

На правах рукописи

Подпись

Скурыдина Алия Фиргатовна

**Регуляризованные алгоритмы на основе схем
Ньютона, Левенберга – Марквардта и
нелинейных аналогов α -процессов для решения
нелинейных операторных уравнений**

01.01.07 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2018

Работа выполнена в *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения
Российской академии наук.*

Научный руководитель: *доктор физико-математических наук,
доцент Акимова Елена Николаевна*

Официальные оппоненты: *Танана Виталий Павлович
доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник кафедры Си-
стемного программирования ФГАОУ ВО «Южно-
Уральский государственный университет (нацио-
нальный исследовательский университет)» (г. Челя-
бинск),*

*Ягола Анатолий Григорьевич
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры математики физиче-
ского факультета ФГБОУ ВО «Московский государ-
ственный университет имени М. В. Ломоносова»,*

Ведущая организация: *ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный
университет»*

Защита состоится «_____» _____ 2018 г. в _____ часов на заседании диссертаци-
онного совета Д 004.006.04 при ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н.
Красовского УрО РАН по адресу: 620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16, акто-
вый зал

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН Институт математики и ме-
ханики им. Н. Н. Красовского УрО РАН.

Автореферат разослан «_____» _____ 2018 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба
высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, с.н.с.

Подпись

Скарин В. Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Построение итеративно регуляризованных алгоритмов востребовано для решения широкого круга некорректных прикладных задач. Например, решение структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии сводится к решению нелинейных интегральных уравнений первого рода. После дискретизации операторное уравнение сводится к системе нелинейных уравнений с большим числом неизвестных, поэтому необходимы параллельные программы для многопроцессорных и многоядерных вычислительных систем для уменьшения времени счета.

Цели и задачи диссертационной работы: построение новых устойчивых и экономичных по времени и памяти алгоритмов на основе методов ньютоновского типа и α -процессов для решения нелинейных операторных уравнений и исследование их сходимости; реализация параллельных алгоритмов в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах (видеокартах) для вычислений на сетках большого размера.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми и имеют теоретическую и практическую ценность.

1. В рамках двухэтапного метода построения регуляризующего алгоритма доказаны теоремы о сходимости и сильной фейеровости метода Ньютона и нелинейных аналогов α -процессов: метода минимальной ошибки (ММО), метода наискорейшего спуска (МНС) и метода минимальных невязок (ММН). Обоснована сходимость модифицированных вариантов методов ММО, МНС, ММН, когда производная оператора вычисляется в начальной точке итераций. Рассмотрены два случая: оператор уравнения является монотонным, либо оператор является немонотонным, конечномерным и его производная имеет неотрицательный спектр.

2. Для решения систем нелинейных интегральных уравнений с ядром оператора структурной обратной задачи гравиметрии для модели двуслойной сре-

ды предложен новый экономичный по вычислениям и памяти покомпонентный метод, основанный на методе Ньютона. Для решения систем нелинейных уравнений структурных обратных задач гравиметрии в многослойной среде предложен новый экономичный покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта с весовыми множителями. Предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона и его модифицированного варианта в виде перехода от плотно заполненной матрицы производной оператора к ленточной в силу особенности строения ядер интегральных операторов задач гравиметрии.

3. Разработан комплекс параллельных программ для решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности, реализованный на многоядерных процессорах и на графических процессорах (видеокартах) для методов типа Ньютона и Левенберга – Марквардта и покомпонентных методов типа Ньютона и Левенберга – Марквардта.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для решения нелинейных операторных уравнений. В частности, на практике можно применять для обратных задач теории потенциала, для различных обратных задач фильтрации.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты, полученные в работе над диссертацией, полностью подтверждаются численными экспериментами. Основные результаты по материалам диссертационной работы докладывались на конференциях:

1. XIV и XV Уральская молодежная научная школа по геофизике (Пермь, 2013 г., Екатеринбург 2014 г.);
2. Международная конференция «Параллельные вычислительные технологии» (Ростов-на-Дону, 2014 г., Екатеринбург, 2015 г., Казань, 2017 г.);
3. Международная конференция «Геоинформатика: теоретические и прикладные аспекты» (Киев 2014, 2015, 2016 г.)
4. Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2014 г.)

5. Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, 2015 г.)

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 13 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых научных изданиях [VasAkiMin2013; AkiMisSkur2014; AkMisSkurTre2015_2; VasSkur2017; Skur2017_2], 3 проиндексированных Scopus [AkSkur2014; AkSkur2015; AkSkur2016], 3 статей в сборниках трудов конференций и 2 тезисов докладов.

Личный вклад автора. Подготовка к публикации работ проводилась совместно с соавторами. Все результаты, представленные в данной работе, получены автором лично. Защищаемые положения отражают вклад автора в опубликованных работах. В работе [VasSkur2017] автору диссертации принадлежат построение методов для решения нелинейных уравнений на основе α -процессов, доказательства сходимости и сильной фейеровости регуляризованного метода Ньютона, сильной фейеровости нелинейных α -процессов для монотонного оператора и оператора, производная которого имеет неотрицательный спектр, результаты численного моделирования. В работах [VasAkiMin2013; MisMinDer2013; AkiMisMin2014; AkiMisSkur2014] автором проведено численное моделирование для методов ньютоновского типа с разработкой параллельных программ для метода Ньютона и его модифицированного варианта. В статьях [AkMisSkurTre2015_2] автор реализовал параллельный алгоритм линеаризованного метода минимальной ошибки. В работе [AkSkur2014] автором предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона и поставлен вычислительный эксперимент, разработаны параллельная программы. В работах [AkiMinMis2015; AkSkur2015; AkSkur2016] автором предложены методы покомпонентного типа Ньютона и Левенберга – Марквардта, проведены численные эксперименты, написаны параллельные программы для задач с большими сетками. В работе [VasSkur2015] автору принадлежат доказательства сходимости модифицированных методов на основе α -процессов в случае монотонного оператора задачи, а также результаты расчетов на ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 10 страниц, включая 18 рисунков, 14 таблиц. Библиография включает 121 наименование, в том числе 13 публикаций автора.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе В первой главе рассматриваются методы решения некорректных задач с монотонным оператором. Доказываются теоремы сходимости регуляризованного метода Ньютона. Построены методы минимальной ошибки, наискорейшего спуска и минимальных невязок решения нелинейных уравнений и доказывается их сходимость.

Рассматривается нелинейное уравнение

$$A(u) = f \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве U с монотонным непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором A , для которого обратные операторы $A'(u)^{-1}$, A^{-1} разрывны, что влечет некорректность задачи (1). Для построения регуляризующего алгоритма (РА) используется двухэтапный метод, в котором на первом этапе используется регуляризация по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \tag{2}$$

где $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, u_0 — некоторое приближение к решению; а на втором этапе для аппроксимации регуляризованного решения u_α применяется либо регуляризованный метод Ньютона (РМН), предложенный ранее в [1] ($\gamma = 1$, $\bar{\alpha} = \alpha = \alpha_k$):

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \quad (3)$$

либо нелинейные аналоги α -процессов

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^\varkappa S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k) \quad (4)$$

при $\varkappa = -1, 0, 1$. Здесь $\alpha, \bar{\alpha}$ — положительные параметры регуляризации, $\gamma > 0$ — демпфирующий множитель (параметр регулировки шага), $S_\alpha(u) = A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta$.

Так как оператор A — монотонный, то его производная $A'(u^k)$ — неотрицательно определенный оператор. Следовательно, операторы $(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}$ существуют и ограничены, следовательно, процессы (3), (4) определены корректно.

Пусть имеются следующие условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U, \quad (5)$$

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U. \quad (6)$$

и известна оценка для нормы производной в точке u^0 (начальном приближении), т.е.

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r. \quad (7)$$

Пусть A — монотонный оператор, для которого выполнены условия (5), (6) для $u, v \in S_r(u_\alpha)$, $r \leq \alpha/N_2$, $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, $u^0 \in S_r(u_\alpha)$.

Тогда для процесса (3) с $\gamma = 1$ имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения u_α регуляризованного уравнения (2)

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = (1 - \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}}). \quad (8)$$

Усиленное свойство Фейера [?] для оператора T означает, что для некоторого $\nu > 0$ выполнено соотношение

$$\|T(u) - z\|^2 \leq \|u - z\|^2 - \nu \|u - T(u)\|^2, \quad (9)$$

где $z \in \text{Fix}(T)$ — множество неподвижных точек оператора T . Это влечет для итерационных точек u^k , порождаемых процессом $u^{k+1} = T(u^k)$, выполнение неравенства

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \leq \|u^k - z\|^2 - \nu \|u^k - u^{k+1}\|^2. \quad (10)$$

Важным свойством фейеровских операторов является замкнутость относительно операций произведения и взятия выпуклой суммы. Располагая итерационными процессами с фейеровским оператором шага и общим множеством неподвижных точек, можно конструировать разнообразные гибридные методы, а также учитывать в итерационном алгоритме априорные ограничения на решение в виде системы линейных или выпуклых неравенств.

1. А. Б. Бакушинский. Регуляризирующий алгоритм на основе метода Ньютона — Канторовича для решения вариационных неравенств // ЖВМиМФ, 16:6 (1976). С. 1397–1604.

* В. В. Васин, И. И. Еремин. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 2005.

Пусть выполнены условия (5)–(7), $A'(u^0)$ — самосопряженный оператор, $\|u_\alpha - u^0\| \leq r$, $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geq 4N_1$, $r \leq \alpha/8N_2$. Тогда при $\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2}$ оператор шага T процесса (3) при

$$\nu = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2\gamma(N_1 + \alpha)^2} - 1$$

удовлетворяет неравенству (9), для итераций u^k справедливо соотношение (10) и имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0.$$

Если параметр γ принимает значение $\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2}$, то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}.$$

Результаты первой главы опубликованы в работе [VasSkur2017].

Во второй главе ...

Содержание второй главы.

Результаты второй главы опубликованы в работе [VasSkur2017; VasSkur2015].

В третьей главе ...

Содержание третьей главы.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [AkSkur2014], [AkSkur2015], [AkSkur2016], [Skur2017_2].

В Заключении приводятся основные результаты.

Основные результаты диссертации

1. Для нелинейного уравнения с монотонным оператором доказаны теоремы о сходимости регуляризованного метода Ньютона. Построены нелинейные аналоги α -процессов: регуляризованные методы градиентного типа для решения нелинейного уравнения с монотонным оператором: метод минимальной ошибки, метод наискорейшего спуска, метод минимальных невязок. Доказаны теоремы сходимости и сильная фейеровость итерационных процессов. Для задачи с немонотонным оператором, производная которого имеет неотрицательный спектр, доказаны теоремы сходимости для метода Ньютона, нелинейных α -процессов и их модифицированных вариантов.

2. Для решения нелинейных интегральных уравнений обратных задач гравиметрии предложены экономичные покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта. Предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона и его модифицированного варианта при решении задач с матрицей производной с диагональным преобладанием.

3. Разработан комплекс параллельных программ для многоядерных и графических процессоров (видеокарт) решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности методами ньютоновского типа и покомпонентными методами.

Основные публикации по теме диссертации

Научное издание

Скурыдина Алия Фиргатовна

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Регуляризованные алгоритмы на основе схем Ньютона, Левенберга – Марквардта и нелинейных аналогов α -процессов для
решения нелинейных операторных уравнений

Подписано в печать 25.01.2011. Формат 60 × 90 1/16. Тираж 100 экз. Заказ 256.

Санкт-Петербургская издательская фирма «Наука» РАН. 199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 1, <http://www.naukaspb.spb.ru>