ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.988.68

ДВУХЭТАПНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ[1]

В. В. Васин, А. Ф. Скурыдина

Для уравнения с нелинейным дифференцируемым оператором, действующим в гильбертовом пространстве, исследуется двухэтапный метод построения регуляризующего алгоритма. А именно, сначала используется схема регуляризации Лаврентьева, а затем к регуляризованному уравнению применяется метод Ньютона, либо нелинейные аналоги α-процессов. Рассматриваются два случая: оператор задачи является монотонным, либо оператор является конечномерным и имеет неотрицательный спектр.

Доказывается линейная скорость итерационных процессов и устанавливаются регуляризующие свойства двухэтапного метода. Обсуждаются результаты численного эксперимента для трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии.

Ключевые слова: схема регуляризации Лаврентьева, метод Ньютона, нелинейные α-процессы, двухэтапный метод, обратные задачи гравиметрии и магнитометрии.

For an equation with a nonlinear differentiable operator acting in a Hilbert space a two-stage method for construction of a regularizing algorithms is investigated. Namely, first the Lavrentiev regularization scheme is used, and then either the Newton method or nonlinear analoges of α-processes are applied. Two cases are considered: the operator of the original problem is either a monotone one or this operator is finite-dimentional and has non-negative spectr. The linear rate of the convergence for iterative processes is proved and the regularizing properties of two-stage method are established. The results of numerical experiment for inverse gravimetry and magnetometry problems are discussed.

Keywords: Lavrentiev regularization scheme, Newton's method, nonlinear α-processes, two-stage algorithm, inverse gravimetry and magnetometry problem.

1. Введение

Рассматривается нелинейное уравнение

$$A(u) = f \tag{1.1}$$

в гильбертовом пространстве U с непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором A, для которого обратные операторы $A'(u)^{-1}$, A^{-1} разрывны, что влечет некорректность задачи (1.1). Для построения регуляризующего алгоритма (РА) предлагается двухэтапный метод, в котором на первом этапе используется регуляризация по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \tag{1.2}$$

где $\|f - f_\delta\| \le \delta$, u_0 – некоторое приближение к решению; а на втором этапе для аппроксимации регуляризованного решения u_α применяется либо регуляризованный метод Ньютона (РМН)

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \tag{1.3}$$

либо нелинейные аналоги α-процессов

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{< (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) >}{< (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) >} S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k) \tag{1.4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-00629, 16-51-50064).

при $\varkappa = -1, 0, 1$. Здесь $\alpha, \bar{\alpha}$ – положительные параметры регуляризации, $\gamma > 0$ – демпфирующий множитель (параметр шага), $S_\alpha(u) = A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta$.

Предполагается, что либо оператор $A'(u^k)$ – неотрицательно определенный оператор, как это имеет место для монотонного оператора A, либо $A'(u^k)$ имеет неотрицательный спектр, состоящий из различных собственных чисел, когда $A\colon R^n \to R^n$ (конечномерный случай). При этих предположениях операторы $(A'(u^k) + \bar{\alpha} I)^{-1}$ существуют и ограничены, следовательно, процессы (1.3), (1.4) определены корректно.

Итеративно регуляризованный метод Ньютона ($\gamma = 1$, $\bar{\alpha} = \alpha = \alpha_k$) для вариационных неравенств был предложен и исследован ранее в [1, 2]. Подход основан на том, что априори выбирается подходящим образом последовательность параметров $\alpha_{k(\delta)}$ и при некоторых условиях, в том числе на вторую производную оператора A, доказывается сходимость итераций к решению уравнения (1.1). В данной работе в предположении, что производная $A'(u)$ удовлетворяет условию Липшица, устанавливается линейная скорость сходимости методов (1.3), (1.4) и свойство фейеровости итераций. При истокообразной представимости решения асимптотическое правило останова итераций $k(\delta)$ определяется из равенства оценок погрешности для итераций и регуляризованного решения u_α.

Необходимо отметить, что в рамках двухэтапного подхода в работах [3–5] исследовались модифицированные варианты процессов (1.3), (1.4) ($1 \le \varkappa < \infty$), когда вместо $A'(u^k)$ используется производная в начальной точке $A'(u^0)$ в ходе всего итерационного процесса, где $A'(u^0)$—самосопряженный неотрицательно определенный оператор.

Очевидно, что если A– линейный оператор и $\alpha = \bar{\alpha} = 0$, $\gamma = 1$, то процессы (1.4) при $\varkappa = -1, 0, 1$ переходят в метод минимальной ошибки (ММО), метод наискорейшего спуска (МНС) и метод минимальных невязок (ММН). Поэтому (1.4) можно рассматривать как нелинейные регуляризованные аналоги ММО, МНС и ММН. Для краткости сохраним эти названия и для нелинейных аналогов как для $\gamma = 1$, так и $\gamma > 0$.

В заключение обзора заметим, что в линейном случае для неотрицательно определенного оператора A, иной подход к построению итеративно-регуляризованных α-процессов $-1 \le \varkappa < \infty$ предложен в [2].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 для монотонного оператора A с производной $A'(u)$, удовлетворяющих условию Липшица, исследуется метод Ньютона (1.3), для которого доказывается сходимость к регуляризованному решению, устанавливаются оценка погрешности и свойство фейеровости оператора шага. В разделе 3 при тех же условиях на оператор и с тех же позиций рассматриваются процессы (1.4). Раздел 4 посвящен итерационным процессам (1.3), (1.4) для операторного уравнения (1.1) в конечномерном пространстве, когда $A\colon R^n \to R^n$, и матрица $A'(u^k)$ имеет спектр, состоящий из различных неотрицательных собственных значений. В разделе 5 устанавливаются регуляризующие свойства двухэтапного метода, состоящего из схемы регуляризации в форме (1.2) и итерационной аппроксимации регуляризованного решения одним из процессов (1.3), (1.4). Результаты численных экспериментов для обратных задач гравиметрии и магнитометрии представлены в разделе 6.

2. Метод Ньютона для монотонного оператора

Для доказательства теорем сходимости и получения оценок погрешности нам понадобятся условия на оператор A и его производную:

$$\|A(u) - A(v)\| \le N_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U, \tag{2.1}$$

$$\|A'(u) - A'(v)\| \le N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U. \tag{2.2}$$

Кроме того, предполагается, что известна оценка для нормы производной в точке u^0 (начальном приближении), т.е.

$$\|A'(u^0)\| \le N_0 \le N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \le r. \tag{2.3}$$

З а м е ч а н и е 2.1. Начальное приближение в неравенстве (2.3) в общем случае не обязано совпадать с u^0 в схеме (1.2). Однако, для простоты изложения, будем считать, что это один и тот же элемент. Кроме того, для монотонного оператора A оператор $A+\alpha I$–равномерно монотонный, поэтому при выполнении условия 2.1 согласно [6, теорема 43.7], регуляризованное уравнение (1.2) имеет единственное решение.

Теорема 2.1. *Пусть A–монотонный оператор, для которого выполнены условия* (2.1), (2.2) *для $u, v \in S_r(u_\alpha)$, $r \le \alpha/N_2$, $0 < \alpha \le \bar\alpha$, $u^0 \in S_r(u_\alpha)$.*

Тогда для процесса (1.3) *с $\gamma = 1$ имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения u_α регуляризованного уравнения* (1.2)

$$\|u^k - u_\alpha\| \le q^k r, \quad q = (1 - \frac{\alpha}{2\bar\alpha}). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что для монотонного оператора A $\|(A'(u)+\bar\alpha I)^{-1}\| \le 1/\bar\alpha$, а из (2.2) следует справедливость разложения

$$A(u_\alpha) = A(u^k) + A'(u^k)(u_\alpha - u^k) + \xi, \quad \|\xi\| \le \frac{N_2}{2}\|u_\alpha - u^k\|^2,$$

приходим к соотношению

$$u^{k+1} - u_\alpha = u^k - u_\alpha - (A'(u^k) + \bar\alpha I)^{-1}(A(u^k) - A(u_\alpha) + \alpha(u^k - u_\alpha)) = u^k - u_\alpha$$

$$-(A'(u^k) + \bar\alpha I)^{-1}(A'(u^k)(u^k - u_\alpha) + \bar\alpha(u^k - u_\alpha) - \xi + (\alpha - \bar\alpha)(u^k - u_\alpha)).$$

Из полученного соотношения вытекает оценка

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\| \le \frac{1}{\bar\alpha}\left(\frac{N_2\|u^k - u_\alpha\|^2}{2} + (\bar\alpha - \alpha)\|u^k - u_\alpha\|\right)$$

$$\le \left(1 - \frac{\alpha}{\bar\alpha} + \frac{N_2}{2\bar\alpha}\|u^k - u_\alpha\|\right)\|u^k - u_\alpha\|.$$

Имея $\|u^0 - u_\alpha\| \le r \le \alpha/N_2$ и предполагая $\|u^k - u_\alpha\| \le q^k r$, по индукции приходим к оценке (2.4).

Усиленное свойство Фейера [7, определение 1.3] для оператора T означает, что для некоторого $\nu > 0$ выполнено соотношение

$$\|T(u) - z\|^2 \le \|u - z\|^2 - \nu\|u - T(u)\|^2, \tag{2.5}$$

где $z \in Fix(T)$–множество неподвижных точек оператора T. Это влечет для итерационных точек u^k, порождаемых процессом $u^{k+1} = T(u^k)$, выполнение неравенства

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \le \|u^k - z\|^2 - \nu\|u^k - u^{k+1}\|^2. \tag{2.6}$$

Важным свойством фейеровских операторов является замкнутость относительно операций произведения и взятия выпуклой суммы. Располагая итерационными процессами с фейеровским оператором шага и общим множеством неподвижных точек, можно конструировать разнообразные гибридные методы, а также учитывать в итерационном алгоритме априорные ограничения на решение в виде системы линейных или выпуклых неравенств.

Установим усиленное свойство Фейера для оператора шага T в методе (1.3).

Теорема 2.2. *Пусть для монотонного оператора A выполнены условия* (2.1)–(2.3), *$A'(u^0)$–самосопряженный оператор, $\|u_\alpha - u^0\| \le r$ и для параметров справедливы соотношения*

$$0 \le \alpha \le \bar\alpha, \quad \bar\alpha \ge 4N_1, \quad r \le \alpha/8N_2. \tag{2.7}$$

Тогда для оператора

$$F(u) = (A'(u) + \bar{\alpha} I)^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta)$$

справедлива оценка снизу

$$< F(u), u - u_\alpha > \geq \frac{\alpha}{4\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2 \quad \forall u \in S_r(u_\alpha). \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение $B(u) = A'(u) + \bar{\alpha} I$. Принимая во внимание, что u_α—решение уравнения (1.2), имеем

$$< F(u), u - u_\alpha > = < F(u) - F(u_\alpha), u - u_\alpha > = \alpha < B^{-1}(u)(u - u_\alpha), u - u_\alpha >$$

$$+ < B^{-1}(u)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha > . \tag{2.9}$$

Учитывая, что $A'(u^0)$—самосопряженный и, ввиду монотонности A, неотрицательно определенный оператор, для первого слагаемого в правой части равенства (2.9), получаем

$$\alpha < B^{-1}(u)(u - u_\alpha), u - u_\alpha > = \alpha < B^{-1}(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha >$$

$$+\alpha < (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(u - u_\alpha), u - u_\alpha > \geq \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} \|u - u_\alpha\|^2$$

$$-\alpha| < B^{-1}(u)(B(u^0) - B(u))B^{-1}(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha > | \geq \left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{\alpha N_2 \|u - u^0\|}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2$$

$$\geq \left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{2\alpha N_2 r}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2, \tag{2.10}$$

где использовано неравенство $\|u - u^0\| \leq \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \leq 2r$. Для второго слагаемого в правой части (2.9) имеем

$$< B^{-1}(u)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha > = < B^{-1}(u^0)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha >$$

$$+ < (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha >$$

$$= < B^{-1}(u^0) \int\limits_0^1 (A'(u_\alpha + \theta(u - u_\alpha)) - A'(u^0)) d\theta (u - u_\alpha), u - u_\alpha > + < B^{-1}(u^0) A'(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha >$$

$$+ < (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha > \geq -\frac{N_2}{\bar{\alpha}} \int\limits_0^1 \|u_\alpha + \theta(u - u_\alpha) - u^0\| d\theta \|u - u_\alpha\|^2$$

$$-\frac{1}{\bar{\alpha}^2} \left(\|A'(u) - A'(u^0)\| \|A(u) - A(u_\alpha)\| \|(u - u_\alpha)\| \right)$$

$$\geq -\frac{N_2}{2\bar{\alpha}} \left(\|u_\alpha - u^0\| + \|u - u^0\| \right) \|u - u_\alpha\|^2 - \frac{N_1 N_2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u^0\| \|u - u_\alpha\|^2$$

$$\geq -\frac{3 N_2 r}{2\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2 - \frac{2r N_1 N_2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2. \tag{2.11}$$

Объединяя (2.10),(2.11), приходим к неравенству

$$< F(u), u - u_\alpha > \geq \left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{2 N_2 r \alpha}{\bar{\alpha}^2} - \frac{3 N_2 r}{2\bar{\alpha}} - \frac{2r N_1 N_2}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2,$$

откуда с учетом условий (2.7) на параметры α, $\bar{\alpha}$, r, а также неравенства $N_1 \geq N_0$, приходим к оценке (2.8).

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда при*

$$\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2} \tag{2.12}$$

оператор шага T процесса (1.3) *при*

$$\nu = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2\gamma(N_1+\alpha)^2} - 1 \tag{2.13}$$

удовлетворяет неравенству (2.5), *для итераций u^k справедливо соотношение* (2.6) *и имеет место сходимость*

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0. \tag{2.14}$$

Если параметр γ принимает значение

$$\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2}, \tag{2.15}$$

то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \le q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2}}. \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях теоремы справедливо неравенство

$$\|F(u)\|^2 \le \|B^{-1}(u)\|^2 \|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u-u_\alpha)\|^2 \le \frac{(N_1+\alpha)^2}{\bar{\alpha}^2}\|u-u_\alpha)\|^2, \tag{2.17}$$

которое вместе с (2.8) влечет соотношение

$$\|F(u)\|^2 \le \frac{4(N_1+\alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}} < F(u), u-u_\alpha > . \tag{2.18}$$

Условие (2.5) на оператор шага T эквивалентно

$$\|F(u)\|^2 \le \frac{2}{\gamma(1+\nu)} < F(u), u-u_\alpha > . \tag{2.19}$$

Сравнивая неравенства (2.18) и (2.19), получаем условие (2.12) для γ и выражение (2.13) для ν.

При $u = u^k$ из неравенства (2.5) вытекает (2.6) и соотношение

$$\|u^k - T(u^k)\| = \gamma\|F(u^k)\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

что вместе с (2.8) влечет сходимость (2.14). Принимая во внимание (2.8), (2.17), имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|u^{k+1} - u_\alpha\|^2 &= \|u^k - u_\alpha\|^2 - 2\gamma < F(u^k), u^k - u_\alpha > + \gamma^2\|F(u^k)\|^2 \\ &\le \left(1 - \gamma\frac{\alpha}{2\bar{\alpha}} + \gamma^2\frac{(N_1+\alpha)^2}{\bar{\alpha}^2}\right)\|u^k - u_\alpha\|^2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

При значениях $\gamma = \gamma_{opt}$ из (2.15) выражение в круглых скобках неравенства (2.20) достигает минимума и при $\gamma = \gamma_{opt}$ параметр q вычисляется по формуле, представленной в (2.16).

3. Сходимость процессов (1.4)

Сначала опишем экстремальные принципы, которые используются при построении процессов (1.4) для нелинейного монотонного оператора A. Используя разложение Тейлора в точке u^k и удерживая лишь два члена, приходим к линейному уравнению

$$A(u^k) + A'(u^k)(u - u^k) = f_\delta.$$

Зададим итерационный процесс в следующем виде

$$u^{k+1} = u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta)$$

и найдем параметр β из условия

$$\min_\beta \|u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta) - z\|^2, \tag{3.1}$$

где z–решение уравнения $A'(u^k)z = F^k$, $F^k = f_\delta + A'(u^k)u^k - A(u^k)$. Заменяя теперь оператор $A(u)$ на $A(u) + \alpha(u - u^0)$, а $A'(u^k)$ на $A'(u^k) + \bar\alpha I$, получаем процесс (1.4) при $\varkappa = -1$ и $\gamma = 1$, т.е. нелинейный регуляризованный вариант ММО. Если теперь вместо (3.1) использовать экстремальные принципы

$$\min_\beta\{< A'(u^k)u^{k+1}, u^{k+1} > -2 < u^{k+1}, F(u^k) >\},$$

либо

$$\min_\beta\{\|A'(u^k)(u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta) - F(u^k)\|^2\}, \tag{3.2}$$

то получаем после тех же замен нелинейный регуляризованный аналог МНС, т.е. (1.4) при $\varkappa = 0$ и $\gamma = 1$, либо ММН, т.е. (1.4) при $\varkappa = 1$, $\gamma = 1$ с учетом следующего замечания.

З а м е ч а н и е 3.1. Формула (1.4) при $\varkappa = 1$ справедлива лишь для самосопряженного оператора $A'(u)$. В общем же случае, знаменатель дроби при $\varkappa = 1$ следует заменить на $\|(A'(u) + \alpha I)S_\alpha(u)\|^2$, как это следует из условия минимума задачи (3.2). Это обстоятельство будет учтено во всех выкладках в разделах 3, 4.

Установим сходимость процесса (1.4) при $\varkappa = -1, 0, 1$ к решению уравнения (1.2). Как и прежде, используем обозначения:

$$B(u) = A'(u) + \bar\alpha I, \quad S_\alpha(u) = A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta,$$

а также введем новое

$$\beta^\varkappa = \frac{< B^\varkappa(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}{< B^{\varkappa+1}(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}, \quad F^\varkappa(u) = \beta^\varkappa S_\alpha(u),$$

где при $\varkappa = 1$ в $\beta^\varkappa$ следует заменить знаменатель на $\|B(u)S_\alpha(u)\|^2$ (см. замечание 3.1).

Теорема 3.1. *Пусть для монотонного оператора A выполнены условия* (2.1)–(2.3) *и* $A'(u^0)$*– самосопряженный оператор. Кроме того, для ММО параметры α, $\bar\alpha$, r, N_2, N_0 удовлетворяют дополнительным соотношениям:*

$$\alpha \le \bar\alpha, \quad r \le \alpha/8N_2, \quad \bar\alpha \ge N_0. \tag{3.3}$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|F^\varkappa(u)\|^2 \le \mu_\varkappa < F^\varkappa(u), u - u_\alpha >, \quad \varkappa = -1, 0, 1, \tag{3.4}$$

где

$$\mu_{-1} = \frac{4(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar\alpha}, \quad \mu_0 = \frac{(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar\alpha)}{\alpha\bar\alpha^2}, \quad \mu_1 = \frac{(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar\alpha)^2}{\alpha\bar\alpha^3}, \tag{3.5}$$

соответственно для ММО, МНС, ММН.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ММО, т.е. (1.4) при $\varkappa = -1$. Принимая во внимание монотонность оператора A, самосопряженность и неотрицательность $A'(u^0)$ и условия на параметры (3.3), имеем (ниже $F^{-1}(u)$, $B^{-1}(u)$, означает $F^{\varkappa}(u)$, $B^{\varkappa}(u)$ при $\varkappa = -1$) имеем

$$< F^{-1}(u), u - u_\alpha >= \beta^{-1}(u) < A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha), u - u_\alpha >\geq \alpha\beta^{-1}(u)\|u - u_\alpha\|^2$$

$$\geq \alpha \left(\frac{< B^{-1}(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}{\|S_\alpha(u)\|^2} - \frac{|< (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) >|}{\|S_\alpha(u)\|^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2$$

$$\geq \left(\frac{\alpha}{N_0 + \bar\alpha} - \alpha\|B^{-1}(u)\|\|B^{-1}(u^0)\|\|A'(u) - A'(u^0)\| \right) \|u - u_\alpha\|^2$$

$$\geq \left(\frac{\alpha}{N_0 + \bar\alpha} - \frac{2\alpha N_2 r}{\bar\alpha^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha}{4\bar\alpha}\|u - u_\alpha\|^2, \tag{3.6}$$

где учтено, что $\|u - u^0\| \leq \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \leq 2r$. Кроме того, выпонены неравенства

$$\|F^{-1}(u)\|^2 =| \beta^{-1}(u) |^2 \|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|^2 \leq (N_1 + \alpha)^2\|B^{-1}(u)\|^2\|u - u_\alpha\|^2$$

$$\leq \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar\alpha^2}\|u - u_\alpha\|^2. \tag{3.7}$$

Объединяя (3.6) и (3.7), получаем

$$\|F^{-1}(u)\|^2 \leq \frac{4(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar\alpha} < F^{-1}(u), u - u_\alpha > . \tag{3.8}$$

Перейдем к оценке МНС ($\varkappa = 0$). Из соотношений

$$< F^0(u), u - u_\alpha >= \beta^0(u) < A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha), u - u_\alpha >\geq \alpha\beta^0(u)\|u - u_\alpha\|^2$$

$$= \alpha\frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{< A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) > +\bar\alpha\|S_\alpha(u)\|^2}|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha}{N_1 + \bar\alpha}\|u - u_\alpha\|^2, \tag{3.9}$$

$$\|F^0(u)\|^2 = \|\beta^0(u)\|^2\|S_\alpha(u) - S_\alpha(u_\alpha)\|^2$$

$$\leq \frac{(N_1 + \alpha)^2\|S_\alpha(u)\|^4\|u - u_\alpha\|^2}{|< A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) > +\bar\alpha\|S_\alpha(u)\|^2 \ |^2} \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar\alpha^2}\|u - u_\alpha\|^2, \tag{3.10}$$

приходим к неравенству

$$\|F^0(u)\|^2 \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar\alpha)}{\alpha\bar\alpha^2} < F^0(u), u - u_\alpha > .$$

Обратимся теперь к ММН (см. замечание (3.1)). Имеем неравенства:

$$< F^1(u), u - u_\alpha >\geq \alpha\beta^1(u)\|u - u_\alpha\|^2 = \alpha\frac{< (A'(u) + \bar\alpha I)S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}{\|B(u)S_\alpha(u)\|^2}\|u - u_\alpha\|^2$$

$$\geq \frac{\alpha\bar\alpha}{\|B(u)\|^2}\|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha\bar\alpha}{(N_1 + \bar\alpha)^2}\|u - u_\alpha\|^2, \tag{3.11}$$

$$\|F^1(u)\| \leq \frac{(N_1 + \alpha) < B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}{\|B(u)S_\alpha(u)\|^2}\|u - u_\alpha\| \leq \frac{(N_1 + \alpha) < B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}{< B(u)S_\alpha(u), B(u)S_\alpha(u) >}\|u - u_\alpha\|$$

$$= \frac{(N_1 + \alpha) < B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) > \|u - u_\alpha\|}{\|A'(u)S_\alpha(u)\|^2 + \alpha < A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) > +\bar\alpha < B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) >} \leq \frac{N_1 + \alpha}{\bar\alpha}\|u - u_\alpha\| \tag{3.12}$$

из которых вытекает оценка

$$\|F^1(u)\|^2 \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar\alpha)^2}{\alpha\bar\alpha^3} < F^1(u), u - u_\alpha > .$$

Таким образом, доказана справедливость неравенства (3.4) при значениях $\mu_\varkappa$ из (3.5).

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* (3.1) *Тогда при*

$$\gamma_\varkappa < \frac{2}{\mu_\varkappa} \quad (\varkappa = -1, 0, 1) \tag{3.13}$$

для последовательности $\{u^k\}$, *порождаемой процессом* (1.4) *при соответствующем* $\varkappa$, *имеет место сходимость*

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при

$$\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa} \tag{3.14}$$

справедлива оценка

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\| \le q_\varkappa^k r,$$

где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar\alpha^2}{(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar\alpha)^2}}, \quad q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar\alpha^4}{(N_1+\bar\alpha)^4}}. \tag{3.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сопоставляя неравенство (2.19) при $F(u) = F^\varkappa(u) \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$ с соотношением (3.4), находим, что при $\gamma_\varkappa$, удовлетворяющем (3.13), условие фейеровости выполняется для всех трех процессов. Поэтому сходимость итераций при выполнении условия (3.13) устанавливается аналогично теореме (2.3), касающейся метода Ньютона. Подставляя в (2.20) $F^\varkappa(u^k)$ и используя оценки (3.7), (3.8) (при $\varkappa = -1$), (3.9), (3.10) (при $\varkappa = 0$), (3.11), (3.12) (при $\varkappa = 1$), вычисляем выражение в круглых скобках в правой части неравенства (2.20) для каждого метода. Минимизируя это выражение по γ, получаем значение $\gamma_\varkappa^{opt}$, определяемое формулой (3.14) и вычисляем коэффициенты $q_\varkappa$, которые принимают вид из (3.15).

4. Операторные уравнения с положительным спектром

В предыдущих разделах для монотонного оператора A проведено полное исследование сходимости итерационных процессов (1.3), (1.4) и установлена оценка погрешности итераций. Следует, однако, отметить, что условие монотонности оператора A — очень сильное требование, которое не выполняется во многих важных прикладных задачах, например, в задачах гравиметрии и магнитометрии.

Цель этого раздела — несколько ослабить условие монотонности и обосновать сходимость процессов (1.3), (1.4).

Рассмотрим конечномерный случай, когда оператор $A\colon R^n \to R^n$, для которого матрица $A'(u)$ в некоторой окрестности решения имеет спектр, состоящий из различных неотрицательных собственных значений.

Лемма 4.1. *Пусть* $n \times n$ *матрица* $A'(u)$ *не имеет кратных собственных значений* λ_i *и числа* λ_i $(i = 1, 2, ..n)$ *различны и неотрицательны. Тогда при* $\bar\alpha > 0$ *матрица имеет представление* $A'(u) + \bar\alpha I = S(u)\Lambda S^{-1}(u)$ *и справедлива оценка*

$$\|(A'(u) + \bar\alpha I)^{-1}\| \le \frac{\mu(S(u))}{\bar\alpha + \lambda_{min}} \le \frac{\mu(S(u))}{\bar\alpha}, \tag{4.1}$$

где столбцы матрицы $S(u)$ *составлены из собственных векторов матрицы* $A'(u) + \bar\alpha I$, Λ*– диагональная матрица, ее элементы – собственные значения матрицы* $A'(u) + \bar\alpha I$, $\mu(S(u)) = \|S(u)\|\|S^{-1}(u)\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия леммы следует, что матрица $A'(u)+\bar{\alpha}I$ имеет n положительных различных собственных значений $\lambda_i+\alpha$. Тогда, согласно [8, с. 222, замечание 1], справедливо представление

$$A'(u)+\bar{\alpha}I = S(u)\Lambda S^{-1}(u), \quad (A'(u)+\bar{\alpha}I)^{-1} = S(u)\Lambda^{-1}S^{-1}(u) \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует оценка (4.1).

4.1. Обратимся к регуляризованному методу Ньютона, для которого была доказана теорема (2.3) о сходимости итераций и оценке погрешности для монотонного оператора. Рассмотрим теперь вариант этой теоремы, когда оператор $A\colon R^n \to R^n$ и производная которого имеет неотрицательный спектр, удовлетворяющий условиям леммы (4.1), причем функция $\mu(S(u))$ при фиксированном α равномерно ограничена по u в шаре $S_r(u_\alpha)$, т.е.

$$\sup\{\mu(S(u)) : u \in S_r(u_\alpha)\} \le \bar{S} < \infty. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (4.3), (2.1)– (2.3), $A'(u^0)$*–симметричная матрица, и для параметров справедливы соотношения:* $0<\alpha\le\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}\ge 4N_0$, $r\le \alpha/8N_2\bar{S}$, $\|u_\alpha-u^0\|\le r$.

Тогда для метода (1.3) *справедливо заключение теоремы* 2.3, *где соотношения* (2.12), (2.13) *для* γ *и выражение для* q *в* (2.16) *соответственно принимает вид*

$$\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}, \quad \gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}, \quad q=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом оценки (4.1), доказательство с несущественными поправками проводится по схеме из теоремы 2.3.

З а м е ч а н и е 4.1. При доказательстве теоремы вместо условия (4.3) достаточно требовать ограниченность величины $\sup\{\mu(S(u^k)) : u^k \in S_r(u_\alpha)\}$, где u^k – итерационные точки метода. Причем, при регулярном правиле останова итераций $k(\delta)$, супремум берется по конечному набору номеров $k\le k(\delta)$, что автоматически влечет ограниченность супремума и выполнение оценки вида (2.16) при этих значениях k. Кроме того, для модифицированного метода Ньютона, в котором производная $A'(u^0)$ вычисляется в фиксированной точке u^0, величина $\mu(S(u^0)) = \|S(u^0)\|\|S^{-1}(u^0)\| = \bar{S} < \infty$.

4.2. При тех же условиях на оператор, что и для метода Ньютона в п. 4.1, исследуем процессы (1.4).

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.3). *Пусть при* $u\in S_r(u_\alpha)$ *матрица* $A'(u)$ *имеет спектр, состоящий из неотрицательных различных собственных значений,* $A'(u^0)$ *– симметричная неотрицательно определенная матрица. Пусть параметры удовлетворяют условиям:*

$$MMO: \qquad 0<\alpha\le\bar{\alpha}, \quad r\le\alpha/6\bar{S}N_2, \quad \bar{\alpha}\ge N_0 \tag{4.4}$$

$$MHC: \qquad 0<\alpha\le\bar{\alpha}, \quad r\le\alpha/3N_2, \tag{4.5}$$

$$MMH: \qquad 0<\alpha\le\bar{\alpha}, \quad r\le\alpha/6N_2. \tag{4.6}$$

Тогда справедливы следующие соотношения (3.4), *где*

$$\mu_{-1} = \frac{8\bar{S}^2(N_1+\alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}, \quad \mu_0 = \frac{18(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})}{\alpha\bar{\alpha}^2}, \quad \mu_1 = \frac{18(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^4}{\alpha\bar{\alpha}^5} \tag{4.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\varkappa=-1$ и тех же обозначениях, которые были приняты в разделе 3, имеем (верхний индекс (-1) соответствует методу (1.4) при $\varkappa=-1$)

$$< F^{-1}(u), u-u_\alpha >= \beta^{-1}(u)[< A(u)-A(u_\alpha), u-u_\alpha > +\alpha\|u-u_\alpha\|^2].$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части равенства с учетом условий (4.4):

$$< A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha > +\alpha\|u - u_\alpha\|^2 = \alpha\|u - u_\alpha\|^2$$

$$+ < \int_0^1 (A'(u_\alpha + \theta(u - u_\alpha)) - A'(u^0))(u - u_\alpha)d\theta, u - u_\alpha > + < A'(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha >$$

$$\geq \alpha\|u - u_\alpha\|^2 - \frac{N_2(\|u^0 - u_\alpha\| + \|u - u^0\|)^2}{2}\|u - u_\alpha\|^2$$

$$\geq \left(\alpha - \frac{3N_2 r}{2}\right)\|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{3\alpha}{4}\|u - u_\alpha\|^2 \tag{4.8}$$

$$\beta^{-1}(u) = \frac{< (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}{\|S_\alpha(u)\|^2} = \frac{< (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{-1}S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}{\|S_\alpha(u)\|^2}$$

$$+\frac{< (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}{\|S_\alpha(u)\|^2} \geq \frac{1}{N_0 + \bar{\alpha}} - \frac{\bar{S}N_2\|u - u^0\|}{\bar{\alpha}^2}$$

$$\geq \frac{1}{N_0 + \bar{\alpha}} - \frac{2\bar{S}N_2 r}{\bar{\alpha}^2} \geq \frac{1}{6\bar{\alpha}}, \tag{4.9}$$

где учтены условия (4.4) и соотношение $\|u - u^0\| \leq \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \leq 2r$.

Кроме того, имеем оценку

$$\|F^{-1}(u)\|^2 \leq (\beta^{-1})^2\|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|^2$$

$$\leq \|B^{-1}(u)\|^2(N_1 + \alpha)^2\|u - u_\alpha\|^2 \leq \frac{\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2}\|u - u_\alpha\|^2 \tag{4.10}$$

Объединяя (4.8)–(4.10), получаем, что в соотношении (3.4), μ_{-1} выражается величиной из (4.7)

Исследуем теперь МНС, т.е. процесс (1.4) при $\varkappa = 0$. Аналогично прерыдущему методу устанавливаем, что

$$< A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha > +\alpha\|u - u_\alpha\|^2 \geq \left(\alpha - \frac{3N_2 r}{2}\right)\|u - u_\alpha\|^2 \tag{4.11}$$

Кроме того, имеем

$$\beta^0(u) = \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{< B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) >} \geq \frac{1}{\|B(u)\|} \geq \frac{1}{\|A'(u) + \bar{\alpha}I\|} \geq \frac{1}{N_1 + \bar{\alpha}}.$$

Объединяя последнее соотношение с (4.11), получаем оценку снизу

$$< F^0(u), u - u_\alpha > \geq \frac{1}{N_1 + \bar{\alpha}}\left(\alpha - \frac{3N_2 r}{2}\right)\|u - u_\alpha\|^2. \tag{4.12}$$

Аналог оценки (4.10) для $F^0(u)$ следует из следующих неравенств:

$$\|F^0(u)\| \leq \beta^0(u)(\|A(u) - A(u_\alpha)\| + \alpha\|u - u_\alpha\|) \leq \beta^0(u)(N_1 + \alpha)\|u - u_\alpha\|, \tag{4.13}$$

$$\beta^0(u) = \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\bar{\alpha}\|S_\alpha(u)\|^2 + < A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) > + < (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}$$

$$\leq \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\bar{\alpha}\|S_\alpha(u)\|^2 - | < (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) > |} \leq \frac{1}{\bar{\alpha} - N_2\|u - u^0\|} \leq \frac{1}{\bar{\alpha} - 2N_2 r} \tag{4.14}$$

Из (4.12)-(4.14) при значениях параметров из (4.5) получаем значения μ_0 в (4.7).

Наконец рассмотрим процесс (1.4) при $\varkappa = 1$ с учетом замечания 3.1. Как и в предыдущем методе, при оценке снизу величины $< F^1(u), u - u_\alpha >$, справедливо соотношение (4.11). Для параметра $\beta^1(u)$ получаем

$$\beta^1(u) = \frac{< B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) >}{\|B(u)S_\alpha(u)\|^2}$$

$$\geq \frac{< A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) > + \bar{\alpha} < S_\alpha(u), S_\alpha(u) > - \|A'(u) - A'(u^0)\| \|S_\alpha(u)\|^2}{(N_1 + \bar{\alpha})^2 \|S_\alpha(u)\|^2}$$

$$\geq \frac{\bar{\alpha} - N_2\|u - u^0\|}{(N_1 + \bar{\alpha})^2} \geq \frac{\bar{\alpha} - 2N_2 r}{(N_1 + \bar{\alpha})^2},$$

что при условиях на параметры (4.6), дает оценку

$$< F^1(u), u - u_\alpha > \geq \left(\alpha - \frac{3N_2 r}{2}\right) \frac{\bar{\alpha} - 2N_2 r}{(N_1 + \bar{\alpha})^2} \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1 + \bar{\alpha})^2} \|u - u_\alpha\|^2. \tag{4.15}$$

Поскольку

$$\|F^1(u)\| \leq \beta^1(u)(\|A(u) - A(u_\alpha)\| + \alpha\|u - u_\alpha\|) \leq \beta^1(u)(N_1 + \alpha)\|u - u_\alpha\|,$$

$$\|\beta^1(u)\| \leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha})\|S_\alpha(u)\|^2}{\|A'(u)S_\alpha(u)\|^2 + 2\bar{\alpha} < A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) > + \bar{\alpha}^2\|S_\alpha(u)\|^2}$$

$$\leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha})\|S_\alpha(u)\|^2}{2\bar{\alpha} < A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) > - 2\bar{\alpha}| < (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) > | + \bar{\alpha}^2\|S_\alpha(u)\|^2}$$

$$\leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha}N_2\|u - u^0\|} \leq \frac{N_1 + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}(\bar{\alpha} - 4N_2 r)} \leq \frac{3(N_1 + \bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2}.$$

Окончательно получаем для $\|F^1(u)\|^2$ оценку сверху

$$\|F^1(u)\|^2 \leq \frac{3^2(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}{\bar{\alpha}^4} \|u - u_\alpha\|^2. \tag{4.16}$$

Объединяя соотношения (4.15) и (4.16), и условия (4.6), получаем значение μ_1, представленное в (4.7).

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* 4.1. *Тогда при* $\gamma_\varkappa < 2/\mu_\varkappa$, $\varkappa = -1, 0, 1$, *где значения* μ_k *определяются соотношениями* (4.7), *последовательности* u^k, *порождаемые процессом* (1.4) *при* $\varkappa = -1, 0, 1$, *сходятся к* u_α, *т.е.,*

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при $\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$ *справедлива оценка*

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\| \leq q_\varkappa^k r,$$

где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{64\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^2}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^6}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^6}}. \tag{4.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в соотношение (2.20) вместо $F(u^k)$ последовательность $F^{\varkappa}(u^k)$ ($\varkappa = -1, 0, 1$) и, используя оценки (4.8), (4.9) ($\varkappa = -1$), (4.9), (4.10) ($\varkappa = 0$), (4.11), (4.12) ($\varkappa = 1$), а также условия на параметры (4.4)–(4.6), получаем, после минимизации по γ, значения для $q_{\varkappa}$, представленные в (4.17). При выполнении условия $\gamma_{\varkappa} < 2/\mu_{\varkappa}$, выражение в круглых скобках в правой части неравенства (2.20) принимает значение, которое меньше единицы, что влечет сходимость итераций для всех трех методов.

З а м е ч а н и е 4.2. Предложенный подход к получению оценок скорости сходимости итерационных процессов полностью переносится на случай, когда спектр матрицы $A'(u^k)$, состоящий из различных вещественных значений, содержит набор малых по абсолютной величине отрицательных собственных значений. Пусть λ_1 — отрицательное собственное значение с наименьшим модулем $|\lambda_1|$ и $\bar{\alpha} - |\lambda_1| = \bar{\alpha}_1 < \alpha^*$. Тогда оценка (4.1) трансформируется в неравенство

$$\|(A'(u^k) + \bar{\alpha} I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u^k))}{\bar{\alpha}^*} \leq \frac{\bar{S}}{\bar{\alpha}^*} \tag{4.18}$$

Все утверждения, т.е. теоремы (4.1)–(4.3) остаются справедливыми при замене $\bar{\alpha}$ на $\bar{\alpha}^*$ во всех оценках, где используется (4.18).

З а м е ч а н и е 4.3. Если рассматривать модифицированные варианты методов (1.3)-(1.4), когда вместо $A'(u^k)$ в операторе шага используется $A'(u^0)$ в процессе итераций, то при условиях на оператор, принятых в данном разделе, для получения аналогичных результатов о сходимости и оценке погрешности наряду с неотрицательностью спектра достаточно: требовать симметричность матрицы $A'(u^0)$ [3–5]. Заметим, что при исследовании основных методов (1.3)-(1.4) существование симметричной матрицы для некоторого элемента u^0 предполагается.

5. Оценка погрешности двухэтапного метода

5.1. Полученные в разделах 2, 3 оценки скорости сходимости для итерационных процессов (1.3)–(1.4) и результаты по аппроксимации точного решения уравнения (1.1) семейством регуляризованных решений u_α позволяют получить оценку погрешности двухэтапного метода.

Согласно [9, теоремы 3.1, теоремы 3.2], при условии монотонности оператора и истокообразной представимости решения $\hat{u}$ уравнения (1.1)

$$u^0 - \hat{u} = A'(\hat{u})v, \tag{5.1}$$

справедлива оценка погрешности регуляризованного решения

$$\|u^\delta_\alpha - \hat{u}\| \leq \|u^\delta_\alpha - u_\alpha\| + \|u_\alpha - \hat{u}\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + k_0\alpha, \tag{5.2}$$

где $k_0 = (1 + N_2\|v\|/2)\|v\|$, u^δ_α, u_α – решения уравнения (1.2) с возмущенной f_δ и точной f правой частью уравнения (1.1) соответственно. Минимизируя правую часть соотношения (5.2) по α, имеем $\alpha(\delta) = \sqrt{\delta/k_0}$, что дает оценку

$$\|u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)} - \hat{u}\| \leq 2\sqrt{\delta k_0} \tag{5.3}$$

В разделах 2, 3 для итерационных процессов (1.3)–(1.4) получены оценки вида

$$\|u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)} - u^\delta_{\alpha(\delta)}\| \leq q^k(\delta) r \tag{5.4}$$

Заметим, что вместо используемого ранее элемента u_α, в этом разделе введены переобозначения; а именно, через u^δ_α теперь обозначено решение уравнения (1.2) с возмущенной правой частью f_δ, а через u_α – решение уравнения (1.2) с точной правой частью. Кроме того, вместо u^k используется $u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)}$, чтобы подчеркнуть зависимость от параметров δ, α.

Объединяя (5.3), (5.4), приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.1. *Пусть для решения* $\hat{u}$ *уравнения* (1.1) *с монотонным оператором справедливо условие* (5.1) *и для метода* (1.4) *выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда при выборе числа итераций по правилу*

$$k(\delta) = \left[\frac{\ln(2\sqrt{k_0\delta}/r)}{\ln q(\delta)}\right] \tag{5.5}$$

справедлива оптимальная по порядку оценка погрешности двухэтапного метода

$$\|u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)} - u^{\delta}_{\alpha(\delta)}\| \le 4\sqrt{k_0\delta} \tag{5.6}$$

Доказательство. Объединяя (5.3), (5.4), получаем

$$\|u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)} - \hat{u}\| \le \|u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)} - u^{\delta}_{\alpha(\delta)}\| + \|u^{\delta}_{\alpha(\delta)} - \hat{u}\| \le rq^k(\delta) + 2\sqrt{k_0\delta} \tag{5.7}$$

Приравнивая слагаемые в правой части (5.7), получаем выражение для числа итераций (5.5) и оценку (5.6). Оптимальность по порядку оценки (5.6) устанавливается аналогично [10] с использованием методологии оценивания погрешности метода через модуль непрерывности обратного линейного оператора [11, 12].

5.2. Для оператора $A'(u)$ с положительным спектром так же, как и для случая монотонного оператора, в разделе 4 доказана линейная скорость сходимости, однако, в отличие от монотонного оператора здесь оценок типа (5.2) не существует, поэтому нельзя получить общую оценку для двухэтапного метода. Тем не менее, в этой ситуации для двухэтапного алгоритма можно установить оценку для невязки — основной характеристики точности метода при решении задачи с реальными данными.

Предположим, что уравнение (1.2) разрешимо, тогда для его решения $u^{\delta}_{\alpha(\delta)}$ справедливо соотношение

$$\|A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| = \alpha(\delta)\|u^{\delta}_{\alpha(\delta)} - u^0\|. \tag{5.8}$$

Пусть для некоторой связи $\alpha(\delta)$ ограничена величина $\|u^{\delta}_{\alpha(\delta)} - u^0\| \le m < \infty$, что влечет оценку

$$\|A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| \le \alpha(\delta)m \tag{5.9}$$

и сходимость

$$\lim_{\delta\to 0}\|A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| = 0,$$

при $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$. Пусть $u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)}$ – итерационные точки, полученные одним из методов (1.3), (1.4). Имеем

$$\|A(u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| \le \|A(u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)}) - A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)})\| + \|A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)}) - f(\delta)\| \le N_1 q^k(\delta) + \alpha(\delta)m. \tag{5.10}$$

Выбирая, например, $\alpha(\delta) = \delta^p$ и приравнивая слагаемые в правой части (5.10), получаем правило выбора числа итерации

$$k(\delta) = \left[\ln(m\delta^p/N)/\ln q(\delta)\right],$$

при котором справедлива оценка для невязки двухэтапного метода

$$\|A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| \le 2m\delta^p. \tag{5.11}$$

Замечание 5.1. Соотношения (5.8)–(5.11) остаются справедливыми для случая, когда матрицы $A'(u^k)$ содержат набор малых отрицательных собственных значений с тем лишь отличием, что в неравенстве (5.10) параметр q во всех методах теперь вычисляется по формулам из раздела 4, в которых параметр $\bar{\alpha}$ заменен на α^* (см. замечание 4.2).

6. Численные эксперименты для обратных задач гравиметрии и магнитометрии

6.1. Обратная задача гравиметрии

Рассмотрим уравнение гравиметрии в декартовой системе координат с осью z, направленной вниз

$$\gamma\Delta\sigma\Bigg\{\iint_D \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H^2]^{1/2}}dx'dy' \\ -\iint_D \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{1/2}}dx'dy'\Bigg\} = \Delta g(x,y),$$

где γ – гравитационная постоянная, $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ – скачок плотности на поверхности раздела сред, описываемой функцией $u(x,y)$ и подлежащей определению, $f(x,y)$ – аномальное гравитационное поле, вызванное отклонением поверхности от асимптотической плоскости $z = H$ для искомого решения $u(x,y)$. Запишем (6.1) в виде операторного уравнения

$$[A(u)](x,y) = -\iint_D \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{1/2}}dx'dy' = f(x,y), \tag{6.1}$$

где $f(x,y) = \Delta g(x,y)/\gamma\Delta\sigma - A(H)$. Тогда производная оператора A в точке $u^0(x,y)$ определяется формулой

$$[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{u^0(x',y')h(x',y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(u^0(x',y'))^2]^{3/2}}dx'dy',$$

После дискретизации интегрального уравнения (6.1) двумерным аналогом формулы прямоугольников с равномерной сеткой по каждой переменной с шагом Δx, Δy, получаем систему нелинейных уравнений относительно неизвестного вектора $u_{ji} = u(x_j, y_i)$ $\quad (j = 1, 2, ..., m_1, i = 1, 2, ..., m_2)$, которая в векторно-матричном виде может быть записана следующим образом

$$A_n(u_n) = f_n, \tag{6.2}$$

где u_n, f_n – векторы размерности $n = m_1 \times m_2$. Дискретный аналог производной $A'(u^0)$ принимает форму

$$[A'_n(u_n)h_n]_{k,l} = \sum_{i=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1}\Delta x\Delta y\frac{u_{ji}h_{ji}}{[(x_k-x'_j)^2+(y_l-y'_i)^2+(u^0_{ji})^2]^{3/2}}, \tag{6.3}$$

где при $u_n = u^0_n$ – const $A'_n(u^0_n)$ – симметричная матрица, компоненты которой вычисляются по формуле (6.3).

Рассматривая модель двухслойной среды, в которой поверхность раздела задается функцией $u(x,y)$, определяется формулой [13, с. 160]

$$\hat{u}(x,y) = 5 - 3.21e^{-(x/10.13-6.62)^6-(y/9.59-2.93)^6} - 2.78e^{-(x/9.89-4.12)^6-(y/8.63-7.43)^6} \\ +3.13e^{-(x/9.89-4.82)^6-(y/8.72-4.33)^6}, \tag{6.4}$$

заданной в области $D = \{0 \le x \le 100, 0 \le y \le 110\}$. Была выбрана сетка с шагом $\Delta x = \Delta y = 1$ (км), что приводит к размерности $n = 11000$ для искомого вектора u_n, а также принято, что $\Delta\sigma = 0.21$ (г/см^3), $H = 5$ (км) ($z = H = 5$ – асимптотическая плоскость для $\hat{u}(x,y)$).

Цель численного эксперимента — сравнить по экономичности (затратам машинного времени) методы (1.3), (1.4) с их модифицированными вариантами, когда производная $A'(u^k)$, входящая в оператор шага этих процессов, вычисляется в фиксированной точке u^0 в течение всего процесса итераций, т.е. $A'(u^k)$ в (1.3), (1.4) заменяется на $A'(u^0)$ (см. [4, 5]). В результате численного эксперимента по восстановлению модельного решения (6.4) было установлено, что не только матрица $A'_n(u^0)$ имеет n различных неотрицательных собственных значений, но это свойство имеет место и для $A'(u^k_n)$. Тем самым выполняются условия, при которых получены результаты в разделах 4, 5 по сходимости и оценке погрешности процессов (1.3), (1.4) для немонотонного оператора A с положительным спектром.

При анализе числа обусловленности $\mu(A'_n(u^k_n))$ было установлено, что эта величина для всех четырех процессов незначительно колеблется около значений $\mu = 10^{17}$. Выход из процесса итераций каждого из методов осуществляется по правилу

$$\frac{\|\hat{u}_n - \tilde{u}_n\|_{R^n}}{\|\tilde{u}_n\|_{R^n}} \le 10^{-2}, \tag{6.5}$$

где $\hat{u}_n$ – точное решение системы уравнений (6.2), а $\tilde{u}_n$ – восстановленное каждым из четырех итерационных методов. Таким образом, точность численного решения, полученного процессами (1.3), (1.4) и их модифицированными аналогами, гарантированно не превышала $\varepsilon = 10^{-2}$.

При значениях параметров $\bar{\alpha} = \alpha = 10^{-3}$, $\gamma = 1$ в Таблице 1 представлены результаты численных расчетов, где

$$\Delta = \frac{\|A_n(\tilde{u}_n) + \alpha(\tilde{u}_n - u^0) - f_n\|_{R^n}}{\|f_n\|_{R^n}}, \tag{6.6}$$

относительная регуляризованная невязка для восстановленного решения, N – число итераций в процессе для достижения точности, определяемой неравенством (6.5), T – время реализации метода. В позициях для Δ, N, T верхняя строка соответствует основным процессам, а нижняя — их модифицированным вариантам.

Таблица 1

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
Δ	0.0048	0.0020	0.0024	0.0023
	0.0094	0.0019	0.0019	0.0021
N	17	21	20	16
	22	23	23	16
T (сек)	214	11	14	15
	328	7	7	7

6.2. Обратная задача магнитометрии

Уравнение магнитометрии при тех же предположениях, что и в задаче 6.1, имеет вид:

$$\Delta J\Big\{\iint_D \frac{H}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H^2]^{3/2}}dx'dy' \\ -\iint_D \frac{u(x',y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{3/2}}dx'dy'\Big\} = \Delta G(x,y),$$

где ΔJ – усредненный скачок z-компоненты вектора намагниченности, $z = H$ – асимптотическая плоскость, $u(x,y)$ – функция, описывающая аномальное поле, $z = u(x,y)$ – искомая функция, описывающая поверхность раздела сред с различными свойствами намагниченности. Уравнение (6.7) можно переписать в форме

$$[D(u)](x,y) = \iint_D \frac{u(x',y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{3/2}}dx'dy' = F(x,y), \tag{6.7}$$

где $F(x,y) = D(H) - \Delta G(x,y)/\Delta J$, тогда производная оператора D в точке $u^0(x,y)$ определится формулой

$$[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 - 2(u^0(x',y'))^2}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (u^0(x',y'))^2]^{5/2}} h(x',y')dx'dy'.$$

После дискретной аппроксимации подобно задаче гравиметрии уравнения (6.7), приходим к системе нелинейных уравнений

$$D_n(u_n) = F_n \tag{6.8}$$

относительно вектора $u_n \quad (n = m_1 \times m_2)$ с компонентами $u_{ji} \quad (j = 1,2,...,m_1, i = 1,2,...,m_2)$, при этом компоненты производной оператора D_n в точке u_n^0 вычисляются по формуле

$$[D_n'(u_n^0)h_n]_{k,l} = \sum_{i=1}^{m_2}\sum_{j=1}^{m_1} \Delta x \Delta y \frac{(x_k - x_j')^2 + (y_l - y_i')^2 - 2u_{ji}^2}{[(x_k - x_j')^2 + (y_l - y_i')^2 + u_{ji}^2]^{5/2}} h_{ji},$$

причем при $u_n^0 = \{u^0(x_j', y_i'), 1 \le j \le m_1, 1 \le i \le m_2\} = const$, $D_n'(u_n^0)$ – симметричная матрица.

Модельное решение уравнения (6.8), определяющее поверхность раздела сред, задается формулой [14, с. 6]

$$\hat{u}(x,y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6 - (y/10-2.5)^6} - 3^{-(x/10-5.5)^6 - (y/10-4.5)^6}, \tag{6.9}$$

на области $D = \{0 \le x \le 100, 0 \le y \le 100\}$. Сетка строилась с шагом $\Delta x = \Delta y = 1$ (км), что влечет размерность $n = 10000$ для искомого вектора u_n.

Для $\Delta J = 0.4$ был выполнен численный эксперимент по восстановлению модельного решения задачи (6.7) процессами (1.3), (1.4) при $\bar{\alpha} = 0.01$, $\alpha = 0.0001$, $\beta = 1$, а также их модифицированными аналогами, когда производная $D'(u^k)$ вычисляется в фиксированной точке $u_n^0 = H = 5$ (км). Число обусловленности $\mu(D_n'(u_n^0)) = 1.8 \cdot 10^7$. После вычисления спектра матрицы $D_n'(u_n^k)$ выяснилось, что она имеет различные неотрицательные собственные значения, что на основании разделов 4, 5, при подходящем выборе параметра β и начальном приближении u_n^0, гарантирует сходимость итерационных схем и двухэтапного метода. Окончание итерационных процессов выполнялось по правилу (6.5).

Результаты численных расчетов для задачи (6.8) по восстановлению модельного решения (6.9) представлены в Таблице 2. Как и в Таблице 1, здесь Δ – относительная величина невязки (6.6) для восстановленного решения, N – число итераций для достижения точности (6.5), T – машинное время при реализации процесса, верхние строки для каждого параметра соответствуют данным для основных (немодифицированных) процессов (1.3), (1.4) , нижние строки — для модифицированных вариантов (1.3), (1.4). Анализируя результаты численного

Таблица 2

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
Δ	0.0636	0.0699	0.0802	0.0368
	0.0569	0.0575	0.0595	0.0369
N	4	4	4	5
	4	4	4	5
T (сек)	7	6	6	22
	5	3	3	3

эксперимента для задачи гравиметрии, можно отметить, что для достижения одной и той же точности приближенного решения в соответствии с правилом (6.5), число итераций для модифицированных методов, как правило, больше, чем немодифицированных процессов (1.3), (1.4). Однако затраты машинного времени при реализации модифицированных процессов, за исключением ММО, существенно меньше. Поэтому можно сделать вывод, что модифицированные МНС, ММН и РМН более экономичны и, следовательно, более предпочтительны для некоторых классов нелинейных задач большой размерности. Существенно более затратная по времени реализация ММО, по сравнению с МНС и ММН, связана прежде всего с тем, что в коэффициенте $\beta^{-1}(u^k)$ необходимо вычислять не только скалярные произведения, но и обращать на каждом шаге оператор $B_k = A'(u^k) + \alpha I$. Следует сказать, что для уравнения (1.1) ММО обычно не используется. Его применение целесообразно для эквивалентного уравнения $A'(u)*(A(u)-f) = 0$, для которого ММО преобразуется к виду, где операция обращения отсутствует [7, с. 57, формула 5.8]. Заметим также, что в методе ММО и РМН вычисление элемента вида $W = (A'(u^k)+\alpha I)^{-1}V$ заменялось приближенным решением системы $(A'(u^k)+\alpha I)W = V$ с помощью метода минимальных невязок, т.е. в этом случае фактически реализуется гибридная схема градиентно-ньютоновского типа.

Как можно видеть из Таблицы 2, также тенденция по затратам машинного времени для модифицированных вариантов процессов (1.3), (1.4) (включая ММО) также сохраняется и для обратной задачи магнитометрии.

Авторы признательны рецензенту за внимательное прочтение статьи и высказанные замечания, что позволило устранить многочисленные технические погрешности, допущенные авторами статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бакушинский А.Б.** Регуляризующий алгоритм на основе метода Ньютона-Канторовича для решения вариационных неравенств // Журнал вычислительной математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 6. С. 1397–1604.
2. **Bakushinsky A. and Goncharsky A.** Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1994. 258 p.
3. **Васин В.В., Акимова Е.Н., Миниахметова А.Ф.** Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. 2013. Vol. 6, № 3. С.26–37.
4. **Vasin V.V.** Modified Newton type processes generating Fejer approximations of regularized solutions to nonlinear equations // Proc. Steklov Inst. Math. 2014. Vol. 284. Suppl. 1. P. S145–S158.
5. **Vasin V.V.** Regularized modified alpha-processes for nonlinear equations with monotone operators // Dokl. Math. 2016. Vol. 469, №1. P. 13–16
6. **Куфнер А., Фучик С.** Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 308 с.
7. **Vasin V.V., Eremin I.I.** Operators and Iterative Processes of Fejer Type. Theory and Application. Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2009. 155 p.
8. **Стренг Г.** Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980. 454 с.
9. **Tautenhahn U.** On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill–posed problems // Inverse Problems. 2002. Vol. 18, №1. P. 191–207
10. **Vasin V.V.** Modified steepest descent method for nonlinear irregular operator equation // Dokl. Math. 2015. Vol. 91, №3. P. 300–303.
11. **Иванов В.К.** Об оценке устойчивости квазирешений на некомпактных множествах // Известия вузов. Математика. 1974. №5 (144). С. 97–103.
12. **Ivanov V.K., Vasin V.V. and Tanana V.P.** Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications. Utrecht: VSP, 2002. 281 p.
13. **Акимова Е. Н., Мисилов В. Е, Скурыдина А.Ф, Третьяков А.И.** Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере "Уран"// Вычислительные методы и программирование. 2015. Vol. 16, № 1. С.155–164.
14. **Акимова Е.Н., Мисилов В. Е, Дергачев Е. А.** Алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии // Труды 41-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2014. С. 4–6

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент РАН
гл. научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский Федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина УрО РАН
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Поступила ..2016

Скурыдина Алия Фиргатовна
мл. научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
ассистент
Уральский Федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина УрО РАН
e-mail: afinapal@gmail.com