях перечня ВАК

1. Васин В.В., Акимова Е.Н., Миниахметова А.Ф. Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник ЮУрГУ. Т.6 В.3 (2013), С. 26–37.
2. Акимова, Е. Н., Мисилов В. Е., Скурыдина А. Ф. Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на МВС // Вестник УГАТУ. 2014. Т.18, № 4 (65). С. 206-215.
3. Akimova E., Miniakhmetova A., Martyshko M. Optimization and parallelization of Newton type methods for solving structurial gravimetry and magnetometry inverse problems // EAGE Geoinformatics 2014 – 13th Intern. Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kiev, Ukraine. 12–15 May 2014
4. Акимова, Е. Н., Мисилов, В. Е., Скурыдина, А. Ф., Третьяков, А. И. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” // Вычислительные методы и программирование, 2015. Т. 16, 155–164.

Публикации в изданиях перечня ВАК

5. Akimova E., Skurydina A. A componentwise Newton type method for solving the structural inverse gravity problem // EAGE Geoinformatics 2015 – 14th Intern. Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kiev, Ukraine. 11–14 May 2015.
6. Akimova E., Skurydina A. On solving the three-dimensional structural gravity problem for the case of a multilayered medium by the componentwize Levenberg-Marquardt method // EAGE Geoinformatics 2016 – 15th Intern. Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kiev, Ukraine. 10–13 May 2016.
7. Васин В.В., Скурыдина, А.Ф. Двухэтапный метод построения регуляризующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН Т.23 В.1 (2017), С. 57–74.

Другие публикации

8. Мисилов В.Е., Миниахметова А.Ф., Дергачев Е.А. Решение обратной задачи гравиметрии итерационными методами на суперкомпьютере «Уран» // Труды XIV Уральской молодежной научной школы по геофизике. Пермь: ГИ УрО РАН. 2013. С. 187–190
9. Миниахметова А.Ф. Сравнение быстрых методов решения структурной обратной задачи магнитометрии // Труды XV Уральской молодежной научной школы по геофизике. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2014. С. 160–162
10. E. N. Akimova, A. F. Miniakhmetova, V. E. Misilov. Fast stable parallel algorithms for solving gravimetry and magnetometry inverse problems // The International conference "Advanced mathematics, computations and applications – 2014". Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia. June 8–11, 2014.
11. Акимова Е.Н., Мисилов В.Е., Миниахметова А.Ф. Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на

Другие публикации

11. В.В. Васин, А.Ф. Скурыдина. Регуляризованные модифицированные процессы градиентного типа для нелинейных обратных задач // Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам. Москва, 19 – 21 ноября 2015 г.
12. Акимова, Е. Н., Мисилов, В. Е., Скурыдина, А. Ф., Третьяков, А. И. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере "Уран" // Труды межд. конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2015)», Екатеринбург, 31 мар. – 2 апр. 2015 г. Челябинск: ЮУрГУ. 2015. С. 8–18.

Спасибо за внимание!