

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Мисилов Владимир Евгеньевич

**Итерационные методы и параллельные
алгоритмы решения нелинейных обратных
задач гравиметрии и магнитометрии**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук
Елена Николаевна Акимова

Екатеринбург – 2016

Оглавление

Основные обозначения и соглашения	5
Введение	6
Глава 1. Постановки нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела	22
1.1. Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии о восстановлении одной поверхности раздела	23
1.2. Получение уравнения структурной обратной задачи магнитометрии для случая произвольно направленной суммарной намагниченности	29
1.3. Обобщенные постановки обратных задач гравиметрии и магнитометрии для случая нескольких поверхностей	38
Глава 2. Алгоритмы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела	43
2.1. Построение быстрых алгоритмов решения задач о восстановлении одной поверхности на основе метода сопряженных градиентов	44
2.2. Построение экономичного покомпонентного градиентного метода	51
2.3. Новый алгоритм решения обратных задач о восстановлении нескольких поверхностей	55

2.3.1.	Способ дискретизации уравнений	55
2.3.2.	Градиентные методы наискорейшего спуска и минимальной ошибки с переменными весовыми множителями	58
2.3.3.	Построение быстрых модифицированных методов наискорейшего спуска и сопряженных градиентов с весовыми множителями	60
2.3.4.	Выбор весовых множителей	63

Глава 3. Построение параллельных алгоритмов, разработка комплекса программ для многоядерных процессоров, численные эксперименты	65
3.1. Разработка параллельных алгоритмов	66
3.2. Реализация алгоритмов в виде комплекса программ	68
3.2.1. Рекомендации по использованию разработанных алгоритмов	77
3.3. Решение модельных задач с анализом параллелизма	78
3.3.1. Оценки ускорения и эффективности параллельных алгоритмов	78
3.3.2. Задача 1: Восстановление одной поверхности раздела по модельным гравитационным данным	80
3.3.3. Задача 2: Восстановление модельной поверхности «параллелепипед» по магнитным данным в случае произвольно направленной суммарной намагниченности	83
3.3.4. Задача 3: Восстановление поверхности раздела сред по модельным магнитным данным в случае произвольно направленной суммарной намагниченности	86

3.3.5. Задача 4: Восстановление двух поверхностей по модельным гравитационным данным	90
3.3.6. Задача 5: Восстановление двух поверхностей по модельным магнитным данным	94
3.3.7. Задача 6: Восстановление трех поверхностей по реальным гравитационным данным	99
3.3.8. Задача 7: Восстановление трех поверхностей по реальным гравитационным данным	103
Заключение	107
Список литературы	108
Публикации автора по теме диссертации	121

Основные обозначения и соглашения

\mathbb{N} — множество натуральных чисел;

\mathbb{R} — множество вещественных чисел;

\mathbb{R}^m — евклидово пространство m -ерных векторов $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_m$;

$\|x\|$ — норма в \mathbb{R}^m : $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1..m} x_i^2 \right)^{1/2}$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^m : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1..m} x_i y_i$

$i = a..b$ — отрезок $i \in \mathbb{N}$, $a \leq i \leq b$;

$M \cdot N$ — размерность вектора длиной MN ;

$M \times N$ — размерность матрицы из M строк и N столбцов;

∂/∂ — символ дифференцирования по соответствующей переменной;

∇ — градиент скалярной функции.

Введение

Актуальность темы исследования.

Гравитационные и магнитные поля несут важную информацию о неоднородностях земной коры и верхней мантии. Темпы совершенствования вычислительной техники существенно влияют на эффективность решения геофизических задач, направленных на изучение глубинного строения Земли, поиск и разведку месторождений полезных ископаемых. Актуальной задачей является разработка и усовершенствование программных средств для оперативного сопровождения процесса полевых измерений и интерпретации данных, полученных на разных стадиях измерительных процессов.

Одними из важнейших задач являются обратные задачи гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела между слоями однородно-слоистой среды. Обе задачи являются примерами классических задач математической геофизики.

Задача гравиметрии о восстановлении одной контактной поверхности была сформулирована Б. В. Нумеровым [54]. Обратная задача магнитометрии для одной контактной поверхности была сформулирована Н. Р. Малкиным [46].

В работах А. В. Цирульского, Н. В. Федоровой и В. В. Кормильцева [70, 71] была доказана разрешимость в конечном виде обратной задачи о восстановлении контактной поверхности.

Исследованию и решению структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии посвящены работы Е. Г. Булаха и др. [16, 17], В. Б. Гласко и др. [33, 52, 68], А. С. Долгаля, П. И. Балка, и др. [13–15], А. И. Кобрунова [40], В. А. Кочнева и др. [43], П. С. Мартышко [47, 48, 50], П. А. Миченко [51], В. М. Новоселицкого [53], В. Н. Страхова и М. И. Лапиной [59],

И. Л. Пруткина и А. Saleh [57, 58, 96].

Задачи гравиметрии и магнитометрии описываются интегральными уравнениями первого рода и являются существенно некорректными задачами: имеют неединственное решение, неустойчиво зависящее от входных данных. Условия корректности были сформулированы Ж. Адамаром в начале XX века [82]. Несоблюдение этих условий означает, что малые изменения в исходных данных могут привести к значительным отклонениям найденного приближённого решения от точного. Поскольку реальные исходные данные для задач содержат ошибки измерения, то при построении алгоритмов решения необходимо использовать идеи регуляризации некорректно поставленных задач

Основы теории обратных и некорректных задач были заложены в середине XX века в СССР. Основоположниками теории некорректных задач являются А. Н. Тихонов, М. М. Лаврентьев и В. К. Иванов.

В. К. Иванов [36, 37] ввел понятие квазирешения обратной задачи и разработал основы метода квазирешений. М. М. Лаврентьев [45] предложил способы решения некорректных задач, в том числе обратных задач теории потенциала. А. Н. Тихонов [66–68] разработал наиболее общий метод решения некорректных задач — метод регуляризации.

Развитием теории некорректных задач занимались многие математики: А. Л. Агеев [1–3, 26], А. Б. Бакушинский [7–10, 12], В. В. Васин [18–21, 23, 26, 31], А. В. Гончарский [11, 12, 34, 35], А. Г. Ягола, А. С. Леонов [34, 35], В. Г. Романов и др., С. И. Кабанихин [38], В. П. Танана [31, 60–65].

После дискретизации и аппроксимации многие задачи математической физики сводятся к системам нелинейных уравнений большой размерности.

Построению численных методов решения регулярных систем нелинейных уравнений и корректных задач безусловной оптимизации нелинейных функций многих переменных посвящены работы Л. В. Канторовича [39], М. А. Красносельского, Г. М. Вайникко и др. [44], Б. Т. Поляка [56], J. C. Ortega и W. C. Rheinboldt [93], M. Powell [95], J. E. Dennis [77], C. T. Kelley [88], R. B. Schnabel и P. D. Frank [98], R. Fletcher и C. M. Reeves [79, 80], J. Nocedal, J. C. Gilbert и S. Wright [81, 92].

Одним из подходов к решению нелинейных некорректных задач является итеративная регуляризация [11, 26, 38]. Подход заключается в модификации итерационных методов решения регулярных задач и построении на их базе регуляризующих алгоритмов. Итеративная регуляризация линейных некорректных задач в настоящее время изучена достаточно полно, работ же, посвященных нелинейным задачам, существенно меньше.

В работах А. Б. Бакушинского, М. Ю. Кокурина, В. В. Васина, S. George, M. Hanke, B. Kaltenbacher, A. Neubauer, O. Scherzer были предложены и исследованы методы итеративной регуляризации на основе процессов градиентного и ньютоновского типов и их модифицированных аналогов.

В 1951 г. L. Landweber [89] построил и обосновал итерационный метод для решения линейных интегральных уравнений первого рода. Позднее M. Hanke, A. Neubauer и O. Scherzer [85, 90] применили метод Ландвебера для решения нелинейных нерегулярных уравнений, доказали теоремы о сходимости и исследовали скорость сходимости метода. A. Neubauer и O. Scherzer в работах [91, 97] исследовали сходимость методов наискорейшего спуска и минимальной ошибки для решения нелинейных некорректно поставленных задач.

В работах M. Hanke [83, 84] была предложена новая схема метода

Левенберга-Марквардта, пригодная для решения некорректных задач.

А. В. Бакушинский предложил [10] модификацию метода Гаусса-Ньютона, приспособленную для решения некорректных нелинейных задач. Метод Гаусса-Ньютона был также исследован в работах B. Kaltenbacher, A. Neubauer, O. Scherzer и др. [75, 86].

В работах М. Ю. Кокурина [41, 42] предлагается и обосновывается общая схема конструирования итерационных процессов решения нелинейных нерегулярных уравнений на основе последовательной приближенной минимизации функционала Тихонова.

В. П. Танана в работе [64] предложил модификацию метода регуляризации и доказал сходимость регуляризованного решения двумерной обратной задачи гравиметрии.

В работах сотрудников Института математики и механики УрО РАН В. В. Васина, Е. Н. Акимовой, Г. Я. Пересторониной, Л. Ю. Тимерхановой и др. [6, 24, 25, 27–30, 99, 100] строятся и обосновываются модифицированные методы типа Левенберга-Марквардта, Гаусса-Ньютона, метода наискорейшего спуска и метода минимальной ошибки. Модифицированные методы дают существенную экономию машинного времени за счет того, что не требуют трудоемкой процедуры вычисления матрицы производных на каждой итерации. На основе этих методов были разработаны эффективные параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела.

Важно отметить, что теоретически доказанная высокая скорость сходимости (сверхлинейная или квадратичная) методов не гарантирует эффективности их использования при решении практических задач. Например, методы типа Левенберга-Марквардта и Гаусса-Ньютона требуют хранения

матриц большой размерности, а также выполнения трудоемких операций матричного умножения.

В работах сотрудников Института геофизики УрО РАН П. С. Мартышко, И. Л. Проткина, А. Г. Цидаева и др. [47, 48, 50, 57, 58, 96] для решения трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии в классе контактных поверхностей строятся алгоритмы на основе метода локальных поправок и его вариантов. Метод локальных поправок отличается алгоритмической простотой и экономичностью, но не подходит для решения задач магнитометрии в случае произвольно направленной суммарной намагниченности.

В некоторых из перечисленных подходов при определенных структурных условиях на оператор регуляризующие свойства итераций устанавливаются при подходящем выборе правила останова итераций без дополнительной регуляризации.

Для исследования больших площадей и обеспечения необходимой детальности построения моделей требуются большие сетки, что порождает значительные затраты времени, которые могут быть снижены за счет применения технологий параллельных вычислений. Возможность ускорения расчетов в десятки-сотни раз влечет за собой возможность повышения точности описания моделируемых объектов, так и возможность быстрого получения различных вариантов построений.

Проблемам исследования и распараллеливания алгоритмов применительно к задачам математической физики посвящены работы В. В. Боводина [32], Дж. Ортеги [55], Д. К. Фаддеева, В. Н. Фаддеевой [69]. Построению и исследованию параллельных алгоритмов для решения задач гравиметрии и магнитометрии посвящены работы Е. Н. Акимовой [4, 5],

в которых для реализации разработанных параллельных алгоритмов на системах с распределенной памятью используется технология MPI.

В диссертационной работе для реализации параллельных алгоритмов используется технология OpenMP. Эта технология предназначена для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью [76].

Актуальной задачей является оперативное сопровождение процесса полевых измерений и интерпретации данных, полученных на разных стадиях измерительных процессов. На современном этапе развития вычислительной техники наиболее удобным и общедоступным инструментом для экспресс-обработки геофизических данных в полевых условиях является переносной персональный компьютер с многоядерным процессором.

В диссертационной работе предлагаются менее ресурсоемкие по сравнению с классическими градиентными методами и процессами типа Гаусса-Ньютона итерационные методы решения нелинейных уравнений, возникающих при решении структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей сред, и их параллельная реализация на многоядерных процессорах. Применение разработанных параллельных алгоритмов и программ в значительной мере повышает эффективность решения задач.

Цели и задачи диссертационной работы:

Целью диссертационной работы является построение быстрых и экономичных итерационных градиентных методов и параллельных алгоритмов решения нелинейных уравнений применительно к обратным структурным задачам гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред, и реализация алгоритмов в виде комплекса программ для быстрой

обработки данных на сетках большой размерности.

Методология и методы исследования.

В диссертационной работе использован математический аппарат численных методов оптимизации, теории некорректных задач и методы математического моделирования. Для реализации алгоритмов на многоядерных процессорах используется технология параллельного программирования OpenMP и возможности компилятора Intel C++ Compiler.

Научная новизна.

Результаты, представленные в диссертации, являются новыми, имеют теоретическую и практическую ценность.

1. Для решения нелинейных уравнений применительно к структурным обратным задачам гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред построены новые экономичные итерационные методы: линеаризованный метод сопряженных градиентов, покомпонентный градиентный метод и их регуляризованные варианты. Для случая произвольно направленной суммарной намагниченности на основе нелинейного метода сопряженных градиентов построен алгоритм решения трехмерной структурной обратной задачи магнитометрии о восстановлении одной поверхности.

2. Для решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении нескольких поверхностей предложен и исследован новый алгоритм, позволяющий из базового интегрального уравнения одновременно находить несколько поверхностей. Построены варианты линеаризованных градиентных методов с весовыми множителями: методы наискорейшего спуска и минимальной ошибки, модифицированные методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

3. Разработан и реализован для многоядерных процессоров комплекс параллельных программ решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред на основе предложенных методов. Разработанные алгоритмы и параллельные программы протестированы на построенных модельных задачах и задачах на основе реальных данных.

Теоретическая и практическая значимость.

Разработанные в диссертационной работе и апробированные в расчетах параллельные алгоритмы и программы могут быть эффективно использованы при численном решении на многоядерных процессорах ряда обратных задач теории потенциала: задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела. Алгоритмы и программы были использованы для решения обратных задач гравиметрии совместно с сотрудниками Лаборатории математической геофизики ИГФ УрО РАН [103, 107, 108]. Разработанные экономичные алгоритмы решения нелинейных уравнений могут быть использованы в составе программных пакетов, предназначенных для геофизических исследований для сеток большой размерности.

Положения, выносимые на защиту:

1. Построены новые экономичные итерационные методы решения нелинейных уравнений трехмерных структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении одной поверхности раздела: линеаризованный метод сопряженных градиентов, покомпонентный градиентный метод и их регуляризованные варианты. На основе линеаризованного метода сопряженных градиентов построен алгоритм решения структурной обратной задачи магнитометрии о восстановлении одной поверхности для случая произвольно направленного вектора суммарной намагниченности.

2. Для решения структурных обратных задач о нахождении нескольких поверхностей раздела сред предложен и исследован оригинальный алгоритм, основанный на применении построенных градиентных методов с переменными весовыми множителями.

3. На основе предложенных методов разработаны параллельные алгоритмы, реализованные в виде комплекса программ на многоядерных процессорах для быстрого решения обратных задач на сетках большой размерности. Комплекс протестирован на построенных модельных задачах.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность результатов диссертации устанавливается проведеными численными экспериментами и согласованностью результатов, полученных различными методами. Надежность разработанных программ проверена многочисленными расчетами при решении модельных задач.

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на всероссийских и международных конференциях и семинарах: международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии» (Новосибирск, 2012; Челябинск, 2013; Ростов-на-Дону, 2014; Екатеринбург, 2015), XIII и XIV Уральских молодежных научных школах по геофизике (Екатеринбург, 2012; Пермь, 2013), 41-ой сессии международного семинара имени Д. Г. Успенского (Екатеринбург, 2014), 2-м, 3-м и 4-м Национальном Суперкомпьютерном Форуме (Переславль-Залесский, 2013; 2014; 2015), международной конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (Челябинск, 2014).

Публикации.

Материалы диссертации опубликованы в 21 печатной работе, из них 12 статей в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК и

проиндексированных базами Scopus или Web of Science [102–113], 7 статей в сборниках трудов конференций [114–120] и 2 тезиса докладов [121, 122].

Личный вклад автора.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. В работах [102–114] автору диссертации принадлежит построение линеаризованного метода сопряженных градиентов и покомпонентного градиентного метода для решения задач о восстановлении одной поверхности; разработка алгоритма решения задачи магнитометрии о восстановлении одной поверхности в случае произвольно направленной суммарной намагниченности; разработка модифицированных градиентных методов с переменными весовыми множителями для решения задач о восстановлении нескольких поверхностей раздела, построение параллельных алгоритмов на основе методов градиентного типа и разработка программ для многоядерных процессоров с использованием технологии OpenMP; построение модельных задач для тестирования алгоритмов и программ.

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, ведущему научному сотруднику ИММ УрО РАН Елене Николаевне Акимовой.

Автор выражает благодарность за постановку ряда проблем, поддержку, полезные замечания и обсуждения членам-корреспондентам РАН Владимиру Васильевичу Васину, Петру Сергеевичу Мартышко и ведущему

научному сотруднику ИГФ УрО РАН Игорю Викторовичу Ладовскому.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Объем диссертационной работы составляет 124 страницы. Библиография содержит 121 наименование, в том числе 21 публикацию автора по теме диссертации. Список иллюстраций включает 28 позиций. Список таблиц включает 5 позиций.

Краткое содержание работы.

Во **введении** обосновывается актуальность темы проведенных исследований и дан обзор публикаций, близких к теме диссертации. Во введении сформулирована цель работы, научная новизна и практическая значимость результатов, кратко изложено содержание работы.

Первая глава диссертации посвящена постановкам обратных структурных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела слоев однородно-слоистой среды по гравитационным либо магнитным данным. Показано, что рассматриваемые в диссертационной работе прикладные задачи сводятся к решению нелинейных уравнений большой размерности.

В **разделе 1.1** приводятся постановки структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении одной поверхности раздела.

Предположим, что нижнее полупространство состоит из двух однородных слоев, разделенных искомой поверхностью, имеющей горизонтальную асимптоту.

В случае задачи гравиметрии нижнее полупространство состоит из двух слоев плотности, разделенных искомой поверхностью. Задача состоит в нахождении формы поверхности при известном гравитационном поле, порождаемом полупространством, разности плотностей слоев и глубине залегания асимптотической плоскости.

В случае задачи магнитометрии нижнее полупространство состоит из двух слоев постоянной вертикальной намагниченности и задача состоит в нахождении формы поверхности по известной вертикальной компоненте напряженности магнитного поля, разности намагниченостей слоев и глубине залегания асимптотической плоскости.

бине залегания асимптотической плоскости.

Уравнения обратных задач являются нелинейными двумерным интегральным уравнением первого рода.

После дискретизации этих уравнений и аппроксимации интегральных операторов по квадратурным формулам, задачи сводятся к решению систем нелинейных уравнений.

Раздел 1.2 посвящен детальному выводу уравнения обратной задачи магнитометрии о восстановлении поверхности раздела для случая произвольно направленного вектора суммарной намагниченности.

Раздел 1.3 посвящен обобщению постановок задач на случай нескольких поверхностей раздела.

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких однородных слоев, разделенных искомыми поверхностями, где L — априорно известное число границ раздела. Гравитационный или магнитный эффект от такого полупространства равен сумме эффектов от всех поверхностей раздела.

Уравнения обратных задач являются двумерными нелинейными интегральными уравнениями первого рода от искомых функций, определяющих поверхности раздела.

Традиционный способ решения этих двух задач заключается в использовании технологии разделения источников аномалий по глубине, разработанной П. С. Мартышко и И. Л. Пруткиным. Основная идея технологии заключается в аналитическом продолжении гравитационного поля вверх или вниз по формуле Пуассона. Продолжение поля вверх сводится к вычислению значения интегрального оператора, в то время как продолжение поля вниз требует решения линейного интегрального уравнения первого

рода. После применения этой технологии общее гравитационное или магнитное поле приближенно разделяется на компоненты, соответствующие отдельным границам, таким образом, задача сводится к решению нескольких задач, описанных в разделе 1.1.

Вторая глава посвящена построению оригинальных экономичных алгоритмов решения задач, поставленных в первой главе.

В **разделе 2.1** строится быстрый алгоритм решения систем нелинейных уравнений на основе нелинейного метода сопряженных градиентов. Применяется идея линеаризации для упрощения процедуры одномерного поиска и ее замены явной приближенной формулой.

Получен линеаризованный метод сопряженных градиентов (ЛМСГ)

Построен также вариант метода с регуляризацией по методу Тихонова — регуляризованный линеаризованный метод сопряженных градиентов (РЛМСГ).

В **разделе 2.2** строится экономичный алгоритм решения нелинейных уравнений для задач гравиметрии и магнитометрии. Идея состоит в том, чтобы минимизировать невязку по правой части в конкретном узле только за счет изменения значения в том же узле. Получен покомпонентный градиентный метод (ПГМ)

Данный метод не требует трудоемких операций векторно-матричного умножения и хранения матриц, что дает существенный выигрыш по времени выполнения и затратам вычислительных ресурсов

В **разделе 2.3** описывается новый алгоритм решения нелинейных уравнений для задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении нескольких поверхностей. Он позволяет по суммарному полю из интегрально-го уравнения находить несколько структурных границ одновременно. Алго-

ритм основан на методах градиентного типа с переменными весовыми множителями. После дискретизации задачи сводятся к решению недоопределенных систем нелинейных уравнений. Для решения уравнений предложено четыре метода: линеаризованный метод наискорейшего спуска (ЛМНС), линеаризованный метод минимальной ошибки (ЛММО), линеаризованный модифицированный метод наискорейшего спуска (ЛММНС), линеаризованный модифицированный метод сопряженных градиентов (ЛММСГ)

Как показали численные эксперименты, применение новых алгоритмов обеспечивает значительное снижение времени вычисления по сравнению с традиционным алгоритмом.

Предлагается два способа выбора весовых коэффициентов: используя выделенные для каждой границы гравитационные или магнитные поля либо используя априорно известные нулевые приближения искомых поверхностей. Весовые множители выбираются путем нормировки значений для каждой поверхности раздела.

Третья глава посвящена разработке параллельных алгоритмов на основе методов, предложенных в первых двух главах, их реализации в виде комплекса программ для многоядерных процессоров и тестированию на синтетических и натуральных данных.

Раздел 3.1 посвящен построению параллельных алгоритмов и разработке программ для многоядерных процессоров.

На основе предложенных автором методов разработаны параллельные алгоритмы и программы для многоядерных процессоров с использованием технологии OpenMP и средств компилятора Intel C++ Compiler. Значительное время занимает вычисление значений интегрального оператора и матрицы производных на каждой итерации. С целью ускорения вычисле-

ний проведено распараллеливание этой процедуры. Матрица производных имеет большую размерность и занимает значительный объем памяти, поэтому оптимальным оказывается метод вычисления элементов матрицы производных «на лету», то есть вычисление значения элемента матрицы происходит в момент обращения к этому элементу без сохранения его в памяти.

В **разделе 3.2** представлена структура разработанного комплекса программ для многоядерных процессоров, приводится описание интерфейса. Даны рекомендации по использованию методов для классов задач.

Раздел 3.3 посвящен построению модельных задач, тестированию предложенных параллельных итерационных алгоритмов на задачах с модельными и реальными данными, сравнению с традиционными методами и алгоритмами по таким показателям, как число итераций, время счета, относительная погрешность результата. Проведен анализ ускорения и эффективности параллельных программ.

Проведенные численные эксперименты показывают, что предлагаемые автором методы и алгоритмы являются эффективными и экономичными с точки зрения времени счета и требуемых вычислительных ресурсов.

В **заключении** приводятся основные выводы по теме диссертации, обсуждаются перспективы применения полученных результатов и перспективы дальнейшей работы в выбранном направлении.

Глава 1

Постановки нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела

В данной главе рассматриваются постановки обратных структурных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела слоев в однородно-слоистой среде по гравитационным либо магнитным данным. Показано, что рассматриваемые в диссертационной работе прикладные задачи сводятся к решению нелинейных уравнений большой размерности.

1.1. Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии о восстановлении одной поверхности раздела

Рассмотрим постановку обратной задачи гравиметрии для одной поверхности раздела с горизонтальной асимптотической плоскостью.

Введем трехмерную декартову систему координат, в которой плоскость $x0y$ совпадает с земной поверхностью, а ось z направлена вертикально вниз. Предполагается, что нижнее полупространство состоит из двух слоев постоянной плотности σ_1 и σ_2 , разделенных искомой поверхностью (рис. 1.1). Пусть поверхность раздела задается уравнением $z = \zeta(x, y)$. Поверхность имеет асимптотическую плоскость, залегающую на глубине $z = h$, другими словами, $\lim_{|x|+|y|\rightarrow\infty} |\zeta(x, y) - h| = 0$.

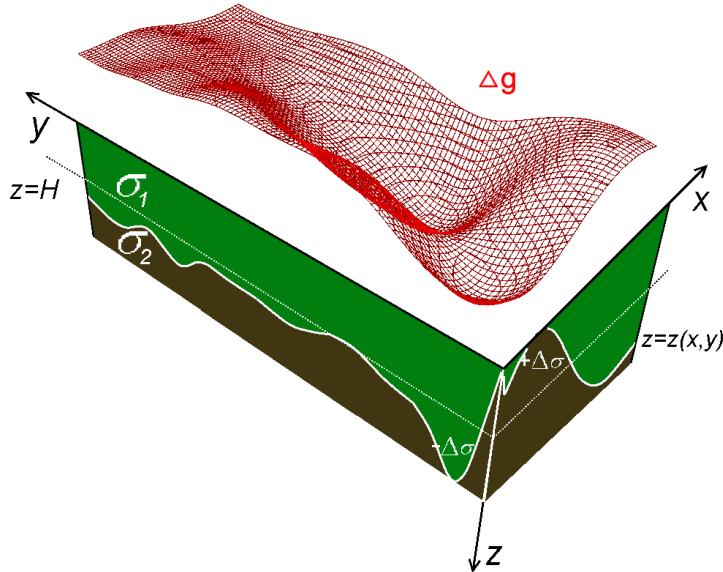


Рис. 1.1. Модель двуслойной среды в задаче гравиметрии

Если исходить из того, что гравитационная аномалия создана отклонением искомой поверхности от асимптотической плоскости, то аномальное гравитационное поле (вертикальная компонента ускорения свободного падения, первая производная ньютоновского потенциала), порождаемое та-

ким полупространством и измеренное на земной поверхности $z = 0$, с точностью до постоянного слагаемого будет равным полю тела, ограниченного поверхностью $\zeta(x, y)$ и плоскостью h и имеющего постоянную плотность $\Delta\sigma$. Гравитационный потенциал такого тела D равен [72]

$$V(\mathbf{r}_0) = f\Delta\sigma \int_D \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dr,$$

где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор точки наблюдения, \mathbf{r} — радиус-векторы точек тела D .

Тогда поле, порождаемое поверхностью, с точностью до постоянного слагаемого найдется по формуле [47, 57]:

$$\begin{aligned} & f\Delta\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + \zeta^2(x, y)}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + h^2}} \right] dx dy = \Delta g(x', y', 0), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где f — гравитационная постоянная, $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ — скачок плотности на границе.

Обратная задача состоит в определении формы поверхности $\zeta(x, y)$ по данным об изменении силы тяжести на поверхности Земли $\Delta g(x', y', 0)$. Исходными данными считаются плотности слоев σ_1, σ_2 и глубина залегания плоскости h .

Для предварительной обработки данных с целью выделения аномального поля, порожденного искомой поверхностью, из наблюденного гравитационного поля используется технология разделения источников по глубине, предложенная в работе [49].

При известных значениях поля $\Delta g(x', y', 0)$, скачка плотности $\Delta\sigma$ и

глубины h залегания асимптотической плоскости формулу (1.1) можно рассматривать как двумерное нелинейное интегральное уравнение первого рода от функции $z = \zeta(x, y)$. Можно записать его в операторном виде

$$A(z) = \Delta g(x', y', 0). \quad (1.2)$$

Поскольку поверхность имеет асимптоту, значения поля вне некоторой прямоугольной области $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ будут близки к нулю, поэтому можно перейти от бесконечных пределов интегрирования к конечной области. После дискретизации уравнения (1.1)–(1.2) на сетке $n = M \times N$ (рис. 1.2) с шагами $\Delta x, \Delta y$, где задана правая часть $\Delta g(x, y, 0)$ и аппроксимации интегрального оператора $A(z)$ по квадратурным формулам прямоугольников, имеем вектор правой части $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ размерности n , вектор решения z размерности n и систему n нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} f \Delta \sigma \Delta x \Delta y \sum_{j=1..n} \left[\frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + z_j^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + h^2}} \right] = F_i, \quad i = 1..n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В операторном виде система (1.3) записывается в виде

$$A[z] = F. \quad (1.4)$$

Постановка обратной задачи магнитометрии для одной поверхности раздела для случая вертикальной намагниченности выглядит аналогично. Предполагается, что нижнее полупространство состоит из двух слоев постоянной вертикально направленной намагниченности J_1 и J_2 , разделенных

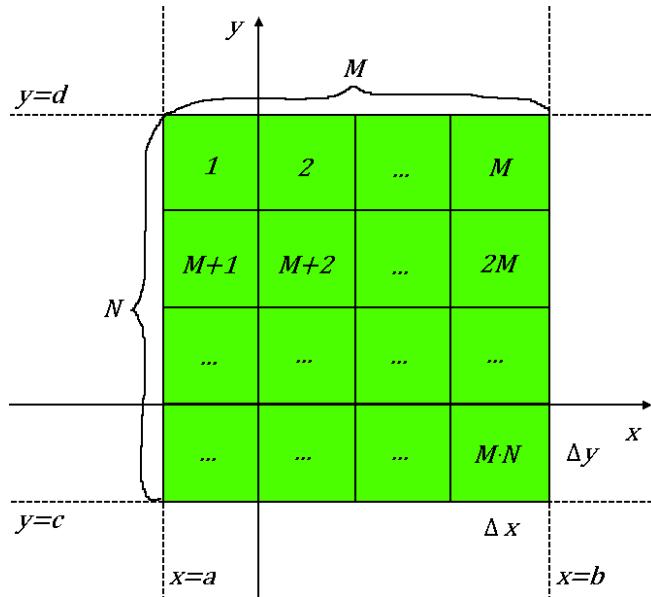


Рис. 1.2. Распределение индексов по сетке

искомой поверхностью (рис. 1.3). Поверхность раздела с асимптотической плоскостью h задается уравнением $z = \zeta(x, y)$.

Для нахождения аномального магнитного эффекта однородного тела используется теорема Пуассона [73]: магнитный потенциал однородно намагниченного тела вычисляется по формуле $U = -\frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{J}, \nabla V \rangle$, где V — гравитационный потенциал тела такой же формы и размеров, имеющего постоянную плотность, такую что $f\sigma = 1$. Вертикальная компонента напряженности магнитного поля, порожденного поверхностью, будет находиться по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\Delta J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} & \left[\frac{\zeta(x, y)}{\left((x - x')^2 + (y - y')^2 + \zeta^2(x, y) \right)^{3/2}} - \right. \\ & \left. - \frac{h}{\left((x - x')^2 + (y - y')^2 + h^2 \right)^{3/2}} \right] dx dy = \Delta Z(x', y', 0), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\Delta J = 1 - J_2$ — скачок намагниченности на границе раздела сред.

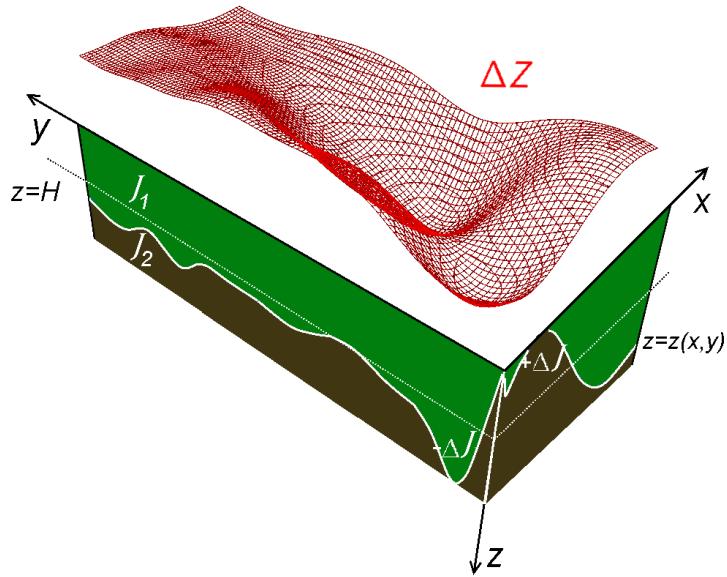


Рис. 1.3. Модель двуслойной среды в задаче магнитометрии

При известном значении поля $\Delta Z(x', y', 0)$, скачка намагниченности ΔJ и глубины h формула (1.5) является двумерным нелинейным интегральным уравнением первого рода от функции $z = \zeta(x, y)$. Можно записать его в операторном виде

$$B(z) = \Delta Z(x', y', 0). \quad (1.6)$$

После дискретизации уравнения (1.5)–(1.6) на сетке $n = M \times N$, где задана правая часть $\Delta Z(x, y, 0)$, и аппроксимации интегрального оператора $B(z)$ по квадратурным формулам, имеем вектор правой части $F(x, y)$ размерности n , вектор решения z размерности n и систему n нелинейных уравнений вида

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta J}{4\pi} \Delta x \Delta y \sum_{j=1..n} \left[\frac{-h}{((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + h^2)^{3/2}} - \right. \\ & \left. - \frac{-z_j}{((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + z_j)^{3/2}} \right] = F_i, \quad i = 1..n. \end{aligned} \tag{1.7}$$

В операторном виде

$$B[z] = F. \tag{1.8}$$

Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии являются существенно некорректными задачами, решение которых обладает сильной чувствительностью к погрешностям правых частей, полученных в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных. Поэтому при решении задач используются методы итеративной регуляризации [74, 101].

1.2. Получение уравнения структурной обратной задачи магнитометрии для случая произвольно направленной суммарной намагниченности

Приведем детальный вывод уравнения обратной задачи магнитометрии для случая произвольно направленной суммарной намагниченности.

Введём трехмерную декартову систему координат, в которой координатная плоскость $x0y$ совпадает с земной поверхностью, а ось z направлена вертикально вниз.

Построим выражение для прямой задачи нахождения магнитного поля от поверхности $\zeta(x, y)$ в случае, когда слои имеют произвольно направленные намагниченности \mathbf{J}_1 и \mathbf{J}_2 .

Для этого рассмотрим однородное тело в виде слоя, ограниченного криволинейными поверхностями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ и имеющего намагниченность $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$.

Согласно соотношению Пуассона, магнитный потенциал U однородно намагниченного тела можно найти по формуле

$$U = -\frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{J}, \nabla V \rangle,$$

где V — гравитационный потенциал тела такой же формы и размеров, имеющего постоянную плотность σ , равную обратной величине гравитационной постоянной f .

Гравитационный потенциал однородного тела D произвольной формы находится по формуле

$$V(\mathbf{r}_0) = f\sigma \int_D \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dr,$$

где \mathbf{r}_0 – радиус-вектор точки наблюдения, а \mathbf{r} – радиус-векторы точек тела D .

Подставив в пределы интегрирования границы рассматриваемого тела, получим

$$V(x_0, y_0, z_0) = f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{dz}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{1/2}} \right) dx dy$$

Найдем компоненты ∇V :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0} = \\ & = f\sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{dz}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{1/2}} \right) dx dy = \\ & = f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \times \\ & \quad \times \left[\frac{z - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}} \right] \Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \times \\
&\quad \times \left[\frac{z_1(x, y) - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{z_2(x, y) - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} \right] dxdy;
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0} =$$

$$\begin{aligned}
&= f\sigma \frac{\partial}{\partial x_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{dz}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}} \right) dxdy = \\
&= f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \times \\
&\quad \times \left[\frac{z - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}} \right] \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dxdy =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \times \\
&\quad \times \left[\frac{z_1(x, y) - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{z_2(x, y) - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} \right] dxdy;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} = \\
&= f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{-1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}} \right] \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dxdy = \\
&= f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} \right] dxdy.
\end{aligned}$$

Имея выражения для компонентов ∇V , получим вертикальную компоненту напряженности магнитного поля $\mathbf{H} = \nabla U$, подставив их в выражение:

$$\Delta Z(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z_0} \left(J_x \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0} + J_y \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial y_0} + J_z \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z_0} \left\{ -J_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \times \right. \\
&\quad \times \left[\frac{z_1(x, y) - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} - \right. \\
&\quad - \left. \frac{z_2(x, y) - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} \right] dx dy - \\
&\quad - J_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \times \\
&\quad \times \left[\frac{z_1(x, y) - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} - \right. \\
&\quad - \left. \frac{z_2(x, y) - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} \right] dx dy + \\
&\quad + J_z \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{-1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} - \right. \\
&\quad - \left. \frac{-1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} \right] dx dy \Big\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \left\{ J_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \times \right. \\
&\quad \times \left[\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{3/2}} - \right. \\
&\quad - \left. \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{3/2}} \right] dxdy + \\
&\quad + J_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \times \\
&\quad \times \left[\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{3/2}} - \right. \\
&\quad - \left. \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{3/2}} \right] dxdy - \\
&\quad - J_z \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{z_1(x, y) - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{3/2}} - \right. \\
&\quad - \left. \left. \frac{z_2(x, y) - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{3/2}} \right] dxdy \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{J_x(x - x_0) + J_y(y - y_0) - J_z(z_1(x, y) - z_0)}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2 \right)^{3/2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{J_x(x - x_0) + J_y(y - y_0) - J_z(z_2(x, y) - z_0)}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2 \right)^{3/2}} \right] dx dy.
\end{aligned}$$

Чтобы перейти к выражению для магнитного поля криволинейной поверхности, применим прием, описанный в работе [47]: исключим из полу-пространства слои, ограниченные горизонтальными плоскостями, поскольку такие слои не дают вклада в магнитное поле. Задача сводится к нахождению поля от тела, ограниченного поверхностью $z_1(x, y) = h$ и ее асимптотической плоскостью $z_2(x, y) = \zeta(x, y)$, имеющего намагниченность $\Delta \mathbf{J} = \mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2$ (см. рис. 1.4).

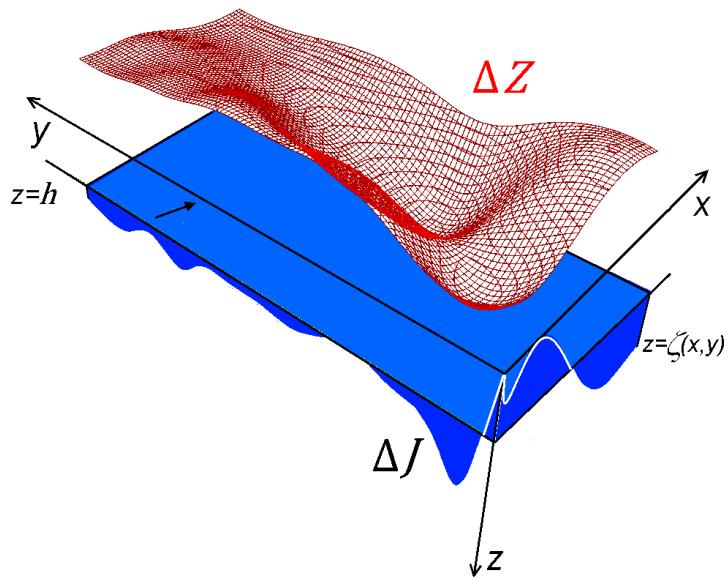


Рис. 1.4. Субгоризонтальный слой, эквивалентный поверхности раздела сред

Для $\Delta Z(x, y, z)$, измеренной на земной поверхности $z_0 = 0$, получаем формулу:

$$\begin{aligned} \Delta Z(x', y', 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta J_x(x - x') + \Delta J_y(y - y') - \Delta J_z h}{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + h^2)^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta J_x(x - x') + \Delta J_y(y - y') - \Delta J_z \zeta(x, y)}{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + \zeta^2(x, y))^{3/2}} \right] dxdy, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\Delta \mathbf{J} = (\Delta J_x, \Delta J_y, \Delta J_z)$ — скачок намагниченности.

Замечание 1. В случае вертикально направленного скачка намагниченности уравнение совпадет с (1.5).

В случае горизонтально направленного скачка намагниченности уравнение приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta Z(x', y', 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta J_x(x - x') + \Delta J_y(y - y') \right) \times \\ &\quad \left[\frac{1}{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + h^2)^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + \zeta^2(x, y))^{3/2}} \right] dxdy. \end{aligned}$$

Замечание 2. Аналогичное уравнение можно получить для модуля напряженности магнитного поля ΔT .

При известных значениях $\Delta J_x, \Delta J_y, \Delta J_z, \Delta Z(x', y', 0), h$ выражение (1.9) можно рассматривать как интегральное уравнение первого рода от функции $z = \zeta(x, y)$.

После дискретизации уравнения (1.10) на сетке $n = M \times N$, где задана правая часть $\Delta Z(x', y', 0)$ и аппроксимации интегрального оператора

$A(z)$ по квадратурным формулам имеем систему нелинейных уравнений вида (1.8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \Delta x \Delta y \sum_{j=1..n} \left[\frac{\Delta J_x(x_j - x_i) + \Delta J_y(y_j - y_i) - \Delta J_z h}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + h^2)^{3/2}} \right. \\ \left. - \frac{\Delta J_x(x_j - x_i) + \Delta J_y(y_j - y_i) - \Delta J_z z_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + z_j)^{3/2}} \right] = F_i, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$i = 1..n.$$

Для решения этой задачи невозможно применить алгоритмы на основе метода локальных поправок, поэтому необходимо использовать алгоритмы на основе методов нелинейной минимизации.

Автор рекомендует использовать алгоритмы на основе нелинейного метода сопряженных градиентов, разработанные во второй главе данной диссертационной работы.

1.3. Обобщенные постановки обратных задач гравиметрии и магнитометрии для случая нескольких поверхностей

Рассматривается трехмерная структурная обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред по известным скачкам плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности.

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной плотности, разделенных искомыми поверхностями $S_l (l = 1, \dots, L)$, где L — априорно известное число границ раздела (рис. 1.5). Гравитационный эффект от такого полупространства равен сумме гравитационных эффектов от всех поверхностей раздела [47].

Пусть поверхности раздела задаются уравнениями $\zeta_l = \zeta_l(x, y)$, скачки плотности на них равны $\Delta\sigma_l$, поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости $\zeta_l = h_l$, т.е. $\lim_{|x|+|y|\rightarrow\infty} |\zeta_l(x, y) - h_l| = 0$. Поле от суперпозиции границ с точностью до постоянного слагаемого равно

$$A(z) \equiv f \sum_{l=1}^L \Delta\sigma_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + \zeta_l^2(x, y)}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + h_l^2}} \right\} dx dy = \Delta g(x', y', 0), \quad (1.11)$$

где f — гравитационная постоянная, L — число границ раздела, $\Delta g(x, y, 0) = \sum_{l=0}^L \Delta g_l$ — суммарное аномальное гравитационное поле, измеренное на земной поверхности.

Уравнение (1.11) при заданных значениях $L, f, \Delta\sigma_l, h_l$ является нели-

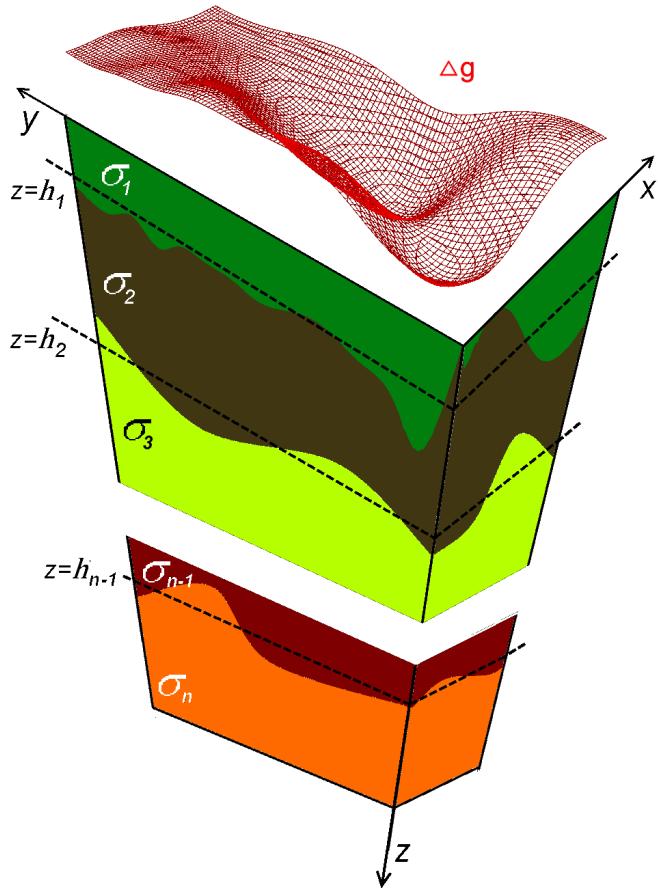


Рис. 1.5. Модель многослойной среды в задаче гравиметрии

нейным двумерным интегральным уравнением первого рода относительно искомых функций ζ_l . В операторном виде его можно записать как

$$A(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_L) = \Delta g(x', y', 0). \quad (1.12)$$

Рассматривается трехмерная структурная обратная задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред на основе данных о магнитном поле, измеренном на некоторой площади земной поверхности, и скачкам векторов намагниченности.

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной вертикальной намагниченности $J_l = J_{z,l}, l = 1, \dots, L$) разделенных искомыми поверхностями S_l где L — число границ раздела

(рис. 1.6). Магнитный эффект от такого полупространства равен сумме магнитных эффектов от всех поверхностей раздела.

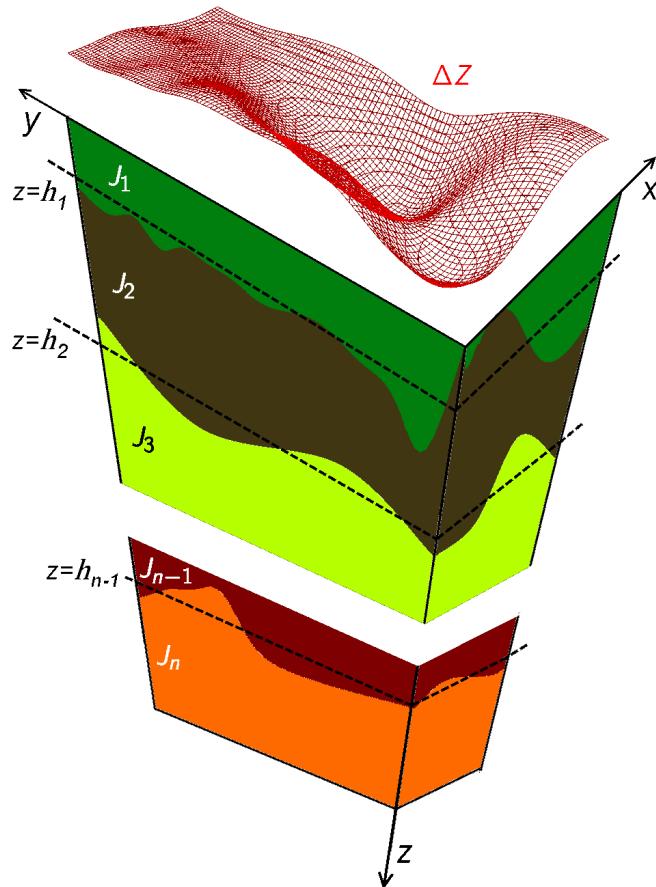


Рис. 1.6. Модель многослойной среды в задаче магнитометрии

Пусть поверхности раздела задаются уравнениями $z_l = z_l(x, y)$, скачки модулей векторов намагниченности на них равны ΔJ_l , поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости $z_l = H_l$, т.е. $\lim_{|x|+|y|\rightarrow\infty} |\zeta(x, y) - h| = 0$. Поле от суперпозиции границ с точностью до постоянного слагаемого равно

$$B(z) \equiv \sum_{l=1}^L \Delta J_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\zeta_l(x, y)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + \zeta_l^2(x, y)]^{3/2}} - \right. \\ \left. - \frac{h_l}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + h_l^2]^{3/2}} \right\} dx dy = \Delta Z(x', y', 0), \quad (1.13)$$

где $\Delta Z(x, y, 0) = \sum_{l=0}^L \Delta Z_l$ — суммарное аномальное магнитное поле, измеренное на земной поверхности.

Уравнение (1.13) является нелинейным двумерным интегральным уравнениями первого рода относительно искомых функций ζ_l . В операторном виде она записывается как

$$B(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_L) = \Delta Z(x', y', 0). \quad (1.14)$$

Традиционный алгоритм решения задачи заключается в использовании технологии разделения источников аномалий по глубине, разработанной П. С. Мартышко и И. Л. Проткиным [49]. Основная идея технологии заключается в аналитическом продолжении гравитационного поля вверх и вниз. Продолжение поля вверх на высоту H осуществляется по формуле Пуассона, дающей решение задачи Дирихле для полупространства

$$U(x', y', H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + H^2]^{3/2}} U(x, y, 0) dx dy.$$

Для уменьшения искажений, связанных с этой процедурой вследствие интегрирования по конечной области, из поля $U(x, y, 0)$ предварительно вычитается функция, являющаяся решением плоской задачи Дирихле для уравнения Лапласа и принимающая на границе области те же значения, что и поле.

Чтобы ослабить влияние источников в слое между земной поверхностью $z = 0$ и плоскостью $z = H$, пересчитанное вверх поле затем продолжается вниз на глубину H по формуле

$$U(x', y', H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2H}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + 4H^2]^{3/2}} U(x, y, -H) dx dy.$$

Данное выражение используется в качестве интегрального уравнения, в котором функция $U(x', y', H)$ известна, а искомым является функция $U(x, y, -H)$. Оператор уравнения является положительно определенным и самосопряженным, для решения используется схема М. М. Лаврентьева и итерационные методы решения СЛАУ [101].

Проделав такую процедуру для двух значений H_1 и H_2 , можно приближенно выделить гравитационный эффект от источников в горизонтальном слое между глубинами H_1 и H_2 .

Таким образом, гравитационное или магнитное поле приближенно разделяется на компоненты, соответствующие отдельным границам, и задача сводится к решению нескольких задач, описанных в разделе 1.1.

Глава 2

Алгоритмы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела

Данная глава посвящена построению оригинальных экономичных алгоритмов решения задач, поставленных в первой главе.

Построены быстрые алгоритмы решения нелинейных уравнений структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении одной поверхности на основе нелинейного метода сопряженных градиентов.

Получено нелинейное уравнение обратной задачи магнитометрии о восстановлении поверхности раздела сред для случая произвольно направленной суммарной намагниченности и предложен алгоритм его решения.

Построены экономичные алгоритмы решения нелинейных уравнений о восстановлении одной поверхности на основе идеи локальности.

Предложен новый алгоритм решения задач о восстановлении нескольких поверхностей раздела, основанный на применении градиентных методов с весовыми множителями, позволяющий восстанавливать форму нескольких поверхностей раздела сред одновременно. Строятся быстрые алгоритмы решения базового нелинейного уравнения для задач о восстановлении нескольких поверхностей. Рассматривается вопрос выбора весовых множителей.

2.1. Построение быстрых алгоритмов решения задач о восстановлении одной поверхности на основе метода сопряженных градиентов

Построим алгоритм решения нелинейных уравнений (1.4) и (1.8) на основе метода сопряженных градиентов. Метод сопряженных градиентов был предложен в работе [80] для решения корректных задач нелинейной оптимизации, различные варианты метода исследовались в работах [56, 81, 94]. Его преимуществом является неявное использование второй производной минимизуемой функции, что дает ускорение сходимости по сравнению с методом наискорейшего спуска при сравнимом с ним количеством операций.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений вида

$$A[z] = F$$

где $A : R^n \Rightarrow R^m$ — конечномерная аппроксимация интегрального оператора первого рода, дифференцируемая по Фреше. Если решение существует, то задача его нахождения эквивалентна задаче минимизации

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|A(z) - F\|^2 : z \in R^n \right\}.$$

Обозначим градиент квадратичной невязки

$$\nabla \left[\frac{1}{2} \|A(z) - F\|^2 \right] = A'(z)^T (A(z) - F) \equiv S(z), \quad (2.1)$$

где $A'(z)$ — матрица производных размерности $n \times m$.

Для решения задачи построим итеративный процесс вида

$$z_{k+1} = z_k + \alpha_k p_k, \quad (2.2)$$

где $k \geq 0$ — номер итерации, $z_0 \in R^n$ — некоторое начальное приближение, α_k — размер шага.

Направления p_k получаются по формуле

$$\begin{aligned} p_k &= -A'(z)^T(A(z) - F) + \beta_k p_{k-1}, \\ p_0 &= -A'(z_0)^T(A(z_0) - F). \end{aligned}$$

Параметры β можно получать по различным формулам. В данной работе используется модифицированная формула Полака-Рибьера-Поляка [81], которая по результатам многочисленных численных экспериментов является наиболее эффективной из негибридных формул:

$$\beta_k = \beta_k^{PRP+} = \max\{\beta_k^{PRP}, 0\},$$

$$\beta_k^{PRP} = \frac{\langle S(z_k), (S(z_k) - S(z_{k-1})) \rangle}{\|S(z_{k-1})\|^2},$$

В классических методах размер шага α_k находится из условия:

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ \|A(z_k - \alpha p_k) - F\|^2 \right\},$$

т. е. на каждой итерации необходимо решать задачу одномерной минимизации.

Чтобы избавиться от этой алгоритмически сложной процедуры, модифицируем процесс следующим образом. Воспользуемся идеей линеаризации [87]. Она состоит в том, что нелинейный оператор заменяется линейной аппроксимацией в итерационной точке, в таком случае минимум квадратичной невязки можно будет найти по явной формуле.

Линеаризуем оператор A в точке z_k , взяв первый член ряда Тейлора:

$$A(z) \cong A(z_k) + A'(z_k)(z - z_k)$$

и найдем размер шага α_k решением задачи минимизации для линеаризованного выражения:

$$\begin{aligned} \alpha_k &\approx \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \|A(z_k) + A'(z_k)(z_k + \alpha p_k - z_k) - F\|^2 = \\ &= \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \left\{ \| (A(z_k) - F) + \alpha A'(z_k)p_k \|^2 \right\} = \\ &= \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \left\{ \| (A(z_k) - F) \|^2 + 2\alpha \langle p_k, S(z_k) \rangle + \alpha^2 \| A'(z_k)p_k \|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Необходимым условием минимума является равенство нулю производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\| (A(z_k) - F) \|^2 + 2\alpha \langle p_k, S(z_k) \rangle + \right. \\ \left. + \alpha^2 \| A'(z_k)p_k \|^2 \right) = 0; \\ 2\langle p_k, S(z_k) \rangle + 2\alpha \| A'(z_k)p_k \|^2 = 0. \end{aligned}$$

Получаем явную формулу для размера шага

$$\alpha_k \approx \widetilde{\alpha}_k = -\frac{\langle p_k, S(z_k) \rangle}{\| A'(z_k)p_k \|^2}.$$

Таким образом, процесс (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
z_{k+1} &= z_k - \frac{\langle p_k, S(z_k) \rangle}{\|A'(z_k)p_k\|^2} p_k, \\
p_k &= S(z_k) + \beta_k p_{k-1}, \\
p_0 &= S(z_0), \\
\beta_k &= \max \left\{ \frac{\langle S(z_k), (S(z_k) - S(z_{k-1})) \rangle}{\|S(z_{k-1})\|^2}, 0 \right\},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$S(z) = A'(z)^T (A(z) - F).$$

Введем дополнительный управляющий параметр $0 < \psi \leq 1$, обеспечивающий расширение области сходимости итеративного метода, впервые предложенный В. В. Васиным для линеаризованного метода наискорейшего спуска с постоянным демпфирующим множителем [22].

Итерационный процесс приобретет вид:

$$\begin{aligned}
z_{k+1} &= z_k - \psi \frac{\langle p_k, S(z_k) \rangle}{\|A'(z_k)p_k\|^2} p_k, \\
p_k &= S(z_k) + \beta_k p_{k-1}, \\
p_0 &= S(z_0), \\
\beta_k &= \max \left\{ \frac{\langle S(z_k), (S(z_k) - S(z_{k-1})) \rangle}{\|S(z_{k-1})\|^2}, 0 \right\}, \\
S(z) &= A'(z)^T (A(z) - F).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Замечание 3. При выборе параметра $\beta = 0$ процесс совпадет с линеаризованным методом наискорейшего спуска:

$$z_{k+1} = z_k - \psi \frac{\|S(z_k)\|^2}{\|A'(z_k)S(z_k)\|^2} S(z_k), \quad (2.5)$$

$$S(z) = A'(z)^T (A(z) - F).$$

Сходимость такого процесса при решении уравнений гравиметрии и магнитометрии следует из работы [97].

В качестве начального приближения предлагается использовать $z^0 = H$, где $z = H$ — уравнение асимптотической плоскости либо априорно известное нулевое приближение $z^0 = \hat{Z}$. В задачах гравиметрии и магнитометрии такое приближение может быть получено путем использования данных сейсморазведки или электроразведки. Критерием останова итерационного процесса является выполнение условия $\|A(z) - F\| / \|F\| < \varepsilon$ при некотором $\varepsilon < 1$.

При решении практических задач погрешности измерения и получения правой части могут значительно усиливать неустойчивость задачи, и алгоритм (2.4) будет расходиться при любом выборе демпфирующего параметра.

Построим устойчивый к погрешностям регуляризованный вариант линеаризованного метода сопряженных градиентов, используя регуляризацию по методу Тихонова, заменив задачу

$$S_\alpha(z) = A'(z)^T (A(z) - F) + \alpha(z - z_0) = 0, \quad (2.6)$$

где z^0 — начальное приближение, α — параметр регуляризации,

Построим процесс вида

$$z_{k+1} = z_k + \psi \chi_k p_k.$$

Найдем выражение для приближенного размера шага, пользуясь линейной аппроксимацией оператора A :

$$\begin{aligned} \chi_k &\approx \operatorname{argmin}_{\chi} \left\{ \|A(z_k) + A'(z_k)(z_k + \chi p_k - z_k) - F\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \|z_k + \chi p_k - z_0\|^2 \right\} = \\ &= \operatorname{argmin}_{\chi} \left\{ \|A(z_k) - F\|^2 + 2\chi \langle A'(z_k)^T (A(z_k) - F), p_k \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \chi^2 \|A'(z_k)p_k\|^2 + \alpha \|z_k - z_0\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha\chi \langle (z_k - z_0), p_k \rangle + \alpha\chi^2 \|p_k\|^2 \right\} = \\ &= \operatorname{argmin}_{\chi} \left\{ \|A(z_k) - F\|^2 + \alpha \|z_k - z_0\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \chi^2 \|A'(z_k)p_k\|^2 + \alpha\chi^2 \|p_k\|^2 + 2\chi \langle S_\alpha, p_k \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Из необходимого условия минимума

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\| (A(z_k) - F) \|^2 + \alpha \| z_k - z_0 \|^2 + \chi^2 \| A'(z_k) p_k \|^2 + \right. \\ \left. + \alpha \chi^2 \| p_k \|^2 + 2\chi \langle S_\alpha, p_k \rangle \right) = 0; \\ 2\chi \| A'(z_k) p_k \|^2 + 2\alpha \chi \| p_k \|^2 + 2\langle S_\alpha, p_k \rangle = 0 \end{aligned}$$

получаем

$$\chi_k \approx \widetilde{\chi}_k = -\frac{\langle p_k, S_\alpha(z_k) \rangle}{\| A'(z_k) p_k \|^2 + \alpha \| p_k \|^2}.$$

Назовем полученный процесс регуляризованным линеаризованным методом сопряженных градиентов (РЛМСГ):

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k - \psi \frac{\langle p_k, S_\alpha(z_k) \rangle}{\| A'(z_k) p_k \|^2 + \alpha \| p_k \|^2} p_k, \\ p_k &= S_\alpha(z_k) + \beta_k p_{k-1}, \quad p_0 = S_\alpha(z_0), \\ \beta_k &= \max \left\{ \frac{\langle S_\alpha(z_k), (S_\alpha(z_k) - S_\alpha(z_{k-1})) \rangle}{\| S_\alpha(z_{k-1}) \|^2}, 0 \right\}, \\ S_\alpha(z) &= A'(z)^T (A(z) - F) + \alpha(z - z^0). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Замечание 4. При выборе параметра $\beta = 0$ процесс совпадет с регуляризованным линеаризованным методом наискорейшего спуска, для которого доказана сходимость процесса в работе [99]:

$$z_{k+1} = z_k - \psi \frac{\| S_\alpha(z_k) \|^2}{\| A'(z_k) S_\alpha(z_k) \|^2 + \alpha \| S_\alpha(z_k) \|^2} S(z_k),$$

$$S_\alpha(z) = A'(z)^T (A(z) - F) + \alpha(z - z^0).$$

2.2. Построение экономичного покомпонентного градиентного метода

Построим алгоритм решения систем нелинейных уравнений (1.4) и (1.8) применительно к решению задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхности раздела сред на основе идеи, предложенной И. Л. Пруткиным [58]. Идея состоит в возможности минимизировать невязку $A_i(z) - F_i$ по правой части в узле i только за счет изменения значения $z(x, y)$ в том же узле.

Замечание 5. Это допустимое упрощение, поскольку значение гравитационного и магнитного (для вертикально направленной намагниченности) поля обратно зависит от $(x' - x)^2 + (y' - y)^2$, соответственно, наибольшее влияние на значение поля F_i оказывает значение глубины залегания поверхности z_i в этом же узле. В случае произвольно направленной суммарной намагниченности такой зависимости нет, поэтому данный метод, как и метод локальных поправок будет давать решение, совпадающее по невязке с правой частью, но не имеющее физического содержания.

Рассмотрим i -е уравнение системы (1.4) или (1.8):

$$A_i(z) = F_i. \quad (2.8)$$

Задача нахождения z из этого уравнения будет эквивалентна задаче минимизации

$$\min \left\{ \frac{1}{2}(A_i(z) - F_i)^2 : z \in R^n \right\}.$$

Необходимым условием минимума является:

$$\nabla \left(\frac{1}{2}(A_i(z) - F_i)^2 \right) = (A_i(z) - F_i) \nabla A_i(z) = 0,$$

где $\nabla A_i(z)$ — строка матрицы производной оператора $A(z)$.

Построим метод градиентного типа:

$$\hat{z}^{k+1} = z^k + \alpha_i(A_i(z^k) - F_i)\nabla A_i(z^k)^T, \quad (2.9)$$

где \hat{z}^k — вспомогательное промежуточное решение, минимизующее невязку $(A_i(z) - F_i)^2$ на k -й итерации, z^k — приближенное решение полной системы уравнений на k -й итерации.

Размер шага α^k находится из задачи одномерной минимизации

$$\alpha^k = \operatorname{argmin}_{\alpha} \{(A_i(z^{k+1}) - F_i)^2\}.$$

Снова воспользуемся линеаризованным приближением в точке z^k

$$A_i(z) \simeq A_i(z^k) + \nabla A_i(z^k)(z - z^k),$$

где $\nabla A_i(z)$ — строка матрицы производных.

$$\begin{aligned} \alpha^k &= \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ (A_i(z^{k+1}) - F_i)^2 \right\} = \\ &= \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ (A_i(z^k + \alpha(A_i(z^k) - F_i)\nabla A_i(z^k)^T) - F_i)^2 \right\} \simeq \\ &\simeq \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ (A_i(z^k) + \nabla A_i(z^k)(\alpha(A_i(z^k) - F_i)\nabla A_i(z^k)^T) - F_i)^2 \right\} = \\ &= \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ (A_i(z^k) - F_i)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha(A_i(z^k) - F_i)^2 \|\nabla A_i(z^k)\|^2 + \alpha^2(A_i(z^k) - F_i)^2 \|\nabla A_i(z^k)\|^4 \right\}. \end{aligned}$$

Необходимым условием минимума является:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} & \left((A_i(z^k) - F_i)^2 + 2\alpha(A_i(z^k) - F_i)^2 \|\nabla A_i(z^k)\|^2 + \right. \\ & \left. + \alpha^2(A_i(z^k) - F_i)^2 \|\nabla A_i(z^k)\|^4 \right) = 0; \\ & 2(A_i(z^k) - F_i)^2 \|\nabla A_i(z^k)\|^2 + \\ & + 2\alpha(A_i(z^k) - F_i)^2 \|\nabla A_i(z^k)\|^4 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha_k \approx \widetilde{\alpha}_k = -\frac{1}{\|\nabla A_i(z^k)\|^2}.$$

Таким образом, процесс (2.9) примет вид

$$\hat{z}^{k+1} = z^k - \frac{A_i(z^k) - F_i}{\|\nabla A_i(z^k)\|^2} \nabla A_i^T(z^k).$$

Применяя процесс независимо для всех индексов i , получим компоненты нового приближенного решения полной системы:

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \frac{A_i(z^k) - F_i}{\|\nabla A_i(z^k)\|^2} \left(\frac{\partial A_i(z_i^k)}{\partial z_i} \right).$$

Добавив демпфирующий множитель ψ , получаем покомпонентный градиентный метод:

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \frac{A_i(z^k) - F_i}{\|\nabla A_i(z^k)\|^2} \left(\frac{\partial A_i(z_i^k)}{\partial z_i} \right), \quad (2.10)$$

где k — номер итерации, i — индекс конкретного узла сетки.

Введя демпфирующий параметр ψ и заменив уравнение регуляризованным вариантом (2.6), получаем регуляризованный покомпонентный градиентный метод:

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \frac{A_i(z^k) - F_i + \alpha(z_i^k - z_i^0)}{\|\nabla A_i(z^k)\|^2 + \alpha} \left(\frac{\partial A_i}{\partial z_i}(z_i^k) \right). \quad (2.11)$$

В качестве начального приближения предлагается использовать $z^0 = H$ либо априорно известное нулевое приближение $z^0 = \hat{Z}$. Критерием останова итерационного процесса является выполнение условия $\|A(z) - F\| / \|F\| < \varepsilon$ при некотором $\varepsilon < 1$.

Замечание 6. По сравнению с линеаризованным методом наискорейшего спуска (2.5) и линеаризованным методом сопряженных градиентов (2.4) данный метод имеет меньшую алгоритмическую сложность: не требует трудоемких операций векторно-матричного умножения или хранения матриц большой размерности. Требуется лишь вычисление норм строк матрицы $A'(z^k)$ и значений ее диагональных элементов $\partial A_i(z_i^k)/\partial z_i$.

2.3. Новый алгоритм решения обратных задач о восстановлении нескольких поверхностей

Новый алгоритм решения интегральных уравнений (1.11) или (1.13) позволяет по суммарному полю из уравнения находить несколько структурных границ одновременно. Алгоритм основан на применении градиентных методов с переменными весовыми множителями.

2.3.1. Способ дискретизации уравнений

Дискретизация уравнений (1.11) или (1.13) осуществляется на сетке $n = M \times N$, где задана правая часть $\Delta Z(x, y)$. В результате получается вектор правой части $F(x, y)$ размерности $n = M \cdot N$, векторы $x = \{\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_N, x_2, x_2, \dots, x_2, x_3, x_3, \dots, x_3, \dots, x_M, x_M, \dots, x_M\}$, $y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_M, y_1, y_2, y_3, \dots, y_M, \dots\}$ размерности $n = M \cdot N$, результирующий вектор решения составляется из дискретизированных векторов для каждой границы: $z = [z_1, \dots, z_L] = (z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{1,n}, z_{2,1}, \dots, z_{L,n})$ размерности $Ln = L \cdot M \cdot N$ (рис. 2.1), матрицу производной операторов $A'(z^k)^T$ или $B'(z^k)^T$ размерности $M \cdot N \times L \cdot M \cdot N$ и системы нелинейных уравнений

$$f \sum_{l=1}^L \Delta \sigma_l \Delta x \Delta y \sum_{j=1..n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + z_{ln+j}^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + h_l^2}} \right\} = F_i, \quad (2.12)$$

$i = 1..n;$

$$\begin{aligned}
& f \sum_{l=1}^L \Delta \sigma_l \Delta x \Delta y \sum_{j=1..n} \left\{ \frac{\zeta_{ln+j}^2}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \zeta_{ln+j}^2]^{3/2}} - \right. \\
& \left. - \frac{h_l}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + h_l^2]^{3/2}} \right\} = F_i,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$i = 1..n$,

где z_m — m -я компонента результирующего вектора решения.

В операторном виде можно записать эти уравнения как

$$\tilde{A}[z] = \tilde{F}. \tag{2.14}$$

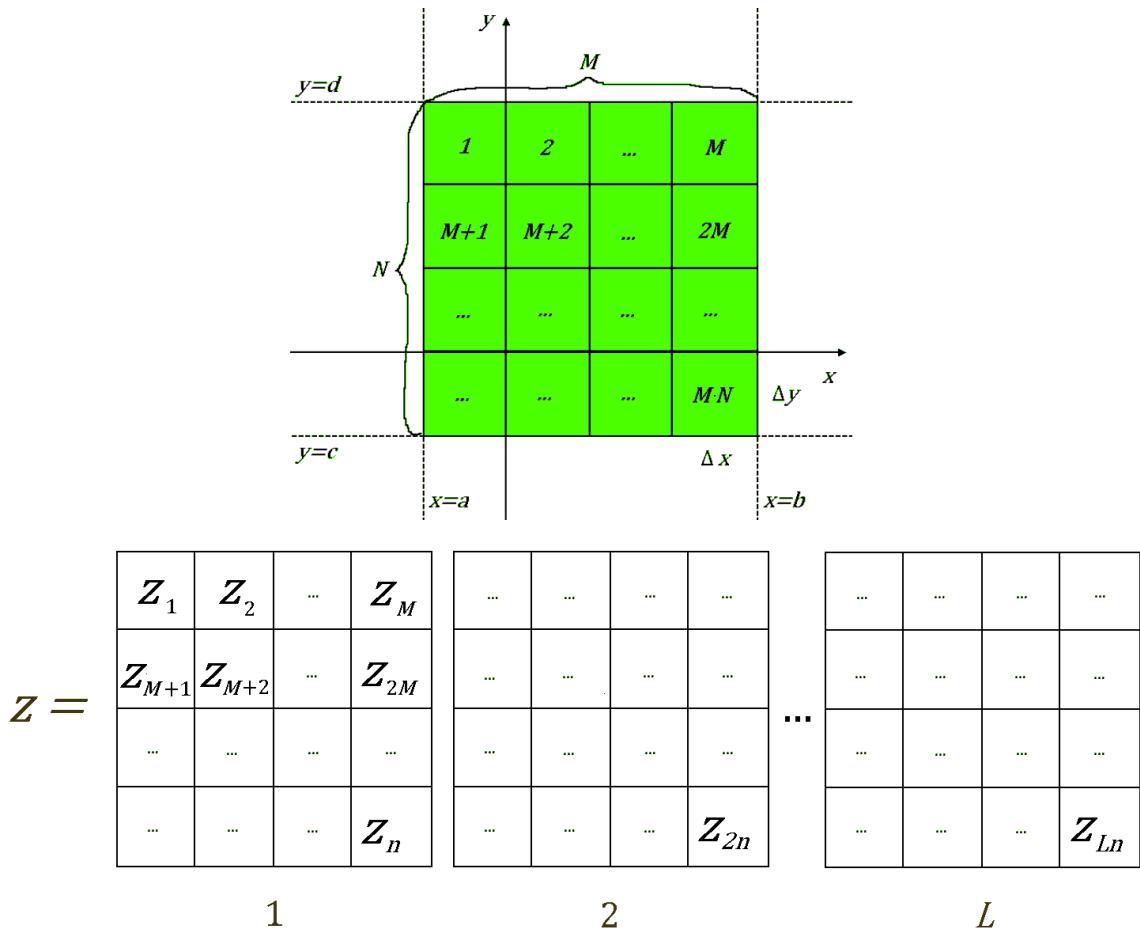


Рис. 2.1. Распределение индексов по сетке

Замечание 7. Задача (2.14) является недоопределенной в том смысле, что при правой части размерности n вектор неизвестных имеет размерность $L \cdot n$. При решении задачи итерационными методами, которые применяются для задач о восстановлении одной поверхности, полученные решения могут удовлетворять базовому уравнению (давать малую невязку по правой части), но значительно отличаться от истинных.

В таких случаях требуется находить начальное приближение, близкое к решению, а также использовать адаптивные методы, которые за счет подходящей настройки параметров переводят итерации в область локальной сходимости.

Первоначальная идея была предложена в работе [58]: для каждой поверхности задавался весовой коэффициент, определяющий, за счет изменения какой из поверхностей мы, в основном, пытаемся добиться уменьшения невязки. Можно расширить данный подход: основная идея нового алгоритма состоит в использовании дополнительной информации и задании весовых коэффициентов для каждой из поверхностей и для каждого узла сетки по отдельности. Это обеспечивает более тонкую настройку и дает возможность за счет выбора весовых коэффициентов выбрать более правдоподобное решение.

2.3.2. Градиентные методы наискорейшего спуска и минимальной ошибки с переменными весовыми множителями

Для решения системы (2.14) предложено использовать модификации линеаризованных итерационных методов градиентного типа (наискорейшего спуска и минимальной ошибки) с весовыми множителями (см. [103–105]):

- линеаризованный метод наискорейшего спуска (ЛМНС)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \gamma_i \frac{\|S(z^k)\|^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \quad (2.15)$$

$$S(z^k) = A'(z^k)^T (A(z^k) - F);$$

- линеаризованный метод минимальной ошибки (ЛММО)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \gamma_i \frac{\|A(z_k) - F\|^2}{\|S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \quad (2.16)$$

$$S(z^k) = A'(z^k)^T (A(z^k) - F),$$

где z_i — i -я компонента результирующего вектора z , S_i — i -я компонента вектора градиента $S(z)$, k — номер итерации, ψ — демпфирующий параметр, γ_i — весовые множители, вычисляемые для каждой компоненты z_i ($i = 1, \dots, L \cdot M \cdot N$).

В качестве начального приближения используются $z_i^0 = H_l$, $(l-1)n < i < ln$ либо известные начальные приближения поверхностей \hat{Z}_l , $l = 1..L$. Заметим, что от выбора начального приближения значительно зависит физичность результирующего решения.

Критерием останова итерационного процесса является выполнение условия для суммарной невязки $\|A(z) - F\| / \|F\| < \varepsilon$ при некотором $\varepsilon < 1$.

Как показали численные эксперименты, применение нового алгоритма значительно сокращает число итераций и время счета по сравнению с использованием традиционного алгоритма, состоящего в независимом решении задач о восстановлении каждой из поверхностей. Для модельных задач произошло даже некоторое снижение относительной погрешности приближенного решения.

2.3.3. Построение быстрых модифицированных методов наискорейшего спуска и сопряженных градиентов с весовыми множителями

Для большей экономии вычислительных ресурсов были построены модифицированные варианты методов (см. [106, 107]). Модификация метода (2.15) состоит во внесении весовых множителей в направление одномерного поиска, т. е. направления $S(z) = \nabla \left[\frac{1}{2} \|A(z) - y\|^2 \right]$ заменяются на v , которые получаются путем покомпонентного домножения $S(z)$ на весовые множители γ_i , и в этом направлении ищется минимум суммарной невязки. Это ещё больше уменьшило число итераций по сравнению с методом (2.15).

Чтобы получить явную приближенную формулу для размера шага α^k в направлении v , воспользуемся линейным приближением оператора A :

$$\begin{aligned}
 \alpha^k &\approx \operatorname{argmin}_{\alpha} \|A(z^k) + A'(z^k)(z^k + \alpha(v^k - z^k) - F)\|^2 = \\
 &= \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ \|(A(z^k) - F) + \alpha A'(z^k)v^k\|^2 \right\} = \\
 &= \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ \|(A(z^k) - F)\|^2 + 2\alpha \langle v^k, S(z^k) \rangle + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha^2 \|A'(z^k)v^k\|^2 \right\}. \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

Необходимым условием минимума является

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\|(A(z^k) - F)\|^2 + 2\alpha \langle v^k, S(z^k) \rangle + \alpha^2 \|A'(z^k)v^k\|^2 \right) = 0;$$

$$2\langle v^k, S(z^k) \rangle + 2\alpha \|A'(z^k)p^k\|^2 = 0.$$

Получаем размер шага

$$\alpha^k \approx \widetilde{\alpha^k} = -\frac{\langle v^k, S(z^k) \rangle}{\|A'(z^k)v^k\|^2}.$$

Получаем

- линеаризованный модифицированный метод наискорейшего спуска (ЛММНС):

$$z^{k+1} = z^k - \psi \frac{\langle v^k, S(z^k) \rangle}{\|A'(z^k)v^k\|^2} v^k,$$

$$v_i^k = \gamma_i S_i(z^k), \quad (2.18)$$

$$S(z) = A'(z)^T (A(z) - F);$$

где ψ — демпфирующий параметр, k — номер итерации, $i = 1..Ln$ — индекс элемента вектора решения.

Применим также аналогичную идею к методу (2.4). В качестве направлений будем выбирать $p^k = v^k + \beta^k p^{k-1}$, а для выбора коэффициента β^k возьмем формулу

$$\beta_k = \max\{\beta_k^M, 0\},$$

$$\beta_0 = 0,$$

$$\beta_k^M = \frac{\langle v^k, (v^k - v^{k-1}) \rangle}{\|v^{k-1}\|^2}.$$

Данная формула получена по аналогии с формулой Полака-Рибьера-Поляка заменой $S(z)$ на v . Вычислительные эксперименты показали её работоспособность и эффективность.

Заменив в выводе (2.17) и далее v^k на p^k , получаем выражение для α^k . В итоге имеем

- линеаризованный модифицированный метод сопряженных градиентов (ЛММСГ)

$$z^{k+1} = z^k - \psi \frac{\langle p^k, S(z^k) \rangle}{\|A'(z^k)p^k\|^2} p^k,$$

$$p^k = v^k + \beta_k p^{k-1},$$

$$\begin{aligned} p^0 &= v^0, \\ \beta_k &= \max \left\{ \frac{\langle v^k, (v^k - v^{k-1}) \rangle}{\|v^{k-1}\|^2}, 0 \right\}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$v_i^k = \gamma_i S_i(z^k),$$

$$S(z) = A'(z)^T (A(z) - F),$$

где ψ — демпфирующий параметр, k — номер итерации.

2.3.4. Выбор весовых множителей

Весовые множители γ_i для каждой компоненты $z_i (i = 1, \dots, L \cdot M \cdot N)$ будем выбирать двумя способами: используя выделенные для каждой границы гравитационные или магнитные поля либо используя априорно известные нулевые приближения искомых поверхностей. Весовые множители выбираются путем нормировки значений для каждой поверхности раздела.

В первом случае необходимо воспользоваться процедурой разделения источников по глубине, чтобы приблизенно выделить гравитационные или магнитные поля, соответствующие каждой поверхности. Отметим, что эта процедура может быть весьма трудоемкой для сеток большой размерности. Поскольку, в отличии от традиционного алгоритма, информация, получаемая в результате этой процедуры, является вспомогательной, можно выполнять её на загруженной сетке, что значительно снизит время вычисления и требования к вычислительным ресурсам.

$$F \longrightarrow [F_1, F_2, \dots, F_L] =$$

$$= (f_1, f_2, \dots, f_{m \cdot n}, \dots, f_{L \cdot M \cdot N}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L \cdot M \cdot N}),$$

$$F_l \longrightarrow (\gamma_{M \cdot N \cdot l + 1}, \gamma_{M \cdot N \cdot l + 2}, \dots, \gamma_{M \cdot N \cdot (l + 1)}),$$

$$\gamma_i = \frac{|f_i|^\beta}{\max_{i,l} |f_i|^\beta},$$

где $F_l (l = 1, \dots, L)$ — аномальные поля от гравитирующих либо магнитных масс, находящихся между соответствующими глубинами H_{l-1} и H_{l+1} ($H_0 = 0$, $H_{L+1} = \infty$) для искомых поверхностей раздела, выделенные из общего

гравитационного $\Delta g(x, y, 0)$ или магнитного поля $\Delta Z(x, y, 0)$ по методике повышенных трансформаций, $\beta > 1$ — сглаживающий параметр.

Второй вариант — выбирать множители, используя априорно известные начальные приближения поверхностей:

$$\begin{aligned}\hat{Z} &= [\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \dots, \hat{Z}_L] = \\ &= (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_{m \cdot n}, \dots, \hat{z}_{L \cdot M \cdot N}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L \cdot M \cdot N}), \\ \hat{Z}_l &\longrightarrow (\gamma_{M \cdot N \cdot l + 1}, \gamma_{M \cdot N \cdot l + 2}, \dots, \gamma_{M \cdot N \cdot (l + 1)}), \\ \gamma_i &= \frac{|\frac{\hat{f}_i}{H_i} - 1|^\beta}{\max_{i,l} |\frac{\hat{f}_i}{H_i} - 1|^\beta},\end{aligned}$$

где $\hat{Z}_l (l = 1, \dots, L)$ — известные нулевые приближения соответствующих искомых поверхностей раздела $S_l (l = 1, \dots, L)$, $\beta > 1$ — сглаживающий параметр.

Замечание 8. Для задач гравиметрии и магнитометрии такие нулевые приближения могут быть получены путем использования данных сейсморазведки или электроразведки, бурения и т. д.

Глава 3

Построение параллельных алгоритмов, разработка комплекса программ для многоядерных процессоров, численные эксперименты

Данная глава посвящена разработке параллельных алгоритмов на основе методов, предложенных в первых двух главах, их реализации в виде комплекса программ для многоядерных процессоров и тестированию на синтетических и натуральных данных.

3.1. Разработка параллельных алгоритмов

На основе предложенных автором методов разработаны параллельные алгоритмы и программы для многоядерных процессоров с использованием технологии OpenMP и средств компилятора Intel C++ Compiler. Технология была выбрана по причине общедоступности многоядерных процессоров и возможности портирования разработанных программ на современные со-процессоры Intel Xeon Phi.

В практических задачах типичным размером сетки является $n = 10^3 \times 10^3$, поэтому значительное время занимает вычисление значений интегрального оператора и матрицы производных на каждой итерации. Распараллеливание проводится путем разделения вектора решения и матрицы производных горизонтальными полосами на блоки, число которых соответствует числу процессорных ядер. Основной поток исполнения кроме выполнения своего фрагмента расчетов занимается созданием и синхронизацией дополнительных OpenMP-потоков (рис. 3.1). На текущей итерации каждый поток вычисляет свой блок матрицы производных и значений оператора. Это осуществляется путем использования директивы `#pragma omp parallel` для внешних циклов.

Для более эффективного использования процессорных ядер также используются возможности наборов векторных инструкций SSE, SSE2, AVX, AVX2. Основное их преимущество — использование особых регистров для выполнения одной и той же операции на нескольких числах одновременно (2, 4 или 8). В программном коде это выражается в использовании для внутренних циклов директива компилятора `#pragma simd` для автоматического использования векторного набора инструкций.

Матрица производных имеет большую размерность (для сетки $10^3 \times$

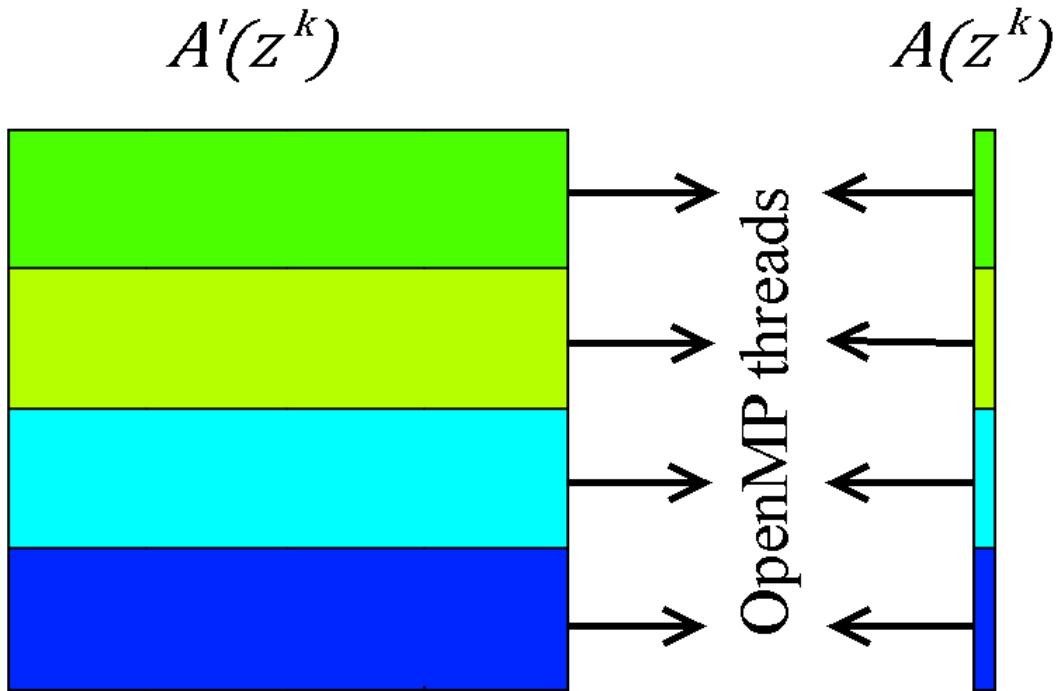


Рис. 3.1. Разбиение данных по потокам исполнения

10^3 размерность матрицы составит $10^6 \times 10^6$) и занимает значительный объем памяти (7500 ГБ). Для оптимизации работы с памятью при вычислениях используется следующий прием. Для сеток довольно большой размерности, когда данные могут не входить в оперативную память, наилучшим по быстродействию оказывается метод вычисления элементов матрицы A' «на лету», т.е. вычисление значения элемента матрицы происходит в момент обращения к этому элементу без сохранения его в оперативную память. Это позволяет существенно снизить количество обращений к памяти и заметно ускорить процесс вычислений по сравнению с полным хранением матрицы и частым переключением страниц виртуальной памяти.

3.2. Реализация алгоритмов в виде комплекса программ

Программный комплекс для решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей поверхностей раздела сред представляет собой исполняемый файл с текстовым интерфейсом.

Для входных и выходных файлов, содержащих двумерные сеточные функции, используются форматы DAT XYZ (.dat) и Surfer Binary Grid (.grd), поддерживаемые распространенными программами.

В настоящее время модули поддерживают решение следующих задач:

1. Вычисление значений аномального гравитационного поля, порождаемого одной или несколькими поверхностями;
2. Вычисление значений аномального магнитного поля, порождаемого одной или несколькими поверхностями для случая произвольно направленной суммарной намагниченности;
3. Восстановление одной поверхности по гравитационным данным линеаризованным методом наискорейшего спуска;
4. Восстановление одной поверхности по гравитационным данным линеаризованным методом сопряженных градиентов;
5. Восстановление одной поверхности по гравитационным данным по компонентным методом;
6. Восстановление одной поверхности по гравитационным данным методом локальных поправок;

7. Восстановление одной поверхности по магнитным данным для случая произвольно направленной суммарной намагниченности линеаризованным методом наискорейшего спуска;
8. Восстановление одной поверхности по магнитным данным для случая произвольно направленной суммарной намагниченности линеаризованным методом сопряженных градиентов;
9. Восстановление одной поверхности по магнитным данным для случая вертикальной намагниченности покомпонентным методом;
10. Восстановление одной поверхности по магнитным данным для случая вертикальной намагниченности методом локальных поправок;
11. Восстановление нескольких поверхностей по гравитационным данным линеаризованным методом наискорейшего спуска с весовыми множителями;
12. Восстановление нескольких поверхностей по гравитационным данным линеаризованным методом минимальной ошибки с весовыми множителями;
13. Восстановление нескольких поверхностей по гравитационным данным модифицированным линеаризованным методом наискорейшего спуска с весовыми множителями;
14. Восстановление нескольких поверхностей по гравитационным данным модифицированным линеаризованным методом сопряженных градиентов с весовыми множителями;

15. Восстановление нескольких поверхностей по магнитным данным линеаризованным методом наискорейшего спуска с весовыми множителями;
16. Восстановление нескольких поверхностей по магнитным данным линеаризованным методом минимальной ошибки с весовыми множителями;
17. Восстановление нескольких поверхностей по магнитным данным модифицированным линеаризованным методом наискорейшего спуска с весовыми множителями;
18. Восстановление нескольких поверхностей по магнитным данным модифицированным линеаризованным методом сопряженных градиентов с весовыми множителями;
19. Вспомогательная задача приближенного выделения гравитационного или магнитного поля от объектов, расположенных между двумя заданными глубинами.

Использование программы выглядит следующим образом:

`SurfaceProcessing <opcode>`

, где `<opcode>` — номер нужной задачи. Остальные параметры соответствуют задаче, например:

`SurfaceProcessing 1 L <input> <output> <h> <dsigma> [nproc]`

, где `nproc` — опциональный параметр, задающий число используемых процессорных ядер (все, если не задано), `L` — число поверхностей, `<input>` —

имя файла, со списком файлов в форматах .grd или .dat, содержащих сеточные функции, задающие поверхности, $\langle\text{output}\rangle$ — имя выходного файла, содержащего сеточную функцию результирующего гравитационного поля, $\langle h \rangle$ — имя файла, содержащего список глубин залегания асимптотических плоскостей для каждой из L поверхностей, $\langle d\sigma \rangle$ - имя файла, содержащего список скачков плотности на каждой из поверхностей.

```
SurfaceProcessing 2 L <input> <output> <h> <dJ> [ nproc ]
```

, где $nproc$ — опциональный параметр, задающий число используемых процессорных ядер (все, если не задано), L — число поверхностей, $\langle\text{input}\rangle$ - имя файла, со списком файлов в форматах .grd или .dat, содержащих сеточные функции, задающие поверхности, $\langle\text{output}\rangle$ — имя выходного файла, содержащего сеточную функцию результирующего магнитного поля, $\langle h \rangle$ — имя файла, содержащего список глубин залегания асимптотических плоскостей для каждой из L поверхностей, $\langle dJ \rangle$ - имя файла, содержащего список скачков намагниченности (по три компоненты) на каждой из поверхностей.

```
SurfaceProcessing 3..6 <input> <output> h dsigma  
eps psi alpha [ nproc ]
```

, где $nproc$ — опциональный параметр, задающий число используемых процессорных ядер (все, если не задано), $\langle\text{input}\rangle$ - имя файла в формате .grd или .dat, содержащего сеточные функции, задающие гравитационное поле, $\langle\text{output}\rangle$ — имя выходного файла, содержащего сеточную функцию приблизенной поверхности раздела, h — глубин залегания асимптотической

плоскости, $d\sigma$ - значение скачка плотности на искомой поверхности, ϵ — значение относительной нормы невязки для останова процесса, ψ — значение демпфирующего параметра, α — значение параметра регуляризации.

```
SurfaceProcessing 7..10 <input> <output> h dJx dJy dJz  
eps psi alpha [nproc]
```

, где $nproc$ — опциональный параметр, задающий число используемых процессорных ядер (все, если не задано), $<input>$ - имя файла в формате .grd или .dat, содержащего сеточные функции, задающие магнитное поле, $<output>$ — имя выходного файла, содержащего сеточную функцию приближенной поверхности раздела, h — глубин залегания асимптотической плоскости, $dJx dJy dJz$ - значение скачка намагниченности (по три компоненты) на искомой поверхности, ϵ — значение относительной нормы невязки для останова процесса, ψ — значение демпфирующего параметра, α — значение параметра регуляризации.

```
SurfaceProcessing 11..14 L <input> weights_type  
<weights_input> <output> <h> <dσ>  
eps psi beta [nproc]
```

, где $nproc$ — опциональный параметр, задающий число используемых процессорных ядер (все, если не задано), $<input>$ - имя файла в формате .grd или .dat, содержащего сеточную функцию суммарного гравитационного поля, $<output>$ — имя выходного файла, который будет содержать список файлов в форматах .grd или .dat с сеточными функциями восстанов-

ленных поверхностей раздела, $\langle h \rangle$ — имя файла, содержащего список глубин залегания асимптотических плоскостей для каждой из L поверхностей, $\langle d\sigma \rangle$ — имя файла, содержащего список скачков плотности на каждой из поверхностей, eps — значение относительной нормы невязки для останова процесса, psi — значение демпфирующего параметра, weights_type — тип выбора весов (0 — разделенные поля, 1 — нулевое приближение-поверхностей), $\langle \text{weights_input} \rangle$ — файл со списком файлов, содержащих входные данные для весов (разделенные поля или нулевое приближение-поверхностей), beta — сглаживающий параметр при выборе весов.

```
SurfaceProcessing 15..18 L <input> weights_type
<weights_input> <output> <h> <dJ>
eps psi beta [ proc ]
```

, где proc — опциональный параметр, задающий число используемых процессорных ядер (все, если не задано), $\langle \text{input} \rangle$ — имя файла в формате .grd или .dat, содержащего сеточную функцию суммарного магнитного поля, $\langle \text{output} \rangle$ — имя выходного файла, который будет содержать список файлов в форматах .grd или .dat с сеточными функциями восстановленных поверхностей раздела, $h = \langle h \rangle$ — имя файла, содержащего список глубин залегания асимптотических плоскостей для каждой из L поверхностей, $\langle dJ \rangle$ — имя файла, содержащего список скачков намагниченности (по три компоненты) на каждой из поверхностей, eps — значение относительной нормы невязки для останова процесса, psi — значение демпфирующего параметра, weights_type — тип выбора весов (0 — разделенные поля, 1 — нулевое приближение-поверхностей), $\langle \text{weights_input} \rangle$ — файл со списком файлов, содержащих входные данные для весов (разделенные поля или

нулевое приближение поверхностей), beta — сглаживающий параметр при выборе весов.

```
SurfaceProcessing 19 L <input> <output> <h>
alpha eps [ nproc ]
```

, где *nproc* — опциональный параметр, задающий число используемых процессорных ядер (все, если не задано), *L* — число поверхностей, *<input>* — имя файла, содержащего сеточную функцию, задающую суммарное гравитационное или магнитное поле, *<output>* — имя выходного файла, содержащего список файлов с сеточными функциями разделенных полей, *<h>* — имя файла, содержащего список глубин задающих слои, содержащие по одной поверхности, *alpha* — параметр регуляризации, *eps* — условие останова итерационного процесса решения СЛАУ при пересчете полей вниз.

Структура комплекса при решении различных видов задач приведена на рис. 3.2 и 3.3.

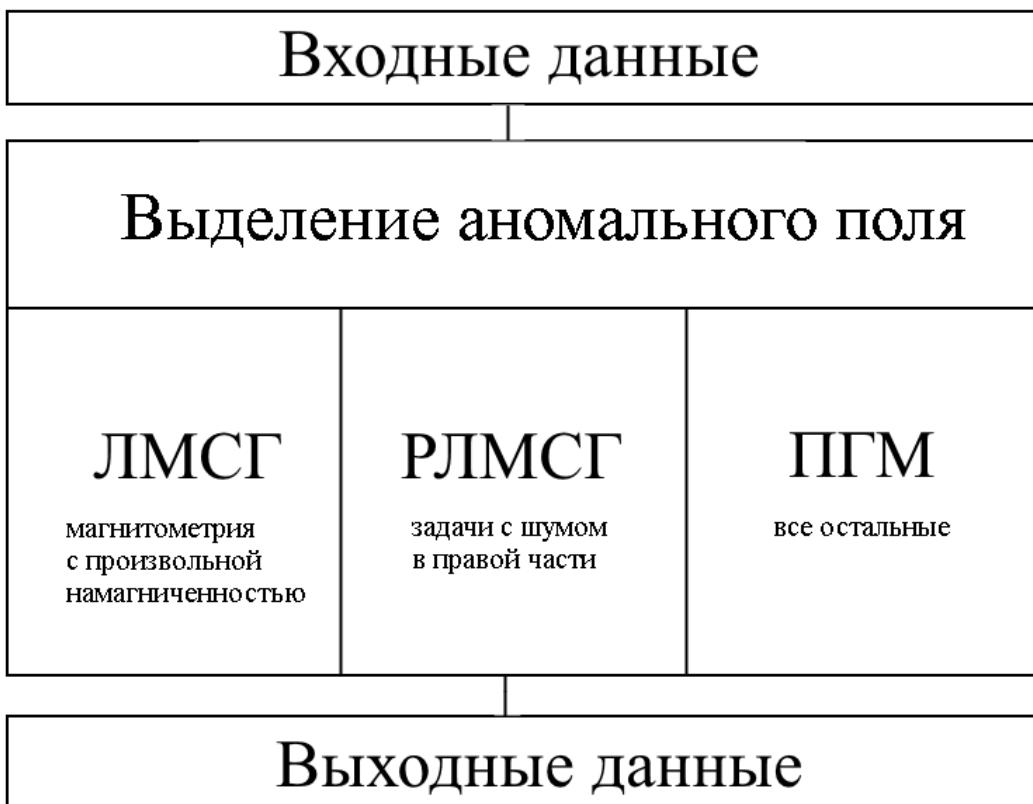


Рис. 3.2. Структура использования комплекса при решении задач о восстановлении одной поверхности

При решении обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении одной поверхности входными данными являются сеточная функция гравитационного или магнитного поля, глубина залегания асимптотической плоскости, разность плотностей или намагниченостей и опционально сеточная функция начального приближения поверхности. Кроме того, входными данными также являются параметры используемого алгоритма, такие как максимальное число итераций, параметр регуляризации и демпфирующий параметр и т.д.

Опциональным этапом является предварительная обработка данных с целью выделения аномального поля. На этом этапе используется методика повышения трансформаций для исключения из правой части влияния

боковых, глубинных и приповерхностных источников. Подготовленная правая часть дается на вход одному из трех алгоритмов. Выходными данными являются сеточная функция восстановленной поверхности, время выполнения программы и значения норм невязок на последовательных итерациях.



Рис. 3.3. Структура использования комплекса при решении задач о восстановлении нескольких поверхностей

В случае решения задач о восстановлении нескольких поверхностей пользователю дополнительно предлагается выбор алгоритма: разделение полей и решение отдельных уравнений для каждой поверхности либо решение базового уравнения и восстановление всех поверхностей одновременно.

3.2.1. Рекомендации по использованию разработанных алгоритмов

Для решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении одной поверхности раздела по сильно возмущенным данным автор рекомендует использовать регуляризованный метод сопряженных градиентов (РЛМСГ).

Для решения обратной задачи магнитометрии о восстановлении одной поверхности раздела в случае произвольно направленной суммарной намагниченности слоев рекомендуется использовать линеаризованный метод сопряженных градиентов (ЛМСГ).

Для решения задач о восстановлении одной поверхности на сетках большой размерности для ускорения вычислений рекомендуется использовать покомпонентный градиентный метод (ПГМ), который значительно снизит время счета по сравнению с другими методами.

При решении задач о восстановлении нескольких поверхностей раздела сред автор рекомендует использовать линеаризованный модифицированный метод сопряженных градиентов с весовыми множителями (ЛММСГ).

В настоящее время комплекс программ может быть установлен на любом персональном компьютере под управлением ОС Windows или GNU/Linux.

В будущем планируется встроить комплекс программ в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах» для обеспечения доступа к выполнению программ на суперкомпьютере «Уран» Института математики и механики УрО РАН через веб-интерфейс (см. [102]).

3.3. Решение модельных задач с анализом параллелизма

3.3.1. Оценки ускорения и эффективности параллельных алгоритмов

Для исследования параллельных свойств и сравнения работы последовательных и параллельных алгоритмов вводятся некоторые характеристики. Основные — это коэффициенты ускорения и эффективности:

$$S_m = \frac{T_1}{T_m},$$

$$E_m = \frac{S_m}{m},$$

где T_1 — время выполнения последовательного алгоритма на одном процессорном ядре, T_m — время выполнения параллельного алгоритма на m ($m > 1$) ядрах процессора.

T_m представляет собой совокупность чистого времени счета и накладных расходов на создание и синхронизацию потоков исполнения

$$T_m = T_c + T_o.$$

Число процессорных ядер m соответствует упомянутому разбиению матрицы и векторов на m фрагментов.

В общем случае эффективность распараллеливания E_m меняется в пределах $0 < E_m < 1$. В идеальном случае при равномерной и сбалансированной загрузке процессорных ядер и минимальном времени на накладные расходы E_m близко к единице, но при решении практических задач она уменьшается за счет накладных расходов и дисбаланса нагрузки.

Основной целью при построении параллельных алгоритмов является получение максимального ускорения и эффективности:

$$S_m \rightarrow m,$$

$$E_m \rightarrow 1.$$

Условиями высокой эффективности являются:

- 1) равномерная загрузка процессорных ядер (отсутствие простоев);
- 2) масштабируемость параллельного алгоритма (возможность ускорения вычислений пропорционально увеличению числа используемых процессорных ядер).

3.3.2. Задача 1: Восстановление одной поверхности раздела по модельным гравитационным данным

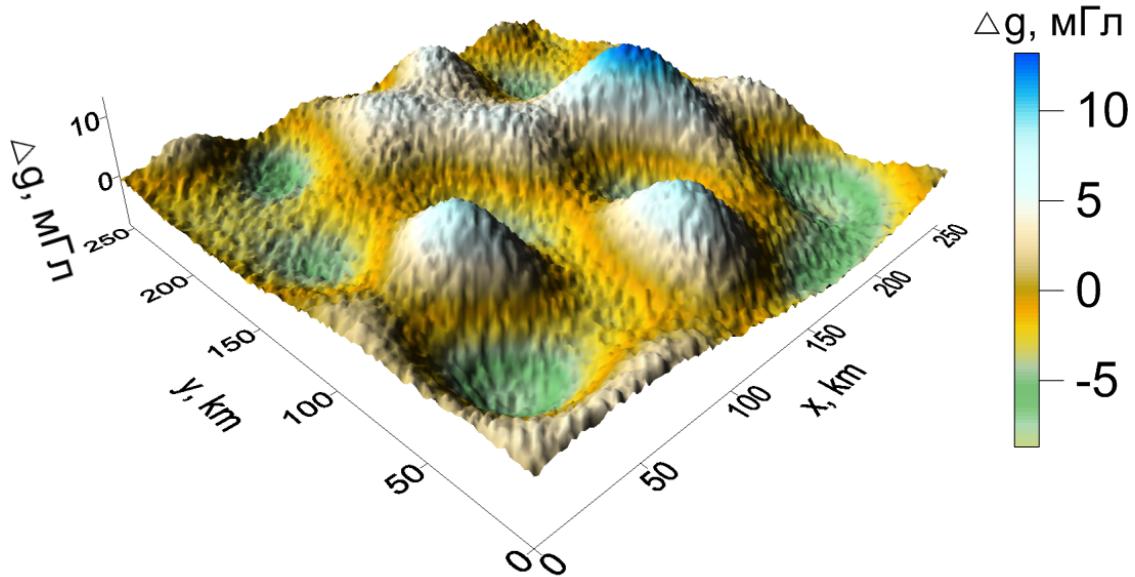


Рис. 3.4. Гравитационное поле

Эксперимент проводился для сравнения методов решения обратной задачи о восстановлении одной поверхности раздела по относительной погрешности $\delta = \|z - \bar{z}\|^2 / \|\bar{z}\|^2$, где z — приближенное решение, \bar{z} — исходная поверхность, и времени счета.

Исходная поверхность \bar{z} приведена на рис. 3.6. По модельному гравитационному полю со внесенным шумом с уровнем 10% от максимального значения поля (рис. 3.4) на площади $256 \times 256 \text{ км}^2$ была восстановлена плотностная границы с асимптотой $H = 6 \text{ км}$ и скачком плотности $\Delta\sigma = 0,1 \text{ г}/\text{см}^3$. Задача была решена четырьмя методами на 1 и 8 ядрах процессора Intel Xeon E5-2660 (2.2 GHz):

- линеаризованный метод наискорейшего спуска (РЛМНС) [78] со значениями параметров $\psi = 1, \alpha = 10^{-4}$;

- линеаризованный метод сопряженных градиентов (РЛМСГ) (2.4) со значениями параметров $\psi = 1, \alpha = 10^{-4}$;
- метод локальных поправок (РМЛП) [47] со значениями параметров $\alpha = 10^{-2}$;
- покомпонентный градиентный метод (РПГМ) (2.10) со значениями параметров $\psi = 0.05, \alpha = 10^{-4}$.

Условием останова было выбрано $\|A(z) - F\|^2 / \|F\|^2 < \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$.

Значения параметров подбирались экспериментальным способом — максимальное значение, при котором норма невязки на последовательных итерациях уменьшается.

На рис. 3.6 приведена поверхность раздела, восстановленная методом ЛМСГ.

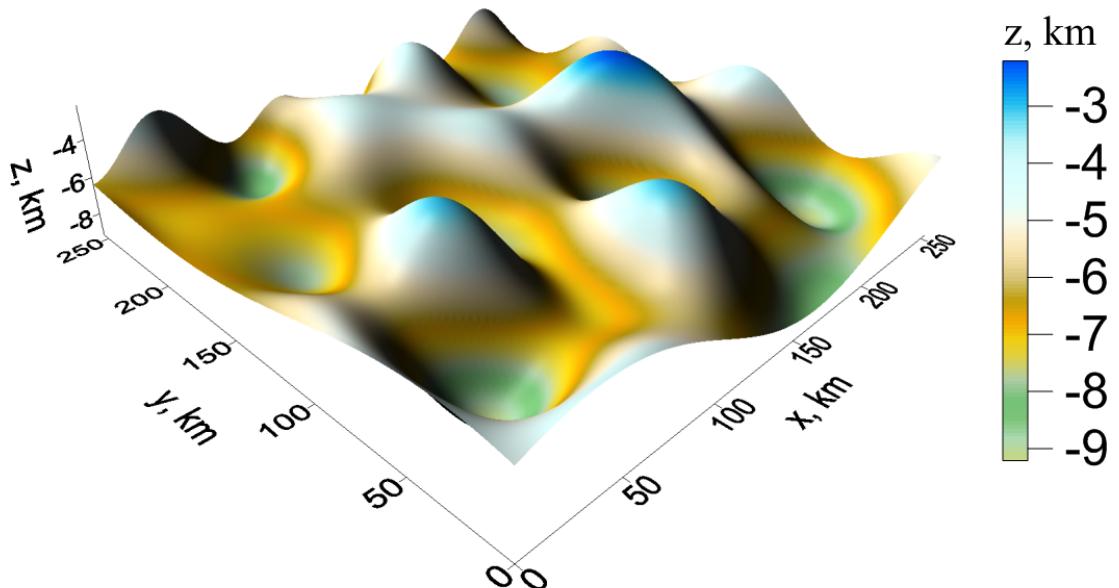


Рис. 3.5. Исходная поверхность

В таблице 3.1 приведены названия методов, время выполнения на одном T_1 и восьми T_8 ядрах процессора, ускорение S_8 и эффективность E_8

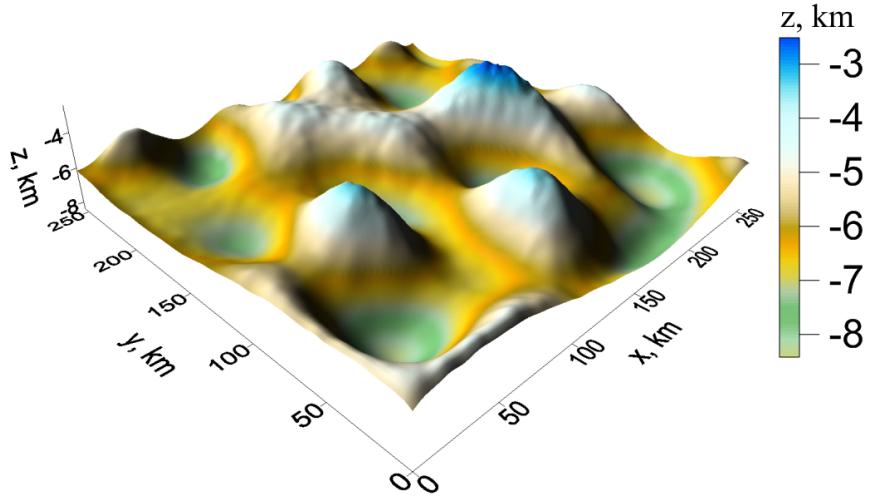


Рис. 3.6. Восстановленная поверхность

параллельного алгоритма при использовании восьми ядер. Размер сетки составлял $2^{10} \times 2^{10}$, размер матрицы производных при этом $2^{20} \times 2^{20}$.

Метод	Число итераций	δ	T_1	T_8	Ускорение S_8	Эффективность E_8
РЛМНС	80	0.1	68 мин.	8.6 мин.	7.9	0.98
РЛМСГ	20	0.1	17 мин.	2 мин.	7.8	0.97
РМЛП	60	0.4	36 мин.	4.6 мин.	7.33	0.92
РПГМ	40	0.25	25 мин.	3.3 мин.	7.5	0.93

Таблица 3.1. Результаты численных экспериментов

Вывод. Эксперименты показали, что линеаризованный метод сопряженных градиентов при подходящем подборе параметров дает наилучший по погрешности результат. Покомпонентный градиентный метод дает время, сравнимое с методом локальный поправок при сравнимой точности. Результаты данного эксперимента опубликованы в работе [112].

3.3.3. Задача 2: Восстановление модельной поверхности «параллелепипед» по магнитным данным в случае произвольно направленной суммарной намагниченности

Эксперимент проводился для демонстрации неоднозначности и важности учета направления разности намагниченостей слоев при решении структурной обратной задачи магнитометрии о восстановлении поверхности раздела.

По заданной функции поверхности (точное решение задачи) (рис. 3.7)

$$z = -10 + 3e^{-(x/15)^{20}-(y/15)^{20}}$$
 км с асимптотической плоскостью $h = 10$ км была решена прямая задача и найдено магнитное поле при разнице намагниченостей $\Delta \mathbf{J} = (-2; 2; 1)$ А/м (рис. 3.8).

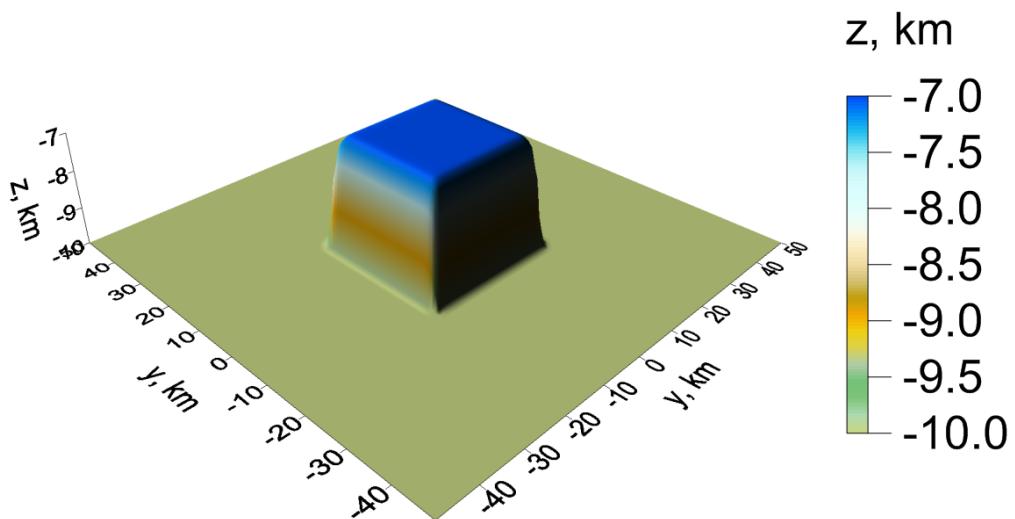


Рис. 3.7. Исходная поверхность (точное решение)

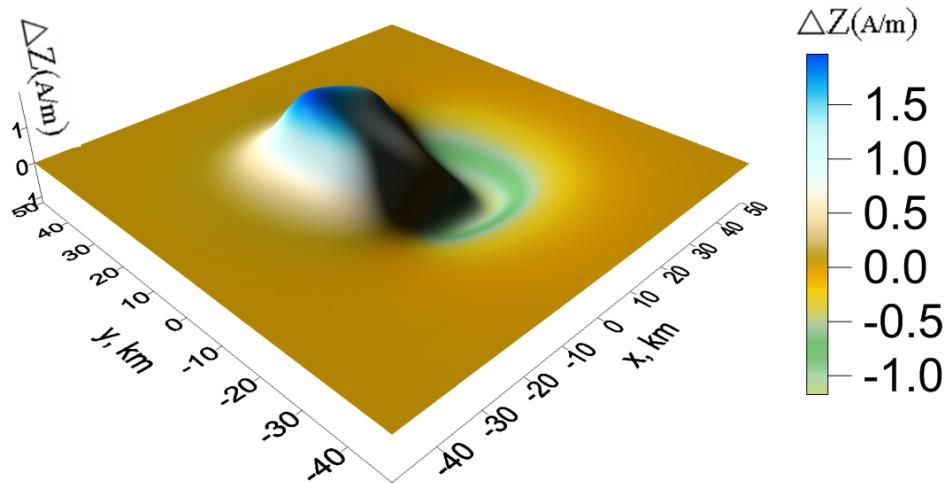


Рис. 3.8. Модельное магнитное поле

Затем по данному полю было решено несколько обратных задач и восстановлены поверхности, при этом брались различные значения скачка намагниченности.

На рис. 3.9 представлено решение, полученное при предположении, что разность намагниченностей вертикальна $\Delta\mathbf{J} = (0; 0; 1)$ А/м, т. е., пытаясь решить уравнение (1.5).

На рис. 3.10 представлено решение, полученное при решении уравнения (1.9) при $\Delta\mathbf{J} = (-2; 2; 1)$ А/м.

При этом при верном выборе $\Delta\mathbf{J} = (-2; 2; 1)$ А/м для достижения относительной нормы невязки $\varepsilon = 0,005$ потребовалось 20 итераций, а неверном выборе и попытке решения уравнения для случая вертикально направленной намагниченности норма невязки $\varepsilon = 0,05$ достигалась более чем за 500 итераций.

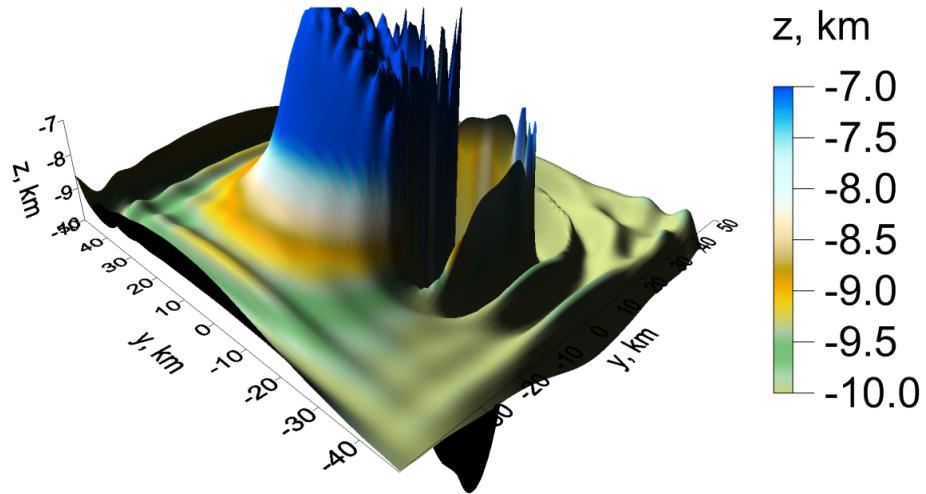


Рис. 3.9. Восстановленная поверхность при $\Delta\mathbf{J} = (0; 0; 1)$ А/м

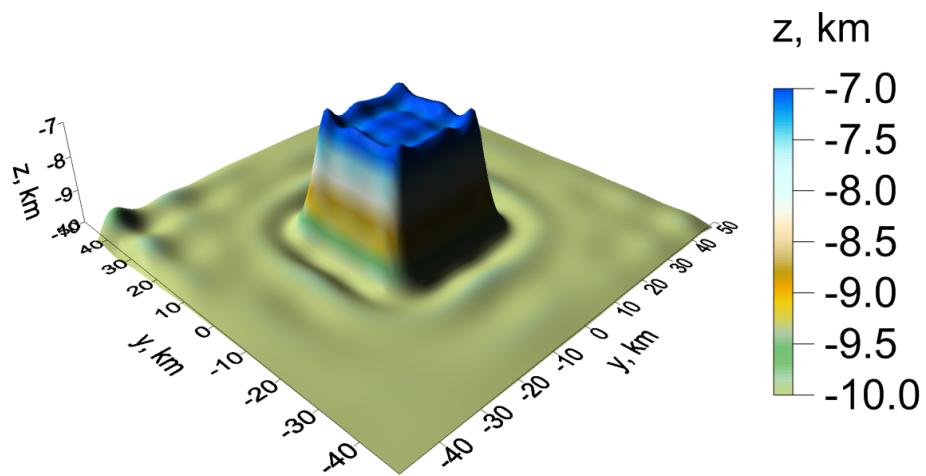


Рис. 3.10. Восстановленная поверхность при $\Delta\mathbf{J} = (-2; 2; 1)$ А/м

Вывод. Проведенный эксперимент показывает, что учет направления намагниченности важен и значительно влияет как на получаемое решение, так и на скорость сходимости и устойчивость задачи. При попытке решения задачи в предположении случая только вертикальной намагниченности можно получить решение, дающее некоторое уменьшение невязки по правой части, но значительно отличающееся от истинного.

3.3.4. Задача 3: Восстановление поверхности раздела сред по модельным магнитным данным в случае произвольно направленной суммарной намагниченности

Эксперимент проводился для оценки времени счета и анализа ускорения и эффективности разработанного алгоритма решения обратной задачи магнитометрии о восстановлении поверхности раздела в случае произвольно направленной намагниченности.

По заданной функции поверхности (точное решение задачи) (рис. 3.12)
$$z = 10 + \sin(x/10)\cos(y/20)e^{-(x/60)^2-(y/60)^2}$$
 км с асимптотической плоскостью $h = 10$ км и разницей намагниченостей $\Delta\mathbf{J} = (0, 57; 0, 57; 0, 57)$ А/м была решена прямая задача и получено магнитное поле (рис. 3.11). Для решения обратной задачи использовался линеаризованный метод сопряженных градиентов с условием останова $\varepsilon = 0.01$. Вычисление потребовало 7 итераций.

На рис. 3.13 показана восстановленная поверхность. Относительная погрешность δ составила 0.01.

В таблице 3.2 приведены времена выполнения, ускорение и эффективность параллельного алгоритма, выполняемого на восьмиядерном процессоре Intel Xeon E5-2660 (2.2 ГГц).

На рис. 3.14 показаны графики ускорения и эффективности в зависимости от числа использованных процессорных ядер. Задача решалась на сетке $2^{10} \times 2^{10}$, при этом размер матрицы производных составил $2^{20} \times 2^{20}$.

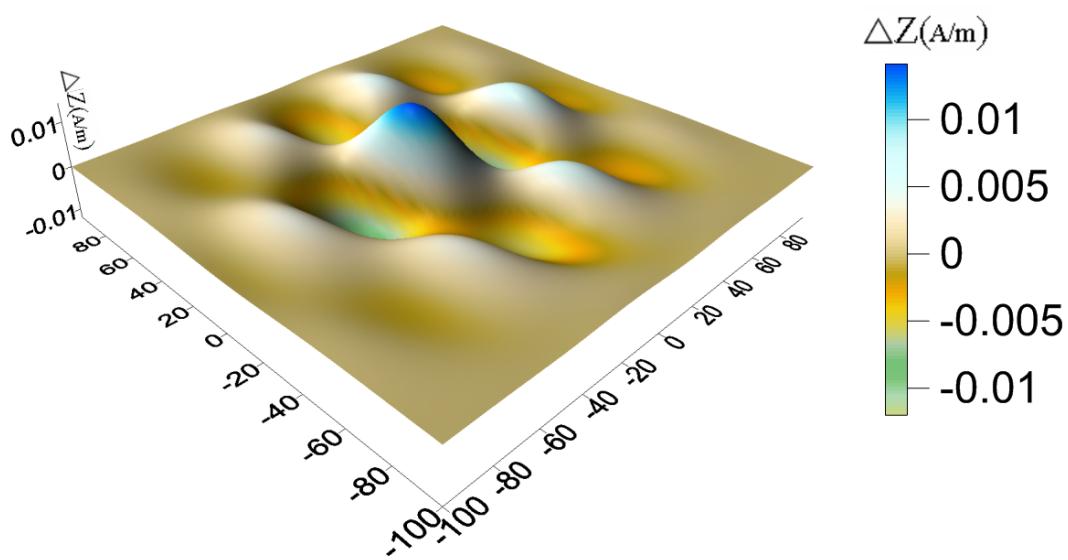


Рис. 3.11. Магнитное поле

Число ядер m	Время, мин.	Ускорение S_m	Эффективность E_m
1	180		
2	91	1,98	0,99
3	61	2,94	0,98
4	46	3,88	0,97
5	38	4,75	0,95
6	32	5,64	0,94
7	28	6,44	0,92
8	25	7,2	0,9

Таблица 3.2. Результаты численных экспериментов

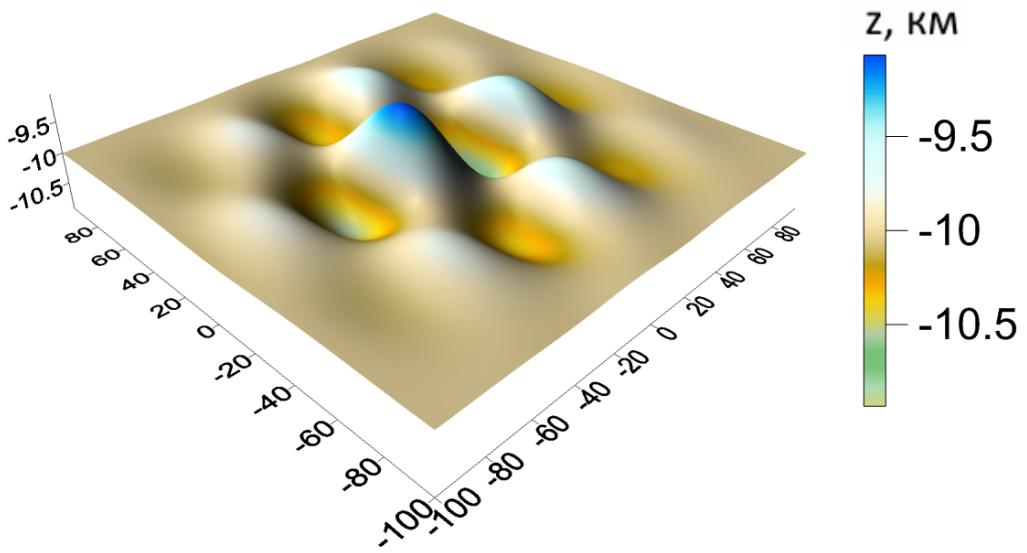


Рис. 3.12. Исходная поверхность

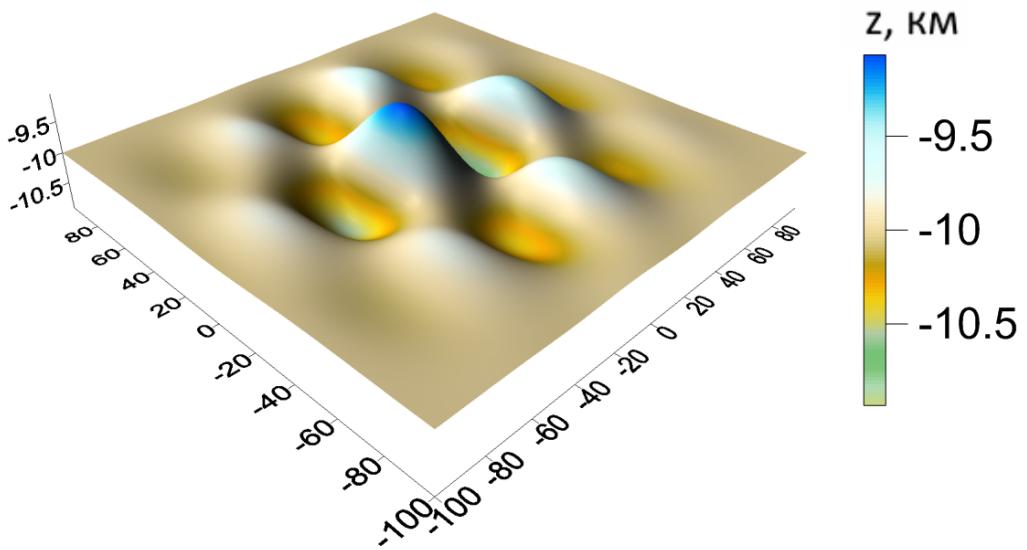


Рис. 3.13. Восстановленная поверхность

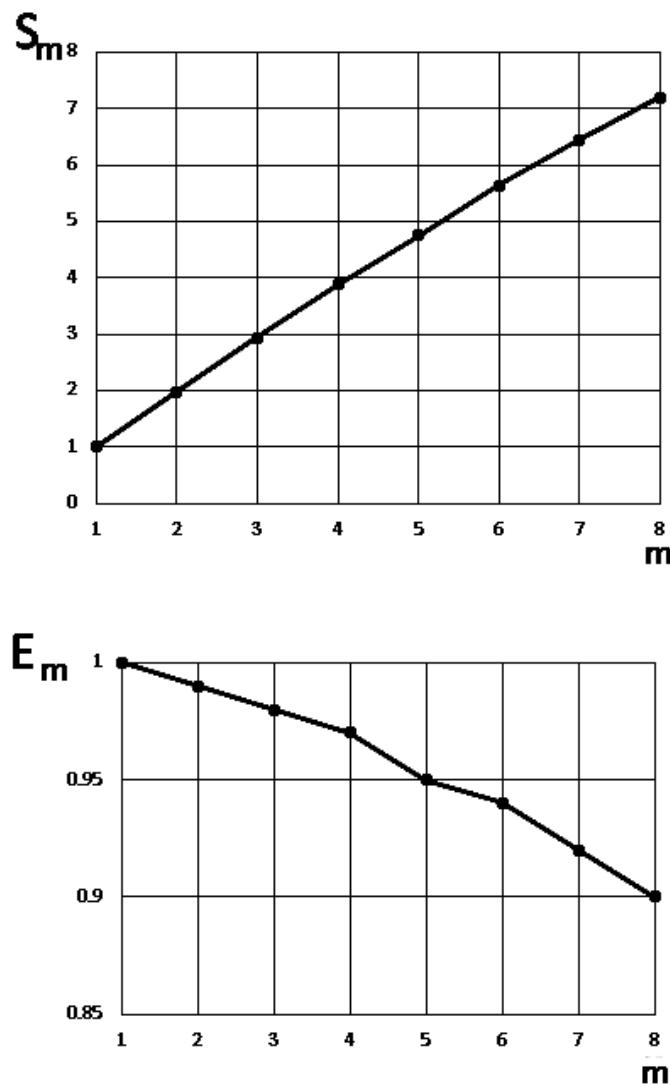


Рис. 3.14. Зависимость ускорения S_m и эффективности E_m от числа ядер m

Вывод. Разработанный алгоритм на основе линеаризованного метода сопряженный градиентов позволяет решать структурную обратную задачу магнитометрии о восстановлении поверхности раздела в случае произвольно направленной суммарной намагниченности. Эксперимент демонстрирует высокую эффективность разработанного параллельного алгоритма и программы.

3.3.5. Задача 4: Восстановление двух поверхностей по модельным гравитационным данным

Эксперимент проводился для демонстрации неоднозначности при решении базовых интегральных уравнений структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении нескольких поверхностей.

Рассматривается стурнная задача гравиметрии для трехслойной среды, разделенной двумя поверхностями. Суммарное гравитационное поле (рис. 3.15) находилось путем решения прямой задачи гравиметрии с известными поверхностями (рис. 3.16). Поверхности имеют асимптотические плоскости $H_1 = 5$ км, $H_2 = 20$ км. Скачки плотности брались равными $\Delta\sigma_1 = 0,21$, $\Delta\sigma_2 = 0,07$ г/см³.

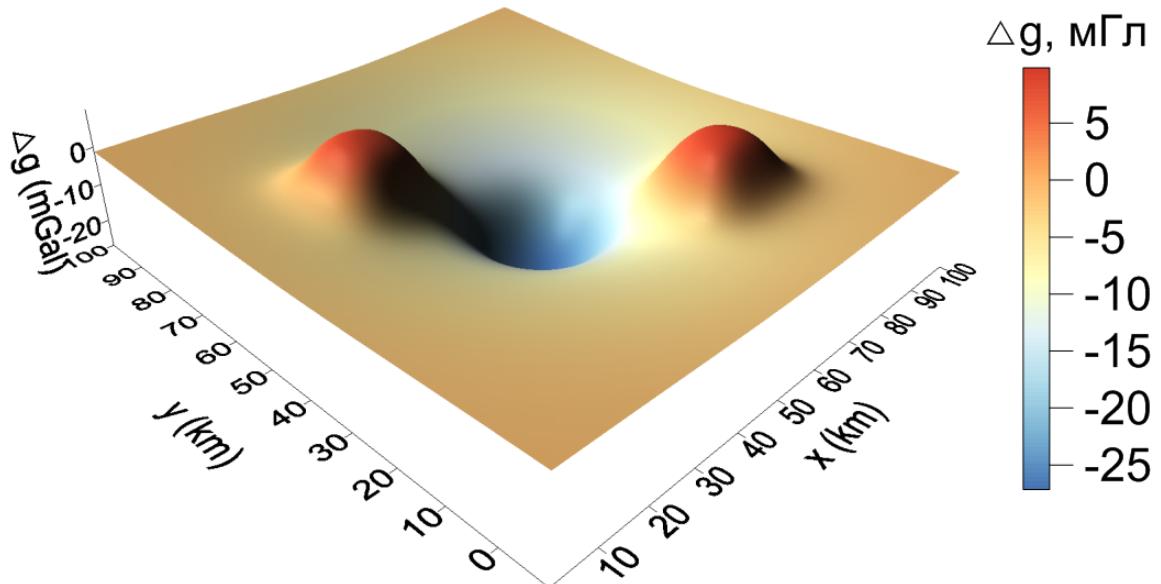


Рис. 3.15. Суммарное гравитационное поле

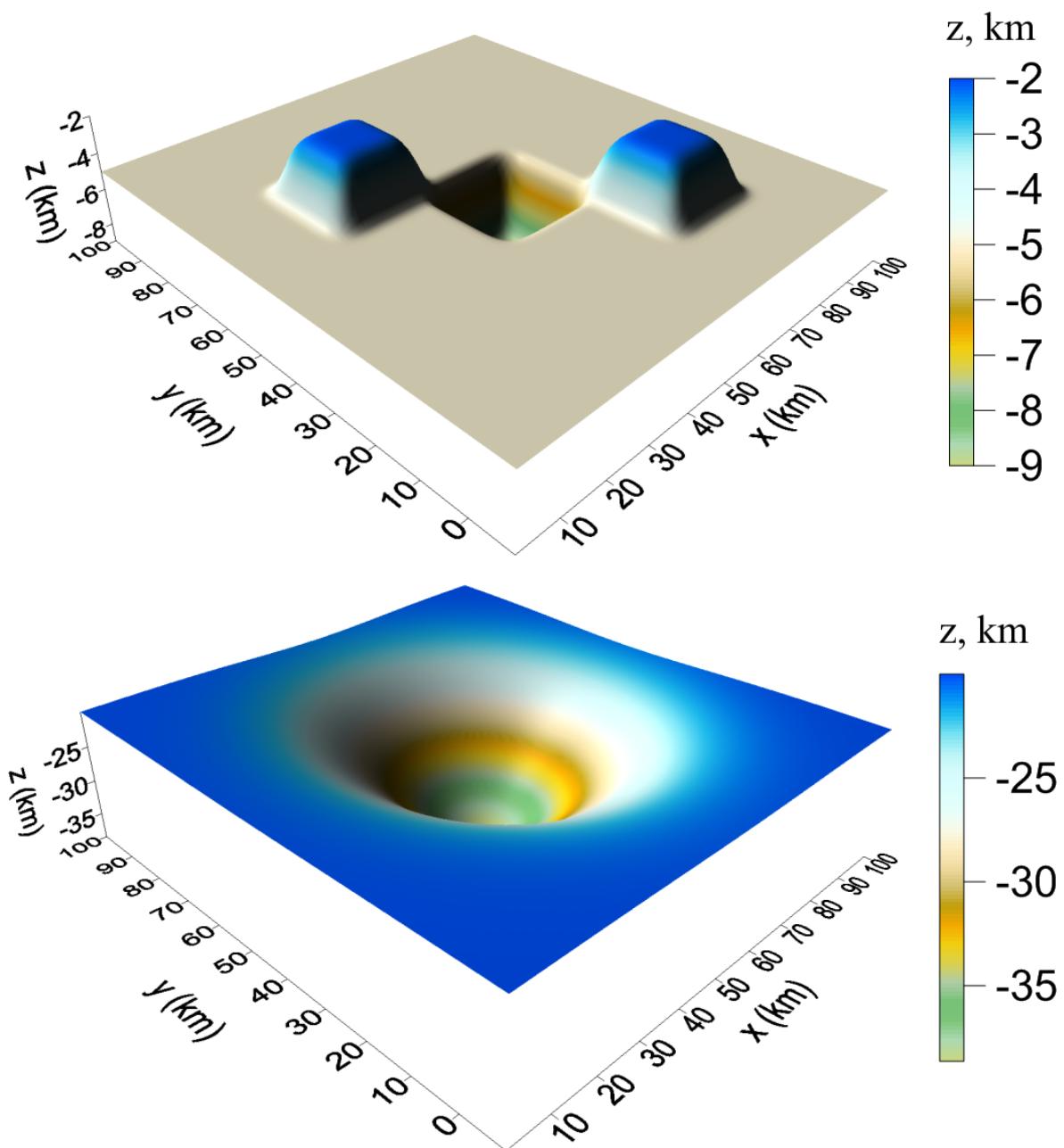


Рис. 3.16. Исходные поверхности

На рис. 3.17 и 3.18 представлены 2 варианта решения — без использования весовых множителей и с использованием весовых множителей. Оба решения дают относительную норму невязки по правой части $\varepsilon = 0,001$. Погрешность поверхностей, восстановленных с использованием весовых множителей, составила 3 %, в то время как для поверхностей, восстановленных

без использования весовых множителей, приближенное решение значительно отличается от точного и погрешности составили 20%.

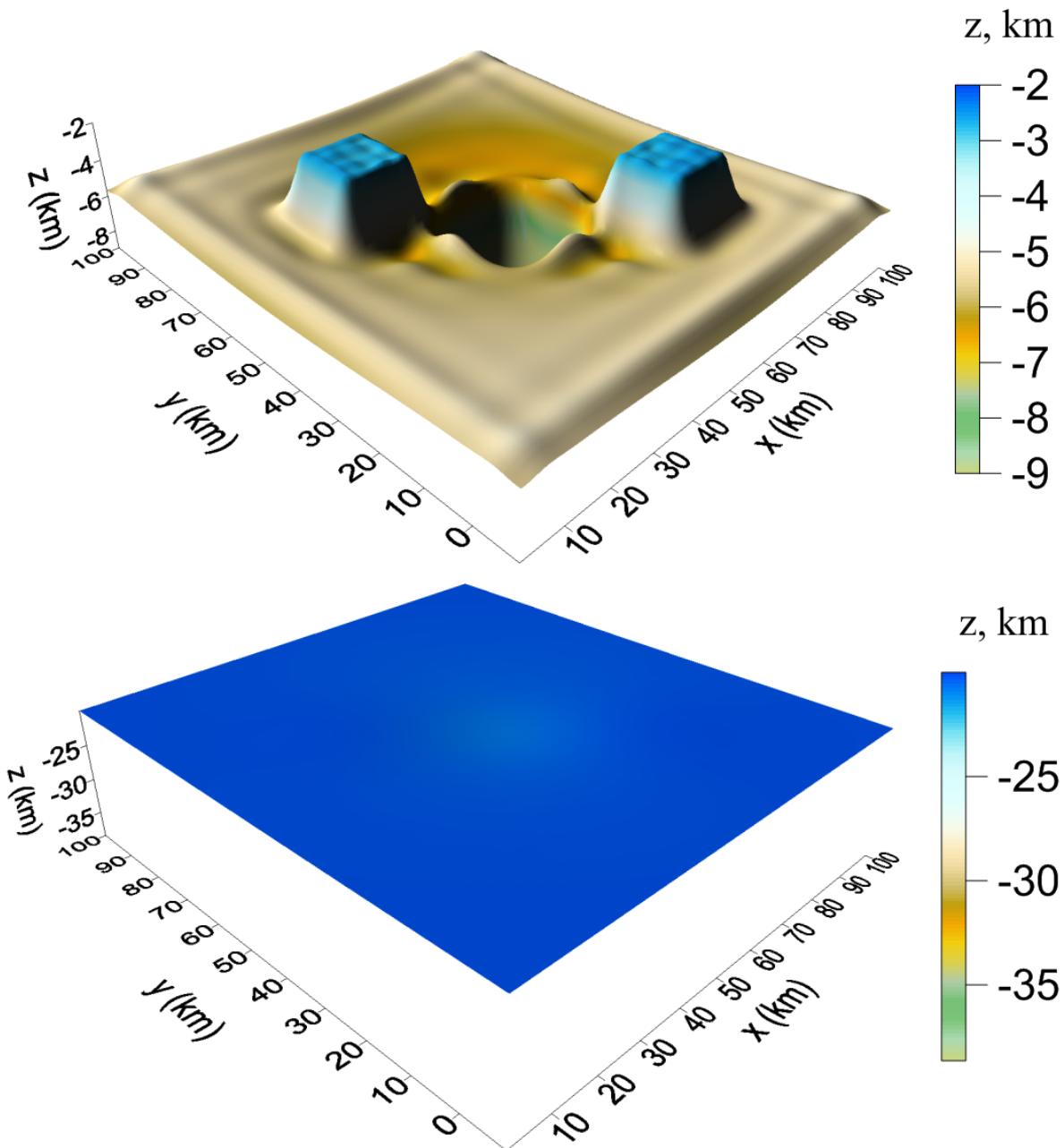


Рис. 3.17. Поверхности, восстановленные без использования весовых множителей

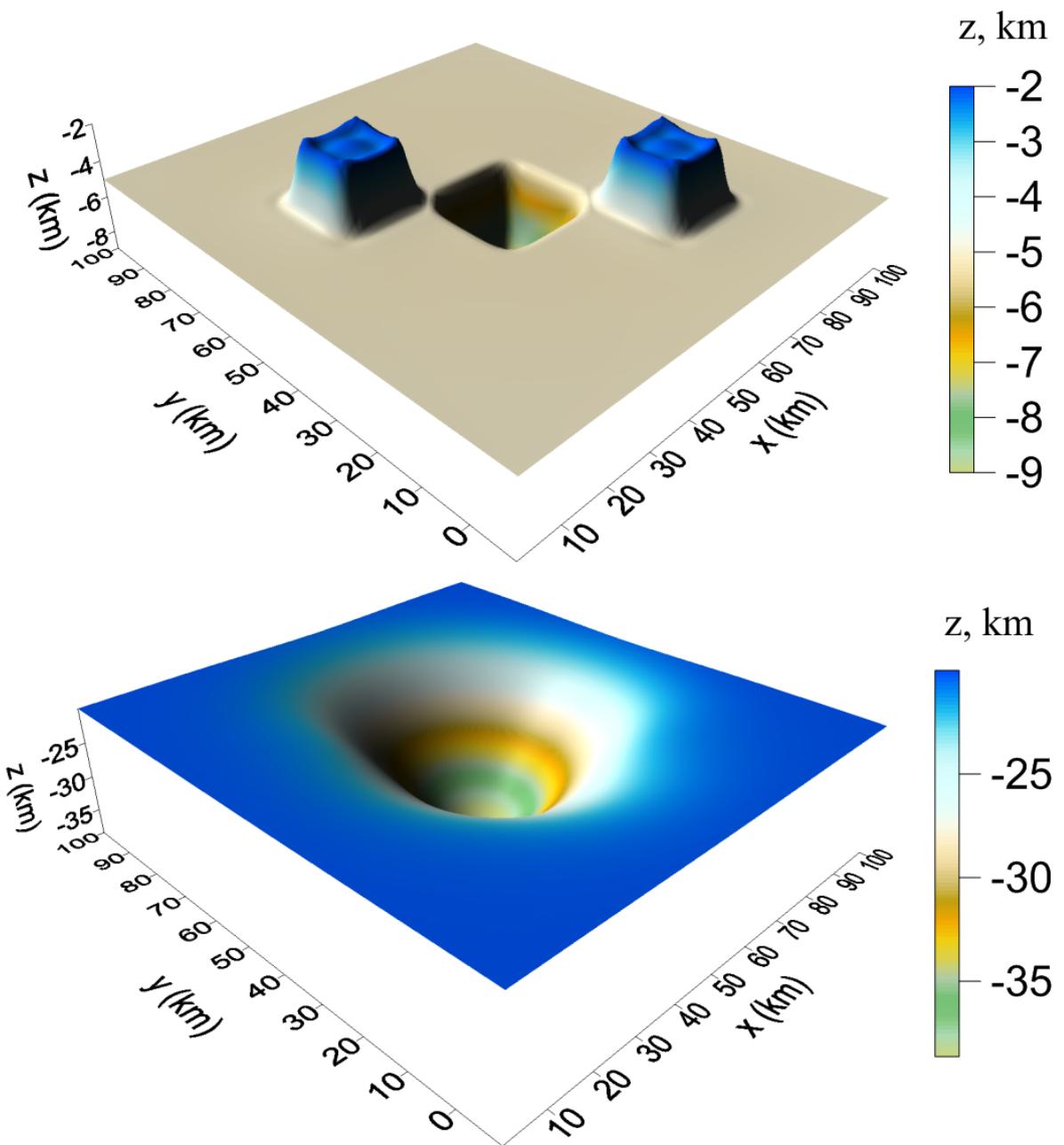


Рис. 3.18. Поверхности, восстановленные с использованием весовых множителей

Вывод. Эксперименты показывают, что решение задачи о восстановлении нескольких поверхностей не является единственным, полученные решения могут значительно различаться. Алгоритм, использующий весовые множители, позволяет получить решение, близкое к истинному.

3.3.6. Задача 5: Восстановление двух поверхностей по модельным магнитным данным

Эксперимент проводился для сравнения традиционного алгоритма (разделение суммарное поля на составляющие и независимое восстановление каждой поверхности) и нового алгоритма (восстановление всех поверхностей одновременно из базового уравнения).

Рассматривается структурная задача магнитометрии для трехслойной среды, разделенной двумя поверхностями, заданными на площади $90 \times 100 \text{ км}^2$. Суммарное магнитное поле находилось путем решения прямой задачи магнитометрии с известными поверхностями (рис. 3.19). Две поверхности с асимптотами $H_1 = 5 \text{ км}$, $H_2 = 20 \text{ км}$. Скачки намагниченности брались равными $\Delta J_{z,1} = 0,2 \text{ А/м}$, $\Delta J_{z,2} = 0,2 \text{ А/м}$.

Задача решалась с использованием двух алгоритмов — традиционного и нового, с использованием линеаризованного метода наискорейшего спуска с весовыми множителями. Условием останова было $\varepsilon = 0,1$. Кроме того, решена задача восстановления двух поверхностей по полю со внесенным белым шумом амплитудой в 15%.

На рис. 3.21 приведены поверхности, восстановленные по полю без шума, а на рис. 3.22 — по зашумленному полю.

В таблице 3.3 приведены T_1, T_8 — времена выполнения на 1 и на 8 ядрах процессора Intel Xeon X5675, число итераций для задачи с зашумленным полем.

$\delta = \|\bar{z} - z\| / \|\bar{z}\|$ — относительные погрешности по первой и второй поверхностям.

Задача решалась на сетке $2^8 \times 2^8$, при этом размер матрицы производных составил 65536×65536 .

Алгоритм	δ_1	δ_2	Число итераций	T_1	T_8
Трад. алгоритм	0.061	0.056	89	5.5 часа	39 мин.
Новый алгоритм	0.038	0.039	39	2.5 часа	21 мин.

Таблица 3.3. Результаты численных экспериментов

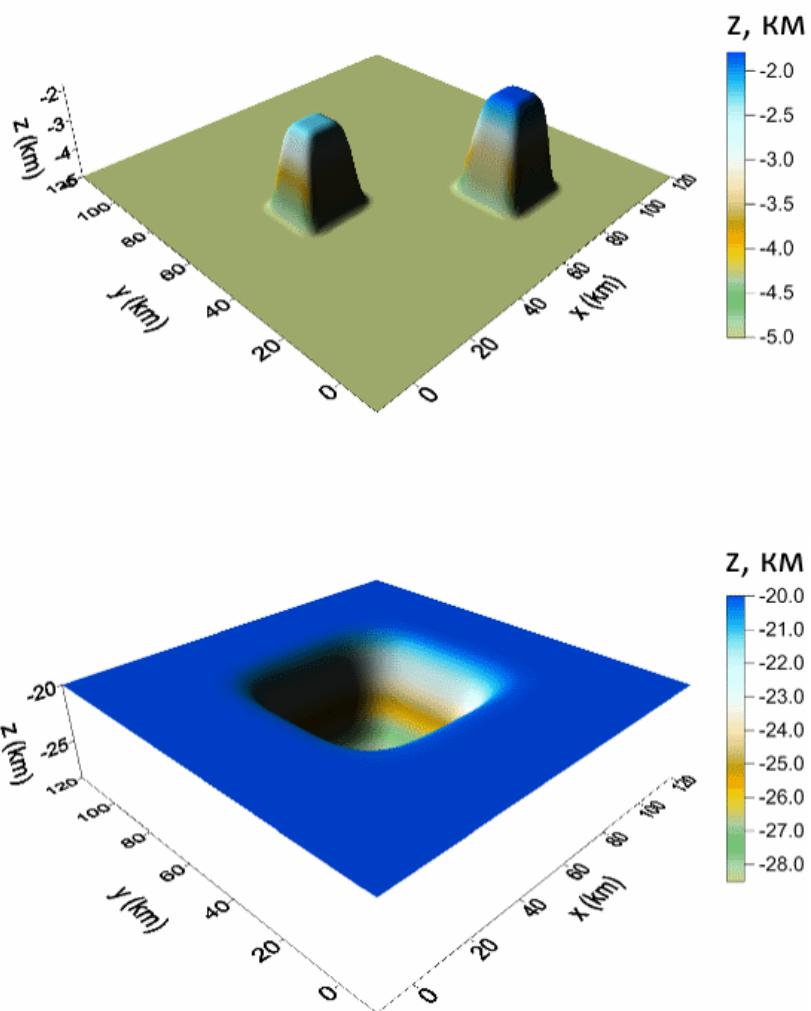


Рис. 3.19. Исходные поверхности

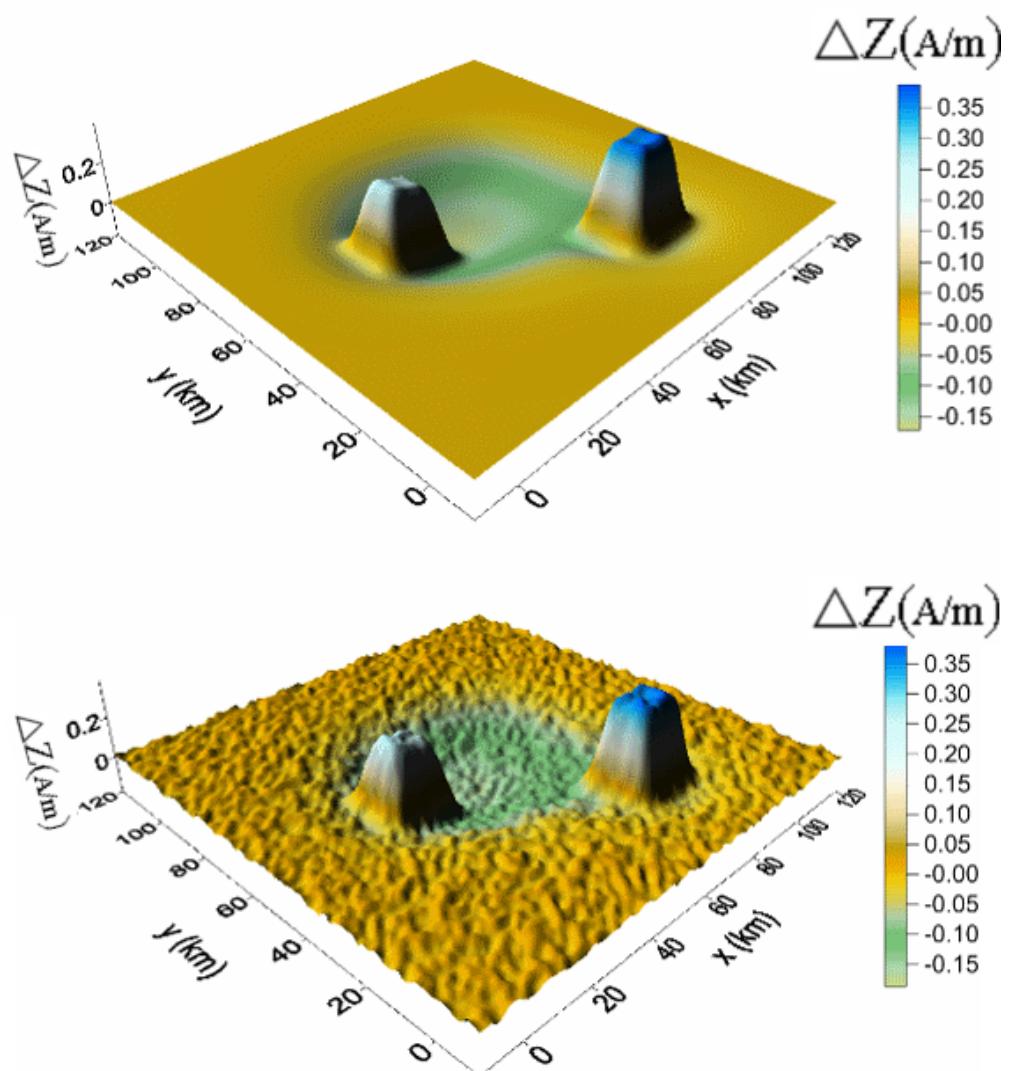


Рис. 3.20. Суммарные магнитные поля

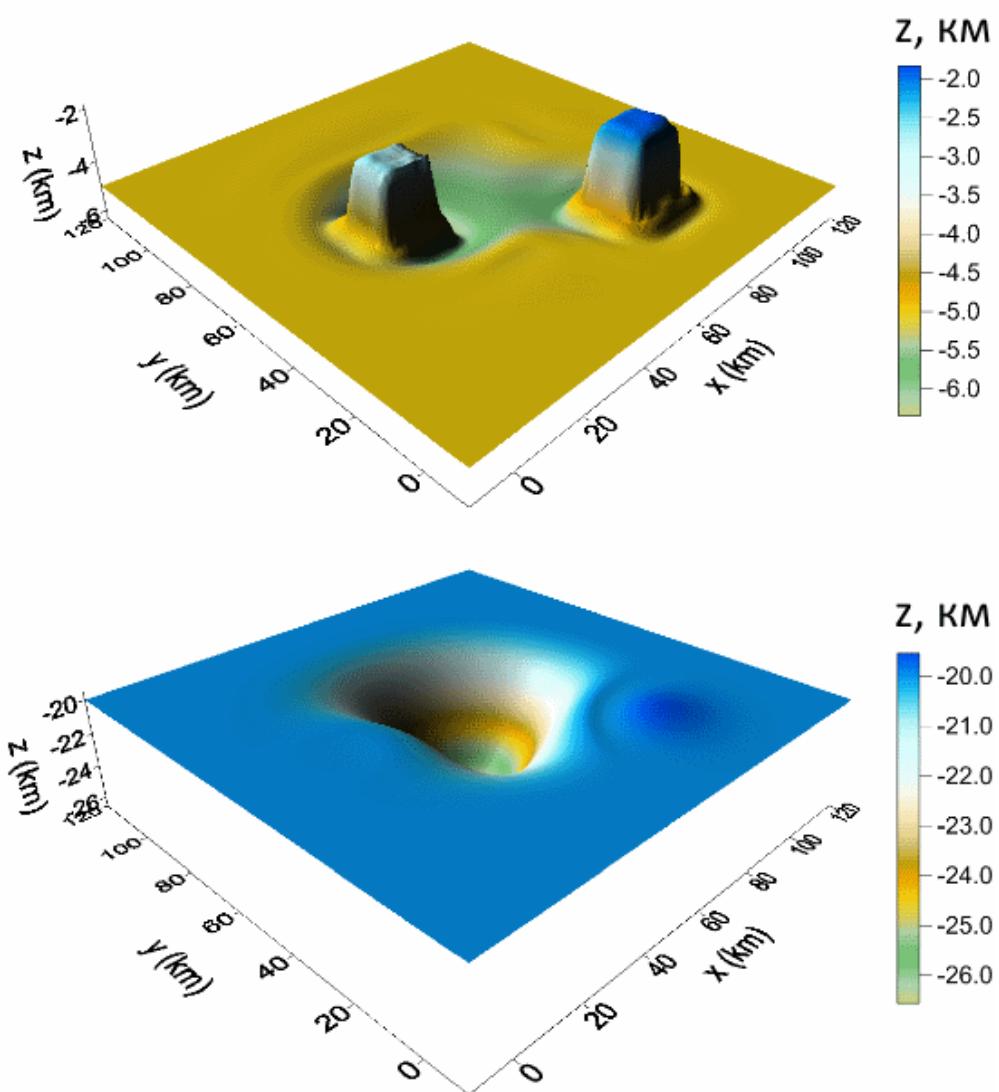


Рис. 3.21. Поверхности, восстановленные по полю без шума

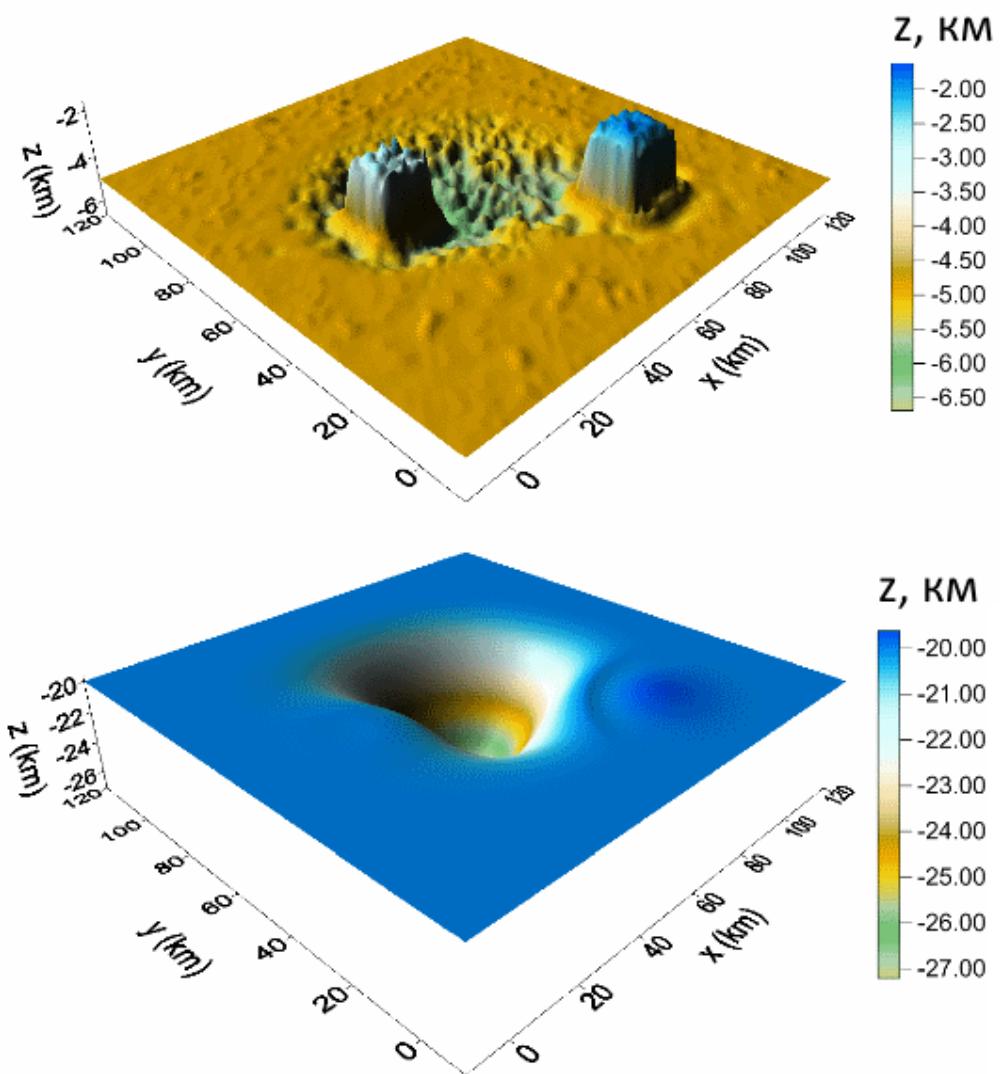
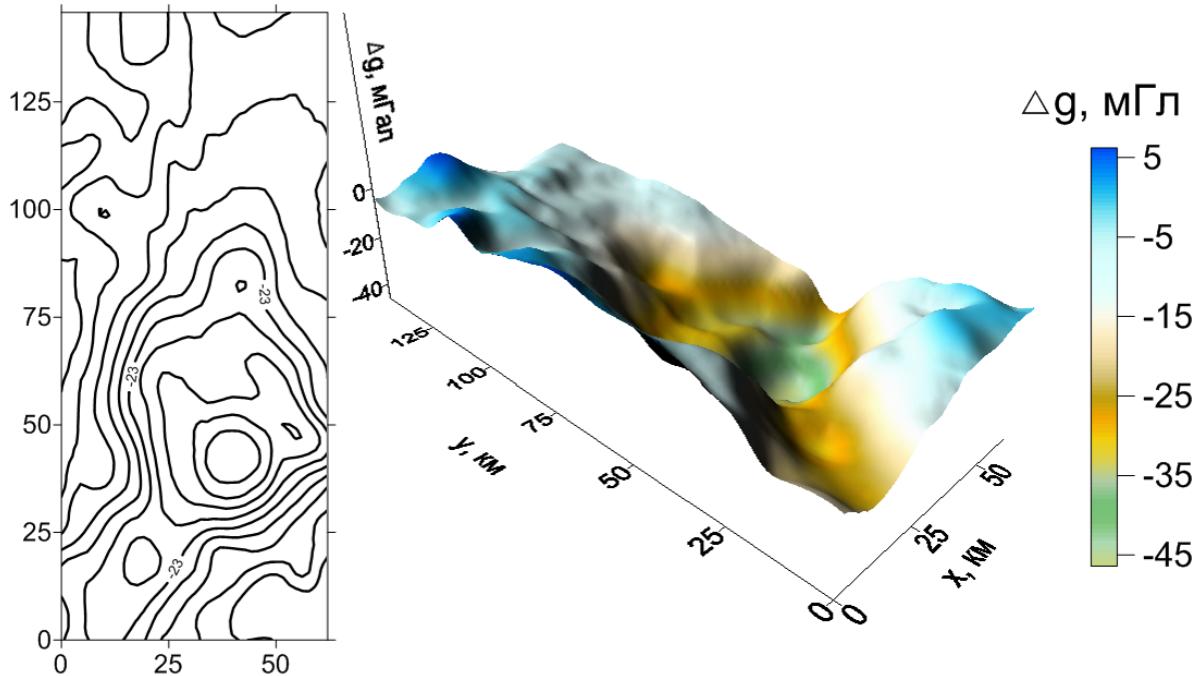


Рис. 3.22. Поверхности, восстановленные по зашумленному полю

Вывод. Эксперимент показывает, что использование нового алгоритма в два раза снижает время выполнения, при этом несколько повышая точность полученного решения в случае возмущенных данных.

3.3.7. Задача 6: Восстановление трех поверхностей по реальным гравитационным данным



зультирующий вектор решения z размерности 35424 и матрицу $A'(z^k)^T$ размерности 35424×8856 .

Задача решена на 6 ядрах процессора Intel традиционным алгоритмом и новым — в обоих случаях с помощью метода ЛМНС с весовыми множителями при — с помощью метода ЛМНС с $\psi = 0,05$ и $\beta = 1,4$. При этом в обоих случаях относительная норма невязки $\varepsilon = 0,15$ по сравнению с начальной $\varepsilon_0 = 1$ уменьшилась на два порядка.

На рис. 3.24 и 3.25 приведены результаты, полученные традиционным и новым алгоритмом.

В таблице 3.4 приведены результаты эксперимента. Число итераций (в случае традиционного алгоритма суммарное число итераций, потраченных на восстановление трех поверхностей), T — время выполнения последовательной программы.

Алгоритм	ε	Число итераций	T
Традиционный	0,015	288	102 с
Новый	0,015	70	73 с

Таблица 3.4. Результаты численных экспериментов

Вывод. Результаты эксперимента показывает, что новый алгоритм, предлагаемый автором, дает результаты, сравнимые с традиционным при меньшем времени выполнения. Результаты решения задачи опубликованы в работе [103].

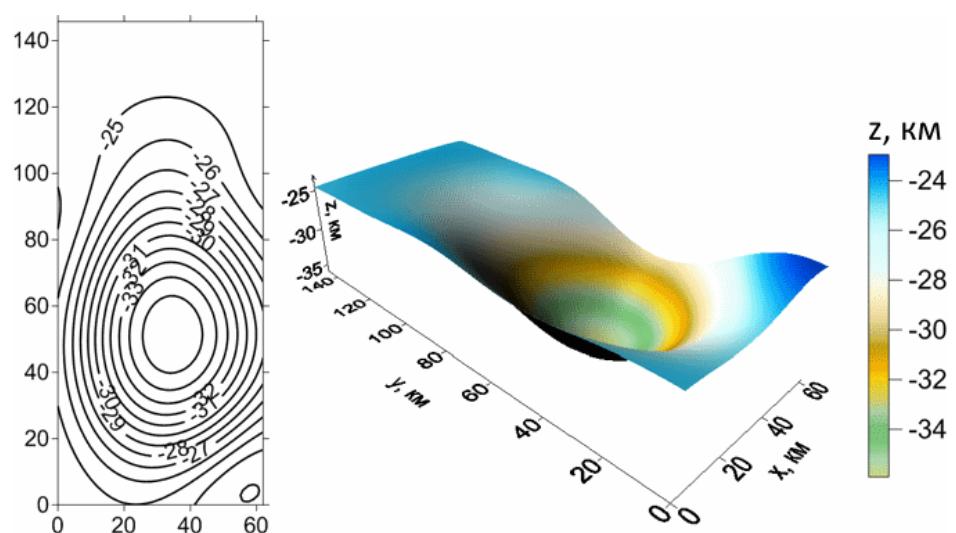
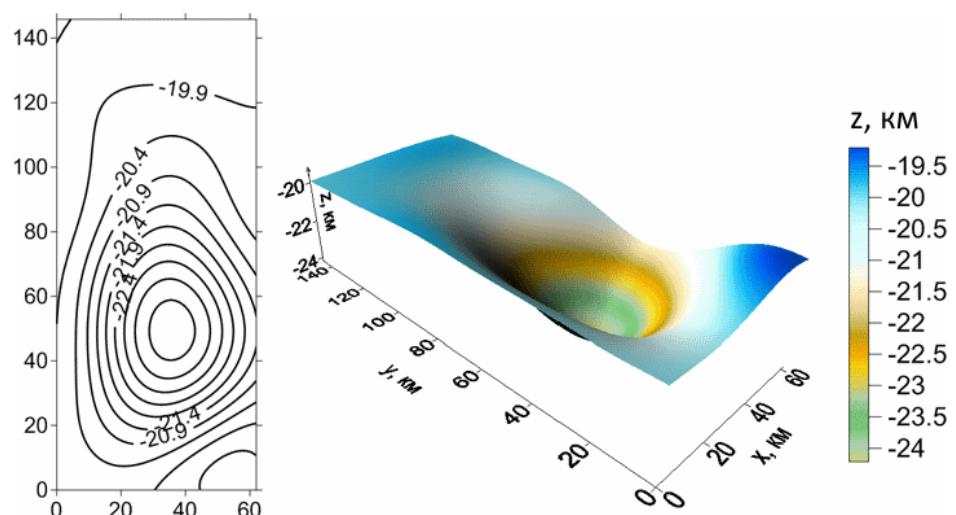
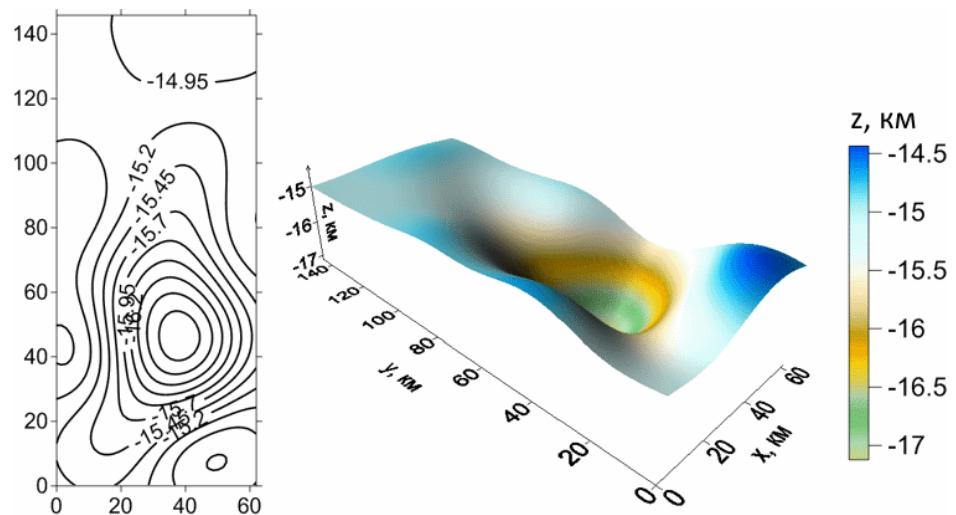


Рис. 3.24. Поверхности, восстановленные традиционным алгоритмом

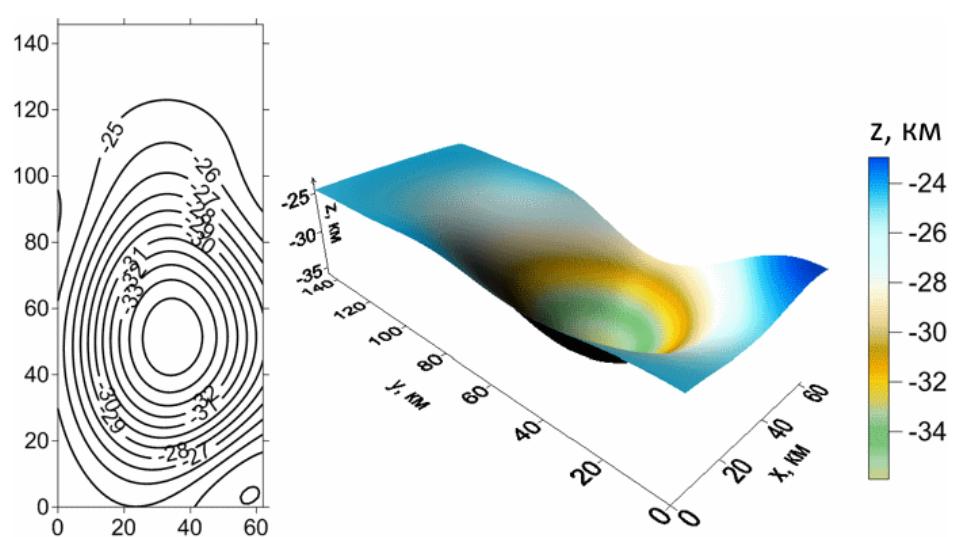
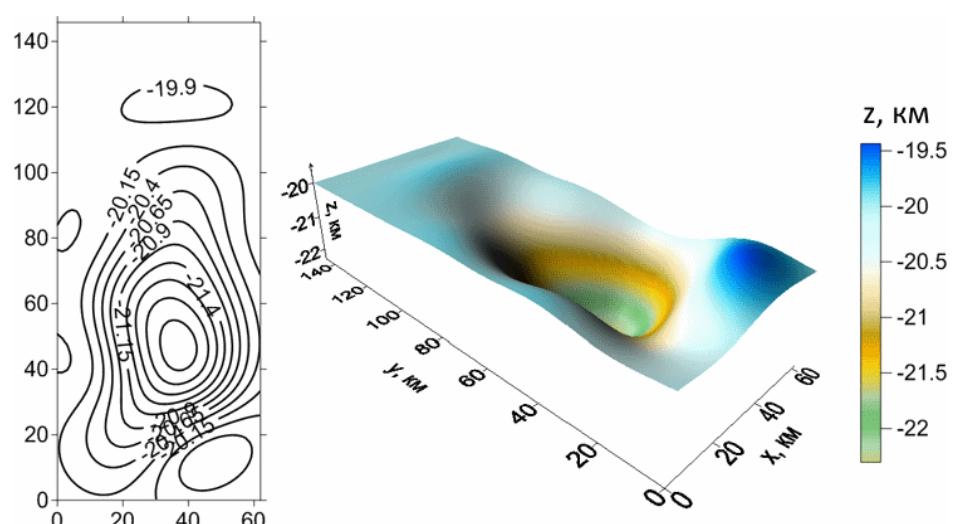
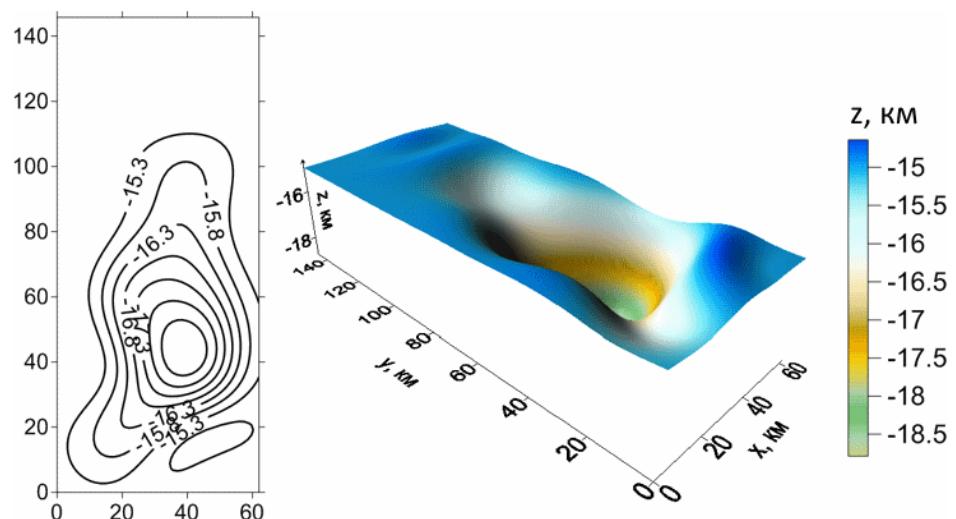


Рис. 3.25. Поверхности, восстановленные новым алгоритмом

3.3.8. Задача 7: Восстановление трех поверхностей по реальным гравитационным данным

В рамках модели четырехслойной среды по реальным гравитационным данным решена структурная обратная задача о нахождении трех плотностных границ. Из наблюденного гравитационного поля было выделено поле на площади 360×636 км², соответствующее массам, расположенным между глубинами 5 и 50 км. Для получения весовых множителей и начальных приближений предварительно из суммарного поля на сетке 25×25 были выделены поля, соответствующие трем искомым границам. По суммарному полю восстановлены границы с асимптотическими плоскостями $H_1 = 8, H_2 = 15, H_3 = 30$ км, скачки плотностей на которых принимались $\Delta\sigma_1 = 0, 2, \Delta\sigma_2 = 0, 15, \Delta\sigma_3 = 0, 1$ г/см³.

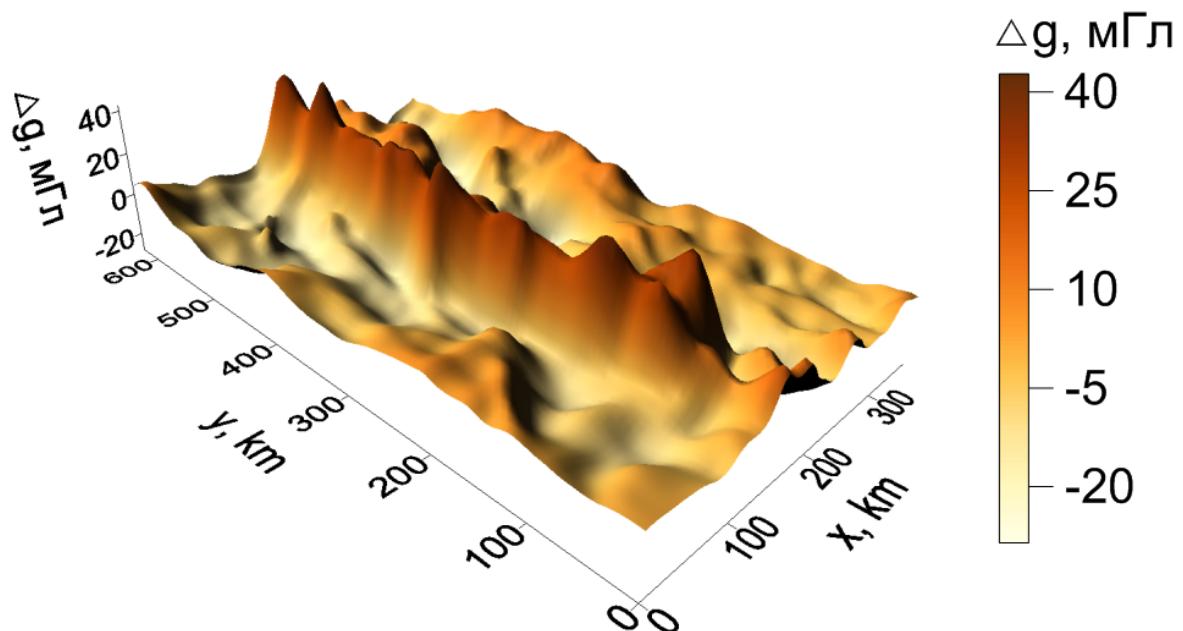


Рис. 3.26. Суммарное гравитационное поле

На рис. 3.26 изображено суммарное аномальное гравитационное поле.

На рис. 3.27 и 3.28 изображены восстановленные плотностные границы и порождаемые ими поля.

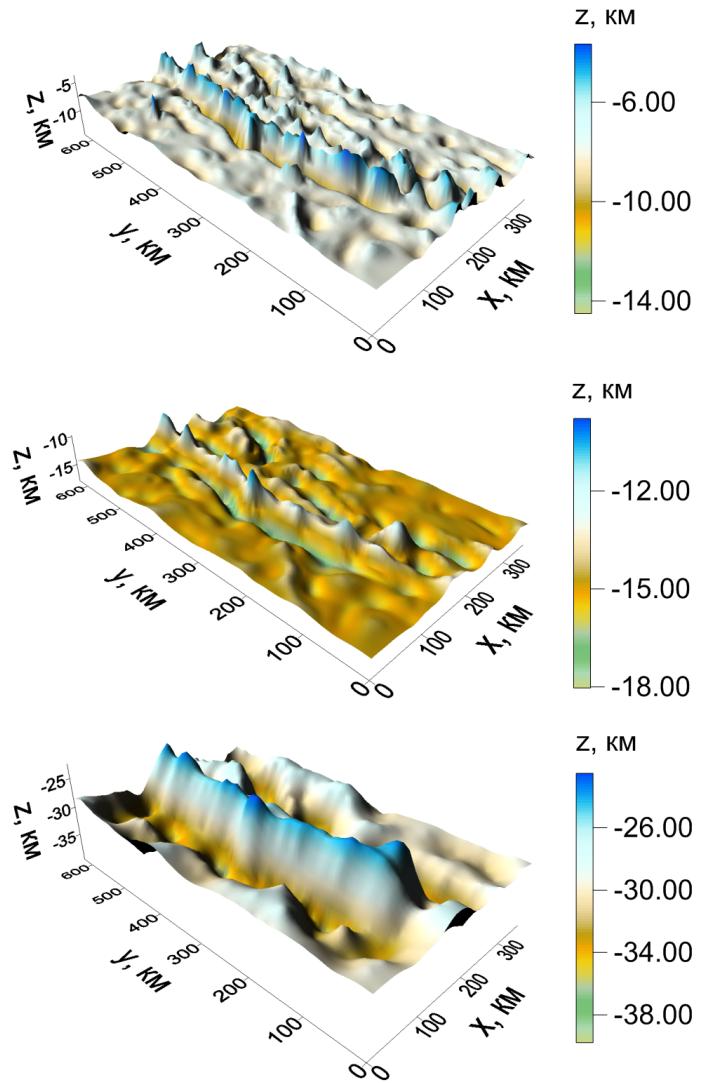


Рис. 3.27. Найденные поверхности раздела

Задача решена на восьмиядерном процессоре Intel Xeon E5-2660 (2.2 ГГц) с помощью параллельных методов наискорейшего спуска ЛМНС (2.15) с весовыми множителями и их модифицированных вариантов ЛММНС (2.18) и ЛММСГ (2.19). Условием останова являлось уменьшение относительной нормы невязки до $\varepsilon \leqslant 0,05$, демпфирующий параметр принимался равным

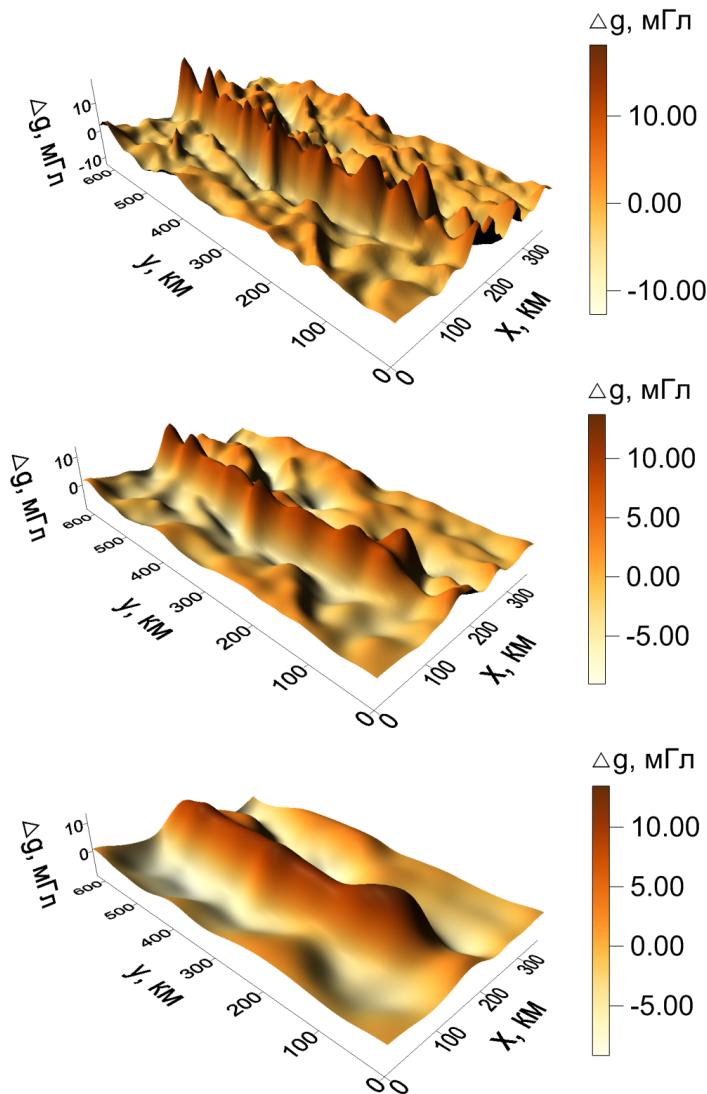


Рис. 3.28. Гравитационные поля, порождаемые полученными поверхностями

$\psi = 1$, сглаживающий параметр $\beta = 1, 4$ качестве начальных приближений \hat{Z} брались границы, полученные путем решения задачи восстановления одной границы по соответствующему ей выделенному полю на сетке 25×25 .

После дискретизации уравнения (1.11) на сетки 168×256 имеем матрицу производных размерности 43008×129024 . В таблице 3.5 представлено сравнение методов по числу итераций и времени счета. В первом столбце таблицы приводятся методы решения, во втором – число итераций, в тре-

тьем и четвертом столбцах – времена решения задачи T_1 и T_8 на одном ядре и 8 ядрах процессора.

Метод	Число итераций	T_1	T_8
ЛМНС	200	8.7 часа	67 мин
ЛММНС	171	7.5 часа	57.4 мин
ЛММСГ	31	1.4 часа	10.4 мин

Таблица 3.5. Результаты численных экспериментов

Вывод. Построен пример решения практической задачи о восстановлении трех плотностных контактов по реальным гравитационным данным. Линеаризованный модифицированный метод сопряженных градиентов является наиболее экономичным по времени из предложенных в диссертационной работе. Результаты опубликованы в работе [107].

Заключение

Основные результаты, приведенные в диссертационной работе.

1. Построены новые экономичные итерационные методы решения нелинейных уравнений трехмерных структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении одной поверхности раздела: линеаризованный метод сопряженных градиентов, покомпонентный градиентный метод и их регуляризованные варианты. На основе линеаризованного метода сопряженных градиентов построен алгоритм решения структурной обратной задачи магнитометрии о восстановлении одной поверхности для случая произвольно направленного вектора суммарной намагниченности.

2. Для решения структурных обратных задач о нахождении нескольких поверхностей раздела предложен и исследован оригинальный алгоритм, основанный на применении построенных градиентных методов с переменными весовыми множителями.

3. На основе предложенных методов разработаны параллельные алгоритмы, реализованные в виде комплекса программ на многоядерных процессорах для быстрого решения обратных задач на сетках большой размерности. Комплекс протестирован на построенных модельных задачах.

Основным направлением дальнейших исследований может быть разработка вариантов комплекса программ для сопроцессоров Intel Xeon Phi, для графических процессоров, интеграция комплекса программ в систему удаленных вычислений «Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах» для обеспечения доступа пользователей к вычислениям на суперкомпьютерах через веб-интерфейс.

Список литературы

1. Агеев А. Л. Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1980. Vol. 20, no. 4. P. 819–826.
2. Агеев А. Л. К вопросу о построении оптимального метода решения линейного уравнения 1-го рода // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1983. № 3. С. 67–68.
3. Агеев А. Л. Алгоритм конечномерной аппроксимации стабилизирующих добавок // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1991. Т. 31, № 7. С. 943–952.
4. Акимова Е. Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000 // *Вестник ННГУ*. 2009. № 4. С. 181–189.
5. Акимова Е. Н. Параллельные алгоритмы решения задач грави-магнитометрии и упругости на многопроцессорных системах с распределенной памятью: Дисс. д-ра физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. 2009.
6. Акимова Е. Н., Васин В. В., Пересторонина Г. Я. и др. О регулярных методах решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе // *Вычислительные методы и программирование*. Москва: МГУ. 2007. Т. 8, № 1. С. 107–116.
7. Бакушинский А. Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейных некорректных уравнений в гильбертовом

- пространстве // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1967. Т. 7, № 3. С. 672–677.
8. *Бакушинский А. Б.* Оптимальные и квазиоптимальные методы решения линейных задач, порожденные регуляризующими алгоритмами // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1978. № 8. С. 6–10.
 9. *Бакушинский А. Б.* Замечания о выборе параметра регуляризации по критерию квазиоптимальности и отношения // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1984. Т. 24, № 8. С. 1258–1259.
 10. *Бакушинский А. Б.* К проблеме сходимости итеративно-регуляризованного метода Гаусса-Ньютона // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1992. Т. 32, № 9. С. 1503–1509.
 11. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Итеративные методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1989. 128 с.
 12. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. Москва: Изд-во МГУ, 1989. 199 с.
 13. *Балк Д. А. С., П И.* Трехмерные монтажные технологии интерпретации гравиметрических данных // *Доклады Академии наук*. Vol. 427.
 14. *Балк Д. А. С., П И.* Аддитивные технологии количественной интерпретации гравитационных аномалий // *Геофизика*. 2016. № 1. С. 43–47.

15. Балк Д. А. С. Х. Л. А., П И. Теория и опыт применения монтажного подхода к решению трехмерных обратных задач гравиметрии // *Геофизический журнал*. Vol. 31.
16. Булах Е. Г. Обзор работ по методам минимизации в обратных задачах гравиметрии и магнитометрии // *Геофизический журнал*. 1999. Т. 21, № 4. С. 5–19.
17. Булах Е. Г., Марков М. Н., Бойко П. Д. Математическое обеспечение автоматизированной системы интерпретации гравитационных аномалий. Киев: Наук. думка, 1984. 112 с.
18. Васин В. В. Регуляризация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // *Дифференциальные уравнения*. 1968. Т. 4, № 12. С. 2268–2274.
19. Васин В. В. О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач // *Математические заметки*. 1970. Т. 7, № 3. С. 265–272.
20. Васин В. В. Общая схема дискретизации регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах // *Докл. АН СССР*. 1981. Т. 258, № 2. С. 271–275.
21. Васин В. В. Методы итеративной регуляризации для некорректных задач // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1995. № 11. С. 69–84.
22. Васин В. В. О сходимости методов градиентного типа для нелинейных уравнений. 1998.

23. *Васин В. В.* Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // *Доклады Академии наук*. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.
24. *Васин В. В.* Метод Левенберга-Марквардта для аппроксимации решений нерегулярных операторных уравнений // *Автоматика и телемеханика*. 2012. № 3. С. 28–38.
25. *Васин В. В.* Модифицированные процессы ньютоновского типа, порождающие фейеровские аппроксимации регуляризованных решений нелинейных уравнений // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2013. Т. 19, № 2. С. 85–97.
26. *Васин В. В., Агеев А. Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 261 с.
27. *Васин В. В., Акимова Е. Н., Миниахметова А. Ф.* Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2013. Т. 6, № 3.
28. *Васин В. В., Пересторонина Г. Я.* Метод Левенберга-Марквардта и его модифицированные варианты для решения нелинейных уравнений с приложением к обратной задаче гравиметрии // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2011. Т. 17, № 2. С. 53–61.
29. *Васин В. В., Пересторонина Г. Я., Пруткин И. Л., Тимерханова Л. Ю.* Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магни-

тометрии для трехслойной среды // *Математическое моделирование*. 2003. Т. 15, № 2. С. 69–76.

30. *Васин В. В., Пруткин И. Л., Тимерханова Л. Ю.* Решение нелинейной задачи гравиметрии методами градиентного типа // *Математическое моделирование*. 1999. Vol. 11, no. 10. P. 86–91.
31. *Васин В. В., Танана В. П.* Приближенное решение операторных уравнений первого рода // *Математические записки Уральского университета*. 1968. Т. 6, № 4. С. 27–37.
32. *Воеводин В. В.* Параллельные вычисления. БХВ-Петербург, 2004.
33. *Гласко В. Б., Остромогильский А. Х., Филатов В. Г.* О восстановлении глубины и формы контактной поверхности на основе регуляризации // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1970. Т. 10, № 5. С. 1292–1297.
34. *Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Об одном регуляризующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1972. Т. 12, № 6. С. 1592–1594.
35. *Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г.* О регуляризуемости некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1974. Т. 14, № 4. С. 1022–1027.
36. *Иванов В. К.* О линейных некорректных задачах // *Доклады АН СССР*. 1962. Т. 145, № 2. С. 270–272.

37. Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах // *Математический сборник*. 1963. Т. 61(103), № 2. С. 211–223.
38. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
39. Канторович Л. В. О методе наискорейшего спуска // *Доклады АН СССР*. 1947. Т. 56, № 3. С. 233–236.
40. Кобрунов А. И. К теории интерпретации данных гравиметрии для слоистых сред (равномерная оптимизация) // *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли*. 1988. № 8. С. 33–44.
41. Кокурин М. Ю. О выпуклости функционала Тихонова и итеративно регуляризованных методах решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2010. Т. 50, № 4. С. 651–664.
42. Кокурин М. Ю. Об организации глобального поиска при реализации схемы Тихонова // *Изв. вузов. Матем.* 2010. № 12. С. 20–31.
43. Кочнев В. А., Васильев Д. В., Гоз И. В., Сидоров В. Ю. Технологии решения прямых и обратных задач 3D гравиметрии и магнитометрии // Мат.32-й сессии Межд.научн.сем. им.Д.Г.Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей». Пермь: 2005. С. 134–137.
44. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. Наука, 1969. 456 с.

45. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во Сибирского отд-ния АН СССР, 1962. 92 с.
46. Малкин Н. Р. О решении обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности (случай пластрообразно залегающих масс) // ДАН СССР. Сер. А. 1931. № 9. С. 232–235.
47. Мартышко П. С., Ладовский И. В., Цидаев А. Г. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // Физика земли. 2010. № 11. С. 23–35.
48. Мартышко П. С., Пруткин И. Л. О решении прямой и обратной задач магниторазведки // Геофизический журнал. 1982. Т. 4, № 6. С. 39–49.
49. Мартышко П. С., Пруткин И. Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. Т. 25, № 3. С. 159–168.
50. Мартышко П. С., Цидаев А. Г. О решении прямой и обратной задач магниторазведки // Материалы Международной конференции, посвященной 50летию Института геофизики УрО РАН. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2008. С. 167–170.
51. Миненко П. А. Экстремальные итерационные методы в обратной задаче магнитометрии при косом намагничении // Доповіді Національної академії наук України. 2007. № 5. С. 131.
52. Мудрецова Е. А., Гласко В. Б., Филатов В. Г. О разрешающей способности метода регуляризации и определении участка характерного

изменения формы контактной поверхности // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1974. № 6. С. 98–101.

53. Новоселицкий В. М. О построении плотностной границы по аномалиям силы тяжести // Сб. «Прикладная геофизика». 1966. № 47.
54. Нумеров Б. В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // *ДАН СССР*. 1930. № 21. С. 569–574.
55. Ортега Д. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. 1991.
56. Поляк Б. Т. Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // *Журнал Вычислительной математики и математической физики*. 1969. Т. 9, № 4. С. 807–821.
57. Пруткин И. Л. О приближенном решении трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии методом локальных поправок // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1983. № 1. С. 53–58.
58. Пруткин И. Л. О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1986. № 1. С. 67–77.
59. Страхов В. Н., Лапина М. И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // *Докл. АН СССР*. 1976. Т. 227, № 2. С. 344–347.
60. Танана В. П. О классификации некорректно поставленных задач и оптимальных методах их решения // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1977. № 11. С. 106–112.

61. Танана В. П. О решении операторных уравнений первого рода с многозначными операторами и их приложение // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1977. № 7. С. 87–93.
62. Танана В. П. Методы решения операторных уравнений. Москва: Наука, 1981. 156 с.
63. Танана В. П. Об аппроксимации регуляризованного решения нелинейного уравнения // *Сибирский математический журнал*. 1997. Т. 38, № 2. С. 416–423.
64. Танана В. П. О сходимости регуляризованных решений нелинейных операторных уравнений // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2003. Т. 6, № 3. С. 119–133.
65. Танана В. П., Танана А. В. Методы решения нелинейных некорректных задач. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2006. 102 с.
66. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // *Доклады АН СССР*. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
67. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // *Доклады АН СССР*. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
68. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1965. Т. 5, № 3. С. 463–473.
69. Фаддеева В. Н., Фаддеев Д. К. Параллельные вычисления в линейной алгебре // *Кибернетика*. 1977. № 3. С. 28–40.

70. *Федорова H. B., Цибульский A. B.* К вопросу о разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности в конечном виде // *Изв. АН СССР, Физика Земли*. 1976. Т. 10. С. 61–72.
71. *Цибульский A. B., Кормильцев B. B.* Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей. Свердловск: Академия наук СССР, Уральское отделение, 1990.
72. *Шванк O. A., Люстик E. H.* Интерпретация гравитационных наблюдений. Ленинград: Гостоптехиздат, 1947. 400 с.
73. *Яновский B. M.* Земной магнетизм. Ленинград: ЛГУ, 1978. 592 с.
74. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-posed problems: theory and applications. Springer Science & Business Media, 2012. 301 p.
75. *Blaschke B., Neubauer A., Scherzer O.* On convergence rates for the iteratively regularized Gauss-Newton method // *IMA Journal of Numerical Analysis*. 1997. Vol. 17, no. 3. P. 421–436.
76. *Chapman B., Jost G., Van Der Pas R.* Using OpenMP: portable shared memory parallel programming. MIT press, 2008. Vol. 10.
77. *Dennis Jr J. E., Schnabel R. B.* Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Siam, 1996. Vol. 16.
78. *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. Springer Science & Business Media, 1996. Vol. 375.
79. *Fletcher R.* Practical methods of optimization. John Wiley & Sons, 2013.

80. Fletcher R., Reeves C. M. Function minimization by conjugate gradients // *The computer journal*. 1964. Vol. 7, no. 2. P. 149–154.
81. Gilbert J. C., Nocedal J. Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization // *SIAM Journal on optimization*. 1992. Vol. 2, no. 1. P. 21–42.
82. Hadamard J. Le probleme de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Paris: Herman, 1932. Vol. 220.
83. Hanke M. A regularizing Levenberg-Marquardt scheme, with applications to inverse groundwater filtration problems // *Inverse problems*. 1997. Vol. 13, no. 1. P. 79.
84. Hanke M. et al. The regularizing Levenberg-Marquardt scheme is of optimal order // *J. Integral Equations Appl.* 2010. Vol. 22, no. 2. P. 259–283.
85. Hanke M., Neubauer A., Scherzer O. A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems // *Numerische Mathematik*. 1995. Vol. 72, no. 1. P. 21–37.
86. Kaltenbacher B., Neubauer A., Ramm A. G. Convergence rates of the continuous regularized Gauss–Newton method // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2002. Vol. 10, no. 3. P. 261–280.
87. Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems. Walter de Gruyter, 2008. Vol. 6.
88. Kelley C. T. Iterative methods for linear and nonlinear equations. Philadelphia: Siam, 1995. Vol. 65002.

89. *Landweber L.* An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind // *American journal of mathematics*. 1951. Vol. 73, no. 3. P. 615–624.
90. *Neubauer A.* On Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems in Hilbert scales // *Numerische Mathematik*. 2000. Vol. 85, no. 2. P. 309–328.
91. *Neubauer A., Scherzer O.* A convergence rate result for a steepest descent method and a minimal error method for the solution of nonlinear ill-posed problems // *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*. 1995. Vol. 14, no. 2. P. 369–377.
92. *Nocedal J., Wright S.* Numerical optimization. Springer Science & Business Media, 2006.
93. *Ortega J. M., Rheinboldt W. C.* Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Siam, 1970. Vol. 30.
94. *Polak E., Ribiere G.* Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées // *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge*. 1969. Vol. 3, no. 1. P. 35–43.
95. *Powell M. J. D.* A hybrid method for nonlinear equations // *Numerical methods for nonlinear algebraic equations*. 1970. Vol. 7. P. 87–114.
96. *Prutkin I., Saleh A.* Gravity and magnetic data inversion for 3D topography of the Moho discontinuity in the northern Red Sea area, Egypt // *Journal of Geodynamics*. 2009. Vol. 47, no. 5. P. 237–245.
97. *Scherzer O.* A convergence analysis of a method of steepest descent and

a two-step algorithm for nonlinear ill-posed problems // *Numerical functional analysis and optimization*. 1996. Vol. 17, no. 1-2. P. 197–214.

98. *Schnabel R. B., Frank P. D.* Tensor methods for nonlinear equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1984. Vol. 21, no. 5. P. 815–843.
99. *Vasin V.* Irregular nonlinear operator equations: Tikhonov's regularization and iterative approximation // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2013. Vol. 21, no. 1. P. 109–123.
100. *Vasin V., Skorik G.* Iterative processes of gradient type with applications to gravimetry and magnetometry inverse problems // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2011. Vol. 18, no. 8. P. 855–876.
101. *Vasin V. V., Eremin I. I.* Operators and iterative processes of Fejér type: theory and applications. Walter de Gruyter, 2009. Vol. 53.

Публикации автора по теме диссертации

102. Акимова Е. Н., Белоусов Д. В., Мисилов В. Е. Алгоритмы решения обратных геофизических задач на многопроцессорных вычислительных системах // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 6, № 2. С. 107–121.
103. Акимова Е., Мартышко П., Мисилов В. Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде // Доклады Российской академии наук. 2013.
104. Акимова Е., Васин В., Мисилов В. Алгоритмы решения обратных задач гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2014. Т. 18, № 2 (63).
105. Акимова Е., Мисилов В., Скурудина А. Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2014. Т. 18, № 4 (65).
106. Акимова Е., Мисилов В., Скурудина А., Третьяков А. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере «Уран» // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии (Электронный научный журнал). 2015. № 16. С. 155.
107. Мартышко П., Акимова Е., Мисилов В. О решении структурной об-

ратной задачи гравиметрии модифицированными методами градиентного типа // *Физика Земли*. 2016. № 5. С. 82–86.

108. *Martyshko P. S., Pyankov V. A., Akimova E. N. et al.* On solving a structural gravimetry problem on supercomputer «Uran» for the Bashkir Predural's area // Proceedings of 12th International Conference on Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. 2013.
109. *Akimova E., Martyshko P., Misilov V.* Parallel algorithms for solving structural inverse magnetometry problem on multicore and graphics processors // Proceedings of 14th International multidisciplinary scientific GeoConference SGEM 2014. 2014.
110. *Akimova E., Misilov V.* A fast componentwise gradient method for solving structural inverse gravity problem // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management-SGEM. 2015.
111. *Akimova E., Martyshko P., Misilov V.* A fast parallel gradient algorithm for solving structural inverse gravity problem // AIP Conference Proceedings 1648, 850063. 2015.
112. *Akimova E., Misilov V., Tretyakov A.* Regularized methods for solving nonlinear inverse gravity problem // EAGE Geoinformatics 2016 – 15th International Conference on Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. 2016.
113. *Misilov V. E.* On solving the structural inverse magnetic problem of finding a contact surface in the case of arbitrary directed magnetization //

EAGE Geoinformatics 2016: 15th International Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. 2016.

114. *Akimova E., Martyshko P., Misilov V., Tretyakov A.* A fast parallel gradient algorithm for solving structural inverse gravity problem // Proceedings of International Conference ICNAAM. 2016.
115. *Акимова Е., Мисилов В., Дергачев Е.* Алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии // Материалы 41-ой сессии международного семинара им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей». 2014.
116. *Akimova E., Miniakhmetova A., Misilov V.* Fast stable parallel algorithms for solving gravimetry and magnetometry inverse problems // Abstracts of International conference “Advanced mathematics, computations and applications – 2014”. 2014.
117. *Акимова Е., Белоусов Д., Мисилов В.* Алгоритмы решения обратных геофизических задач на многопроцессорных вычислительных системах // Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ’2012)». 2012.
118. *Акимова Е., Васин В., Мисилов В.* Алгоритмы решения обратных задач гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред на многопроцессорных вычислительных системах // Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ’2013)». 2013.
119. *Акимова Е., Мисилов В., Миниахметова А.* Параллельные алго-

ритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2014)». 2014.

120. Акимова Е., Мисилов В., Скурыдина А. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” // Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2015)». 2015.
121. Мисилов В., Миниахметова А., Дергачев Е. Решение обратной задачи гравиметрии итерационными методами на суперкомпьютере «Уран» // Труды XIV Уральской молодежной научной школы по геофизике. 2013.
122. Акимова Е., Мисилов В. Итеративно регуляризованные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии в многослойной среде // Тезисы доклада Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти В.К. Иванова «Алгоритмический анализ неустойчивых задач». 2014.