

Скурыдина Алия Фиргатовна

**Регуляризирующие алгоритмы на основе методов  
ньютоновского типа и нелинейных аналогов  
 $\alpha$ -процессов**

01.01.07 – Вычислительная математика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук

Акимова Елена Николаевна

# Оглавление

<b>Список сокращений и условных обозначений</b> . . . . .	4
<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>Глава 1. Решение уравнений с монотонным оператором</b> . . . . .	15
1.1. Постановка задачи . . . . .	16
1.2. Метод Ньютона . . . . .	19
1.3. Нелинейные аналоги альфа-процессов . . . . .	26
1.4. Оценка погрешности двухэтапного метода . . . . .	32
1.5. Численные эксперименты . . . . .	34
<b>Глава 2. Решение уравнений с немонотонным оператором</b> . . . . .	39
2.1. Метод Ньютона . . . . .	40
2.2. Нелинейные альфа-процессы . . . . .	42
2.3. Модифицированные варианты регуляризованных методов на ос- нове нелинейных альфа-процессов . . . . .	48
2.4. Решение модельных задач гравиметрии и магнитометрии . . . . .	55
<b>Глава 3. Покомпонентные методы и вычислительные оптимизации для решения обратных структурных задач гравиметрии и магнитометрии</b> . . . . .	64
3.1. Покомпонентный метод типа Ньютона и вычислительная оптимизация метода Ньютона . . . . .	65
3.2. Покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта для решения обратной задачи гравиметрии для модели многослойной среды . . . . .	69
3.3. Использование параллельных вычислений . . . . .	74

3.4. Решение модельных задач гравиметрии и магнитометрии на многопроцессорных системах . . . . .	78
3.5. Описание комплекса параллельных программ . . . . .	96
<b>Заключение</b> . . . . .	100

# Список сокращений и условных обозначений

$H$	— гильбертово пространство;
$Fix(T)$	— множество неподвижных точек оператора $T$ ;
$S(u, r)$	— шар с центром в точке $u$ радиуса $r$ ;
$R$	— множество вещественных чисел;
$R^n$	— евклидово пространство $n$ -мерных векторов
$\ u\ $	— норма в гильбертовом пространстве;
$\langle u, v \rangle$	— скалярное произведение в гильбертовом пространстве;
$L_2[a, b]$	— гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$ ;
<i>OpenMP</i>	— Open Multi – Processing, технология параллельных вычислений для многоядерных архитектур;
<i>CUDA</i>	— Compute Unified Device Architecture, технология параллельных вычислений на графических ускорителях;

# Введение

## **Актуальность темы исследования.**

Теория некорректно поставленных задач и методы их решения относятся к важнейшим направлениям исследования современной вычислительной математики, что обусловлено потребностями различных областей естествознания, техники и медицины, где эти проблемы возникают в форме обратных задач.

На практике такие задачи нередко имеют большой объем входных данных, что приводит к необходимости решать системы нелинейных уравнений большой размерности с использованием многопроцессорных вычислителей и технологий распараллеливания.

**Степень разработанности темы исследования.** Ж. Адамар в 1902 г. [Hadamard1902] впервые определил условия корректности задачи математической физики. Задачи, не отвечающие этим условиям, то есть некорректные, Ж. Адамар считал лишенными физического смысла. В течение многих лет обратные задачи решались практиками без строгого математического обоснования.

Первой работой по теории некорректных задач является работа академика А.Н. Тихонова 1943 г. [Tikhonov1943], в которой он доказал устойчивость некоторых обратных задач при условии принадлежности решения компактному множеству. Также в этой работе он решил одну из актуальных обратных задач разведочной геофизики. В дальнейшем теория некорректных задач оформилась в самостоятельный раздел современной математики. В конце 50-х годов и начале 60-х годов появились работы, посвященные решению некоторых некорректных задач с помощью идей регуляризации, выдающихся отечественных ученых: А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова. Их исследования в этой области положили начало трем научным школам: московской, сибирской и уральской. Началось исследование устойчивых методов решения некоррект-

но поставленных задач, представляющих собой одно из наиболее актуальных проблем современной математической науки.

В большом цикле работ, выполненных начиная с 1963 года, А.Н. Тихонов сформулировал принцип устойчивого решения некорректно поставленных задач, ввел понятие регуляризирующего оператора и предложил ряд эффективных методов построения таких операторов, легко реализуемых на ЭВМ [**Tikh1963** \_**Tikh1963** \_**2**; **TikhGlas1965**; **TikhArs1986**]. Метод регуляризации А.Н. Тихонова, был применен для решения большого количества как фундаментальных математических, так и актуальных прикладных задач. В частности, тихоновским методом регуляризации были решены задача об отыскании решения интегрального и операторного уравнения первого рода, обратные задачи теории потенциала и теплопроводности.

Наряду с А.Н. Тихоновым, М.М. Лаврентьев изучал методы регуляризации. Ему принадлежит идея замены исходного уравнения близким ему в некотором смысле уравнением, для которого задача нахождения решения устойчива к малым изменениям правой части и разрешима для любой правой части [**Lavr1962**]. Были доказаны теоремы сходимости регуляризованного решения к точному [**Lavr1956**]. Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в работах [**Lavr1959**; **Lavr1963**; **LavrVas1966**; **LavrRomShi1980**], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву.

В работах В.К. Иванова, выполненных в 1960–1970-е годы, было введено понятие квазирешения [**Iv1962** \_**2**; **Iv1963**], были заложены также основы двусторонних оценок регуляризующих алгоритмов [**Iv1966**], установлены связи между вариационными методами регуляризации, развит единый подход к трактовке линейных некорректных задач в топологических пространствах [**Iv1967**].

Однако не все некорректные задачи возможно регуляризовать. Так, российский математик Л.Д. Менихес [**Menih1978**] привел пример интегрального оператора с непрерывным замкнутым ядром, действующего из пространства  $C[0, 1]$  в  $L_2[0, 1]$ , обратная задача для которого нерегуляризуема. Проблемам регуляризуемости также посвящены работы Ю.И. Петунина и А.Н. Пличко [**PetPlich1980**].

Для построения регуляризующих алгоритмов при решении прикладных задач требуется использовать дополнительную информацию о свойствах искомого решения, заданную в виде равенств и неравенств, характеристик решения, например, свойствами гладкости, вытекающих из физической сущности задачи. Получило развитие построение регуляризующих алгоритмов вариационными методами. А.Б. Бакушинский, Б.Т. Поляк сформулировали общие принципы построения регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах [**BakPol1974**]. Метод обобщенной невязки был предложен А.В. Гончарским, А.С. Леоновым, А.Г. Яголой [**GonLeoYag1973**]. Монография А.Б. Бакушинского, А.В. Гончарского [**BakGon1989**] посвящена итеративной регуляризации вариационных неравенств с монотонными операторами, которые единообразно описывают многие постановки задач с априорной информацией. В работах [**Bak1976**; **Bak1992**] А.Б. Бакушинский предложил итеративную регуляризацию методов Ньютона – Канторовича и Гаусса – Ньютона, исследовал их сходимость. Различные обобщения результатов А.Б. Бакушинского по методу Гаусса – Ньютона были получены в работах В. Blaschke, А. Neubauer, О. Scherzer, В. Kaltenbacher, А.Г. Ramm [**BlaNeuSch1997**; **KalNeuRam2002**]. Исследования методов наискорейшего спуска и минимальной ошибки решения нелинейных некорректных задач проведены А. Neubauer, О. Scherzer в работах [**NeuSch1995\_1**; **NeuSch1995\_2**; **Sch1995**],

Регуляризующие алгоритмы, предназначенные для решения плохо обуслов-

ленных систем линейных уравнений, интегральных уравнений Фредгольма приводятся в монографии А.Н. Тихонова, А.С. Леонова и А.Г. Яголы [TihLeoYag2017]. В приложениях А.Г. Ягола рассмотрел различные обратные задачи колебательной спектроскопии, оптики и др. [KliKosLiYag2016], [IsaLukTihYag2017], [KocKurPenYag2017], [LukYag2016].

Методам решения операторных уравнений первого рода посвящены работы В.П. Тананы [Tan1977; Tan1997] и монография [Tan1981]. Им предложен метод  $L$ -регуляризации, представляющий собой разновидность метода Тихонова, расширивший класс регуляризуемых задач [Tan2003\_1; Tan2003\_2].

Регуляризирующие алгоритмы в пространствах функций ограниченной вариации были впервые предложены М.Г. Дмитриевым, В.С. Полещук [DmiPol1972], И.Ф. Дорофеевым [Dor1979]. Далее в работах А.В. Гончарского и В.В. Степанова [GonSte1979], А.Л. Агеева [Ag1980] была доказана равномерная сходимость приближенных решений. Подход, изложенный в [TikhGonSteYag1990], основан на идее двухэтапного алгоритма: построении приближенного решения исходного операторного уравнения из условия минимизации регуляризованной невязки на априорном множестве, где привлекается информация о неотрицательности, монотонности и выпуклости решения. На втором этапе для решения корректно поставленной экстремальной задачи применяются методы градиентного типа, линеаризованные методы, или алгоритмы, специально ориентированные на определенный класс априорных ограничений.

Для решения систем нелинейных уравнений в условиях регулярности предложены методы в работах Л.В. Канторовича [Kan1947], Б.Т. Поляка [Pol1969], J. M. Ortega и W. C. Rheinboldt [OrtRhe1970], M.J.D. Powell [Pow1970], J.E.Dennis, R.B. Schnabel, P.D. Frank [DenSchn1996], C.T. Kelley [Kel1995], R.B. Schnabel и P.D. Frank [SchnFra1983] для решения систем уравнений с сингулярной или плохо обусловленной матрицей Якоби, J.C. Gilbert, J. Nocedal, S.J. Wright



[GilNoc1991; NocWri2006]. Термин « $\alpha$ -процессы», характеризующий класс нелинейных итерационных методов (где оператор шага нелинеен) для решения линейного уравнения с ограниченным самосопряженным положительно полуопределенным оператором, был введен в монографии М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко [KraVayZab1969]. Нелинейные модифицированные аналоги  $\alpha$ -процессов для уравнений с монотонным оператором были построены и исследованы в работе В.В. Васина [Vasin2016]. Поскольку обозначение  $\alpha$  традиционно используется в качестве параметра регуляризации для нелинейных уравнений, в этих процессах обозначение  $\alpha$  заменено на  $\varkappa$ .

L. Landweber в статье [Lan1951] 1951 г. предложил метод для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма I рода. В дальнейшем М. Hanke, А. Neubauer и О. Scherzer [HanNeuSch1995; Neu2000; NeuSch1995\_2] применили метод Ландвебера для решения нелинейных нерегулярных уравнений, доказали теоремы о сходимости и исследовали скорость сходимости метода. Градиентные методы с применением метода Ландвебера исследовались М.Ю. Кокуриным в работах [Kok2010\_1; Kok2010\_2].

В работах [Han1997; Han2010] М. Hanke предложил новую схему метода Левенберга – Марквардта для решения некорректных задач на примере задачи фильтрации.

В.В. Васиным предложен подход к решению задач с априорной информацией в работах [Vas1982; Vas1988; VasAge1993; VasEre2009], основанный на применении сильно фейеровских отображений при построении итерационных процессов решения некорректных задач и для учета априорных ограничений в форме выпуклых неравенств. Термин «фейеровское отображение» введен И.И. Ереминым в работах [Ere1965; Ere1966; Ere1968] на основе идей венгерского математика Фейера. Отображения, обладающие свойством фейеровости, позволяют строить итерационные процессы с учетом априорных ограничений.

На основе  $\alpha$ -процессов были предложены регуляризованные методы решения линейных операторных уравнений Фредгольма  $I$  рода, возникающих, например, при решении линейных обратных задач гравиметрии. Также В.В. Васин в работах [VasPer\_2011; Vasin\_2012] доказал сильную сходимость метода Левенберга – Марквардта и его модифицированного варианта для решения регуляризованного по Тихонову нелинейного уравнения. Проведенные численные эксперименты для нелинейной обратной задачи гравиметрии показали, что основной процесс Левенберга – Марквардта существенно превосходит по точности модифицированный вариант этого метода и не требует жестких условий на начальное приближение, но обладает большей вычислительной сложностью, и, следовательно, требует больших затрат машинного времени.

При исследовании методов решения некорректных задач важное место занимает оценка погрешности регуляризованного решения по отношению к точному решению. Для уравнения с монотонным оператором исследовался метод Лаврентьева U. Tautenhahn [Tau2002; Tau2004], стратегия выбора параметра регуляризации по Тихонову исследовалась Q. Jin Zong-Yi Hou, O. Scherzer, H. W. Engl и K. Kunisch [JinZon1997; JinZon1999; SchEngKun1993]. В.П. Тананой доказана сходимость решения  $L$ -регуляризованной вариационной задачи к решению исходного операторного уравнения  $I$  рода и показана на примере двумерной обратной задачи гравиметрии [Tan2003\_2].

Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии в случае одной контактной поверхности в виде интегральных уравнений были поставлены Б.В. Нумеровым и Н.Р. Малкиным [Num1930; Mal1931]. Вопросами единственности решения обратных задач теории потенциала занимались в разное время авторы П.С. Новиков [Nov1938], М.М. Лаврентьев [Lavr1956], В.К. Иванов [Iv1962\_1], А.И. Прилепко [Pri1965], А.В. Цирульский в совместных работах с Н. В. Федоровой, В. В. Кормильцевым [FedTsi1976; TsiKor1990].

Методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии предложены в работах В.Б. Гласко и др. [GlaOstFil1970], В.Н. Страхова [Str1967; Str1969; Str1974\_1; Str1974\_2; Str1976]. Метод локальных поправок, использующий свойства изменения гравитационного поля в отдельной точке, предложен И.Л. Пруткиным [Pru1983; Pru1986; Prutdiss1998], на этой же идее основывается покомпонентный градиентный метод В.Е. Мисилова [Mis2014; Mis2015]. Алгоритмы решения обратных задач математической физики на основе регуляризованных методов Ньютона, Левенберга – Марквардта и градиентных методов разрабатывались в ИММ УрО РАН В.В. Васиным, Е.Н. Акимовой, Г.Я. Пересторониной и В.Е. Мисиловым. Алгоритмы и технологии решения обратных задач геофизики исследовались в ИГФ УрО РАН П.С. Мартышко, И.Л. Пруткиным [MarPru1982; MarPrut2003], И.В. Ладовским, А.Г. Цидаевым.

Вопросы параллельных вычислений рассмотрены в монографиях В.В. Воеводина и Вл.В. Воеводина [VoeVoe2002], Дж. Ортеги [Ort1991], Д.К. Фаддеева, В.Н. Фаддеевой [FadFad1977]. Параллельные алгоритмы для решения задач гравиметрии и магнитометрии исследуются в работах Е.Н. Акимовой [Aki1994; Aki2009; AkiDiss2009; AkiBel2011; AkiMisKos2015].

**Целью** диссертационной работы является построение новых устойчивых и экономичных по времени и памяти алгоритмов на основе методов ньютоновского типа и  $\alpha$ -процессов для решения нелинейных операторных уравнений, исследование их сходимости; реализация параллельных алгоритмов в виде комплекса программ на многоядерных и графических процессорах (видеокартах) для вычислений на сетках большого размера.

**Методология и методы исследования.** В диссертационной работе использовался аппарат функционального анализа, численных методов, теории некорретных задач. Для реализации алгоритмов на многоядерных и графиче-

ских процессорах использовались технологии параллельного программирования OpenMP и CUDA.

**Научная новизна.** Результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми и имеют теоретическую и практическую ценность.

1. В рамках двухэтапного метода построения регуляризующего алгоритма доказаны теоремы о сходимости и сильной фейеровости метода Ньютона и нелинейных аналогов  $\alpha$ -процессов: метода минимальной ошибки (ММО), метода наискорейшего спуска (МНС) и метода минимальных невязок (ММН) при аппроксимации регуляризованного решения. Рассмотрены два случая: оператор уравнения является монотонным, либо оператор действует в конечномерном пространстве, является немонотонным, но его производная имеет неотрицательный спектр.

2. Для решения нелинейных интегральных уравнений обратных задач гравиметрии предложены новые экономичные по вычислениям и памяти покомпонентные методы типа Ньютона (ПМН) и типа Левенберга – Марквардта. Предложена вычислительная оптимизация методов ньютоновского типа для задач с матрицей производной оператора, имеющей диагональное преобладание.

3. Разработан комплекс параллельных программ для решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности, реализованный на многоядерных процессорах и на графических процессорах (видеокартах) для методов типа Ньютона и Левенберга – Марквардта и покомпонентных методов типа Ньютона и Левенберга – Марквардта.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для решения нелинейных операторных уравнений. Например, для обратных задач теории потенциала, в частности, обратных задач гравиметрии и магнитометрии, для различных обратных задач фильтрации.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Результаты, полученные в работе над диссертацией, полностью подтверждаются численными экспериментами. Основные результаты по материалам диссертационной работы докладывались на всероссийских и международных конференциях и семинарах: XIV и XV Уральской молодежной научной школе по геофизике (Пермь, 2013 г., Екатеринбург 2014 г.); международной конференции «Параллельные вычислительные технологии» (Ростов-на-Дону, 2014 г., Екатеринбург, 2015 г., Казань, 2017 г.); международной конференции «Геоинформатика: теоретические и прикладные аспекты» (Киев 2014, 2015, 2016 г.); международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2014 г.); международном научном семинаре по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, 2015 г.)

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах, из них 5 — в журналах, рекомендованных ВАК [VasAkiMin2013; AkiMisSkur2014; AkMisSkurTre2015\_2; VasSkur2017; Skur2017\_2], 3 — проиндексированы Scopus [AkSkur2014; AkSkur2015; AkSkur2016], 5 — в сборниках трудов и тезисов конференций [MisMinDer2013; AkiMisMin2014; AkMisSkurTre2015\_1; AkiMinMis2014; VasSkur2015].

**Личный вклад автора.** Все результаты, представленные в данной работе, получены автором лично. Содержание диссертации и основные результаты отражают вклад автора в опубликованных работах. В работе [VasSkur2017] автору диссертации принадлежат обоснования регуляризованных методов решения нелинейных уравнений на основе  $\alpha$ -процессов и метода Ньютона: сходимость методов к регуляризованному решению, оценка погрешности. В работах [VasAkiMin2013; MisMinDer2013; AkiMisMin2014; AkiMisSkur2014] проведено численное моделирование для методов ньютоновского типа с разработкой параллельных программ. В статьях [AkMisSkurTre2015\_1], [AkMisSkurT

автор реализовал параллельный алгоритм линеаризованного метода минимальной ошибки. В работе [AkSkur2014] предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона и решены модельные задачи, разработаны параллельные программы. В работах [AkiMinMis2014; AkSkur2015; AkSkur2016] автором предложены методы покомпонентного типа Ньютона и Левенберга – Марквардта, решены модельные задачи, созданы параллельные программы для задач с большими сетками. В работе [VasSkur2015] автором получены результаты расчетов на ЭВМ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 111 страниц, включая 18 рисунков, 14 таблиц. Библиография включает 124 наименования, в том числе 13 публикаций автора.

Автор искренне признателен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, ведущему научному сотруднику ИММ УрО РАН Елене Николаевне Акимовой.

Автор выражает благодарность за постановку ряда проблем, внимание к работе, полезные замечания и обсуждения член-корреспонденту РАН, главному научному сотруднику ИММ УрО РАН Владимиру Васильевичу Васину.

Автор также благодарен своим коллегам из ИММ УрО РАН за постоянную помощь и поддержку: зав. Отделом некорректных задач, анализа и приложений доктору физико-математических наук А.Л. Агееву, В.Е. Мисиллову, П.А. Чистякову, Г.Г. Скорику.

Отдельные слова благодарности автор выражает своей семье за любовь, постоянную и всестороннюю поддержку.

Глубокую признательность автор выражает своей первой учительнице математики — Хафизовой Майсаре Сафиевне, которая во многом повлияла на выбор профессионального пути.

## Глава 1

# Решение уравнений с монотонным оператором

В первой главе рассматриваются методы решения некорректных задач с нелинейным монотонным оператором. Используется двухэтапный подход, где на первом этапе происходит регуляризация по Лаврентьеву, на втором этапе решения задачи применяются итерационные алгоритмы решения регулярной задачи. Первый параграф главы посвящен вопросам сходимости регуляризованного метода Ньютона. Второй параграф содержит схемы построения итерационных процессов градиентного типа — нелинейных  $\alpha$ -процессов и доказательства их сходимости к регуляризованному решению. В третьем параграфе приводится оценка погрешности двухэтапного метода. В четвертом параграфе приводится пример решения нелинейного интегрального уравнения рассмотренными в данной главе итерационными методами.

## 1.1. Постановка задачи

Пусть  $H$  — гильбертово пространство, оператор  $A : H \rightarrow H$  действует в этом пространстве. В данной диссертации используется следующая терминология.

**Определение 1.1.** Оператор  $A$  называется монотонным, если  $\forall u, v \in H$

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0.$$

**Определение 1.2.** Оператор  $A$  называется неотрицательно определенным, если выполняется неравенство  $\langle A(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in H$ .

**Определение 1.3.** Оператор  $A$  называется дифференцируемым по Фреше в точке  $u \in H$ , если в некоторой окрестности этой точки  $\forall h \in H$

$$A(u + h) = A(u) + A'(u)h + \omega(u, h),$$

где  $\frac{\|\omega(u, h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0, \|h\| \rightarrow 0$ . Линейный оператор  $A'(u) : H \rightarrow H$  называется производной Фреше оператора  $A$  в точке  $u$ .

**Определение 1.4.**  $\alpha$ -процессы — класс нелинейных итерационных методов для решения линейного уравнения

$$Ax = y,$$

с ограниченным, самосопряженным, положительно определенным оператором  $A : H \rightarrow H$ . При некотором фиксированном вещественном  $\alpha \in [-1, \infty)$  определяется итерационная последовательность

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\langle A^\alpha \Delta^k, \Delta^k \rangle}{\langle A^{\alpha+1} \Delta^k, \Delta^k \rangle} \Delta^k, \quad \Delta^k = Ax^k - y.$$



При  $\alpha = 1$  — метод минимальных невязок (Красносельский и др., 1969), при  $\alpha = 0$  — метод наискорейшего спуска (Канторович, Акилов, 1959), при  $\alpha = -1$  — метод минимальной ошибки.

**Определение 1.5.** *Усиленное свойство Фейера [VasEre2009] для оператора  $T : H \rightarrow H$  означает, что для некоторого  $\nu > 0$  выполнено соотношение*

$$\|T(u) - z\|^2 \leq \|u - z\|^2 - \nu \|u - T(u)\|^2, \quad (1.1)$$

где  $z = T(z)$ , т.е.  $z \in \text{Fix}(T)$ .

Операторы, для которых выполняется усиленное свойство Фейера, называются сильно фейеровскими.

**Определение 1.6.** *Усиленное свойство Фейера для итерационных точек  $u^k$ , порождаемых процессом  $u^{k+1} = T(u^k)$  означает выполнение неравенства*

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \leq \|u^k - z\|^2 - \nu \|u^k - u^{k+1}\|^2, \quad (1.2)$$

где  $z \in \text{Fix}(T)$ .

Рассматривается нелинейное уравнение

$$A(u) = f \quad (1.3)$$

в гильбертовом пространстве  $H$  с монотонным непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором  $A$ , для которого обратные операторы  $A'(u)^{-1}$ ,  $A^{-1}$  разрывны, что влечет некорректность задачи (1.3). Для построения регуляризующего алгоритма (РА) используется двухэтапный метод, в котором на первом этапе

проводится регуляризация по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \quad (1.4)$$

где  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ ,  $u^0$  — некоторое приближение к решению; а на втором этапе для аппроксимации регуляризованного решения  $u_\alpha$  уравнения (1.4) применяется либо регуляризованный метод Ньютона (РМН)

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \quad (1.5)$$

либо нелинейные аналоги  $\alpha$ -процессов

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^\varkappa S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k), \quad (1.6)$$

где  $S_\alpha(u^k) = A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta$ . Здесь  $\bar{\alpha} \geq \alpha > 0$  — параметры регуляризации,  $\gamma > 0$  — параметр регулирования шага. При  $\varkappa = -1, 0$  получаем методы минимальной ошибки и наискорейшего спуска, а при  $\varkappa = 1$  и самосопряженности оператора  $A(u^k)$  — метод минимальных невязок. В случае, когда оператор  $A(u^k)$  не является самосопряженным, метод минимальных невязок имеет вид:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle [A'(u^k) + \bar{\alpha}I] S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|[A'(u^k) + \bar{\alpha}I] S_\alpha(u^k)\|^2} (A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta). \quad (1.7)$$

Далее в тексте диссертации обозначения с символом  $\varkappa$  при  $\varkappa = 1$  относятся и к (1.7).

## 1.2. Метод Ньютона

Ранее РМН исследовался в работах А. Б. Бакушинского [Bak1976; Bak1992] и совместной работе с А. В. Гончарским [BakGon1989] при значениях параметров  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = \bar{\alpha} = \alpha_k$  и выполнении условия липшицевости второй производной для аппроксимации решения уравнения (1.3) без анализа фейеровости процесса и оценки погрешности.

Так как оператор  $A$  — монотонный, то его производная  $A'(u)$  — неотрицательно определенный оператор. Следовательно, операторы  $(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}$  существуют и ограничены, следовательно, процесс (1.5) определен корректно.

Ранее в рамках двухэтапного подхода в работах В.В. Васина [VasAkiMin2013; Vasin2014] исследовался модифицированный метод Ньютона, когда вместо  $A'(u^k)$  в (1.5) используется производная в начальной точке  $A'(u^0)$  в ходе всего итерационного процесса, где  $A'(u^0)$  — самосопряженный неотрицательно определенный оператор

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k).$$

Перейдем к исследованию процесса (1.5). Пусть имеются следующие условия в шаре  $S(u^0, r)$ ,  $\|u^0 - u_\alpha\| \leq r$ :

$$\forall u, v \in S(u_\alpha, r) \quad \|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad (1.8)$$

$$\forall u, v \in S(u_\alpha, r) \quad \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|. \quad (1.9)$$

и известна оценка для нормы производной в точке  $u^0$  (начальном приближении), т.е.

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1. \quad (1.10)$$

Шар  $S(u^0, r)$  также содержит решение уравнения (1.3).

**Замечание 1.1.** Начальное приближение в неравенстве (1.10) в общем случае не обязано совпадать с  $u^0$  в схеме (1.4). Однако, для простоты изложения, будем считать, что это один и тот же элемент. Кроме того, для монотонного оператора  $A$  оператор  $A + \alpha I$  — равномерно монотонный, поэтому при выполнении условия 1.8 согласно ([KufFuch1988], теорема 43.7), регуляризованное уравнение (1.4) имеет единственное решение.

**Теорема 1.1.** Пусть  $A$  — монотонный оператор, для которого выполнены условия (1.8), (1.9),  $r \leq \alpha/N_2$ ,  $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$ . Тогда для процесса (1.5) с  $\gamma = 1$  имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения  $u_\alpha$  регуляризованного уравнения (1.4)

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = (1 - \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}}). \quad (1.11)$$

*Доказательство.* Учитывая, что для монотонного оператора  $A$  имеет место оценка  $\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq 1/\bar{\alpha}$ , а из (1.9) следует справедливость разложения

$$A(u_\alpha) = A(u^k) + A'(u^k)(u_\alpha - u^k) + \xi, \quad \|\xi\| \leq \frac{N_2}{2} \|u_\alpha - u^k\|^2,$$

где оценка для  $\|\xi\|$  следует из [[Tre1993], лемма 2, стр. 339], приходим к соотношению

$$\begin{aligned} u^{k+1} - u_\alpha &= u^k - u_\alpha - (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) - A(u_\alpha) + \alpha(u^k - u_\alpha)) = u^k - u_\alpha \\ &\quad - (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A'(u^k)(u^k - u_\alpha) + \bar{\alpha}(u^k - u_\alpha) - \xi + (\alpha - \bar{\alpha})(u^k - u_\alpha)). \end{aligned}$$

Из полученного соотношения вытекает оценка

$$\begin{aligned}\|u^{k+1} - u_\alpha\| &\leq \frac{1}{\bar{\alpha}} \left( \frac{N_2 \|u^k - u_\alpha\|^2}{2} + (\bar{\alpha} - \alpha) \|u^k - u_\alpha\| \right) \\ &\leq \left( 1 - \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} + \frac{N_2}{2\bar{\alpha}} \|u^k - u_\alpha\| \right) \|u^k - u_\alpha\|.\end{aligned}$$

Имея  $\|u^0 - u_\alpha\| \leq r \leq \alpha/N_2$  и предполагая  $\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r$ , по индукции приходим к оценке (1.11).  $\square$

Важным свойством множества сильно фейеровских операторов является замкнутость относительно операций произведения и взятия выпуклой суммы. Располагая итерационными процессами с сильно фейеровским оператором шага и общим множеством неподвижных точек, можно конструировать разнообразные гибридные методы, а также учитывать в итерационном алгоритме априорные ограничения на решение в виде системы линейных или выпуклых неравенств.

Установим усиленное свойство Фейера для оператора шага  $T$  в методе (1.5). Для начала докажем следующую теорему.

**Теорема 1.2.** *Пусть для монотонного оператора  $A$  выполнены условия (1.8) – (1.10),  $A'(u^0)$  – самосопряженный оператор, для параметров  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $r$  справедливы соотношения*

$$0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} \geq 4N_1, \quad r \leq \alpha/8N_2. \quad (1.12)$$

*Тогда для оператора*

$$F(u) = (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta)$$

справедлива оценка снизу

$$\langle F(u), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{\alpha}{4\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2 \quad \forall u \in S_r(u_\alpha). \quad (1.13)$$

*Доказательство.* Введем обозначение  $B(u) = A'(u) + \bar{\alpha}I$ . Принимая во внимание, что  $u_\alpha$  — решение уравнения (1.4), имеем

$$\begin{aligned} \langle F(u), u - u_\alpha \rangle &= \langle F(u) - F(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle = \alpha \langle B^{-1}(u)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\ &\quad + \langle B^{-1}(u)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Учитывая, что  $A'(u^0)$  — самосопряженный и, ввиду монотонности  $A$ , неотрицательно определенный оператор, для первого слагаемого в правой части равенства (1.14), получаем

$$\begin{aligned} \alpha \langle B^{-1}(u)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle &= \alpha \langle B^{-1}(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\ &+ \alpha \langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} \|u - u_\alpha\|^2 \\ &- \alpha |\langle B^{-1}(u)(B(u^0) - B(u))B^{-1}(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle| \\ &\geq \left( \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{\alpha N_2 \|u - u^0\|}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\geq \left( \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{2\alpha N_2 r}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где использовано неравенство  $\|u - u^0\| \leq \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \leq 2r$ . Для второго слагаемого в правой части (1.14) запишем

$$\langle B^{-1}(u)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle = \langle B^{-1}(u^0)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle$$

$$\begin{aligned}
& + \langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle \\
& = \langle B^{-1}(u^0) \int_0^1 (A'(u_\alpha + \theta(u - u_\alpha)) - A'(u^0)) d\theta (u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\
& \quad + \langle B^{-1}(u^0) A'(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\
& + \langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle \\
& \geq -\frac{N_2}{\bar{\alpha}} \int_0^1 \|u_\alpha + \theta(u - u_\alpha) - u^0\| d\theta \|u - u_\alpha\|^2 \\
& \quad - \frac{1}{\bar{\alpha}^2} (\|A'(u) - A'(u^0)\| \|A(u) - A(u_\alpha)\| \|u - u_\alpha\|) \\
& \geq -\frac{N_2}{2\bar{\alpha}} (\|u_\alpha - u^0\| + \|u - u^0\|) \|u - u_\alpha\|^2 - \frac{N_1 N_2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u^0\| \|u - u_\alpha\|^2 \\
& \geq -\frac{3N_2 r}{2\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2 - \frac{2r N_1 N_2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2. \tag{1.16}
\end{aligned}$$

Объединяя (1.15), (1.16), приходим к неравенству

$$\langle F(u), u - u_\alpha \rangle \geq \left( \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{2N_2 r \alpha}{\bar{\alpha}^2} - \frac{3N_2 r}{2\bar{\alpha}} - \frac{2r N_1 N_2}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2,$$

откуда с учетом условий (1.12) на параметры  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $r$ , а также неравенства  $N_1 \geq N_0$ , приходим к оценке (1.13).  $\square$

**Теорема 1.3.** Пусть выполнены условия теоремы 1.2. Тогда, если

$$\gamma < \frac{\alpha \bar{\alpha}}{2(N_1 + \alpha)^2} \tag{1.17}$$

$u$

$$\nu = \frac{\alpha \bar{\alpha}}{2\gamma(N_1 + \alpha)^2} - 1, \tag{1.18}$$

то оператор шага  $T$  процесса (1.5) удовлетворяет неравенству (1.1), для ите-

раций  $u^k$  справедливо соотношение (1.2) и имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0. \quad (1.19)$$

Если параметр  $\gamma$  принимает значение

$$\gamma_{opt} = \frac{\alpha \bar{\alpha}}{4(N_1 + \alpha)^2}, \quad (1.20)$$

то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}. \quad (1.21)$$

*Доказательство.* В условиях теоремы справедливо неравенство

$$\|F(u)\|^2 \leq \|B^{-1}(u)\|^2 \|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|^2 \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2, \quad (1.22)$$

которое вместе с (1.13) влечет соотношение

$$\|F(u)\|^2 \leq \frac{4(N_1 + \alpha)^2}{\alpha \bar{\alpha}} \langle F(u), u - u_\alpha \rangle. \quad (1.23)$$

Условие (1.1) на оператор шага  $T$  эквивалентно

$$\|F(u)\|^2 \leq \frac{2}{\gamma(1 + \nu)} \langle F(u), u - u_\alpha \rangle. \quad (1.24)$$

Сравнивая неравенства (1.23) и (1.24), получаем условие (1.17) для  $\gamma$  и выражение (1.18) для  $\nu$ .

При  $u = u^k$  из неравенства (1.1) вытекает (1.2) и соотношение

$$\|u^k - T(u^k)\| = \gamma \|F(u^k)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$



что вместе с (1.13) влечет сходимость (1.19). Принимая во внимание (1.13), (1.22), получим неравенство

$$\begin{aligned} \|u^{k+1} - u_\alpha\|^2 &= \|u^k - u_\alpha\|^2 - 2\gamma \langle F(u^k), u^k - u_\alpha \rangle + \gamma^2 \|F(u^k)\|^2 \\ &\leq \left(1 - \gamma \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}} + \gamma^2 \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2}\right) \|u^k - u_\alpha\|^2 \end{aligned} \quad (1.25)$$

При значениях  $\gamma = \gamma_{opt}$  из (1.20) выражение в круглых скобках неравенства (1.25) достигает минимума и при  $\gamma = \gamma_{opt}$  параметр  $q$  вычисляется по формуле, представленной в (1.21).  $\square$

### 1.3. Нелинейные аналоги альфа-процессов

В работе [Vasin2016] для монотонных операторных уравнений были предложены регуляризованные модифицированные процессы  $(-\infty < \varkappa < \infty)$

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^\varkappa S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k),$$

которые можно считать нелинейными аналогами классических  $\alpha$ -процессов для линейных уравнений с самосопряженным оператором.

В диссертационной работе для решения уравнения (1.4) с монотонным оператором предлагаются немодифицированные  $\alpha$ -процессы (1.6), (1.7).

Сначала опишем экстремальные принципы, которые используются при их построении для нелинейного монотонного оператора  $A$ . Используя разложение Тейлора в точке  $u^k$  до первого порядка, получим последовательность линейных задач и линейное уравнение

$$A(u^k) + A'(u^k)(u - u^k) = f_\delta.$$

Зададим итерационный процесс в следующем виде

$$u^{k+1} = u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta)$$

и найдем параметр  $\beta$  из условия

$$\min_{\beta} \|u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta) - z\|^2, \quad (1.26)$$

где  $z$  — решение уравнения  $A'(u^k)z = F^k$ ,  $F^k = f_\delta + A'(u^k)u^k - A(u^k)$ . Заменяя теперь оператор  $A(u)$  на  $A(u) + \alpha(u - u^0)$ , а  $A'(u^k)$  на  $A'(u^k) + \bar{\alpha}I$ , получаем процесс (1.6) при  $\varkappa = -1$  и  $\gamma = 1$ , т.е. нелинейный регуляризованный вариант

ММО. Если теперь вместо (1.26) использовать экстремальные принципы

$$\min_{\beta} \{ \langle A'(u^k)u^{k+1}, u^{k+1} \rangle - 2 \langle u^{k+1}, F(u^k) \rangle \},$$

либо

$$\min_{\beta} \{ \|A'(u^k)(u^k - \beta(A(u^k) - f_{\delta}) - F(u^k))\|^2 \}, \quad (1.27)$$

то получаем после тех же замен нелинейный регуляризованный аналог МНС, т.е. (1.6) при  $\varkappa = 0$  и  $\gamma = 1$ , либо ММН (1.7),  $\gamma = 1$ .

Установим сходимость процесса (1.6) при  $\varkappa = -1, 0, 1$  к решению уравнения (1.4). Как и прежде, используем обозначения:

$$B(u) = A'(u) + \bar{\alpha}I, \quad S_{\alpha}(u) = A(u) + \alpha(u - u^0) - f_{\delta},$$

а также введем новый оператор

$$F^{\varkappa}(u) = \beta^{\varkappa} S_{\alpha}(u), \quad \beta^{\varkappa} = \frac{\langle B^{\varkappa}(u)S_{\alpha}(u), S_{\alpha}(u) \rangle}{\langle B^{\varkappa+1}(u)S_{\alpha}(u), S_{\alpha}(u) \rangle}$$

где  $\varkappa$  — верхний индекс, при  $\varkappa = 1$  в  $\beta^{\varkappa}$  следует заменить знаменатель на  $\|B(u)S_{\alpha}(u)\|^2$ .

**Теорема 1.4.** Пусть для монотонного оператора  $A$  выполнены условия (1.8) — (1.10) и  $A'(u^0)$  — самосопряженный оператор. Кроме того, для ММО параметры  $\alpha, \bar{\alpha}, r$  удовлетворяют дополнительным соотношениям:

$$\alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/8N_2, \quad \bar{\alpha} \geq N_0. \quad (1.28)$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|F^{\varkappa}(u)\|^2 \leq \mu_{\varkappa} \langle F^{\varkappa}(u), u - u_{\alpha} \rangle, \quad \varkappa = -1, 0, 1, \quad (1.29)$$

где

$$\mu_{-1} = \frac{4(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}, \quad \mu_0 = \frac{(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})}{\alpha\bar{\alpha}^2}, \quad \mu_1 = \frac{(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}{\alpha\bar{\alpha}^3}, \quad (1.30)$$

соответственно для ММО, МНС, ММН.

*Доказательство.* Рассмотрим ММО, т.е. (1.6) при  $\varkappa = -1$ . Принимая во внимание монотонность оператора  $A$ , самосопряженность и неотрицательность  $A'(u^0)$  и условия на параметры (1.28), получим (ниже  $F^{-1}(u)$ ,  $B^{-1}(u)$ , означает  $F^\varkappa(u)$ ,  $B^\varkappa(u)$  при  $\varkappa = -1$ )

$$\begin{aligned} \langle F^{-1}(u), u - u_\alpha \rangle &= \beta^{-1}(u) \langle A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \geq \alpha \beta^{-1}(u) \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\geq \alpha \left( \frac{\langle B^{-1}(u^0) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} - \frac{|\langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0)) S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle|}{\|S_\alpha(u)\|^2} \right) \\ &\times \|u - u_\alpha\|^2 \geq \left( \frac{\alpha}{N_0 + \bar{\alpha}} - \alpha \|B^{-1}(u)\| \|B^{-1}(u^0)\| \|A'(u) - A'(u^0)\| \right) \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\geq \left( \frac{\alpha}{N_0 + \bar{\alpha}} - \frac{2\alpha N_2 r}{\bar{\alpha}^2} \right) \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha}{4\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где учтено, что  $\|u - u^0\| \leq \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \leq 2r$ . Кроме того, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|F^{-1}(u)\|^2 &= |\beta^{-1}(u)|^2 \|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|^2 \leq (N_1 + \alpha)^2 \|B^{-1}(u)\|^2 \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\leq \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Объединяя (1.31) и (1.32), получаем

$$\|F^{-1}(u)\|^2 \leq \frac{4(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}} \langle F^{-1}(u), u - u_\alpha \rangle. \quad (1.33)$$

Перейдем к оценке МНС ( $\varkappa = 0$ ). Из соотношений

$$\begin{aligned} \langle F^0(u), u - u_\alpha \rangle &= \beta^0(u) \langle A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \geq \alpha \beta^0(u) \|u - u_\alpha\|^2 \\ &= \alpha \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\langle A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha}\|S_\alpha(u)\|^2} \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha}{N_1 + \bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2, \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \|F^0(u)\|^2 &= \|\beta^0(u)\|^2 \|S_\alpha(u) - S_\alpha(u_\alpha)\|^2 \\ &\leq \frac{(N_1 + \alpha)^2 \|S_\alpha(u)\|^4 \|u - u_\alpha\|^2}{|\langle A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha}\|S_\alpha(u)\|^2|^2} \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2, \end{aligned} \quad (1.35)$$

приходим к неравенству

$$\|F^0(u)\|^2 \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})}{\alpha \bar{\alpha}^2} \langle F^0(u), u - u_\alpha \rangle.$$

Обратимся теперь к ММН (1.7). Получим неравенства:

$$\begin{aligned} \langle F^1(u), u - u_\alpha \rangle &\geq \alpha \beta^1(u) \|u - u_\alpha\|^2 = \alpha \frac{\langle (A'(u) + \bar{\alpha}I)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|B(u)S_\alpha(u)\|^2} \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\geq \frac{\alpha \bar{\alpha}}{\|B(u)\|^2} \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha \bar{\alpha}}{(N_1 + \bar{\alpha})^2} \|u - u_\alpha\|^2, \\ \|F^1(u)\| &\leq \frac{(N_1 + \alpha) \langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|B(u)S_\alpha(u)\|^2} \|u - u_\alpha\| \\ &\leq \frac{(N_1 + \alpha) \langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\langle B(u)S_\alpha(u), B(u)S_\alpha(u) \rangle} \|u - u_\alpha\| \\ &= \frac{(N_1 + \alpha) \langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle \|u - u_\alpha\|}{\|A'(u)S_\alpha(u)\|^2 + \alpha \langle A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha} \langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle} \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\leq \frac{N_1 + \alpha}{\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\| \quad (1.37)$$

из которых вытекает оценка

$$\|F^1(u)\|^2 \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})^2}{\alpha \bar{\alpha}^3} \langle F^1(u), u - u_\alpha \rangle.$$

Таким образом, доказана справедливость неравенства (1.29) при значениях  $\mu_\varkappa$  из (1.30).  $\square$

**Теорема 1.5.** Пусть выполнены условия теоремы (1.4) и  $\mu_\varkappa$  принимает значения (1.30). Тогда при всех

$$\gamma < \frac{2}{\mu_\varkappa} \quad (\varkappa = -1, 0, 1) \quad (1.38)$$

для последовательности  $\{u^k\}$ , порождаемой процессами (1.6), (1.7) при соответствующем  $\varkappa$ , имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при

$$\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa} \quad (1.39)$$

справедлива оценка

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\| \leq q_\varkappa^k r,$$

где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^4}{(N_1 + \bar{\alpha})^4}}. \quad (1.40)$$

*Доказательство.* Сопоставляя неравенство (1.24) при  $F(u) = F^{\varkappa}(u)$  ( $\varkappa = -1, 0, 1$ ) с соотношением (1.29), находим, что при  $\gamma_{\varkappa}$ , удовлетворяющем (1.38), условие фейеровости выполняется для всех трех процессов. Поэтому сходимость итераций при выполнении условия (1.38) устанавливается аналогично теореме (1.3), касающейся метода Ньютона. Подставляя в (1.25)  $F^{\varkappa}(u^k)$  и используя оценки (1.32), (1.33) (при  $\varkappa = -1$ ), (1.34), (1.35) (при  $\varkappa = 0$ ), (1.36), (1.37) (при  $\varkappa = 1$ ), вычисляем выражение в круглых скобках в правой части неравенства (1.25) для каждого метода. Минимизируя это выражение по  $\gamma$ , получаем значение  $\gamma_{\varkappa}^{opt}$ , определяемое формулой (1.39) и вычисляем коэффициенты  $q_{\varkappa}$ , которые принимают вид из (1.40).  $\square$

**Замечание 1.2.** Из теорем (1.4), (1.5) следует, то МНС и ММН не требуют выбора близкого к  $u_{\alpha}$  начального приближения, то есть в этих случаях имеет место глобальная сходимость к регуляризованному решению.

## 1.4. Оценка погрешности двухэтапного метода

Полученные в главе 1 оценки скорости сходимости для итерационных процессов (1.5)–(1.6) и результаты по аппроксимации точного решения уравнения (1.3) семейством регуляризованных решений  $u_\alpha$  позволяют получить оценку погрешности двухэтапного метода.

Согласно [[Tau2002], теоремы 3.1, теоремы 3.2], при условии монотонности оператора и истокообразной представимости решения  $\hat{u}$  уравнения (1.3)

$$u^0 - \hat{u} = A'(\hat{u})v, \quad (1.41)$$

справедлива оценка погрешности регуляризованного решения

$$\|u_\alpha^\delta - \hat{u}\| \leq \|u_\alpha^\delta - u_\alpha\| + \|u_\alpha - \hat{u}\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + k_0\alpha, \quad (1.42)$$

где  $k_0 = (1 + N_2\|v\|/2)\|v\|$ ,  $u_\alpha^\delta$ ,  $u_\alpha$  – решения уравнения (1.4) с возмущенной  $f_\delta$  и точной  $f$  правой частью уравнения (1.3) соответственно. Минимизируя правую часть соотношения (1.42) по  $\alpha$ , имеем  $\alpha(\delta) = \sqrt{\delta/k_0}$ , что дает оценку

$$\|u_{\alpha(\delta)}^\delta - \hat{u}\| \leq 2\sqrt{\delta k_0} \quad (1.43)$$

В данной главе для итерационных процессов (1.5)–(1.6) получены оценки вида

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - u_{\alpha(\delta)}^\delta\| \leq q^k(\delta)r \quad (1.44)$$

Заметим, что вместо используемого ранее элемента  $u_\alpha$ , в этом разделе введены переобозначения; а именно, через  $u_\alpha^\delta$  теперь обозначено решение уравнения (1.4) с возмущенной правой частью  $f_\delta$ , а через  $u_\alpha$  – решение уравнения (1.4) с точной правой частью. Кроме того, вместо  $u^k$  используется  $u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}$ , чтобы подчеркнуть



зависимость от параметров  $\delta$ ,  $\alpha$ .

Объединяя (1.43), (1.44), приходим к следующему утверждению.

**Теорема 1.6.** *Пусть для решения  $\hat{u}$  уравнения (1.3) с монотонным оператором справедливо условие (1.41) и для метода (1.6) выполнены условия теоремы 1.4. Тогда при выборе числа итераций по правилу*

$$k(\delta) = \left\lceil \frac{\ln(2\sqrt{k_0\delta}/r)}{\ln q(\delta)} \right\rceil \quad (1.45)$$

*справедлива оптимальная по порядку оценка погрешности двухэтапного метода*

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - \hat{u}\| \leq 4\sqrt{k_0\delta} \quad (1.46)$$

*Доказательство.* Объединяя (1.43), (1.44), получаем

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - \hat{u}\| \leq \|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - u_{\alpha(\delta)}^{\delta}\| + \|u_{\alpha(\delta)}^{\delta} - \hat{u}\| \leq rq^k(\delta) + 2\sqrt{k_0\delta} \quad (1.47)$$

Приравнивая слагаемые в правой части (1.47), получаем выражение для числа итераций (1.45) и оценку (1.46). Оптимальность по порядку оценки (1.46) устанавливается аналогично [Vasin2015] с использованием методологии оценивания погрешности метода через модуль непрерывности обратного линейного оператора [Ivanov1974; IvaVasTan2002].

## 1.5. Численные эксперименты

**Цель** экспериментов — продемонстрировать практическую применимость итерационных методов (1.5), (1.6), (1.7) на примере решения нелинейного интегрального уравнения с монотонным оператором. Пример задачи взят из [Tau2002].

Рассматривается ДУ с  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  с заданной константой  $c_0 > 0$

$$\frac{dy}{dt} = x(t)y(t), \quad y(0) = c_0, \quad (1.48)$$

где  $x(t), y(t) \in L^2[0, 1]$ . Интегрируя (1.48), приходим к нелинейному операторному уравнению

$$F(x) = y, \quad (1.49)$$

где

$$[F(x)](t) = c_0 e^{\int_0^t x(\tau) d\tau}$$

действует из  $L^2[0, 1]$  в  $L^2[0, 1]$ . В случае, когда правая часть задана с шумом  $y^\delta(t) = y(t)e^{\frac{\delta}{5}\sin(t/\delta^2)}$ , при  $y^\delta \rightarrow y$  в  $L^2[0, 1]$ , величина  $\|x - x^\delta\| = \|\frac{1}{5\delta}\cos(t/\delta^2)\| \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Это показывает, что задача (1.49) поставлена некорректно. Запишем производную оператора  $F$

$$[F'(x)h](t) = [F(x)](t) \int_0^t h(\tau) d\tau. \quad (1.50)$$

Так как в силу (1.48),  $[F(x)](t) \geq 0$  и  $\langle \int_0^t h(\tau) d\tau, h \rangle \geq 0$ , то производная оператора неотрицательно определена  $\langle F'(x)h, h \rangle \geq 0$ . Оператор  $F$  монотонен. Для проверки условий Липшица для операторов  $F, F'(x)$  в шаре  $S_r(u_\alpha, r)$  используем оценки:  $\|\int_0^1 h(\tau) d\tau\| \leq \|h\|$ ,  $|e^\lambda - e^\mu| \leq |\lambda - \mu| \max\{e^\lambda, e^\mu\}$

$$\|F(u) - F(v)\| \leq c_0 \|e^{\int_0^1 u(\tau) d\tau} - e^{\int_0^1 v(\tau) d\tau}\| \leq c_0 \max\{e^{\|u\|}, e^{\|v\|}\} \|u - v\|,$$

$$\|(F'(u) - F'(v))h\| \leq \|F(u) - F(v)\| \|h\| \leq c_0 \max\{e^{\|u\|}, e^{\|v\|}\} \|h\| \|u - v\|.$$

Также оценим норму производной оператора в начальном приближении  $\|F'(x^0)h\| \leq c_0 e^{\|x^0\|} \|h\|$ , т.е.  $\|F'(x^0)\| \leq c_0 e^{\|x^0\|}$ ,  $\|x^0 - u_\alpha\| \leq r$ .

### 1.3.1. Эксперимент для задачи без использования шума

В качестве точного решения взяли функция  $z(t) = t^2$ , по точному решению построили правую часть  $y(t)$ . Начальное приближение  $x^0(t) = t^3$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha = 10^{-2}$ , критерий останова  $\frac{\|x^k - z\|}{\|z\|} \leq \varepsilon = 10^{-2}$ , где  $x^k$  — приближение на  $k$ -й итерации. Выбор начального приближения, достаточно близкого к точному решению, обусловлен условиями теорем 1.1, 1.5 для сходимости немодифицированных вариантов методов (1.5), (1.6), (1.7). Для примера на рис. 1.1 изображено восстановленное решение ММН. Точное решение отмечено сплошной линией, начальное приближение — штрихпунктирной, ММН — пунктирной. Ниже в таблице 1.1

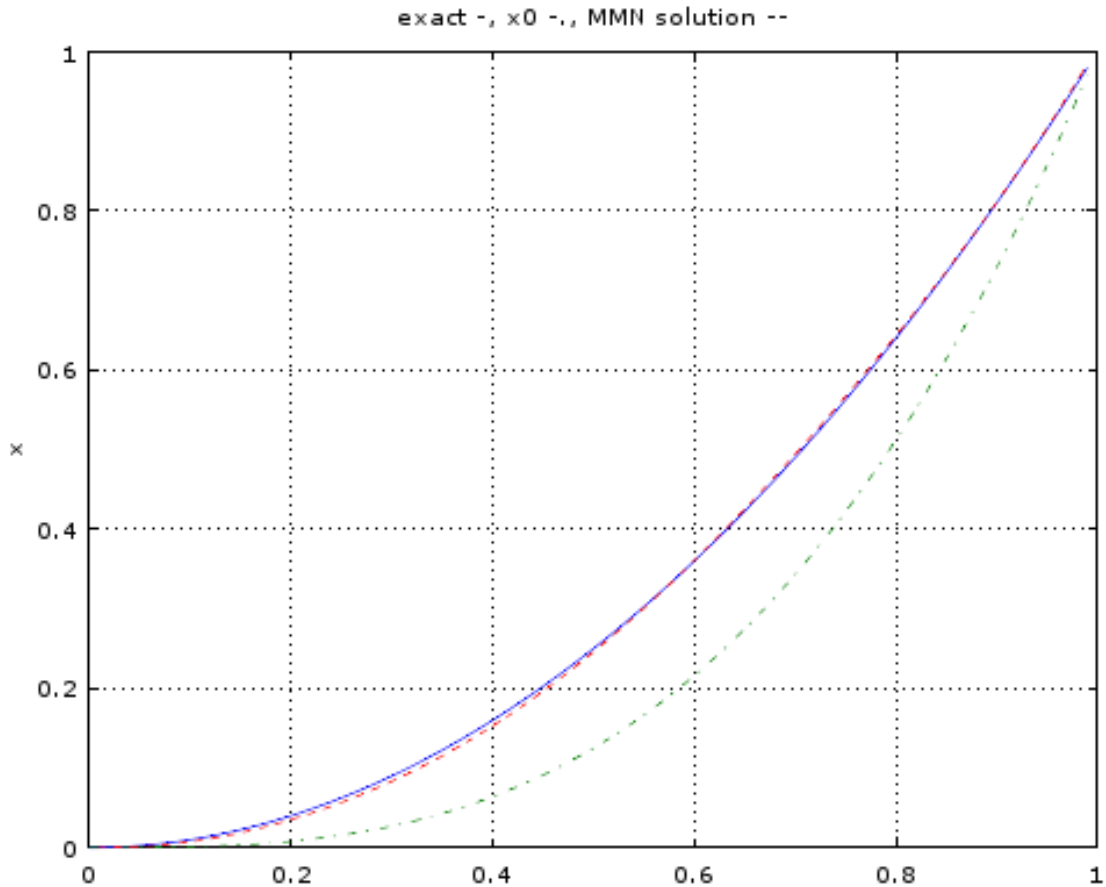


Рис. 1.1. Восстановленное ММН решение.

показаны результаты расчетов методами (1.5), (1.6),  $\Delta = \frac{\|F(x^k) + \alpha(x^k - x^0) - y\|}{\|y\|}$  — относительная норма невязки.

Таблица 1.1. Результаты для правой части без шума

Метод	Параметр шага, $\gamma$	$\Delta$	Число итераций, N
ММО	0.5	0.003	25
ММО модиф.	0.5	0.003	22
МНС	0.001	0.003	283
МНС модиф.	0.02 (с 0-й итер.), 0.005 (с 30-й итер.), 0.002 (с 32-й итер.)	0.003	32
ММН	1	0.003	32
ММН модиф.	1	0.003	27
РМН	1	0.003	26
РМН модиф.	0.75	0.003	6

**Вывод.** Теорема 1.5 не гарантирует, что при  $\gamma = 1$  итерационный процесс (1.6) будут сходиться к точному решению, так же как и модифицированный вариант метода Ньютона. Поэтому относительная погрешность некоторых этих методов в рамках эксперимента была достигнута при выборе  $\gamma < 1$ , тогда как для метода Ньютона немодифицированного варианта сходимость при  $\gamma = 1$  доказана теоремой 1.1. Для достижения необходимой точности решения модифицированным вариантом МНС параметр  $\gamma$  потребовалось уменьшать на 30-й итерации  $\gamma = 0.005$  и на 32-й итерации  $\gamma = 0.002$ .

**1.3.2. Эксперимент для задачи без использования шума с начальным приближением, далеким от точного решения.**

Точное решение и правая часть такие же, как в эксперименте 1.3.1. Начальное приближение  $x^0(t) = 0$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha = 10^{-2}$ , критерий останова  $\frac{\|x^k - z\|}{\|z\|} \leq \varepsilon = 10^{-1}$ , где  $x^k$  — приближение на  $k$ -й итерации. Выбор начального приближения обу-

словлен фактом, установленным в статье [Vasin2016], где для модифицированных вариантов методов (1.6) доказывается глобальная сходимость итерационных процессов. Ниже в таблице 1.2 показаны результаты расчетов методами (1.5), (1.6),  $\Delta$  — относительная норма невязки.

Таблица 1.2. Результаты для правой части без шума, с начальным приближением, равным константе

Метод	Параметр шага, $\gamma$	$\Delta$	Число итераций, N
ММО	1	0.015	25
ММО модиф.	0.1	0.015	20
МНС	0.025	0.021	27
МНС модиф.	0.025	0.024	24
ММН	1	0.019	12
ММН модиф.	1	0.016	8
РМН	1	0.016	19
РМН модиф.	0.75	0.016	8

**Вывод.** Согласно теореме 1.5, при выборе  $\gamma < 1$ , достигнута относительная погрешность  $\varepsilon$  итераций (1.5), (1.6), (1.7).

### 1.3.3. Эксперимент для задачи с возмущенной правой частью с начальным приближением, далеким от точного решения.

Точное решение такое же, как в эксперименте 1.3.1. Правая часть  $y^\delta(t) = y(t)e^{\frac{\delta}{5}\sin(t/\delta^2)}$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\|y - y^\delta\| = 0.07 < \delta$ . Начальное приближение  $x^0(t) = 0$ ,  $\gamma, \bar{\alpha} = 1$ ,  $\alpha = 10^{-3}$ , критерий останова  $\frac{\|x^k - z\|}{\|z\|} \leq \varepsilon = 0.25$ , где  $x^k$  — приближение на  $k$ -й итерации.

Относительные погрешности итераций рассмотренных методов сходятся к  $\varepsilon$  за 8–9 итераций,  $\Delta \approx 0.04$ .

В статье [VasSkur2017] приводятся оценки погрешности двухэтапного метода для  $\|u^\delta - \hat{u}\|$  сверху ( $u^\delta$  — решение уравнения с возмущенной правой ча-

стью,  $\hat{u}$  — решение уравнения (1.3)), устанавливается сходимость

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}) - f_\delta\| = 0,$$

при  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

**Вывод.** Для задачи с возмущенной правой частью удалось достигнуть точности  $\varepsilon$ , не превышающую оценку для  $\|u^\delta - \hat{u}\|$ , относительная норма невязки  $\Delta$  уменьшается с каждой итерацией.

## Глава 2

# Решение уравнений с немонотонным оператором

Монотонность оператора  $A$  исходного уравнения — очень сильное требование, которое не выполняется во многих важных прикладных задачах, например, в задачах гравиметрии и магнитометрии. В данной главе показано, что в конечномерном случае есть возможность ослабить условие монотонности и обосновать сходимость итераций РМН, ММО, МНС, ММН. В первом параграфе представлены доказательства сходимости метода Ньютона с регуляризацией, во втором параграфе доказаны теоремы сходимости для нелинейных аналогов  $\alpha$ -процессов, в третьем параграфе представлены следствия для модифицированных аналогов  $\alpha$ -процессов и оценка невязки двухэтапного метода, в четвертом приведены результаты численных расчетов.

## 2.1. Метод Ньютона

Рассматривается конечномерный случай, когда оператор  $A: R^n \rightarrow R^n$ , для которого матрица  $A'(u)$  в некоторой окрестности решения имеет спектр, состоящий из различных неотрицательных собственных значений. Приведем лемму (В.В. Васин, [VasSkur2017]).

**Лемма 2.1.** *Пусть  $n \times n$  матрица  $A'(u)$  не имеет кратных собственных значений  $\lambda_i$  и числа  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) различны и неотрицательны. Тогда при  $\bar{\alpha} > 0$  матрица имеет представление  $A'(u) + \bar{\alpha}I = S(u)\Lambda S^{-1}(u)$  и справедлива оценка*

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{\min}} \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}}, \quad (2.1)$$

где столбцы матрицы  $S(u)$  составлены из собственных векторов матрицы  $A'(u) + \bar{\alpha}I$ ,  $\Lambda$  — диагональная матрица, ее элементы — собственные значения матрицы  $A'(u) + \bar{\alpha}I$ ,  $\mu(S(u)) = \|S(u)\| \|S^{-1}(u)\|$ .

Обратимся к регуляризованному методу Ньютона, для которого была доказана теорема (1.3) о сходимости итераций и оценке погрешности для монотонного оператора. Рассмотрим теперь вариант этой теоремы, когда оператор  $A: R^n \rightarrow R^n$ , матрица производной  $A'(u)$  которого имеет неотрицательный спектр, удовлетворяющий условиям леммы 2.1, причем функция  $\mu(S(u))$  при фиксированном  $\alpha$  равномерно ограничена по  $u$  в шаре  $S_r(u_\alpha)$ , т.е.

$$\sup\{\mu(S(u)) : u \in S_r(u_\alpha)\} \leq \bar{S} < \infty. \quad (2.2)$$

**Теорема 2.1.** *Пусть выполнены условия (2.2), (1.8)–(1.10),  $A'(u^0)$  — симметричная матрица, и для параметров  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $r$  справедливы соотношения:  $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha} \geq 4N_0$ ,  $r \leq \alpha/8N_2\bar{S}$ ,  $\|u_\alpha - u^0\| \leq r$ .*

*Тогда для метода (1.5) справедливо заключение теоремы 1.3, где соотно-*



шения (1.17), (1.18) для  $\gamma$  и выражение для  $q$  в (1.21) соответственно принимает вид

$$\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}, \quad \gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2\bar{S}^2}}$$

*Доказательство.* С учетом оценки (2.1), доказательство с несущественными поправками проводится по схеме доказательства теоремы 1.3.  $\square$

**Замечание 2.1.** При доказательстве теоремы вместо условия (2.2) достаточно требовать ограниченность величины  $\sup\{\mu(S(u^k)) : u^k \in S_r(u_\alpha)\}$ , где  $u^k$  — итерационные точки метода. Причем, при регулярном правиле останова итераций  $k(\delta)$ , супремум берется по конечному набору номеров  $k \leq k(\delta)$ , что автоматически влечет ограниченность супремума и выполнение оценки вида (1.21) при этих значениях  $k$ . Кроме того, для модифицированного метода Ньютона, в котором производная  $A'(u^0)$  вычисляется в фиксированной точке  $u^0$ , величина  $\mu(S(u^0)) = \|S(u^0)\|\|S^{-1}(u^0)\| = \bar{S} < \infty$ .

## 2.2. Нелинейные альфа-процессы

При тех же условиях на оператор, что и для метода Ньютона в параграфе 2.1, исследуем процессы (1.6).

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены условия (1.8)–(1.10). Пусть при  $u \in S_r(u_\alpha)$  матрица  $A'(u)$  имеет спектр, состоящий из неотрицательных различных собственных значений,  $A'(u^0)$  — симметричная неотрицательно определенная матрица. Пусть параметры  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $r$  удовлетворяют условиям:

$$\text{ММО} : \quad 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/6\bar{S}N_2, \quad \bar{\alpha} \geq N_0 \quad (2.3)$$

$$\text{МНС} : \quad 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/3N_2, \quad (2.4)$$

$$\text{ММН} : \quad 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/6N_2. \quad (2.5)$$

Тогда справедливы соотношения (1.29), где

$$\mu_{-1} = \frac{8\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}, \quad \mu_0 = \frac{18(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})}{\alpha\bar{\alpha}^2}, \quad \mu_1 = \frac{18(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^4}{\alpha\bar{\alpha}^5} \quad (2.6)$$

*Доказательство.* При  $\varkappa = -1$  и тех же обозначениях, которые были приняты в разделе 3, имеем (верхний индекс (-1) соответствует методу (1.6) при  $\varkappa = -1$ )

$$\langle F^{-1}(u), u - u_\alpha \rangle = \beta^{-1}(u)[\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \alpha\|u - u_\alpha\|^2].$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части равенства с учетом условий (2.3),

используя формулу Лагранжа:

$$\begin{aligned}
& \langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \alpha \|u - u_\alpha\|^2 = \alpha \|u - u_\alpha\|^2 \\
& + \langle \int_0^1 (A'(u_\alpha + \theta(u - u_\alpha)) - A'(u^0))(u - u_\alpha) d\theta, u - u_\alpha \rangle + \langle A'(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\
& \geq \alpha \|u - u_\alpha\|^2 - \frac{N_2(\|u^0 - u_\alpha\| + \|u - u^0\|)^2}{2} \|u - u_\alpha\|^2 \\
& \geq \left( \alpha - \frac{3N_2r}{2} \right) \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{3\alpha}{4} \|u - u_\alpha\|^2 \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^{-1}(u) &= \frac{\langle (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} = \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{-1}S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} \\
&+ \frac{\langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} \geq \frac{1}{N_0 + \bar{\alpha}} - \frac{\bar{S}N_2\|u - u^0\|}{\bar{\alpha}^2} \\
&\geq \frac{1}{N_0 + \bar{\alpha}} - \frac{2\bar{S}N_2r}{\bar{\alpha}^2} \geq \frac{1}{6\bar{\alpha}}, \tag{2.8}
\end{aligned}$$

где учтены условия (2.3) и соотношение  $\|u - u^0\| \leq \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \leq 2r$ .

Кроме того, справедлива оценка

$$\begin{aligned}
& \|F^{-1}(u)\|^2 \leq (\beta^{-1})^2 \|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|^2 \\
& \leq \|B^{-1}(u)\|^2 (N_1 + \alpha)^2 \|u - u_\alpha\|^2 \leq \frac{\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2 \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Объединяя (2.7)–(2.9), получаем, что в соотношении (1.29),  $\mu_{-1}$  выражается величиной из (2.6)

Исследуем теперь МНС, т.е. процесс (1.6) при  $\varkappa = 0$ . Аналогично преды-

дущему методу устанавливаем, что

$$\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \alpha \|u - u_\alpha\|^2 \geq \left( \alpha - \frac{3N_2 r}{2} \right) \|u - u_\alpha\|^2 \quad (2.10)$$

Кроме того, имеем

$$\beta^0(u) = \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle} \geq \frac{1}{\|B(u)\|} \geq \frac{1}{\|A'(u) + \bar{\alpha}I\|} \geq \frac{1}{N_1 + \bar{\alpha}}.$$

Объединяя последнее соотношение с (2.10), получаем оценку снизу

$$\langle F^0(u), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{1}{N_1 + \bar{\alpha}} \left( \alpha - \frac{3N_2 r}{2} \right) \|u - u_\alpha\|^2. \quad (2.11)$$

Аналог оценки (2.9) для  $F^0(u)$  следует из неравенств ниже:

$$\|F^0(u)\| \leq \beta^0(u)(\|A(u) - A(u_\alpha)\| + \alpha\|u - u_\alpha\|) \leq \beta^0(u)(N_1 + \alpha)\|u - u_\alpha\|, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \beta^0(u) &= \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\bar{\alpha}\|S_\alpha(u)\|^2 + \langle A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \langle (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle} \\ &\leq \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\bar{\alpha}\|S_\alpha(u)\|^2 - |\langle (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle|} \\ &\leq \frac{1}{\bar{\alpha} - N_2\|u - u^0\|} \leq \frac{1}{\bar{\alpha} - 2N_2 r} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из (2.11)-(2.13) при значениях параметров из (2.4) получаем значения  $\mu_0$  в (2.6).

Наконец рассмотрим процесс (1.6) при  $\varkappa = 1$  с учетом замечания 3.1. Как и в предыдущем методе, при оценке снизу величины  $\langle F^1(u), u - u_\alpha \rangle$ , справедливо соотношение (2.10). Для параметра  $\beta^1(u)$  получаем

$$\beta^1(u) = \frac{\langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|B(u)S_\alpha(u)\|^2}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\langle A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha}\langle S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle - \|A'(u) - A'(u^0)\| \|S_\alpha(u)\|^2}{(N_1 + \bar{\alpha})^2 \|S_\alpha(u)\|^2} \\
&\geq \frac{\bar{\alpha} - N_2 \|u - u^0\|}{(N_1 + \bar{\alpha})^2} \geq \frac{\bar{\alpha} - 2N_2 r}{(N_1 + \bar{\alpha})^2},
\end{aligned}$$

что при условиях на параметры (2.5), дает оценку

$$\langle F^1(u), u - u_\alpha \rangle \geq \left( \alpha - \frac{3N_2 r}{2} \right) \frac{\bar{\alpha} - 2N_2 r}{(N_1 + \bar{\alpha})^2} \|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha \bar{\alpha}}{2(N_1 + \bar{\alpha})^2} \|u - u_\alpha\|^2. \quad (2.14)$$

Поскольку

$$\|F^1(u)\| \leq \beta^1(u) (\|A(u) - A(u_\alpha)\| + \alpha \|u - u_\alpha\|) \leq \beta^1(u) (N_1 + \alpha) \|u - u_\alpha\|,$$

$$\begin{aligned}
\|\beta^1(u)\| &\leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha}) \|S_\alpha(u)\|^2}{\|A'(u)S_\alpha(u)\|^2 + 2\bar{\alpha}\langle A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha}^2 \|S_\alpha(u)\|^2} \\
&\leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha}) \|S_\alpha(u)\|^2}{2\bar{\alpha}\langle A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle - 2\bar{\alpha}|\langle (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle| + \bar{\alpha}^2 \|S_\alpha(u)\|^2} \\
&\leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha}N_2 \|u - u^0\|} \leq \frac{N_1 + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}(\bar{\alpha} - 4N_2 r)} \leq \frac{3(N_1 + \bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2}.
\end{aligned}$$

Окончательно получаем для  $\|F^1(u)\|^2$  оценку сверху

$$\|F^1(u)\|^2 \leq \frac{3^2(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}{\bar{\alpha}^4} \|u - u_\alpha\|^2. \quad (2.15)$$

Объединяя соотношения (2.14) и (2.15), и условия (2.5), получаем значение  $\mu_1$ , представленное в (2.6).  $\square$

**Теорема 2.3.** Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда при  $\gamma < 2/\mu_\varkappa$ ,  $\varkappa = -1, 0, 1$ , где значения  $\mu_\varkappa$  определяются соотношениями (2.6), последовательности  $u^k$ , порождаемые процессом (1.6) при  $\varkappa = -1, 0, 1$ , сходятся к  $u_\alpha$ , т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при  $\gamma_{\varkappa}^{opt} = \frac{1}{\mu_{\varkappa}}$  справедлива оценка  $\|u^{k+1} - u_{\alpha}\| \leq q_{\varkappa}^k r$ , где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{64\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^2}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^6}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^6}}. \quad (2.16)$$

*Доказательство.* Подставляя в соотношение (1.25) вместо  $F(u^k)$  последовательность  $F^{\varkappa}(u^k)$  ( $\varkappa = -1, 0, 1$ ) и, используя оценки (2.7), (2.8) ( $\varkappa = -1$ ), (2.8), (2.9) ( $\varkappa = 0$ ), (2.10), (2.11) ( $\varkappa = 1$ ), а также условия на параметры (2.3)–(2.5), получаем, после минимизации по  $\gamma$ , значения для  $q_{\varkappa}$ , представленные в (2.16). При выполнении условия  $\gamma < 2/\mu_{\varkappa}$ , выражение в круглых скобках в правой части неравенства (1.25) принимает значение, которое меньше единицы, что влечет сходимость итераций для всех трех методов.  $\square$

**Замечание 2.2.** Предложенный подход к получению оценок скорости сходимости итерационных процессов полностью переносится на случай, когда спектр матрицы  $A'(u^k)$ , состоящий из различных вещественных значений, содержит набор малых по абсолютной величине отрицательных собственных значений.

Пусть  $\lambda_1$  — отрицательное собственное значение с наименьшим модулем  $|\lambda_1|$  и  $\bar{\alpha} - |\lambda_1| = \bar{\alpha}_1 < \alpha^*$ . Тогда оценка (2.1) трансформируется в неравенство

$$\|(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u^k))}{\bar{\alpha}^*} \leq \frac{\bar{S}}{\bar{\alpha}^*} \quad (2.17)$$

Все утверждения, т.е. теоремы (2.1)–(2.3) остаются справедливыми при замене  $\bar{\alpha}$  на  $\bar{\alpha}^*$  во всех оценках, где используется (2.17).

**Замечание 2.3.** Если рассматривать модифицированные варианты методов (1.5)–(1.6), когда вместо  $A'(u^k)$  в операторе шага используется  $A'(u^0)$  в про-

цессе итераций, то при условиях на оператор, принятых в данном разделе, для получения аналогичных результатов о сходимости и оценке погрешности наряду с неотрицательностью спектра достаточно: требовать симметричность матрицы  $A'(u^0)$  [VasAkiMin2013; Vasin2014; Vasin2016]. Заметим, что при исследовании основных методов (1.5)–(1.6) существование симметричной матрицы для некоторого элемента  $u^0$  предполагается.

## 2.3. Модифицированные варианты регуляризованных методов на основе нелинейных альфа-процессов

Рассматривается случай, когда производная оператора  $A'(u)$  вычисляется в начальной точке итерационных процессов  $u^0$ . Тогда формулы итерационных процессов (1.6) принимают вид:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^\varkappa S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k), \quad (2.18)$$

где при  $\varkappa = -1$  итерационный процесс представляет собой модифицированный ММО, при  $\varkappa = 0$  — модифицированный МНС и при  $\varkappa = 1$  — модифицированный ММН.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.4.** Пусть выполнены условия (1.8)–(1.10),  $A'(u^0)$  — самосопряженный оператор, спектр которого состоит из неотрицательных различных собственных значений, параметры  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $r$  удовлетворяют условиям:

$$0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r = \alpha/6N_2, \quad \bar{\alpha} \geq N_0. \quad (2.19)$$

Тогда для оператора поправки итерационного метода (2.18)

$$F_0^\varkappa(u) = \beta_0^\varkappa S_\alpha(u^k),$$

где

$$\beta_0^\varkappa = \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^\varkappa S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle},$$

имеет место неравенство

$$\|F_0^\varkappa(u)\|^2 \leq \frac{8(N_1 + \alpha)^2}{3\alpha\bar{\alpha}} \langle F_0^\varkappa(u), u - u_\alpha \rangle,$$



где  $\varkappa = -1, 0, 1$ , для модифицированных вариантов ММО, МНС и ММН соответственно.

*Доказательство.* Получим оценку снизу  $\langle F_0^{-1}(u), u - u_\alpha \rangle$  для модифицированного ММО.

$$\begin{aligned} \langle F_0^{-1}(u), u - u_\alpha \rangle &= \langle F_0^{-1}(u) - F_0^{-1}(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle = \beta_0^{-1}[\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\ &\quad + \alpha \|u - u_\alpha\|^2]. \end{aligned}$$

Оценим снизу  $\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle$ , используя формулу Лагранжа:

$$\begin{aligned} \langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle &= \left\langle \int_0^1 [A'(u_\alpha + \theta(u - u_\alpha)) - A'(u^0)](u - u_\alpha) d\theta, u - u_\alpha \right\rangle \\ &\quad + \langle A'(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \geq -N_2 \int_0^1 \|u_\alpha - u^0 + \theta(u - u_\alpha)\| \cdot \|u - u_\alpha\|^2 d\theta \\ &= -N_2 \|u - u_\alpha\|^2 \int_0^1 \|u_\alpha - u^0 + \theta u - \theta u_\alpha \pm \theta u^0\| d\theta = -N_2 \|u - u_\alpha\|^2 \\ &\quad \times \int_0^1 \|(1 - \theta)(u_\alpha - u^0) + \theta(u - u_\alpha)\| d\theta \geq -N_2 \|u - u_\alpha\|^2 \left[ \int_0^1 (1 - \theta) d\theta \cdot \|u^0 - u_\alpha\| \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \theta d\theta \|u - u_\alpha\| \right] = -N_2 \|u - u_\alpha\|^2 \left[ \frac{\|u_\alpha - u^0\|}{2} + \frac{\|u_\alpha - u^0 + u^0 - u\|}{2} \right] \\ &\geq -\frac{3N_2 r}{2} \|u - u_\alpha\|^2, \end{aligned} \tag{2.20}$$

где  $r = \|u_\alpha - u^0\|$ ,  $\|u - u^0\| \leq 2r$ .

Получим оценку снизу для множителя  $\beta_0^{-1}(u)$ , воспользовавшись спектральным разложением резольвенты самосопряженного оператора  $A'(u^0)$ :

$$\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle = \int_0^{N_0} \frac{d\langle E_\lambda S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\lambda + \bar{\alpha}} \geq \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{N_0 + \bar{\alpha}},$$

$$\beta_0^{-1}(u) = \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} \geq \frac{1}{N_0 + \bar{\alpha}}.$$

Имеем

$$\langle (A'(u^0), u - u_\alpha) \rangle \geq \frac{1}{N_0 + \bar{\alpha}} \left[ \alpha - \frac{3N_2 r}{2} \right] \|u - u_\alpha\|^2.$$

Применяя условия (2.19) теоремы, получаем оценку

$$\langle (A'(u^0), u - u_\alpha) \rangle \geq \frac{3\alpha}{8\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2. \quad (2.21)$$

Получим оценку нормы оператора  $F_0^{-1}$ :

$$\|F_0^{-1}(u)\| = |\beta_0^{-1}(u)| \cdot \|A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta\| = |\beta_0^{-1}(u)| \cdot \|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|.$$

$$\|A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta\| \leq (N_1 + \alpha) \|u - u_\alpha\|. \quad (2.22)$$

$$\beta_0^{-1}(u) = \frac{1}{\|S_\alpha(u)\|^2} \int_0^{N_0} \frac{d\langle E_\lambda S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\lambda + \bar{\alpha}} \leq \frac{1}{\bar{\alpha}},$$

$$\|F_0^{-1}(u)\|^2 \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2. \quad (2.23)$$

Объединим (2.21) и (2.23), получаем

$$\|F_0^{-1}(u)\|^2 \leq \frac{8(N_1 + \alpha)^2}{3\alpha\bar{\alpha}} \langle F_0^{-1}(u), u - u_\alpha \rangle$$

для модифицированного варианта ММО.

Рассмотрим модифицированный вариант МНС ( $\varkappa = 0$ ).

$$\langle F_0^0(u), u - u_\alpha \rangle = \beta_0^0(u) [\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \alpha \|u - u_\alpha\|^2].$$

Учитывая, что  $\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle \leq (N_0 + \bar{\alpha})\|S_\alpha(u)\|^2$ , имеем

$$\beta_0^0(u) = \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle} \geq \frac{1}{N_0 + \bar{\alpha}}.$$

Воспользовавшись ранее полученной оценкой (2.20), имеем

$$\langle F_0^0(u), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{3\alpha}{8\bar{\alpha}}\|u - u_\alpha\|^2. \quad (2.24)$$

Оценивая сверху  $\beta_0^0(u)$  как

$$\beta_0^0(u) \leq \frac{1}{\bar{\alpha}}, \quad (2.25)$$

при объединении неравенств (2.22), (2.24) и (2.25), приходим к соотношению

$$\|F_0^0(u)\|^2 \leq \frac{8(N_1 + \alpha)^2}{3\alpha\bar{\alpha}} \langle F_0^0(u), u - u_\alpha \rangle$$

для модифицированного варианта МНС.

Для модифицированного ММН ( $\varkappa = 1$ ), по аналогии, оценим сверху и снизу параметр  $\beta_0^1(u)$ . Обозначим  $B_0(u) = A'(u^0) + \bar{\alpha}I$ ,

$$\beta_0^1(u) = \frac{\langle B_0(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\|B_0(u)S_\alpha(u)\|^2} = \frac{\|B_0^{1/2}(u)S_\alpha(u)\|^2}{\|B_0^{1/2}\|^2\|B_0^{1/2}S_\alpha(u)\|^2} \geq \frac{1}{\|B_0(u)\|} \geq \frac{1}{N_0 + \bar{\alpha}}.$$

Объединяя эту оценку и оценку (2.20), имеем соотношение

$$\langle F_0^1(u), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{3\alpha}{8\bar{\alpha}}\|u - u_\alpha\|^2. \quad (2.26)$$

И наконец,

$$\beta_0^1(u) = \frac{\langle B_0(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\langle B_0(u)S_\alpha(u), A'(u^0)S_\alpha(u) \rangle + \bar{\alpha}\langle B_0(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}$$

$$\leq \frac{\langle B_0(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle}{\bar{\alpha}\langle B_0(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) \rangle} = \frac{1}{\bar{\alpha}},$$

так как

$$\begin{aligned} \langle B_0(u)S_\alpha(u), A'(u^0)S_\alpha(u) \rangle &= \langle A'(u^0)S_\alpha(u), A'(u^0)S_\alpha(u) \rangle \\ &+ \bar{\alpha}\langle S_\alpha(u), A'(u^0)S_\alpha(u) \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

в силу неотрицательности спектра оператора  $A'(u^0)$ . Таким образом,

$$\|F_0^1(u)\|^2 \leq \frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2} \|u - u_\alpha\|^2, \quad (2.27)$$

объединяя (2.26), (2.27), получаем

$$\|F_0^1(u)\|^2 \leq \frac{8(N_1 + \alpha)^2}{3\alpha\bar{\alpha}} \langle F_0^1(u), u - u_\alpha \rangle.$$

□

Докажем сильную фейеровость оператора шага  $T$  в методах (2.18).

**Теорема 2.5.** Пусть выполнены условия теоремы 2.4. Тогда при  $\gamma < 2/\mu_\varkappa$  последовательность  $\{u^k\}_{k=1}^\infty$  сходится к регуляризованному решению  $u_\alpha$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при  $\gamma_{opt} = 1/\mu_\varkappa$  справедлива оценка  $\|u^k - u_\alpha\| \leq q_\varkappa^k r$ , где

$$q_\varkappa = \sqrt{1 - \frac{9\alpha^2}{64(N_1 + \alpha)^2}}$$

*Доказательство.* Неравенство (1.1) будет выполнено при  $\mu_\varkappa = \frac{2}{\gamma(1+\nu)}$  (из теоремы 2.4),  $\nu = \frac{2}{\gamma\mu_\varkappa} - 1$ , где  $\gamma < 2/\mu_\varkappa$ . Отсюда следует сходимость итераций к  $u_\alpha$ .

Величину  $q$  получим из условия минимума  $\|u^{k+1} - u_\alpha\|^2$ :

$$\begin{aligned}\|u^{k+1} - u_\alpha\|^2 &= \|u^k - u_\alpha\|^2 - 2\gamma\langle F^\sharp(u^k), u^k - u_\alpha \rangle + \gamma^2\|F^\sharp(u^k)\|^2 \\ &\leq \left(1 - 2\gamma\frac{3\alpha}{8\bar{\alpha}} + \gamma^2\frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2}\right)\|u^k - u_\alpha\|^2. \\ \gamma_{opt} &= \operatorname{argmin}\left\{1 - 2\gamma\frac{3\alpha}{8\bar{\alpha}} + \gamma^2\frac{(N_1 + \alpha)^2}{\bar{\alpha}^2}\right\},\end{aligned}\tag{2.28}$$

подставляя полученное  $\gamma_{opt}$  в выражение в круглых скобках (2.28), вычисляем значение для  $q^\sharp$ :

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\|^2 \leq \left(1 - \frac{9\alpha^2}{64(N_1 + \alpha)^2}\right)\|u^k - u_\alpha\|^2,$$

отсюда получаем  $q^\sharp$ . □

Для оператора  $A'(u)$  с положительным спектром так же, как и для случая монотонного оператора, в главе 2 доказана линейная скорость сходимости, однако, в отличие от монотонного оператора здесь оценок типа (1.42) не существует, поэтому нельзя получить общую оценку для двухэтапного метода. Тем не менее, в этой ситуации для двухэтапного алгоритма можно установить оценку для невязки — основной характеристики точности метода при решении задачи с реальными данными.

Предположим, что уравнение (1.4) разрешимо, тогда для его решения  $u_{\alpha(\delta)}^\delta$  справедливо соотношение

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^\delta) - f_\delta\| = \alpha(\delta)\|u_{\alpha(\delta)}^\delta - u^0\|.\tag{2.29}$$

Параметр  $\alpha$  из (1.4) заменен на  $\alpha(\delta)$ , чтобы подчеркнуть зависимость параметра регуляризации от  $\delta$ . Пусть для некоторой связи  $\alpha(\delta)$  ограничена величина

$\|u_{\alpha(\delta)}^\delta - u^0\| \leq m < \infty$ , что влечет оценку

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^\delta) - f_\delta\| \leq \alpha(\delta)m \quad (2.30)$$

и сходимость

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|A(u_{\alpha(\delta)}^\delta) - f_\delta\| = 0,$$

при  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Пусть  $u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}$  – итерационные точки, полученные одним из методов (1.5), (1.6). Имеем

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}) - f_\delta\| \leq \|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}) - A(u_{\alpha(\delta)}^\delta)\| + \|A(u_{\alpha(\delta)}^\delta) - f_\delta\| \leq N_1 r q^k(\delta) + \alpha(\delta)m. \quad (2.31)$$

Выбирая, например,  $\alpha(\delta) = \delta^p$  и приравнявая слагаемые в правой части (2.31), получаем правило выбора числа итерации

$$k(\delta) = [\ln(m\delta^p/N_1)/\ln q(\delta)],$$

при котором справедлива оценка для невязки двухэтапного метода

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}) - f_\delta\| \leq 2m\delta^p. \quad (2.32)$$

**Замечание 2.4.** Соотношения (2.29)–(2.32) остаются справедливыми для случая, когда матрицы  $A'(u^k)$  содержат набор малых отрицательных собственных значений с тем лишь отличием, что в неравенстве (2.31) параметр  $q$  во всех методах теперь вычисляется по формулам главы 2, с заменой параметра  $\bar{\alpha}$  на  $\alpha^*$  (см. замечание 2.2).

## 2.4. Решение модельных задач гравиметрии и магнитометрии

**Целью** экспериментов является проверить применимость методов (1.5), (1.6), (1.7) в условиях теорем главы 2 на примере решения модельных задач гравиметрии и магнитометрии. Также ставится задача сравнить по экономичности (затратам машинного времени) методы (1.5), (1.6) с их модифицированными вариантами, когда производная  $A'(u^k)$ , входящая в оператор шага этих процессов, вычисляется в фиксированной точке  $u^0$  в течение всего процесса итераций, т.е.  $A'(u^k)$  в (1.5), (1.6) заменяется на  $A'(u^0)$  (см. [Vasin2014; Vasin2016]).

### 2.4.1. Решение структурной обратной задачи гравиметрии

Рассматривается трехмерная структурная обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред по известному скачку плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности. Рассмотрим уравнение гравиметрии для модели двуслойной среды в декартовой системе координат с осью  $z$ , направленной вниз

$$g\Delta\sigma\frac{1}{4\pi}\left\{\iint_D\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+H^2]^{1/2}}dx'dy'-\iint_D\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+u^2(x',y')]^{1/2}}dx'dy'\right\}=\Delta f(x,y), \quad (2.33)$$

где  $g$  — гравитационная постоянная,  $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$  — скачок плотности на поверхности раздела сред, описываемой функцией  $u(x, y)$  и подлежащей определению,  $\Delta f(x, y)$  — аномальное гравитационное поле, вызванное отклонением поверхности от асимптотической плоскости  $z = H$  для искомого решения  $u(x, y)$  (рис. 2.1).

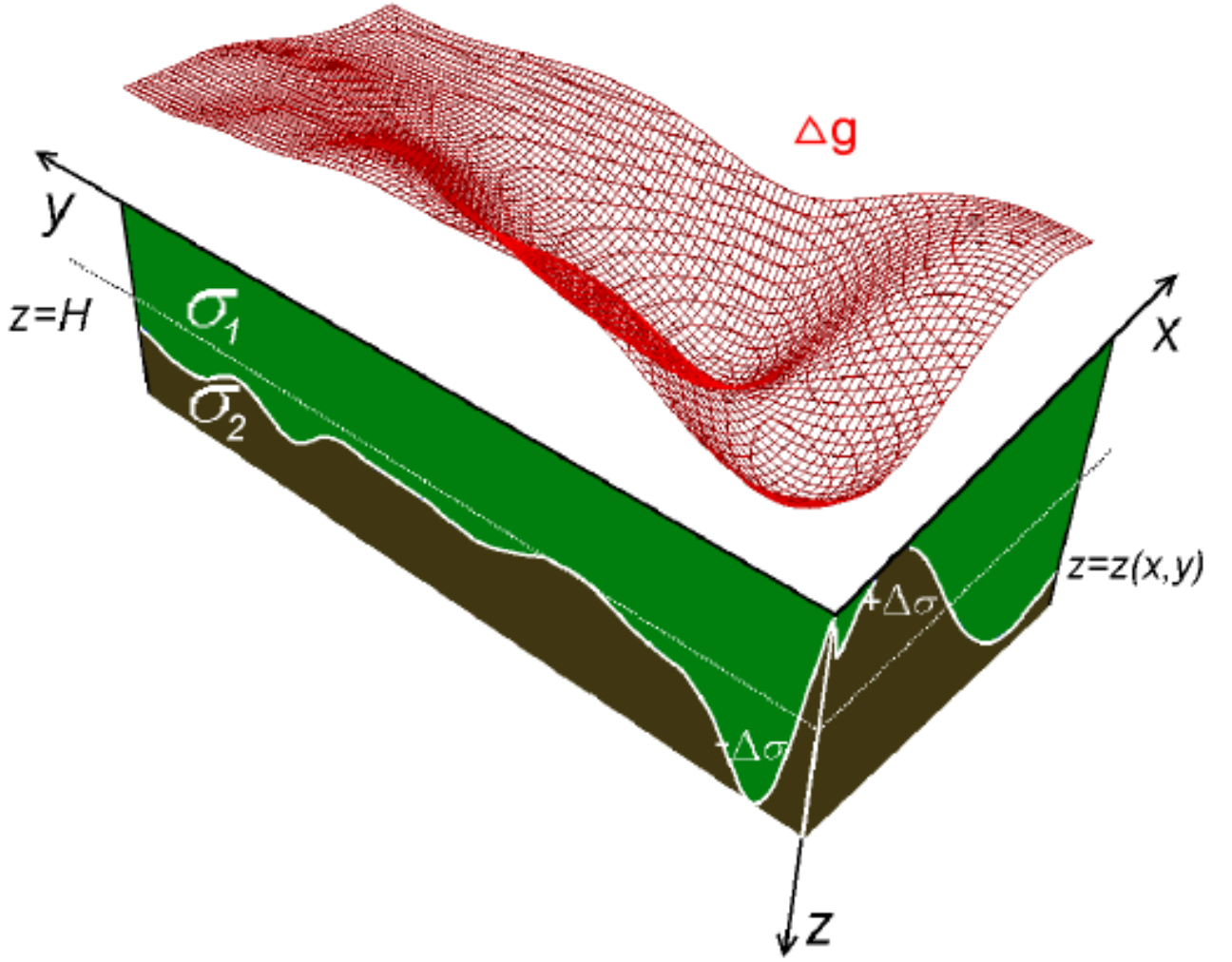


Рис. 2.1. Модель двуслойной среды в задаче гравиметрии.

Запишем (2.33) в виде операторного уравнения

$$[A(u)](x, y) = - \iint_D \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + u^2(x', y')]^{1/2}} dx' dy' = f(x, y), \quad (2.34)$$

где  $f(x, y) = \Delta f(x, y)4\pi/g\Delta\sigma - A(H)$ . Тогда производная оператора  $A$  в точке  $u^0(x, y)$  определяется формулой

$$[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{u^0(x', y')h(x', y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{3/2}} dx' dy',$$

Уравнение (2.34) является интегральным уравнением Урысона (так как неизвестная функция  $u(x, y)$  входит в ядро оператора нелинейно) I рода, следова-



тельно, относится к классу некорректных задач.

После дискретизации интегрального уравнения (2.34) двумерным аналогом формулы прямоугольников с равномерной сеткой по каждой переменной с шагом  $\Delta x, \Delta y$ , получаем систему нелинейных уравнений относительно неизвестного вектора  $u_{ji} = u(x_j, y_i)$  ( $j = 1, 2, \dots, N, i = 1, 2, \dots, M$ ), которая в векторно-матричном виде может быть записана следующим образом

$$A_n(u_n) = f_n, \quad (2.35)$$

где  $u_n, f_n$  — векторы размерности  $n = N \times M$ . Дискретный аналог производной  $A'(u^0)$  принимает форму

$$[A'_n(u_n^0)h_n]_{k,l} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Delta x \Delta y \frac{u_{ji}^0 h_{ji}}{[(x_k - x'_j)^2 + (y_l - y'_i)^2 + (u_{ji}^0)^2]^{3/2}}, \quad (2.36)$$

где при  $u_n = u_n^0 = \text{const}$   $A'_n(u_n^0)$  — симметричная матрица, компоненты которой вычисляются по формуле (2.36).

Рассматривается модель двухслойной среды, в которой поверхность раздела задается функцией  $u(x, y)$ , по формуле

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, y) = & 5 - 3.21e^{-(x/10.13-6.62)^6-(y/9.59-2.93)^6} - 2.78e^{-(x/9.89-4.12)^6-(y/8.63-7.43)^6} \\ & + 3.13e^{-(x/9.89-4.82)^6-(y/8.72-4.33)^6}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

заданной в области  $D = \{0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 110\}$ . Была выбрана сетка с шагом  $\Delta x = \Delta y = 1$  (км), что приводит к размерности  $n = 11000$  для искомого вектора  $u_n$ , а также принято, что  $\Delta\sigma = 0.21$  (г/см<sup>3</sup>),  $H = 5$  (км) ( $z = H = 5$  — асимптотическая плоскость для  $\hat{u}(x, y)$ ).

В результате численного эксперимента по восстановлению модельного решения (2.37) было установлено, что не только матрица  $A'_n(u^0)$  имеет  $n$  различных неотрицательных собственных значений, но это свойство имеет место и для  $A'(u_n^k)$ . Тем самым выполняются условия, при которых получены результаты в данной главе по сходимости и оценке погрешности процессов (1.5), (1.6) для немонотонного оператора  $A$  с положительным спектром.

При анализе числа обусловленности  $\mu(A'_n(u_n^k))$  было установлено, что эта величина для всех четырех процессов незначительно колеблется около значений  $\mu = 4.6 * 10^8$  для немодифицированного варианта и  $\mu = 1.5 * 10^4$  для модифицированных методов. Выход из процесса итераций каждого из методов осуществляется по правилу

$$\frac{\|\hat{u}_n - \tilde{u}_n\|_{R^n}}{\|\tilde{u}_n\|_{R^n}} \leq 10^{-2}, \quad (2.38)$$

где  $\hat{u}_n$  — точное решение системы уравнений (2.35), а  $\tilde{u}_n$  — восстановленное каждым из четырех итерационных методов. Таким образом, точность численного решения, полученного процессами (1.5), (1.6) и их модифицированными аналогами, гарантированно не превышала  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

В таблице 2.1 представлены результаты расчетов при значениях параметров  $\bar{\alpha} = \alpha = 10^{-3}$ ,  $\gamma = 1$ , где

$$\Delta = \frac{\|A_n(\tilde{u}_n) + \alpha(\tilde{u}_n - u^0) - f_n\|_{R^n}}{\|f_n\|_{R^n}}, \quad (2.39)$$

относительная регуляризованная невязка для восстановленного решения,  $N$  — число итераций в процессе для достижения точности, определяемой неравенством (2.38),  $T$  — время реализации метода. В позициях для  $\Delta$ ,  $N$ ,  $T$  верхняя строка соответствует основным процессам, а нижняя — их модифицированным вариантам.

Таблица 2.1. Эксперименты для обратной задачи гравиметрии

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
$\Delta$	0.0048	0.0020	0.0024	0.0023
	0.0094	0.0019	0.0019	0.0021
$N$	17	21	20	16
	22	23	23	16
$T$ (сек)	30	11	14	27
	35	12	15	26

#### 2.4.2. Решение структурной обратной задачи магнитометрии

Уравнение магнитометрии при тех же предположениях, что и в задаче гравиметрии для двухслойной среды, имеет вид:

$$\Delta J \left\{ \iint_D \frac{H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{3/2}} dx' dy' - \iint_D \frac{u(x', y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{3/2}} dx' dy' \right\} = \Delta G(x, y), \quad (2.40)$$

где  $\Delta J$  — усредненный скачок  $z$ -компоненты вектора намагниченности,  $z = H$  — асимптотическая плоскость,  $u(x, y)$  — функция, описывающая аномальное поле,  $z = u(x, y)$  — искомая функция, описывающая поверхность раздела сред с различными свойствами намагниченности (рис. 2.2).

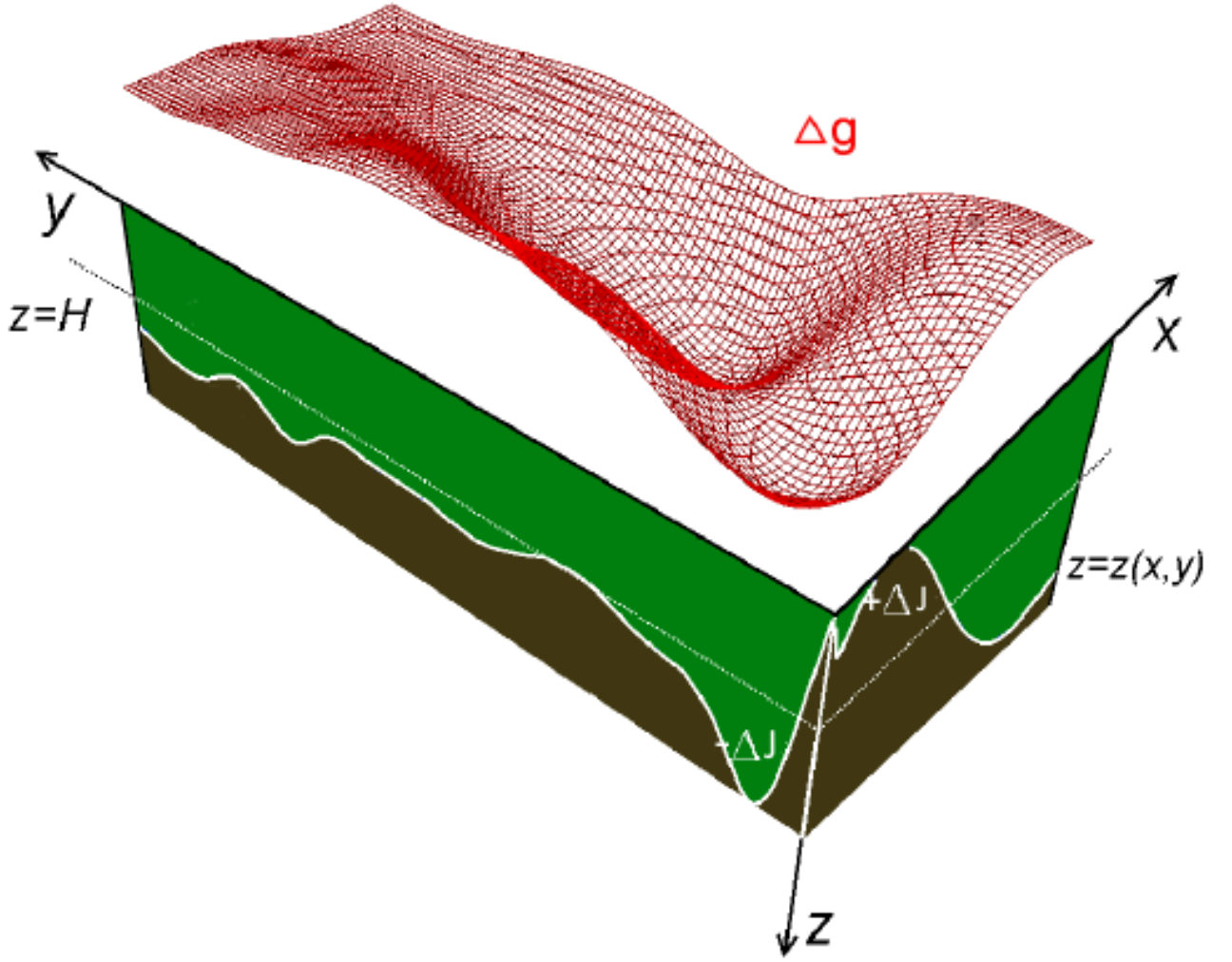


Рис. 2.2. Модель двуслойной среды в задаче магнитометрии.

Уравнение (2.40) можно переписать в форме

$$[D(u)](x, y) = \iint_D \frac{u(x', y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + u^2(x', y')]^{3/2}} dx' dy' = F(x, y), \quad (2.41)$$

где  $F(x, y) = D(H) - \Delta G(x, y)/\Delta J$ , тогда производная оператора  $D$  в точке  $u^0(x, y)$  определится формулой

$$[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 - 2(u^0(x', y'))^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{5/2}} h(x', y') dx' dy'.$$

После дискретной аппроксимации, подобно задаче гравиметрии уравнения

(2.41), приходим к системе нелинейных уравнений

$$D_n(u_n) = F_n \quad (2.42)$$

относительно вектора  $u_n$  ( $n = N \times M$ ) с компонентами  $u_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$ ), при этом компоненты производной оператора  $D_n$  в точке  $u_n^0$  вычисляются по формуле

$$[D'_n(u_n^0)h_n]_{k,l} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \Delta x \Delta y \frac{(x_k - x'_j)^2 + (y_l - y'_i)^2 - 2(u_{ji}^0)^2}{[(x_k - x'_j)^2 + (y_l - y'_i)^2 + (u_{ji}^0)^2]^{5/2}} h_{ji}, \quad (2.43)$$

причем при  $u_n^0 = \{u^0(x'_j, y'_i), 1 \leq j \leq M, 1 \leq i \leq N\} = \text{const}$ ,  $D'_n(u_n^0)$  — симметричная матрица.

Модельное решение уравнения (2.42), определяющее поверхность раздела сред, задается формулой [AkMisDer2014]

$$\hat{u}(x, y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6 - (y/10-2.5)^6} - 3^{-(x/10-5.5)^6 - (y/10-4.5)^6}, \quad (2.44)$$

на области  $D = \{0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 100\}$ . Сетка строилась с шагом  $\Delta x = \Delta y = 1$  (км), что влечет размерность  $n = 10000$  для искомого вектора  $u_n$ .

Для  $\Delta J = 0.4$  был выполнен численный эксперимент по восстановлению модельного решения задачи (2.41) процессами (1.5), (1.6) при  $\bar{\alpha} = 0.01$ ,  $\alpha = 0.0001$ ,  $\beta = 1$ , а также их модифицированными аналогами, когда производная  $D'(u^k)$  вычисляется в фиксированной точке  $u_n^0 = H = 5$  (км). Число обусловленности  $\mu(D'_n(u_n^0)) = 1.8 \cdot 10^7$ . После вычисления спектра матрицы  $D'_n(u_n^k)$  выяснилось, что она имеет различные неотрицательные собственные значения, что на основании теорем сходимости главы 2, при подходящем выборе параметра  $\beta$  и начальном приближении  $u_n^0$ , гарантирует сходимость итерационных схем и двухэтапного метода. Окончание итерационных процессов выполнялось

по правилу (2.38).

Результаты численных расчетов для задачи (2.42) по восстановлению модельного решения (2.44) представлены в таблице 2.2. Как и в таблице 2.1, здесь  $\Delta$  — относительная норма невязки (2.39) для восстановленного решения,  $N$  — число итераций для достижения точности (2.38),  $T$  — машинное время при реализации процесса, верхние строки для каждого параметра соответствуют данным для основных (немодифицированных) процессов (1.5), (1.6), нижние строки — для модифицированных вариантов (1.5), (1.6).

Таблица 2.2. Эксперименты для обратной задачи магнитометрии

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
$\Delta$	0.0636	0.0699	0.0802	0.0368
	0.0569	0.0575	0.0595	0.0369
$N$	4	4	4	5
	4	4	4	5
$T$ (сек)	7	6	6	22
	5	3	3	3

**Вывод.** Анализируя результаты численного эксперимента для задач гравиметрии и магнитометрии, можно отметить, что для достижения одной и той же точности приближенного решения в соответствии с правилом (2.38), число итераций для модифицированных методов, как правило, больше, чем немодифицированных процессов (1.5), (1.6). Однако затраты машинного времени при реализации модифицированных процессов, за исключением ММО, существенно меньше. Поэтому можно сделать вывод, что модифицированные МНС, ММН и РМН более экономичны и, следовательно, более предпочтительны для некоторых классов нелинейных задач большой размерности. Более затратная по времени реализация ММО, по сравнению с МНС и ММН, связана прежде всего

с тем, что в коэффициенте  $\beta^{-1}(u^k)$  необходимо вычислять не только скалярные произведения, но и обращать на каждом шаге оператор  $B_k = A'(u^k) + \alpha I$ . Следует сказать, что для уравнения (1.3) ММО обычно не используется. Его применение целесообразно для эквивалентного уравнения  $A'(u)^*(A(u) - f) = 0$ , для которого ММО преобразуется к виду, где операция обращения отсутствует [[VasEre2009], с. 57, формула 5.8]. Заметим также, что в методе ММО и РМН вычисление элемента вида  $W = (A'(u^k) + \alpha I)^{-1}V$  заменялось приближенным решением системы  $(A'(u^k) + \alpha I)W = V$  с помощью метода минимальных невязок, т.е. в этом случае фактически реализуется гибридная схема градиентно-ньютоновского типа.

Как можно видеть из таблицы 2.2, также тенденция по затратам машинного времени для модифицированных вариантов процессов (1.5), (1.6) (включая ММО) также сохраняется и для обратной задачи магнитометрии.

## Глава 3

# Покомпонентные методы и вычислительные оптимизации для решения обратных структурных задач гравиметрии и магнитометрии

В третьей главе предложены покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта для решения обратной задачи гравиметрии, а также вычислительная оптимизация методов типа Ньютона. Покомпонентный метод типа Ньютона предлагается для решения обратных задач в случае модели двухслойной среды, а метод, основанный на методе Левенберга – Марквардта — для модели многослойной среды. Первый параграф посвящен вычислительной оптимизации метода Ньютона и покомпонентному методу типа Ньютона. Во втором параграфе предложен покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта. В третьем параграфе описаны использованные инструменты параллельного программирования. В четвертом параграфе обсуждаются результаты численного моделирования. Для задач, имеющих большой размер данных, приводятся результаты расчетов с использованием параллельных вычислений на многоядерных процессорах и графических ускорителях. В пятом параграфе приводится описание комплекса параллельных программ для выполнения на многоядерных процессорах и графических ускорителях NVIDIA.



### 3.1. Покомпонентный метод типа Ньютона и вычислительная оптимизация метода Ньютона

#### 3.1.1. Покомпонентный метод типа Ньютона

Используя особенности обратной задачи гравиметрии, предлагается покомпонентный метод, основанный на идее метода Ньютона.

Запишем исходное операторное уравнение (1.3),  $A : H \rightarrow H$ :

$$A(u) = f,$$

где  $A(u) = g\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy$  — интегральный оператор задачи гравиметрии (2.33).

Итерации в методе Ньютона строятся по схеме

$$A'(u^k)(\Delta u^k) = -(A(u^k) - f),$$

где  $\Delta u^k = u^{k+1} - u^k$ . То есть, для задачи гравиметрии

$$g\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) \Delta u^k(x, y) dx dy = -[A(u^k)(x', y') - f(x', y')]. \quad (3.1)$$

Полагая  $\Delta u^k(x, y) = \Delta u^k(x', y') = \text{const}$  относительно переменных интегрирования, запишем

$$g\Delta\sigma(\Delta u^k(x', y')) \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy \approx -[A(u^k(x', y')) - f(x', y')]. \quad (3.2)$$

Таким образом, величина поправки  $\Delta u^k$  может быть получена как

$$\Delta u^k = \left[ [A(u^k)](x', y') - f(x', y') \right] / g\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy.$$

Итерации осуществляются по схеме:

$$u^{k+1}(x', y') = u^k(x', y') - \frac{1}{\psi^k(x', y')}([A(u^k)](x', y') - f(x', y')), \quad (3.3)$$

где

$$\psi^k(x', y') = g\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy.$$

Для решения некорректных задач гравиметрии, предлагается регуляризованный покомпонентный метод

$$u^{k+1}(x', y') = u^k(x', y') - \frac{1}{\psi^k(x', y') + \bar{\alpha}}([A(u^k)](x', y') + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta(x', y')), \quad (3.4)$$

где  $\alpha, \bar{\alpha} > 0$  — параметры регуляризации.

В дискретной записи итерационный процесс запишется

$$u_{m,l}^{k+1} = u_{m,l}^k - \frac{1}{\psi_{m,l}^k + \bar{\alpha}}([A_n(u^k)]_{m,l} + \alpha(u^k - u^0) - f_{m,l}), \quad 1 \leq m \leq M, \quad 1 \leq l \leq N,$$

где

$$\psi_{m,l}^k = g\Delta\sigma \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Delta x \Delta y \frac{u_{ij}}{[(x_k - x'_j)^2 + (y_l - y'_i)^2 + (u_{ij})^2]^{3/2}}.$$

Эту сумму  $\psi_{m,l}^k$  можно интерпретировать как сумму элементов  $(m \times M + l)$ -й строки матрицы производной  $A'_n(u_n^k)$ .

Покомпонентный метод позволяет восстанавливать значения функции  $u$  в каждой точке  $(x', y')$  области  $D$ , или, в дискретном случае,  $\{m, l\}$ -компоненты вектора  $u$  — отсюда название

**Вывод.** Предложенный метод позволяет существенно упростить вычисления по сравнению с методом Ньютона. Вместо вычисления обратной матрицы в методе Ньютона можно вычислить вектор, состоящий из сумм элементов строк матрицы и использовать его компоненты для восстановления соответ-

ствующей компоненты вектора решения  $u_n^k$ . Это делает метод экономичным по памяти — вместо хранения матрицы производной хранится вектор, а также по времени вычислений. Таким образом при больших сетках возможно обходиться небольшим количеством машинных ресурсов. Вычислительная сложность компонентного метода типа Ньютона для решения системы  $n$  уравнений без учета сложности алгоритма вычисления  $A_n(u_n^k)$  — вектора аппроксимированного интегрального оператора — составляет  $O(n)$ , в отличие от метода Ньютона, где сложность алгоритма  $O(n^2)$ . Этот факт подтверждается вычислительными экспериментами в пункте 3.4.

### 3.1.2. Вычислительная оптимизация метода Ньютона

Для задач (2.35), (2.42) можно отметить, что наибольшие значения подынтегральная функция  $K$  принимает в точках  $x, y$  равных или близких к  $x'$  и  $y'$ . В конечномерном случае, матрица производной оператора задачи будет с диагональным преобладанием, элементы матриц  $A'(u^0)$  (2.36), (2.43) принимают наибольшие значения при малых значениях  $(x - x')$  и  $(y - y')$  (рис. 3.1).

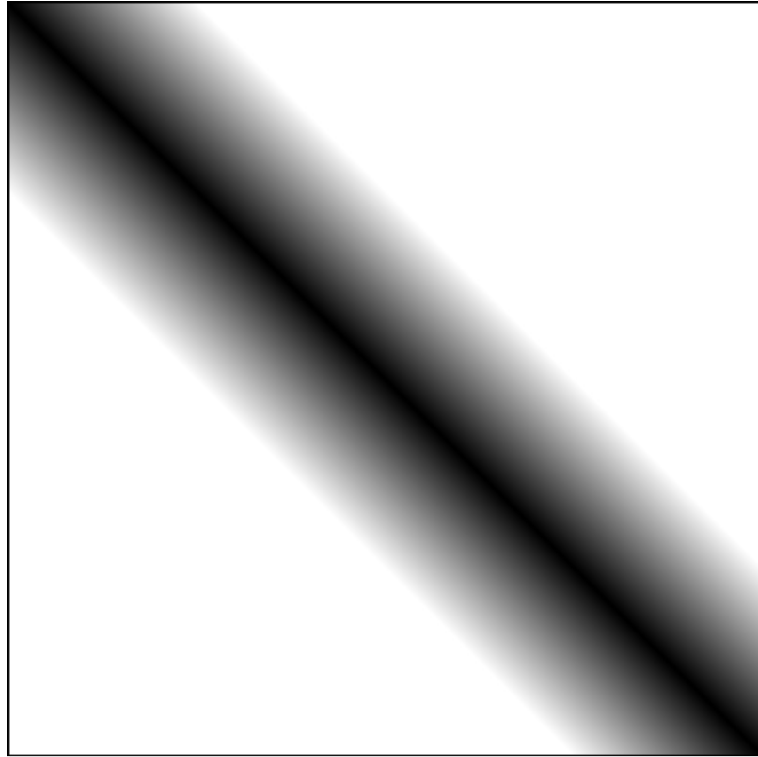


Рис. 3.1. Схема матрицы производной оператора  $A$  в задачах грави- магнитометрии в двух- слойной среде

Поэтому в структурных обратных задачах грави- магнитометрии при неболь- ших относительно размера сетки глубинах  $H$  при решении итерационными ме- тодами без существенной потери точности можно не учитывать значения эле- ментов, отстоящих от диагонали далее, чем на  $\beta$ -ю часть размерности матрицы производной, то есть те значения  $a_{ij}$ , для которых  $j \in \{i - h(\beta), ..i + h(\beta)\}$ , где  $h(\beta)$  — полуширина ленты матрицы,  $i, j$  — индекс элемента. Значение  $\beta$  опре- деляется из входных данных задачи и зависит от размера гравитационной или магнитной аномалии по отношению к величине сетки. Данный подход позволя- ет существенно уменьшить количество вычислительных операций, перейдя от плотно заполненных матриц к матрицам ленточного вида.

### 3.2. Покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта для решения обратной задачи гравиметрии для модели многослойной среды

Рассмотрим уравнение гравиметрии для модели многослойной среды.

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной плотности  $\Delta\sigma_l (l = 1, \dots, L)$ , разделенных искомыми поверхностями  $S_l$ , где  $L$  — число границ раздела (рис. 3.2). Гравитационный эффект от такого полупространства равен сумме гравитационных эффектов от всех поверхностей раздела. Пусть поверхности раздела задаются уравнениями  $u_l(x, y)$ ,

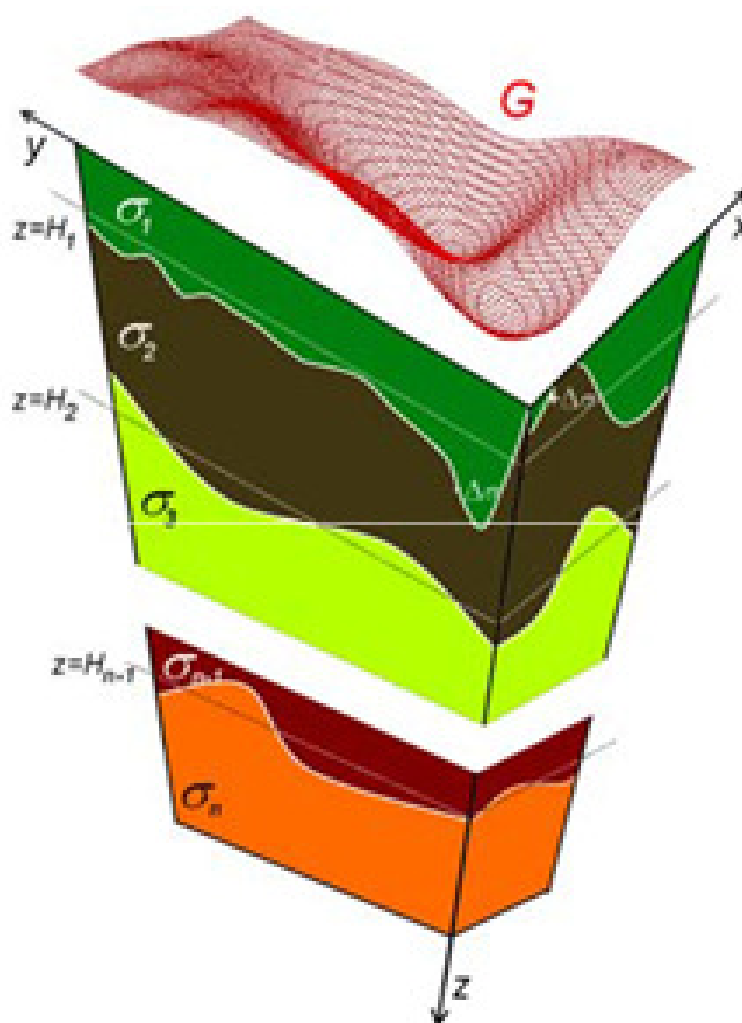


Рис. 3.2. Модель многослойной среды

скачки плотности на них равны  $\Delta\sigma_l$ . поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости  $u_l = H_l$ , т.е.

$$\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} |u_l(x, y) - H_l| = 0.$$

Функции  $u_l(x, y)$ ,  $u = (u_1(x, y), \dots, u_L(x, y))$ , описывающие искомые поверхности раздела сред, удовлетворяют операторному уравнению

$$A(u) = \sum_{l=1}^L g \Delta\sigma_l \frac{1}{4\pi} \iint_D \left\{ \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + u_l^2(x, y)]^{1/2}} - \frac{1}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + H_l^2]^{1/2}} \right\} = f(x', y'), \quad (3.5)$$

где  $g$  — гравитационная постоянная,  $\Delta\sigma_l (l = 1, \dots, L)$  скачки плотности,  $f(x', y') = \sum_{l=1}^L F_l$  — суммарное аномальное гравитационное поле.

Предварительная обработка гравитационных данных с выделением аномального поля из измеренного выполняется по методике [MarPrut2003]. Задача является недоопределенной, так как мы ищем несколько функций  $u_l(x, y)$  по заданной функции  $f(x', y')$ . Поэтому необходимо использовать весовые множители, которые могут быть найдены по формулам из [AkMarMis2013]:

$$\begin{aligned} F &= [F_1, F_2, \dots, F_L] = (f_1, f_2, \dots, f_{M \times L}, \dots, f_{L \times M \times N}) \\ &\rightarrow (w_1, w_2, \dots, w_{L \times M \times N}), \\ w_i &= \frac{|f_i|^\beta}{\max_i |f_i|^\beta}, \quad \beta > 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $F_l (l = 1, 2, \dots, L)$  — аномальные гравитационные поля, создаваемые гравитирующими массами, находящимися на соответствующих глубинах  $H_l$  и разде-

ленных границами раздела  $S_l (l = 1, 2, \dots, L)$ .

После дискретизации уравнения (3.5) на сетке  $n = M \times N$  с заданной правой частью  $f(x', y')$  и аппроксимации интегрального оператора  $A(u)$  по квадратурным формулам, получаем вектор правой части  $F_n$  размера  $M \times N$ , вектор решения  $u_n = [u_1(x, y), \dots, u_L(x, y)]$  размерности  $L \times M \times N$ , полученный конкатенацией векторов решений, соответствующих  $l$ -й границе раздела, матрицу производной оператора  $A'(u)$  размерности  $(M \times N) \times (L \times M \times N)$ , полученной приписыванием справа к матрице производной  $A'(u^l)$  в точке  $u^l$  матрицы  $A'(u^{l+1})$ , где

$$[A'(u_n^l)h_n]_{k,m} = g\Delta\sigma_l \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \Delta x \Delta y \frac{u_{ij}^l h_{ij}^l}{[(x_k - x'_i)^2 + (y_m - y'_j)^2 + (u_{ij}^l)^2]^{3/2}}, \quad (3.7)$$

и систему нелинейных уравнений

$$A_n[u] = F_n. \quad (3.8)$$

Для решения задач (2.33), (3.5) предлагается метод покомпонентного типа, основанный на идее метода Левенберга – Марквардта.

Для аппроксимации решения уравнения (2.34) метод Левенберга – Марквардта (МЛМ) имеет вид:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma[A'(u^k)^T A'(u^k) + \alpha I]^{-1} A'(u^k)^T (A(u^k) - f_\delta), \quad (3.9)$$

где  $A'(u^k)^T$  — оператор, транспонированный к производной  $A'(u)$ ,  $\alpha > 0$  — параметр регуляризации,  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ .

В работах В.В. Васина [Vasin\_2012], [VasPer\_2011] был исследован ме-

тод Левенберга – Марквардта

$$u^{k+1} = u^k - \gamma[A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha I]^{-1}[A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta)] \quad (3.10)$$

и его модифицированный вариант

$$u^{k+1} = u^k - \gamma[A'(u^0)^* A'(u^0) + \alpha I]^{-1}[A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta)] \quad (3.11)$$

для решения регуляризованного уравнения

$$A'(u)^*(A(u) - f_\delta) + \alpha(u - u^0) = 0,$$

где  $\gamma$  — демпфирующий множитель,  $u^0$  — некоторое приближение к  $u_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ .

По аналогии с выводом покомпонентного метода типа Ньютона (3.3), выполним грубую аппроксимацию, вынеся  $\Delta u_l(x', y')$  за знак интегрального оператора, как в (3.2), и запишем итерационную последовательность восстановления каждой из неизвестных границ  $u_l$

$$u_l^{k+1} = u_l^k - \gamma \frac{1}{\varphi_l + \bar{\alpha}} \Lambda[A'(u_l^k)^T(A(u^k) - f_\delta) + \alpha(u_l^k - u_l^0)], \quad (3.12)$$

где  $l$  — номер границы раздела,  $l = 1, \dots, L$ ,  $\Lambda$  — диагональный весовой оператора, у матрицы которого весовые множители на главной диагонали,

$$\begin{aligned} \varphi_l = & \left[ g\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x', y', x, y, u_l^k(x, y)) dx' dy' \right] \\ & \times \left[ g\Delta\sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u_l^k(x, y)) dx dy \right], \end{aligned}$$

где  $K'_u(x', y', x, y, u_l^k(x, y))$  — функция ядра, транспонированного к ядру  $K'_u(x, y, x', y', u_l^k(x, y))$ . Величина  $\varphi_l$  зависит от  $u_l^k$ . Итерационный процесс (3.12) пере-



пишем в дискретной форме

$$u_{l,i}^{k+1} = u_{l,i}^k - \gamma \frac{1}{\varphi_{l,i} + \bar{\alpha}} w_{l,i} \left[ \{A'(u_l^k)^T (A(u^k) - f_\delta)\}_i + \alpha(u_{l,i}^k - u_{l,i}^0) \right], \quad (3.13)$$

где  $w_{l,i}$  —  $i$ -й весовой множитель, зависящий от  $l$ -й границы раздела,

$$\begin{aligned} \varphi_{l,i} = & \left[ g \Delta \sigma \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M K'_u(x'_k, y'_m, \{x, y\}_i, u_{l,i}^k) \Delta x' \Delta y' \right] \\ & \times \left[ g \Delta \sigma \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M K'_u(x_k, y_m, \{x', y'\}_i, u_l^k(x_k, y_m)) \Delta x \Delta y \right]. \end{aligned}$$

**Вывод.** Преимущества покомпонентного метода типа Левенберга – Марквардта в низкой вычислительной сложности и меньших затратах памяти, по сравнению с классическим методом Левенберга – Марквардта. Здесь не требуется вычисления матрицы  $A'(u^k)^T A'(u^k) + \alpha I$  и хранения ее в памяти, что значительно снижает потребление памяти. Это делает метод более экономичным в численных расчетах по сравнению с (3.10), (3.11), где вычислительная сложность алгоритмов достигает  $O(n^3)$  для систем уравнений с числом неизвестных  $n$ , в силу умножения матриц  $A'(u^k)^T A'(u^k)$  и обращения матрицы  $A'(u^k)^T A'(u^k) + \alpha I$ . Вычислительная сложность (3.12) составляет  $O(n^2)$  потому что самыми затратными по времени операциями являются вычисление элементов матрицы  $A'(u^k)^T$  и матрично-векторные умножения. Таким образом, покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта является достаточно экономичным алгоритмом решения обратной задачи гравиметрии в многослойной среде.

### 3.3. Использование параллельных вычислений

Для исследования параллельных свойств и сравнения работы последовательных и параллельных алгоритмов вводятся некоторые характеристики. Основные — это коэффициенты ускорения и эффективности:

$$S_m = \frac{T_1}{T_m},$$

$$E_m = \frac{S_m}{m},$$

где  $T_1$  — время выполнения последовательного алгоритма на одном процессорном ядре,  $T_m$  — время выполнения параллельного алгоритма на  $m$  ( $m > 1$ ) ядрах процессора.

$T_m$  представляет собой совокупность чистого времени счета и накладных расходов на создание и синхронизацию потоков исполнения

$$T_m = T_c + T_o.$$

Число процессорных ядер  $m$  соответствует упомянутому разбиению матрицы и векторов на  $m$  фрагментов.

В общем случае эффективность распараллеливания  $E_m$  меняется в пределах  $0 < E_m < 1$ . В идеальном случае при равномерной и сбалансированной загрузке процессорных ядер и минимальном времени на накладные расходы  $E_m$  близко к единице, но при решении практических задач она уменьшается за счет накладных расходов и дисбаланса нагрузки.

Основной целью при построении параллельных алгоритмов является по-

лучение максимального ускорения и эффективности:

$$S_m \rightarrow m,$$

$$E_m \rightarrow 1.$$

Главными условиями высокой эффективности являются:

- 1) равномерная загрузка процессорных ядер (отсутствие простоев);
- 2) масштабируемость параллельного алгоритма, т.е. возможность ускорения вычислений пропорционально увеличению числа используемых процессорных ядер.

В качестве инструментов для создания параллельных программ автором использовались средства OpenMP в совокупности с компилятором Intel C++ Compiler и CUDA. Эти технологии общедоступны, так как многоядерные процессоры Intel и видеокарты NVIDIA распространены повсеместно и часто составляют аппаратное обеспечение современных ПК.

Основную часть вычисления рассмотренных методов составляют операции линейной алгебры: матрично-векторные операции, матричные умножения и т.д. Распараллеливание вычислений производится путем разбиения матриц и векторов на горизонтальные блоки, количество которых соответствует числу ядер процессора или блоков видеокарты.

**3.3.1.** При создании кода параллельной программы OpenMP используются директивы `#pragma omp` — указания компилятору, какой участок программы будет выполняться параллельно (рис. 3.3<sup>1</sup>). Особенность выполнения параллельной OpenMP программы в блоке действия директивы `#pragma omp parallel` в создании мастер-потока (`[master]`), раздающего команды подчиненным ему потокам (`slaves`). Эти команды заключаются, в основном, в раздаче фрагментов

---

<sup>1</sup> Рисунок взят из интернет-ресурса Intel Developer Zone.



Рис. 3.3. Принцип работы потоков в OpenMP

данных каждому потоку, включая мастер-поток, и в синхронизации результатов.

**3.3.2. Технология CUDA** для вычисления на видеокартах NVIDIA имеет свои особенности. Видеокарта представляет собой периферийное устройство, при подключении к хост-машине (ПК) инициализируются тысячи потоков — ядер. Поэтому при написании параллельного CUDA-кода требуется четко разграничивать пространство действия центрального процессора (*host*) и видеокарты (*device*). Задачей кода для *host* требуется инициализация входных данных, запуск подпрограмм для видеокарты на тех участках кода, где требуется распараллеливание. Программный код для *device* состоит из специальных подпрограмм — ядерных функций, выполняющихся непосредственно на видеокарте. Ядерная функция выполняется каждым ядром графического процессора внут-

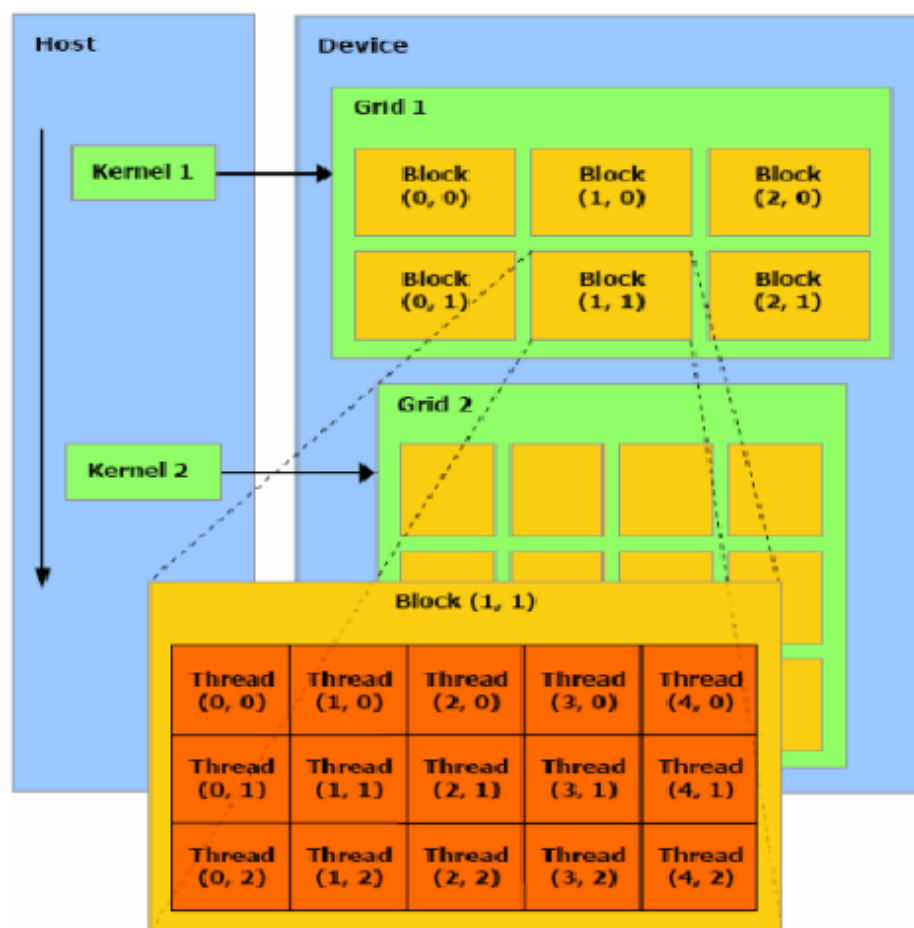


Рис. 3.4. Иерархия компонентов вычислительной сетки GPU

ри блока, все блоки составляют вычислительную сетку *grid*. Каждый из блоков имеет свой уникальный *id* в пределах *grid*, каждое ядро имеет свой уникальный *id* в пределах своего блока (рис. 3.4<sup>2</sup>).

**3.3.3.** Параллельные алгоритмы для решения (3.5) были численно реализованы на многоядерном процессоре Intel Xeon и на графических ускорителях NVIDIA Tesla, являющихся вычислительными компонентами суперкомпьютера «Уран», установленного в Институте математики и механики УрО РАН. Параллельные программы для запуска на процессоре Intel Xeon были разработаны с использованием технологии OpenMP и библиотеки Intel MKL library, программы для запуска на GPU были разработаны с использованием технологии CUDA и библиотеки CUBLAS.

<sup>2</sup> Рисунок взят из интернет-журнала Хакер.

## 3.4. Решение модельных задач гравиметрии и магнитометрии на многопроцессорных системах

### 3.4.1. Решение задач гравиметрии и магнитометрии методами ньютоновского типа

Рассматривается эксперимент по восстановлению границы раздела в двухслойной среде методами ньютоновского типа, наискорейшего спуска и минимальных невязок с распараллеливанием вычислений. Решается модельная задача.

**Целью** эксперимента является сравнить методы по точности решения, в том числе, в случае возмущенной правой части, и временам выполнения.

Точное решение уравнения гравиметрии, определяющее поверхность раздела сред (рис. 3.5), задается формулой

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, y) = 5 - 3.21e^{-(x/10.13-6.62)^6-(y/9.59-2.93)^6} - 2.78e^{-(x/9.89-4.12)^6-(y/8.63-7.435)^6} \\ + 3.19e^{-(x/9.89-4.82)^6-(y/8.72-4.335)^6}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Поверхность задана на области  $D = \{0 \leq x \leq 270, 0 \leq y \leq 300\}$ , с асимптотической плоскостью  $H = 5$ , размерами шагов сетки  $\Delta x = \Delta y = 0.3$ , скачком плотности  $\Delta\sigma = 0.2$  г/см<sup>3</sup>. Восстановлена поверхность раздела (рис. 3.6).

Точное решение уравнения магнитометрии (рис. 3.7), определяющее поверхность раздела сред, задается формулой (2.44).

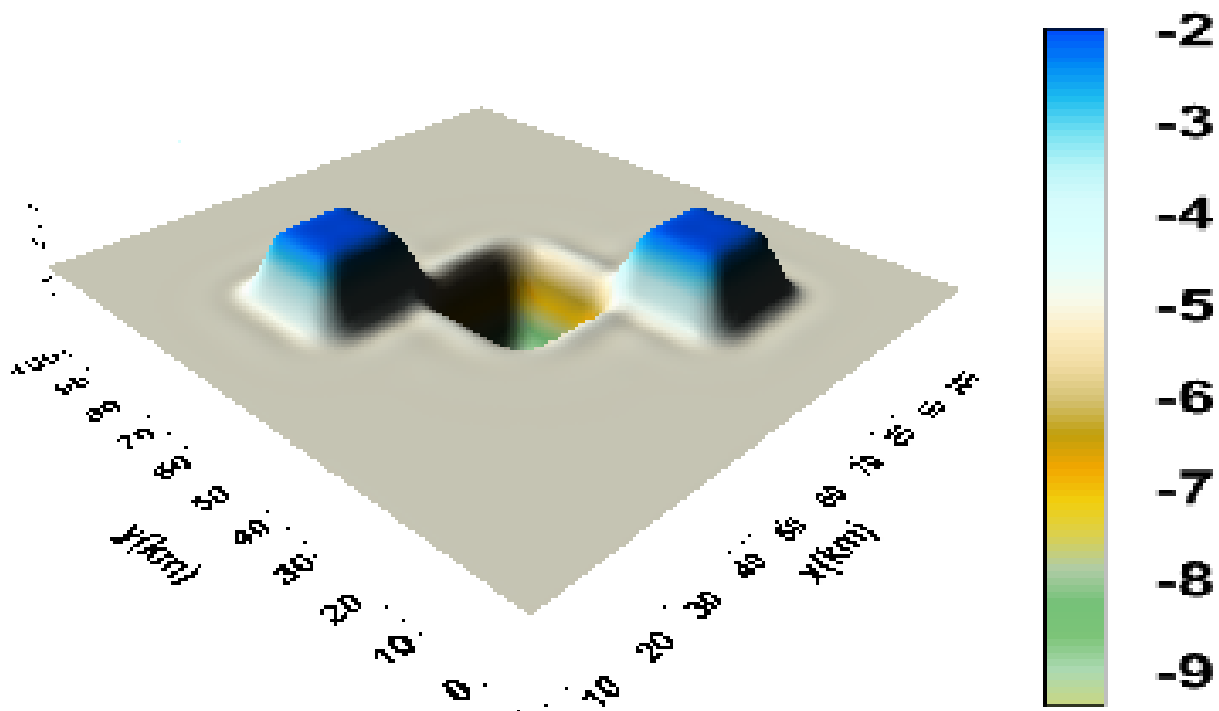


Рис. 3.5. Модельная поверхность «Две горки и впадина»

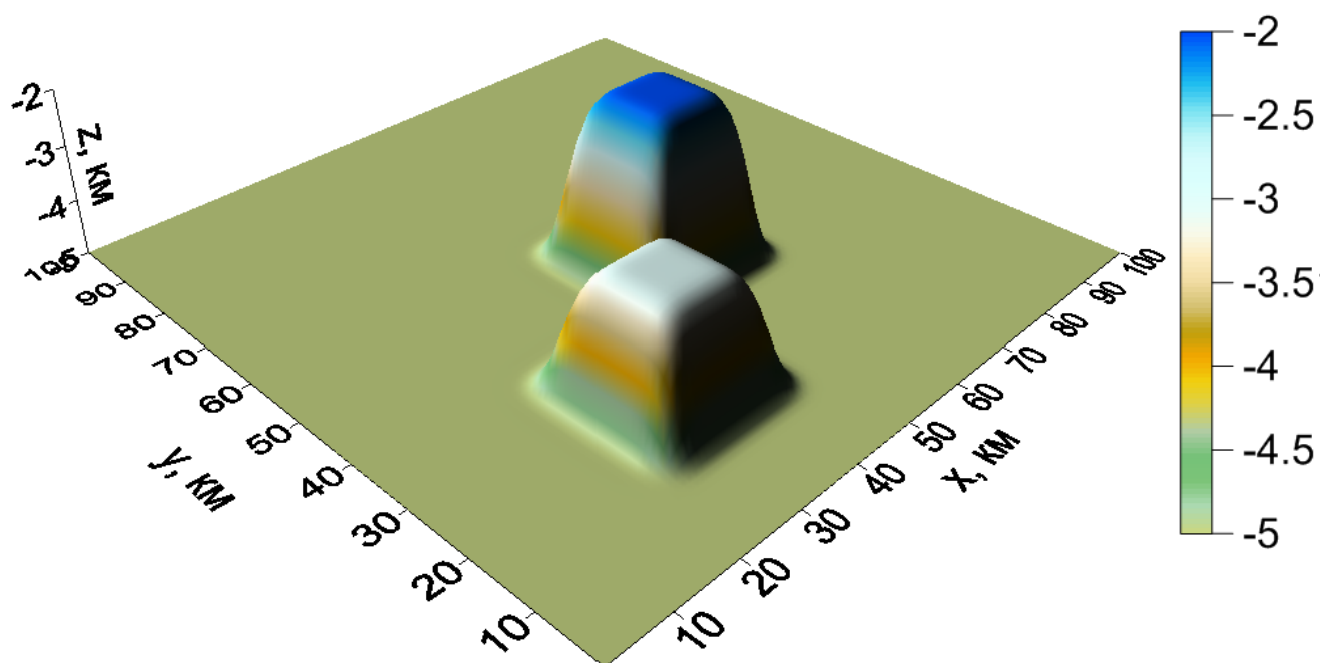


Рис. 3.7. Модельная поверхность «Две горки»

Поверхность задана на области  $D = \{0 \leq x \leq 300, 0 \leq y \leq 300\}$ ,  $H = 5$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.3$ , скачком вектора намагниченности  $\Delta J = 0.4$  А/м. Восстановлена поверхность раздела (рис. 3.8).

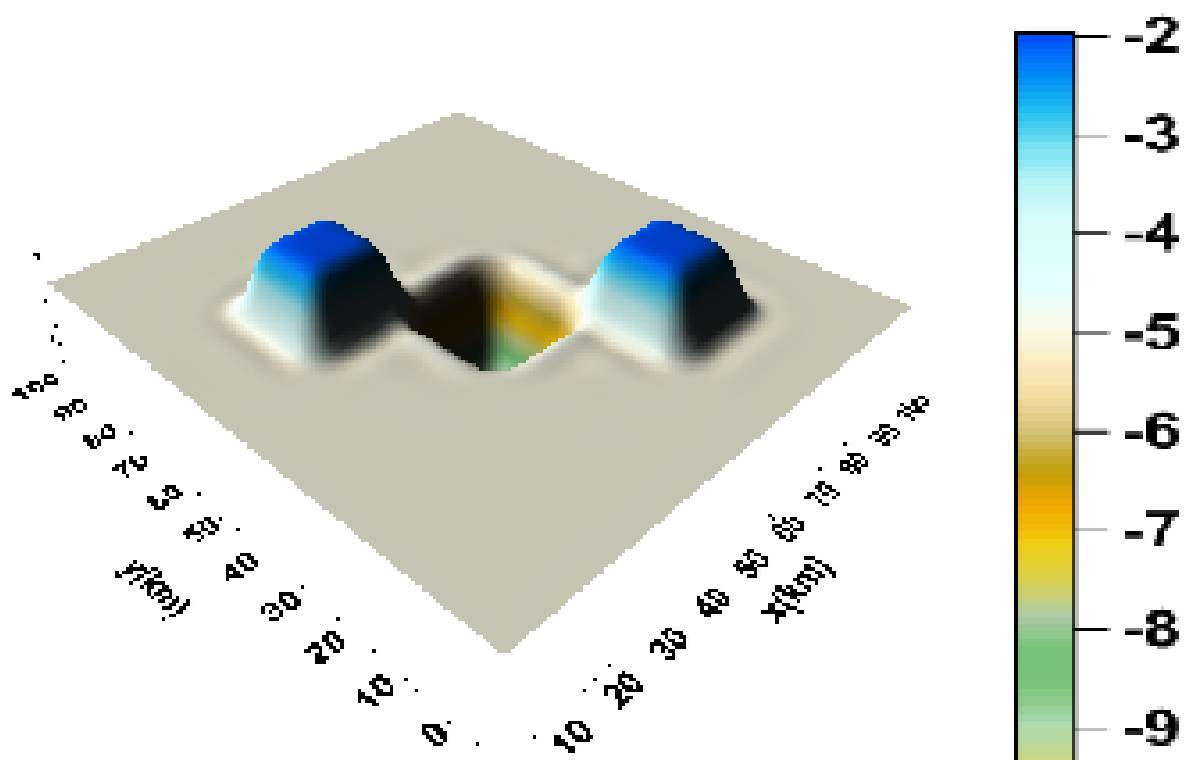


Рис. 3.6. Восстановленная поверхность

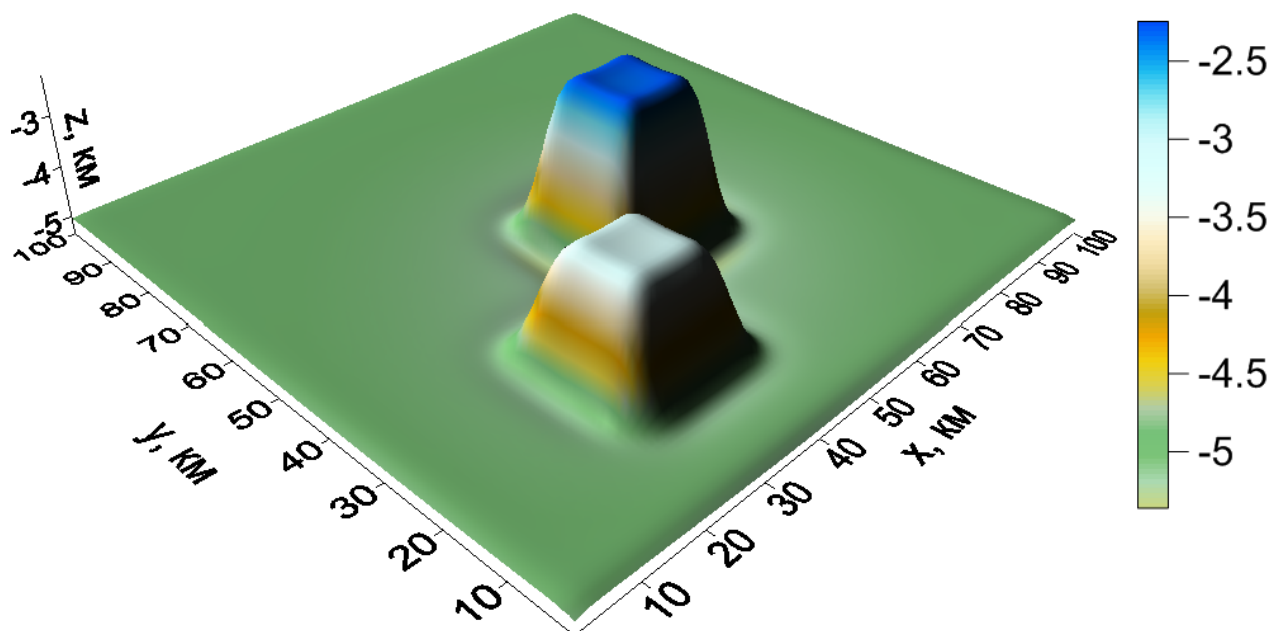


Рис. 3.8. Приближенное решение задачи магнитометрии

В таблицах 3.1, 3.2 приведены результаты расчетов на многоядерном и графическом процессорах. Критерий останова итераций  $\delta = \|u_e - u_a\|/\|u_e\| \leq 0.025$ , параметры регуляризации  $\alpha = \bar{\alpha} = 10^{-3}$ , полуширина ленты матрицы



Таблица 3.1. Сравнение методов решения задачи гравиметрии на сетке  $512 \times 512$ 

Метод	$N$	$\Delta$	$T_1$	$T_8$	$T_{GPU}$	$S_8$	$S_{GPU}$
Метод Ньютона	3	0.041	64 мин	8,82 мин	1 мин	7.25	65
Модиф. метод Ньютона	5	0.042	55 мин	7,5 мин.	45 сек	7.33	73
Метод минимальных невязок	5	0.041	50 мин	6.8 мин.	—	7.3	—
Метод Ньютона с ленточной матрицей	4	0.041	43 мин	6.8 мин.	30	7.41	86
Покомпонентный метод Ньютона	6	0.041	20 мин	2.82 мин.	11 сек	7.14	100

производной  $\beta = 1/4$  для задачи гравиметрии и  $\beta = 1/5$  для задачи магнитометрии. Демпфирующий коэффициент  $\gamma = 1.2$  для покомпонентного метода Ньютона. Обозначение  $\Delta = \|A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta\|/\|f_\delta\|$  — относительная норма регуляризованной невязки,  $N$  — число итераций,  $T_1$  — время счета последовательной программы,  $T_8$  — время счета программы на многоядерном процессоре Intel Xeon с использованием 8 ядер процессора,  $S_8$  — ускорение на 8 ядрах процессора,  $S_{GPU}$  — ускорение, полученное на видеокарте,  $E_8$  — эффективность. Для сетки  $512 \times 512$  узлов размер матрицы  $A'_n(u^k) \approx 2.6 * 10^5 \times 2.6 * 10^5$ .

Также были проведены эксперименты в случае с возмущенной правой частью. На  $f$  был наложен гауссовский шум с математическим ожиданием  $\mu_g = 0.5$  и дисперсией  $\sigma_g = 0.7$  в случае гравитационного поля и  $\mu_m = 0.002$  и дисперсией  $\sigma_m = 0.001$  для магнитного поля. В первом случае шум составляет 16%, во втором — 6%. На рис.3.9, 3.10 изображены возмущенные поля, на рис.3.11 и 3.11 восстановленные модифицированным методом Ньютона поверхности раздела сред для задач с возмущенными данными.

Таблица 3.2. Сравнение методов решения задачи магнитометрии сетка  $270 \times 300$

Метод	$N$	$\Delta$	$T_1$	$T_8$	$S_8$	$E_8$
Метод Ньютона	5	0.036	15 мин	2 мин 36 сек	6	0.75
Метод наискорейшего спуска	4	0.07	13 мин	1 мин 50 сек	7.7	0.96
Метод минимальных невязок	4	0.08	13 мин	1 мин 50 сек	7.7	0.96
Модифицированный метод Ньютона	5	0.037	5 мин	40 сек	7.75	0.96
Метод Ньютона с ленточной матрицей	5	0.05	4 мин	35 сек	7.5	0.93

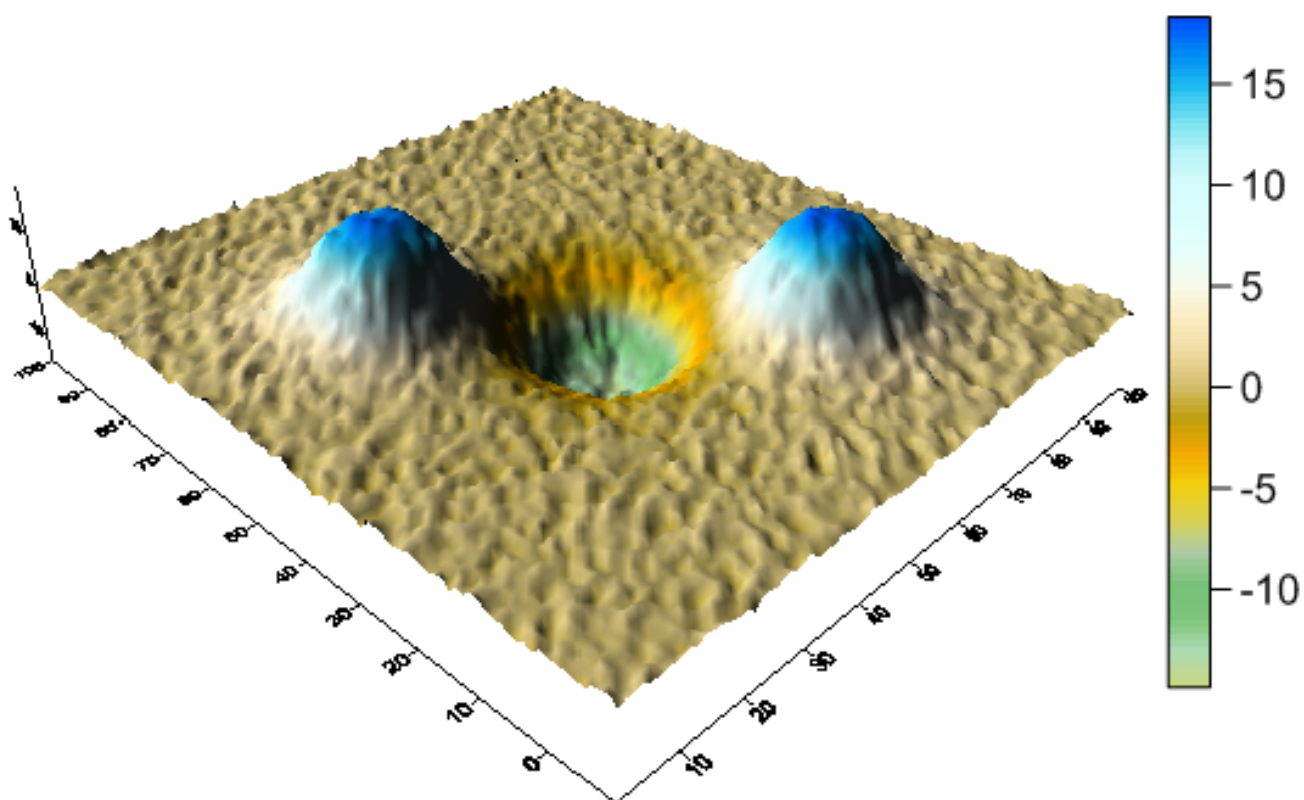


Рис. 3.9. Гравитационное поле с шумом

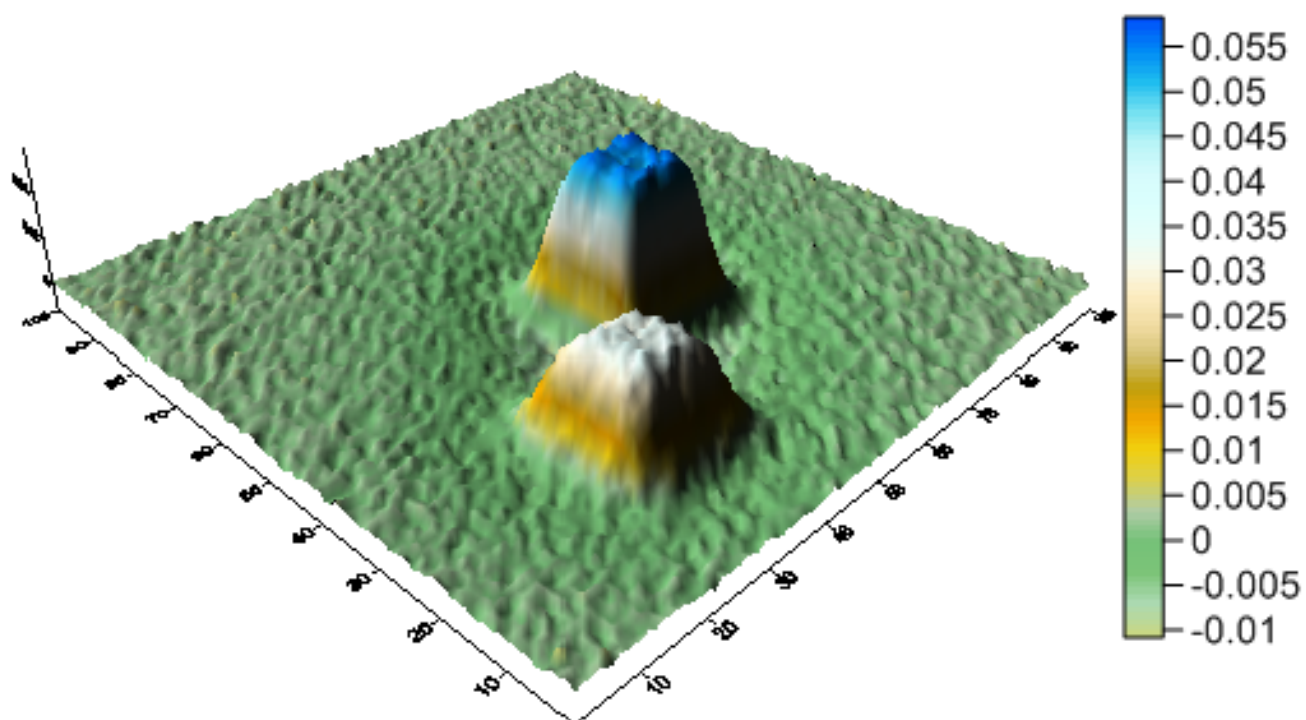


Рис. 3.10. Магнитное поле с шумом

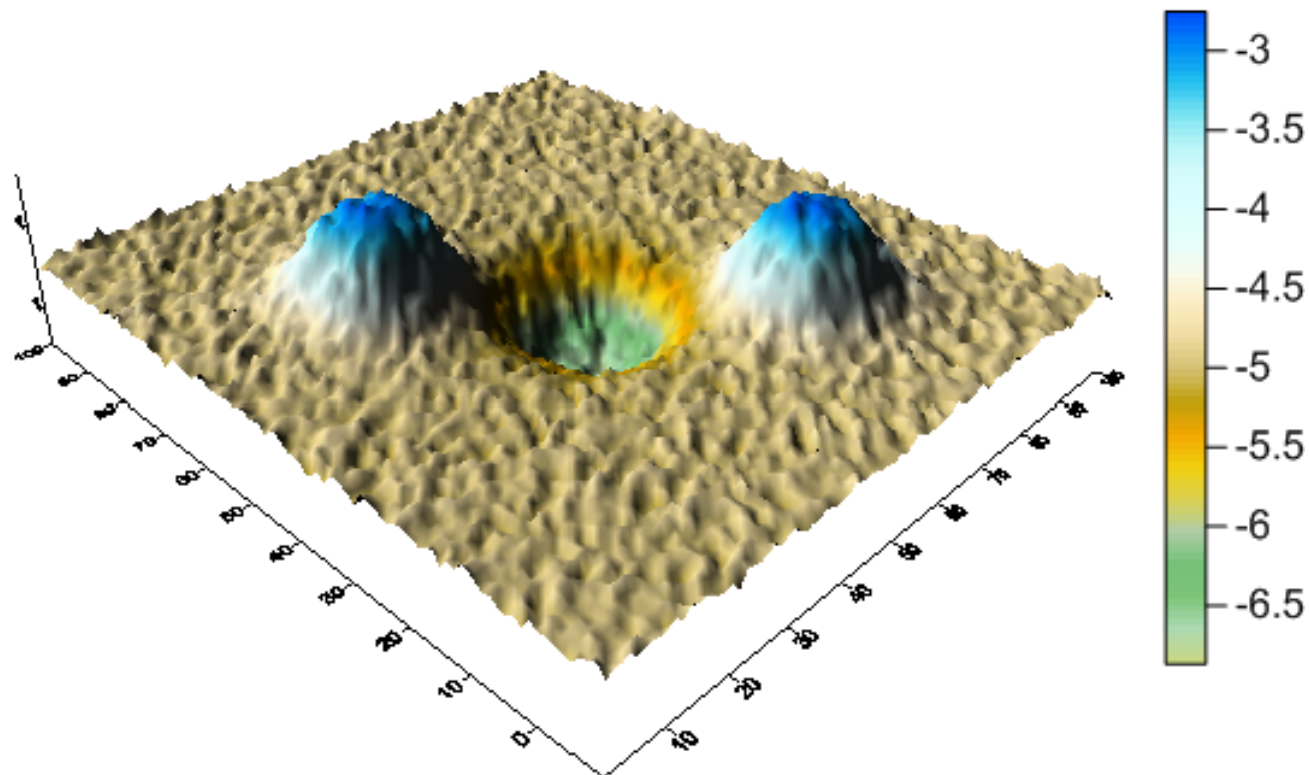


Рис. 3.11. Приближенное решение ММН задачи гравиметрии с шумом

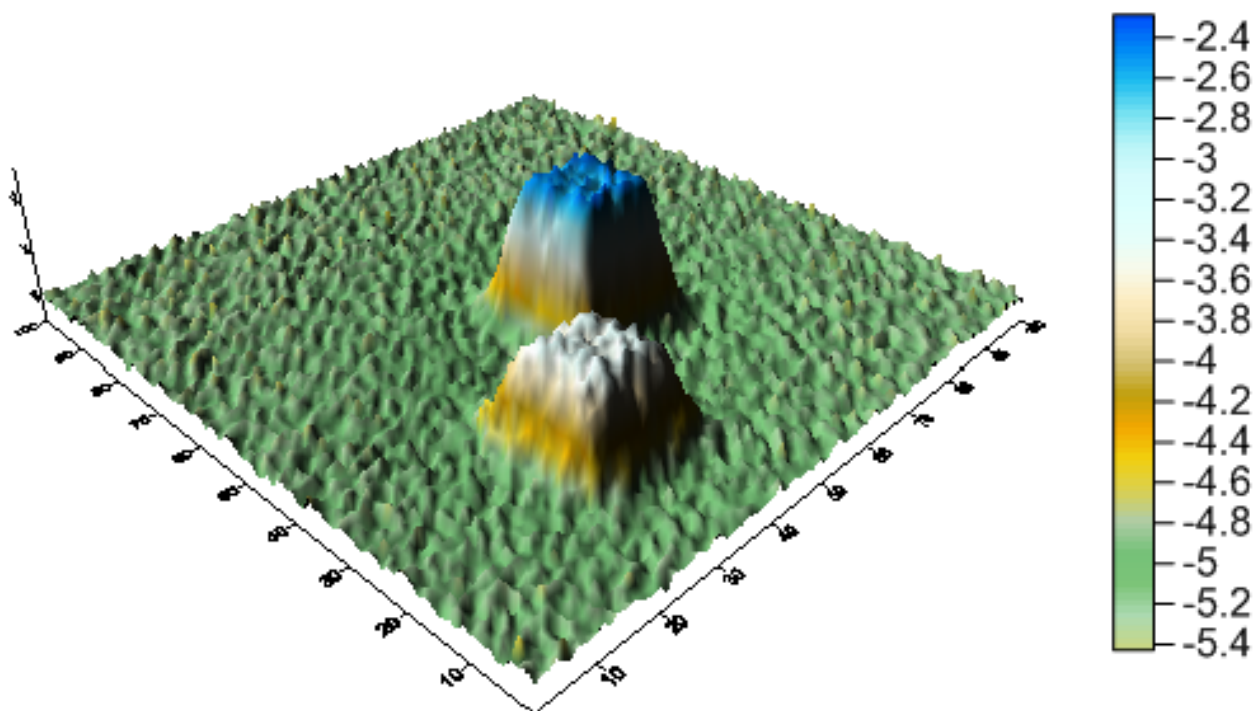


Рис. 3.12. Приближенное решение ММН задачи магнитометрии с шумом

В таблицах 3.3, 3.4 приведены результаты расчетов, где  $\gamma$  — параметр регулировки шага. Критерий останова — относительная погрешность  $\delta < 10^{-1}$ .

Таблица 3.3. Результаты для задачи гравитометрии с шумом

Метод	Параметры	$N$	$\Delta$
Метод Ньютона	$\gamma = 0.2, \alpha = 0.1, \bar{\alpha} = 1$	5	0.47
Модифицированный метод Ньютона	$\gamma = 0.2, \alpha = 0.1, \bar{\alpha} = 1$	5	0.46
Метод Ньютона с ленточной матрицей	$\gamma = 0.2, \alpha = 0.1, \bar{\alpha} = 1$	5	0.46
Покомпонентный метод Ньютона	$\gamma = 1.2, \alpha = 0.1, \bar{\alpha} = 1$	7	0.46

Таблица 3.4. Результаты для задачи магнитометрии с шумом

Метод	Параметры	$N$	$\Delta$
Метод Ньютона	$\gamma = 1, \alpha = 10^{-3}, \bar{\alpha} = 0.1$	5	0.49
Модифицированный метод Ньютона	$\gamma = 1, \alpha = 10^{-3}, \bar{\alpha} = 0.1$	6	0.49
Метод Ньютона с ленточной матрицей	$\gamma = 1, \alpha = 10^{-3}, \bar{\alpha} = 0.1$	5	0.49

**Вывод.** Покомпонентный метод типа Ньютона является самым экономичным по вычислительным затратам: в три раза быстрее РМН, и в два раза быстрее метода Ньютона с ленточной матрицей. Исключение из матрицы производной оператора  $A'(u^k)$  элементов, далеко отстоящих от диагонали, почти не влияет на количество итераций для достижения заданной точности метода Ньютона. Данные, полученные в ходе расчетов, не противоречат теоремам главы 2 о сходимости метода Ньютона. В частности, в задаче гравиметрии для методов понадобилось уменьшать параметр  $\gamma$  для обеспечения сходимости итерационных процессов. Замена матрицы производной на ленточную не оказывает существенного влияния на скорость сходимости за счет почти не измененного параметра  $N_1$  в оценках теоремы 2.1. На улучшение результата по сглаживанию шума оказал влияние подбор регуляризующих параметров  $\bar{\alpha}, \alpha$ . Проведенные эксперименты наглядно демонстрируют выгоду использования ПМН для решения обратных задач на больших сетках. Все алгоритмы обладают высокой степенью параллелизма, что дает почти  $n$ -кратное уменьшение времени счета программ при использовании  $n$  ядер процессора. Из таблиц видно, что ускорение  $S_m$  и эффективность  $E_m$  близки к максимальным показателям.

### 3.4.2. Решение структурной обратной задачи гравиметрии для модели многослойной среды

Рассматривается эксперимент по восстановлению границ раздела сред в многослойной среде (4 слоя с разной плотностью) в задаче гравиметрии на основе квазиреального аномального поля методами: регуляризованный Левенберга – Марквардта (ЛМ) и покомпонентный типа Левенберга – Марквардта (ПЛМ).

**Целью** моделирования является сравнить регуляризованный метод Левенберга – Марквардта и покомпонентный метод типа Левенберга – Марквардта по качеству восстановленных решений, подтвердить экономичность покомпонентного метода экспериментами на больших сетках.

На рис. 3.13 и 3.14 изображено суммарное гравитационное поле и поле с гауссовским шумом 22%, математическое ожидание  $\mu = 1$ , величина дисперсии  $\sigma = 1.15$ . Модельные поверхности раздела построены по аналогии с границами раздела из работы [MarAkiMis2016].

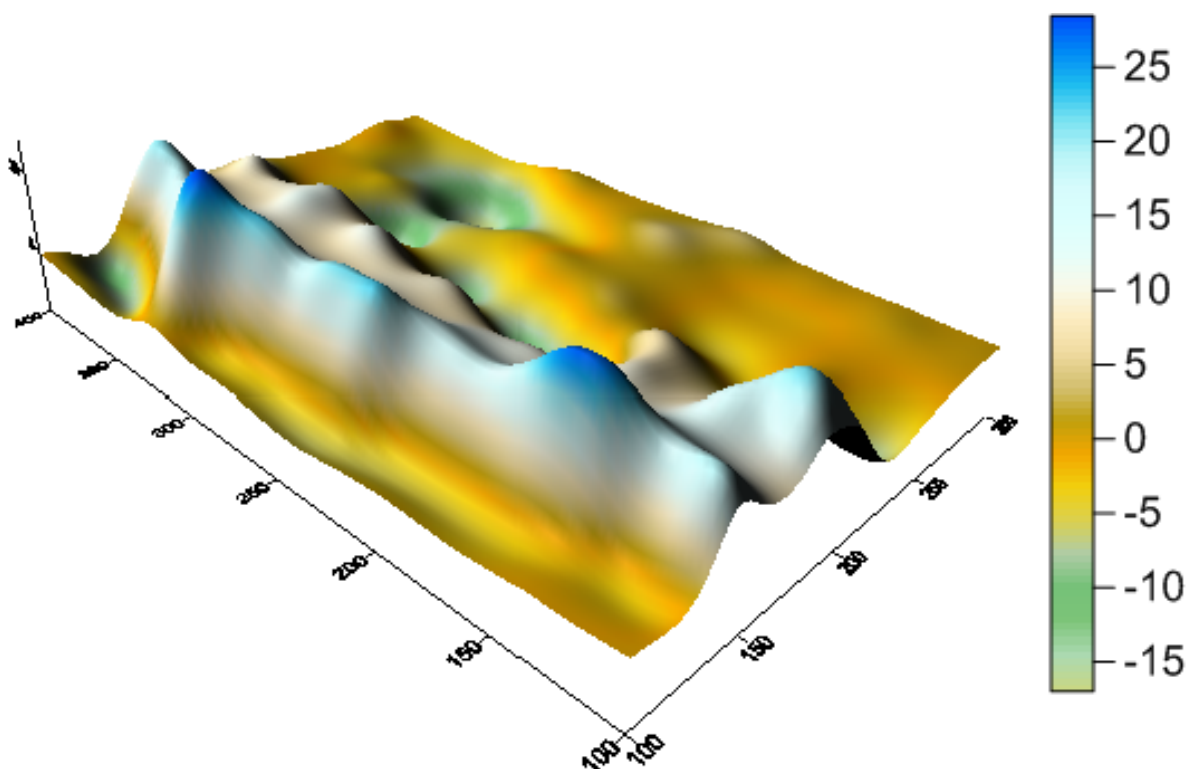


Рис. 3.13. Суммарное гравитационное поле без шума (мГал)

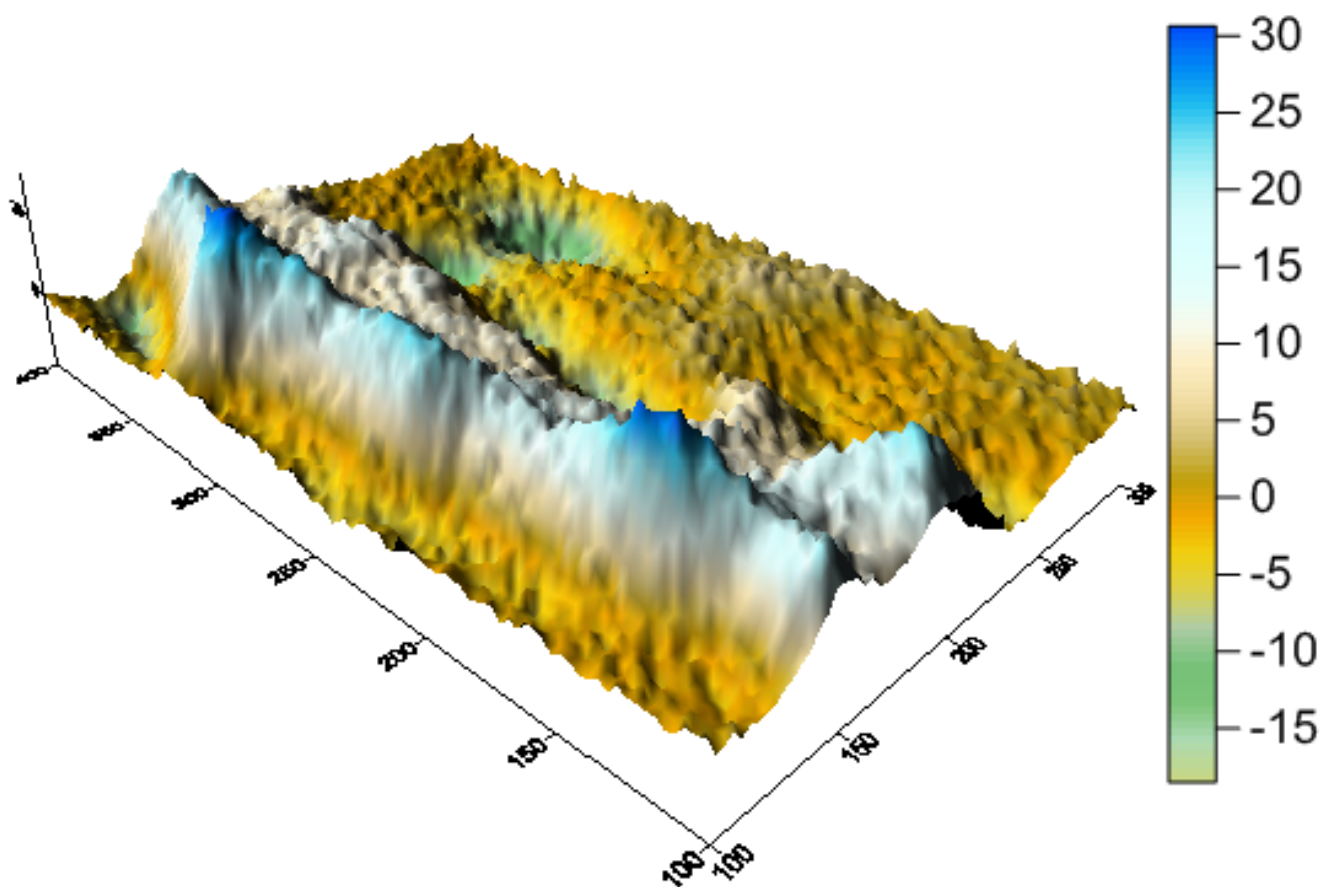


Рис. 3.14. Суммарное гравитационное поле с шумом 22% (мГал)

На рис. 3.15 изображены точные решения задачи. Асимптотические плоскости  $H_1 = 8$  км,  $H_2 = 15$  км и  $H_3 = 30$  км. Скачки плотности  $\Delta\sigma_1 = 0.2$  г/см<sup>3</sup>,  $\Delta\sigma_2 = 0.1$  г/см<sup>3</sup>,  $\Delta\sigma_3 = 0.1$  г/см<sup>3</sup>. Шаги сетки  $\Delta x = 2$  км,  $\Delta y = 3$  км.



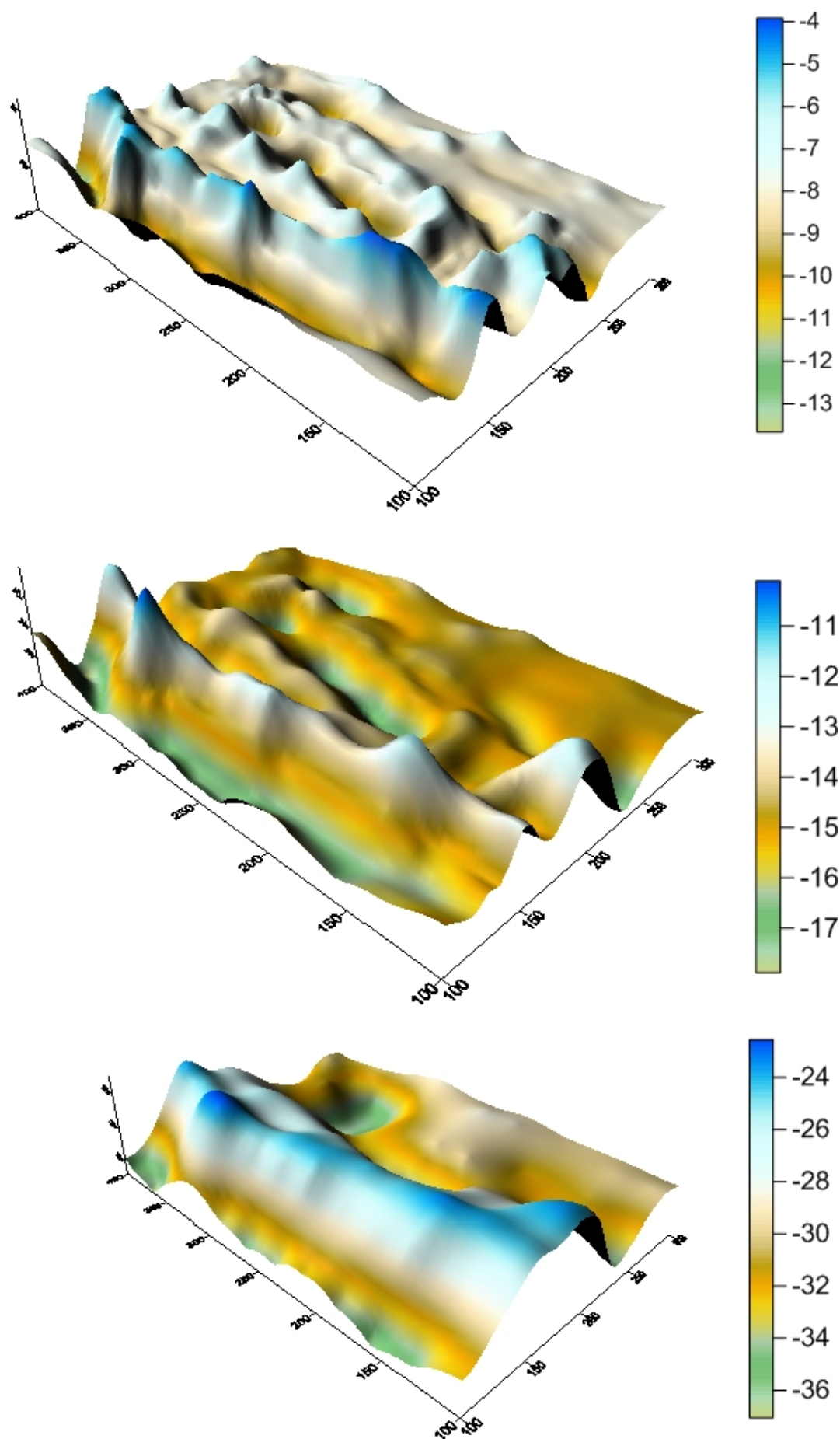


Рис. 3.15. Точные решения  $u_0(x, y)$ ,  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$



При больших размерах сеток матрицы в методе ЛМ требуют для хранения значительных объемов памяти. Например, при числе границ раздела  $L = 3$ , размере сетки  $M = N = 1000$ , матрица  $A'(u^k)^* A'(u^k)$  с данными типа двойной точности занимает примерно 67 055.2 Гб. Также необходимо отметить, что перемножение плотных матриц является вычислительно сложной задачей. Чтобы сократить объёмы требуемой памяти, было решено выполнять все матрично-векторные операции «на лету»: необходимый элемент матрицы вычисляется в момент умножения его на элемент вектора. Покажем это.

Предварительно сводим систему нелинейных уравнений (3.8) к СЛАУ:

$$B(u^k)u^{k+1} \equiv [A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha I]u^{k+1} = b, \quad (3.15)$$

где  $b \equiv [A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha I]u^k - \Lambda A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta)$ . Здесь получаем  $A'(u^k)^*(A(u^k) - f_\delta)$  и  $[A'(u^k)^* A'(u^k)]u^k$  «на лету». В соответствии с ассоциативностью умножения матриц,  $[A'(u^k)^* A'(u^k)]u^k$  эквивалентно  $A'(u^k)^*[A'(u^k)u^k]$ , так, прием вычисления результата матрично-векторного умножения «на лету» позволяет избежать перемножения матриц, заменяя эту процедуру на двойное матрично-векторное умножение. Далее СЛАУ (3.15) может быть решена итерационными методами градиентного типа, например, методом минимальных невязок [VasEre2009], [BachZhida1987].

Для запуска на многоядерном процессоре Intel Xeon были использовались директивы `#pragma simd` для векторизации в циклах и оптимизации с использованием средств компилятора Intel Xeon.

На рис. 3.16 показаны восстановленные границы раздела методом ЛМ, на рис. 3.17 показаны восстановленные границы раздела методом ПЛМ.

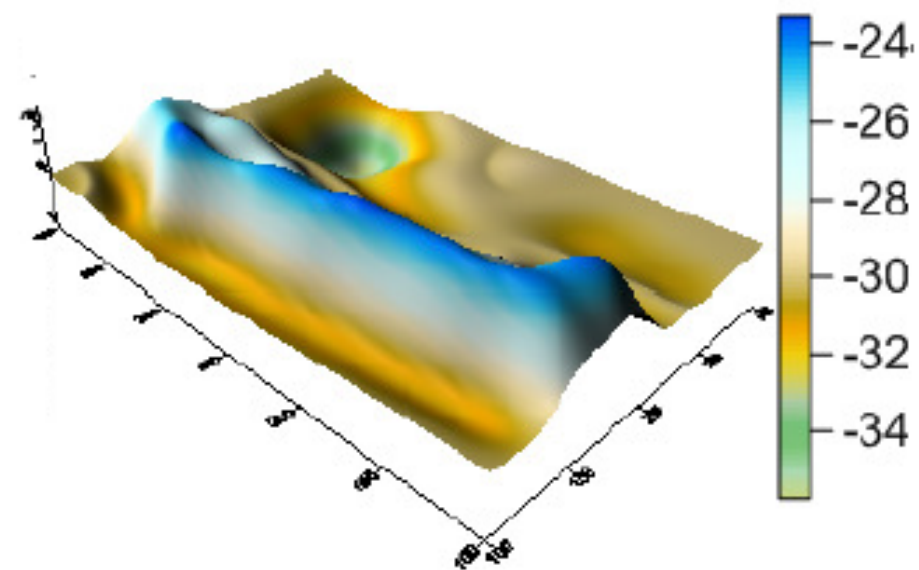
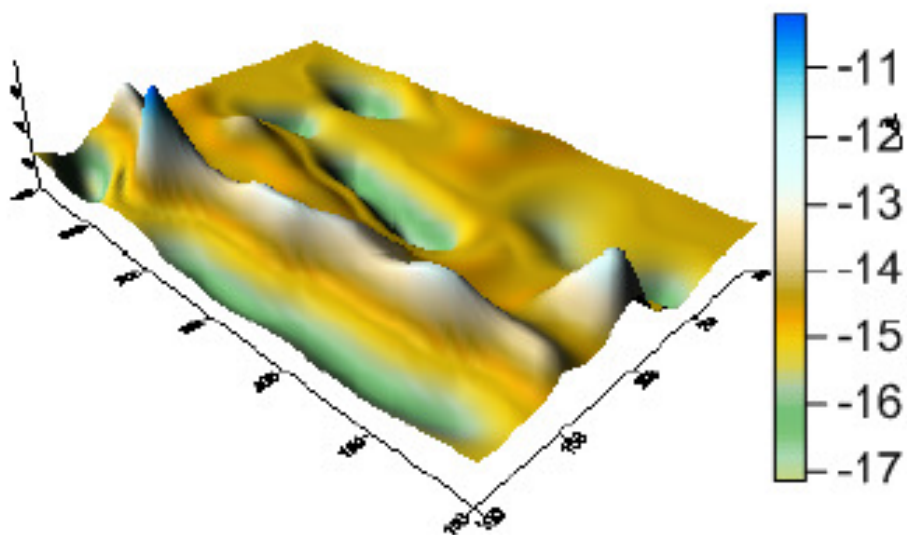
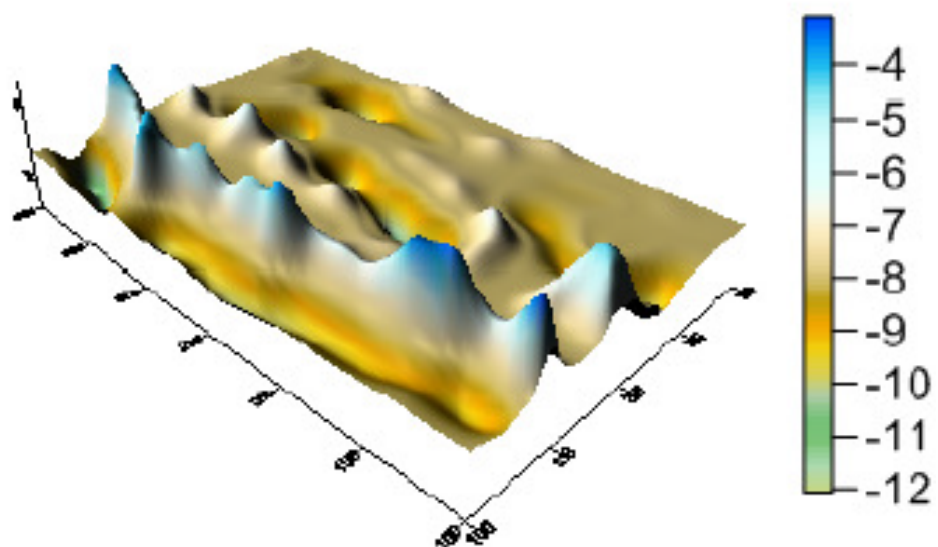


Рис. 3.16. Границы, восстановленные ЛМ  $\tilde{u}_0(x, y)$ ,  $\tilde{u}_1(x, y)$ ,  $\tilde{u}_2(x, y)$

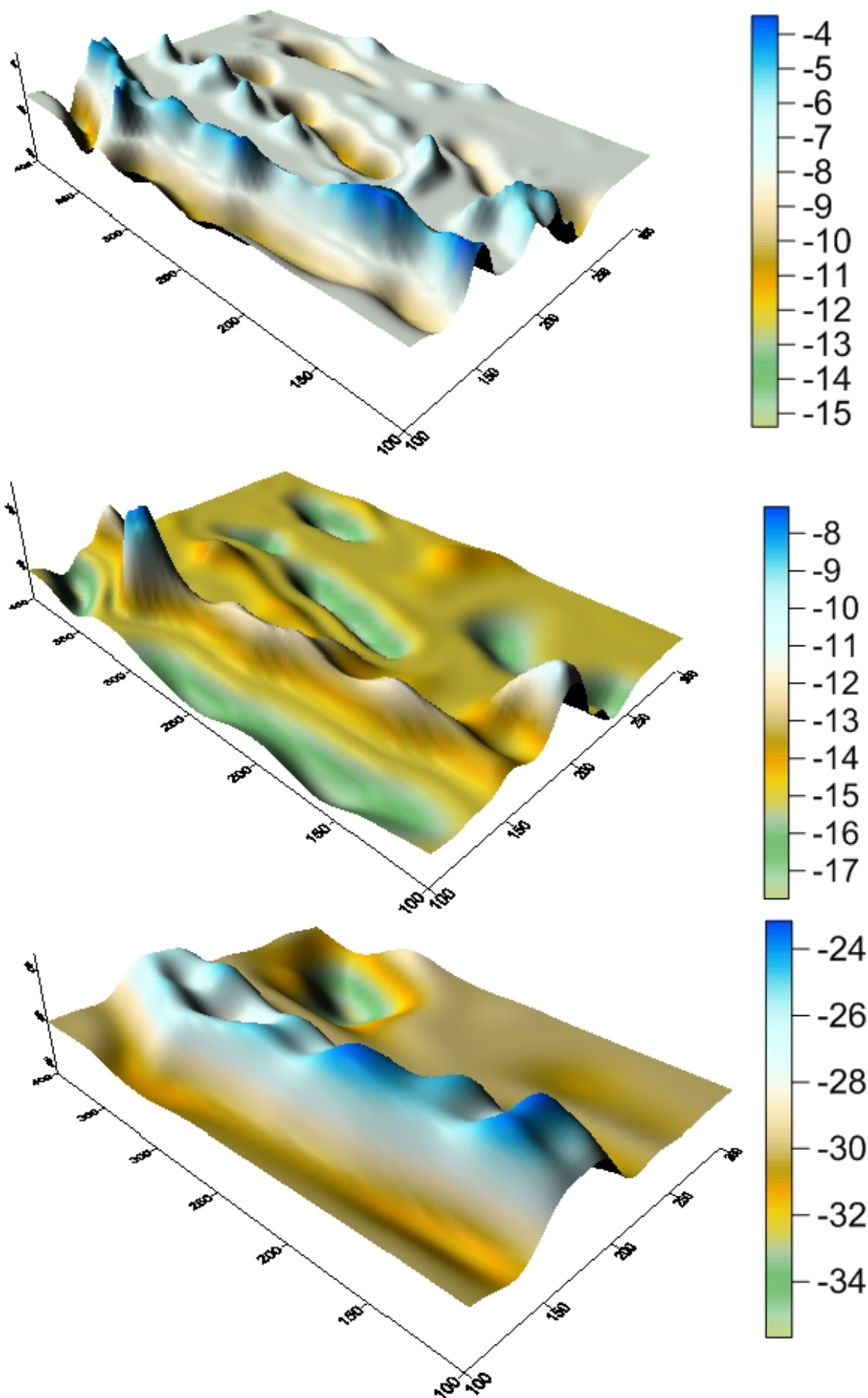


Рис. 3.17. Границы, восстановленные ПЛМ  $\hat{u}_0(x, y)$ ,  $\hat{u}_1(x, y)$ ,  $\hat{u}_2(x, y)$

Рис. 3.18 и рис. 3.19 показывают восстановленные границы раздела методами ЛМ и ПЛМ из гравитационного поля с шумом 22%.

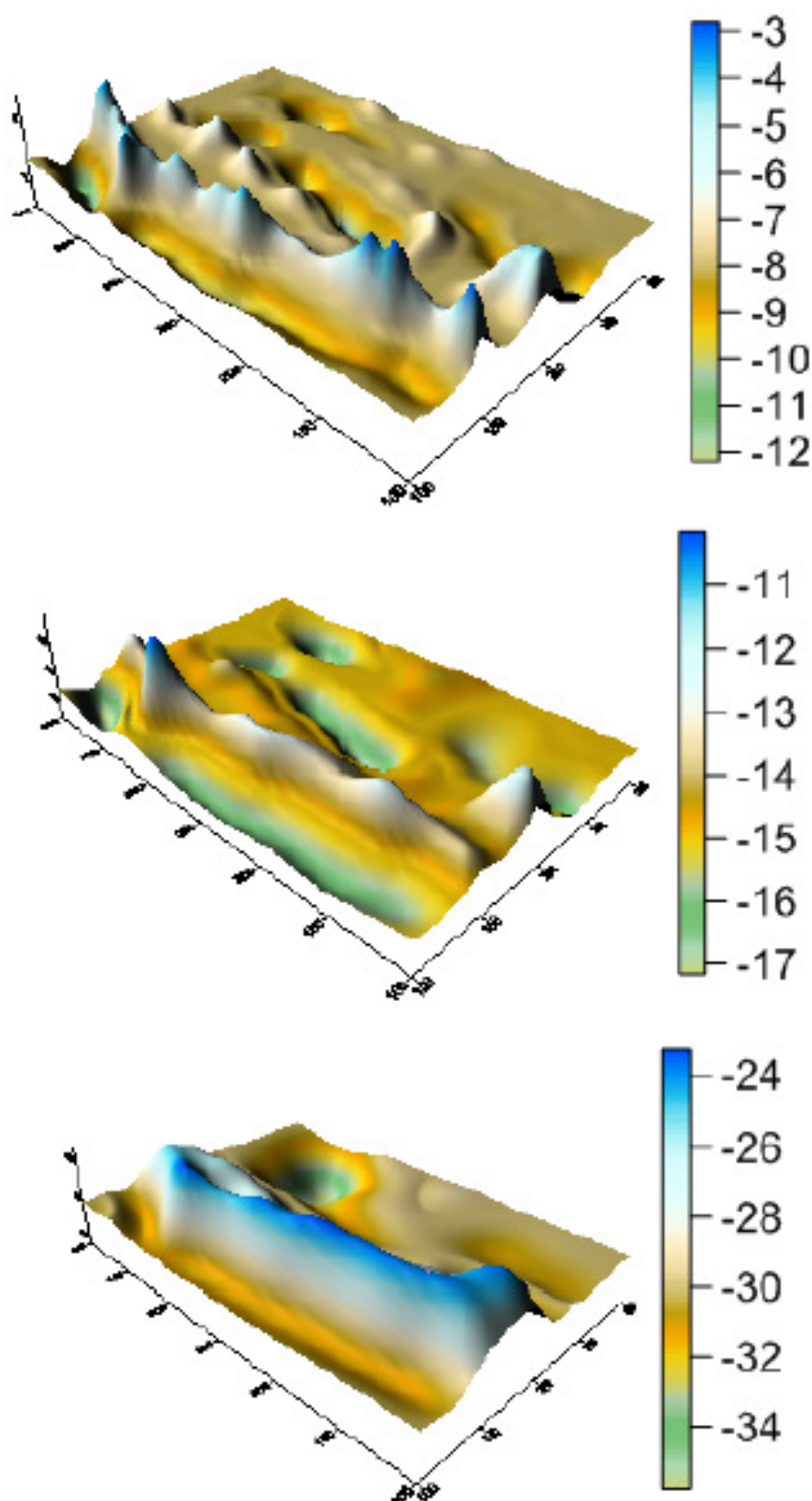


Рис. 3.18. Границы, восстановленные ЛМ для данных с шумом  $\tilde{u}_0(x, y)$ ,  $\tilde{u}_1(x, y)$ ,  $\tilde{u}_2(x, y)$

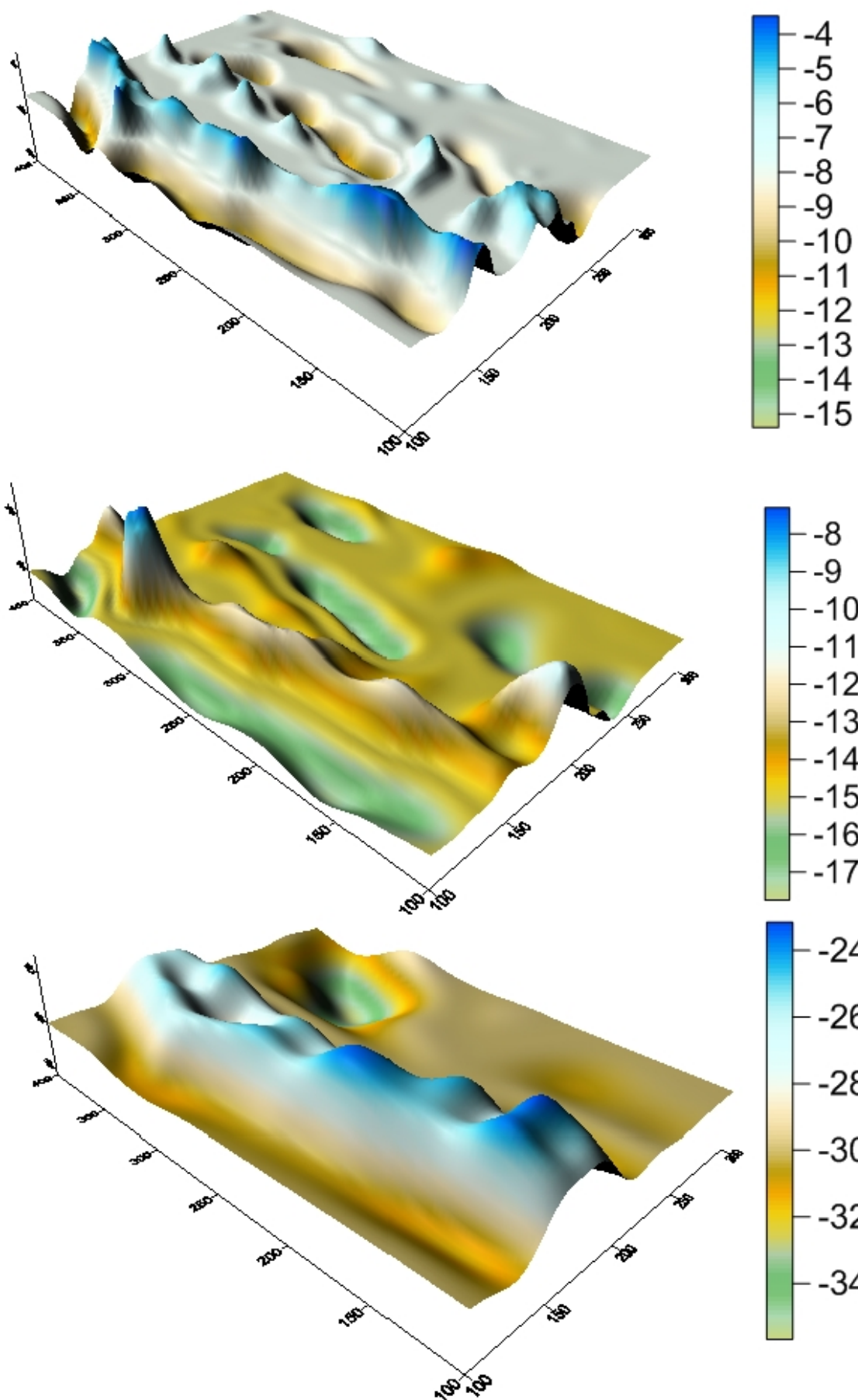


Рис. 3.19. Границы, восстановленные ПЛМ для данных с шумом  $\hat{u}_0(x, y)$ ,  $\hat{u}_1(x, y)$ ,  $\hat{u}_2(x, y)$

Таблица 3.5. Относительные ошибки и время вычислений задачи без шума

Метод	$N$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	Сетка $10^2 \times 10^2$			Сетка $10^3 \times 10^3$		
					$T_1$	$T_8$	$T_n$	$T_1$	$T_8$	$T_n$
ЛМ	60	0.052	0.026	0.051	4 м.	1 м.	22 с.	11 ч.	1 ч.	35 м.
					6 с.	15 с.		40 м.	25 м.	
ПЛМ	20	0.051	0.035	0.060	33 с.	16 с.	3 с.	1 ч. 12 м.	10 м.	3 м.

В таблице 3.5 представлены времена счета задачи гравиметрии в многослойной среде с тремя границами раздела с шумом и без шума методами ЛМ и ПЛМ на сетках размерности  $100 \times 100$  и  $10^3 \times 10^3$ . Весовые множители получены из поля после предварительной обработки по формуле из [AkMarMis2013] с параметрами  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1.1$ . Для обоих методов использовались параметр регуляризации  $\alpha = 10^{-3}$  и демпфирующий множитель  $\gamma = 1$ . Критерий останова итераций  $\epsilon < 0.1$ . Относительные погрешности  $\delta_i = \|u_a - u_e\|/\|u_e\|$  для равнения точного  $u_e$  и численного решения  $u_a$  для каждой  $i$ -й границы раздела (для данных без шума). В последних колонках:  $T_1$  время счета программы, запущенной на одном ядре Intel Xeon,  $T_8$  время на восьми ядрах процессора Intel Xeon,  $T_n$  время счета на ядрах графического ускорителя NVIDIA Tesla GPU для сеток  $100 \times 100$  и  $10^3 \times 10^3$ . Как можно видеть, показатели ускорения и эффективности близки к максимальным.

Результаты моделирования приведены в таблице 3.6, параметр шага  $\gamma = 1$ , параметры регуляризации  $\alpha = 0.1$ ,  $\bar{\alpha} = 1$ , критерий останова  $\Delta = \|A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta\|/\|f_\delta\| < 0.15$ .



Таблица 3.6. Относительные ошибки для задачи с шумом

Метод	$N$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$
ЛМ	24	0.048	0.035	0.059
ПЛМ	8	0.048	0.040	0.068

**Вывод.** ПЛМ является более экономичным, по сравнению с классическим методом ЛМ. Программа, реализующая алгоритм ПЛМ, произвела вычисления примерно в десять раз быстрее, чем программа ЛМ. На рис. 3.16, 3.17 можно заметить, что с увеличением глубины поверхности становятся менее рельефными, по сравнению с точными границами. Это связано с особенностями формирования гравитационного поля: искривления поверхностей, расположенных далеко от поверхности Земли, оказывают меньшее влияние на изменения суммарного гравитационного поля. Использование покомпонентного метода типа Левенберга – Марквардта позволяет избежать некоторых трудностей, возникающих при применении классического метода Левенберга – Марквардта: обращение плохо обусловленных матриц, высокая вычислительная сложность и большие затраты памяти. Результаты численного моделирования показывают, что относительная норма невязки ПЛМ сходится к  $\Delta$  за меньшее число итераций, чем классический регуляризованный метод ЛМ. Это можно связать с тем, что в задаче гравиметрии матрица производной оператора  $A'(u^k)$  плохо обусловлена, что влечет значительное увеличение числа обусловленности матрицы  $A'(u^k)^T * A'(u^k)$ , используемой в методе Левенберга – Марквардта. Оба метода показали высокую устойчивость к гауссовскому шуму. Для сеток большой размерности, когда данные не могут храниться в памяти целиком, целесообразно использование техники вычислений «на лету».

### 3.5. Описание комплекса параллельных программ

Для решения обратных структурных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении раздела сред был разработан комплекс программ, позволяющий выполнять расчеты на основе входных данных гравитационного или магнитного поля и результатом работы программ является файл, описывающий границы раздела сред в трехмерном пространстве.

Комплекс представляет собой библиотеку с подпрограммами *MyGeoLib* для специальных вычислений и набор программ для решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии. В настоящее время можно решать следующие задачи:

1. структурная обратная задача гравиметрии о нахождении поверхности раздела для модели двухслойной среды;
2. структурная обратная задача магнитометрии о нахождении поверхности раздела для модели двухслойной среды;
3. структурная обратная задача гравиметрии о нахождении поверхности раздела для модели многослойной среды.

Для решения задачи из п.1. можно использовать программы:

- регуляризованный метод Ньютона и модифицированный вариант (многоядерные процессоры, видеокарта);
- метод минимальной ошибки и модифицированный вариант (многоядерные процессоры);
- метод наискорейшего спуска и модифицированный вариант (многоядерные процессоры);
- метод минимальных невязок и модифицированный вариант (многоядерные процессоры);



- метод Ньютона с ленточной матрицей (многоядерные процессоры);
- покомпонентный метод Ньютона (многоядерные процессоры, видеокарта);
- покомпонентный метод Левенберга – Марквардта (многоядерные процессоры, видеокарта).

Для решения задачи из п.2. можно использовать программы:

- регуляризованный метод Ньютона и модифицированный вариант (многоядерные процессоры, видеокарта);
- метод минимальной ошибки и модифицированный вариант (многоядерные процессоры);
- метод наискорейшего спуска и модифицированный вариант (многоядерные процессоры);
- метод минимальных невязок и модифицированный вариант (многоядерные процессоры);
- метод Ньютона с ленточной матрицей (многоядерные процессоры).

Для решения задачи из п.3. можно использовать программу:

- покомпонентный метод Левенберга – Марквардта (многоядерные процессоры, видеокарта).

Создана специальная библиотека методов, которая позволила ускорить разработку и сделать ее более гибкой. Библиотека состоит из 3-х частей: общие процедуры (считывание геофизических данных из файла, печать данных в файл, и т.д.), математические процедуры (умножение матриц на вектор, вычисление норм векторов и т.д.), процедуры для задач гравиметрии и магнитометрии (вычисление интегрального оператора, производной оператора и т.д.).

В основе разработки структуры библиотеки лежит процедурный подход. Это связано с тем, что данные представляют собой стандартные конструкции — массивы, это обусловлено удобством написания параллельного кода.

В качестве языка программирования использовался язык C, для написания параллельного кода использовались библиотеки IntelMKL, OpenMP, CUDA и CUBLAS.

Комплекс программ размещен на суперкомпьютере «Уран», запуск задач осуществляется с помощью команд системы SLURM. Каждая программа располагается в отдельной папке (рис. 3.20). В папках библиотеки *MyGeoLib* *Gravy* и *Magne* содержатся файлы исходного кода с описаниями процедур вычисления оператора задач гравиметрии и магнитометрии, производных оператора, вычисления весовых множителей и т.д. В папке *Math* находятся файлы с описанием математических подпрограмм, в папке *Common* содержатся файлы исходного кода с описаниями процедур общего вида, например, чтение-запись в файл. Все процедуры библиотеки реализованы в двух вариантах: OpenMP и CUDA.

Для запуска программы следует перейти в папку нужной программы, где папки *omp* и *cuda* содержат версии программ для многоядерного процессора и видеокарты соответственно, и запустить исполняемый файл *prog*. Пример запуска программы, использующей 8 ядер процессора, с выделением памяти 48000 Мб, на узле tesla4, ограничение по времени исполнения 20 минут:

```
srun -cpus-per-task=8 -mem=48000 -w tesla4 -t 20 prog.
```

Пример запуска программы на видеокарте:

```
srun -gres=gpu:1 ./prog
```

Выходными данными программ являются файлы с расширением .DAT, содержащие XYZ-описание двумерных сеточных функций. Интерпретация результатов может быть осуществлена с помощью картографического пакета Golden Software Surfer.

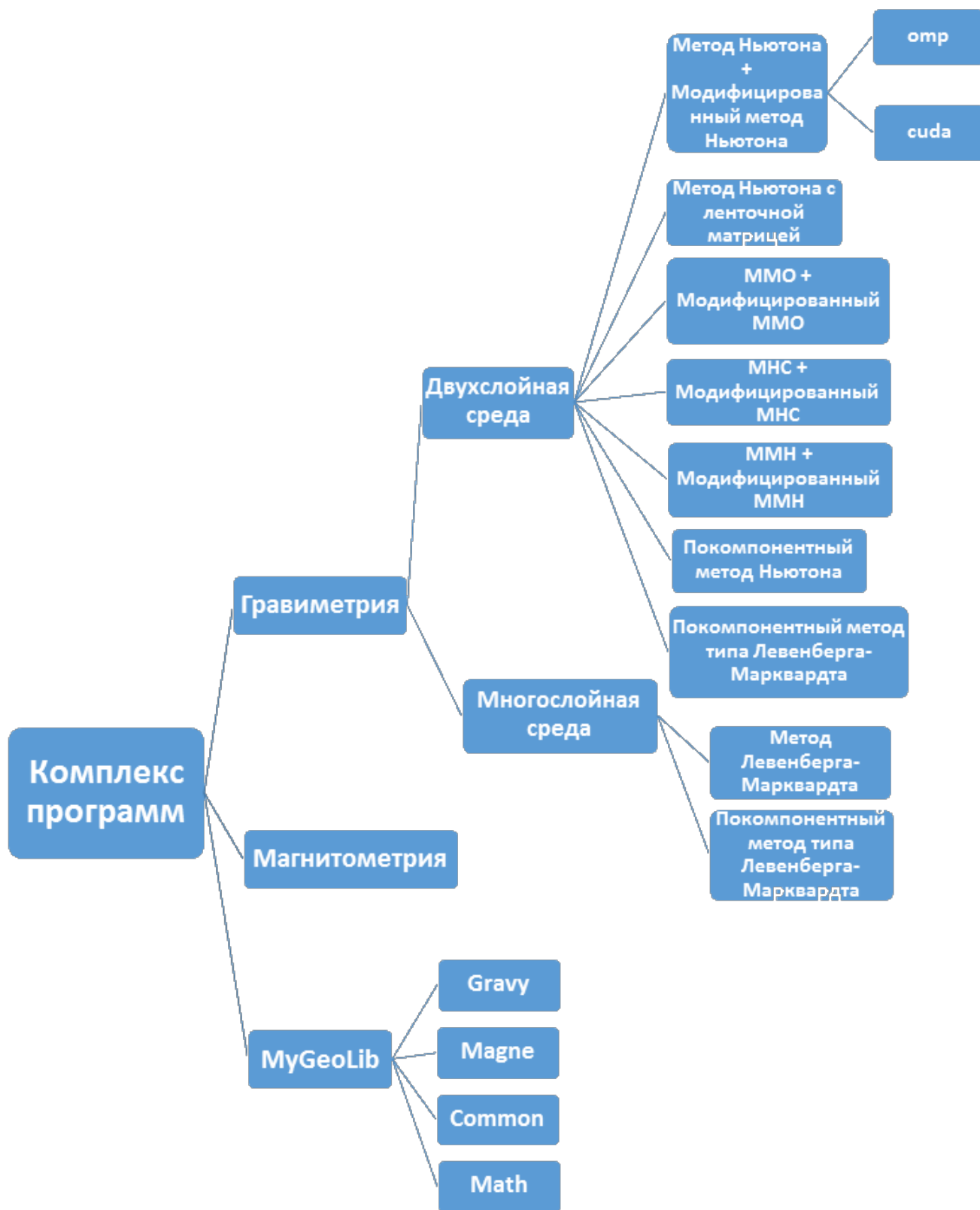


Рис. 3.20. Структура комплекса

# Заключение

Приведены основные результаты диссертационной работы.

1. Для нелинейного уравнения с монотонным оператором дано обоснование двухэтапного метода на основе регуляризованного метода Ньютона. Построены регуляризованные градиентные методы для решения нелинейного уравнения с монотонным оператором: метод минимальной ошибки, метод наискорейшего спуска, метод минимальных невязок. Доказаны теоремы сходимости и сильная фейеровость итерационных процессов при аппроксимации регуляризованного решения. Для задачи с немонотонным оператором и неотрицательным спектром его производной обоснована сходимость метода Ньютона и нелинейных  $\alpha$ -процессов к регуляризованному решению.

2. Для решения нелинейных интегральных уравнений обратных задач гравиметрии предложены экономичные покомпонентные методы типа Ньютона и типа Левенберга – Марквардта. Предложена вычислительная оптимизация метода Ньютона для задач, где матрица производной имеет диагональное преобладание.

3. Разработан комплекс параллельных программ для многоядерных и графических процессоров (видеокарт) решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на сетках большой размерности методами ньютоновского типа и покомпонентными методами.

В дальнейшей научной работе автора предполагается исследование на сходимость покомпонентных методов типа Ньютона и Левенберга – Марквардта.