Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского

На правах рукописи

Подпись

Скурыдина Алия Фиргатовна

Регуляризующие алгоритмы на основе методов ньютоновского типа и нелинейных аналогов α-процессов

01.01.07 – Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2018

Работа выполнена в *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.*

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, доцент Акимова Елена Николаевна*
Официальные оппоненты:	*Танана Виталий Павлович доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры Системного программирования ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (г. Челябинск),*
	Ягола Анатолий Григорьевич доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики физического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»,
Ведущая организация:	*ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

Защита состоится «____» ____________ 2018 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д 004.006.04* при *ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН* по адресу: *620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16, актовый зал*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2018 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, с.н.с. *Подпись* *В. Д. Скарин*

1. Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Теория некорректно поставленных задач и методы их решения относятся к важнейшим направлениям исследования современной вычислительной математики, что обусловлено потребностями различных областей естествознания, техники и медицины, где эти проблемы возникают в форме обратных задач.

Основы теории некорректно поставленных задач были заложены в 50–60 годы прошлого века в работах выдающихся российских математиков А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева и дальнейшее ее развитие было продолжено в работах их учеников и последователей. В этих работах исследования относились, главным образом, к линейным уравнениям, но и для нелинейных задач были сформулированы базовые принципы регуляризации.

В последние три десятилетия получили развитие устойчивые (регулярные) методы решения нелинейных некорректных задач на основе принципа итеративной регуляризации и иных подходах. Эти исследования связаны с именами А. Б. Бакушинского, Б. Т. Поляка, А. В. Гончарского, М. Ю. Кокурина, В. В. Васина, В. Г. Романова, С. И. Кабанихина, Ф. П. Васильева, В. А. Морозова, А. Г. Яголы, А. С. Леонова, А. Л. Агеева, В. П. Тананы, В. И. Максимова, А. И. Короткого, А. Б. Смирновой, A. Neubauer, B.Kaltenbacher, H. W. Engl, M. Hanke, C. Boeckmann.

Структурные задачи гравиметрии и магнитометрии — важный класс нелинейных некорректных задач. Если исходные данные о геофизических полях измеряются на большой площади, то это приводит к необходимости решать системы нелинейных уравнений большой размерности с использованием многопроцессорных вычислителей и технологий распараллеливания. Для их решения широко использовались регуляризованные методы Ньютона, Левенберга –Марквардта и процессы градиентного типа (А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин, В. В. Васин[1], Е. Н. Акимова[2], Л. Ю. Тимерханова, Г. Я. Пересторонина, В. Е. Мисилов), а также экономичный метод локальных поправок (П. С. Мартышко, И. Л. Пруткин[3]).

Целью диссертационной работы является построение новых устойчивых и экономичных алгоритмов на основе методов ньютоновского типа и α-процессов для решения нелинейных операторных уравнений и исследование их сходимости; реализация алгоритмов в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах (видеокартах) для вычислений на сетках большого размера.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе использовался аппарат функционального анализа, численных методов, теории некорретных задач. Для реализации алгоритмов на многоядерных и графических процессорах использовались технологии параллельного программирования OpenMP и CUDA.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми и имеют теоретическую и практическую ценность.

1. В рамках двухэтапного метода построения регуляризующего алгоритма доказаны теоремы о сходимости и сильной фейеровости метода Ньютона и нелинейных аналогов α-процессов: метода минимальной ошибки (ММО), метода наискорейшего спуска (МНС) и метода минимальных невязок (ММН) при аппроксимации регуляризованного решения. Рассмотрены два случая: оператор уравнения является монотонным, либо оператор действует в конечномерном пространстве, является немонотонным, но его производная имеет неотрицательный спектр.

2. Для решения нелинейных интегральных уравнений обратных задач гра-

---

1. В. В. Васин, Г. Я. Пересторонина, И. Л. Пруткин, Л. Ю. Тимерханова. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойной среды // Мат. мод. 2003. Т. 15, №2. С. 69–76.

2. Е. Н. Акимова. Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000 // Вестник ННГУ. 2009. №4. С. 181–189.

3. И. Л. Пруткин. О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. №1. С. 67–77.

виметрии предложены новые экономичные по вычислениям и памяти покомпонентные методы типа Ньютона (ПМН) и типа Левенберга – Марквардта. Предложена вычислительная оптимизация методов ньютоновского типа для задач с матрицей производной оператора, имеющей диагональное преобладание.

3. Разработан комплекс параллельных программ для решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности, реализованный на многоядерных процессорах и на графических процессорах (видеокартах) для методов типа Ньютона и Левенберга – Марквардта и покомпонентных методов типа Ньютона и Левенберга – Марквардта.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для решения нелинейных операторных уравнений. Например, для обратных задач теории потенциала, в частности, обратных задач гравиметрии и магнитометрии, для различных обратных задач фильтрации.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты, полученные в работе над диссертацией, полностью подтверждаются численными экспериментами. Основные результаты по материалам диссертационной работы докладывались на всероссийских и международных конференциях и семинарах: XIV и XV Уральской молодежной научной школе по геофизике (Пермь, 2013 г., Екатеринбург 2014 г.); международной конференции «Параллельные вычислительные технологии» (Ростов-на-Дону, 2014 г., Екатеринбург, 2015 г., Казань, 2017 г.); международной конференции «Геоинформатика: теоретические и прикладные аспекты» (Киев 2014, 2015, 2016 г.); международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2014 г.); международном научном семинаре по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, 2015 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах, из них 5 — в журналах, рекомендованных ВАК [1—5], 3 — проиндексированы Scopus [6—8], 5 — в сборниках трудов и тезисов конференций [11; 10; 9;

12; 13].

Личный вклад автора. Все результаты, представленные в данной работе, получены автором лично. Содержание диссертации и основные результаты отражают вклад автора в опубликованных работах. В работе [4] автору диссертации принадлежат обоснования регуляризованных методов решения нелинейных уравнений на основе α-процессов и метода Ньютона: сходимость методов к регуляризованному решению, оценка погрешности. В работах [1; 2; 11; 10] проведено численное моделирование для методов ньютоновского типа с разработкой параллельных программ. В статьях [9], [3] автор реализовал параллельный алгоритм линеаризованного метода минимальной ошибки. В работе [6] предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона и решены модельные задачи, разработаны параллельные программы. В работах [7; 8; 12] автором предложены методы покомпонентного типа Ньютона и Левенберга – Марквардта, решены модельные задачи, созданы параллельные программы для задач с большими сетками. В работе [13] автором получены результаты расчетов на ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 119 страниц, включая 23 рисунка, 10 таблиц. Библиография включает 134 наименования, в том числе 13 публикаций автора.

Исследования по теме диссертации выполнены в период с 2013 по 2017 годы в Отделе некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН.

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, ведущему научному сотруднику ИММ УрО РАН Елене Николаевне Акимовой.

Автор выражает благодарность за постановку ряда проблем, поддержку, полезные замечания и обсуждения член-корреспонденту РАН, главному научному сотруднику ИММ УрО РАН Владимиру Васильевичу Васину.

2. Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследований и выполнен краткий обзор публикаций по теме диссертации, сформулирована цель работы, показаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе рассматриваются методы решения некорректных задач с монотонным оператором. Обоснован двухэтапный метод на основе регуляризованного метода Ньютона. Построены методы минимальной ошибки, наискорейшего спуска и минимальных невязок решения нелинейных уравнений и доказывается их сходимость к регуляризованному решению.

Рассматривается нелинейное уравнение I рода

$$A(u) = f \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве с монотонным непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором A, для которого обратные операторы $A'(u)^{-1}$, A^{-1} разрывны в окрестности решения, что влечет некорректность задачи (1). Для построения регуляризующего алгоритма используется двухэтапный метод, в котором на первом этапе используется регуляризация по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \tag{2}$$

где $\|f - f_\delta\| \leqslant \delta$, u_0 — некоторое приближение к решению; а на втором этапе для аппроксимации регуляризованного решения u_α применяется либо регуляризованный метод Ньютона (РМН) (А. Б. Бакушинский[4,5] ($\gamma = 1$, $\bar{\alpha} = \alpha = \alpha_k$)):

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha} I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \tag{3}$$

4. А. Б. Бакушинский. Регуляризующий алгоритм на основе метода Ньютона – Канторовича для решения вариационных неравенств // ЖВМиМФ, 16:6 (1976). С. 1397–1604.

5. A. Bakushinsky, A. Goncharsky. Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1994. 258 p.

либо нелинейные аналоги α-процессов

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^k)+\bar{\alpha} I)^{\varkappa} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle}{\langle (A'(u^k)+\bar{\alpha} I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle} S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k) \tag{4}$$

при $\varkappa = -1, 0, 1$. Здесь $\alpha > 0, \bar{\alpha} > 0$ — параметры регуляризации, $\gamma > 0$ — демпфирующий множитель, $S_\alpha(u) = A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta$.

Замечание 1. *Формула (4) при $\varkappa = 1$ справедлива лишь для самосопряженного оператора $A'(u)$. В общем случае, знаменатель дроби при $\varkappa = 1$ следует заменить на $\|(A'(u) + \alpha I) S_\alpha(u)\|^2$.*

Впервые итерационные α-процессы были предложены в работах М. А. Красносельского[6] и др. для решения линейного уравнения с ограниченным, самосопряженным, положительно определенным оператором. Для линейных некорректных операторных уравнений итеративно регуляризованные α-процессы были исследованы в монографии[5]. Нелинейные аналоги модифицированных α-процессов были предложены и изучены в работе В. В. Васина[7].

Так как оператор A — монотонный, то его производная $A'(u^k)$ — неотрицательно определенный оператор. Операторы $(A'(u^k) + \bar{\alpha} I)^{-1}$ существуют и ограничены, следовательно, процессы (3), (4) определены корректно.

В данной главе в предположении, что производная $A'(u)$ удовлетворяет условию Липшица, устанавливается линейная скорость сходимости методов (3), (4) и свойство фейеровости итераций. При истокообразной представимости решения асимптотическое правило останова итераций $k(\delta)$ определяется из равенства оценок погрешности для итераций и регуляризованного решения u_α.

Пусть имеются следующие условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leqslant N_1 \|u - v\|, \quad \|A'(u) - A'(v)\| \leqslant N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in S_r(u^0). \tag{5}$$

6. М. А. Красносельский, Г. М. Забрейко, П. П. Забрейко и др. Приближенное решение операторных уравнений // М.: Наука, 1969.

7. В. В. Васин. Регуляризованные модифицированные α-процессы для нелинейных уравнений с монотонным оператором // ДАН. 2016. Т.94, №1. С.13–16.

и известна оценка нормы производной в начальном приближении u^0, т.е.

$$\|A'(u^0)\| \leqslant N_0 \leqslant N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leqslant r. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть A — монотонный оператор, для которого выполнены условия (5) для $u, v \in S_r(u_\alpha)$, $r \leqslant \alpha/N_2$, $0 < \alpha \leqslant \bar{\alpha}$, $\|u^0 - u_\alpha\| \leqslant r$.*

Тогда для процесса (3) с $\gamma = 1$ имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения u_α регуляризованного уравнения (2)

$$\|u^k - u_\alpha\| \leqslant q^k r, \quad q = (1 - \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}}). \tag{7}$$

Усиленное свойство Фейера[8] для оператора T означает, что для некоторого $\nu > 0$ выполнено соотношение

$$\|T(u) - z\|^2 \leqslant \|u - z\|^2 - \nu \|u - T(u)\|^2, \tag{8}$$

где $z \in Fix(T)$ — множество неподвижных точек оператора T. Это влечет для итерационных точек u^k, порождаемых процессом $u^{k+1} = T(u^k)$, выполнение неравенства

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \leqslant \|u^k - z\|^2 - \nu \|u^k - u^{k+1}\|^2. \tag{9}$$

Важным свойством фейеровских операторов является замкнутость относительно операций произведения и взятия выпуклой суммы. Итерационные процессы с фейеровским оператором шага и общим множеством неподвижных точек позволяют строить гибридные методы, а также учитывать априорные ограничения на решение в виде систем неравенств.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (5)–(6), $A'(u^0)$ — самосопряженный оператор, $\|u_\alpha - u^0\| \leqslant r$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geqslant 4N_1$, $r \leqslant \alpha/8N_2$. Тогда при $\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2}$ оператор шага T процесса (3) при*

$$\nu = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2\gamma(N_1 + \alpha)^2} - 1$$

8. В. В. Васин, И. И. Еремин. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 2005.

удовлетворяет неравенству (8), для итераций u^k справедливо соотношение (9) и имеет место сходимость $\lim_{k\to\infty}\|u^k - u_\alpha\| = 0$. Если параметр γ принимает значение $\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2}$, то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leqslant q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2}}.$$

Далее приводится оценка скорости сходимости нелинейных α-процессов.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (5)–(6), $A'(u^0)$ — самосопряженный оператор, для ММО $\alpha \leqslant \bar{\alpha}$, $r \leqslant \alpha/8N_2$, $\bar{\alpha} \geqslant N_0$. Тогда при*

$$\gamma_\varkappa < \frac{2}{\mu_\varkappa} \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$$

для последовательности $\{u^k\}$, порождаемой α-процессом при соответствующем $\mu_\varkappa$, имеет место сходимость $\lim_{k\to\infty}\|u^k - u_\alpha\| = 0$, а при $\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$ справедлива оценка $\|u^k - u_\alpha\| \leqslant q_\varkappa^k r$, где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^2}{(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^4}{(N_1+\bar{\alpha})^4}}.$$

Во второй главе обоснована сходимость к регуляризованному решению итераций РМН, ММО, МНС, ММН в конечномерном случае без требования монотонности оператора A исходного уравнения. Представлены результаты численных экспериментов.

Пусть собственные значения λ_i матрицы $A'(u)$ $n\times n$ различны между собой и неотрицательны. Тогда при $\bar{\alpha} > 0$ матрица имеет представление $A'(u) + \bar{\alpha}I = S(u)\Lambda S^{-1}(u)$ и справедлива оценка

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leqslant \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{min}} \leqslant \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}}, \tag{10}$$

где столбцы матрицы $S(u)$ составлены из собственных векторов матрицы $A'(u) + \bar{\alpha}I$, Λ — диагональная матрица, ее элементы — собственные значения матрицы $A'(u) + \bar{\alpha}I$, $\mu(S(u)) = \|S(u)\| \cdot \|S^{-1}(u)\|$.

Рассмотрим теперь вариант теорем 2, 3, когда оператор $A\colon R^n \to R^n$ и его производная имеет неотрицательный спектр. Имея оценку (10), доказывается теорема для регуляризованного метода Ньютона

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (5)–(6), *а также:* $\sup\{\mu(S(u)) : u \in S_r(u_\alpha)\} \leqslant \bar{S} < \infty$, $A'(u^0)$ *— симметричная матрица,* $0 < \alpha \leqslant \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geqslant 4N_0$, $r \leqslant \alpha/8N_2\bar{S}$.

Тогда для метода (3) *справедливо заключение теоремы (1.3), где*

$$\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}, \quad \gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2},$$

$$\|u^k - u_\alpha\| \leqslant q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}}.$$

Аналогично имеем теорему о сходимости ММО, МНС и ММН.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда при* $\gamma_\varkappa < 2/\mu_\varkappa$, $\varkappa = -1, 0, 1$, *с соответствующими* μ_k *для каждого процесса, последовательности* u^k, *порождаемые процессом* (4) *при* $\varkappa = -1, 0, 1$, *сходятся к* u_α, *т.е.,* $\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0$, *а при* $\gamma_\varkappa^{opt} = 1/\mu_\varkappa$ *справедлива оценка* $\|u^{k+1} - u_\alpha\| \leqslant q_\varkappa^k r$, *где*

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{64\bar{S}^2(N_1+\alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^2}{36(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^6}{36(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^6}}.$$

Для модифицированных ММО, МНС и ММН, где производная $A'(u)$ вычисляется в фиксированной точке u^0, также обосновывается сходимость.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (5)–(6) $A'(u^0)$ *— самосопряженный оператор, спектр которого состоит из неотрицательных различных собственных значений,* $0 \leqslant \alpha \leqslant \bar{\alpha}$, $\quad r = \alpha/6N_2$, $\quad \bar{\alpha} \geqslant N_0$. *Тогда при* $\gamma_\varkappa < 2/\mu_\varkappa \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$ *для последовательности* $\{u^k\}$, *порождаемой модифицированным* α*-процесс* *при соответствующем* $\varkappa$, *имеет место сходимость* $\lim_{k\to\infty}\|u^k - u_\alpha\| = 0$, *а при* $\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa}$ *справедлива оценка* $\|u^k - u_\alpha\| \leqslant q_\varkappa^k r$, *где* $q^\varkappa = \sqrt{1 - \frac{9\alpha^2}{64(N_1+\alpha)^2}}$.

Замечание 2. *Предложенный подход к получению оценок скорости сходимости итерационных процессов полностью переносится на случай, когда спектр матрицы $A'(u^k)$, состоящий из различных вещественных значений, содержит набор малых по абсолютной величине отрицательных собственных значений. Пусть λ_1 — отрицательное собственное значение с наименьшим модулем $|\lambda_1|$ и $\bar{\alpha} - |\lambda_1| = \bar{\alpha}_1 < \alpha^*$. Тогда оценка (10) трансформируется в неравенство*

$$\|(A'(u^k) + \bar{\alpha} I)^{-1}\| \leqslant \frac{\mu(S(u^k))}{\bar{\alpha}^*} \leqslant \frac{\bar{S}}{\bar{\alpha}^*}.$$

Все теоремы остаются справедливыми при замене $\bar{\alpha}$ на $\bar{\alpha}^*$.

В работе[9] (теорема 5.1.) приводится оптимальная по порядку оценка погрешности двухэтапного метода с монотонным оператором:

$$\|u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)} - \hat{u}\| \leqslant 4\sqrt{k_0\delta},$$

где $u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)}$ — k-е приближение, $\hat{u}$ — решение уравнения (1), $k_0 = (1+N_2\|v\|/2)\|v\|$ ($u^0 - \hat{u} = A'(\hat{u})v$ — истокообразная представимость решения). Для получения оценки используется результат U. Tautenhahn[10] для регуляризованного решения. В конечномерном случае для оператора $A'(u)$ с положительным спектром установлена оценка для невязки — основной характеристики точности метода при решении задачи с реальными данными.

$$\|A(u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| \leqslant 2m\delta^p,$$

где для $\alpha(\delta)$ ограничена величина $\|u^{\delta}_{\alpha(\delta)} - u^0\| \leqslant m < \infty$, $\alpha(\delta) = \delta^p$.

Методы РМН, ММО, МНС, ММН и их модифицированные варианты ис-

9. В. В. Васин, А. Ф. Скурыдина. Двухэтапный метод построения регуляризующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН. Т.23 В.1 (2017), С. 57–74.

10. U. Tautenhahn. On the method of Lavrentiev regurarization for nonlinear ill-posed problems // Inverse Problem. 2002. Vol. 91, №1. P. 191–207.

пользованы при решении обратной структурной задачи магнитометрии

$$[A(u)]\,(x,y) = \frac{\mu_0}{4\pi}\Delta J\Bigg\{\iint\limits_D \frac{H}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H^2]^{3/2}}dx'dy' \\ - \iint\limits_D \frac{u(x',y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{3/2}}dx'dy'\Bigg\} = B_z(x,y,0),$$

где $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, ΔJ — скачок z-компоненты вектора намагниченности, $z = H$ — асимптотическая плоскость, $B_z(x,y,0)$ — функция, описывающая аномальное поле, $D = \{c \leqslant x' \leqslant d, a \leqslant y' \leqslant b\}$, $z = u(x,y)$ — искомая функция.

Число обусловленности $\mu(A_n'(u_n^k)) \approx 1.8 \cdot 10^7$, спектр является неотрицательным и состоит из различных собственных значений, $\bar{\alpha} = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-4}$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = \|u^k - z\|/\|z\| < 10^{-2}$. Итерационные методы достигают точности ε за 4–5 итераций, у модифицированных методов меньше время счета.

В третьей главе предложены покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта, а также вычислительная оптимизация методов типа Ньютона. Параллельные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах.

1. Задача гравиметрии о нахождении поверхности раздела в декартовой системе координат с осью z, направленной вниз, имеет вид

$$A(u) = f\Delta\sigma\Bigg\{\iint\limits_D \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H^2]^{1/2}}dx'dy' \\ - \iint\limits_D \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{1/2}}dx'dy'\Bigg\} = \Delta g(x,y,0), \tag{11}$$

где f — гравитационная постоянная, равная $6.67 \cdot 10^{-8}$ см^3/г$\cdot c^2$, $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ — скачок плотности на поверхности раздела сред $u(x,y)$, $D = \{c \leqslant x \leqslant d, a \leqslant y \leqslant b\}$, $\Delta g(x,y,0)$ — аномальное гравитационное поле.

Итерации в методе Ньютона строятся по схеме

$$A'(u^k)(\Delta u^k) = -\big[A(u^k) - f\big],$$

где $A(u) = \int_a^b\int_c^d K(x,y,x',y',u^k(x,y))dxdy$ — интегральный оператор задачи гравиметрии, $\Delta u^k = u^{k+1} - u^k$. Т.е., для задачи гравиметрии

$$f\Delta\sigma\int\limits_a^b\int\limits_c^d K'_u(x,y,x',y',u^k(x,y))\Delta u^k(x,y)dxdy = -\big[A(u(x',y')) - f(x',y')\big]. \quad (12)$$

Полагая $\Delta u^k(x,y) = \Delta u^k(x',y') = const$ относительно переменных интегрирования, перейдем от (12) к приближенному соотношению

$$f\Delta\sigma(\Delta u^k(x',y'))\int\limits_a^b\int\limits_c^d K'_u(x,y,x',y',u^k(x,y))dxdy \approx -\big[A(u(x',y')) - f(x',y')\big].$$

Покомпонентный метод типа Ньютона имеет вид[11]:

$$u^{k+1}(x',y') = u^k(x',y') - \gamma\frac{1}{\Psi(x',y')}\big([A(u^k)](x',y') - f(x',y')\big),$$

где $\Psi(x',y') = f\Delta\sigma\int_a^b\int_c^d K'_u(x,y,x',y',u^k(x,y))dxdy$.

Регуляризованный покомпонентный метод типа Ньютона имеет вид:

$$u^{k+1}(x',y') = u^k(x',y') - \gamma\frac{1}{\Psi(x',y')+\bar{\alpha}}([A(u^k)](x',y')+$$

$$+\alpha(u^k(x',y') - u^0(x',y')) - f_\delta(x',y')),$$

где γ — демпфирующий множитель, $\alpha > 0, \bar{\alpha} > 0$ — параметры регуляризации.

В дискретной записи итерационный процесс запишется

$$u^{k+1}_{m,l} = u^k_{m,l} - \frac{1}{\psi^k_{m,l}+\bar{\alpha}}([A_n(u^k)]_{m,l} + \alpha(u^k - u^0) - f_{m,l}), \quad 1 \le m \le M, \quad 1 \le l \le N,$$

где $\psi^k_{m,l} = f\Delta\sigma\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{N}\Delta x\Delta y\frac{u_{ij}}{[(x_k-x'_j)^2+(y_l-y'_i)^2+(u_{ij})^2]^{3/2}}$, $n = M\cdot N$. Сумма $\psi^k_{m,l}$ — сумма элементов $(m\times M + l)$-й строки матрицы производной $A'_n(u^k_n)$. Вычислительная сложность покомпонентного метода типа Ньютона для решения

11. Akimova E., Skurydina A. A componentwise Newton type method for solving the structural inverse gravity problem // EAGE Geoinformatics 2015

системы n уравнений без учета сложности алгоритма вычисления $A_n(u_n^k)$ составляет $O(n)$, в отличие от метода Ньютона, где сложность алгоритма $O(n^2)$.

2. Предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона. Прозводная оператора A в точке $u^k(x,y)$ определяется формулами в задаче гравиметрии

$$[A'(u)]h = \iint\limits_D \frac{u^k(x',y')h(x',y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(u^k(x',y'))^2]^{3/2}}dx'dy',$$

и в задаче магнитометрии

$$[A'(u^k)]h = \iint\limits_D \frac{(x-x')^2+(y-y')^2-2(u^k(x',y'))^2}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(u^k(x',y'))^2]^{5/2}}h(x',y')dx'dy'.$$

После дискретизации интегрального оператора и его производной, получаем матрицу $A'_n(u^k)$ с диагональным преобладанием[12]. Без существенной потери точности учитываются только значения элементов a_{ij}, где $i+j \in [i-\beta; i+\beta]$.

3. Задача гравиметрии о нахождении нескольких поверхностей раздела имеет вид (суммарное поле получаем сложением полей от каждой поверхности)

$$\begin{aligned} A(u) = \sum_{l=1}^{L} f\Delta\sigma_l \frac{1}{4\pi} \times \iint\limits_D \Bigg\{ & \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u_l^2(x,y)]^{1/2}} \\ & - \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H_l^2]^{1/2}} \Bigg\} = \Delta g(x',y'), \end{aligned} \tag{13}$$

где L — число границ раздела, $f = 6.67 \cdot 10^{-8}$ см^3/г$\cdot c^2$, $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ — скачок плотности на поверхности раздела сред $u(x,y)$, $\Delta g(x,y,0)$ — аномальное гравитационное поле.

Регуляризованный метод Левенберга – Марквардта имеет вид

$$u^{k+1} = u^k - \gamma[A'(u^k)^*A'(u^k)+\alpha I]^{-1}[A'(u^k)^*(A(u^k)-f_\delta)].$$

По аналогии с ПМН, запишем покомпонентный метод типа Левенберга –

12. Акимова Е. Н., Миниахметова А. Ф., Мартышко М. П. Оптимизация и распараллеливание методов типа Ньютона для решения структурныхобратных задач гравиметрии и магнитометрии // EAGE Geoinformatics 2014.

Марквардта[13]:

$$u_l^{k+1} = u_l^k - \gamma \frac{1}{\varphi_l + \bar{\alpha}} \Lambda [A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta)],$$

где l — номер границы раздела, $l = 1, .., L$, Λ — диагональный весовой оператор, $\varphi_l = \left[f \Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u_l^k(x', y')) dxdy \right]$
$\times \left[f \Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u_l^k(x, y)) dxdy \right]$, где $K'_u(x', y', x, y, u_l^k(x', y'))$ — ядро интегрального оператора. В дискретной форме

$$u_{l,i}^{k+1} = u_{l,i}^k - \gamma \frac{1}{\varphi_{l,i} + \bar{\alpha}} w_{l,i} \left[\{A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta)\}_i \right],$$

где $w_{l,i}$ — i-й весовой множитель, зависящий от l-й границы раздела, $\varphi_{l,i} = \left[f \Delta\sigma \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} K'_u(x'_k, y'_m, \{x, y\}_i, u_{l,i}^k) \Delta x' \Delta y' \right]$
$\times \left[f \Delta\sigma \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} K'_u(x_k, y_m, \{x', y'\}_i, u_l^k(x_k, y_m)) \Delta x \Delta y \right]$. Весовые множители выбираются по формулам из работы[14].

По сравнению с методом Левенберга – Марквадта, где вычислительная сложность алгоритмов достигает $O(n^3)$ в силу умножения матриц $[A'(u^k)^T A'(u^k)]$ и обращения матрицы $[A'(u^k)^T A'(u^k) + \alpha I]$, вычислительная сложность покомпонентного метода типа Левенберга – Марквадта составляет $O(n^2)$.

4. Параллельные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах NVIDIA (видеокартах) с помощью технологий OpenMP и CUDA для решения задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большого размера. Результаты решения модельных структурных обратных задач гравиметрии на сетках размера 512×512 и 1000×1000 продемонстрировали, что покомпонентный метод типа Ньютона работает в три раза

13. Skurydina A. F. Regularized Levenberg — Marquardt Type Method Applied to the Structural Inverse Gravity Problem in a Multilayer Medium and its Parallel Realization // Bulletin of South Ural State University. 2017. V.6, N.3. pp. 5–15

14. Е. Н. Акимова, В. Е. Мисилов, А. Ф. Скурыдина, А. И. Третьяков. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере "Уран" // Вычислительные методы и программирование, 2015. Т. 16, 155–164.

быстрее метода Ньютона, а покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта — в десять раз быстрее метода Левенберга – Марквардта. Таким образом, предлагаемые автором покомпонентные методы являются экономичными по затратам оперативной памяти и по количеству вычислительных операций.

3. Основные результаты диссертации

1. Для нелинейного уравнения с монотонным оператором дано обоснование двухэтапного метода на основе регуляризованного метода Ньютона. Построены регуляризованные градиентные методы для решения нелинейного уравнения с монотонным оператором: метод минимальной ошибки, метод наискорейшего спуска, метод минимальных невязок. Доказаны теоремы сходимости и сильная фейеровость итерационных процессов при аппроксимации регуляризованного решения. Для задачи с немонотонным оператором и неотрицательным спектром его производной обоснована сходимость метода Ньютона и нелинейных α-процессов к регуляризованному решению.

2. Для решения нелинейных интегральных уравнений обратных задач гравиметрии предложены экономичные покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта. Предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона для задач, где матрица производной имеет диагональное преобладание.

3. Разработан комплекс параллельных программ для многоядерных и графических процессоров (видеокарт) решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности методами ньютоновского типа и покомпонентными методами.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в изданиях из перечня ВАК, SCOPUS

1. *Васин В. В.*, *Акимова Е. Н.*, *Миниахметова А. Ф.* Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче грави-

метрии // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — 2013. — Т. 6, № 3. — С. 26—37.

2. *Акимова Е. Н.*, *Мисилов В. Е.*, *Скурыдина А. Ф.* Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник УГАТУ. — 2014. — Т. 18, № 4. — С. 19—29.

3. *Акимова Е. Н.*, *Мисилов В. Е.*, *Скурыдина А. Ф.*, *Третьяков А. И.* Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере «Уран» // Вычислительные методы и программирование. — 2015. — Т. 16, № 1. — С. 155—164.

4. *Васин В. В.*, *Скурыдина А. Ф.* Двухэтапный метод регуляризации для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 1. — С. 57—74.

5. *Skurydina A. F.* Regularized Levenberg — Marquardt Type Method Applied to the Structural Inverse Gravity Problem in a Multilayer Medium and its Parallel Realization // Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. — 2017. — Т. 6, № 3. — С. 5—15.

6. *Акимова Е. Н.*, *Миниахметова А. Ф.*, *Мартышко М. П.* Оптимизация и распараллеливание методов типа Ньютона для решения структурныхобратных задач гравиметрии и магнитометрии // XIIIth EAGE International Conference - Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. — Kiev, Ukraine, 2014.

7. *Akimova E.*, *Skurydina A.* A Componentwise Newton Type Method for Solving the Structural Inverse Gravity Problem // XIVth EAGE International Conference - Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. — Kiev, Ukraine, 2015.

8. *Akimova E.*, *Skurydina A.* On Solving the Three-Dimensional Structural Gravity Problem for the Case of a Multilayered Medium by the Componentwise Levenberg

– Marquardt Method // XVth EAGE International Conference - Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects. — Kiev, Ukraine, 2016.

Другие публикации

11. *Мисилов В. Е.*, *Миниахметова А. Ф.*, *Дергачев Е. А.* Решение обратной задачи гравиметрии итерационными методами на суперкомпьютере «Уран» // Труды XIV Уральской молодежной научной школы по геофизике. — 2013.

10. *Акимова Е. Н.*, *Мисилов В. Е.*, *Миниахметова А. Ф.* Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2014)». — 2014.

9. *Акимова Е. Н.*, *Мисилов В. Е.*, *Скурыдина А. Ф.*, *Третьяков А.* Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере «Уран» // Труды международной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2015)». — 2015.

12. *Akimova E. N.*, *Miniakhmetova A. F.*, *Misilov V. E.* Fast stable parallel algorithms for solving gravimetry and magnetometry inverse problems // Internation conference "Advanced Mathematics, Computations Applications – 2014". — 2014.

13. *Васин В. В.*, *Скурыдина А. Ф.* Регуляризованные модифицированные процессы градиентного типа для нелинейных обратных задач // Тезисы докладов международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам. — 2015.