Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского

На правах рукописи

Подпись

Скурыдина Алия Фиргатовна

Регуляризованные алгоритмы на основе схем Ньютона, Левенберга – Марквардта и нелинейных аналогов α-процессов для решения нелинейных операторных уравнений

01.01.07 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2018

Работа выполнена в *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.*

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук, доцент Акимова Елена Николаевна*

Официальные оппоненты: *Танана Виталий Павлович доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры Системного программирования ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (г. Челябинск),*

Ягола Анатолий Григорьевич доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики физического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»,

Ведущая организация: *ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

Защита состоится «____» ____________ 2018 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д 004.006.04* при *ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН* по адресу: *620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16, актовый зал*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2018 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, с.н.с. *Подпись* *Скарин В. Д.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Построение итеративно регуляризованных алгоритмов востребовано для решения широкого круга некорректных прикладных задач. Например, решение структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии сводится к решению нелинейных интегральных уравнений первого рода. После дискретизации операторное уравнение сводится к системе нелинейных уравнений с большим числом неизвестных, поэтому необходимы параллельные программы для многопроцессорных и многоядерных вычислительных систем для уменьшения времени счета.

Цели и задачи диссертационной работы: построение новых устойчивых и экономичных по времени и памяти алгоритмов на основе методов ньютоновского типа и α-процессов для решения нелинейных операторных уравнений и исследование их сходимости; реализация параллельных алгоритмов в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах (видеокартах) для вычислений на сетках большого размера.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми и имеют теоретическую и практическую ценность.

1. В рамках двухэтапного метода построения регуляризующего алгоритма доказаны теоремы о сходимости и сильной фейеровости метода Ньютона и нелинейных аналогов α-процессов: метода минимальной ошибки (ММО), метода наискорейшего спуска (МНС) и метода минимальных невязок (ММН) и их модифицированных вариантов. Рассмотрены два случая: оператор уравнения является монотонным, либо оператор является немонотонным, конечномерным и его производная имеет неотрицательный спектр.

2. Для решения нелинейных интегральных уравнений обратных задач гравиметрии предложены новые экономичные по вычислениям и памяти покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта с весовыми множителями. Предложена вычислительная оптимизация методов ньютонов-

ского типа в виде перехода от плотно заполненной матрицы производной оператора к ленточной при решении задчи гравиметрии и магнитометрии.

3. Разработан комплекс параллельных программ для решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности, реализованный на многоядерных процессорах и на графических процессорах (видеокартах) для методов типа Ньютона и Левенберга – Марквардта и покомпонентных методов типа Ньютона и Левенберга – Марквардта.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для решения нелинейных операторных уравнений. В частности, на практике можно применять для обратных задач теории потенциала, для различных обратных задач фильтрации.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты, полученные в работе над диссертацией, полностью подтверждаются численными экспериментами. Основные результаты по материалам диссертационной работы докладывались на конференциях:

1. XIV и XV Уральская молодежная научная школа по геофизике (Пермь, 2013 г., Екатеринбург 2014 г.);

2. Международная коференция «Параллельные вычислительные технологии» (Ростов-на-Дону, 2014 г., Екатеринбург, 2015 г., Казань, 2017 г.);

3. Международная конференция «Геоинформатика: теоретические и прикладные аспекты» (Киев 2014, 2015, 2016 г.)

4. Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2014 г.)

5. Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, 2015 г.)

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 13 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых научных изданиях [1—5], 3 проиндексированных Scopus [6—8], 3 статей в сборниках трудов конференций и 2 тезисов докладов.

Личный вклад автора. Подготовка к публикации работ проводилась совместно с соавторами. Все результаты, представленные в данной работе, получены автором лично. Защищаемые положения отражают вклад автора в опубликованных работах. В работе [4] автору диссертации принадлежат построение методов для решения нелинейных уравнений на основе α-процессов, доказательства сходимости и сильной фейеровости регуляризованного метода Ньютона, сильной фейеровости нелинейных α-процессов для монотонного оператора и оператора, производная которого имеет неотрицательный спектр, результаты численного моделирования. В работах [1; 2; 9; 10] автором проведено численное моделирование для методов ньютоновского типа с разработкой параллельных программ для метода Ньютона и его модифицированного варианта. В статьях [11], [3] автор реализовал параллельный алгоритм линеаризованного метода минимальной ошибки. В работе [6] автором предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона и поставлен вычислительный эксперимент, разработаны параллельная программы. В работах [7; 8; 12] автором предложены методы покомпонентного типа Ньютона и Левенберга – Марквардта, проведены численные эксперименты, написаны параллельные программы для задач с большими сетками. В работе [13] автору принадлежат доказательства сходимости модифицированных методов на основе α-процессов в случае монотонного оператора задачи, а также результаты расчетов на ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 19 страниц, включая 18 рисунков, 14 таблиц. Библиография включает 121 наименований, в том числе 13 публикаций автора.

Содержание работы

Во Введении сформулированы актуальность и цель диссертационной работы, научная новизна исследований, дан краткий обзор публикаций по теме исследования, показана практическая значимость результатов, представлены выносимые на защиту основные результаты.

В первой главе В первой главе рассматриваются методы решения некорректных задач с монотонным оператором. Доказываются теоремы сходимости регуляризованного метода Ньютона. Построены методы минимальной ошибки, наискорейшего спуска и минимальных невязок решения нелинейных уравнений и доказывается их сходимость.

Рассматривается нелинейное уравнение I рода

$$A(u) = f \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве с монотонным непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором A, для которого обратные операторы $A'(u)^{-1}$, A^{-1} разрывны в окрестности решения, что влечет некорректность задачи (1). Для построения регуляризующего алгоритма используется двухэтапный метод, в котором на первом этапе используется регуляризация по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \tag{2}$$

где $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, u_0 — некоторое приближение к решению; а на втором этапе для аппроксимации регуляризованного решения u_α применяется либо регуляризованный метод Ньютона (РМН), предложенный ранее в [1] ($\gamma = 1, \bar{\alpha} = \alpha = \alpha_k$):

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \tag{3}$$

либо нелинейные аналоги α-процессов

$$u^{k+1} = u^k - \gamma\frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle}{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle} S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k) \tag{4}$$

при $\varkappa = -1, 0, 1$. Здесь $\alpha > 0, \bar{\alpha} > 0$ — параметры регуляризации, $\gamma > 0$ — демпфирующий множитель, $S_\alpha(u) = A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta$.

Так как оператор A — монотонный, то его производная $A'(u^k)$ — неотрицательно определенный оператор. Операторы $(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}$ существуют и ограничены, следовательно, процессы (3), (4) определены корректно.

Пусть имеются следующие условия

$$\|A(u) - A(v)\| \le N_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U, \tag{5}$$

$$\|A'(u) - A'(v)\| \le N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U. \tag{6}$$

и известна оценка для нормы производной в точке u^0 (начальном приближении), т.е.

$$\|A'(u^0)\| \le N_0 \le N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \le r. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть A — монотонный оператор, для которого выполнены условия (5), (6) для $u, v \in S_r(u_\alpha)$, $r \le \alpha/N_2$, $0 < \alpha \le \bar{\alpha}$, $u^0 \in S_r(u_\alpha)$.*

Тогда для процесса (3) с $\gamma = 1$ имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения u_α регуляризованного уравнения (2)

$$\|u^k - u_\alpha\| \le q^k r, \quad q = (1 - \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}}). \tag{8}$$

Усиленное свойство Фейера [?] для оператора T означает, что для некоторого $\nu > 0$ выполнено соотношение

$$\|T(u) - z\|^2 \le \|u - z\|^2 - \nu \|u - T(u)\|^2, \tag{9}$$

где $z \in Fix(T)$ — множество неподвижных точек оператора T. Это влечет для итерационных точек u^k, порождаемых процессом $u^{k+1} = T(u^k)$, выполнение неравенства

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \le \|u^k - z\|^2 - \nu \|u^k - u^{k+1}\|^2. \tag{10}$$

Важным свойством фейеровских операторов является замкнутость относительно операций произведения и взятия выпуклой суммы. Итерационные процессы

1. А. Б. Бакушинский. Регуляризующий алгоритм на основе метода Ньютона – Канторовича для решения вариационных неравенств // ЖВМиМФ, 16:6 (1976). С. 1397–1604.

2. В. В. Васин, Е. Н. Акимова, А. Ф. Миниахметова. Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник ЮУрГУ, 6:3 (2013). С. 26–37.

* В. В. Васин, И. И. Еремин. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 2005.

с фейеровским оператором шага и общим множеством неподвижных точек позволяют строить гибридные методы, а также учитывать априорные ограничения на решение в виде систем неравенств.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5)–(7), $A'(u^0)$ — *самосопряженный оператор,* $\|u_\alpha - u^0\| \leqslant r$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geqslant 4N_1$, $r \leqslant \alpha/8N_2$. *Тогда при* $\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2}$ *оператор шага* T *процесса* (3) *при*

$$\nu = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2\gamma(N_1+\alpha)^2} - 1$$

удовлетворяет неравенству (9), *для итераций* u^k *справедливо соотношение* (10) *и имеет место сходимость* $\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$. *Если параметр* γ *принимает значение* $\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2}$, *то справедлива оценка*

$$\|u^k - u_\alpha\| \leqslant q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2}}.$$

Далее приводится оценка скорости сходимости нелинейных α-процессов.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (5)–(7), $A'(u^0)$ — *самосопряженный оператор, для ММО* $\alpha \leqslant \bar{\alpha}$, $r \leqslant \alpha/8N_2$, $\bar{\alpha} \geqslant N_0$. *Тогда при*

$$\gamma_\varkappa < \frac{2}{\mu_\varkappa} \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$$

для последовательности $\{u^k\}$, *порождаемой* α-*процессом при соответствующем* $\varkappa$, *имеет место сходимость* $\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$, *а при* $\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$ *справедлива оценка* $\|u^k - u_\alpha\| \leqslant q_\varkappa^k r$, *где*

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^2}{(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^4}{(N_1+\bar{\alpha})^4}}.$$

Во второй главе обоснована сходимость итераций РМН, ММО, МНС, ММН в конечномерном случае без требования монотонности оператора A исходного уравнения. Приведены доказательства сходимости метода Ньютона, нелинейных α-процессов и их модифицированных аналогов, представлены результаты численных расчетов.

Пусть собственные значения λ_i матрицы $A'(u)$ $n \times n$ не кратны, различны и неотрицательны. Тогда при $\bar{\alpha} > 0$ матрица имеет представление $A'(u) + \bar{\alpha} I = S(u) \Lambda S^{-1}(u)$ и справедлива оценка

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha} I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{min}} \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}}, \qquad (11)$$

где столбцы матрицы $S(u)$ составлены из собственных векторов матрицы $A'(u) + \bar{\alpha} I$, Λ — диагональная матрица, ее элементы — собственные значения матрицы $A'(u) + \bar{\alpha} I$, $\mu(S(u)) = \|S(u)\| \|S^{-1}(u)\|$.

Рассмотрим теперь вариант теорем 2, 3, когда оператор $A\colon R^n \to R^n$ и производная которого имеет неотрицательный спектр. Имея оценку (11), доказывается теорема о сходимости регуляризованного метода Ньютона

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (5)–(7), *а также:* $\sup\{\mu(S(u)) : u \in S_r(u_\alpha)\} \leqslant \bar{S} < \infty$, $A'(u^0)$ *— симметричная матрица,* $0 < \alpha \leqslant \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geqslant 4N_0$, $r \leqslant \alpha / 8 N_2 \bar{S}$.

Тогда для метода (3) *справедливо заключение теоремы (1.3), где*

$$\gamma < \frac{\alpha \bar{\alpha}}{2(N_1 + \alpha)^2 \bar{S}^2}, \quad \gamma_{opt} = \frac{\alpha \bar{\alpha}}{4(N_1 + \alpha)^2 \bar{S}^2},$$

$$\|u^k - u_\alpha\| \leqslant q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2 \bar{S}^2}}.$$

Аналогично имеем теорему о сходимости ММО, МНС и ММН.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (*). Тогда при* $\gamma_\varkappa < 2/\mu_\varkappa$, $\varkappa = -1, 0, 1$, *с соответствующими* μ_k, *последовательности* u^k, *порождаемые процессом* (4) *при* $\varkappa = -1, 0, 1$, *сходятся к* u_α, *т.е.,* $\lim_{k \to \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$, *а при* $\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$ *справедлива оценка* $\|u^{k+1} - u_\alpha\| \leqslant q_\varkappa^k r$, *где*

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{64 \bar{S}^2 (N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{36 (N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^6}{36(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^6}}.$$

Для модифицированных ММО, МНС и ММН, где производная $A'(u)$ вычисляется в фиксированной точке u^0, также обосновывается сходимость.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (5)–(7) $A'(u^0)$ — *самосопряженный оператор, спектр которого состоит из неотрицательных различных собственных значений,* $0 \leqslant \alpha \leqslant \bar{\alpha}, \quad r = \alpha/6N_2, \quad \bar{\alpha} \geqslant N_0$. *Тогда при* $\gamma_\varkappa < 2/\mu_\varkappa \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$ *для последовательности* $\{u^k\}$*, порождаемой модифицированным* α*-процесс* *при соответствующем* $\varkappa$*, имеет место сходимость* $\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$*, а при* $\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$ *справедлива оценка* $\|u^k - u_\alpha\| \leqslant q_\varkappa^k r$*, где* $q^\varkappa = \sqrt{1 - \frac{9\alpha^2}{64(N_1+\alpha)^2}}$.

В работе [?, теорема 5.1.] приводится оптимальная по порядку оценка погрешности двухэтапного метода с монотонным оператором:

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - u_{\alpha(\delta)}^{\delta}\| \le 4\sqrt{k_0\delta},$$

где приближение $u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}$ зависимосит от δ, α, $u_{\alpha(\delta)}^{\delta}$ — решение уравнения (2), $k_0 = (1+N_2\|v\|/2)\|v\|$ ($u^0 - \hat{u} = A'(\hat{u})v$ — истокообразная представимость решения). В конечномерном случае для оператора $A'(u)$ с положительным спектром можно установить оценку для невязки — основной характеристики точности метода при решении задачи с реальными данными [?].

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta}) - f_\delta\| \le 2m\delta^p,$$

где для $\alpha(\delta)$ ограничена величина $\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta} - u^0\| \le m < \infty$, $\alpha(\delta) = \delta^p$.

Уравнение обратной структурной задачи магнитометрии

$$[A(u)]\,(x,y) = \frac{\mu_0}{4\pi}\Delta J \Bigg\{ \iint\limits_D \frac{H}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H^2]^{3/2}} dx'dy' - \iint\limits_D \frac{u(x',y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{3/2}} dx'dy' \Bigg\} = B_z(x,y,0),$$

В. В. Васин, А. Ф. Скурыдина. Двухэтапный метод построения регуляризующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН Т.23 В.1 (2017), С. 57–74.

где $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$Гн/м — магнитная постоянная, ΔJ — скачок z-компоненты вектора намагниченности, $z = H$ — асимптотическая плоскость, $B_z(x, y, 0)$ — функция аномального поля, $z = u(x, y)$ — искомая функция.

Решена модельная задача магнитометрии РМН, ММО, МНС, ММН и их модифицированными вариантами. Обсуждаются результаты экспериментов.

В третьей главе предложены покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта, а также вычислительная оптимизация методов типа Ньютона.

Параллельные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах (видеокартах) для вычислений на сетках большого размера. Приводятся результаты расчетов модельных задач на многоядерных процессорах и графических ускорителях.

Рассмотрим уравнение гравиметрии в декартовой системе координат с осью z, направленной вниз

$$A(u) = f\Delta\sigma\Bigg\{ \iint\limits_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{1/2}} dx'dy' \\ - \iint\limits_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x',y')]^{1/2}} dx'dy' \Bigg\} = \Delta g(x, y, 0), \tag{12}$$

где f — гравитационная постоянная, равная $6.67 \cdot 10^{-8}$ см^3/г$\cdot c^2$, $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ — скачок плотности на поверхности раздела сред $u(x, y)$, $\Delta g(x, y, 0)$ — аномальное гравитационное поле

Итерации в методе Ньютона строятся по схеме

$$A'(u^k)(\Delta u^k) = -\big[A(u^k) - f\big],$$

где $A(u) = \int_a^b \int_c^d K(x, y, x', y', u^k(x, y))dxdy$ — интегральный оператор задачи гравиметрии, $\Delta u^k = u^{k+1} - u^k$. Т.е., для задачи гравиметрии

$$f\Delta\sigma \int\limits_a^b \int\limits_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y))\Delta u^k dxdy = -\big[A(u(x', y')) - f(x', y')\big].$$

Замечание 1. *На значение гравитационного поля в точке* (x', y') *наибольшее влияние оказывает глубина залегания поверхности в точке* (x', y').

Тогда

$$f\Delta\sigma(\Delta u^k(x', y'))\int\limits_a^b\int\limits_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y))dxdy = A(u(x', y')) - f(x', y').$$

Регуляризованный метод Ньютона:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta).$$

Покомпонентный метод типа Ньютона имеет вид:

$$u^{k+1}(x', y') = u^k(x', y') - \gamma\frac{1}{\Psi(x', y')}\big([A(u^k)](x', y') - f(x', y')\big),$$

где

$$\Psi(x', y') = f\Delta\sigma\int\limits_a^b\int\limits_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y))dxdy.$$

Регуляризованный покомпонентный метод типа Ньютона имеет вид:

$$u^{k+1}(x', y') = u^k(x', y') - \gamma\frac{1}{\Psi(x', y') + \bar{\alpha}}([A(u^k)](x', y') +$$

$$+\alpha(u^k(x', y') - u^0(x', y')) - f_\delta(x', y')),$$

где γ — демпфирующий множитель, $\alpha, \bar{\alpha}$ — положительные параметры регуляризации. Вычислительная сложность покомпонентного метода типа Ньютона составляет $O(n)$, в отличие от метода Ньютона, где сложность алгоритма оценивается как $O(n^2)$.

Прозводная оператора A в точке $u^0(x, y)$ определяется формулой:

- в задаче гравиметрии

$$[A'(u^0)]h = \iint\limits_D \frac{u^0(x', y')h(x', y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{3/2}}dx'dy',$$

Akimova E., Skurydina A. A componentwise Newton type method for solving the structural inverse gravity problem // EAGE Geoinformatics 2015

- в задаче магнитометрии

$$[A'(u^0)]h = \iint\limits_D \frac{(x-x')^2+(y-y')^2-2(u^0(x',y'))^2}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(u^0(x',y'))^2]^{5/2}} h(x',y')dx'dy'.$$

После дискретизации интегрального оператора и его производной, получаем матрицу $A'_n(u^0)$, которая имеет диагональное преобладание. При расчетах предложено использовать ленту матрицы $A'_n(u^k)$.

Суммарное гравитационное поле получаем путем сложения гравитационных полей от каждой поверхности:

$$\begin{aligned} A(u) = \sum_{l=1}^{L} f\Delta\sigma_l \frac{1}{4\pi} \times \iint\limits_D \Bigg\{ & \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u_l^2(x,y)]^{1/2}} \\ & - \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H_l^2]^{1/2}} \Bigg\} = \Delta g(x',y'), \end{aligned} \tag{13}$$

где L — число границ раздела, $f = 6.67 \cdot 10^{-8}$ см^3/г$\cdot c^2$, $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ — скачок плотности на поверхности раздела сред $u(x,y)$, $\Delta g(x,y,0)$ — аномальное гравитационное поле.

Регуляризованный метод Левенберга – Марквардта имеет вид

$$u^{k+1} = u^k - \gamma[A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha I]^{-1}[A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta)]$$

По аналогии с ПМН, имеем покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта:

$$u_l^{k+1} = u_l^k - \gamma \frac{1}{\varphi_l + \bar{\alpha}} \Lambda[A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta)],$$

где l — номер границы раздела, $l = 1,..,L$, Λ — весовой оператор,

$$\begin{aligned} \varphi_l = & \left[f\Delta\sigma \int\limits_a^b \int\limits_c^d K'_u(x',y',x,y,u_l^k(x',y'))dydx \right] \\ & \times \left[f\Delta\sigma \int\limits_a^b \int\limits_c^d K'_u(x,y,x',y',u_l^k(x,y))dxdy \right]. \end{aligned}$$

где $K'_u(x', y', x, y, u_l^k(x', y'))$ — ядро интегрального оператора. В дискретной форме

$$u_{l,i}^{k+1} = u_{l,i}^k - \gamma \frac{1}{\varphi_{l,i} + \bar{\alpha}} w_{l,i} \left[\{A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta)\}_i \right],$$

где $w_{l,i}$ — i-й весовой множитель, зависящий от l-й границы раздела,

$$\varphi_{l,i} = \left[f \Delta\sigma \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} K'_u(x'_k, y'_m, \{x, y\}_i, u_{l,i}^k) \Delta x' \Delta y' \right]$$
$$\times \left[f \Delta\sigma \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} K'_u(x_k, y_m, \{x', y'\}_i, u_l^k(x_k, y_m)) \Delta x \Delta y \right].$$

По сравнению с методом Левенберга – Марквадта, где вычислительная сложность алгоритмов достигает $O(n^3)$ в силу умножения матриц $A'(u^k)^T A'(u^k)$ и обращения матрицы $A'(u^k)^T A'(u^k) + \alpha I$, вычислительная сложность покомпонентного метода типа Левенберга – Марквадта составляет $O(n^2)$.

На основе покомпонентных методов и методов ньютоновского типа реализованы параллельные алгоритмы для вычислений на многоядерных и графических ускорителях NVIDIA при помощи технологий OpenMP и CUDA. Решены модельные задачи гравиметрии и магнитометрии. Результаты показали, что предлагаемые автором методы и алгоритмы являются экономичными по затратам оперативной памяти и по количеству вычислительных операций.

В Заключении приводятся основные результаты.

Основные результаты диссертации

1. Для нелинейного уравнения с монотонным оператором доказаны теоремы о сходимости регуляризованного метода Ньютона. Построены нелиней-

---

Skurydina A. F. Regularized Levenberg — Marquardt Type Method Applied to the Structural Inverse Gravity Problem in a Multilayer Medium and its Parallel Realization // Bulletin of South Ural State University. 2017. V.6, N.3. pp. 5–15

Е. Н. Акимова, В. Е. Мисилов, А. Ф. Скурыдина, А. И. Третьяков. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” // Вычислительные методы и программирование, 2015. Т. 16, 155–164.

ные аналоги α-процессов: регуляризованные методы градиентного типа для решения нелинейного уравнения с монотонным оператором: метод минимальной ошибки, метод наискорейшего спуска, метод минимальных невязок. Доказаны теоремы сходимости и сильная фейеровость итерационных процессов. Для задачи с немонотонным оператором, производная которого имеет неотрицательный спектр, доказаны теоремы сходимости для метода Ньютона, нелинейных α-процессов и их модифицированных вариантов.

2. Для решения нелинейных интегральных уравнений обратных задач гравиметрии предложены экономичные покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта. Предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона и его модифицированного варианта при решении задач с матрицей производной с диагональным преобладанием.

3. Разработан комплекс параллельных программ для многоядерных и графических процессоров (видеокарт) решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности методами ньютоновского типа и покомпонентными методами.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в изданиях из перечня ВАК, SCOPUS

1. *Васин В. В.*, *Акимова Е. Н.*, *Миниахметова А. Ф.* Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2013. — Т. 6, № 3. — С. 26—37.

2. *Акимова Е. Н.*, *Мисилов В. Е.*, *Скурыдина А. Ф.* Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник УГАТУ. — 2014. — Т. 18, № 4. — С. 19—29.

3. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере «Уран» / Е. Н. Акимова, В. Е. Мисилов, А. Ф. Скурыдина, А. И. Третьяков // Вычислительные методы и программирование. — 2015. — Т. 16, № 1. — С. 155—164.

4. *Васин В. В.*, *Скурыдина А. Ф.* Двухэтапный метод регуляризации для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 1. — С. 57—74.

5. *Skurydina A. F.* Regularized Levenberg — Marquardt Type Method Applied to the Structural Inverse Gravity Problem in a Multilayer Medium and its Parallel Realization // Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. — 2017. — Т. 6, № 3. — С. 5—15. — URL: http://dx.doi.org/10.14529/cmse170301.

6. *Акимова Е. Н.*, *Скурыдина А. Ф.*, *Мартышко М. П.* Оптимизация и распараллеливание методов типа Ньютона для решения структурныхобратных задач гравиметрии и магнитометрии // XIIIth EAGE International

Conference - Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. — Kiev, Ukraine, 2014.

7. *Akimova E.*, *Skurydina A.* A Componentwise Newton Type Method for Solving the Structural Inverse Gravity Problem // XIVth EAGE International Conference - Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. — Kiev, Ukraine, 2015.

8. *Akimova E.*, *Skurydina A.* On Solving the Three-Dimensional Structural Gravity Problem for the Case of a Multilayered Medium by the Componentwise Levenberg–M Method // XVth EAGE International Conference - Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. — Kiev, Ukraine, 2016.

Другие публикации

9. *Мисилов В. Е.*, *Миниахметова А. Ф.*, *Дергачев Е. А.* Решение обратной задачи гравиметрии итерационными методами на суперкомпьютере «Уран» // Труды XIV Уральской молодежной научной школы по геофизике. — 2013.

10. *Акимова Е. Н.*, *Мисилов В. Е.*, *Миниахметова А. Ф.* Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2014)». — 2014.

11. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере «Уран» / Е. Н. Акимова, В. Е. Мисилов, А. Ф. Скурыдина, Т. А // Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2015)». — 2015.

12. *Akimova E. N.*, *Miniakhmetova A. F.*, *Misilov V. E.* Fast stable parallel algorithms for solving gravimetry and magnetometry inverse problems // Internation

conference "Advanced Mathematics, Computations Applications – 2014". — 2014.

13. *Васин В. В.*, *Скурыдина А. Ф.* Регуляризованные модифицированные процессы градиентного типа для нелинейных обратных задач // Тезисы докладов международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам. — 2015.

Научное издание

Скурыдина Алия Фиргатовна

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Регуляризованные алгоритмы на основе схем Ньютона, Левенберга – Марквардта и нелинейных аналогов α-процессов для решения нелинейных операторных уравнений

Подписано в печать 25.01.2011. Формат 60×90 1/16. Тираж 100 экз. Заказ 256.

Санкт-Петербургская издательская фирма «Наука» РАН. 199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 1, http://www.naukaspb.spb.ru