

На правах рукописи

Скурыдина Алия Фиргатовна

**Регуляризирующие алгоритмы на основе методов
ньютоновского типа и нелинейных аналогов
 α -процессов**

01.01.07 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2018

Работа выполнена в *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук»*.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент Акимова Елена Николаевна.

Официальные оппоненты: Танана Виталий Павлович
доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник кафедры Системного программирования ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (г. Челябинск),
Ягола Анатолий Григорьевич
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры математики физического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Защита состоится «_____» _____ 2018 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.04 на базе ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН» по адресу: 620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН»,

http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_004.006.04/Pages/default.aspx.

Автореферат разослан «_____» июля 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, с.н.с.

В. Д. Скарин

1. Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Теория некорректно поставленных задач и методы их решения относятся к важнейшим направлениям исследования современной вычислительной математики, что обусловлено потребностями различных областей естествознания, техники и медицины, где эти проблемы возникают в форме обратных задач.

Основы теории некорректно поставленных задач были заложены в 50–60 годы прошлого века в работах А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева и дальнейшее ее развитие было продолжено их последователями и учениками. В работах А. Б. Бакушинского¹ сформулирован принцип итеративной регуляризации при построении процессов решения нелинейных некорректных задач.

Устойчивые методы решения линейных и нелинейных некорректных задач исследовались в работах А. Л. Агеева, В. В. Васина, А. В. Гончарского, С. И. Кабанихина, М. Ю. Кокурина, А. С. Леонова, В. А. Морозова, В. П. Тананы, А. Г. Яголы, Н. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, B. Kaltenbacher, O. Scherzer.

В Екатеринбурге в ИГФ УрО РАН разработана оригинальная методика решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии с использованием идей регуляризации, построены алгоритмы на основе метода локальных поправок (П. С. Мартышко², И. Л. Пруткин, Н. В. Федорова, А. Л. Рублев и др.).

В ИММ УрО РАН разработаны и исследованы параллельные алгоритмы на основе регуляризованных методов Ньютона, Левенберга – Марквардта и процессов градиентного типа (В. В. Васин³, Е. Н. Акимова⁴, Г. Я. Пересторонина, Л. Ю. Тимерханова, В. Е. Мисилов).

¹ A. Bakushinsky, A. Goncharsky. Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1994. 258 p.

² П. С. Мартышко, И. В. Ладовский, Н. В. Федорова, Д. Д. Бызов, А. Г. Цидаев. Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН, 2016. 94 с.

³ В. В. Васин, Г. Я. Пересторонина, И. Л. Пруткин, Л. Ю. Тимерханова. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойной среды // Мат. мод. 2003. Т. 15, №2. С. 69–76.

⁴ Е. Н. Акимова. Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на MVS-1000 // Вестник ННГУ. 2009. №4. С. 181–189.

При решении обратных задач гравиметрии и магнитометрии на больших сетках используются параллельные алгоритмы и многопроцессорные системы.

Целью диссертационной работы является построение новых устойчивых и экономичных алгоритмов на основе методов ньютоновского типа и аналогов α -процессов для решения нелинейных операторных уравнений и исследование их сходимости; реализация алгоритмов в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах для вычислений на сетках большого размера.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе использовался аппарат функционального анализа, численных методов, теории некорретных задач. Для реализации алгоритмов на многоядерных и графических процессорах использовались технологии параллельного программирования OpenMP и CUDA.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми и имеют теоретическую и практическую ценность.

1. В рамках двухэтапного метода построения регуляризующего алгоритма доказаны теоремы о сходимости и сильной фейеровости метода Ньютона и нелинейных аналогов α -процессов: метода минимальной ошибки (ММО), метода наискорейшего спуска (МНС) и метода минимальных невязок (ММН) при аппроксимации регуляризованного решения. Рассмотрены два случая: оператор уравнения является монотонным, либо оператор действует в конечномерном пространстве, является немонотонным, но его производная имеет неотрицательный спектр.

2. Для решения нелинейных интегральных уравнений обратных задач гравиметрии предложены новые экономичные по вычислениям и памяти покомпонентные методы типа Ньютона (ПМН) и типа Левенберга – Марквардта. Предложена вычислительная оптимизация методов ньютоновского типа для задач с матрицей производной оператора, имеющей диагональное преобладание.

3. Разработан комплекс параллельных программ для решения обратных

задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности, реализованный на многоядерных процессорах и графических процессорах для методов типа Ньютона и Левенберга – Марквардта и их покомпонентных вариантов.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для решения нелинейных операторных уравнений. Например, для обратных задач теории потенциала, в частности, обратных задач гравиметрии и магнитометрии, обратных задач фильтрации.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты, полученные в работе над диссертацией, полностью подтверждаются строгими математическими доказательствами и проведенными численными экспериментами. Основные результаты по материалам диссертационной работы докладывались на всероссийских и международных конференциях и семинарах: XIV и XV Уральской молодежной научной школе по геофизике (Пермь, 2013 г., Екатеринбург 2014 г.); международной конференции «Параллельные вычислительные технологии» (Ростов-на-Дону, 2014 г., Екатеринбург, 2015 г., Казань, 2017 г.); международной конференции «Геоинформатика: теоретические и прикладные аспекты» (Киев 2014, 2015, 2016 г.); международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2014 г.); международном научном семинаре по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, 2015 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах, из них 5 — в журналах, рекомендованных ВАК [1–5], 3 — проиндексированы Scopus [6–8], 5 — в сборниках трудов и тезисов конференций [9–13].

Личный вклад автора. Все результаты, представленные в данной работе, получены автором лично. Содержание диссертации и основные результаты отражают вклад автора в опубликованных работах. В работе [4] автору диссертации принадлежат обоснование регуляризованных методов решения нелинейных уравнений на основе аналогов α -процессов и метода Ньютона: сходимость методов к регуляризованному решению, оценка погрешности. В работах [1; 2;

9; 10] проведено численное моделирование для методов ньютоновского типа с разработкой параллельных программ. В статьях [3; 11] автор реализовал параллельный алгоритм линеаризованного метода минимальной ошибки с весовыми множителями. В работе [6] предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона и решены модельные задачи, разработаны параллельные программы. В работах [7; 8; 12] автором предложены методы покомпонентного типа Ньютона и Левенберга – Марквардта, решены модельные задачи, созданы параллельные программы для задач с большими сетками. В работе [13] автором получены результаты расчетов на ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 121 страница, включая 23 рисунка, 10 таблиц. Библиография включает 133 наименования, в том числе 13 публикаций автора.

Исследования по теме диссертации выполнены в период с 2013 по 2017 годы в отделе некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, ведущему научному сотруднику ИММ УрО РАН Елене Николаевне Акимовой.

Автор выражает искреннюю признательность за постановку ряда проблем и внимание к работе члену-корреспонденту РАН, главному научному сотруднику ИММ УрО РАН Владимиру Васильевичу Васину.

2. Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследований и выполнен краткий обзор публикаций по теме диссертации, сформулирована цель работы, показаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе рассматриваются методы решения некорректных задач с монотонным оператором. Обоснован двухэтапный метод на основе регуляризованного метода Ньютона. Для решения нелинейных уравнений построены аналоги методов минимальной ошибки, наискорейшего спуска и минимальных невязок, доказывается их сходимость к регуляризованному решению.

Рассматривается нелинейное уравнение I рода

$$A(u) = f \quad (1)$$

в гильбертовом пространстве H с монотонным непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором A , для которого обратные операторы $A'(u)^{-1}$, A^{-1} разрывны в окрестности решения, что влечет некорректность задачи (1). Используется двухэтапный метод, в котором на первом этапе используется регуляризация по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \quad (2)$$

где $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, u^0 — некоторое приближение к решению; а на втором этапе для аппроксимации регуляризованного решения u_α применяется либо регуляризованный метод Ньютона (РМН) (А. Б. Бакушинский⁵ ($\gamma = 1$, $\bar{\alpha} = \alpha = \alpha_k$)):

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \quad (3)$$

либо нелинейные аналоги α -процессов

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^\varkappa S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k), \quad (4)$$

где $S_\alpha(u^k) = A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta$. Здесь $\bar{\alpha} \geq \alpha > 0$ — параметры регуляризации, $\gamma > 0$ — параметр регулирования шага. При $\varkappa = -1, 0$ получаем методы минимальной ошибки (ММО) и наискорейшего спуска (МНС), а при $\varkappa = 1$ и самосопряженности оператора $A'(u^k)$ — метод минимальных невязок

⁵ А. Б. Бакушинский. Регуляризирующий алгоритм на основе метода Ньютона – Канторовича для решения вариационных неравенств // ЖВМиМФ. 1976. Т. 16, №6. С. 1397–1604.

(ММН). В случае, когда оператор $A'(u^k)$ не является самосопряженным, метод минимальных невязок имеет вид:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)S_\alpha(u^k)\|^2} S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k). \quad (5)$$

Далее в тексте диссертации обозначения при $\varkappa = 1$ относятся к (5).

Итеративно регуляризованный метод Ньютона ($\gamma = 1$, $\bar{\alpha} = \alpha = \alpha_k$) был предложен и исследован ранее в работах А. Б. Бакушинского, где априори выбирается последовательность $\alpha_{k(\delta)}$ и при более строгих условиях доказывается сходимость итераций к решению уравнения (1) без оценки погрешности регуляризованного решения. Итерационные α -процессы были предложены в работах М. А. Красносельского⁶ и др. для решения линейного уравнения с ограниченным самосопряженным положительно определенным оператором. Нелинейные аналоги модифицированных α -процессов для решения некорректных задач были предложены и исследованы в работе В. В. Васина⁷.

Так как оператор A — монотонный, то его производная $A'(u^k)$ — неотрицательно определенный оператор. Операторы $(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}$ существуют и ограничены, следовательно, процессы (3)–(5) определены корректно.

В данной главе в предположении, что производная $A'(u)$ удовлетворяет условию Липшица, устанавливается линейная скорость сходимости методов (3)–(5) и сильная фейеровость итераций. При истокообразной представимости решения правило останова итераций $k(\delta)$ определяется из равенства оценок погрешности для итераций и регуляризованного решения u_α .

Пусть имеются следующие условия:

$$\forall u, v \in S(u^0; R) \quad \|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad (6)$$

где шар $S(u^0; R)$ содержит решения уравнений (1), (2), и известна оценка нормы

⁶ М. А. Красносельский, Г. М. Забрейко, П. П. Забрейко и др. Приближенное решение операторных уравнений // М.: Наука, 1969. 420 с.

⁷ В. В. Васин. Регуляризованные модифицированные α -процессы для нелинейных уравнений с монотонным оператором // ДАН. 2016. Т.94, №1. С.13–16.

производной в начальном приближении u^0

$$\|A'(u^0)\| \leq N_1. \quad (7)$$

Теорема 1 (Теорема 1.1). Пусть A — монотонный оператор, для которого выполнены условия (6), $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\|u^0 - u_\alpha\| \leq r$, $r \leq \alpha/N_2$.

Тогда для процесса (3) с $\gamma = 1$ имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения u_α регуляризованного уравнения (2)

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \left(1 - \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}}\right). \quad (8)$$

Усиленное свойство Фейера⁸ для оператора $T: H \rightarrow H$ означает, что для некоторого $\nu > 0$ выполнено соотношение

$$\forall u \in H \quad \forall z \in \text{Fix}(T) \quad \|T(u) - z\|^2 \leq \|u - z\|^2 - \nu \|u - T(u)\|^2, \quad (9)$$

где $\text{Fix}(T)$ — множество неподвижных точек оператора T . Это влечет для итерационных точек u^k , порождаемых процессом $u^{k+1} = T(u^k)$, выполнение неравенства для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $z \in \text{Fix}(T)$

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \leq \|u^k - z\|^2 - \nu \|u^k - u^{k+1}\|^2. \quad (10)$$

Множество фейеровских операторов является замкнутым относительно операций произведения и взятия выпуклой суммы, что позволяет строить гибридные итерационные процессы, а также учитывать априорные ограничения на решение в виде систем неравенств.

Теорема 2 (Теорема 1.3). Пусть выполнены условия (6)–(7), $A'(u^0)$ — самосопряженный оператор, $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geq 4N_1$, $\|u_\alpha - u^0\| \leq r$, $r \leq \alpha/8N_2$. Тогда при $\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1 + \alpha)^2}$ оператор шага T процесса (3) при

$$\nu = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2\gamma(N_1 + \alpha)^2} - 1$$

⁸ Vasin V.V., Eremin I.I. Operators and Iterative Processes of Fejer Type. Theory and Applications. Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2009. 155 p.

удовлетворяет неравенству (9), для итераций u^k справедливо соотношение (10) и имеет место сходимость $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$. Если параметр γ принимает значение $\gamma^{\text{opt}} = \frac{\alpha \bar{\alpha}}{4(N_1 + \alpha)^2}$, то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}.$$

Для ММО, МНС и ММН справедлива

Теорема 3 (Теорема 1.5). Пусть выполнены условия (6)–(7), $A'(u^0)$ — самосопряженный оператор, $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geq N_1$, для ММО $\|u_\alpha - u^0\| \leq r$, $r \leq \alpha/8N_2$. Тогда при $\gamma < 2/\mu_\varkappa$ ($\varkappa = -1, 0, 1$), где μ_\varkappa вычисляется для каждого из трех методов, для последовательности $\{u^k\}$, порождаемой α -процессом, имеет место сходимость $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$, а при $\gamma^{\text{opt}} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$ справедлива оценка $\|u^k - u_\alpha\| \leq q_\varkappa^k r$, где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^4}{(N_1 + \bar{\alpha})^4}}.$$

Во второй главе обоснована сходимость к регуляризованному решению итераций РМН, ММО, МНС, ММН в конечномерном случае без требования монотонности оператора A исходного уравнения. Представлены результаты численных экспериментов.

Пусть собственные значения λ_i матрицы $A'(u)$ $n \times n$ различны между собой и неотрицательны. Тогда при $\bar{\alpha} > 0$ матрица имеет представление $A'(u) + \bar{\alpha}I = S(u)\Lambda S^{-1}(u)$ и справедлива оценка

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{\min}} \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}}, \quad (11)$$

где столбцы матрицы $S(u)$ составлены из собственных векторов матрицы $A'(u) + \bar{\alpha}I$, Λ — диагональная матрица, ее элементы — собственные значения матрицы $A'(u) + \bar{\alpha}I$, $\mu(S(u)) = \|S(u)\| \cdot \|S^{-1}(u)\|$.

Рассмотрим теперь вариант теорем 2, 3, когда оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и его производная имеет неотрицательный спектр. С оценкой (11) доказывается теорема для регуляризованного метода Ньютона

Теорема 4 (Теорема 2.1). Пусть выполнены условия (6)–(7), а также:
 $\sup\{\mu(S(u)) : u \in S(u_\alpha; r)\} \leq \bar{S} < \infty$, $A'(u^0)$ — симметричная неотрицательно определенная матрица, $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geq 4N_1$, $\|u_\alpha - u^0\| \leq r$, $r \leq \alpha/8N_2\bar{S}$.
Тогда для метода (3) имеет место сходимость $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$ при

$$\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}, \quad \gamma^{\text{opt}} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2},$$

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}}.$$

Аналогичное утверждение имеет место для ММО, МНС и ММН.

Теорема 5 (Теорема 2.3). Пусть выполнены условия теоремы 4 (теоремы 2.1.). Тогда при $\gamma < 2/\mu_\varkappa$, $\varkappa = -1, 0, 1$, с соответствующими μ_\varkappa для каждого процесса, последовательности u^k , порождаемые процессами (4)–(5) при $\varkappa = -1, 0, 1$, сходятся к u_α , т.е., $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$, а при $\gamma^{\text{opt}} = 1/\mu_\varkappa$ справедлива оценка $\|u^k - u_\alpha\| \leq q_\varkappa^k r$, где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{64\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^2}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^6}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^6}}.$$

Как следствие из теоремы 5, в диссертации обосновывается сходимость к u_α для модифицированных ММО, МНС и ММН, где производная $A'(u)$ вычисляется в начальном приближении u^0 .

Замечание. Предложенный подход к получению оценок скорости сходимости итерационных процессов полностью переносится на случай, когда спектр матрицы $A'(u^k)$, состоящий из различных вещественных значений, содержит

набор малых по абсолютной величине отрицательных собственных значений. Пусть λ_1 — отрицательное собственное значение с наименьшим модулем $|\lambda_1|$ и $\bar{\alpha} - |\lambda_1| = \bar{\alpha}_1 < \alpha^*$. Тогда оценка (11) трансформируется в неравенство

$$\|(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u^k))}{\bar{\alpha}^*} \leq \frac{\bar{S}}{\bar{\alpha}^*}.$$

Все теоремы остаются справедливыми при замене $\bar{\alpha}$ на $\bar{\alpha}^*$.

Приводится оптимальная по порядку оценка погрешности двухэтапного метода с монотонным оператором на классе истокообразно представимых решений с правилом выбора итераций $k(\delta)$:

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta, k(\delta)} - \hat{u}\| \leq 4\sqrt{k_0\delta} \quad \text{при} \quad k(\delta) = \ln(2\sqrt{k_0\delta}/r)/\ln q(\delta),$$

где $u_{\alpha(\delta)}^{\delta, k(\delta)}$ — k -е приближение, \hat{u} — решение уравнения (1), $k_0 = (1 + N_2\|v\|/2)\|v\|$ ($u^0 - \hat{u} = A'(\hat{u})v$ — условие истокообразной представимости решения). Для получения оценки используется результаты статьи⁹ и монографии¹⁰ для регуляризованного решения. В конечномерном случае для оператора $A'(u)$ с положительным спектром установлена оценка для невязки — основной характеристики точности метода при решении задачи с реальными данными.

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta, k(\delta)}) - f_\delta\| \leq 2m\delta^p \quad \text{при} \quad k(\delta) = \ln(m\delta^p/N_1)/\ln q(\delta),$$

где для $\alpha(\delta)$ ограничена величина $\|u_{\alpha(\delta)}^\delta - u^0\| \leq m < \infty$, $\alpha(\delta) = \delta^p$.

Методы РМН, ММО, МНС, ММН и их модифицированные варианты использованы при решении обратной структурной задачи магнитометрии

$$[A(u)](x', y') = \frac{\mu_0}{4\pi} \Delta J \left\{ \iint_D \frac{H}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + H^2]^{3/2}} dx dy - \iint_D \frac{u(x, y)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + u^2(x, y)]^{3/2}} dx dy \right\} = B_z(x', y', 0),$$

⁹ U. Tautenhahn. On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill-posed problems // Inverse Problem. 2002. Vol. 91, №1. P. 191–207.

¹⁰ В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

где $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, ΔJ — скачок z -компоненты вектора намагниченности, $z = H$ — асимптотическая плоскость, $B_z(x', y', 0)$ — функция, описывающая аномальное поле, $D = \{c \leq x' \leq d, a \leq y' \leq b\}$, $z = u(x, y)$ — искомая функция.

Вычислены число обусловленности $\text{cond}(A'_n(u_n^k)) \approx 1.8 \cdot 10^7$ и спектр матрицы $A'_n(u_n^k)$. Установлено, что спектр неотрицательный и состоит из различных собственных значений, $\bar{\alpha} = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-4}$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = \|u^k - \hat{u}\|/\|\hat{u}\| < 10^{-2}$. Итерационные методы достигли требуемой точности ε за 4–5 итераций, у модифицированных методов меньше время счета.

В третьей главе предложены покомпонентные методы типа Ньютона и Левенберга – Марквардта для решения обратных задач гравиметрии и вычислительная оптимизация метода Ньютона. Разработанные на основе методов параллельные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ для многоядерных и графических процессоров.

1. Задача гравиметрии о нахождении поверхности раздела в декартовой системе координат с осью z , направленной вниз, имеет вид

$$[A(u)](x', y') = g\Delta\sigma \left\{ \iint_D \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + H^2]^{1/2}} dx dy - \iint_D \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + u^2(x, y)]^{1/2}} dx dy \right\} = \Delta f(x', y', 0), \quad (12)$$

где $g = 6.67 \cdot 10^{-8}$ см³/г·с² — гравитационная постоянная, $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ — скачок плотности на поверхности раздела сред $u(x, y)$, $D = \{c \leq x \leq d, a \leq y \leq b\}$, $\Delta f(x', y', 0)$ — аномальное гравитационное поле.

Итерации в методе Ньютона строятся по схеме

$$A'(u^k)(\Delta u^k) = -[A(u^k) - f],$$

где $A(u) = g\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy$ — интегральный оператор зада-

чи гравиметрии, $\Delta u^k = u^{k+1} - u^k$. Для задачи гравиметрии

$$g\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) \Delta u^k(x, y) dx dy = -[A(u)](x', y') - f(x', y'). \quad (13)$$

Предполагая, что правая часть зависит только от $\Delta u^k(x', y')$, аппроксимируем значения функции u в точках (x, y) ее значением в точке (x', y') , т.е. в (13) заменим $\Delta u^k(x, y)$ на $\Delta u^k(x', y') = \text{const}$ относительно переменных интегрирования. Перейдем к приближенному соотношению

$$g\Delta\sigma(\Delta u^k(x', y')) \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy \approx -[A(u)](x', y') - f(x', y').$$

Покомпонентный метод типа Ньютона (ПМН) имеет вид¹¹:

$$u^{k+1}(x', y') = u^k(x', y') - \gamma \frac{1}{\Psi(x', y')} [[A(u^k)](x', y') - f(x', y')],$$

где $\Psi(x', y') = g\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy$.

Регуляризованный покомпонентный метод типа Ньютона имеет вид:

$$u^{k+1}(x', y') = u^k(x', y') - \gamma \frac{1}{\Psi(x', y') + \bar{\alpha}} [[A(u^k)](x', y') + \alpha(u^k(x', y') - u^0(x', y')) - f_\delta(x', y')],$$

где γ — демпфирующий множитель, $\alpha > 0$, $\bar{\alpha} > 0$ — параметры регуляризации.

В дискретной записи итерационный процесс запишется в виде

$$u_{m,l}^{k+1} = u_{m,l}^k - \frac{1}{\psi_{m,l}^k + \bar{\alpha}} ([A_n(u^k)]_{m,l} + \alpha(u^k - u^0) - f_{m,l}), \quad 1 \leq m \leq M, \quad 1 \leq l \leq N,$$

где $\psi_{m,l}^k = g\Delta\sigma \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Delta x \Delta y \frac{u_{ij}}{[(x_k - x'_j)^2 + (y_l - y'_i)^2 + (u_{ij})^2]^{3/2}}$, $n = M \cdot N$. Здесь $\psi_{m,l}^k$ — сумма элементов $(m \times M + l)$ -й строки матрицы производной $A'_n(u_n^k)$.

¹¹ Akimova E., Skurydina A. A componentwise Newton type method for solving the structural inverse gravity problem // EAGE Geoinformatics 2015. 5 p.

Вычислительная сложность ПМН для решения системы n уравнений без учета сложности алгоритма вычисления $A_n(u_n^k)$ составляет $O(n)$, а в РМН сложность алгоритма составляет $O(n^2)$ при обращении $A'_n(u_n^k)$ итерационными методами.

2. Предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона. Производная оператора A в точке u^k определяется формулами в задаче гравиметрии

$$[A'(u^k)]h = g\Delta\sigma \iint_D \frac{u^k(x, y)h(x, y)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (u^k(x, y))^2]^{3/2}} dx dy,$$

и в задаче магнитометрии

$$[A'(u^k)]h = \frac{\mu_0}{4\pi} \Delta J \iint_D \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 - 2(u^k(x, y))^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (u^k(x, y))^2]^{5/2}} h(x, y) dx dy.$$

После дискретизации получаем $n \times n$ матрицу $A'_n(u^k)$ с диагональным преобладанием¹². Без существенной потери точности в итерационном методе (3) учитываются только значения элементов a_{ij} из $A'_n(u^k)$, где $|i - j| \leq n \cdot \beta$, β определяется из входных данных.

3. Задача гравиметрии о нахождении нескольких поверхностей раздела имеет вид (суммарное поле получено сложением полей от каждой поверхности)

$$A(u) = \sum_{l=1}^L g\Delta\sigma_l \frac{1}{4\pi} \times \iint_D \left\{ \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + u_l^2(x, y)]^{1/2}} - \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + H_l^2]^{1/2}} \right\} dx dy = \Delta f(x', y', 0), \quad (14)$$

где L — число границ раздела, $g = 6.67 \cdot 10^{-8}$ см³/г·с², $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ — скачок плотности на поверхности раздела сред $u(x, y)$, $\Delta f(x', y', 0)$ — аномальное гравитационное поле.

Регуляризованный метод Левенберга – Марквардта имеет вид

$$u^{k+1} = u^k - \gamma[A'(u^k)^T A'(u^k) + \alpha I]^{-1}[A'(u^k)^T (A(u^k) - f_\delta)].$$

¹² Акимова Е. Н., Минахметова А. Ф., Мартышко М. П. Оптимизация и распараллеливание методов типа Ньютона для решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии // EAGE Geoinformatics 2014. 5 с.

По аналогии с ПМН, получим покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта¹³:

$$u_l^{k+1}(x', y') = u_l^k(x', y') - \gamma \frac{1}{\varphi_l(x', y') + \bar{\alpha}} \{ \Lambda [A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta)] \}(x', y'),$$

где l — номер границы раздела, $l = 1, \dots, L$; Λ — диагональный весовой оператор, $\varphi_l(x', y') = \left[g \Delta \sigma_l \int_a^b \int_c^d K'_u(x', y', x, y, u_l^k(x', y')) dx dy \right] \times \left[g \Delta \sigma_l \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u_l^k(x, y)) dx dy \right]$, где $K'_u(x', y', x, y, u_l^k(x', y'))$ — ядро интегрального оператора. В дискретной форме

$$u_{l,i}^{k+1} = u_{l,i}^k - \gamma \frac{1}{\varphi_{l,i} + \bar{\alpha}} w_{l,i} [A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta)]_i,$$

где $w_{l,i}$ — i -й весовой множитель, зависящий от l -й границы раздела,

$$\varphi_{l,i} = \left[g \Delta \sigma_l \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M K'_u(x'_k, y'_m, x_k, y_m, u_l^k(x'_k, y'_m)) \Delta x \Delta y \right] \times \left[g \Delta \sigma_l \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M K'_u(x'_k, y'_m, x_k, y_m, u_l^k(x_k, y_m)) \Delta x \Delta y \right].$$

Весовые множители выбираются по формулам из работы [3].

По сравнению с методом Левенберга – Марквардта, где вычислительная сложность алгоритмов достигает $O(n^3)$ в силу умножения матриц $[A'(u^k)^T A'(u^k)]$, вычислительная сложность покомпонентного метода составляет $O(n^2)$.

4. Параллельные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах с помощью технологий OpenMP и CUDA для решения задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большого размера. Результаты решения модельных структурных обратных задач гравиметрии на сетках размера 512×512 и 1000×1000 продемонстрировали, что покомпонентный метод типа Ньютона работает в три раза быстрее метода Ньютона, а покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта — в десять раз быстрее метода Левенберга – Марквардта. Время решения задачи на GPU для

¹³ Skurydina A. F. Regularized Levenberg – Marquardt Type Method Applied to the Structural Inverse Gravity Problem in a Multilayer Medium and its Parallel Realization // Bulletin of South Ural State University. 2017. V.6, N.3. pp. 5–15

модели двухслойной среды методом ПМН уменьшилось в 100 раз, а время решения методом ПМЛ для модели многослойной среды уменьшилось в 22 раза.

Предлагаемые автором покомпонентные методы являются экономичными по затратам оперативной памяти и по количеству вычислительных операций.

3. Основные результаты диссертации

1. Для уравнения с монотонным оператором в рамках двухэтапного метода доказаны теоремы сходимости и сильной фейеровости метода Ньютона и нелинейных аналогов α -процессов при аппроксимации регуляризованного решения. В конечномерном случае результаты обобщены для уравнений с немонотонным оператором, производная которого имеет неотрицательный спектр.

2. Для решения нелинейных интегральных уравнений обратных задач гравиметрии предложены экономичные покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта. Предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона для обратных задач гравиметрии и магнитометрии, где матрица производной имеет диагональное преобладание.

3. Разработан комплекс параллельных программ для многоядерных и графических процессоров (видеокарт) решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности методами ньютоновского типа и покомпонентными методами.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня ВАК

1. *Васин В. В., Акимова Е. Н., Миниахметова А. Ф.* Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2013. — Т. 6, № 3. — С. 26—37.

2. *Акимова Е. Н., Мисилов В. Е., Скурыдина А. Ф.* Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник УГАТУ. — 2014. — Т. 18, № 4. — С. 19—29.
3. *Акимова Е. Н., Мисилов В. Е., Скурыдина А. Ф., Третьяков А. И.* Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере «Уран» // Вычислительные методы и программирование. — 2015. — Т. 16, № 1. — С. 155—164.
4. *Васин В. В., Скурыдина А. Ф.* Двухэтапный метод регуляризации для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 1. — С. 57—74.
5. *Skurydina A. F.* Regularized Levenberg — Marquardt Type Method Applied to the Structural Inverse Gravity Problem in a Multilayer Medium and its Parallel Realization // Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. — 2017. — Vol. 6, no. 3. — Pp. 5–15.

Публикации, проиндексированные в Scopus

6. *Акимова Е. Н., Миниахметова А. Ф., Мартышко М. П.* Оптимизация и распараллеливание методов типа Ньютона для решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии // XIIIth EAGE International Conference — Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. — Kiev, Ukraine, 2014. — 5 p.
7. *Akimova E., Skurydina A.* A Componentwise Newton Type Method for Solving the Structural Inverse Gravity Problem // XIVth EAGE International Conference — Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. — Kiev, Ukraine, 2015. — 5 p.

8. *Akimova E., Skurydina A.* On Solving the Three-Dimensional Structural Gravity Problem for the Case of a Multilayered Medium by the Componentwise Levenberg – Marquardt Method // XVth EAGE Intern. Conference — Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. — Kiev, Ukraine, 2016. — 5 p.

Другие публикации

9. *Мислов В. Е., Миниахметова А. Ф., Дергачев Е. А.* Решение обратной задачи гравиметрии итерационными методами на суперкомпьютере «Уран» // Труды XIV Уральской молодежной научной школы по геофизике. — 2013. — С. 187–190.
10. *Акимова Е. Н., Мислов В. Е., Миниахметова А. Ф.* Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2014)». — 2014. — С. 19–29.
11. *Акимова Е. Н., Мислов В. Е., Скурыдина А. Ф., Третьяков А.* Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере «Уран» // Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2015)». — 2015. — С. 8–18.
12. *Akimova E. N., Miniakhmetova A. F., Misilov V. E.* Fast stable parallel algorithms for solving gravimetry and magnetometry inverse problems // International conference «Advanced Mathematics, Computations & Applications – 2014». — 2014. — С. 53.
13. *Васин В. В., Скурыдина А. Ф.* Регуляризованные модифицированные процессы градиентного типа для нелинейных обратных задач // Тезисы докладов международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам. — 2015. — С. 188–189.