Учреждение Российской академии наук
«Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения РАН»

На правах рукописи

Чистяков Павел Александрович

МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОЙ И ИТЕРАЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.07 — вычислительная математика

Научный руководитель :
Васин Владимир Васильевич,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН, профессор

ЕКАТЕРИНБУРГ — 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения и соглашения

$\mathbb{N}$	—	множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{R}$	—	множество всех вещественных чисел;
$\mathbb{R}^+$	—	множество всех неотрицательных вещественных чисел;
$\mathbb{R}^n$	—	евклидово пространство n-мерных векторов $u=(u_1, ..., u_n)$;
X^*	—	сопряженное банахово пространство к линейному нормированному пространству X;
l_p	—	банахово пространство последовательностей с нормой $\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n, \ldots)\| = \Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p \Big)^{1/p},\ 1 < p < +\infty;$
$C[a, b]$	—	банахово пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с чебышевской нормой;
$L_1[a, b]$	—	банахово пространство интегрируемых по Лебегу функций;
$L_p[a, b]$	—	банахово пространство интегрируемых в p-ой степени по Лебегу функций с нормой $\|u\|^p_{L_p} = \int_a^b \|u(t)\|^p dt,\ 1 \leqslant p < \infty;$
$L_\infty[a, b]$	—	банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|u\|_\infty = \mathrm{vraimax}\ \|\, u \,\| = \inf\limits_{E \subset [a,b]} \Big\{ \sup\limits_{[a,b] \setminus E} \|u(x)\| \ :\ m(E) = 0 \Big\}$;
$W_p^n[a, b]$	—	пространство Соболева порядка n с обощенными производными суммируемыми с p-ой степенью на $[a, b]$;
$\langle x, f \rangle$	—	значение функционала f на элементе x; скалярное произведение в гильбертовом пространстве;
$\mathcal{L}(X, Y)$	—	пространство всех линейных ограниченных операторов, определенных на X со значениями в Y;
$\ker A$	—	ядро линейного оператора A;
$\mathcal{R}(A)$	—	область значений линейного оператора A;
$x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$	—	слабая сходимость x_n к x;
$\underline{\lim}\limits_{n \to +\infty} x_n$	—	нижний (наименьший частичный) предел последовательности $\{x_n\}$;

$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}$	—	верхний (наибольший частичный) предел последовательности $\{x_n\}$;
$X_n \overset{p_n}{\sim} X$	—	пространства X_n образуют дискретную аппроксимацию пространства X со связывающими операторами $\{p_n\}$;
$x_n \xrightarrow{d} x$	—	дискретная сходимость элементов x_n к x;
$x_n \xrightarrow{dw} x$	—	дискретная слабая сходимость элементов x_n к x;
$A_n \dashrightarrow A$	—	дискретная сходимость операторов A_n к A;
$A_n \overset{w}{\dashrightarrow} A$	—	дискретная слабая сходимость операторов A_n к A;
$Q_n \overset{M}{\dashrightarrow} Q$	—	Моско-сходимость множеств Q_n к Q;
$\partial f(x)$	—	субдифференциал функции f в точке x;
J_X	—	дуальное отображение пространства X;
J_φ	—	дуальное отображение с функцией роста φ;
J_p	—	дуальное отображение степени p ;
J_{*q}	—	дуальное отображение в сопряженном к исходному пространстве степени q;
$a \vee b$	—	максимум из вещественных чисел a и b;
$a \wedge b$	—	минимум из вещественных чисел a и b;
δ_X	—	модуль выпуклости пространства X;
ρ_X	—	модуль гладкости пространства X;
$\Delta_f(x_1, x_2)$	—	дистанция Брэгмана от x_1 до x_2 по функционалу f;
$\Delta_p(x_1, x_2)$	—	дистанция Брэгмана от x_1 до x_2 по функционалу $f_p(x) = (1/p)\|x\|^p$;
$\Pi_C^f(x)$	—	проекция Брэгмана элемента x на множество C по функционалу f;
$\Pi_C^p(x)$	—	проекция Брэгмана по функционалу $f_p(x) = (1/p)\|x\|^p$;

Введение

Понятие корректности задачи математической физики было введено Ж.Адамаром [2] в начале прошлого столетия. Им было высказано мнение о том, что корректная постановка является непременным условием, которому должна удовлетворять всякая математическая модель, соответствующая физической реальности. Эта точка зрения не подвергалась сомнению в течение многих лет. Корректные модели хороши тем, что классическая вычислительная математика позволяет решать задачи традиционными методами. При этом зачастую удается ответить на вопрос о сходимости предложенного алгоритма и оценке возникающей здесь погрешности. Конечно, появляются дополнительные трудности реализации алгоритма на компьютере, учете погрешностей округления, представления данных и результатов вычислений и т.д. Но эти проблемы обычно успешно решаются, особенно если учесть, что технические возможности современных компьютеров расширяются очень быстро. Однако часто имеющаяся у исследователя информация позволяет построить лишь такую математическую модель, для которой нет теорем существования решения в естественных функциональных пространствах и, самое главное, нет устойчивости решения по входным данным задачи. Для такой модели нельзя получить регулярные вычислительные алгоритмы с помощью традиционных методов.

В 1943 году появилась работа А.Н.Тихонова [52], в которой впервые была указана практическая важность неустойчивых по входным данным (некорректно поставленных) задач и принципиальная возможность их успешного решения в условиях принадлежности точного решения компактному множеству. В середине 50-х годов и, особенно интенсивно, в начале 60-х годов прошлого столетия началось систематическое изучение некорректных задач. Образовалось новое направление, лежащее на стыке функционального анализа и вычислительной математики, которое затем оформилось в самостоятельную область науки. Основопологающие подходы для теории некорректных задач связаны с именами А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева, В.К.Иванова.

Несмотря на оптимизм, связанный с открытием достаточно универсальных подходов в науке к регуляризации некорректных задач, встал вопрос о регуляризуемости: каждая ли некорректная задача может быть регуляризована некоторым методом? Как оказалось, существуют принципиально нерегуляризуемые задачи. Как правило, нерегуляризуемость задачи вызвана свойством нерефлексивности исходного пространства, в котором ищется решение задачи. Подробно вопросы регуляризуемости исследованы в работах Ю.И. Петунина и А.Н. Пличко [49], а также Л.Д. Менихеса [43–45].

Начиная с 60-х годов прошлого столетия теория некорректных задач в банаховых и даже топологических пространствах развивается параллельно с исследованиями в гильбертовых пространствах (здесь стоит упомянуть также работы В.А. Морозова [46–48]), хотя и не имеет, естественно, к настоящему времени такой степени завершенности, как в гильбертовых. Уже в первых работах В.К. Иванова и его учеников (см. [29,15] и др.) вариационные методы (методы квазирешений, невязки и Тихонова) рассматривались в нормированных E—пространствах и более общих пространствах Ефимова–Стечкина, которые по геометрическим свойствам близки к гильбертовым. Для линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода исследование метода Тихонова в пространстве $C[a, b]$ было выполнено В.К. Ивановым; им же были построены аналоги некоторых вариационных методов в топологических пространствах [25, 26, 27, 28]. В дальнейшем равномерной сходимостью регуляризованных решений для интегральных уравнений занималась Г.В. Хромова [59].

Абстрактные некорректно поставленные задачи Коши и Дирихле в банаховых пространствах и пространствах обобщенных функций были предметом исследования многих математиков (А.Б. Бакушинский [3], В.К. Иванов, И.В. Мельникова [30]). Общий подход к построению регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах предложил А.Б. Бакушинский [4].

Плодотворным оказалось привлечение пространства функций ограниченной вариации. Использование нормы этого пространства в качестве стабилизатора позволяет получить кусочно-равномерную сходимость приближенных решений при аппроксимации разрывных функций: А.Л. Агеев [1], И.Ф. Дорофеев [22], А.В. Гончарский и В.В. Степанов [18], А.С. Леонов [40], В.В. Васин [16], R. Acar & C.R. Vogel [63].

В работах В.В. Васина и его учеников [17, 90, 35, 36] для вариационных методов регуляризации предложены семейства недифференцируемых стабилизаторов на основе норм пространства Липшица, которые оказались удобным аппаратом при восстановлении как непрерывных, так и разрывных решений некорректных задач.

Большой цикл исследований для операторных уравнений и вариационных неравенств в банаховых пространствах с операторами монотонного типа, посвященный методам регуляризации и итерационным процессам был выполнен в работах Я.И. Альбера и И.П. Рязанцевой (их результаты подытожены в монографиях [66, 51]). Эти исследования в основном были направлены на получение наиболее общих (с точки зрения условий на операторы и пространства) теорем существования и сходимости приближенных решений.

В последнее десятилетие в области некорректно поставленных задач появились публикации, посвященные прикладным задачам, в которых привлекаются нормированные (негильбертовы) пространства, что позволяет более адекватно описать постановку задачи и получить более качественное решение [84, 86, 87, 85 и др.]. В частности, весьма востребованными оказались пространства Лебега и Соболева (l_p, L_p, W_p^n).

Обобщение ставших классическими методов регуляризации привело к появлению регуляризирующих функционалов общего вида, обладающих лишь свойствами выпуклости и слабой полунепрерывности снизу [84]. Попутно в качестве математического аппарата для обоснования сходимости методов в современных исследованиях, получения оценок для скорости сходимости и погрешностей естественным образом появилась и активно используется соответствующая регуляризующему функционалу дистанция Брэгмана. Тем самым, относительно давняя работа [8] получила второе рождение. Примечательно, что дистанция Брэгмана не является даже метрикой, из всех свойств метрики она обладает только свойством неотрицательности, и тем не менее, этого оказывается достаточным для обоснования сходимости многих методов решения обратных и некорректных задач.

Исследованиям скорости сходимости метода Тихонова для нелинейных задач в банаховых пространствах посвящены статьи T. Hein [76] и A. Neubauer [83]. Еще один нетривиальный способ обобщения квадратичной тихоновской оптимизации, использующий интерполяцию банаховых пространств, предложен в работе F.B. Belgacem [67].

Альтернативой вариационным методам регуляризации Тихонова, Иванова являются итерационные методы типа Ландвебера [79], простой итерации, наискорейшего спуска, сопряженных градиентов и др. В последние несколько лет появились исследования, обобщающие такие итерационные процессы на случай банаховых пространств. Здесь прежде всего стоит отметить работы F. Schöpfer,

T. Schuster, A.K. Louis и B. Kaltenbacher [85, 86, 87, 77], а также K.S. Kazimierski [78], в которых рассматриваются методы решения линейных операторных уравнений с непрерывным оператором. Интересный подход к построению схожих итерационных методов только уже для монотонных (максимально монотонных, равномерно монотонных), причем многозначных операторов, предложен в монографиях Я.И. Альбера и И.П. Рязанцевой [66, 51]. Характерной особенностью всех этих методов является то, что итерирование производится в сопряженном пространстве к основному банахову пространству. Переход между основным и сопряженным пространством осуществляется с помощью дуальных отображений. Очень подробно дуальные отображения и геометрические свойства банаховых пространств изложены в монографии I. Cioranescu [70]. Одношаговый метод, обобщающий метод Ландвебера, наследует медленную, как правило, скорость сходимости к точному решению. Поэтому для ускорения сходимости рассматриваются многошаговые итерационные методы. Такие методы требуют для своего обоснования еще более тонкой математической техники, основанной на проекциях Брэгмана, которые определяются аналогично метрическим проекциям для дистанции Брэгмана.

В данной диссертационной работе изучаются линейные некорректные задачи — операторные уравнения первого рода с B-симметричным и B-положительным оператором — в банаховых пространствах и методы их решения путем регуляризации. Операторы, удовлетворяющие условиям B-симметричности и B-положительности или схожим к ним, изучались ранее в той или иной трактовке в работах К.О. Фридрихса [72, 73], М.Ш. Бирмана [7], В.М. Шалова [61, 62], Л.А. Калякина [33] и других авторов. В целом такой подход позволяет обобщить традиционый метод (когда в качестве оператора B используется сам исходный оператор задачи) построения эквивалентной задачи в самосопряженной и положительно полуопределенной форме, которая обладает рядом замечательных свойств, открывающих дорогу к хорошо исследованным методам решения. Преимуществом рассмотрения вспомогательного оператора B, кроме присущей естественной теоретической значимости, может быть то, что для некоторых операторов сложной структуры удастся подобрать оператор B более простого вида, что упростит вычисления и анализ алгоритмов решения. Несмотря на то, что имеются отдельные примеры построения таких нетривиальных (т.е. отличных от исходного и от нулевого) операторов, которые будут приведены ниже в данной диссертации, в общем случае вопрос о возможности детерминированным способом построить оператор B остается открытым.

Диссертационная работа содержит список обозначений, введение, три главы и список литературы. В работе принята тройная нумерация формул, определений и утверждений: первая цифра обозначает номер главы, вторая — номер параграфа, третья — номер объекта в данном параграфе.

Перейдем к краткому описанию содержания диссертации по главам.

В первой главе исследуется линейное операторное уравнение I рода $Ax = y$ для B-симметричного и B-положительного оператора A с возможными ограничениями на множество решений в виде выпуклого и замкнутого множества Q. Разумеется, общий случай без ограничений охватывается здесь при $Q = X$. Наличие по крайней мере одного классического решения уравнения априори предполагается, ситуация, когда ищется псевдорешение в отсутствие классических решений, наоборот не рассматривается, хотя и представляет интерес. Оператор A предполагается действующим из равномерно выпуклого банахова пространства X в произвольное банахово пространство Y. Начало главы посвящено подробному определению понятий B-симметричности и B-положительности, а также описанию операторов, обладающих этими свойствами. Так вводятся три градации для понятия B-положительности: минимальная — B-неотрицательность, B-положительность в нестрогом смысле и строгая B-положительность. Если Y — гильбертово пространство, то при $B = A$ понятия B-положительности и B-неотрицательности совпадают, и каждый оператор A является A-симметричным и A-положительным. Показано, что именно свойство B-положительности является необходимым и достаточным условием для B-симметричного и B-неотрицательного оператора, чтобы исходное уравнение $Ax = y$ и симметризованное $B^*Ax = B^*y$ были эквивалентны. Кроме того, приводится необходимое и достаточное условие на операторы A и B, чтобы B-симметричный и B-неотрицательный оператор стал B-положительным. Рассмотрена ситуация, когда уравнение задано с известной верхней оценкой уровня погрешности данных: вместо точных A, B и y известны приближенные A_h, B_h и y_δ, такие что

$$\|A_h - A\| \leqslant C_1 h, \quad \|B_h - B\| \leqslant C_2 h, \|y_\delta - y\| \leqslant \delta.$$

Исходное уравнение с выпуклыми замкнутыми ограничениями $x \in Q$ (в предположении существования решения из множества Q) сводится к эквивалентной вариационной задаче

$$\min_{x\in Q}\{\langle Ax, Bx\rangle - 2\langle y, Bx\rangle\},$$

для которой метод регуляризации строится по аналогии с методом А.Н. Тихонова за счет добавления в аппроксимирующий функционал стабилизатора в виде квадрата нормы:

$$\min_{x\in Q}\{\langle A_h x, B_h x\rangle - 2\langle y_\delta, B_h x\rangle + \alpha\|x - x^0\|^2\}.$$

Доказывается, что при выборе параметра регуляризации α в зависимости от уровней погрешности h и δ таким образом, чтобы

$$\alpha(\delta, h) \longrightarrow 0, \quad \frac{\delta + h}{\alpha(\delta, h)} \longrightarrow 0, \text{при } (\delta, h) \to (0, 0),$$

решения вариационной задачи $x(\delta, h)$ образуют регуляризованное семейство решений исходного операторного уравнения. При этом сама вариационная задача эквивалентна при $Q = X$ операторному уравнению

$$B_h^* A_h x + \alpha J(x - x^0) = B_h^* y_\delta,$$

что позволяет также провести аналогию с методом М.М. Лаврентьева. Также с помощью математического аппарата, развитого в работах [9, 88, 14, 15], проведена дискретная аппроксимация представленного метода регуляризации. Рассмотрены дискретные слабые и дискретные сильные сходимости операторов и элементов, а также дискретная в смысле Моско сходимость множеств. Доказано, что при дискретной слабой аппроксимации оператора B_h, дискретной сильной аппроксимации оператора A_h и дискретной аппроксимации остальных элементов, определяющих регуляризованную вариационную задачу, минимальные значения приближающего дискретного функционала сходятся к минимальному значению аппроксимируемого функционала, а соответствующие решения дискретно сходятся к решению регуляризованной вариационной задачи.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию итерационного метода решения линейных операторных уравнений с B-симметричным и B-положительным оператором, действующим из равномерно выпуклого гладкого банахова пространства в банахово пространство. Метод является модификацией итерационного алгоритма, предложенного в работе F. Schöpfer, T. Schuster и

A.K. Louis [85], где авторы предложили следующий подход к решению операторного уравнения с линейным непрерывным оператором, обобщающий широко известный метод Ландвебера [79]:

$$J_p(x_{n+1}) = J_p(x_n) - \mu_n A^* J_Y(Ax_n - y), \quad x_{n+1} = J_{*q}(J_p(x_{n+1})),$$

где J_p и J_{*q} — взаимно обратные дуальные отображения пространств X и X^* (подробнее про дуальные отображения см. с. 51). Предлагаемый в данной диссертационной работе итерационный метод для линейного уравнения с B-симметричным и B-положительным оператором имеет вид

$$J_p(x_{n+1}) = J_p(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y), \quad x_{n+1} = J_{*q}(J_p(x_{n+1})).$$

В общем случае о существовании для заданного оператора A соответствующего оператора B на данный момент ничего не известно, поэтому область применимости этого алгоритма уже, чем соответствующего из [85]. Однако в отдельном частном случае, когда Y — гильбертово пространство, в качестве оператора B можно выбирать по меньшей мере любой оператор из семейства $\{\gamma A\}, \gamma > 0$. С другой стороны, сложности, связанные с построением оператора B, отчасти компенсируются тем, что такой алгоритм не требует вычисления в общем случае многозначного отображения J_Y, что, во-первых, уменьшает количество вычислительных операций, во-вторых, освобождает от проблемы выбора ветви многозначного отображения. Доказана теорема о сильной сходимости итерационного алгоритма при правильном выборе начального приближения x_0 (при этом всегда допустимо выбрать $x_0 = 0$) и параметров шага μ_n. Проведен анализ на асимптотическую устойчивость метода при возмущениях в правой и левой частях уравнения: в условиях, когда заданы асимптотически сходящиеся приближения

$$A_l \to A, B_l \to B \text{ при } l \to +\infty; \quad y_k \to y \text{ при } k \to +\infty,$$

доказана сильная сходимость метода

$$J_p(x_{n+1}) = J_p(x_n) - \mu_n B^*_{l_n}(A_{l_n} x_n - y_{k_n}), \quad x_{n+1} = J_{*q}(J_p(x_{n+1})),$$

где $\{l_n\}$ и $\{k_n\}$ — специальным образом выбранные подпоследовательности индексов, т.е. для обеспечения сходимости требуется прореживать последовательности операторов $\{A_l\}$, $\{B_l\}$ и правых частей y_k. Сходимость итерационных методов обосновывается — что более удобно — в терминах дистанции Брэгмана [8]; это эквивалентно сходимости по норме пространства, однако, дистанция Брэгмана не является даже метрикой: из трех аксиом метрики выполнена только первая, про неотрицательность дистанции. Ключевую роль в доказательстве сходимости методов играет фундаментальное характеристическое неравенство (см. с. 52) для равномерно гладкого банахова пространства Z.–B. Xu и G.F. Roach [91], которое оказывается эквивалентным условию равномерной гладкости. Это неравенство обобщает классическое тождество гильбертова пространства

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 - 2\langle x_1, x_2\rangle + \|x_2\|^2.$$

В третьей главе диссертации как логическое продолжение рассматривается многошаговый итерационный метод для линейного операторного уравнения с B-симметричным и B-положительным оператором, действующим из p-выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства в банахово пространство. Рассмотрение аналогичного многошагового метода в общем случае линейного непрерывного оператора в работе F. Schöpfer и T. Schuster [87] позволило заметно ускорить сходимость итераций к точному решению уравнения. Многошаговые итерационные методы как способ ускорения сходимости классических (одношаговых) алгоритмов рассматриваются и в книге Б.Т. Поляка [50, гл. 3, п. 2]. Предлагаемый здесь метод имеет вид

$$J_p(x_{n+1}) = J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} \mu_{n,i} B^* A \xi_{n,i}, \quad x_{n+1} = J_{*q}(J_p(x_{n+1})),$$

где $\{B^* A \xi_{n,i}\} \subseteq \mathcal{R}(B^* A)$, $i = 1, \ldots, N_n$ — конечный набор направлений поиска, который обязательно должен включать в себя по наследству от одношагового метода направление $B^* A(x_n - \hat{x}) = B^*(Ax_n - y)$. При этом вектор параметров шагов $\mu_n = (\mu_{n,1}, \ldots, \mu_{n,N_n})$ определяется как вектор, минимизирующий выпуклую непрерывно-дифференцируемую функцию

$$h_n(t) = h_n(t_1, \ldots, t_{N_n}) = \frac{1}{q}\Big\| J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} t_i B^* A \xi_{n,i} \Big\|^q + \sum_{i=1}^{N_n} t_i \langle B\xi_{n,i}, y\rangle.$$

В данной главе помимо введенного ранее аппарата дистанции Брэгмана используется также по аналогии с метрической проекцией проекция Брэгмана, которая более подробно исследовалась ранее в работах [64, 65, 86]. При помощи нее рассматриваемый многошаговый итерационный метод представляется в эквивалентной форме: следующая итерация является брэгмановской проекцией предыдущей итерации на множество, представимое в виде пересечения конечного числа гиперплоскостей. Основной теоретический результат данной главы диссертации устанавливает, что:

а) все слабо предельные точки построенной итерационной последовательности $\{x_n\}$ являются решениями основного уравнения $Ax = y$;

б) если дуальное отображение J_p таково, что переводит каждую слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся последовательность (как, например, в пространстве ℓ_p при $1 < p < +\infty$; при наших общих же условиях на пространство X отображение J_p переводит гарантированно лишь сильно сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся), то вся последовательность итераций $\{x_n\}$ слабо сходится к $x^\dagger$ — решению уравнения, являющемуся брэгмановской проекцией начального приближения x_0 на множество всех решений уравнения $Ax = y$;

в) если для некоторого фиксированного $n_0 \in \mathbb{N}$ и бесконечного числа индексов $n \geqslant n_0$ вектор $J_p(x_n) - J_p(x_{n_0})$ включается в пространство направлений поиска, то вся последовательность итераций $\{x_n\}$ сильно сходится к $x^\dagger$ по норме пространства X.

Основные результаты диссертационной работы являются новыми и состоят в следующем: для линейного операторного уравнения I рода с B-симметричным и B-положительным оператором в случае, когда оператор действует из:

- равномерно выпуклого банахова пространства в банахово пространство, с возможными выпуклыми и замкнутыми ограничениями, обоснован вариационный метод регуляризации со стабилизатором в виде степени нормы пространства, и с помощью аппарата дискретного функционального анализа установлена дискретная сходимость дискретных аппроксимаций приближенного регуляризованного решения;

- равномерно выпуклого и гладкого банахова пространства в банахово пространство, доказана сходимость итерационного метода типа Ландвебера при точных и асимптотически возмущенных данных, обоснован алгоритм выбора числа итераций по невязке в случае приближенных данных с известным уровнем погрешности, приведено описание модельного численного эксперимента;

- p-выпуклого и гладкого банахова пространства в банахово пространство, исследована возможность ускорения сходимости рассмотренного выше итерационного метода за счет введения дополнительных направлений поиска, а именно доказана сходимость многошагового итерационного метода к решению уравнения.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подкрепляется строгими математическими доказательствами и согласованностью полученных теоретических выводов с расчетами при помощи компьютерного моделирования.

Диссертационная работа имеет теоретическую и практическую значимость. В работе построены и обоснованы новые регулярные методы решения некорректно поставленных задач. Практическая значимость работы обусловлена тем, что изложенные в ней методы и алгоритмы могут быть использованы при решении прикладных задач.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на:
5-й Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач"(Екатеринбург, 1–6 сентября 2008 года);
40-й Всероссийской молодежной школе-конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики"(Екатеринбург, 26–30 января 2009 года);
I Молодежной международной научной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"(Новосибирск, 10–20 августа 2009 года);
41-й Всероссийской молодежной школе-конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики"(Екатеринбург, 1–5 февраля 2010 года);
II Молодежной международной научной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"(Новосибирск, 21–29 сентября 2010 года);
42-й Всероссийской молодежной школе-конференции "Современные проблемы математики"(Екатеринбург, 30 января – 6 февраля 2011 года);
6-й Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач"(Екатеринбург, 31 октября – 5 ноября 2011 года);
Международной (43-й всероссийской) молодежной школе-конференции "Совре-

менные проблемы математики"(Екатеринбург, 29 января – 5 февраля 2012 года).

Основные результаты диссертации опубликованы помимо тезисов указанных выше конференций в трех работах в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Чистяков П.А. Регуляризация операторных уравнений с B-симметричным и B-положительным оператором в банаховых пространствах // Изв. вузов. Математика. 2009. № 10. С. 81–87.

2. Чистяков П.А. Итерационные методы решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 303–318.

3. Чистяков П.А. Многошаговый итерационный метод решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 318–328.

Автор считает своим самым приятным долгом выразить благодарность и глубокую признательность своему учителю и научному руководителю профессору В.В. Васину за идейное вдохновение, постоянное внимание к работе, полезные идеи, поддержку и участие. Автор также выражает благодарность коллективу отдела некорректных задач анализа и приложений ИММ УрО РАН и лично профессору А.Л. Агееву за постоянную помощь и поддержку. С теплотой и благодарностью за рецензирование опубликованных статей и полученные советы автор вспоминает В.С. Балаганского, безвременно ушедшего в этом году. Отдельных слов благодарности заслуживают сотрудницы научной билиотеки ИММ М.Ф. Матасова и В.И. Миронова за помощь в работе с литературой. Автор благодарен лично профессору А.И. Короткому и его сыну М.А. Короткому за помощь в оформлении диссертации. Со всей справедливостью теплых слов заслуживают alma mater — Уральский государственный университет им. А.М. Горького, ныне утративший свою самостоятельность и исторически известное имя, а также кафедра вычислительной математики, студентом и аспирантом которой на протяжении нескольких лет имел честь быть автор. Автор благодарит лично заведующего кафедрой вычислительной математики профессора В.Г. Пименова за внимание, добродушное отношение и поддержку, а также Э.В. Вдовину за постоянное внимание и доброжелательное отношение. Важную роль в освоении автором фундаментальных разделов науки, лежащих в основании современной теории обратных и некорректных задач, сыграла близкая по духу кафедра математического анализа, автор благодарит лично профессора В.В. Арестова за постоянное внимание, самые теплые и дружественные отношения и помощь, а также профессоров К.Н. Гурьянову, И.В. Мельникову и А.Р. Данилина. Отдельная благодарность — коллективу кафедры физического воспитания УрГУ, сотрудником которой автор был на протяжении трех лет обучения в аспирантуре, и лично заведующей кафедрой Л.Я. Швецовой и председателю спортклуба УрГУ О.Н. Сулеймановой за доверие, поддержку и хорошую спортивную подготовку. Автор признателен также университетскому лицею (СУНЦ) и лично его директору и заведующему кафедрой математики, своему школьному учителю В.В. Расину за открытие мира науки и математики, развитие интереса к фундаментальным скрупулезным исследованиям, а также за невероятный по своей открытости, свободе и независимости неповторимый лицейский дух.

Самые важные и теплые слова благодарности автор выражает своим родителям, семье за многолетнее терпение, любовь и поддержку. Автор признателен своей единственной и неповторимой жене Юлии за любовь, терпение и веру, которые более всего вдохновляли на достижение результата.

Глава 1. Регуляризация линейных операторных уравнений с B-симметричным и B-положительным оператором

В первой главе рассматривается метод регуляризации линейных операторных уравнений с выпуклыми замкнутыми ограничениями на множество допустимых решений. Первый параграф главы посвящен определению и некоторым свойствам B-симметричных и B-положительных операторов, проходящих сквозной нитью через всю диссертацию. Во втором параграфе представлен метод регуляризации в двух эквивалентных формах: регуляризация сдвигом для уравнения, эквивалентного исходному, и регуляризация в вариационной форме. Формулируется и доказывается теорема о сильной сходимости регуляризованных решений. Третий параграф содержит описание аппарата дискретного анализа, следуя известному подходу в работах [9, 88, 14, 15] а также построение частного случая схемы дискретной аппроксимации для приводимого здесь регуляризующего метода . На примере интегрального уравнения Фредгольма I рода в четвертом параграфе показывается содержательность теоретических построений. Приводятся результаты соответствующих численных экспериментов.

1.1. Постановка задачи

Рассматривается операторное уравнение

$$Ax = y, \quad x \in Q \subseteq X \tag{1.1.1}$$

с линейным ограниченным оператором $A : X \to Y$, где Q — выпуклое замкнутое множество ограничений. Всюду в главе 1 банахово пространство X предполагается равномерно выпуклым и гладким, Y — произвольное банахово пространство. Обратимость A или непрерывность обратного к A оператора не предполагаются, поэтому задача нахождения решения уравнения (1.1.1) относится к числу некорректно поставленных задач. Далее будем считать, что задача (1.1.1) разрешима. Также будем считать, что вместе с оператором A нам известен, или нам удалось эвристическим образом подобрать линейный ограниченный оператор $B : X \to Y^*$, чтобы оператор A стал B-симметричным и B-положительным; этот подход в различных вариациях можно проследить в работах К. Фридрихса, М.Ш. Бирмана, В.М. Шалова, Л.А. Калякина и других авторов, [7, 61, 62, 33] и ссылки в них. В данной диссертации применяется следующая терминология.

Определение 1.1.1. Оператор A называется

(a) B-симметричным, если при любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено равенство $\langle Ax_1, Bx_2 \rangle = \langle Ax_2, Bx_1 \rangle$;

(b) B-неотрицательным, если для каждого $x \in X$ выполнено $\langle Ax, Bx \rangle \geqslant 0$;

(c) B-положительным (не строго), если для каждого $x \in X$ выполнено $\langle Ax, Bx \rangle \geqslant 0$, причем $\langle Ax, Bx \rangle = 0$ в том и только в том случае, когда $Ax = 0$;

(d) строго B-положительным, если для каждого $x \in X$ выполнено $\langle Ax, Bx \rangle \geqslant 0$, причем $\langle Ax, Bx \rangle = 0$ в том и только в том случае, когда $x = 0$.

Отметим, что строгая B-положительность оператора A влечет за собой обратимость обоих операторов. Если Y — гильбертово пространство, то всякий линейный непрерывный оператор A является A-симметричным и A-положительным. В общем случае вопрос о построении по заданному оператору A нетривиального (т.е. отличного от нулевого) оператора B, для которого выполнены свойства (a) и (b) из определения, остается открытым. Тем не менее, легко заметить, что семейство всех таких операторов B, что A становится B-симметричным и B-неотрицательным (B-положительным), образует в пространстве $\mathcal{L}(X, Y^*)$ положительный конус.

Отметим полезные свойства, вытекающие из определения 1.1.1.

Лемма 1.1.1. *Пусть A — B-симметричный и B-неотрицательный оператор. Тогда для квадратичной формы $\langle Ax, Bx\rangle$ справедлива следующая оценка снизу*:

$$\langle Ax, Bx\rangle \geqslant \frac{\|B^*Ax\|^2}{\|B^*A\|} \geqslant \frac{\|B^*Ax\|^2}{\|B\|\|A\|}. \tag{1.1.2}$$

Доказательство. Рассмотрим значение квадратичной формы на элементе $(x + \alpha J_*(B^*Ax)) \in X$, где J_* — каноническое дуальное отображение пространства X^* (см. стр. 51). В силу B-неотрицательности при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\langle A(x + \alpha J_*(B^*Ax)), B(x + \alpha J_*(B^*Ax))\rangle \geqslant 0$. Проведем преобразования

$$\langle A(x + \alpha J_*(B^*Ax)), B(x + \alpha J_*(B^*Ax))\rangle$$

$$= \langle B^*A(x + \alpha J_*(B^*Ax)), x + \alpha J_*(B^*Ax)\rangle$$

$$= \langle B^*Ax, x\rangle + 2\alpha\langle B^*Ax, J_*(B^*Ax)\rangle + \alpha^2\langle B^*A(J_*(B^*Ax)), J_*(B^*Ax)\rangle$$

$$= \langle Ax, Bx\rangle + 2\alpha\|B^*Ax\|^2 + \alpha^2\langle B^*A(J_*(B^*Ax)), J_*(B^*Ax)\rangle \geqslant 0.$$

Получен квадратный трехчлен относительно α, принимающий только неотрицательные значения. Следовательно, его дискриминант не может быть положительным числом:

$$\|B^*Ax\|^4 - \langle Ax, Bx\rangle\langle B^*A(J_*(B^*Ax)), J_*(B^*Ax)\rangle \leqslant 0.$$

Проведя преобразования

$$\|B^*Ax\|^4 \leqslant \langle Ax, Bx\rangle\langle B^*A(J_*(B^*Ax)), J_*(B^*Ax)\rangle$$

$$\leqslant \langle Ax, Bx\rangle\|B^*A(J_*(B^*Ax))\|\|J_*(B^*Ax)\| \leqslant \langle Ax, Bx\rangle\|B^*A\|\|J_*(B^*Ax)\|^2$$

$$= \langle Ax, Bx\rangle\|B^*A\|\|B^*Ax\|^2$$

и сократив обе части неравенства на $\|B^*Ax\|^2$, получим требуемое. Лемма 1.1.1 доказана.

Лемма 1.1.2. *Пусть A — B-симметричный и B-положительный оператор, $y \in \mathcal{R}(A)$. Тогда*

$$Ax = y \Leftrightarrow B^*Ax = B^*y.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено равенство $B^*Ax = B^*y$ или эквивалентное ему $B^*(Ax-y) = 0$. Поскольку $y \in \mathcal{R}(A)$, то для некоторого $\tilde{x} \in X$ выполнено $Ax - y = A(x - \tilde{x})$. Из цепочки равенств $0 = \langle B^*(Ax - y), x - \tilde{x}\rangle = \langle A(x - \tilde{x}), B(x - \tilde{x})\rangle$ в силу B-положительности получим $Ax = y$. Лемма 1.1.2 доказана.

Для билинейной формы $\langle Ax_1, Bx_2\rangle$ справедливо также обобщенное неравенство Коши — Буняковского.

Лемма 1.1.3. *Пусть A — B-симметричный и B-неотрицательный оператор. Тогда имеет место так называемое обобщенное неравенство Коши — Буняковского*

$$| \langle Ax_1, Bx_2\rangle | \leqslant \sqrt{\langle Ax_1, Bx_1\rangle}\sqrt{\langle Ax_2, Bx_2\rangle}.$$

Доказательство обобщенного неравенства Коши — Буняковского проводится аналогично доказательству (1.1.2). Надо рассмотреть значение $\langle Ax, Bx\rangle$ при $x = x_1 + \alpha x_2$.

Лемма 1.1.4. *Для B-положительности B-неотрицательного и B-симметричного оператора A необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{R}(A) \bigcap \ker B^* = \{0\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — B-положительный и B-симметричный оператор. Пусть $y \in \mathcal{R}(A) \bigcap \ker B^*$, требуется доказать, что $y = 0$. Из условий вытекает, что $\exists x \in X : y = Ax$ и $B^*y = B^*Ax = 0$. Следовательно, $\langle B^*Ax, x\rangle = 0$ или $\langle Ax, Bx\rangle = 0$, откуда $Ax = 0 = y$.

Обратно, пусть $\mathcal{R}(A) \bigcap \ker B^* = \{0\}$ и $\langle Ax, Bx\rangle = 0$. Тогда из неравенств (1.1.2) вытекает, что $B^*Ax = 0$. Обозначим $y = Ax$. Имеем $y \in \mathcal{R}(A)$ и $y \in \ker B^*$, следовательно, $y = Ax = 0$. Лемма 1.1.4 доказана.

Заметим, что по лемме 1.1.2 свойство B-положительности B- симметричного оператора гарантирует нам эквивалентность уравнений $Ax = y$ и $B^*Ax = B^*y$. В лемме 1.1.4 в свою очередь приводится условие $\mathcal{R}(A) \bigcap \ker B^* = \{0\}$, необходимое и достаточное для свойства B- положительности. Это условие будет заведомо выполнено, если $\ker B^* = \{0\}$. Тем самым, лемма 1.1.4 позволяет обобщить результаты из работы [33], в которой в качестве достаточного условия для эквивалентности задач требовалось, чтобы $\mathcal{R}(B)$ было всюду плотно в Y^*, что равносильно соотношению $\ker B^* = \{0\}$.

1.2. Метод регуляризации

Напомним, что мы предполагаем множество $S = \{x \in Q \mid Ax = y\}$ — всех решений уравнения (1.1.1), принадлежащих Q, непустым. Тогда среди этих решений можно выбрать нормальное решение $\hat{x}$ относительно заранее выбранного произвольного элемента $x^0 \in X$.

Уравнение (1.1.1) задано с погрешностью в правой части и в операторе: вместо исходного оператора A нам известно приближение $A_h \in \mathcal{L}(X, Y)$, которое мы также будем считать B_h-симметричным и B_h-положительным, при $B_h \in \mathcal{L}(X, Y^*)$. При этом мы считаем известными следующие оценки сверху абсолютных погрешностей:

$$\|y_\delta - y\| \leqslant \delta, \quad \|A_h - A\| \leqslant C_1 h, \quad \|B_h - B\| \leqslant C_2 h. \tag{1.2.1}$$

Требуется построить регуляризованное семейство решений, аппроксимирующее нормальное решение $\hat{x}$.

Из неравенств

$$\|B_h^* A_h - B^* A\| \leqslant \|B_h^* A_h - B^* A_h + B^* A_h - B^* A\| \leqslant \|A_h - A + A\| \|(B_h - B)^*\| +$$

$$+ \|B\| \|A_h - A\| \leqslant (\|A\| + C_1 h) C_2 h + \|B\| C_1 h$$

вытекает, что при ограниченных сверху значениях h имеет место оценка погрешности суперпозиции операторов с некоторой константой C_3

$$\|B_h^* A_h - B^* A\| \leqslant C_3 h. \tag{1.2.2}$$

Заметим, что свойства B-симметричности и B-положительности A автоматически вытекают из аналогичных свойств операторов A_h и B_h и условий (1.2.1).

Нам понадобятся сформулированные в виде леммы следующие свойства билинейного функционала $\langle Ax, Bx \rangle$.

Лемма 1.2.1. *Пусть A — B-симметричный и B-неотрицательный оператор. Тогда функционал $\langle Ax, Bx \rangle$ является выпуклым и слабо полунепрерывным снизу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\langle Ax, Bx \rangle$ непрерывен, то для проверки выпуклости достаточно доказать неравенство

$$\left\langle A\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), B\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right\rangle \leqslant \frac{\langle Ax_1, Bx_1 \rangle + \langle Ax_2, Bx_2 \rangle}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Проведем эквивалентные преобразования

$$\left\langle A\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), B\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right\rangle \leqslant \frac{\langle Ax_1, Bx_1\rangle + \langle Ax_2, Bx_2\rangle}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle A(x_1+x_2), B(x_1+x_2)\rangle \leqslant 2\langle Ax_1, Bx_1\rangle + 2\langle Ax_2, Bx_2\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle Ax_1, Bx_1\rangle + 2\langle Ax_2, Bx_1\rangle + \langle Ax_2, Bx_2\rangle \leqslant 2\langle Ax_1, Bx_1\rangle + 2\langle Ax_2, Bx_2\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle Ax_1, Bx_1\rangle - 2\langle Ax_2, Bx_1\rangle + \langle Ax_2, Bx_2\rangle \geqslant 0 \Leftrightarrow \langle A(x_1-x_2), B(x_1-x_2)\rangle \geqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно, поскольку A — B-неотрицательный оператор.

Пусть $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$. Докажем, что

$$\langle Ax, Bx\rangle \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \langle Ax_n, Bx_n\rangle.$$

Последовательность $\{x_n\}$ как слабо сходящаяся является ограниченной. Из оценки

$$|\langle Ax_n, Bx_n\rangle| \leqslant \|B\|\cdot\|A\|\cdot\|x_n\|^2$$

вытекает существование конечного нижнего предела в правой части доказываемого неравенства. Так как A — B-неотрицательный оператор, то для всех n выполнено

$$\langle A(x_n - x), B(x_n - x)\rangle \geqslant 0,$$

следовательно,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \langle A(x_n - x), B(x_n - x)\rangle \geqslant 0.$$

Воспользовавшись линейностью операторов B и A и B-симметричностью, получаем

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \{\langle Ax_n, Bx_n\rangle - \langle Ax, Bx_n\rangle - \langle Ax_n, Bx\rangle + \langle Ax, Bx\rangle\} =$$

$$= \varliminf_{n\to+\infty} \{\langle Ax_n, Bx_n\rangle - 2\langle Ax_n, Bx\rangle + \langle Ax, Bx\rangle\}.$$

Так как A — непрерывный оператор, то $Ax_n \xrightarrow{\text{сл}} Ax$, поэтому $\langle Ax_n, Bx\rangle$ сходится к $\langle Ax, Bx\rangle$, и таким образом,

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \langle Ax_n, Bx_n\rangle - 2\cdot\lim_{n\to+\infty} \langle Ax_n, Bx\rangle + \langle Ax, Bx\rangle =$$

$$= \varliminf_{n\to+\infty} \langle Ax_n, Bx_n\rangle - \langle Ax, Bx\rangle.$$

Лемма 1.2.1 доказана.

Задачу решения исходного уравнения (1.1.1) можно свести к задаче выпуклой оптимизации (минимизации).

Лемма 1.2.2. *Пусть A — B-симметричный и B-положительный оператор. Если задача* (1.1.1) *разрешима, то она эквивалентна вариационной задаче*

$$\min_{x \in Q}\{\langle Ax, Bx\rangle - 2\langle y, Bx\rangle\}. \tag{1.2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Ax_0 = y$, $x_0 \in Q$. Убедимся, что для любого $x \in Q$ справедливо неравенство

$$\langle Ax_0, Bx_0\rangle - 2\langle Ax_0, Bx_0\rangle \leqslant \langle Ax, Bx\rangle - 2\langle Ax_0, Bx\rangle.$$

Применяя последовательно преобразования, учитывающие линейность операторов A и B, получим эквивалентные неравенства

$$\langle Ax_0, Bx_0\rangle - 2\langle Ax_0, Bx_0\rangle \leqslant \langle Ax, Bx\rangle - 2\langle Ax_0, Bx\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle Ax, Bx\rangle - 2\langle Ax_0, Bx\rangle + \langle Ax_0, Bx_0\rangle \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle Ax, Bx\rangle - \langle Ax_0, Bx\rangle + \langle Ax_0, Bx_0\rangle - \langle Ax_0, Bx\rangle \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle A(x - x_0), Bx\rangle + \langle A(-x_0), B(x - x_0)\rangle \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle Ax, B(x - x_0)\rangle + \langle A(-x_0), B(x - x_0)\rangle \geqslant 0 \Leftrightarrow \langle A(x - x_0), B(x - x_0)\rangle \geqslant 0.$$

Последнее полученное неравенство очевидно, поскольку A является B-положительным оператором.

Введем обозначение $\Phi_0(x) = \langle Ax, Bx\rangle - 2\langle y, Bx\rangle$. Пусть теперь $x_0 \in Q$ и $\Phi_0(x_0) = \min\limits_{x \in Q} \Phi_0(x)$. Пусть x — произвольный элемент из Q. Поскольку Q — выпуклое множество, элементы вида $x_\lambda := x_0 + \lambda h$, где $h = x - x_0$, $\quad 0 < \lambda < 1$ будут оставаться в пределах Q при варьировании параметра λ. Тогда в силу того, что x_0 — минимизирующий элемент, получим

$$\Phi_0(x_0 + \lambda h) - \Phi_0(x_0) \geqslant 0.$$

Используя свойство линейности операторов B и A, заключаем

$$\Phi_0(x_0 + \lambda h) - \Phi_0(x_0) = \langle A(x_0 + \lambda h), B(x_0 + \lambda h)\rangle - 2\langle y, B(x_0 + \lambda h)\rangle -$$

$$-\langle Ax_0, Bx_0\rangle + 2\langle y, Bx_0\rangle = \langle Ax_0, Bx_0\rangle + \lambda\langle Ah, Bx_0\rangle + \lambda\langle Ax_0, Bh\rangle +$$

$$+\lambda^2\langle Ah, Bh\rangle - 2\langle y, Bx_0\rangle - 2\lambda\langle y, Bh\rangle - \langle Ax_0, Bx_0\rangle + 2\langle y, Bx_0\rangle =$$

$$= 2\lambda\langle Ax_0 - y, Bh\rangle + \lambda^2\langle Ah, Bh\rangle \geqslant 0.$$

Сокращая последнее неравенство на положительное λ и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\forall x \in Q : \quad \langle Ax_0 - y, B(x - x_0)\rangle \geqslant 0.$$

Пусть $\tilde{x}$ — какое-то из решений задачи (1.1.1). Тогда

$$\forall x \in Q : \quad \langle Ax_0 - A\tilde{x}, B(x - x_0)\rangle = \langle A(x_0 - \tilde{x}), B(x - x_0)\rangle \geqslant 0.$$

В частности, при $x = \tilde{x}$ получим, что

$$\langle A(x_0 - \tilde{x}), B(\tilde{x} - x_0)\rangle \geqslant 0.$$

С другой стороны по свойству B-положительности

$$\langle A(x_0 - \tilde{x}), B(x_0 - \tilde{x})\rangle \geqslant 0.$$

Значит, на самом деле выполнено равенство $\langle A(x_0 - \tilde{x}), B(x_0 - \tilde{x})\rangle = 0$, откуда из свойств операторов A и B вытекает, что $A(x_0 - \tilde{x}) = 0$ или $Ax_0 = y$. Лемма 1.2.2 доказана.

Отметим, что отсюда лемма 1.1.2 вытекает теперь очевидным образом. Представление исходной задачи в вариационной форме (1.2.3) дает нам ключ к выбору метода регуляризации. По аналогии с методом Тихонова [54] введем в минимизируемый функционал стабилизирующую добавку $\alpha\|x - x^0\|^2$, где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации.

В дальнейшем нам понадобится одно важное геометрическое свойство банаховых пространств, которое одним из первых (1913 г.) явным образом использовал австрийский математик И. Радон. В конце 20-х годов прошлого столетия аналогичное свойство применяли в своих работах М.И. Кадец и В.Л. Кли. В зарубежной литературе это свойство широко распространено как свойство Радона–Рисса или Кадеца–Кли. В 60-е годы прошлого века идентичное свойство для рефлексивных пространств вводили Н.В. Ефимов и С.Б. Стечкин, поэтому в русскоязычных источниках нередко встречается также название "свойство Ефимова–Стечкина".

Определение 1.2.1. Банахово пространство X обладает *свойством Радона–Рисса*, если в нем всякая слабо сходящаяся последовательность элементов $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$, такая что $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to +\infty$, будет сильно сходящейся.

Между геометрическими свойствами равномерной выпуклости (см. определение 2.2.3 на стр. 50 и свойста равномерно выпуклых пространств далее) и

Радона–Рисса существует известная связь. Приведем ее здесь для полноты изложения вместе с доказательством.

Лемма 1.2.3. *Равномерно выпуклое банахово пространство удовлетворяет свойству Радона–Рисса.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_n, x \in X$, $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$ и $\|x_n\| \to \|x\|$. Если $x = 0$, то доказывать нечего. Пусть $x \neq 0$, тогда $\|x\| > 0$, и начиная с некоторого номера n выполнено $\|x_n\| > 0$. Введем обозначения $\xi_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ и $\xi = \frac{x}{\|x\|}$. Очевидно, что $\xi_n, \xi \in X$ и $\|\xi_n\| = \|\xi\| = 1$. Убедимся, что $\|\xi_n + \xi\| \to 2$. В самом деле, поскольку с одной стороны

$$\|\xi_n + \xi\| \leqslant \|\xi_n\| + \|\xi\| = 2,$$

то

$$\varlimsup_{n \to +\infty} \|\xi_n + \xi\| \leqslant 2.$$

Пусть f — произвольный функционал из X^*. Тогда $\langle \xi_n, f \rangle = \frac{1}{\|x_n\|} \langle x_n, f \rangle$. Так как по условию $\frac{1}{\|x_n\|} \to \frac{1}{\|x\|}$, и $\langle x_n, f \rangle \to \langle x, f \rangle$, то получим, что

$$\langle \xi_n, f \rangle \to \langle \xi, f \rangle.$$

Следовательно, $\xi_n \xrightarrow{\text{сл}} \xi$, а $\xi_n + \xi \xrightarrow{\text{сл}} 2\xi$. Окончательно получим следующую оценку

$$2 = \|2\xi\| \leqslant \varliminf_{n \to +\infty} \|\xi_n + \xi\| \leqslant \varlimsup_{n \to +\infty} \|\xi_n + \xi\| \leqslant 2,$$

из которой вытекает, что $\|\xi_n + \xi\| \to 2$. Отсюда в силу равномерной выпуклости X получим, что $\|\xi_n - \xi\| \to 0$. Проведем следующую оценку

$$\|x_n - x\| = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} \cdot \|x_n\| - \frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\| \right\| \leqslant \Big\| \, \xi_n \|x_n\| - \xi_n \|x\| \, \Big\| +$$

$$+ \Big\| \, \xi_n \|x\| - \xi \|x\| \, \Big\| \leqslant \Big| \, \|x_n\| - \|x\| \, \Big| + \|x\| \cdot \|\xi_n - \xi\|.$$

Учитывая, что по условию $\|x_n\| \to \|x\|$, получим требуемое. Лемма 1.2.3 доказана.

Следующая теорема формулирует метод регуляризации для задачи (1.1.1).

Теорема 1.2.1. *Пусть X — равномерно выпуклое банахово вещественное пространство, Y — банахово вещественное пространство. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$. Пусть задача $Ax = y$ разрешима на $Q \subseteq X$. Пусть $x^0 \in X$,*

$\hat{x}$ — решение задачи (1.1.1), ближайшее к x^0. Пусть для любых $\delta > 0$, $h > 0$ известны y_δ, A_h и B_h, удовлетворяющие условиям (1.2.1). Тогда:

1) для любого $\alpha > 0$ задача

$$\min_{x \in Q}\{\langle A_h x, B_h x\rangle - 2\langle y_\delta, B_h x\rangle + \alpha\|x - x^0\|^2\} \tag{1.2.4}$$

имеет и притом единственное решение $x(\alpha) \in Q$;

2) при выборе α в зависимости от δ и h согласно правилам

$$\begin{cases} \alpha(\delta, h) > 0; \\ \alpha(\delta, h) \longrightarrow 0, \text{при } (\delta, h) \to (0,0); \\ \frac{\delta + h}{\alpha(\delta, h)} \longrightarrow 0, \text{при } (\delta, h) \to (0,0) \end{cases}$$

для $x_{\delta,h} = x(\alpha(\delta, h))$ имеет место сходимость $x_{\delta,h} \longrightarrow \hat{x}$ при $(\delta, h) \to (0,0)$ по норме пространства X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим минимизируемый функционал через $\Phi_{\delta,h}(x)$. Так как указанный функционал, как следует из неравенств

$$\Phi_{\delta,h}(x) = \langle A_h x, B_h x\rangle - 2\langle y_\delta, B_h x\rangle + \alpha\|x - x^0\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \alpha(\|x\| - \|x^0\|)^2 - 2\|B_h\|\|x\|\|y_\delta\|,$$

ограничен снизу квадратичной функцией с положительным коэффициентом при старшей степени, то существует конечное

$$m = \inf_{x \in Q}\{\langle A_h x, B_h x\rangle - 2\langle y_\delta, B_h x\rangle + \alpha\|x - x^0\|^2\}.$$

Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{x_n\} \subseteq Q$, такую что

$$m \leqslant \Phi_{\delta,h}(x_n) \leqslant m + \frac{1}{n} \leqslant m + 1.$$

Из приведенной ранее оценки снизу для $\Phi_{\delta,h}$ получим

$$\alpha(\|x_n\| - \|x^0\|)^2 - 2\|B_h\|\|x_n\|\|y_\delta\| \leqslant m + 1,$$

откуда вытекает, что последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной. В силу слабой компактности шара в X найдутся подпоследовательность x_{n_k} и элемент $\bar{x} \in X$, такие что $x_{n_k} \xrightarrow{\text{сл}} \bar{x}$. Заметим, что множество Q, являясь выпуклым и замкнутым множеством, будет заведомо и слабо замкнутым (см., к примеру, [34]). Поэтому имеем $\bar{x} \in Q$. Поскольку B_h — непрерывный оператор, то

$B_h x_{n_k} \xrightarrow{\text{сл}} B_h\bar{x}$. Учитывая, что существует естественное изометрическое вложение $Y \subseteq Y^{**}$, заключаем, что $\langle y_\delta, B_h x_{n_k}\rangle \to \langle y_\delta, B_h\bar{x}\rangle$. Применяя лемму 1.2.1, получим

$$m \leqslant \langle A_h\bar{x}, B_h\bar{x}\rangle - 2\langle y_\delta, B_h\bar{x}\rangle + \alpha\|\bar{x} - x^0\|^2 \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \langle A_h x_{n_k}, B_h x_{n_k}\rangle -$$

$$-2\lim_{k\to+\infty}\langle y_\delta, B_h x_{n_k}\rangle + \alpha \varliminf_{k\to+\infty} \|x_{n_k} - x^0\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \{\langle A_h x_{n_k}, B_h x_{n_k}\rangle - 2\langle y_\delta, B_h x_{n_k}\rangle + \alpha\|x_{n_k} - x^0\|^2\} = \lim_{k\to+\infty} \Phi_{\delta,h}(x_{n_k}) = m.$$

Таким образом, задача минимизации $\min\limits_{x\in Q}\Phi_{\delta,h}(x)$ имеет решение. Пусть x_1 и x_2 — два различных решения этой задачи. В силу леммы 1.2.1 и строгой выпуклости в строго нормированном пространстве X квадрата нормы функционал $\Phi_{\delta,h}$ является суммой выпуклого, линейного и строго выпуклого функционалов, поэтому $\Phi_{\delta,h}$ — строго выпуклый. Тогда вытекают следующие неравенства

$$m \leqslant \Phi_{\delta,h}\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) < \frac{1}{2}\Phi_{\delta,h}(x_1) + \frac{1}{2}\Phi_{\delta,h}(x_2) = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = m,$$

приводящие нас к противоречию. Этим установлено, что задача $\min\limits_{x\in Q}\Phi_{\delta,h}(x)$ имеет и притом единственное решение.

Заметим, что по условию $x_{\delta,h}$ минимизирует функционал $\Phi_{\delta,h}$, а $\hat{x}$ в соответствии с леммой 1.2.2 — функционал Φ_0. Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств

$$\Phi_{\delta,h}(x_{\delta,h}) \leqslant \Phi_{\delta,h}(\hat{x}) = \Phi_0(\hat{x}) + \Phi_{\delta,h}(\hat{x}) - \Phi_0(\hat{x}) \leqslant \Phi_0(x_{\delta,h}) + \Phi_{\delta,h}(\hat{x}) - \Phi_0(\hat{x}).$$

Подставляя выражения для $\Phi_{\delta,h}$ и Φ_0, получим

$$\langle A_h x_{\delta,h}, B_h x_{\delta,h}\rangle - 2\langle y_\delta, B_h x_{\delta,h}\rangle + \alpha(\delta,h)\|x_{\delta,h} - x^0\|^2 \leqslant \langle A x_{\delta,h}, B x_{\delta,h}\rangle -$$

$$-2\langle y, B x_{\delta,h}\rangle + \langle A_h\hat{x}, B_h\hat{x}\rangle - 2\langle y_\delta, B_h\hat{x}\rangle + \alpha(\delta,h)\|\hat{x} - x^0\|^2 - \langle A\hat{x}, B\hat{x}\rangle + 2\langle y, B\hat{x}\rangle.$$

Преобразуем, перенеся все члены с $x_{\delta,h}$ в левую часть.

$$\alpha(\delta,h)\|x_{\delta,h} - x^0\|^2 + \langle(B_h^* A_h - B^* A)x_{\delta,h}, x_{\delta,h}\rangle + 2\langle y - y_\delta, B(x_{\delta,h} - \hat{x})\rangle +$$

$$+2\langle y_\delta, (B - B_h)(x_{\delta,h} - \hat{x})\rangle \leqslant \langle(B_h^* A_h - B^* A)\hat{x}, \hat{x}\rangle + \alpha(\delta,h)\|\hat{x} - x^0\|^2.$$

Оцениваем левую часть снизу, правую — сверху.

$$\alpha(\delta,h)(\|x_{\delta,h}\| - \|x^0\|)^2 - C_3 h\|x_{\delta,h}\|^2 - 2(\delta\|B\| + \|y_\delta\|C_2 h)(\|x_{\delta,h}\| + \|\hat{x}\|) \leqslant$$

$$\leqslant C_3 h\|\hat{x}\|^2 + \alpha(\delta, h)\|\hat{x} - x^0\|^2. \qquad (1.2.5)$$

Разделим обе части неравенства на $\alpha(\delta, h)$. Поскольку по условию теоремы $(\delta + h)/\alpha(\delta, h) \to 0$, то можно выбрать δ и h настолько малыми, чтобы $C_3 h/\alpha(\delta, h) < 1/2$ и $(\delta + h)/\alpha(\delta, h) < 1/(2\max(\|B\|, C_2(\|y\| + 1)))$. Получим неравенство

$$\frac{1}{2}\|x_{\delta,h}\|^2 - (2\|x^0\| + 1)\|x_{\delta,h}\| + \|x^0\|^2 - \|\hat{x}\| \leqslant \frac{1}{2}\|\hat{x}\|^2 + \|\hat{x} - x^0\|^2,$$

из которого вытекает ограниченность $\|x_{\delta,h}\| \leqslant C_4$ при малых δ и h и некоторой константе C_4. Вернемся к неравенству (1.2.5). Имеем

$$\alpha(\delta, h)\|x_{\delta,h} - x^0\|^2 \leqslant C_3 h C_4^2 + 2(\delta\|B\| + (\|y\| + 1)C_2 h)(C_4 + \|\hat{x}\|) +$$
$$+ C_3 h\|\hat{x}\|^2 + \alpha(\delta, h)\|\hat{x} - x^0\|^2.$$

Пусть

$$C_5 = \max\left\{2\|B\|(C_4 + \|\hat{x}\|), C_3 C_4^2 + 2(\|y\| + 1)C_2(C_4 + \|\hat{x}\|) + C_3\|\hat{x}\|^2\right\},$$

тогда

$$\|x_{\delta,h} - x^0\|^2 \leqslant C_5 \frac{\delta + h}{\alpha(\delta, h)} + \|\hat{x} - x^0\|^2. \qquad (1.2.6)$$

Пусть $\{(\delta_n, h_n)\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ — произвольная последовательность, сходящаяся к $(0, 0)$. Переобозначим $x_n = x_{\delta_n, h_n}$, $A_n = A_{h_n}$, $B_n = B_{h_n}$, $y_n = y_{\delta_n}$, $\alpha_n = \alpha(\delta_n, h_n)$, $\Phi_{\delta_n, h_n} = \Phi_n$. Поскольку выпуклое замкнутое множество Q слабо замкнуто, то из ограниченной последовательности $\{x_n\} \subseteq Q$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность к некоторому элементу $\bar{\bar{x}} \in Q$. Для упрощения записей будем считать, что $\{x_n\}$ сама слабо сходится, т.е. $x_n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{\bar{x}}$. Так как x_n — решение задачи $\min\limits_{x \in Q} \Phi_n(x)$, то для любого $x \in Q$ выполнено неравенство

$$\langle A_n x_n, B_n x_n\rangle - 2\langle y_n, B_n x_n\rangle + \alpha_n\|x_n - x^0\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \langle A_n x, B_n x\rangle - 2\langle y_n, B_n x\rangle + \alpha_n\|x - x^0\|^2.$$

Переходя в этом неравенстве к нижним пределам, учитывая, что $\alpha_n \to 0$, $y_n \to y$, получим

$$\varliminf_{n \to +\infty} \{\langle A_n x_n, B_n x_n\rangle - 2\langle y_n, B_n x_n\rangle + \alpha_n\|x_n - x^0\|^2\} \leqslant \langle Ax, Bx\rangle - 2\langle y, Bx\rangle.$$

Поскольку нижний предел суммы величин всегда не меньше чем сумма нижних пределов этих величин, то приходим к неравенству

$$\varliminf_{n \to +\infty} \langle A_n x_n, B_n x_n\rangle - 2\varliminf_{n \to +\infty} \langle y_n, B_n x_n\rangle + \varliminf_{n \to +\infty} \alpha_n\|x_n - x^0\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \langle Ax, Bx\rangle - 2\langle y, Bx\rangle. \tag{1.2.7}$$

Заметим, что

$$|\langle y_n, B_n x_n\rangle - \langle y, B\bar{\bar{x}}\rangle| \leqslant |\langle B_n^* y_n, x_n\rangle - \langle B_n^* y, x_n\rangle| + |\langle B_n^* y, x_n\rangle - \langle B^* y, x_n\rangle| +$$

$$+|\langle B^* y, x_n\rangle - \langle B^* y, \bar{\bar{x}}\rangle| \leqslant \|B_n\|\|y_n - y\|\|x_n\| + \|B_n - B\|\|y\|\|x_n\| +$$

$$+|\langle B^* y, x_n\rangle - \langle B^* y, \bar{\bar{x}}\rangle|.$$

Правая часть полученного неравенства стремится к нулю за счет условий $x_n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{\bar{x}},\ y_n \to y,\ B_n \to B$. Таким образом,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \langle y_n, B_n x_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle y_n, B_n x_n\rangle = \langle y, B\bar{\bar{x}}\rangle.$$

Из оценки

$$|\langle Ax_n, Bx_n\rangle - \langle A_n x_n, B_n x_n\rangle| = |\langle (B^* A - B_n^* A_n) x_n, x_n\rangle| \leqslant C_3 h_n \|x_n\|^2$$

нетрудно увидеть, что все частичные пределы последовательностей $\{\langle Ax_n, Bx_n\rangle\}$ и $\{\langle A_n x_n, B_n x_n\rangle\}$ совпадают между собой. Применяя лемму 1.2.1 к неравенству (1.2.7), получим

$$\forall x \in Q: \quad \langle A\bar{\bar{x}}, B\bar{\bar{x}}\rangle - 2\langle y, B\bar{\bar{x}}\rangle \leqslant \langle Ax, Bx\rangle - 2\langle y, Bx\rangle.$$

По лемме 1.2.2 в таком случае выполняется равенство $A\bar{\bar{x}} = y$. Перепишем неравенство (1.2.6) в новых обозначениях

$$\|x_n - x^0\|^2 \leqslant C_5 \frac{\delta_n + h_n}{\alpha_n} + \|\hat{x} - x^0\|^2.$$

Перейдем в этом неравенстве к верхним пределам

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \|x_n - x^0\|^2 \leqslant \|\hat{x} - x^0\|^2.$$

Учитывая, что $\hat{x}$ — нормальное решение, запишем следующую цепочку неравенств

$$\|\hat{x} - x^0\|^2 \leqslant \|\bar{\bar{x}} - x^0\|^2 \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \|x_n - x^0\|^2 \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \|x_n - x^0\|^2 \leqslant \|\hat{x} - x^0\|^2.$$

Из этой цепочки неравенств вытекает, во-первых, что

$$\|\hat{x} - x^0\|^2 = \|\bar{\bar{x}} - x^0\|^2,$$

что означает, в силу единственности нормального решения, равенство $\hat{x} = \bar{\bar{x}}$. Во-вторых, вытекает равенство верхнего и нижнего пределов, что означает существование предела

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x^0\|^2 = \|\hat{x} - x^0\|^2.$$

Учитывая, что $x_n - x^0$ слабо сходится к $\hat{x} - x^0$, и что равномерно выпуклое банахово пространство X удовлетворяет по лемме 1.2.3 свойству Радона–Рисса, мы приходим к выводу, что $x_n \to \hat{x}$ по норме пространства X. Поскольку изначально последовательность $\{(\delta_n, h_n)\}$ выбиралась произвольным образом сходящейся к $(0,0)$, и все слабые частичные пределы $x_{\delta,h}$ оказались и сильными пределами и совпали с $\hat{x}$, то заключаем, что $x_{\delta,h} \to \hat{x}$ при $(\delta, h) \to (0,0)$. Теорема 1.2.1 доказана.

Таким образом, построенное в теореме 1.2.1 семейство $x_{\delta,h}$ является регуляризованным семейством приближённых решений задачи (1.1.1).

1.3. Дискретная аппроксимация регуляризующего алгоритма

Опишем аппарат дискретной аппроксимации в соответствии с подходом, изложенным в работах [9, 88, 14, 15]. Отметим, что весь предваряющий материал, описывающий различные свойства дискретных сходимостей, известен (за исключением разве что предложения 1.3.3) и приводится здесь с доказательствами для полноты изложения. Пусть X — вещественное банахово пространство, X_n — семейство вещественных банаховых пространств.

Определение 1.3.1. Говорят, что семейство пространств $\{X_n\}$ образует дискретную аппроксимацию пространства X (обозначение $X_n \overset{p_n}{\sim} X$), если существует *семейство* $\{p_n\}$ *связывающих операторов* $p_n : X \to X_n = p_n X$, обладающее свойствами

$$(a) \qquad \forall x \in X \quad \lim_{n\to+\infty} \|p_n x\|_{X_n} = \|x\|_X;$$

$$(b) \qquad \begin{gathered} \forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ \lim_{n\to+\infty} \|p_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 p_n x_1 - \alpha_2 p_n x_2\|_{X_n} = 0. \end{gathered}$$

В дальнейшем индексы у норм всюду опускаются, поскольку по принадлежности элемента определенному пространству однозначно определяется его норма. Будем предполагать также, что $X_n^* \overset{p'_n}{\sim} X^*$, причём выполнено условие *согласованности аппроксимаций*:

$$\forall x \in X,\ \forall f \in X^* : \quad \langle p_n x, p'_n f\rangle \to \langle x, f\rangle \text{ при } n \to +\infty.$$

Вводятся понятия дискретной сильной и дискретной слабой сходимости элементов.

Определение 1.3.2. Говорят, что последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$ *дискретно (сильно) сходится* к $x \in X$ (обозначение $x_n \xrightarrow{d} x$ при $n \to +\infty$), если $\lim\limits_{n\to+\infty} \|p_n x - x_n\| = 0$.

Определение 1.3.3. Говорят, что последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in X_n$ *дискретно слабо сходится* к $x \in X$ (обозначение $x_n \xrightarrow{dw} x$ при $n \to +\infty$), если нормы этих элементов ограничены в совокупности, и для любого функционала $f \in X^*$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, p'_n f\rangle = \langle x, f\rangle.$$

Нам понадобятся следующие свойства дискретно сходящихся последовательностей, обобщающие известные свойства из анализа.

Предложение 1.3.1. *Справедливы нижеприведённые утверждения:*

1) *предел дискретно сильно или слабо сходящейся последовательности единствен;*

2) $x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow (x_n \xrightarrow{dw} x)\&(\|x_n\| \longrightarrow \|x\|)$;

3) *в случае, когда X и (X_n) — рефлексивные пространства, для сходимости $\langle x_n, f_n\rangle$ к $\langle x, f\rangle$ достаточно, чтобы одна из последовательностей $\{x_n\}, \{f_n\}$ сходилась соответственно к x, f дискретно сильно, а другая лишь дискретно слабо;*

4)
$$a_n \to a,\ a_n' \to a',\ a_n, a_n' \in \mathbb{R},\ x_n \xrightarrow{d} x\ (x_n \xrightarrow{dw} x),\ x_n' \xrightarrow{d} x'\ (x_n' \xrightarrow{dw} x')$$
$$\Downarrow$$
$$a_n x_n + a_n' x_n' \xrightarrow{d} ax + a'x'\ (a_n x_n + a_n' x_n' \xrightarrow{dw} ax + a'x');$$

5) $x_n \xrightarrow{dw} x \Rightarrow \|x\| \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $x_n \xrightarrow{dw} x_1$ и $x_n \xrightarrow{dw} x_2$. Тогда для произвольного $f \in X^*$ имеем

$$\langle x_n, p_n' f\rangle \to \langle x_1, f\rangle,\ \langle x_n, p_n' f\rangle \to \langle x_2, f\rangle.$$

Следовательно, $\langle x_1, f\rangle = \langle x_2, f\rangle$ или $\langle x_1 - x_2, f\rangle = 0$. Из свойства тотальности функционалов получим, что $x_1 = x_2$.

2)Пусть $x_n \xrightarrow{d} x$. Тогда

$$\Big|\|x_n\| - \|x\|\Big| \leqslant \Big|\|x_n\| - \|p_n x\|\Big| + \Big|\|p_n x\| - \|x\|\Big| \leqslant \|p_n x - x_n\| + \Big|\|p_n x\| - \|x\|\Big|.$$

Поскольку $\|p_n x - x_n\| \to 0$ в силу дискретной сходимости x_n к x, а $\|p_n x\| \to \|x\|$ в силу свойства (a) связывающих операторов, то получим, что $\|x_n\| \to \|x\|$. Для произвольного $f \in X^*$ имеем

$$|\langle x, f\rangle - \langle x_n, p_n' f\rangle| \leqslant |\langle x, f\rangle - \langle p_n x, p_n' f\rangle| + |\langle p_n x - x_n, p_n' f\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant |\langle x, f\rangle - \langle p_n x, p_n' f\rangle| + \|p_n' f\| \cdot \|p_n x - x_n\|.$$

По условию согласованности аппроксимаций $|\langle x, f\rangle - \langle p_n x, p_n' f\rangle| \to 0$, поэтому $\langle x_n, p_n' f\rangle \to \langle x, f\rangle$.

3) Пусть сначала $x_n \xrightarrow{dw} x$, $f_n \xrightarrow{d} f$. Имеем

$$|\langle x_n, f_n\rangle - \langle x, f\rangle| \leqslant |\langle x_n, f_n\rangle - \langle x_n, p'_n f\rangle| + |\langle x_n, p'_n f\rangle - \langle x, f\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|f_n - p'_n f\| \cdot \|x_n\| + |\langle x_n, p'_n f\rangle - \langle x, f\rangle|.$$

Учитывая ограниченность $\{x_n\}$, дискретную сходимость f_n к f и дискретную слабую сходимость x_n к x, получим требуемое. Случай, когда $x_n \xrightarrow{d} x$, $f_n \xrightarrow{dw} f$ рассматривается аналогично.

4) Пусть сначала $x_n \xrightarrow{d} x$ и $x'_n \xrightarrow{d} x'$. Имеем

$$\|p_n(ax+a'x') - a_n x_n - a'_n x'_n\| \leqslant \|p_n(ax+a'x') - ap_n x - a' p_n x'\| + |a| \cdot \|p_n x - x_n\| +$$
$$+ |a'| \cdot \|p_n x' - x'_n\| + |a_n - a| \cdot \|x_n\| + |a'_n - a'| \cdot \|x'_n\|.$$

Учитывая свойство (b) связывающих операторов, ограниченность $\{x_n\}$ и все сходимости из условия, получим $a_n x_n + a'_n x'_n \xrightarrow{d} ax + a'x'$.

Пусть теперь $x_n \xrightarrow{dw} x$ и $x'_n \xrightarrow{dw} x'$. Из оценки

$$\|a_n x_n + a'_n x'_n\| \leqslant |a_n| \cdot \|x_n\| + |a'_n| \cdot \|x'_n\|$$

получим ограниченность последовательности $\{a_n x_n + a'_n x'_n\}$. Выберем произвольный $f \in X^*$. Имеем

$$|\langle a_n x_n + a'_n x'_n, p'_n f\rangle - \langle ax + a'x', f\rangle| \leqslant |a_n \langle x_n, p'_n f\rangle - a\langle x, f\rangle| +$$
$$+ |a'_n \langle x'_n, p'_n f\rangle - a'\langle x', f\rangle| \leqslant |a_n| \cdot |\langle x_n, p'_n f\rangle - \langle x, f\rangle| + |a_n - a| \cdot |\langle x, f\rangle| +$$
$$+ |a'_n| \cdot |\langle x'_n, p'_n f\rangle - \langle x', f\rangle| + |a'_n - a'| \cdot |\langle x', f\rangle|.$$

По определению дискретной слабой сходимости $\langle x_n, p'_n f\rangle \to \langle x, f\rangle$ и $\langle x'_n, p'_n f\rangle \to \langle x', f\rangle$. Поэтому из приведенной оценки получим $\langle a_n x_n + a'_n x'_n, p'_n f\rangle \to \langle ax + a'x', f\rangle$, что означает $a_n x_n + a'_n x'_n \xrightarrow{dw} ax + a'x'$.

5) Поскольку $\{x_n\}$ ограничена, то нижний предел в доказываемом неравенстве конечен. Предположим от противного, что $\|x\| > c > \varliminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|$. По следствию из теоремы Хана-Банаха найдется такой фукционал $f \in X^*$, что $\|f\| = 1$ и $\langle x, f\rangle = \|x\|$. По определению дискретной слабой сходимости $\langle x_n, p'_n f\rangle \to \langle x, f\rangle$. С другой стороны имеем

$$\|x\| = \langle x, f\rangle = \lim_{n\to+\infty} |\langle x_n, p'_n f\rangle| \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \{\|p'_n f\| \cdot \|x_n\|\} \leqslant 1 \cdot c < \|x\|.$$

Получено противоречие. Предложение 1.3.1 доказано.

Доказывается свойство дискретной слабой компактности ограниченной последовательности элементов [88].

Предложение 1.3.2. *Если X — рефлексивное сепарабельное пространство, то любая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ элементов $x_n \in X_n$ дискретно слабо компактна, т.е. существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и элемент $x \in X$, для которых выполнено $x_{n_k} \xrightarrow{dw} x$ при $k \to +\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как X рефлексивно, то $X = X^{**}$, поэтому X^{**} также сепарабельно. Следовательно, X^* сепарабельно (см. [19]). Выберем в X^* счетное всюду плотное множество $\{f_n\}$. Рассмотрим числовую последовательность $\{\langle x_n, p'_n f_1\rangle\}$. Из оценки

$$|\langle x_n, p'_n f_1\rangle| \leqslant \|p'_n f_1\| \cdot \|x_n\|$$

(учитывая ограниченность $\|x_n\|$ по условию и $\|p'_n f_1\|$ как сходящейся) получим ограниченность этой последовательности. Выберем в ней сходящуюся подпоследовательность

$$\{\langle x_{n_k^{(1)}}, p'_{n_k^{(1)}} f_1\rangle\}.$$

Пусть уже выбрана подпоследовательность номеров $n_k^{(i)}$, такая что $\{\langle x_{n_k^{(i)}}, p'_{n_k^{(i)}} f_i\rangle\}$ сходится. Рассмотрим теперь последовательность $\{\langle x_{n_k^{(i)}}, p'_{n_k^{(i)}} f_{i+1}\rangle\}$. Поскольку она ограничена, выберем из нее сходящуюся подпоследовательность $\{\langle x_{n_k^{(i+1)}}, p'_{n_k^{(i+1)}} f_{i+1}\rangle\}$, взятую по номерам $n_k^{(i+1)}$. По индукции будет построено семейство подпоследовательностей $n_k^{(i)}$, вложенных друг в друга, таких что для любого $i \in \mathbb{N}$ числовая последовательность $\langle x_{n_k^{(i)}}, p'_{n_k^{(i)}} f_i\rangle$ сходится. Построим теперь искомую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ по номерам $n_k = n_k^{(k)}$. Нетрудно видеть, что для любого $i \in \mathbb{N}$ последовательность $\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f_i\rangle$ сходится. В самом деле, при индексах $k \geqslant i$ последовательность n_k является подпоследовательностью в $n_k^{(i)}$, для которой по построению $\{\langle x_{n_k^{(i)}}, p'_{n_k^{(i)}} f_i\rangle\}$ сходится. Покажем теперь, что для любого $f \in X^*$ последовательность $\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f\rangle$ будет сходится. Для этого проверим, что она фундаментальна. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $\{f_n\}$ всюду плотно в X^*, найдется номер j, такой что $\|f_j - f\| \leqslant \varepsilon$. Имеем

$$|\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f\rangle - \langle x_{n_l}, p'_{n_l} f\rangle| \leqslant |\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f\rangle - \langle x_{n_k}, p'_{n_k} f_j\rangle| +$$

$$+ |\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f_j\rangle - \langle x_{n_l}, p'_{n_l} f_j\rangle| + |\langle x_{n_l}, p'_{n_l} f_j\rangle - \langle x_{n_l}, p'_{n_l} f\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \|p'_{n_k} f - p'_{n_k} f_j\| \cdot \|x_{n_k}\| + |\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f_j\rangle - \langle x_{n_l}, p'_{n_l} f_j\rangle| + \|p'_{n_l} f_j - p'_{n_l} f\| \cdot \|x_{n_l}\|.$$

Пусть C — константа, ограничивающая нормы элементов $\{x_n\}$. Поскольку $\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f_j \rangle$ фундаментальна, выберем номера k и l настолько большими, чтобы $|\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f_j \rangle - \langle x_{n_l}, p'_{n_l} f_j \rangle| \leqslant \varepsilon$. Получим

$$|\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f \rangle - \langle x_{n_l}, p'_{n_l} f \rangle| \leqslant C(\|p'_{n_k} f - p'_{n_k} f_j - p'_{n_k}(f - f_j)\| + \|p'_{n_k}(f - f_j)\|) + \varepsilon +$$
$$+ C(\|p'_{n_l} f_j - p'_{n_l} f - p'_{n_l}(f_j - f)\| + \|p'_{n_l}(f_j - f)\|).$$

По свойствам (a) и (b) связывающих операторов p'_n можно еще увеличить k настолько, чтобы

$$\|p'_{n_k} f - p'_{n_k} f_j - p'_{n_k}(f - f_j)\| \leqslant \varepsilon \quad \& \quad \|p'_{n_k}(f - f_j)\| \leqslant \|f - f_j\| + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Аналогично можно увеличить и номер l. Тогда получим окончательную оценку

$$|\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f \rangle - \langle x_{n_l}, p'_{n_l} f \rangle| \leqslant 3C\varepsilon + \varepsilon + 3C\varepsilon = (6C + 1)\varepsilon.$$

Таким образом, установлено, что для любого $f \in X^*$ числовая последовательность $\{\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f \rangle\}$ сходится. Рассмотрим теперь функционал $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$, заданный по правилу

$$\forall f \in X^* \qquad \varphi(f) = \lim_{k \to +\infty} \langle x_{n_k}, p'_{n_k} f \rangle.$$

Этот функционал линейный. Действительно, пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in X^*$. Имеем

$$|\varphi(a_1 f_1 + a_2 f_2) - a_1 \varphi(f_1) - a_2 \varphi(f_2)| =$$
$$= \lim_{k \to +\infty} |\langle x_{n_k}, p'_{n_k}(a_1 f_1 + a_2 f_2) \rangle - a_1 \langle x_{n_k}, p'_{n_k} f_1 \rangle - a_2 \langle x_{n_k}, p'_{n_k} f_2 \rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{k \to +\infty} \{\|p'_{n_k}(a_1 f_1 + a_2 f_2) - a_1 p'_{n_k} f_1 - a_2 p'_{n_k} f_2\| \cdot \|x_{n_k}\|\} = 0.$$

Кроме того, φ является непрерывным. В самом деле,

$$|\varphi(f)| = \lim_{k \to +\infty} |\langle x_{n_k}, p'_{n_k} f \rangle| \leqslant \varlimsup_{k \to +\infty} \{\|p'_{n_k} f\| \cdot \|x_{n_k}\|\} \leqslant C\|f\|.$$

Поэтому $\varphi \in X^{**}$. Так как X — рефлексивное пространство, то φ можно отождествить при естественном изоморфизме с некоторым элементом $x \in X$ так, чтобы для любого $f \in X^*$ было выполнено

$$\langle x, f \rangle = \varphi(f) = \langle f, \varphi \rangle = \lim_{k \to +\infty} \langle x_{n_k}, p'_{n_k} f \rangle.$$

По определению слабой сходимости это означает, что $x_{n_k} \xrightarrow{dw} x$ при $k \to +\infty$. Предложение 1.3.2 доказано.

Если пространства X и X_n гильбертовы, то имеет место дискретный аналог свойства Ефимова-Стечкина (без условия рефлексивности известного также в иностранной литературе под названием свойства Радона-Рисса или Кадеца-Кли)

$$x_n \xrightarrow{dw} x,\ \|x_n\| \to \|x\| \ \Rightarrow\ x_n \xrightarrow{d} x.$$

В самом деле, из равенства

$$\|p_n x - x_n\|^2 = \|p_n x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\langle p_n x, x_n\rangle$$

с учетом сходимости $\|p_n x\| \to \|x\|$ и $\langle p_n x, x_n\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|^2$ вытекает, что $\|p_n x - x_n\| \to 0$. В случае произвольных банаховых пространств это свойство может и не выполняться. Поэтому введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1.3.4. Пара X, (X_n) обладает *дискретным свойством Ефимова-Стечкина*, если пространства X, X_n рефлексивны, и выполнено соотношение

$$\forall x_n \in X_n,\ \forall x \in X :\ x_n \xrightarrow{dw} x,\ \|x_n\| \to \|x\| \ \Rightarrow\ x_n \xrightarrow{d} x.$$

Достаточное условие для того, чтобы пара X, (X_n) обладала этим свойством, приводится в следующем утверждении (см. [15], стр. 169).

Лемма 1.3.1. *Пусть пространства $\{X_n\}$, образующие дискретную аппроксимацию банахова пространства X, равномерно выпуклы и банаховы, причем для модулей выпуклости δ_{X_n} пространств X_n справедливо соотношение*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \delta_{X_n}(\varepsilon) = \delta(\varepsilon) > 0 \ \textit{при}\ \varepsilon > 0.$$

Тогда при любом $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера n, будет выполнено неравенство $\delta_{X_n}(\varepsilon) \leqslant \delta_X(\varepsilon)$, означающее, в частности, равномерную выпуклость пространства X, а пара X, (X_n) обладает дискретным свойством Ефимова-Стечкина.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta > 0$. Выберем $x_\delta, y_\delta \in X$ таким образом, чтобы

$$\delta_X(\varepsilon) \leqslant 1 - \frac{\|x_\delta + y_\delta\|}{2} < \delta_X(\varepsilon) + \delta,\ \|x_\delta\| = \|y_\delta\| = 1,\ \|x_\delta - y_\delta\| \geqslant \varepsilon.$$

Пусть $x_n = \frac{p_n x_\delta}{\|p_n x_\delta\|}$, $y_n = \frac{p_n y_\delta}{\|p_n y_\delta\|}$. Имеем $x_n, y_n \in X_n$, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$. По предложению 1.3.1 имеет место дискретная сходимость $x_n \pm y_n \xrightarrow{d} x_\delta \pm y_\delta$. Тогда из предложения 1.3.1 вытекает $\|x_n \pm y_n\| \to \|x_\delta \pm y_\delta\|$. Пусть $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, тогда найдется такой номер n, начиная с которого будут выполнены неравенства

$$1 - \frac{\|x_n + y_n\|}{2} \leqslant \delta_X(\varepsilon) + \delta, \text{ и } \|x_n - y_n\| \geqslant \varepsilon'.$$

Тогда получим следующую оценку:

$$\delta_{X_n}(\varepsilon') \leqslant 1 - \frac{\|x_n + y_n\|}{2} \leqslant \delta_X(\varepsilon) + \delta.$$

Устремляя $\varepsilon' \to \varepsilon$ и $\delta \to 0$, получим $0 < \delta_{X_n}(\varepsilon) \leqslant \delta_X(\varepsilon)$.

Поскольку X и X_n равномерно выпуклы и банаховы, то они рефлексивны. Пусть теперь $x_n \in X_n$, $x \in X$ и $x_n \xrightarrow{dw} x$ и $\|x_n\| \to \|x\|$. Если $x = 0$, то доказывать нечего. Пусть $x \neq 0$, тогда $\|x\| > 0$ и, начиная с некоторого номера n, выполнено $\|x_n\| > 0$. Обозначим $y_n = x_n/\|x_n\|$, $y = x/\|x\|$. Из предложения 1.3.1 следует, что $y_n \xrightarrow{dw} y$. Докажем, что $y_n \xrightarrow{d} y$. Действительно, если предположить противное, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и подпоследовательности $\{y_{n_k}\}$ выполнено $\|y_{n_k} - p_{n_k} y\| \geqslant \varepsilon$, то в силу равномерной выпуклости X_n

$$\left\| \left(y_{n_k} + \frac{p_{n_k} y}{\|p_{n_k} y\|} \right) /2 \right\| \leqslant 1 - \delta_{X_n}(\varepsilon) \leqslant 1 - \delta(\varepsilon).$$

В силу предложения 1.3.1 $(y_{n_k} + p_{n_k} y/\|p_{n_k} y\|)/2 \xrightarrow{dw} y$, поэтому

$$1 = \|y\| \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \left\| \left(y_{n_k} + \frac{p_{n_k} y}{\|p_{n_k} y\|} \right) /2 \right\| \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \left\| \left(y_{n_k} + \frac{p_{n_k} y}{\|p_{n_k} y\|} \right) /2 \right\| \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \delta(\varepsilon).$$

Полученное противоречие показывает, что $y_n \xrightarrow{d} y$, поэтому заключаем, что $x_n \xrightarrow{d} x$. Лемма 1.3.1 доказана.

Пусть $X_n \overset{p_n}{\approx} X$ и $Y_n \overset{q_n}{\approx} Y$. Введём понятия дискретной сходимости и дискретной слабой сходимости операторов (см. [9, 88, 14, 15]).

Определение 1.3.5. Последовательность $\{A_n\}$ операторов $A_n : X_n \to Y_n$ *дискретно сходится* к оператору $A : X \to Y$, если выполняется следующее условие:

$$\forall x_n \in X_n, \forall x \in X : \, x_n \xrightarrow{d} x \;\Rightarrow\; A_n x_n \xrightarrow{d} Ax;$$

для этой сходимости примем обозначение $A_n \dashrightarrow A$ при $n \to +\infty$.

Определение 1.3.6. Последовательность $\{A_n\}$ операторов $A_n : X_n \to Y_n$ *дискретно слабо сходится* к оператору $A : X \to Y$, если выполняется следующее условие:

$$\forall x_n \in X_n, \forall x \in X : \, x_n \xrightarrow{dw} x \;\Rightarrow\; A_n x_n \xrightarrow{dw} Ax;$$

для этой сходимости примем обозначение $A_n \overset{w}{\dashrightarrow} A$ при $n \to +\infty$.

Не следует путать дискретную и дискретную слабую сходимость операторов с введенной ранее дискретной сходимостью элементов. Так, например, если $f_n \in X_n^*$, $f \in X^*$, то дискретную сходимость f_n к f можно понимать двояко: в смысле определения 1.3.2 ($f_n \xrightarrow{d} f$) либо в смысле определения 1.3.5 ($f_n \dashrightarrow f$). Во втором случае предполагается, что $Y_n \equiv Y \equiv \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \ q_n\alpha \equiv \alpha$. То же самое касается и дискретной слабой сходимости функционалов. Если пространства X_n и X рефлексивны, то имеет место следующая взаимосвязь между сходимостями:

$$(f_n \xrightarrow{d} f) \Rightarrow (f_n \overset{w}{\dashrightarrow} f) \Rightarrow (f_n \dashrightarrow f) \Leftrightarrow (f_n \xrightarrow{dw} f).$$

Если же кроме того пара X^*, (X_n^*) обладает дискретным свойством Ефимова-Стечкина, а X — сепарабельно, в частности это будет, когда пространства X и X_n являются гильбертовыми, то

$$(f_n \xrightarrow{d} f) \Leftrightarrow (f_n \overset{w}{\dashrightarrow} f) \Rightarrow (f_n \dashrightarrow f) \Leftrightarrow (f_n \xrightarrow{dw} f).$$

В общей ситуации дискретная и дискретная слабая сходимость операторов между собой не связаны. Рассмотрим следующий пример. Пусть $X_n = X = \mathbb{R}$, $Y_n = Y = \ell_2$. $A_nx = (\underbrace{x, 0, ..., x}_{n}, 0, ...)$, $Ax = (x, 0, 0, ...)$. Тогда нетрудно видеть, что $A_n \overset{w}{\dashrightarrow} A$, и при этом A_n не сходится дискретно. Пример дискретно сходящейся последовательности операторов, не сходящейся дискретно слабо, можно найти среди функционалов. Пусть, например, $X_n = X_n^* = X = X^* = \ell_2$, $Y_n = Y = \mathbb{R}$. Тогда $f_n = e_n = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{n}, 0, ...) \dashrightarrow f = 0$. Однако сходимость $f_n \overset{w}{\dashrightarrow} f$ не имеет места, поскольку для $e_n \xrightarrow{\text{сл}} 0$ выполнено $\langle e_n, f_n \rangle = 1 \nrightarrow 0$.

Приведем описание свойств дискретно сходящихся и дискретно слабо сходящихся последовательностей операторов.

Предложение 1.3.3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Предел как дискретно сходящейся, так и дискретно слабо сходящейся последовательности операторов единствен;*

2) *Нормы как дискретно сходящейся, так и дискретно слабо сходящейся последовательности операторов ограничены в совокупности;*

3) *Если $A_n \dashrightarrow A$ или $A_n \overset{w}{\dashrightarrow} A$, то $\|A\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to+\infty} \|A_n\|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Вытекает из предложения 1.3.1.

2)Пусть $A_n \in L(X_n, Y_n)$, $A \in L(X, Y)$ и $A_n \dashrightarrow A$ либо $A_n \overset{w}{\dashrightarrow} A$. Если предположить, что существует подпоследовательность, такая что $\|A_{n_k}\| \to +\infty$, тогда найдутся такие $x_{n_k} \in X_{n_k}$, что $\|x_{n_k}\| = 1$ и $\|A_{n_k}x_{n_k}\| \to +\infty$. Последовательность $\xi_k = x_{n_k}/\sqrt{\|A_{n_k}x_{n_k}\|}$ дискретно (а значит и дискретно слабо) сходится к нулевому элементу, но $A_{n_k}\xi_k$ не сходится ни дискретно, ни дискретно слабо к $A0 = 0$, поскольку $\|A_{n_k}\xi_k\| = \sqrt{\|A_{n_k}x_{n_k}\|} \to +\infty$. Это противоречит дискретной (и дискретной слабой) сходимости A_n к A.

3) В силу п. 2 нижний предел в доказываемом неравенстве конечен. Поскольку $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$, то для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется $x_\varepsilon \in X$, такой что $\|Ax_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon$, $\|x_\varepsilon\| = 1$. Пусть $x_n = p_n x_\varepsilon$. Тогда поскольку $x_n \xrightarrow{d} x_\varepsilon$ (а значит, и $x_n \xrightarrow{dw} x_\varepsilon$), то как в случае дискретной сходимости операторов, так и в случае дискретной слабой сходимости оных получим

$$A_n x_n \xrightarrow{dw} Ax_\varepsilon, \ \|Ax_\varepsilon\| \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \|A_n x_n\|.$$

Кроме того, начиная с некоторого номера n будет выполняться неравенство $\|x_n\| \leqslant 1 + \varepsilon$. Тогда имеет место следующая оценка

$$\|A_n\| = \frac{\sup\{\|A_n x\| : \ \|x\| \leqslant 1 + \varepsilon\}}{1 + \varepsilon} \geqslant \frac{\|A_n x_n\|}{1 + \varepsilon}.$$

Переходя к нижним пределам, получим

$$\varliminf_{n\to+\infty} \|A_n\| \geqslant \frac{\varliminf\limits_{n\to+\infty} \|A_n x_n\|}{1 + \varepsilon} \geqslant \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{1 + \varepsilon} > \frac{\|A\| - \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Устремляя ε к нулю, получим требуемое неравенство. Предложение 1.3.3 доказано.

Для дальнейшего исследования нам также потребуется описать дискретную сходимость подмножеств различных пространств. Существуют различные подходы к решению этой проблемы, отметим, к примеру, сходимость по Висмансу и по Моско (см. [68]). Всюду в диссертации будем придерживаться Моско-сходимости [81, 82, 14].

О п р е д е л е н и е 1.3.7. Последовательность множеств $Q_n \subseteq X_n$ *дискретно в смысле Моско сходится* к $Q \subseteq X$, если выполнены условия:

1) для любого $x \in Q$ существует последовательность $\{x_n\}, x_n \in Q_n$, такая что

$x_n \xrightarrow{d} x$;
2) если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}, x_{n_k} \in Q_{n_k}$, дискретно слабо сходящаяся к $x \in X$, то $x \in Q$.
Для такой сходимости примем обозначение $Q_n \overset{M}{\dashrightarrow} Q$.

Представленный аппарат дискретной аппроксимации применим к методу регуляризации с B-симметричным и B-положительным оператором. Предполагается, что $X_n \overset{p_n}{\approx} X$, где X_n, X — равномерно выпуклые банаховы пространства, X — сепарабельно, пара X, (X_n) обладает дискретным свойством Ефимова-Стечкина. Также $X_n^* \overset{p_n'}{\approx} X^*$, причём выполнено условие согласованности аппроксимаций. Пусть Y_n, Y — рефлексивные пространства, $Y_n \overset{q_n}{\approx} Y$, $Y_n^* \overset{q_n'}{\approx} Y^*$ с выполнением условия согласованности аппроксимаций. Пусть A_n — семейство B_n-симметричных и B_n-положительных операторов, где $A_n \in \mathcal{L}(X_n, Y_n)$, $B_n \in \mathcal{L}(X_n, Y_n^*)$. Аппроксимируем задачу (1.2.4) задачей

$$\min_{\xi \in Q_n} \{\langle A_n\xi, B_n\xi\rangle - 2\langle y_\delta^n, B_n\xi\rangle + \alpha\|\xi - x_n^0\|^2\}, \tag{1.3.1}$$

где $y_\delta^n \in Y_n$, $x_n^0 \in X_n$: $y_\delta^n \xrightarrow{d} y_\delta$, $x_n^0 \xrightarrow{d} x^0$; $Q_n \subseteq X_n$ — выпуклые замкнутые множества, дискретно сходящиеся по Моско к Q ($Q_n \overset{M}{\dashrightarrow} Q$). Введём обозначения для минимизируемых функционалов в задачах (1.2.4) и (1.3.1) соответственно $\Phi(x), \Phi_n(\xi)$, а для их минимальных значений μ и μ_n. Обозначим решения этих задач через $\tilde{x}$ и $\tilde{x}_n$ так, что $\mu = \Phi(\tilde{x})$ и $\mu_n = \Phi_n(\tilde{x}_n)$.

Лемма 1.3.2. *Пусть при указанных предпосылках $B_n \overset{w}{\dashrightarrow} B$ и $A_n \dashrightarrow A$. Тогда пара функционалов $\Phi, (\Phi_n)$ дискретно слабо полунепрерывна снизу, т.е. для любых $x_n \in X_n$, $x \in X$ выполнено*

$$x_n \xrightarrow{dw} x \Rightarrow \Phi(x) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \Phi_n(x_n).$$

Доказательство. В силу предложения 1.3.1 достаточно установить слабую полунепрерывность снизу функционала $\langle Ax, Bx\rangle$. Поскольку A_n — B_n-положительный оператор, то для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\langle A_n(x_n - p_nx), B_n(x_n - p_nx)\rangle \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \langle A_n(x_n - p_nx), B_n(x_n - p_nx)\rangle \geqslant 0.$$

Воспользовавшись линейностью операторов A_n и B_n, получим

$$\langle A_n(x_n - p_n x), B_n(x_n - p_n x)\rangle =$$
$$= \langle A_n x_n, B_n x_n\rangle - \langle A_n x_n, B_n p_n x\rangle - \langle A_n p_n x, B_n x_n\rangle + \langle A_n p_n x, B_n p_n x\rangle =$$
$$= \langle A_n x_n, B_n x_n\rangle - 2\langle A_n p_n x, B_n x_n\rangle + \langle A_n p_n x, B_n p_n x\rangle.$$

В силу дискретной слабой сходимости B_n к B и дискретной сходимости A_n к A имеем

$$B_n x_n \xrightarrow{dw} Bx,\ B_n p_n x \xrightarrow{dw} Bx,\ A_n p_n x \xrightarrow{d} Ax.$$

Из рефлексивности Y_n и Y вытекает, что

$$\langle A_n p_n x, B_n x_n\rangle \to \langle Ax, Bx\rangle,\ \langle A_n p_n x, B_n p_n x\rangle \to \langle Ax, Bx\rangle \text{ при } n \to +\infty.$$

Поэтому имеем

$$\varliminf_{n\to+\infty} \langle A_n(x_n - p_n x), B_n(x_n - p_n x)\rangle =$$
$$= \varliminf_{n\to+\infty} \{\langle A_n x_n, B_n x_n\rangle - 2\langle A_n p_n x, B_n x_n\rangle + \langle A_n p_n x, B_n p_n x\rangle\} =$$
$$= \{\varliminf_{n\to+\infty} \langle A_n x_n, B_n x_n\rangle\} - 2\langle Ax, Bx\rangle + \langle Ax, Bx\rangle =$$
$$= \{\varliminf_{n\to+\infty} \langle A_n x_n, B_n x_n\rangle\} - \langle Ax, Bx\rangle \geqslant 0.$$

Лемма 1.3.2 доказана.

При всех указанных предпосылках имеет место следующая теорема о дискретной аппроксимации метода регуляризации.

Теорема 1.3.1. *Если* $B_n \overset{w}{\dashrightarrow} B$ *и* $A_n \dashrightarrow A$, *то* $\tilde{x}_n \xrightarrow{d} \tilde{x}$ *и* $\mu_n \to \mu$ *при* $n \to +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения Моско-сходимости следует, что найдется последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in Q_n$, такая что $x_n \xrightarrow{d} \tilde{x}$. Поэтому имеем сходимость $B_n x_n \xrightarrow{dw} B\tilde{x}$ и $A_n x_n \xrightarrow{d} A\tilde{x}$. Из условия согласованности аппроксимаций $Y_n \overset{q_n}{\sim} Y$ и $Y_n^* \overset{q_n'}{\sim} Y^*$ вытекает, что $\langle A_n x_n, B_n x_n\rangle \to \langle A\tilde{x}, B\tilde{x}\rangle$ и $\langle y_\delta^n, B_n x_n\rangle \to \langle y_\delta, B\tilde{x}\rangle$. Поскольку из дискретной сходимости элементов вытекает и сходимость их норм, то учитывая все вышесказанное получим, что существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_n(x_n) = \Phi(\tilde{x})$. Так как $\tilde{x}_n$ — точка минимума функционала Φ_n, то имеет место неравенство $\Phi_n(\tilde{x}_n) \leqslant \Phi_n(x_n)$, и, следовательно, справедлива следующая цепочка соотношений

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \mu_n = \varlimsup_{n\to+\infty} \Phi_n(\tilde{x}_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \Phi_n(x_n) = \Phi(\tilde{x}) = \mu.$$

Докажем теперь, что последовательность $\{\tilde{x}_n\}$ имеет ограниченные нормы. Действительно, $\Phi_n(\tilde{x}_n) \leqslant \Phi_n(0) = \alpha\|x_n^0\|^2 \leqslant \mathrm{Const}$, поскольку $\{x_n^0\}$ по условию теоремы дискретно сходится. Оценивая снизу функционал Φ_n, получим

$$\alpha(\|\tilde{x}_n\| - \|x_n^0\|)^2 - 2\|B_n\| \cdot \|\tilde{x}_n\| \cdot \|y_\delta^n\| \leqslant \Phi_n(\tilde{x}_n) \leqslant \mathrm{Const}.$$

В силу дискретной сходимости нормы $\|y_\delta^n\|$,$\|x_n^0\|$ и $\|B_n\|$ ограничены. Поэтому из квадратичной оценки вытекает и ограниченность норм $\|\tilde{x}_n\|$. Поскольку пространство X рефлексивно, будучи равномерно выпуклым и банаховым (см. [31], стр. 182), и сепарабельно, то найдется элемент $\tilde{\tilde{x}} \in X$ и подпоследовательность $\tilde{x}_{n_k} \in Q_{n_k}$, такая что $\tilde{x}_{n_k} \xrightarrow{dw} \tilde{\tilde{x}}$ при $k \to +\infty$. По второму условию из определения Моско-сходимости получаем, что $\tilde{\tilde{x}} \in Q$. Учитывая слабую дискретную полунепрерывность снизу функционалов Φ и Φ_n и полученную выше оценку для верхнего предела μ_n, получим

$$\mu = \Phi(\tilde{x}) \leqslant \Phi(\tilde{\tilde{x}}) \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \Phi_{n_k}(\tilde{x}_{n_k}) = \varliminf_{k\to+\infty} \mu_{n_k} \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} \mu_{n_k} \leqslant \mu.$$

Поскольку задача $\min\limits_{x\in Q} \Phi(x)$ имеет единственное решение, получим, что

$$\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}.$$

Тем самым установлено, что у ограниченной последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ все слабые дискретные пределы совпадают с $\tilde{x}$, т.е. $\tilde{x}_n \xrightarrow{dw} \tilde{x}$ при $n \to +\infty$. Отсюда, в силу слабой дискретной полунепрерывности снизу функционалов Φ и Φ_n, получим уже для всей последовательности $\{\mu_n\}$ соотношения

$$\mu = \Phi(\tilde{x}) \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \Phi_n(\tilde{x}_n) = \varliminf_{n\to+\infty} \mu_n \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \mu_n \leqslant \mu,$$

из которых вытекает требуемая сходимость $\mu_n \to \mu$. Так как B_n сходятся дискретно слабо, то $B_n\tilde{x}_n \xrightarrow{dw} B\tilde{x}$. Поскольку $y_\delta^n \xrightarrow{d} y_\delta$, то $\langle y_\delta^n, B_n\tilde{x}_n\rangle \to \langle y_\delta, B\tilde{x}\rangle$. Следовательно,

$$\langle A_n\tilde{x}_n, B_n\tilde{x}_n\rangle + \alpha\|\tilde{x}_n - x_n^0\|^2 \to \langle A\tilde{x}, B\tilde{x}\rangle + \alpha\|\tilde{x} - x^0\|^2.$$

Принимая во внимание слабую дискретную полунепрерывность снизу обоих слагаемых, получим

$$\langle A\tilde{x}, B\tilde{x}\rangle + \alpha\|\tilde{x} - x^0\|^2 \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \langle A_n\tilde{x}_n, B_n\tilde{x}_n\rangle + \alpha \varliminf_{n\to+\infty} \|\tilde{x}_n - x_n^0\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to+\infty}\{\langle A_n\tilde{x}_n, B_n\tilde{x}_n\rangle + \alpha\|\tilde{x}_n - x_n^0\|^2\} = \langle A\tilde{x}, B\tilde{x}\rangle + \alpha\|\tilde{x} - x^0\|^2.$$

Из полученной цепочки неравенств вытекает, что никакая подпоследовательность последовательности

$$\{\langle A_n\tilde{x}_n, B_n\tilde{x}_n\rangle\}$$

не может сходиться к величине строго большей, чем $\langle A\tilde{x}, B\tilde{x}\rangle$, поскольку в этом случае взятая по тем же самым номерам подпоследовательность в

$$\{\|\tilde{x}_n - x_n^0\|^2\}$$

сходилась бы к величине строго меньшей, чем $\|\tilde{x} - x^0\|^2$, что противоречило бы слабой дискретной полунепрерывности снизу нормы. Таким образом, получаем равенства

$$\langle A\tilde{x}, B\tilde{x}\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle A_n\tilde{x}_n, B_n\tilde{x}_n\rangle \text{ и } \|\tilde{x} - x^0\|^2 = \lim_{n\to+\infty}\|\tilde{x}_n - x_n^0\|^2.$$

Поскольку пара $X, (X_n)$ обладает дискретным свойством Ефимова-Стечкина, то из сходимости $\tilde{x}_n - x_n^0 \xrightarrow{dw} \tilde{x} - x^0$ и $\|\tilde{x}_n - x_n^0\| \to \|\tilde{x} - x^0\|$ вытекает дискретная сходимость $\tilde{x}_n - x_n^0$ к $\tilde{x} - x^0$. Поскольку $x_n^0 \xrightarrow{d} x^0$, то окончательно получим требуемое соотношение $\tilde{x}_n \xrightarrow{d} \tilde{x}$. Теорема 1.3.1 доказана.

1.4. Численное моделирование

Приведём модельный пример для представленной теоретической схемы регуляризации. Рассмотрим интегральное уравнение

$$Ax = \int\limits_0^1 \varphi(s)(t-1)x(s)ds = 1.5(t-1), \text{ где } \varphi(s) = \begin{cases} s, & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ s+1, & \frac{1}{2} < s \leqslant 1. \end{cases}$$

Пусть $X = L_p[0,1], Y = L_q[0,1], 1 < p < +\infty, q = p/(p-1)$. При $Bx = \int\limits_0^1 \varphi(s)(t-0.5)x(s)ds$ оператор A — B-симметричный и B- положительный, но не является симметричным и положительным. В самом деле, для произвольных $x, x_1, x_2 \in L_p[0,1]$ выпишем соответствующие билинейную и квадратичные формы, имеем:

$$\langle Ax_1, Bx_2 \rangle = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 \varphi(s)(t-1)x_1(s)ds \Big) \Big(\int\limits_0^1 \varphi(s)(t-0.5)x_2(s)ds \Big) dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 \varphi(s)(t-0.5)x_1(s)ds \Big) \Big(\int\limits_0^1 \varphi(s)(t-1)x_2(s)ds \Big) dt = \langle Ax_2, Bx_1 \rangle;$$

$$\langle Ax, Bx \rangle = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 \varphi(s)(t-1)x(s)ds \Big) \Big(\int\limits_0^1 \varphi(s)(t-0.5)x(s) \Big) dt =$$

$$= \Big(\int\limits_0^1 \varphi(s)x(s)ds \Big)^2 \int\limits_0^1 (t-1)(t-0.5)dt = \frac{1}{12} \Big(\int\limits_0^1 \varphi(s)x(s)ds \Big)^2 \geqslant 0,$$

причем $\langle Ax, Bx \rangle = 0$ в том и только в том случае, когда $\int\limits_0^1 \varphi(s)x(s)ds = 0$, т.е. $Ax = 0$. Поскольку $\varphi(s)(t-1) \neq \varphi(t)(s-1)$, то сам оператор A не может быть симметричным, и достаточно взять, например, значение $x(s) \equiv s$, чтобы убедится, что $\langle Ax, x \rangle < 0$.

При заданной правой части $y(t) = 1.5(t-1)$ нормальное решение уравнения (для $x^0 \equiv 0$) вычисляется по формуле

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} C_p t^{\frac{1}{p-1}}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ C_p (t+1)^{\frac{1}{p-1}}, & \frac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}, \text{ где } C_p = \frac{3 \cdot 2^{\frac{p}{p-1}} \cdot (2p-1)}{(p-1)(1 + 2^{\frac{4p-2}{p-1}} - 3^{\frac{2p-1}{p-1}})},$$

т.е. является разрывным при $1 < p < +\infty$.

Проиллюстрируем эффективность регулярного алгоритма, описанного выше, при восстановлении разрывного решения для возмущенной правой части при значениях параметра $1 < p \leqslant 5$ на модельных рассчётах.

Правая часть уравнения моделировалась с возмущением $y_\delta(t) = y(t) + \delta \sin(100\,t)$. Параметр регуляризации выбирался по правилу $\alpha(\delta) = \sqrt{\delta}$. В качестве аппроксимирующих пространств выбраны пространства n-мерных векторов $X_n = Y_n = \ell_p^n$ с нормой $\|\xi\|_{\ell_p^n} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} h|\xi_i|^p\right)^{1/p}$ для $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \ell_p^n$, $h = \frac{1}{n}$. При этом $(\ell_p^n)^* = \ell_q^n$, где q — сопряжённый показатель. Связывающие операторы можно задавать в одной из двух эквивалентных форм:

$$p_n x = \left(n \cdot \int\limits_0^{1/n} x(s)ds,\ \ldots,\ n \cdot \int\limits_{(n-1)/n}^{1} x(s)ds \right),$$

$$p_n'(x) = (x(0), \ldots, x((n-1)/n)).$$

При этом p_n заданы на всём пространстве $L_p[0,1]$, а p_n' — лишь на всюду плотном в X множестве непрерывных функций. Однако (см. [15], стр. 162–164) семейство p_n' можно продолжить на всё пространство X, причём системы связывающих операторов p_n и p_n' будут определять эквивалентные дискретные сходимости.

Обозначим $K(s,t) = \varphi(s)(t-1)$, $R(s,t) = \varphi(s)(t-0.5)$, $K_{ji} = K\left(\frac{j}{n}, \frac{i}{n}\right)$, $R_{ji} = R\left(\frac{j}{n}, \frac{i}{n}\right)$. Определим дискретную аппроксимацию операторов A и B по формулам:

$$A_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} K_{j1}\xi_j, \ldots, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} K_{jn}\xi_j \right),$$

$$B_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R_{j1}\xi_j, \ldots, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R_{jn}\xi_j \right).$$

Элементы y_δ и x^0 аппроксимируем векторами $p_n'(y_\delta) = (y_1, \ldots, y_n)$ и $p_n'(x^0) = (0, \ldots, 0)$. В результате дискретизации получится задача минимизации функции n переменных

$$\min_{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \ell_p^n} \Phi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n), \tag{1.4.1}$$

где

$$\Phi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = h^3 \sum_{i,j,l=1}^{n} K_{ji} R_{li} \xi_j \xi_l - 2h^2 \sum_{i,j=1}^{n} R_{ji} \xi_j y_i + \alpha \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} h|\xi_i|^p \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Функция Φ_n непрерывна, выпукла и дифференцируема всюду, за исключением точек, где $x_i = 0$ при некотором $i = 1, \ldots, n$. Тем не менее Φ_n субдифференцируема всюду в ℓ_p^n. Поэтому при решении задачи (1.4.1) использовались субградиентные итерационные методы (см. [20, 50]) в форме

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \beta_k \frac{g^{(k)}}{\|g^{(k)}\|}, \quad g^{(k)} \in \partial\Phi_n(x^{(k)}),$$

где $\partial\Phi_n(x^{(k)})$ — субдифференциал функции Φ_n, $\{\beta_k\}$ — последовательность параметров, удовлетворяющая условиям

$$\beta_k > 0,\ \beta_k \to 0,\ \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k = +\infty.$$

Субградиент $g \in \partial\Phi_n(x)$ — это вектор, составленный из частных субпроизводных

$$g = \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n} \right),$$

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial\xi_s}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = h^3 \sum_{i,j=1}^{n} (K_{si}R_{ji} + K_{ji}R_{si})\xi_j - 2h^2 \sum_{i=1}^{n} R_{si}y_i +$$

$$+2\alpha \left(\sum_{j=1}^{n} h|\xi_j|^p \right)^{\frac{2}{p}-1} \cdot h|\xi_i|^{p-1} \operatorname{sign} \xi_i.$$

В качестве начального приближения брался вектор $x^{(0)} = (0.1, \ldots, 0.1)$. Параметр β_k выбирался по формуле $\beta_k = 1/k$. Проведённый численный эксперимент показал, что после около 10^3 итераций нормальное решение $\hat{x}$ восстанавливается с погрешностью порядка $\sqrt[6]{\delta}$, при этом разрыв, имеющийся в нормальном решении в точке $t = \frac{1}{2}$, не заглаживается, а восстанавливается с высокой точностью.

Глава 2. Итерационный метод решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах

Во второй главе рассматривается итерационный метод решения линейного операторного уравнения с B-симметричным и B-положительным оператором. В первом параграфе главы приводится развернутая формулировка задачи, описывается предыстория развития аналогичных методов в работах других авторов. Второй параграф посвящен изложению вспомогательного математического аппарата, необходимого для формулировки и доказательства предлагаемого итерационного метода. Третий параграф является "ядром" всей главы и содержит формулировку и доказательство основного итерационного метода решения операторного уравнения для случая невозмущенных данных. В четвертом параграфе обосновывается асимптотическая устойчивость метода при возмущении в операторе и в правой части уравнения. В заключительном параграфе главы приводятся простые иллюстративные примеры для изложенной теоретической схемы. Результаты проведенного вычислительного эксперимента представлены на рисунках 1–4 и в таблице 1.

2.1. Постановка задачи

Пусть X — равномерно выпуклое и гладкое банахово пространство, Y — произвольное вещественное банахово пространство. Рассматривается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{2.1.1}$$

где $A\colon X \longrightarrow Y$ — действующий на паре банаховых пространств непрерывный B-симметричный и B-положительный оператор, $B\colon X \longrightarrow Y^*$ — линейный непрерывный оператор. Задача (2.1.1) может быть некорректно поставленной, т. е. решение может быть неединственным (если вообще существует) либо оно может не зависеть непрерывным образом от возмущений в правой части уравнения (2.1.1) или в операторе A; например, это имеет место, когда A — компактный оператор, заданный в бесконечномерном пространстве. Хронологически одним из первых и широко известных итерационных алгоритмов в гильбертовом пространстве является метод Ландвебера [79]

$$x_{n+1} = x_n - \mu_n A^*(Ax_n - y)$$

с соответствующим выбором начального приближения x_0 и параметра шага μ_n.

В современных работах немецких математиков Шопфера и Шустера [85 и др.] предлагается обобщение этого метода для банаховых пространств в виде

$$J_X(x_{n+1}) = J_X(x_n) - \mu_n A^* J_Y(Ax_n - y), \quad x_{n+1} = J_{X^*}(J_X(x_{n+1})), \tag{2.1.2}$$

где $J_X : X \longrightarrow 2^{X^*}$ — так называемое дуальное отображение банахова пространства, строгое определение которого мы приведем в следующем параграфе. Авторы также предполагают наличие у пространства X свойств равномерной выпуклости и гладкости, в то время как Y полагается произвольным банаховым пространством.

В данной главе исследуется итерационный метод

$$J_X(x_{n+1}) = J_X(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y), \quad x_{n+1} = J_{X^*}(J_X(x_{n+1})), \tag{2.1.3}$$

который является некоторой модификацией процесса (2.1.2); здесь операторы A и B связаны между собой соотношениями B-симметричности и B-положительности. Формулировке всех необходимых определений и понятий применяемого математического аппарата посвящен следующий параграф диссертации.

Если оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то сопряженный к нему оператор A^* принадлежит пространству $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$, и $\|A\| = \|A^*\|$. Отметим, что в нашей постановке для оператора $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ формально $B^* \in \mathcal{L}(Y^{**}, X^*)$. Однако, используя существование естественного вложения $\pi\colon Y \longrightarrow Y^{**}$ (см. [34, с. 191]), будем считать оператор B^* определенным на всем пространстве Y. Для произвольных вещественных чисел a и b, следуя первоисточникам [91, 85], будем использовать обозначения

$$a \vee b := \max\{a, b\}, \quad a \wedge b := \min\{a, b\}.$$

Через $p, q \in (1, +\infty)$ обозначаем сопряженные показатели, т. е.

$$1/p + 1/q = 1.$$

2.2. Дуальные отображения и дистанция Брэгмана

Изложим здесь для полноты основные известные факты о геометрии банаховых пространств. Существует тесная взаимосвязь между такими свойствами банахова пространства, как выпуклость, гладкость и определенными свойствами дуального отображения. Приведем кратко те из них, которые потребуются нам в дальнейшем. Более подробная информация со всеми доказательствами может быть найдена в специализированной литературе, например в [70, 21, 80].

Определение 2.2.1. Функция $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$, определяемая правилом

$$\delta_X(\varepsilon) := \inf \Big\{ 1 - \Big\| \frac{1}{2}(x+y) \Big\| \colon \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \geqslant \varepsilon \Big\},$$

называется *модулем выпуклости* пространства X.

Определение 2.2.2. Функция $\rho_X : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, определяемая правилом

$$\rho_X(\tau) = \frac{1}{2} \sup \big\{ \|x+y\| + \|x-y\| - 2 \colon \|x\| = 1,\ \|y\| \leqslant \tau \big\},$$

называется *модулем гладкости* пространства X.

Определение 2.2.3. Линейное нормированное пространство X

(a) называется *строго выпуклым*, если единичная сфера в этом пространстве не содержит отрезков прямой, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $\|x_1\| = \|x_2\| = 1,\ x_1 \neq x_2$, и для всех $\lambda \in (0,1)$ выполнено $\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| < 1$;

(b) называется *гладким*, если для любого $x \in X,\ x \neq 0$, существует единственный $x^* \in X^*$ такой, что $\|x^*\| = 1$ и $\langle x, x^* \rangle = \|x\|$;

(c) называется *равномерно выпуклым*, если $\delta_X(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \in (0,2]$;

(d) называется *равномерно гладким*, если $\lim\limits_{\tau \to +0} [\rho_X(\tau)/\tau] = 0$.

Перечислим основные свойства функции $\rho_X(\tau)$ [21, 80]:

- $\rho_X(0) = 0,\ \rho_X(\tau) \leqslant \tau$;
- $\rho_X(\tau)$ — выпуклая, непрерывная и строго монотонно возрастающая функция;
- $\rho_X(\tau)/\tau$ — неубывающая функция.

Определение 2.2.4. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ \varphi(0) = 0,$ — непрерывная строго возрастающая функция (такая функция называется *функцией роста*). Отображение $J_\varphi \colon X \longrightarrow 2^{X^*}$, определяемое по формуле

$$J_\varphi(x) = \big\{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \|x\|,\ \|x^*\| = \varphi(\|x\|) \big\}, \tag{2.2.1}$$

называется *дуальным отображением* пространства X *с функцией роста* φ.

Всюду в дальнейшем мы будем использовать дуальные отображения банаховых пространств со степенными функциями вида $\varphi(t) = t^{p-1}\,(p > 1)$ в качестве функций роста, которые будем обозначать $J_p(x)$ и называть для краткости *дуальными отображениями p-й степени.* В этом случае соотношение (2.2.1) примет вид

$$J_p(x) = \big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|,\ \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\big\}. \tag{2.2.2}$$

При $p = 2$ дуальное отображение называется *каноническим* или *нормализованным* дуальным отображением и обозначается $J(x)$. Через $J_{*q}\colon X^* \longrightarrow X^{**}$ обозначаем определяемое аналогично дуальное отображение сопряженного пространства X^*. В случае рефлексивности пространства X можно считать, что J_{*q} действует из X^* в X.

Следующая теорема (см. [85, с. 314], а также [21, 70]) собирает воедино основные известные факты о свойствах выпуклости и гладкости пространств и показывает, что эти понятия являются взаимно двойственными.

Теорема 2.2.1. *Пусть X — банахово пространство. Тогда*

(a) *X равномерно выпукло (соответственно равномерно гладко) $\Leftrightarrow$ X^* равномерно гладко (соответственно равномерно выпукло).*

(b) *Если X равномерно выпукло, то X рефлексивно и строго выпукло.*

(c) *Если X равномерно гладко, то X рефлексивно и гладко.*

(d) *Пусть X рефлексивно. Тогда X строго выпукло (соответственно гладко) $\Leftrightarrow$ X^* гладко (соответственно строго выпукло).*

(e) *X строго выпукло $\Leftrightarrow$ дуальное отображение пространства X произвольно выбранной p-й степени строго монотонно, т. е. $\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle > 0$ для всех $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ и $x_1^* \in J_p(x_1)$, $x_2^* \in J_p(x_2)$.*

(f) *X гладко $\Leftrightarrow$ дуальное отображение J_p для некоторого p (а значит, и для всех $p > 1$) однозначно, т. е. для любого $x \in X$ множество $J_p(x) \subseteq X^*$ состоит из одного элемента, который будем обозначать также через $J_p(x)$.*

(g) *Если X рефлексивно, строго выпукло и гладко, тогда дуальное отображение J_p однозначно, биективно и сильно-слабо непрерывно в том смысле, что $J_p(x_n) \xrightarrow{сл.} J_p(x)$ для всех $x_n \to x$. Обратное к J_p отображение $J_p^{-1} : X^* \longrightarrow X$ вычисляется по формуле $J_p^{-1} = J_{*q}$, где J_{*q} — дуальное отображение q-й степени пространства X^*.*

(h) *Пусть $M \neq \varnothing$ — выпуклое замкнутое подмножество рефлексивного строго выпуклого пространства X. Тогда существует единственный $x \in M$ такой, что*

$$\|x\| = \inf_{z \in M} \|z\|.$$

Если дополнительно X является гладким пространством, тогда для всех $z \in M$ выполнено неравенство $\langle J_p(x), x\rangle \leqslant \langle J_p(x), z\rangle$.

З а м е ч а н и е. Гладкость пространства также тесно связана с дифференцируемостью его нормы:

- X гладко $\Leftrightarrow$ его норма дифференцируема по Гато на $X \backslash \{0\}$;
- X равномерно гладко $\Leftrightarrow$ его норма равномерно дифференцируема по Фреше на $X \backslash \{0\}$.

Нам потребуется неравенство для равномерно гладкого пространства [91]. В доказательстве сходимости нашего метода оно будет играть ключевую роль.

Теорема 2.2.2. *Пусть X — равномерно гладкое пространство. Тогда для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено характеристическое неравенство Ксю — Роуч*

$$\|x_1 - x_2\|^p \leqslant \|x_1\|^p - p\langle J_p(x_1), x_2\rangle + \sigma_p(x_1, x_2).$$

Здесь

$$\sigma_p(x_1, x_2) = p\, G_p \int\limits_0^1 \frac{(\|x_1 - tx_2\| \vee \|x_1\|)^p}{t} \rho_X \left(\frac{t\|x_2\|}{\|x_1 - tx_2\| \vee \|x_1\|} \right) dt, \qquad (2.2.3)$$

где $G_p = 64c/K_p$,

$$K_p = 4(2 + \sqrt{3}) \min \Big\{ N_1, N_2, N_3, N_4 \Big\},$$

и

$$N_1 = \frac{1}{2}p(p-1) \wedge 1,\ N_2 = \Big(\frac{1}{2}p \wedge 1\Big)(p-1),$$
$$N_3 = (p-1)(1 - (\sqrt{3} - 1)^q),\ N_4 = 1 - (1 + (2 - \sqrt{3})q)^{1-p},$$
$$c = 4\frac{\tau_0}{\sqrt{1 + \tau_0^2} - 1} \prod_{j=1}^{+\infty} \Big(1 + \frac{15}{2^{j+2}}\tau_0\Big), \quad \tau_0 = \frac{\sqrt{339} - 18}{30}.$$

О п р е д е л е н и е 2.2.5. Пусть $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ — выпуклый функционал. *Субдифференциалом* f называется отображение $\partial f\colon X \longrightarrow 2^{X^*}$, определяемое по правилу

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* | \langle x^*, z - x\rangle \leqslant f(z) - f(x), \forall z \in X\}.$$

Рассмотрим теперь функционал вида $f_p(x) := (1/p)\|x\|^p$, $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$, который часто фигурирует в теории выпуклой оптимизации и в различных задачах, рассматриваемых в контексте банаховых пространств. Эдгаром Асплундом была установлена взаимосвязь между субдифференциалом этого функционала и дуальным отображением пространства X (см., например, [70]). Приведем здесь для полноты изложения этот факт вместе с полным доказательством.

Теорема 2.2.3. *Дуальное отображение пространства X и субдифференциал функционала f_p совпадают как отображения, т.е. $\forall x \in X$ выполнено $\partial f_p(x) = J_p(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x^* \in \partial f_p(x)$, т.е. для любых $z \in X$ выполнено неравенство

$$\langle x^*, z - x\rangle \leqslant \frac{1}{p}\|z\|^p - \frac{1}{p}\|x\|^p. \tag{2.2.4}$$

Рассмотрим вначале случай, когда $x = 0$. Тогда будем иметь для всех $z \in X$ неравенство

$$\langle x^*, z\rangle \leqslant \frac{1}{p}\|z\|^p. \tag{2.2.5}$$

Поскольку $J_p(0) = \{0\}$, нам необходимо убедиться, что $x^* = 0$. Предположим от противного, что $x^* \neq 0$, тогда найдется такой $\tilde{z} \in X$, что $\langle x^*, \tilde{z}\rangle > 0$ и $\|\tilde{z}\| > 0$. Подставим в неравенство (2.2.5) вместо z элементы вида $t\tilde{z}$ при $t > 0$, имеем $0 < t\langle x^*, \tilde{z}\rangle \leqslant \frac{1}{p}t^p\|\tilde{z}\|^p$. Сократив полученные неравенства на t и перейдя к пределу при $t \to +0$, приходим к противоречивым неравенствам $0 < \langle x^*, \tilde{z}\rangle \leqslant 0$. Переходим теперь к основному случаю $x \neq 0$. Подставим в неравенство (2.2.4) вместо z элементы вида tx при $t > 0$, получим

$$(t-1)\langle x^*, x\rangle \leqslant \frac{1}{p}t^p\|x\|^p - \frac{1}{p}\|x\|^p = \frac{1}{p}(t^p - 1)\|x\|^p.$$

Отсюда, сокращая на $t - 1$, выводим

$$\begin{cases} \langle x^*, x\rangle \leqslant \frac{1}{p}\frac{t^p-1}{t-1}\|x\|^p, & \text{при } t > 1; \\ \langle x^*, x\rangle \geqslant \frac{1}{p}\frac{t^p-1}{t-1}\|x\|^p, & \text{при } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Переходя к пределу в первом из неравенств при $t \to 1+0$, а во втором — при $t \to 1-0$, будем одновременно иметь

$$\langle x^*, x\rangle \leqslant \|x\|^p \ \text{ и } \ \langle x^*, x\rangle \geqslant \|x\|^p,$$

что означает равенство $\langle x^*, x\rangle = \|x\|^p$. Для того чтобы окончательно установить, что $x^* \in J_p(x)$, нам осталось проверить выполнение равенства $\|x^*\| = \|x\|^{p-1}$. С одной стороны, как легко увидеть,

$$\|x\|^p = \langle x^*, x\rangle \leqslant \|x^*\|\|x\|,$$

откуда $\|x\|^{p-1} \leqslant \|x^*\|$. С другой стороны, пусть $S_{\|x\|}$ — сфера в пространстве X с центром в нуле радиуса $\|x\|$. Тогда для любого $z \in S_{\|x\|}$ имеем согласно (2.2.4) $\langle x^*, z-x\rangle \leqslant 0$ или $\langle x^*, z\rangle \leqslant \langle x^*, x\rangle = \|x\|^p$. По определению нормы в сопряженном пространстве справедливы соотношения

$$\|x^*\| = \sup_{z\in S_{\|x\|}} \left|\frac{1}{\|z\|}\langle x^*, z\rangle\right| = \frac{1}{\|x\|}\sup_{z\in S_{\|x\|}} |\langle x^*, z\rangle| \leqslant \frac{1}{\|x\|}\|x\|^p = \|x\|^{p-1},$$

из которых вытекает, что $\|x^*\| = \|x\|^{p-1}$.

Обратно, пусть теперь $x^* \in J_p(x)$, т.е.

$$\begin{cases} \langle x^*, x\rangle = \|x\|^p, \\ \|x^*\| = \|x\|^{p-1}; \end{cases}$$

тогда мы имеем

$$\langle x^*, z-x\rangle = \langle x^*, z\rangle - \|x\|^p \leqslant \|x^*\|\|z\| - \|x\|^p.$$

Согласно неравенству Юнга

$$\|x^*\|\|z\| \leqslant \frac{1}{p}\|z\|^p + \frac{1}{q}\|x^*\|^q,$$

отсюда получаем дальнейшую оценку

$$\langle x^*, z-x\rangle \leqslant \frac{1}{p}\|z\|^p + \frac{1}{q}\|x^*\|^q - \|x\|^p = \frac{1}{p}\|z\|^p + \frac{1}{q}\|x\|^p - \|x\|^p = \frac{1}{p}\|z\|^p - \frac{1}{p}\|x\|^p,$$

означающую, что $x^* \in \partial f_p(x)$. Теорема 2.2.3 доказана.

В силу определенных особенных геометрических свойств банаховых пространств часто бывает более удобно использовать для доказательства сходимости регуляризующих алгоритмов вместо обычной нормы пространства функционал специального вида.

Определение 2.2.6. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — произвольный непрерывный строго выпуклый функционал. *Дистанцией Брэгмана* от $x_1 \in X$ до $x_2 \in X$ по функционалу f называется величина

$$\Delta_f(x_1, x_2) := f(x_2) - f(x_1) - \inf_{\xi \in \partial f(x_1)} \langle \xi, x_2 - x_1 \rangle.$$

Ниже используется дистанция Брэгмана только по функционалу f_p, определенному выше, для которой введем обозначение $\Delta_p(\cdot, \cdot)$. Тогда имеем согласно теореме 2.2.3

$$\Delta_p(x_1, x_2) = \frac{1}{p}\|x_2\|^p - \frac{1}{p}\|x_1\|^p - \inf_{\xi \in J_p(x_1)} \langle \xi, x_2 - x_1 \rangle. \qquad (2.2.6)$$

В силу теоремы 2.2.1 (f) и равенства (2.2.1) в гладком банаховом пространстве справедливы также формулы

$$\Delta_p(x_1, x_2) = \frac{1}{q}\|x_1\|^p + \frac{1}{p}\|x_2\|^p - \langle J_p(x_1), x_2 \rangle =$$

$$= \frac{1}{q}(\|x_1\|^p - \|x_2\|^p) + \langle J_p(x_2) - J_p(x_1), x_2 \rangle, \quad x_1, x_2 \in X. \qquad (2.2.7)$$

Дистанции Брэгмана в сопряженных пространствах связаны формулой

$$\Delta_p(x_1, x_2) = \Delta_q^*(J_p(x_2), J_p(x_1)).$$

Замечание. Функционал Δ_p не является метрикой. В общем случае для него выполняется только первое свойство из определения метрики. В гильбертовом пространстве $\Delta_2(x_1, x_2) = (1/2)\|x_1 - x_2\|^2$.

Следующее утверждение может быть найдено в [85, с. 316].

Теорема 2.2.4. *Пусть X — гладкое и равномерно выпуклое банахово пространство. Тогда для любых $x, z_1, z_2 \in X$ и последовательностей $\{x_n\} \subseteq X$ справедливы следующие свойства:*

(a) $\Delta_p(z_1, z_2) \geqslant 0$, *причем* $\Delta_p(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$;

(b) *ограниченность последовательности $\{x_n\}$ эквивалентна ограниченности числовой последовательности $\{\Delta_p(x_n, x)\}$*;

(c) *функционал Δ_p непрерывен по совокупности своих аргументов*;

(d) *следующие свойства эквивалентны:*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \lim_{n\to+\infty}\|x_n - x\| = 0, \\ &(ii) \quad \lim_{n\to+\infty}\|x_n\| = \|x\| \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty}\langle J_p(x_n), x\rangle = \langle J_p(x), x\rangle, \\ &(iii) \quad \lim_{n\to+\infty}\Delta_p(x_n, x) = 0; \end{aligned}$$

(e) $\{x_n\}$ — *последовательность Коши* $\Leftrightarrow$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такое, что для всех* $k, l \geqslant n_0$ *будет выполнено* $\Delta_p(x_k, x_l) < \varepsilon$.

Следующая лемма дает оценку сверху для дистанции Брэгмана.

Лемма 2.2.1. *Пусть* X — *гладкое строго выпуклое банахово пространство, тогда для любых* $x_1, x_2 \in X$ *справедливо неравенство*

$$\Delta_p(x_1, x_2) \leqslant \langle J_p(x_1) - J_p(x_2), x_1 - x_2\rangle. \tag{2.2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению

$$\Delta_p(x_1, x_2) = \frac{1}{p}(\|x_2\|^p - \|x_1\|^p) - \langle J_p(x_1), x_2 - x_1\rangle.$$

Требуется доказать неравенство

$$\frac{1}{p}(\|x_2\|^p - \|x_1\|^p) - \langle J_p(x_1), x_2 - x_1\rangle \leqslant \langle J_p(x_1) - J_p(x_2), x_1 - x_2\rangle.$$

Перенесем все члены в правую часть, воспользуемся свойством дистрибутивности и равенством $\langle J_p(x), x\rangle = \|x\|^p$. После приведения подобных членов приходим к неравенству

$$0 \leqslant \frac{1}{p}\|x_1\|^p + \frac{1}{q}\|x_2\|^p - \langle J_p(x_2), x_1\rangle = \Delta_p(x_2, x_1),$$

выполняющемуся с очевидностью. Лемма 2.2.1 доказана.

2.3. Сходимость итерационного процесса с точными данными

В этом параграфе исследуется итерационный процесс для аппроксимации решения наименьшей нормы (нормальное решение) уравнения (2.1.1), т. е. такой элемент $\hat{x} \in X$, что

$$A\hat{x} = y \quad \text{и} \quad \|\hat{x}\| = \inf\{\|z\| \mid z \in X,\ Az = y\}.$$

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение о свойствах нормального решения.

Лемма 2.3.1. *Пусть X рефлексивно, строго выпукло и гладко, $y \in \mathcal{R}(A)$. Тогда*

(a) *Существует единственное нормальное решение $\hat{x}$ уравнения* (2.1.1), *и* $J_p(\hat{x}) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$;

(b) *Если $\tilde{x}$ — какое-то решение уравнения* (2.1.1), *удовлетворяющее условию $J_p(\tilde{x}) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$, тогда $\tilde{x} = \hat{x}$.*

Доказательство. Поскольку $y \in \mathcal{R}(A)$, а оператор A линеен и непрерывен, то множество $M := \{z \in X | \, Az = y\}$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество в пространстве X. В силу теоремы 2.2.1 (п. (h)) нормальное решение $\hat{x}$ задачи (2.1.1) существует и единственно. Теперь пусть z обозначает произвольный элемент из $\ker(A) = \ker(A^*B)$. Тогда $(x \pm z) \in M$ и снова в силу п. (h) теоремы 2.2.1 получим $\langle J_p(\hat{x}), \hat{x}\rangle \leqslant \langle J_p(\hat{x}), \hat{x} \pm z\rangle = \langle J_p(\hat{x}), \hat{x}\rangle \pm \langle J_p(\hat{x}), z\rangle$. Отсюда следует, что $\langle J_p(\hat{x}), z\rangle = 0$, т. е. $J_p(\hat{x}) \in (\ker(A^*B))^\perp$. Учитывая легко проверяемое равенство $(\ker(A^*B))^\perp = \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$, приходим к обоснованию утверждения (a). Если теперь $\tilde{x} \in X$ удовлетворяет условиям п. (b), то в силу доказанного в предыдущем пункте найдется последовательность $\{x_n\} \subseteq X$ такая, что $J_p(\hat{x}) - J_p(\tilde{x}) = \lim\limits_{n\to+\infty} B^*Ax_n$. Тогда

$$\langle J_p(\hat{x}) - J_p(\tilde{x}), \hat{x} - \tilde{x}\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle B^*Ax_n, \hat{x} - \tilde{x}\rangle =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \langle Ax_n, B(\hat{x} - \tilde{x})\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle Bx_n, A(\hat{x} - \tilde{x})\rangle = 0,$$

поскольку $A\hat{x} = A\tilde{x} = y$. Из п. (e) теоремы 2.2.1 теперь следует, что $\tilde{x} = \hat{x}$. Лемма 2.3.1 доказана.

Сначала рассмотрим случай, когда операторы A и B и правая часть уравнения $y \in \mathcal{R}(A)$ заданы точно. Согласно лемме 2.3.1 существует и единственно нормальное решение $\hat{x}$ уравнения (2.1.1). Приведем пошаговое описание метода восстановления $\hat{x}$.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Если $y = 0$, тогда $\hat{x} = 0$, работа алгоритма закончена;

Шаг 2. Зафиксируем произвольные вещественные $p \in (1, +\infty)$ и $C \in (0, 1)$. Выберем начальное приближение $x_0 \in X$ таким образом, чтобы выполнялись условия

$$J_p(x_0) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}, \quad \Delta_p(x_0, \hat{x}) \leqslant \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p. \tag{2.3.1}$$

Для $n = 0, 1, 2, \ldots,$ повторяем следующий шаг 3 до тех пор, пока не наступит условие остановки алгоритма.

Шаг 3. Положим $R_n := \|B^*(Ax_n - y)\|$. Если $R_n = 0$, то на этом шаге n мы останавливаем алгоритм. В противном случае продолжаем работу, выбирая параметры по следующим правилам:

(1) Если $x_0 = 0$, положим

$$\overline{\mu}_0 := q^{p-1}\frac{\|B^*y\|^{p-2}}{\|A\|^{p-1}\|B\|^{p-1}} > 0, \quad \text{где} \quad q = \frac{p}{p-1}. \tag{2.3.2}$$

В качестве параметра шага выберем теперь произвольное $\mu_0 \in (0, \overline{\mu}_0)$.

(2) Для всех $n \geqslant 0$ (соответственно $n \geqslant 1$ в том случае, когда $x_0 = 0$) положим

$$\lambda_n := (\rho_{X^*}(1)) \wedge \left(\frac{C\,R_n}{2^q G_q\|x_n\|\|A\|\|B\|}\right) > 0, \tag{2.3.3}$$

где $G_q > 0$ — константа из соотношения (2.2.3). Поскольку X^* равномерно гладко, то по свойствам модуля гладкости (см. стр. 50) монотонная функция $\rho_{X^*}(\tau)/\tau$ на полуинтервале $(0, 1]$ принимает все значения из полуинтервала $(0, \rho_{X^*}(1)]$. Следовательно, найдется такое $\tau_n \in (0, 1]$, что

$$\frac{\rho_{X^*}(\tau_n)}{\tau_n} = \lambda_n. \tag{2.3.4}$$

Параметр шага итерационного метода положим тогда

$$\mu_n := \frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}}{R_n}. \tag{2.3.5}$$

Следующее приближение определяем по формулам

$$J_p(x_{n+1}) := J_p(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y) = J_p(x_n) - \mu_n B^*A(x_n - \hat{x}), \tag{2.3.6}$$

$$x_{n+1} = J_{*q}(J_p(x_{n+1})). \qquad \square$$

Заметим, что выбор начального приближения x_0 из соотношений (2.3.1) и определение итераций (2.3.6) гарантируют, что $J_p(x_n) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, всегда допустимым будет выбор $x_0 = 0$, поскольку $\Delta_p(0, \hat{x}) = (1/p)\|\hat{x}\|^p$ (в силу соотношения (2.2.7)).

Если на некотором шаге n выполнится правило остановки алгоритма $R_n = 0$, тогда имеем $B^*Ax_n = B^*y$, откуда получим $Ax_n = y$ в силу эквивалентности этих равенств. Из п. (b) леммы 2.3.1 вытекает, что $x_n = \hat{x}$.

Отметим также, что непосредственно при обосновании сходимости описанного алгоритма будет установлено, что $x_n \neq 0$ при всех $n \geqslant 1$. Это означает, что параметры λ_n и τ_n всегда корректно определены.

Теперь сформулируем и докажем теорему о сходимости алгоритма 1.

Теорема 2.3.1. *Пусть пространство X равномерно выпукло и гладко, а Y — произвольное банахово пространство. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ — B-симметричный и B-положительный оператор, где $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$. Пусть $y \in \mathcal{R}(A)$. Тогда существует такое $\overline{\mu}_0 > 0$ (см. формулу* (2.3.2)), *что при выборе x_0 согласно правилу* (2.3.1) *и любом $\mu_0 \in (0, \overline{\mu}_0)$ итерационный алгоритм* (2.3.6) *с правилом выбора параметра μ_n* (2.3.5) *либо останавливается на конечном шаге на нормальном решении $\hat{x}$, либо задает последовательность итераций $\{x_n\}$, сходящуюся сильно к $\hat{x}$ по норме пространства X.*

Доказательство. Если на некотором шаге n мы получим $R_n = 0$, то, как было отмечено выше, в этом случае $x_n = \hat{x}$, что и требуется. Поэтому будем теперь считать, что $R_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим числовую последовательность $\{\Delta_n\}$, определяемую по правилу

$$\Delta_n := \Delta_p(x_n, \hat{x}) = \frac{1}{q}\|x_n\|^p + \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p - \langle J_p(x_n), \hat{x} \rangle. \tag{2.3.7}$$

Схема дальнейшего доказательства будет следующей. Сперва мы выведем некоторое рекурсивное неравенство, которому удовлетворяет последовательность Δ_n и которое означает сходимость этой последовательности. Затем мы выберем некоторую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и установим, что она удовлетворяет свойству Коши и сходится к нормальному решению уравнения (2.1.1). На последнем этапе мы докажем, что и вся последовательность $\{x_n\}$ сходится сильно к $\hat{x}$.

Принимая во внимание равенства (2.2.2), (2.3.6) и (2.3.7), проведем следующие преобразования:

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{q}\|x_{n+1}\|^p + \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p - \langle J_p(x_{n+1}), \hat{x}\rangle =$$

$$= \frac{1}{q}\|J_{*q}(J_p(x_{n+1}))\|^p + \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p - \langle J_p(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y), \hat{x}\rangle =$$

$$= \frac{1}{q}\|J_p(x_n) - \mu_n B^*(Ax_n - y)\|^q + \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p - \langle J_p(x_n), \hat{x}\rangle + \mu_n\langle B^*(Ax_n - y), \hat{x}\rangle. \quad (2.3.8)$$

Разберем теперь отдельно случай, когда $x_0 = 0$. Тогда $\Delta_0 = 1/p\|\hat{x}\|^p$, и приведенная выше цепочка преобразований упростится:

$$\Delta_1 = \frac{1}{q}\mu_0^q\|B^*y\|^q + \Delta_0 - \mu_0\langle y, B\hat{x}\rangle. \quad (2.3.9)$$

Поскольку $\mu_0 < \overline{\mu}_0$, получим

$$\mu_0 < q^{p-1}\frac{\|B^*y\|^{p-2}}{\|A\|^{p-1}\|B\|^{p-1}} \leqslant q^{p-1}\frac{\|B^*y\|^{p-2}}{\|B^*A\|^{p-1}} =$$

$$= q^{p-1}\frac{\|B^*y\|^{2p-2}}{\|B^*y\|^p\|B^*A\|^{p-1}} = \frac{q^{p-1}}{\|B^*y\|^p}\left(\frac{\|B^*A\hat{x}\|^2}{\|B^*A\|}\right)^{p-1}.$$

В силу неравенства (1.1.2) имеем

$$\mu_0 < q^{p-1}\frac{\langle A\hat{x}, B\hat{x}\rangle^{p-1}}{\|B^*y\|^p} = q^{p-1}\frac{\langle y, B\hat{x}\rangle^{p-1}}{\|B^*y\|^p}.$$

Возведя обе части полученного неравенства в степень $q - 1 = 1/(p-1)$ и домножив на $(1/q)\mu_0\|B^*y\|^q$, приходим к неравенству

$$\frac{1}{q}\mu_0^q\|B^*y\|^q < \mu_0\langle y, B\hat{x}\rangle,$$

которое применительно к (2.3.9) даст нам $\Delta_1 < \Delta_0$, и, в частности, $x_1 \neq 0$.

Воспользовавшись теоремами 2.2.1(g) и 2.2.2 (применительно к пространству X^* и дуальному отображению J_{*q}) и преобразовав равенство (2.3.8) в случае $n \geqslant 0$ (соответственно $n \geqslant 1$, если $x_0 = 0$), получаем

$$\Delta_{n+1} \leqslant \frac{1}{q}\Big(\|J_p(x_n)\|^q - q\langle x_n, \mu_n B^*(Ax_n - y)\rangle + \sigma_q\big(J_p(x_n), \mu_n B^*(Ax_n - y)\big)\Big) +$$

$$+ \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p - \langle J_p(x_n), \hat{x}\rangle + \mu_n\langle Ax_n - y, B\hat{x}\rangle.$$

В силу равенств (2.3.7) и $\|J_p(x_n)\|^q = \|x_n\|^p$ имеем неравенство

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - \mu_n \langle A(x_n - \hat{x}), B(x_n - \hat{x}) \rangle + \frac{1}{q}\sigma_q\big(J_p(x_n), \mu_n B^*(Ax_n - y)\big).$$

Введем обозначение $\widetilde{R}_n := \langle A(x_n - \hat{x}), B(x_n - \hat{x}) \rangle \geqslant 0$. С учетом неравенства (1.1.2) установим следующие оценки, которые будут означать эквивалентность в сходимости к нулю последовательностей $\{R_n\}$ и $\{\widetilde{R}_n\}$:

$$\frac{R_n^2}{\|B^*A\|} \leqslant \widetilde{R}_n \leqslant R_n \|x_n - \hat{x}\|. \qquad (2.3.10)$$

Приняв новые обозначения, представленное выше рекуррентное соотношение можно переписать в форме:

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - \mu_n \widetilde{R}_n + \frac{1}{q}\sigma_q\big(J_p(x_n), \mu_n B^*(Ax_n - y)\big). \qquad (2.3.11)$$

Оценим теперь подынтегральное выражение в явной формуле (2.2.3) для вычисления σ_q. За счет выбора μ_n и τ_n согласно правилам (2.3.5) и (2.3.4) получаем для всех $t \in [0, 1]$

$$\Big(\|J_p(x_n) - t\mu_n B^*(Ax_n - y)\| \vee \|J_p(x_n)\|\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \|J_p(x_n)\| + \mu_n R_n = \|x_n\|^{p-1}(1 + \tau_n) \leqslant 2\|x_n\|^{p-1}$$

и

$$\Big(\|J_p(x_n) - t\mu_n B^*(Ax_n - y)\| \vee \|J_p(x_n)\|\Big) \geqslant \|J_p(x_n)\| = \|x_n\|^{p-1}.$$

Учитывая монотонность функции ρ_{X^*} и формулу (2.3.5), имеем оценку

$$\sigma_q(J_p(x_n), \mu_n B^*(Ax_n - y)) \leqslant qG_q \int\limits_0^1 \frac{(2\|x_n\|^{p-1})^q}{t} \rho_{X^*}\left(t \frac{\mu_n R_n}{\|x_n\|^{p-1}}\right) dt =$$

$$= 2^q q G_q \|x_n\|^p \int\limits_0^1 \frac{\rho_{X^*}(t\tau_n)}{t} dt = 2^q q G_q \|x_n\|^p \int\limits_0^{\tau_n} \frac{\rho_{X^*}(t)}{t} dt \leqslant$$
$$\leqslant 2^q q G_q \|x_n\|^p \rho_{X^*}(\tau_n).$$

Подставляя полученную оценку в (2.3.11), имеем

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - \mu_n \widetilde{R}_n + 2^q G_q \|x_n\|^p \rho_{X^*}(\tau_n) =$$
$$= \Delta_n - \frac{\tau_n \|x_n\|^{p-1} \widetilde{R}_n}{R_n} \left(1 - 2^q G_q \frac{\rho_{X^*}(\tau_n)}{\tau_n} \frac{\|x_n\| R_n}{\widetilde{R}_n}\right).$$

В силу соотношений (2.3.4), (2.3.3), (2.3.10) и неравенства

$$\frac{R_n}{\|A\|\|B\|} \leqslant \frac{R_n^2}{R_n\|B^*A\|} \leqslant \frac{\widetilde{R}_n}{R_n}$$

получаем далее необходимое нам рекуррентное соотношение

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - (1-C)\frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n}. \tag{2.3.12}$$

Отсюда вытекает, что также и в случае, когда $x_0 \neq 0$, неравенство $\Delta_1 < \Delta_0 \leqslant (1/p)\|\hat{x}\|^p$ (принимая во внимание условия (2.3.1)) сохраняется. По индукции получаем, что при любом допустимом выборе начального приближения выполняется цепочка неравенств

$$0 \leqslant \ldots \leqslant \Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n \leqslant \ldots \leqslant \Delta_1 < \Delta_p(0,\hat{x}) = \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p. \tag{2.3.13}$$

Из этой цепочки мы получаем, что $x_n \neq 0$ при всех $n \geqslant 1$, и последовательность $\{\Delta_n\}$ монотонно (нестрого) убывает и, значит, сходится и является ограниченной. По теореме 2.2.4(b) в таком случае будет ограниченной и последовательность $\{x_n\}$, что в свою очередь означает ограниченность последовательностей $\{J_p(x_n)\}$, $\widetilde{R}_n$ и R_n.

Из соотношения (2.3.12) получаем неравенства

$$0 \leqslant (1-C)\frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n} \leqslant \Delta_n - \Delta_{n+1}.$$

Просуммировав последние неравенства при $1 \leqslant n \leqslant N$ для произвольного $N \in \mathbb{N}$, имеем

$$0 \leqslant (1-C)\sum_{n=1}^{N}\frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}(\Delta_n - \Delta_{n+1}) = \Delta_1 - \Delta_{N+1} \leqslant \Delta_1 < \Delta_0,$$

что означает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n} < +\infty.$$

С учетом установленной теперь ограниченности последовательности $\{x_n\}$ неравенства (2.3.10) означают эквивалентность

$$R_n \longrightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{R}_n \longrightarrow 0.$$

Докажем, что в $\{R_n\}$ можно выбрать сходящуюся к нулю подпоследовательность. Предположим противное. Пусть для некоторых $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $R_n \geqslant \varepsilon$ и $\widetilde{R}_n \geqslant \varepsilon$ при всех $n \geqslant n_0$. Пусть U — константа такая, что $R_n \leqslant U$. Тогда имеем следующую оценку

$$\frac{\varepsilon}{U} \sum_{n=1}^{+\infty} \tau_n \|x_n\|^{p-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_n \|x_n\|^{p-1} \widetilde{R}_n}{R_n} < +\infty,$$

откуда получаем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tau_n \|x_n\|^{p-1} < +\infty.$$

В силу ограниченности $\{x_n\}$ и неравенства $R_n \geqslant \varepsilon$ последовательности $\{\lambda_n\}$ из (2.3.3) и $\{\tau_n\}$ из (2.3.4) ограничены снизу положительной константой. Следовательно, $\{x_n\}$ должна быть сходящейся к нулевому элементу. Из непрерывности функции $\Delta_p(\cdot, \hat{x})$ (теорема 2.2.4(c)) и (2.3.13) получаем

$$\frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p = \Delta_p(0, \hat{x}) = \lim_{n \to +\infty} \Delta_p(x_n, \hat{x}) = \lim_{n \to +\infty} \Delta_n < \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p,$$

противоречие. Таким образом, можно выбрать подпоследовательность $\{\widetilde{R}_{n_k}\}$ таким образом, чтобы

$$\widetilde{R}_{n_k} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty \quad \text{и} \quad \widetilde{R}_{n_k} < \widetilde{R}_n \quad \text{для всех} \quad n < n_k. \tag{2.3.14}$$

Этим свойством будет обладать и любая ее подпоследовательность. Учитывая ограниченность $\{x_n\}$ и $\{J_p(x_n)\}$, выберем в последовательности $\{x_{n_k}\}$ подпоследовательность, которую для упрощения записи снова обозначим через $\{x_{n_k}\}$ так, чтобы выполнялись следующие свойства:

(C1) последовательность норм $\{\|x_{n_k}\|\}$ сходится;

(C2) последовательность $\{J_p(x_{n_k})\}$ слабо сходится;

(C3) последовательность $\{\widetilde{R}_{n_k}\}$ удовлетворяет свойствам (2.3.14).

Покажем, что $\{x_{n_k}\}$ является последовательностью Коши. Из равенств (2.2.7) получаем, что для всех $l, k \in \mathbb{N}$ таких, что $k > l$, выполняется равенство

$$\Delta_p(x_{n_l}, x_{n_k}) = \frac{1}{q}\left(\|x_{n_l}\|^p - \|x_{n_k}\|^p\right) + \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k}\rangle.$$

За счет свойства (C1) первое слагаемое стремится к нулю при $l \to +\infty$. Во втором слагаемом, которое можно переписать в виде

$$\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k}\rangle = \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), \hat{x}\rangle + \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - \hat{x}\rangle,$$

первое слагаемое стремится к нулю при $l \to +\infty$ за счет свойства (С2). Оценим второе слагаемое

$$|\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - \hat{x}\rangle| = \left|\sum_{n=n_l}^{n_k-1} \langle J_p(x_{n+1}) - J_p(x_n), x_{n_k} - \hat{x}\rangle\right|.$$

Рекурсивное определение нашего метода дает соотношение

$$|\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - \hat{x}\rangle| =$$

$$= \left|\sum_{n=n_l}^{n_k-1} \langle \mu_n B^*(Ax_n - y), x_{n_k} - \hat{x}\rangle\right| \leqslant \sum_{n=n_l}^{n_k-1} \mu_n \left|\langle A(x_n - \hat{x}), B(x_{n_k} - \hat{x})\rangle\right|.$$

Подставляя значение для μ_n из (2.3.5) и применяя обобщенное неравенство Коши — Буняковского для билинейной формы $\langle A(\cdot), B(\cdot)\rangle$, получим

$$|\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - \hat{x}\rangle| \leqslant \sum_{n=n_l}^{n_k-1} \frac{\tau_n \|x_n\|^{p-1}}{R_n} \sqrt{\widetilde{R}_n}\sqrt{\widetilde{R}_{n_k}}.$$

Поскольку при этом суммировании $n < n_k$, то по свойству (2.3.14) $\widetilde{R}_{n_k} < \widetilde{R}_n$. Окончательно приходим к оценке

$$|\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_l}), x_{n_k} - \hat{x}\rangle| \leqslant \sum_{n=n_l}^{n_k-1} \frac{\tau_n \|x_n\|^{p-1} \widetilde{R}_n}{R_n}.$$

В правой части получен остаток ряда, сходимость которого была установлена ранее. Таким образом, правая часть неравенства сходится к нулю при $l \to +\infty$, следовательно, к нулю стремится и $\Delta_p(x_{n_l}, x_{n_k})$. По теореме 2.2.4(e) получаем, что $\{x_{n_k}\}$ — последовательность Коши и, значит, сходится к некоторому $\tilde{x} \in X$. Докажем, что $\tilde{x} = \hat{x}$, и $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - \hat{x}\| = 0$. Мы имеем $R_{n_k} = \|B^*(Ax_{n_k} - y)\|$, где левая часть стремится к нулю при $k \to +\infty$. Поскольку операторы A и B непрерывны, то правая часть стремится к $\|B^*(A\tilde{x}-y)\|$ при $k \to +\infty$. Получаем $B^*A\tilde{x} = B^*y$. В силу эквивалентности этого уравнения уравнению (2.1.1) приходим к заключению, что $A\tilde{x} = y$. Учитывая $J_p(x_n) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$, слабую сходимость $J_p(x_{n_k})$ к $J_p(\tilde{x})$ (теорема 2.2.1(g)), слабую замкнутость выпуклого замкнутого множества $\overline{\mathcal{R}(B^*A)}$ в пространстве X^*, заключаем, что $J_p(\tilde{x}) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$. Из леммы 2.3.1(b) теперь вытекает, что $\tilde{x} = \hat{x}$. За счет непрерывности $\Delta_p(\cdot, \hat{x})$ получим

$$\lim_{k\to+\infty} \Delta_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} \Delta_p(x_{n_k}, \hat{x}) = \Delta_p(\hat{x}, \hat{x}) = 0.$$

Поскольку $\{\Delta_n\}$ монотонна, то вся последовательность сходится к нулю. По теореме 2.2.4(d) окончательно получаем, что $\{x_n\}$ сильно сходится к $\hat{x}$. Теорема 2.3.1 доказана.

2.4. Итерационный алгоритм с асимптотически уточняемыми данными и принцип невязки

2.4.1 Асимптотический анализ алгоритма

Предположим, что вместо точной правой части $y \in \mathcal{R}(A)$ и операторов $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $B \in \mathcal{L}(X,Y^*)$ нам известны последовательности аппроксимаций $\{y_k\} \subseteq Y$, $\{A_l\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$, $\{B_l\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y^*)$ такие, что каждый оператор A_l $(l = 0,1,2,\dots,)$ является B_l-симметричным и B_l-положительным. Будем предполагать, что нам известны монотонно убывающие оценки аппроксимаций

$$\begin{aligned} &\|y_k - y\| \leqslant \delta_k, \quad \delta_k > \delta_{k+1} > 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \delta_k = 0;\\ &\|A_l - A\| \leqslant \eta_l, \quad \eta_l > \eta_{l+1} > 0, \quad \lim_{l\to+\infty} \eta_l = 0; \\ &\|B_l - B\| \leqslant \eta_l. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Предположим также, что при всех $k = 0,1,2,\dots,$

$$y_k \in \bigcap_{l=0}^{+\infty} \mathcal{R}(A_l), \tag{2.4.2}$$

и при всех $l = 0,1,2,\dots,$

$$\mathcal{R}(B_l^* A_l) \subseteq \mathcal{R}(B^* A). \tag{2.4.3}$$

Более того, чтобы работать в случае, когда операторы A и B заданы неточно, нам потребуется еще дополнительно знать априорную оценку нормы точного решения $\hat{x}$, т. е. считаем известным такое $R > 0$, что

$$\|\hat{x}\| \leqslant R. \tag{2.4.4}$$

Положим

$$S := \sup_l \|A_l\|, \quad T := \sup_l \|B_l\|. \tag{2.4.5}$$

Теперь нам придется несколько видоизменить алгоритм 1, чтобы привести его в соответствие новым исходным данным задачи.

А л г о р и т м 2.

Ш а г 1. Зафиксируем произвольные вещественные $p \in (1,+\infty)$ и $C, D \in (0,1)$. Выберем начальное приближение $x_0 \in X$ таким образом, чтобы выполнялись условия

$$J_p(x_0) \in \overline{\mathcal{R}(B^* A)}, \qquad \Delta_p(x_0, \hat{x}) \leqslant \frac{1}{p}\|\hat{x}\|^p. \tag{2.4.6}$$

Положим $k_{-1} := 0$, $l_{-1} := 0$ и для $n = 0, 1, 2, \ldots$, повторяем следующий шаг 2 до тех пор, пока не наступит условие остановки алгоритма.

Ш а г 2. Если для всех $k > k_{n-1}$ и $l > l_{n-1}$ выполняется неравенство

$$D\langle A_l(x_n - \hat{x}), B_l(x_n - \hat{x})\rangle < T(\|x_n\| + R)(\eta_l R + \delta_k), \tag{2.4.7}$$

то на этом шаге n мы останавливаем алгоритм. В противном случае найдутся такие $k_n > k_{n-1}$ и $l_n > l_{n-1}$, что

$$D\widetilde{R}_n \geqslant T(\|x_n\| + R)(\eta_{l_n} R + \delta_{k_n}) \text{ в случае, когда } x_0 \neq 0, \tag{2.4.8}$$

$$D\frac{\|B^* y\|^2}{TS} \geqslant R(\eta_{l_0}\|y_{k_0}\| + T\delta_{k_0}) \text{ в случае, когда } x_0 = 0, \tag{2.4.9}$$

где $\widetilde{R}_n := \langle A_{l_n}(x_n - \hat{x}), B_{l_n}(x_n - \hat{x})\rangle$. Выбираем параметры согласно следующим правилам:

(1) Если $x_0 = 0$, положим

$$\overline{\mu}_0 := q^{p-1}(1-D)^{p-1}\frac{\|B^* y\|^{2p-2}}{T^{p-1}S^{p-1}\|B^*_{l_0} y_{k_0}\|^p}. \tag{2.4.10}$$

В качестве параметра шага выберем теперь произвольное $\mu_0 \in (0, \overline{\mu}_0)$.

(2) Для всех $n \geqslant 0$ (соответственно $n \geqslant 1$ в том случае, когда $x_0 = 0$) положим

$$\lambda_n := (\rho_{X^*}(1)) \wedge \left(\frac{C(1-D)\widetilde{R}_n}{2^q G_q \|x_n\| R_n}\right) > 0, \tag{2.4.11}$$

где $G_q > 0$ — константа из соотношения (2.2.3), а $R_n := \|B^*_{l_n}(A_{l_n} x_n - y_{k_n})\|$. По тем же соображениям, что и в (2.3.4), можно выбрать такое $\tau_n \in (0, 1]$, что

$$\frac{\rho_{X^*}(\tau_n)}{\tau_n} = \lambda_n. \tag{2.4.12}$$

Параметр шага итерационного метода положим тогда

$$\mu_n := \frac{\tau_n \|x_n\|^{p-1}}{R_n}. \tag{2.4.13}$$

Следующее приближение определяем по формулам:

$$J_p(x_{n+1}) = J_p(x_n) - \mu_n B^*_{l_n}(A_{l_n} x_n - y_{k_n}), \tag{2.4.14}$$

$$x_{n+1} = J_{*q}(J_p(x_{n+1})).$$

□

Отметим, что если правило (2.4.7) остановки алгоритма выполнено для некоторого n, то при всех $k > k_{n-1}$ и $l > l_{n-1}$

$$\langle A_l(x_n - \hat{x}), B_l(x_n - \hat{x})\rangle < \frac{T}{D}(\|x_n\| + R)(\eta_l R + \delta_k),$$

где левая часть сходится к $\langle A(x_n - \hat{x}), B(x_n - \hat{x})\rangle$, а правая часть сходится к нулю при $k, l \to +\infty$. По свойству B-положительности

$$\langle A(x_n - \hat{x}), B(x_n - \hat{x})\rangle = 0$$

в том и только в том случае, когда $A(x_n - \hat{x}) = 0$, т. е. $Ax_n = y$. Свойства (2.4.2), (2.4.3) и (2.4.6) гарантируют нам, что при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, будет выполнено $J_p(x_n) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$. По лемме 2.3.1(b) в таком случае $x_n = \hat{x}$. Сформулируем теперь теорему о сходимости алгоритма 2.

Теорема 2.4.1. *Пусть пространство X равномерно выпукло и гладко, а Y — произвольное банахово пространство, $y \in \mathcal{R}(A)$. Пусть $A_l \in \mathcal{L}(X, Y)$ — B_l-симметричный и B_l-положительный оператор, где $B_l \in \mathcal{L}(X, Y^*)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Предполагаем, что выполнены условия аппроксимации* (2.4.1)–(2.4.3). *Тогда существует такое $\overline{\mu}_0 > 0$* (*см. формулу* (2.4.10)), *что при выборе x_0 согласно правилу* (2.4.6) *и любом $\mu_0 \in (0, \overline{\mu}_0)$ итерационный алгоритм* (2.4.14) *с правилом выбора параметра μ_n* (2.4.13) *либо останавливается на конечном шаге на нормальном решении $\hat{x}$, либо задает последовательность итераций $\{x_n\}$, сходящуюся сильно к $\hat{x}$ по норме пространства X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Структура доказательства очень похожа на случай с невозмущенными данными. Если правило остановки алгоритма (2.4.7) никогда не выполняется, то в силу (2.4.8) и (2.4.1) при всех n будет выполнено $\widetilde{R}_n > 0$. Снова введем в рассмотрение величину $\Delta_n := \Delta_p(x_n, \hat{x})$. В случае $x_0 = 0$ будем иметь

$$\Delta_1 = \frac{1}{q}\mu_0^q \|B_{l_0}^* y_{k_0}\|^q + \Delta_0 - \mu_0 \langle y_{k_0}, B_{l_0}\hat{x}\rangle.$$

Чтобы обеспечить выполнение условия $\Delta_1 < \Delta_0$, дающее нам убывание последовательности $\{\Delta_n\}$ на первом шаге и обеспечивающее отличие x_1 от нуля, необходимо выбирать μ_0 таким образом, чтобы

$$\frac{1}{q}\mu_0^q \|B_{l_0}^* y_{k_0}\|^q - \mu_0 \langle y_{k_0}, B_{l_0}\hat{x}\rangle < 0.$$

Проведя эквивалентные преобразования, увидим, что это неравенство выполняется при

$$0 < \mu_0 < q^{p-1}\frac{\langle y_{k_0}, B_{l_0}\hat{x}\rangle^{p-1}}{\|B_{l_0}^* y_{k_0}\|^p}. \tag{2.4.15}$$

Осталось убедиться, что

$$\overline{\mu}_0 \leqslant q^{p-1}\frac{\langle y_{k_0}, B_{l_0}\hat{x}\rangle^{p-1}}{\|B_{l_0}^* y_{k_0}\|^p},$$

тогда (2.4.15) будет заведомо выполнено. Проведем следующие оценки с учетом соотношений (1.1.2), (2.4.1), (2.4.4), (2.4.5) и (2.4.9):

$$\langle y_{k_0}, B_{l_0}\hat{x}\rangle = \langle B_{l_0}^* y_{k_0}, \hat{x}\rangle = \big\langle B_{l_0}^* y_{k_0} - B^* y_{k_0} + B^* y_{k_0} - B^* y + B^* A\hat{x}, \hat{x}\big\rangle$$
$$\geqslant \frac{\|B^* y\|^2}{\|B^* A\|} - \eta_{l_0}\|y_{k_0}\|R - T\delta_{k_0}R \geqslant (1-D)\frac{\|B^* y\|^2}{TS}.$$

Подставляя эту оценку в (2.4.10), получим требуемое. При всех $n \geqslant 0$ (соответственно $n \geqslant 1$ при $x_0 = 0$) имеем

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - \mu_n\langle A_{l_n}x_n - y_{k_n}, B_{l_n}(x_n - \hat{x})\rangle + \frac{1}{q}\sigma_q\big(J_p(x_n), \mu_n B_{l_n}^*(A_{l_n}x_n - y_{k_n})\big). \tag{2.4.16}$$

Используя неравенства (2.4.1), (2.4.4), (2.4.5) и (2.4.8), имеем оценку

$$\langle A_{l_n}x_n - y_{k_n}, B_{l_n}(x_n - \hat{x})\rangle =$$
$$= \langle A_{l_n}x_n - A_{l_n}\hat{x} + A_{l_n}\hat{x} - A\hat{x} + y - y_{k_n}, B_{l_n}(x_n - \hat{x})\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \widetilde{R}_n - \eta_{l_n}RT(\|x_n\| + R) - \delta_{k_n}T(\|x_n\| + R) =$$
$$= \widetilde{R}_n - T(\|x_n\| + R)(\eta_{l_n}R + \delta_{k_n}) \geqslant (1-D)\widetilde{R}_n.$$

Кроме того, вместе со всеми выкладками, как и в случае точных данных, остается справедливым неравенство

$$\sigma_q(J_p(x_n), \mu_n B_{l_n}^*(A_{l_n}x_n - y_{k_n})) \leqslant 2^q q G_q\|x_n\|^p \rho_{X^*}(\tau_n).$$

Подставляя все эти соотношения и формулу (2.4.13) в (2.4.16), приходим к неравенству

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - \frac{(1-D)\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n}\left(1 - \frac{\rho_{X^*}(\tau_n)}{\tau_n}\frac{2^q G_q\|x_n\|R_n}{(1-D)\widetilde{R}_n}\right).$$

С учетом (2.4.12) и (2.4.11) получаем окончательное рекуррентное соотношение

$$\Delta_{n+1} \leqslant \Delta_n - \frac{(1-C)(1-D)\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n}. \tag{2.4.17}$$

Далее аналогичными рассуждениями, как и в теореме 2.3.1, доказывается, что можно выбрать такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\{\|x_{n_k}\|\}$ сходится, $\{J_p(x_{n_k})\}$ слабо сходится, $\widetilde{R}_{n_k} \to 0$ при $k \to +\infty$ и $\widetilde{R}_{n_k} < \widetilde{R}_n$ при всех $n < n_k$. Для доказательства фундаментальности так же, как и в точном случае, необходимо доказать, что $\langle J_p(x_{n_j}) - J_p(x_{n_i}), x_{n_j} - \hat{x}\rangle \to 0$ при $i < j$ и $i \to +\infty$. Из оценки

$$|\langle J_p(x_{n_j}) - J_p(x_{n_i}), x_{n_j} - \hat{x}\rangle| = \left|\sum_{n=n_i}^{n_j-1} \mu_n \langle A_{l_n}x_n - y_{k_n}, B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \mu_n |\langle A_{l_n}x_n - A_{l_n}\hat{x} + A_{l_n}\hat{x} - A\hat{x} + y - y_{k_n}, B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \mu_n \left(|\langle A_{l_n}(x_n - \hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\rangle|\right) +$$

$$+ \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \mu_n \left(\eta_{l_n} RT(\|x_{n_j}\| + R) + \delta_{k_n} T(\|x_{n_j}\| + R)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \mu_n \left(\sqrt{\widetilde{R}_n}\sqrt{\langle A_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\rangle} + T(\|x_{n_j}\| + R)(\eta_{l_n} R + \delta_{k_n})\right)$$

в силу (2.4.13), свойства (С3) последовательности $\widetilde{R}_{n_k}$ и неравенства (2.4.8) получаем

$$|\langle J_p(x_{n_j}) - J_p(x_{n_i}), x_{n_j} - \hat{x}\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}}{R_n}\left(\sqrt{\widetilde{R}_n}\sqrt{\langle A_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\rangle} + \frac{D\widetilde{R}_n(\|x_{n_j}\| + R)}{\|x_n\| + R}\right).$$

Оценим отдельно величину $\langle A_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\rangle$. Имеем

$$\big\langle A_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\big\rangle = \big\langle B_{l_n}^* A_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x}), x_{n_j} - \hat{x}\big\rangle =$$

$$= \big\langle (B_{l_n}^* A_{l_n} - B_{l_{n_j}}^* A_{l_{n_j}})(x_{n_j} - \hat{x}), x_{n_j} - \hat{x}\big\rangle + \big\langle A_{l_{n_j}}(x_{n_j} - \hat{x}), B_{l_{n_j}}(x_{n_j} - \hat{x})\big\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{R}_{n_j} + \|B_{l_n}^* A_{l_n} - B_{l_{n_j}}^* A_{l_{n_j}}\|(\|x_{n_j}\| + R).$$

Принимая во внимание оценку

$$\|B^*_{l_n}A_{l_n} - B^*_{l_{n_j}}A_{l_{n_j}}\| \leqslant \|B^*_{l_n}A_{l_n} - B^*_{l_n}A_{l_{n_j}}\| + \|B^*_{l_n}A_{l_{n_j}} - B^*_{l_{n_j}}A_{l_{n_j}}\| \leqslant$$

$$\leqslant 2T\eta_{l_n} + 2S\eta_{l_n} = \widetilde{U}\eta_{l_n},$$

где $\widetilde{U} = 2T + 2S$, а также свойство (2.3.14) подпоследовательности $\{\widetilde{R}_{n_j}\}$, получаем

$$\langle A_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\rangle \leqslant \widetilde{R}_n + \widetilde{U}\eta_{l_n}(\|x_{n_j}\| + R).$$

Из неравенства (2.4.8) извлекаем оценку сверху для η_{l_n}

$$\eta_{l_n} \leqslant \frac{D\widetilde{R}_n}{T(\|x_n\| + R)R} - \frac{\delta_{k_n}}{R} \leqslant \frac{D\widetilde{R}_n}{T(\|x_n\| + R)R} \leqslant \frac{D\widetilde{R}_n}{TR^2}.$$

Пусть $\widetilde{R} > 0$ — константа такая, что $\|x_n\| \leqslant \widetilde{R}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда имеем следующие неравенства:

$$\langle A_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x}), B_{l_n}(x_{n_j} - \hat{x})\rangle \leqslant \widetilde{R}_n\Big(1 + \frac{\widetilde{U}D(\widetilde{R} + R)}{TR^2}\Big),$$

$$|\langle J_p(x_{n_j}) - J_p(x_{n_i}), x_{n_j} - \hat{x}\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=n_i}^{n_j-1} \frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}}{R_n}\left\{\sqrt{\widetilde{R}_n}\sqrt{\widetilde{R}_n}\sqrt{1 + \frac{\widetilde{U}D(\widetilde{R} + R)}{TR^2}} + \frac{D\widetilde{R}_n(\widetilde{R} + R)}{R}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sqrt{1 + \frac{\widetilde{U}D(\widetilde{R} + R)}{TR^2}} + \frac{D(\widetilde{R} + R)}{R}\right)\sum_{n=n_i}^{n_j-1} \frac{\tau_n\|x_n\|^{p-1}\widetilde{R}_n}{R_n}.$$

В правой части получен остаток сходящегося ряда, который стремится к нулю при $i \to +\infty$. Следовательно, $\{x_{n_k}\}$ фундаментальна, поэтому найдется такой $\tilde{x} \in X$, что $x_{n_k} \to \tilde{x}$ при $k \to +\infty$. Далее имеем

$$\widetilde{R}_{n_k} = \langle A_{l_{n_k}}(x_{n_k} - \hat{x}), B_{l_{n_k}}(x_{n_k} - \hat{x})\rangle,$$

откуда в силу свойств (2.3.14) и (2.4.1) справедливо равенство

$$\langle A(\tilde{x} - \hat{x}), B(\tilde{x} - \hat{x})\rangle = 0$$

или эквивалентно $A\tilde{x} = y$. Свойства (2.4.2) и (2.4.3) обеспечивают нам на каждой итерации включение $J_p(x_n) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$, поэтому в пределе получаем по теореме 2.2.1(g) и слабой замкнутости выпуклого замкнутого множества, что

$J_p(\tilde{x}) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}$. Далее, как и в теореме 2.3.1, приходим к заключению, что $\tilde{x} = \hat{x}$ и $x_n \to \hat{x}$ при $n \to +\infty$. Теорема 2.4.1 доказана.

2.4.2 Правило останова итераций по невязке

Рассмотрим теперь случай фиксированных приближенных данных с известными оценками сверху уровней погрешности: пусть заданы возмущенные операторы A_h и B_h, такие что A_h является B_h-симметричным и B_h-положительным, и правая часть уравнения y_δ, для которых известна оценка возможных отклонений от точных значений

$$\|A_h - A\| \leqslant h,\ \|B_h - B\| \leqslant h,\ \|y_\delta - y\| \leqslant \delta.$$

Применяем алгоритм 2 при $A_l = A_h$, $B_l = B_h$ по всем $l = 0, 1, 2, \dots,$ и $y_k = y_\delta$ по всем $k = 0, 1, 2, \dots,$. Так переход к следующей итерации осуществляется по формуле

$$J_p(x_{n+1}) = J_p(x_n) - \mu_n B_h^*(A_h x_n - y_\delta), \tag{2.4.18}$$

при этом неравенство (2.4.7) становится критерием останова итераций: итерирование прекращается при таком номере n^*, для которого впервые выполнится условие

$$D\langle A_h(x_{n^*} - \hat{x}), B_h(x_{n^*} - \hat{x})\rangle < T(\|x_{n^*}\| + R)(hR + \delta). \tag{2.4.19}$$

Возможность выбора такого правила останова итераций следует из доказательства теоремы 2.4.1, поскольку до тех пор пока выполняется условие

$$D\langle A_h(x_n - \hat{x}), B_h(x_n - \hat{x})\rangle \geqslant T(\|x_n\| + R)(hR + \delta),$$

будет выполняться рекуррентное соотношение (2.4.17), означающее, что следующее приближение лучше текущего в терминах близости к точному решению по дистанции Брэгмана. Из теоремы 2.4.1 вытекает, что при выборе $n^* = n^*(\delta, h)$ по правилу (2.4.19) имеет место сходимость $x_{n^*} \to \hat{x}$ при $(\delta, h) \to (0, 0)$.

Следствие 2.4.1. *Итерационный метод* (2.4.18) *с правилом останова итераций* (2.4.19) *является методом регуляризации для задачи* (2.1.1) *с возмущенными данными.*

З а м е ч а н и е. Из оценок

$$\langle A_h(x_{n^*} - \hat{x}), B_h(x_{n^*} - \hat{x})\rangle \leqslant \|B_h^*(A_h(x_{n^*} - \hat{x}))\|(\|x_{n^*}\| + R)$$

и $\|A_h\hat{x} - y_\delta\| \leqslant hR + \delta$, а также

$$\|B_h^*(A_h(x_{n^*} - \hat{x}))\| \leqslant \|B_h^*(A_h x_{n^*} - y^\delta)\| + T(hR + \delta)$$

вытекает, что условие (2.4.19) будет заведомо выполнено, если

$$\|B_h^*(A_h x_{n^*} - y^\delta)\| < K(hR + \delta), \tag{2.4.20}$$

где $K := T/D - T$ (поскольку $D \in (0, 1)$, то $K > 0$). При практической реализации алгоритма 2 именно соотношение (2.4.20) в силу доступности для вычислений и будет правилом останова итераций, которое, следуя В.А. Морозову [46], естественно также называть *принципом невязки*.

2.5. Численное моделирование

Рассмотрим применимость представленного в данной главе метода снова на примере уравнения

$$Ax = \int_0^1 \varphi(s)(t-1)x(s)ds = 1.5(t-1), \text{ где } \varphi(s) = \begin{cases} s, & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ s+1, & \frac{1}{2} < s \leqslant 1. \end{cases}$$

Оператор A будем считать действующим из пространства $L_p[0,1]$ в пространство $L_q[0,1]$ при $2 \leqslant p < +\infty$. В качестве оператора B рассмотрим также опять оператор $Bx = \int_0^1 \varphi(s)(t-0.5)x(s)ds$, действующий из $L_p[0,1]$ в $L_p[0,1]$. Нормальное решение (решение наименьшей нормы) известно и записывается в явном виде

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} C_p t^{\frac{1}{p-1}}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ C_p(t+1)^{\frac{1}{p-1}}, & \frac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}, \text{ где } C_p = \frac{3 \cdot 2^{\frac{p}{p-1}} \cdot (2p-1)}{(p-1)(1 + 2^{\frac{4p-2}{p-1}} - 3^{\frac{2p-1}{p-1}})}.$$

В качестве начального приближения, как уже было отмечено выше, можно выбрать $x_0 = 0$. Хотя степень дуального отображения можно выбирать независимо от параметра p, определяющего пространство L_p, удобнее взять отображение J_p при том же самом значении p. Формула для его вычисления тогда примет вид

$$J_p(x)[t] = |x(t)|^{p-1} sgn(x(t)),$$

это равенство понимается поточечно для всех $t \in [0,1]$ за исключением, быть может, множества меры нуль. Обратное отображение в таком случае задается равенством

$$J_{*q}(y)[t] = |y(t)|^{q-1} sgn(y(t)). \tag{2.5.1}$$

Сопряженный к B оператор без труда выписывается:

$$B^* y = \int_0^1 \varphi(s)(t-0.5)y(t)dt.$$

В качестве начального шага бралось значение

$$\mu_0 = 0.9 q^{p-1} \frac{\|B^* y\|^{p-2}}{\|A\|^{p-1}\|B\|^{p-1}},$$

где

$$\|A\| = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{q+1} + 2^{q+1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{q+1}\right]^{\frac{1}{q}}}{(q+1)^{\frac{2}{q}}} \text{ и } \|B\| = \frac{(q+1)\|A\|}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}.$$

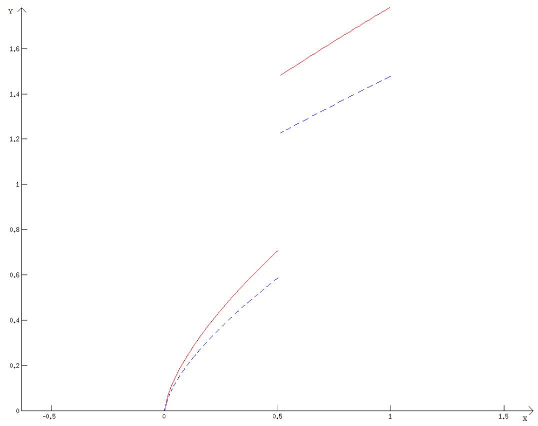

Рис. 1: Приближенное решение при $n = 100$.

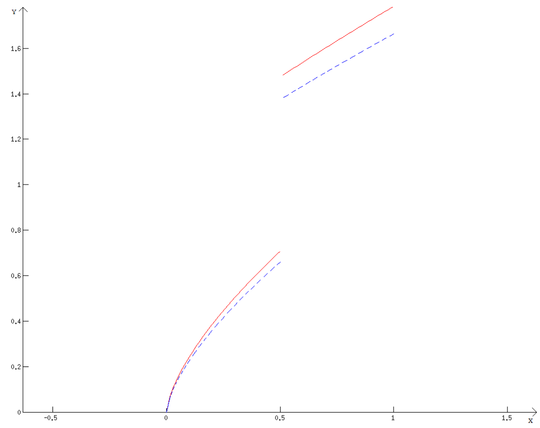

Рис. 2: Приближенное решение при $n = 250$.

Далее согласно предложенному алгоритму параметр шага выбирается равным $\mu_n = \tau_n \|x_n\|^{p-1}/\|B^*(Ax_n - y)\|$ при $n \geqslant 1$, где τ_n — решение уравнения $\rho_{X^*}(\tau_n)/\tau_n = \lambda_n$ с монотонно возрастающей функцией в левой части. В нашем случае при $2 \leqslant p < +\infty$ для сопряженного пространства L_q, $1 < q \leqslant 2$ известна явная формула вычисления модуля гладкости пространства: $\rho_{L_q}(\tau_n) = (1 + \tau_n^q)^{1/q} - 1$. Параметр τ_n можно находить любым численным методом, например, быстро сходящимся методом Ньютона. В качестве λ_n согласно представленному алгоритму следует выбирать значение

$$\lambda_n = \left(2^{\frac{1}{q}} - 1\right) \wedge \left(\frac{C\|B^*(Ax_n - y)\|}{2^q G_q \|x_n\| \|A\| \|B\|}\right)$$

при некотором $C \in (0, 1)$. Однако в силу общности теоремы 2.2.2 константой G_q в характеристическом неравенстве равномерно гладкого пространства дается несколько грубая оценка сверху: вычисления показывают, что $G_q \geqslant 2600$. Такая завышенная оценка приводит к малым значениям параметра λ_n и, соответственно, параметров τ_n и μ_n, при которых итерации изменяются катастрофически медленно.

Для получения более точных оценок необходимо обратиться к доказательству теоремы 2.2.2. Анализ доказательства из статьи [91] показывает, что константа G_q возникает из неравенства вида

$$\|J_{*q}(x) - J_{*q}(y)\| \leqslant G_q \frac{(\|x\| \vee \|y\|)^q}{\|x - y\|} \rho_{X^*}\left(\frac{\|x - y\|}{\|x\| \vee \|y\|}\right).$$

В нашем случае для пространства $X^* = L_q$ справедлива оценка для модуля

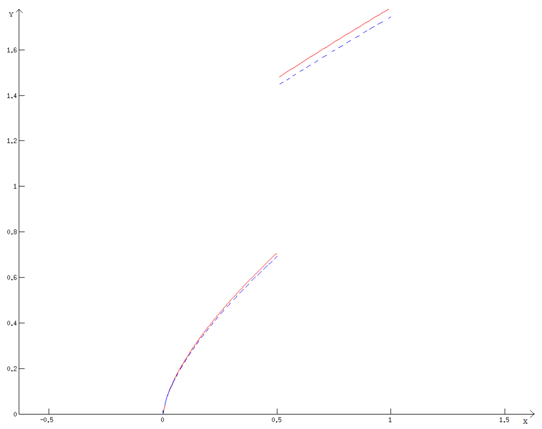

Рис. 3: Приближенное решение при $n = 500$.

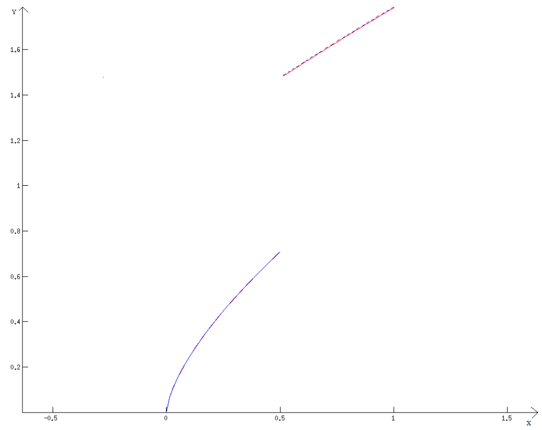

Рис. 4: Останов итераций по невязке, $n = 1306$.

гладкости

$$\rho_{L_q}(\tau) = (1+\tau^q)^{1/q} - 1 \leqslant \frac{1}{q}\tau^q,$$

т.е. пространство L_q является q-гладким. Из приведенного неравенства с помощью этой оценки получим

$$\|J_{*q}(x) - J_{*q}(y)\| \leqslant \frac{1}{q} G_q \|x-y\|^{q-1}.$$

С другой стороны, из равенства (2.5.1) можно напрямую получить оценку модуля непрерывности дуального отображения:

$$\|J_{*q}(x) - J_{*q}(y)\| \leqslant 2^{2-q}\|x-y\|^{q-1}, \text{ при } 1 < q \leqslant 2;$$

поэтому в нашем случае можно взять $G_q = q \cdot 2^{2-q}$. Значение $C \in (0,1)$ было необходимо для аналитического обоснования сходимости, на практике же это условие может быть ослаблено. Таким образом, для вычислительного эксперимента выбиралось значение

$$\lambda_n = \frac{\|B^*(Ax_n - y)\|}{4q\|x_n\|\|A\|\|B\|}.$$

Численное моделирование проводилось на персональном двухпроцессорном компьютере INTEL Celeron CPU G530 2.40GHz с оперативной памятью 1.9 Гб и операционной системой Ubuntu 12.04 LTS (32 bit) при помощи программного пакета для математических вычислений GNU Octave. Параметр p выбирался равным 2.5, отрезок $[0,1]$ для дискретизации разбивался на 70 равных частей. Итерационный процесс (2.4.18) запускался с правилом останова по невязке

n	100	200	500	1306
ε_{abs}	0.2138	0.0842	0.0280	0.0027
$\varepsilon_{rel}, \%$	17.2	6.78	2.26	0.22

Таблица 1: Зависимость абсолютной и относительной погрешностей от номера итерации n.

$\|B^*(Ax_n - y)\| \leqslant 10^{-3}$. Итоговое время счета составило 40 минут, количество проделанных итераций равнялось 1306. Абсолютная погрешность найденного решения получилась равной $2.7 \cdot 10^{-3}$, а относительная – 0.22%.

На рисунках 1–4 изображены сплошной линией точное решение и пунктирными линиями приближенные решения, полученные итерационным методом (2.4.18) при $n = 100, 250, 500$ и 1306 соответственно.

В таблице 1 приведены зависимости абсолютных и относительных погрешностей приближенного решения от количества итераций. Эти данные хорошо иллюстрируют сходимость представленного итерационного метода. Дополнительно проведены расчеты с возмущением в правой части: для $\delta = 0.1$ задавалось $y_\delta(t) := 1.5(t-1) + \delta \sin(100t)$. Полученные результаты оказались идентичными тем, что приведены на рисунках 1–4, подтверждая, таким образом, устойчивость итерационного алгоритма к возмущению в правой части уравнения.

Глава 3. Многошаговый итерационный метод решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах

В этой главе рассматривается многошаговый итерационный метод решения линейного операторного уравнения $Ax = y$ с B-симметричным и B-положительным оператором, действующим из X в Y, где X, Y — банаховы пространства. Пространство X предполагается p-выпуклым и равномерно гладким, тогда как Y — произвольное банахово пространство. В первом параграфе описывается задача, в сравнении с аналогичными методами для уравнений в банаховых пространствах излагаются предпосылки для возникновения рассматриваемой постановки задачи. Второй параграф главы содержит описание необходимого математического аппарата для доказательства сходимости итерационного процесса — проекции Брэгмана, определяемой через дистанцию Брэгмана по аналогии с определением метрической проекции через метрику. Третий параграф главы посвящен рассмотрению случая итерационного метода с точными данными, доказывается слабая и сильная сходимость (по норме) итерационного процесса.

3.1. Постановка задачи

Снова, как и в предыдущей главе, рассматривается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{3.1.1}$$

где $A\colon X \longrightarrow Y$ — действующий на паре банаховых пространств непрерывный B-симметричный и B-положительный оператор, $B\colon X \longrightarrow Y^*$ — линейный непрерывный оператор.

В работе [85] предложен общий подход к построению итерационного метода в банаховом пространстве для уравнения с произвольным линейным непрерывным оператором. Во второй главе данной диссертации изложена модификация этого метода для специального случая B-симметричного и B-положительного оператора.

В современных статьях немецких математиков Шопфера и Шустера [86, 87 и др.] предлагается методика ускорения сходимости итераций за счет введения дополнительных направлений $A^* w_{n,i}$:

$$x_{n+1} = J_{*q}\Big[J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} \mu_{n,i} A^* w_{n,i}\Big], \tag{3.1.2}$$

где $J_p\colon X \longrightarrow 2^{X^*}$, $J_{*q}\colon X^* \longrightarrow 2^{X^{**}}$ — дуальные отображения банаховых пространств, и вектор параметров шагов $\mu_n = (\mu_{n,1}, \ldots, \mu_{n,N_n})$ минимизирует выпуклую непрерывно-дифференцируемую функцию

$$h_n(t) = h_n(t_1, \ldots, t_{N_n}) = \frac{1}{q}\Big\| J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} t_i A^* w_{n,i} \Big\|^q + \sum_{i=1}^{N_n} t_i \langle w_{n,i}, y\rangle.$$

В данной главе исследуется многошаговый итерационный метод

$$x_{n+1} = J_{*q}\Big[J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} \mu_{n,i} B^* A \xi_{n,i}\Big], \tag{3.1.3}$$

который является некоторой модификацией процесса (3.1.2); здесь операторы A и B связаны между собой соотношениями B-симметричности и B-положительности, вектор параметров шагов $\mu_n = (\mu_{n,1}, \ldots, \mu_{n,N_n})$ минимизирует выпуклую непрерывно-дифференцируемую функцию

$$h_n(t) = h_n(t_1, \ldots, t_{N_n}) = \frac{1}{q}\Big\| J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} t_i B^* A \xi_{n,i} \Big\|^q + \sum_{i=1}^{N_n} t_i \langle B\xi_{n,i}, y\rangle.$$

Формулировке всех необходимых определений и понятий применяемого математического аппарата посвящен следующий параграф.

3.2. Проекция Брэгмана и её свойства

Для полноты изложения приведем в данном разделе вместе с определением проекции Брэгмана некоторые её необходимые свойства, которые можно найти также в [86,87] (за исключением леммы 3.2.1). Ситуации, когда приводится альтернативное доказательство какого-то из приводимых здесь свойств, отмечаются специально.

О п р е д е л е н и е 3.2.1. *Проекциями Брэгмана* элемента $x \in X$ на непустое выпуклое замкнутое множество $C \subseteq X$ *по функционалу* f называются такие элементы $\xi \in C$, что

$$\Delta_f(x, \xi) = \inf_{z \in C} \Delta_f(x, z).$$

О п р е д е л е н и е 3.2.2. Функционал $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *усиленно коэрцитивным*, если

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = +\infty.$$

Лемма 3.2.1. *Пусть* X *— рефлексивное пространство,* f *— строго выпуклый дифференцируемый усиленно коэрцитивный функционал. Тогда для любого* $x \in X$ *семейство всех проекций Брэгмана по функционалу* f *на множество* C *непусто и одноэлементно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 \leqslant m := \inf\limits_{z \in C} \Delta_f(x, z)$. Существует минимизирующая последовательность $\{z_n\} \subseteq C$, такая что

$$m \leqslant \Delta_f(x, z_n) < m + \frac{1}{n} \leqslant m + 1.$$

Из оценки

$$m + 1 \geqslant \Delta_f(x, z_n) = f(z_n) - f(x) - \langle \partial f(x), z_n - x \rangle \geqslant$$

$$\geqslant f(z_n) - f(x) - \|\partial f(x)\|(\|z_n\| + \|x\|)$$

и свойства усиленной коэрцитивности вытекает ограниченность последовательности $\{z_n\}$. В силу рефлексивности пространства X и слабой замкнутости выпуклого замкнутого множества найдется подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, слабо сходящаяся к некоторому элементу $\xi \in C$. Поскольку f — непрерывный выпуклый функционал, то он заведомо обладает свойством слабой полунепрерывности снизу, следовательно

$$m \leqslant \Delta_f(x,\xi) \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \{f(z_{n_k}) - f(x) - \langle \partial f(x), z_{n_k} - x\rangle\} =$$

$$= \varliminf_{k\to+\infty} \Delta_f(x, z_{n_k}) \leqslant m.$$

Предположим, что найдутся два различных элемента ξ_1 и ξ_2 из C со свойствами

$$f(\xi_1) - f(x) - \langle \partial f(x), \xi_1 - x\rangle = m,\ f(\xi_2) - f(x) - \langle \partial f(x), \xi_2 - x\rangle = m.$$

Составив для произвольного $\lambda \in (0,1)$ выпуклую комбинацию этих равенств, получим

$$\lambda f(\xi_1) + (1-\lambda) f(\xi_2) - f(x) - \langle \partial f(x), \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 - x\rangle = m.$$

Из строгой выпуклости функционала f следует

$$m \leqslant \Delta_f(x, \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) =$$

$$= f(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) - f(x) - \langle \partial f(x), \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 - x\rangle < m,$$

что приводит к противоречию. Лемма 3.2.1 доказана.

Введем для проекции Брэгмана обозначение $\Pi^f_C(x)$. Для функционала f_p примем упрощеную запись $\Pi^p_C(x)$ и всюду далее в этой главе будем рассматривать только такую проекцию. Очевидными являются следующие свойства:

$$[\Pi^p_C(x) = x \Leftrightarrow x \in C], \quad \left[\left(C_1 \subseteq C_2 \wedge \tilde{x} := \Pi^p_{C_2}(x) \in C_1\right) \Rightarrow \tilde{x} = \Pi^p_{C_1}(x)\right],$$

а также $\Pi^p_C(0) = \min\limits_{z\in C} \|z\|$. По аналогии с метрической проекцией имеет место характеристическое вариационное неравенство для проекции Брэгмана.

Лемма 3.2.2. *Пусть X — строго выпуклое гладкое рефлексивное пространство, $\tilde{x} \in C$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\tilde{x} = \Pi^p_C(x)$;

2) $\langle J_p(\tilde{x}) - J_p(x), z - \tilde{x}\rangle \geqslant 0, \quad \forall z \in C$;

3) $\Delta_p(x,\tilde{x}) \leqslant \Delta_p(x,z) - \Delta_p(\tilde{x},z), \quad \forall z \in C.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим циклическую цепочку импликаций 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\tilde{x} = \Pi^p_C(x)$, т.е. для любого $z \in C$ выполнено

$\Delta_p(x,\tilde{x}) \leqslant \Delta_p(x,z)$. Для произвольного $z \in C$ в силу свойства выпуклости множества C при любом $\lambda \in [0,1]$ элемент $\tilde{x}+\lambda(z-\tilde{x})$ также принадлежит C. Имеем для любого $\lambda \in [0,1]$ неравенство

$$\Delta_p(x,\tilde{x}) \leqslant \Delta_p(x,\tilde{x}+\lambda(z-\tilde{x})).$$

Воспользовавшись равенством (2.2.6), получаем следующие преобразования:

$$\frac{\Delta_p(x,\tilde{x}+\lambda(z-\tilde{x}))-\Delta_p(x,\tilde{x})}{\lambda} = \frac{\frac{1}{p}\|\tilde{x}+\lambda(z-\tilde{x})\|^p - \frac{1}{p}\|\tilde{x}\|^p}{\lambda} - \langle J_p(x), z-\tilde{x}\rangle.$$

В полученном равенстве можно перейти к пределу при $\lambda \to +0$, поскольку первое слагаемое в правой части сходится к производной Гато функционала f_p, которая в свою очередь существует в силу гладкости исходного пространства и совпадает с субдифференциалом $\partial f_p(\tilde{x})$. По теореме 2.2.3 получаем

$$\lim_{\lambda\to+0} \frac{\Delta_p(x,\tilde{x}+\lambda(z-\tilde{x}))-\Delta_p(x,\tilde{x})}{\lambda} =$$
$$= \langle J_p(\tilde{x}), z-\tilde{x}\rangle - \langle J_p(x), z-\tilde{x}\rangle = \langle J_p(\tilde{x}) - J_p(x), z-\tilde{x}\rangle \geqslant 0.$$

Разложив по формуле (2.2.6) неравенство 3), перенеся все члены в правую часть и приведя подобные, нетрудно заметить, что неравенства 2) и 3) эквивалентны.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) очевидна. Лемма 3.2.2 доказана.

В гильбертовом пространстве проекция Брэгмана по функционалу f_2 совпадает с обычной метрической проекцией. Проекции Брэгмана в сопряженных пространствах и дуальное отображение обладают интересной взаимосвязью друг с другом.

Лемма 3.2.3. *Пусть X — строго выпуклое гладкое рефлексивное пространство, U — замкнутое подпространство в X, $x,y,z \in X$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $x = \Pi^p_{z+U}(y)$;

2) $(x-z \in U) \wedge (J_p(x)-J_p(y) \in U^\perp$, *где* $U^\perp = \{u^* \in X^* \mid \langle u^*, u\rangle = 0 \forall u \in U\})$;

3) $J_p(x) = \Pi^q_{J_p(y)+U^\perp}(J_p(z))$, *где* $\Pi^q_\circ$ *— проекция Брэгмана по функционалу* f_q *в* X^*.

Доказательство. Построим снова циклические импликации. Пусть $x = \Pi^p_{z+U}(y)$, тогда очевидно, что $x-z \in U$. Согласно неравенству 2) из предыдущей леммы $\langle J_p(x) - J_p(y), z + u - x \rangle \geqslant 0$ при всех $u \in U$. Поскольку $z - x \in U$, то $\langle J_p(x) - J_p(y), u \rangle \geqslant 0$, что может быть только в случае, когда $\langle J_p(x) - J_p(y), u \rangle = 0$. Это означает, что $J_p(x) - J_p(y) \in U^{\perp}$.

Далее, равенство $J_p(x) = \Pi^q_{J_p(y)+U^{\perp}}(J_p(z))$ снова по лемме 3.2.2 эквивалентно $\langle x - z, J_p(y) + u^* - J_p(x) \rangle \geqslant 0$ для произвольного $u^* \in U^{\perp}$. Из условий 2) доказываемой леммы вытекает, что на самом деле

$$\langle x - z, J_p(y) + u^* - J_p(x) \rangle = 0,$$

так что импликация 2) $\Rightarrow$ 3) обоснована.

Поменяв теперь за счет рефлексивности ролями пространства X и X^*, дуальные отображения J_p и J_{*q}, сопряженные показатели p и q, подпространства U и $U^{\perp}$ и применив уже доказанную по транзитивности импликацию 1) $\Rightarrow$ 3) к равенству $J_p(x) = \Pi^q_{J_p(y)+U^{\perp}}(J_p(z))$, получим требуемое. Лемма 3.2.3 доказана.

Пусть $0 \neq u^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Через $H(u^*, \alpha)$ обозначаем, следуя [86,87], гиперплоскость

$$H(u^*, \alpha) = \{x \in X \mid \langle u^*, x \rangle = \alpha\}.$$

Следующее утверждение позволяет вычислять проекцию Брэгмана на пересечение нескольких гиперплоскостей, см. [86, с. 494]. Приведем здесь его с альтернативным доказательством.

Лемма 3.2.4. *Пусть $H(u_1^*, \alpha_1), \ldots, H(u_N^*, \alpha_N)$ — конечный набор гиперплоскостей в строго выпуклом гладком рефлексивном пространстве с непустым пересечением*

$$H = \bigcap_{k=1}^{N} H(u_k^*, \alpha_k).$$

Для произвольного $x \in X$ рассмотрим функцию $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h(t) := \frac{1}{q}\Big\| J_p(x) - \sum_{k=1}^{N} t_k u_k^* \Big\|^q + \sum_{k=1}^{N} t_k \alpha_k, \quad t = (t_1, \ldots, t_N), \tag{3.2.1}$$

которая обладает свойствами выпуклости и непрерывной дифференцируемости,

$$\frac{\partial h}{\partial t_j}(t) = -\Big\langle u_j^*, J_{*q}\big(J_p(x) - \sum_{k=1}^{N} t_k u_k^*\big) \Big\rangle + \alpha_j.$$

Тогда проекция Брэгмана элемента x на H задается формулой

$$\Pi_H^p(x) = J_{*q}\Big(J_p(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{t}_k u_k^*\Big), \tag{3.2.2}$$

где $\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_N)$ — решение N-мерной задачи оптимизации $\min\limits_{t \in \mathbb{R}^N} h(t)$. Более того, если векторы $u_1^*, \ldots, u_N^*$ — линейно независимы, тогда h — строго выпуклая функция, и $\tilde{t}$ — единственное решение задачи на минимум.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Строгая выпуклость функции h очевидна из строгой выпуклости пространства X; непрерывная дифференцируемость и формула для вычисления частных производных $\frac{\partial h}{\partial t_j}$ следуют из свойств гладкости пространства X, теоремы Асплунда (см. стр. 53) и теоремы 2.2.1 (g). Введем обозначение

$$\tilde{x} := J_{*q}\Big(J_p(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{t}_k u_k^*\Big),$$

тогда поскольку $\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_N)$ — точка минимума непрерывно-дифференцируемой функции h, то выполняется необходимое условие экстремума — равенство нулю в этой точке всех частных производных, т.е. для всех $j = 1, \ldots, N$

$$\frac{\partial h}{\partial t_j}(\tilde{t}) = -\Big\langle u_j^*, J_{*q}\big(J_p(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{t}_k u_k^*\big)\Big\rangle + \alpha_j = -\langle u_j^*, \tilde{x}\rangle + \alpha_j = 0,$$

а значит, $\tilde{x} \in H$. В силу леммы 3.2.2 теперь достаточно убедиться в справедливости неравенства $\langle J_p(\tilde{x}) - J_p(x), z - \tilde{x}\rangle \geqslant 0$ для всех $z \in H$. Действительно,

$$\langle J_p(\tilde{x}) - J_p(x), z - \tilde{x}\rangle = \Big\langle J_p(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{t}_k u_k^* - J_p(x), z - \tilde{x}\Big\rangle =$$

$$= -\sum_{k=1}^N \tilde{t}_k \langle u_k^*, z\rangle + \sum_{k=1}^N \tilde{t}_k \langle u_k^*, \tilde{x}\rangle = -\sum_{k=1}^N \tilde{t}_k \alpha_k + \sum_{k=1}^N \tilde{t}_k \alpha_k = 0.$$

Пусть $t^1 = (t_1^1, \ldots, t_N^1)$ и $t^2 = (t_1^2, \ldots, t_N^2)$ — два различных набора параметров, тогда строгая выпуклость функции h, а именно

$$h(\lambda t^1 + (1-\lambda)t^2) < \lambda h(t^1) + (1-\lambda) h(t^2) \text{ при } \lambda \in (0,1),$$

будет вытекать из строгой выпуклости нормы пространства X при том условии, что соответствующие точки, образующие выпуклую комбинацию,

$$J_p(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{t}_k^1 u_k^* \quad \text{и} \quad J_p(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{t}_k^2 u_k^*$$

будут различными, что заведомо выполнено в случае линейной независимости векторов $u_1^*, \dots, u_N^*$. Лемма 3.2.4 доказана.

З а м е ч а н и е. Данная лемма позволяет вычислять также и проекцию Брэгмана на гиперплоскость в том случае, когда $N = 1$. А именно,

$$\Pi^p_{H(u^*,\alpha)}(x) = J_{*q}(J_p(x) - \tilde{t}u^*),$$

где $\tilde{t}$ — точка глобального минимума (необходимо единственная) строго выпуклой функции

$$h(t) = \frac{1}{q}\|J_p(x) - tu^*\|^q + \alpha t,$$

причем $\operatorname{sgn}(\tilde{t}) = \operatorname{sgn}(\langle u^*, x\rangle - \alpha)$.

Будем предполагать в дальнейшем, что пространство X является p- выпуклым и равномерно гладким банаховым пространством, т.е. для модуля выпуклости

$$\delta_X(\varepsilon) := \inf\left\{1 - \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \colon \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \geqslant \varepsilon\right\}$$

выполняется оценка $\delta_X(\varepsilon) \geqslant C_1\varepsilon^p$ при некотором $C_1 > 0$. Тогда пространство X^* будет q-гладким, т.е. для модуля гладкости

$$\rho_X(\tau) := \frac{1}{2}\sup\left\{\|x+y\| + \|x-y\| - 2 \colon \|x\| = 1,\ \|y\| \leqslant \tau\right\}$$

будет верна оценка $\rho_X(\tau) \leqslant C_2\tau^q$ при некотором $C_2 > 0$. Отображения J_p и J_{*q} будут в таком случае равномерно непрерывными на ограниченных множествах (см. [70]). В q-гладком пространстве X^* для любых $x_1^*, x_2^* \in X^*$ и некоторой константы $G_q \geqslant 1$ имеет место характеристическое (характеризующее гладкость) неравенство (подробнее о характеристических неравенствах банаховых пространств см. в [91])

$$\frac{1}{q}\|x_1^* - x_2^*\|^q \leqslant \frac{1}{q}\|x_1^*\|^q - \langle J_{*q}(x_1^*), x_2^*\rangle + \frac{G_q}{q}\|x_2^*\|^q, \tag{3.2.3}$$

которое будет играть ключевую роль в доказательстве сходимости нашего метода.

3.3. Сходимость многошагового итерационного процесса с точными данными

Перейдем теперь к описанию и обоснованию итерационного метода решения уравнения (3.1.1) для заданного B-симметричного и B-положительного оператора A, где $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$. Банахово пространство X предполагается p-выпуклым и равномерно гладким, Y — произвольное вещественное банахово пространство. Ограничимся случаем точных данных $y \in \mathcal{R}(A)$. Рассмотрим задачу аппроксимации проекции Брэгмана $x^\dagger = \Pi_M^p(x_0)$ для произвольного $x_0 \in X$, где

$$M := \{x \in X \mid Ax = y\},$$

которое, как нетрудно заметить, является непустым выпуклым замкнутым множеством. Таким образом, искомая проекция корректно определена. Если $x_0 = 0$, то $x^\dagger$ совпадает с решением минимальной нормы (нормальным решением). Опишем вкратце предлагаемый метод.

А л г о р и т м 3.

Возьмем некоторый элемент x_0 в качестве начального приближения. Он может содержать в себе некоторую априорную информацию об искомом решении. Предположим, что на шаге n приближение x_n уже построено. Выберем в пространстве $\mathcal{R}(B^*A)$ конечное число N_n направлений поиска $\{B^*A\xi_{n,1}, \ldots, B^*A\xi_{n,N_n}\}$ и определим следующее приближение по правилу

$$x_{n+1} := J_{*q}\left[J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} \mu_{n,i} B^*A\xi_{n,i}\right], \tag{3.3.1}$$

где вектор параметров шагов $\mu_n = (\mu_{n,1}, \ldots, \mu_{n,N_n})$ минимизирует выпуклую непрерывно дифференцируемую функцию $h : \mathbb{R}^{N_n} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$h(t_1, \ldots, t_{N_n}) := \frac{1}{q}\left\|J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} t_i B^*A\xi_{n,i}\right\|^q + \sum_{i=1}^{N_n} t_i \langle B\xi_{n,i}, y\rangle. \qquad \square$$

Заметим, что в силу леммы 3.2.4 описанный итерационный алгоритм эквивалентен последовательному проектированию по Брэгману

$$x_{n+1} = \Pi_{H_n}^p(x_n), \tag{3.3.2}$$

где

$$H_n := \bigcap_{k=1}^{N_n} H(B^*A\xi_{n,i}, \langle B\xi_{n,i}, y\rangle).$$

Поскольку для $z \in M$ выполнено $\langle B^* A\xi_{n,i}, z\rangle = \langle A\xi_{n,i}, Bz\rangle = \langle B\xi_{n,i}, y\rangle$, то получим $M \subseteq H_n$. Следовательно, для всех $z \in M$ имеем

$$\langle B\xi_{n,i}, Ax_{n+1} - y\rangle = \langle B^* A\xi_{n,i}, x_{n+1} - z\rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, N_n\}. \tag{3.3.3}$$

Заметим, что H_n для произвольного $z \in M$ представимо в виде

$$H_n = z + U_n^{\perp},$$

где $U_n \subseteq \mathcal{R}(B^* A)$ есть пространство направлений поиска

$$U_n := \operatorname{span}\{B^* A\xi_{n,i} \mid i = 1, \ldots, N_n\} \subseteq X^*.$$

Тогда согласно лемме 3.2.3 последовательное проектирование (3.3.2) эквивалентно проектированию в сопряженном пространстве

$$J_p(x_{n+1}) = \Pi^q_{J_p(x_n)+U_n}(J_p(z)), \quad z \in M. \tag{3.3.4}$$

Кроме того, $J_p(x_{n+1}) - J_p(x_n) \in U_n$, поэтому из соотношений (3.3.3) вытекает, что

$$\langle J_p(x_{n+1}) - J_p(x_n), x_{n+1} - z\rangle = 0, \quad \forall z \in M. \tag{3.3.5}$$

Сформулируем теперь основной результат третьей главы, теорему о сходимости представленного итерационного метода.

Теорема 3.3.1. *Пусть на каждом шаге итерации процесса* (3.3.1) *вектор* $B^*(Ax_n - y)$ *содержится в пространстве направлений поиска* U_n. *Тогда:*

1) *последовательность итераций* $\{x_n\}$ *ограничена, и все ее слабо предельные точки являются решениями* (3.1.1)*;*

2)*если в пространстве* X *дуальное отображение обладает свойством слабой-слабой непрерывности* (*например, такими будут пространства* ℓ_p *при* $1 < p < +\infty$), *т.е. всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в слабо сходящуюся, тогда вся последовательность* $\{x_n\}$ *слабо сходится к* $x^\dagger = \Pi^p_M(x_0)$*;*

3) *если в* $\{x_n\}$ *можно выбрать хотя бы одну сильно сходящуюся подпоследовательность* (*не имеет значения к какому пределу!*), *то вся последовательность сильно сходится к* $x^\dagger$. *Такая сильно сходящаяся подпоследовательность*

существует, например, независимо в каждом из случаев:

(a) X *конечномерно;*

(b) Y *конечномерно;*

(c) *для некоторого фиксированного* $n_0 \in \mathbb{N}$ *и бесконечного числа индексов* $n \geqslant n_0$ *вектор* $J_p(x_n) - J_p(x_{n_0})$ *включается в пространство направлений поиска* U_n.

Доказательство. Пусть $B^*(Ax_n - y) \in U_n$. Тогда для любого $\bar{\mu} > 0$ имеет место $J_p(x_n) - \bar{\mu}B^*(Ax_n - y) \in J_p(x_n) + U_n$. В силу (3.3.4) получаем для любого $z \in M$ следующую цепочку отношений:

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) = \Delta_q^*(J_p(z), J_p(x_{n+1})) \leqslant \Delta_q^*(J_p(z), J_p(x_n) - \bar{\mu}B^*(Ax_n - y)) =$$

$$= \frac{1}{p}\|z\|^p - \langle z, J_p(x_n)\rangle + \bar{\mu}\langle z, B^*(Ax_n - y)\rangle + \frac{1}{q}\|J_p(x_n) - \bar{\mu}B^*(Ax_n - y))\|^q.$$

Заметим, что $\langle z, B^*(Ax_n - y)\rangle = \langle Bz, A(x_n - x^\dagger)\rangle = \langle B(x_n - x^\dagger), y\rangle$, и воспользуемся неравенством (3.2.3) для дальнейшей оценки Δ_p:

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) \leqslant \frac{1}{p}\|z\|^p - \langle J_p(x_n), z\rangle + \bar{\mu}\langle B(x_n - x^\dagger), y\rangle +$$

$$+\frac{1}{q}\|x_n\|^p - \bar{\mu}\langle B(x_n - x^\dagger), Ax_n\rangle + \frac{G_q}{q}\bar{\mu}^q R_n^q,$$

где $R_n := \|B^*(Ax_n - y)\|$. По формуле для дистанции Брэгмана получаем

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) \leqslant \Delta_p(x_n, z) - \bar{\mu}\langle A(x_n - x^\dagger), B(x_n - x^\dagger)\rangle + \frac{G_q}{q}\bar{\mu}^q R_n^q.$$

Применим оценку (1.1.2), тогда

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) \leqslant \Delta_p(x_n, z) - \bar{\mu}\frac{R_n^2}{\|A\|\|B\|} + \frac{G_q}{q}\bar{\mu}^q R_n^q, \quad \forall \bar{\mu} > 0. \qquad (3.3.6)$$

Возьмем в правой части полученного неравенства минимум по $\bar{\mu}$; он достигается в точке, где производная равна нулю, т.е.

$$-\frac{R_n^2}{\|A\|\|B\|} + G_q\bar{\mu}^{q-1}R_n^q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mu} = \frac{R_n^{p-2}}{G_q^{p-1}\|A\|^{p-1}\|B\|^{p-1}}.$$

Подставив полученное значение $\bar{\mu}$ в (3.3.6), имеем

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) \leqslant \Delta_p(x_n, z) - \frac{R_n^p}{G_q^{p-1}\|A\|^p\|B\|^p} + \frac{1}{q}\frac{R_n^{pq-2q+q}}{G_q^{p-1}\|A\|^p\|B\|^p} =$$

$$= \Delta_p(x_n, z) - \frac{R_n^p}{pG_q^{p-1}\|A\|^p\|B\|^p}.$$

Таким образом, получена окончательная оценка

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) \leqslant \Delta_p(x_n, z) - \frac{R_n^p}{pG_q^{p-1}\|A\|^p\|B\|^p} \leqslant \Delta_p(x_n, z), \quad \forall z \in M. \tag{3.3.7}$$

Из нее вытекает, что дистанции Брэгмана от итерационных точек до множества решений M убывают, следовательно, они ограничены, следовательно, $\{x_n\}$ ограничена. Из (3.3.7) также вытекает, что R_n сходится к нулю. В силу слабой полунепрерывности снизу функционала $R(x) = \|B^*(Ax - y)\|$ каждая слабая предельная точка $\{x_n\}$ является решением уравнения (3.1.1).

Докажем теперь п. 2). Пусть дуальное отображение J_p слабо-слабо непрерывно, и x — слабый предел некоторой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$. Тогда $J_p(x_{n_k}) - J_p(x_0)$ слабо сходится к $J_p(x) - J_p(x_0)$. Поскольку $J_p(x_{n_k}) - J_p(x_0) \in \mathcal{R}(B^*A)$, и $\overline{\mathcal{R}(B^*A)}$ слабо замкнуто, то

$$x \in M = x^\dagger + \mathcal{N}(B^*A) = x^\dagger + \overline{\mathcal{R}(B^*A)}^\perp \quad \wedge \quad J_p(x) - J_p(x_0) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}.$$

В этом случае лемма 3.2.3 гарантирует нам, что $x = \Pi_M^p(x_0) = x^\dagger$.

Переходим к последнему пункту доказательства. Аналогичными рассуждениями, как и в п. 2), доказывается, что предел сильно сходящейся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ обязан совпадать с $x^\dagger$. Из непрерывности дистанции Брэгмана по своим аргументам вытекает, что $\lim\limits_{k\to+\infty} \Delta_p(x_{n_k}, x^\dagger) = \Delta_p(x^\dagger, x^\dagger) = 0$. Монотонная последовательность $\{\Delta_p(x_n, z)\}$ сходится при всех $z \in M$, поэтому

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_p(x_n, x^\dagger) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \|x_n - x^\dagger\| = 0.$$

Если пространство X конечномерно, то из ограниченой последовательности $\{x_n\}$ всегда можно выбрать сильно сходящуюся подпоследовательность. Если Y конечномерно, то и $\mathcal{R}(B^*A)$ конечномерно, поэтому в последовательности $\{J_p(x_n) - J_p(x_0)\} \subseteq \mathcal{R}(B^*A)$ можно выбрать сильно сходящуюся подпоследовательность. За счет равномерной гладкости пространства X отображение J_{*q} равномерно непрерывно на любом ограниченом множестве, поэтому в $\{x_n\}$ подпоследовательность, взятая по тем же индексам, будет сильно сходящейся. Наконец предположим, не ограничивая общности, что $J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_0}) \in U_{n_k}$ при всех натуральных k, и пусть последовательность $\{x_{n_k+1}\}$ (со сдвигом на один индекс вперед) слабо сходится к некоторому $x \in M$. Подставив значение $B^*A\xi_{n_k,i} = J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_0})$ в соотношение (3.3.3), получим

$$\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_0}), x_{n_k+1} - x\rangle = 0.$$

Учитывая свойство (3.3.5), приходим к соотношениям

$$\langle J_p(x_{n_k+1}) - J_p(x), x_{n_k+1} - x\rangle = \langle J_p(x_{n_k+1}) - J_p(x_{n_k}), x_{n_k+1} - x\rangle$$

$$+\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_0}), x_{n_k+1} - x\rangle + \langle J_p(x_{n_0}) - J_p(x), x_{n_k+1} - x\rangle =$$

$$= \langle J_p(x_{n_0}) - J_p(x), x_{n_k+1} - x\rangle.$$

В полученном равенстве правая часть стремится к нулю при $k \to +\infty$. Тогда из леммы 2.2.1 следует, что подпоследовательность $\{x_{n_k+1}\}$ сходится сильно к x. Теорема 3.3.1 доказана.

Список литературы

1. *Агеев, А.Л.* Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе функций ограниченной вариации / А.Л. Агеев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1980. — Т. 20, № 4. — С. 819–826.

2. *Адамар, Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа: монография / Ж. Адамар. — М.: Наука, 1978. — 351 с.

3. *Бакушинский, А.Б.* К вопросу о стабилизации решений линейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве / А.Б. Бакушинский // Мат. заметки. — 1971. — Т. 9, вып. 4. — С. 415–420.

4. *Бакушинский, А.Б.* К проблеме построения линейных регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах / А.Б. Бакушинский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1973. — Т. 13, № 1. — С. 204–210.

5. *Бакушинский, А.Б.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 197 с.

6. *Бакушинский, А.Б* Итеративные методы решения некорректных задач / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. — М.: Наука, 1989. — 128 с.

7. *Бирман, М. Ш.* О методе Фридрихса расширения положительно определенного оператора до самосопряженного / М.Ш. Бирман // Записки Ленингр. горного ин-та. — 1956. — Т. 33, вып. 3. — С. 132–136.

8. *Брэгман, Л.М.* Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования / Л.М. Брэгман // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1967. — Т. 7, № 3. — С. 620–631.

9. *Вайникко, Г.М.* Анализ дискретизационных методов / Г.М. Вайникко. — Тарту: Изд-во Тартус. ун-та, 1976. — 161 с.

10. *Вайникко, Г.М.* Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач / Г.М. Вайникко // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 3. — С. 84–92.

11. *Вайникко, Г.М.* Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах / Г.М. Вайникко. — Тарту: Изд-во Тартус. ун-та, 1982. — 107 с.

12. *Вайникко, Г.М.* Итерационные процессы в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю Веретенников. — М.: Наука, 1986. — 178 с.

13. *Васильев, Ф.П.* Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.

14. *Васин, В.В.* Дискретизация, итерационно-аппроксимационные алгоритмы решения неустойчивых задач и их приложения: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.07 / Васин Владимир Васильевич. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. — 30 с.

15. *Васин, В.В.* Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. — Екатеринбург: УИФ Наука, 1993. — 262 с.

16. *Васин, В.В.* Регуляризация и итеративная аппроксимация для линейных некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации / В.В. Васин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2002. — Т. 8, № 1. — С. 189–202.

17. *Васин, В.В.* Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 64–77.

18. *Гончарский, А.В.* О равномерном приближении с ограниченной вариацией некорректно поставленных задач / А.В. Гончарский, В.В. Степанов // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 248, № 1. — С. 20–22.

19. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 896 с.

20. *Демьянов, В.Ф.* Недифференцируемая оптимизация / В.Ф. Демьянов, В.П. Васильев. — М.: Наука, 1981. — 384 с.

21. *Дистель, Дж.* Геометрия банаховых пространств: избранные главы / Дж. Дистель. — Киев: Вища шк., 1980. — 216 с.

22. *Дорофеев, И.Ф.* О решении интегральных уравнений 1 рода в классе функций с ограниченной вариацией / И.Ф. Дорофеев // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 244, № 6. — С. 1303–1311.

23. *Иванов, В.К.* О линейных некорректных задачах / В.К. Иванов // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 145, № 2. — С. 270–272.

24. *Иванов, В.К.* О некорректно поставленных задачах / В.К. Иванов // Мат. сб. — 1963. — Т. 61, № 2. — С. 211–223.

25. *Иванов, В.К.* Об одном типе некорректных линейных уравнений в векторных топологических пространствах / В.К. Иванов // Сиб. мат. журн. — 1965. — Т. 6, № 4. — С. 832–839.

26. *Иванов, В.К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода / В.К. Иванов // Дифференц. уравнения. — 1967. — Т. 3, № 3. — С. 410–421.

27. *Иванов, В.К.* Некорректные задачи в топологических пространствах / В.К. Иванов // Сиб. мат. журн. — 1969. — Т. 10, № 5. — С. 1065–1074.

28. *Иванов, В.К.* Линейные неустойчивые задачи с многозначными операторами / В.К. Иванов // Сиб. мат. журн. — 1970. — Т. 11, № 5. — С. 1009–1016.

29. *Иванов, В.К.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. — М.: Наука, 1978. — 206 с.

30. *Иванов, В.К.* Регуляризация расходящихся интегралов и регуляризация некорректных краевых задач / В.К. Иванов, И.В. Мельникова // Изв. вузов. Математика. — 1986. — № 4. — С. 44–49.

31. *Иосида, К.* Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

32. *Иоффе, А.Д.* Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

33. *Калякин, Л. А.* О приближенном решении некорректных задач в нормированных пространствах / Л.А. Калякин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1972. — Т. 12, № 5. — С. 1168–1181.

34. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1972. — 496 с.

35. *Короткий, М.А.* Восстановление управлений и параметров методом Тихонова с негладкими стабилизаторами / М.А. Короткий // Изв. вузов. Математика. — 2009. — № 2. — С. 76–82.

36. *Короткий, М.А.* Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами / М.А. Короткий // Прикл. математика и механика. — 2009. — Т. 73, вып. 1. — С. 39–53.

37. *Лаврентьев, М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики: монография / М.М. Лаврентьев. — Новосибирск: СО АН СССР, 1962. — 92 с.

38. *Лаврентьев, М.М.* Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. — М.: Наука, 1980. — 288 с.

39. *Латтес, Р.* Метод квазиобращения и его приложения / Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1970. — 336 с.

40. *Леонов, А.С.* Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями / А.С. Леонов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1982. — Т. 22, № 3. — С. 516–531.

41. *Лионс, Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 414 с.

42. *Лисковец, О.А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач / О.А. Лисковец. — Минск: Наука и техника, 1981. — 343 с.

43. *Менихес, Л.Д.* О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам / Л.Д. Менихес // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 241, № 2. — С. 282–285.

44. *Менихес, Л.Д.* Об одном достаточном условии регуляризируемости линейных обратных задач / Л.Д. Менихес // Мат. заметки. — 2007. — Т. 82, № 2. — С. 242–247.

45. *Менихес, Л.Д.* К теории регуляризации интегральных уравнений / Л.Д. Менихес // Изв. Урал. госуниверситета. — 2008. — №58. (Серия: Математика. Механика. Информатика. Вып. 11). — С. 138–154.

46. *Морозов, В.А.* О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации / В.А. Морозов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1968. — Т. 8, № 2. — С. 295–309.

47. *Морозов, В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В.А. Морозов. — М.: Наука, 1987. — 239 с.

48. *Морозов, В.А.* Методы регуляризации неустойчивых задач: монография / В.А. Морозов. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 217 с.

49. *Петунин, Ю.И.* Теория характеристик подпространств и ее приложения / Ю.И. Петунин, А.Н. Пличко. — Киев: Вища шк., 1980. — 216 с.

50. *Поляк, Б.Т.* Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк. — М.: Наука, 1983. — 384 с.

51. *Рязанцева, И.П.* Избранные главы теории операторов монотонного типа: монография / И.П. Рязанцева. — Н. Новгород: НГТУ, 2008. — 272 с.

52. *Тихонов, А.Н.* Об устойчивости обратных задач / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. — 1943. — Т. 39, № 4. — С. 195–198.

53. *Тихонов, А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 153, № 1. — С. 49–52.

54. *Тихонов, А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 501–504.

55. *Тихонов, А.Н.* Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 288 с.

56. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. — М.: Наука, 1990. — 230 с.

57. *Тихонов, А.Н.* Нелинейные некорректные задачи / А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола. — М.: Наука: Физматлит, 1995. — 312 с.

58. *Треногин, В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

59. *Хромова, Г. В.* О регуляризации интегральных уравнений первого рода с ядром Грина / Г. В. Хромова // Изв. вузов. Математика. — 1972. — № 8. — С. 94–104.

60. *Хромова, Г. В.* О сходимости метода Лаврентьева / Г. В. Хромова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2009. — Т. 49, № 6. — С. 958–965.

61. *Шалов, В. М.* Некоторое обобщение пространства К.О. Фридрихса / В. М. Шалов // Докл. АН СССР. — 1963. — Т.151, № 2. — С. 292-294.

62. *Шалов, В. М.* Решение несамосопряженных уравнений вариационным методом / В. М. Шалов // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 511–512.

63. *Acar, R.* Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems / R. Acar, C.R. Vogel // Inverse Probl. — 1994. — Vol. 10, № 6. — P. 1217–1229.

64. *Alber, Y.I.* Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications / Y.I. Alber // Theory and Applications of Nonlinear Operators of Monotone and Accretive Type. — New York: Marcel Dekker, 1996. — P. 15–50.

65. *Alber, Ya.* Convergence of Bregman projection methods for solving consistent convex feasibility problems in reflexive Banach spaces / Ya. Alber, D. Butnariu // J. Optim. Theory and Appl. — 1997. — Vol. 92, № 1. — P. 33–61.

66. *Alber, Ya.* Nonlinear Ill-posed Problems of Monotone Type / Ya. Alber, I. Ryazantseva. — Dordrecht: Springer, 2006. — 410 p.

67. *Belgacem, F.B.* Ill-posed quadratic optimization in Banach spaces / F.B. Belgacem // J. Inverse Ill-posed Probl. — 2008. — Vol. 18, iss. 3. — P. 263–279.

68. *Borwein, J.M.* Mosco convergence and the Kadec property / J.M. Borwein, S. Fitzpatrick // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 106, № 3. — P. 843–851.

69. *Browder, F.E.* Fixed - point Theorem for non compact mappings in Hilbert space / F.E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1965. — Vol. 53, № 6. — P. 1272–1276.

70. *Cioranescu, I.* Geometry of Banach spaces, duality mappings, and nonlinear problems / I. Cioranescu. — Dordrecht: Kluwer, 1990. — 260 p.

71. *Clarkson, J.A.* Uniformly convex spaces / J.A. Clarkson // Trans. Amer. Math. Soc. — 1936. — Vol. 40, № 3. — P. 396–414.

72. *Friedrichs, K.O.* Spektraltheorie halbbeschänkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren / K.O. Friedrichs // Math. Ann. — 1934. — Bd. 109. — H. 4–5.

73. *Friedrichs, K.O.* Symmetric positive linear differential equations / K.O. Friedrichs // Comm. Pure. Appl. Math. — 1958. — Vol. 11, iss. 3. — P. 333–418.

74. *Halperin, B.* Fixed points of nonexpansive maps / B. Halperin // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol. 73, № 6. — P. 957–961.

75. *Hanner, O.* On the uniform convexity of L_p and l_p / O. Hanner // Arkiv für Matematik. — 1956. — Vol. 3, № 3. — P. 239–244.

76. *Hein, T.* Convergence rates for regularization of ill-posed problems in Banach spaces by approximate source conditions / T. Hein // Inverse Probl. — 2008. — Vol. 24, № 4. — 045007.

77. *Kaltenbacher, B.* Iterative methods for nonlinear ill-posed problems in Banach spaces: convergence and application to parameter identification problems / B. Kaltenbacher, F. Schöpfer, T. Schuster // Inverse Problems. — 2009. — Vol. 25, № 6. — ID 065003 (19 pp.).

78. *Kazimierski, K.S.* A damped conjugate gradient method for ill-posed problems in Banach spaces / K.S. Kazimierski // Abstracts 6-th Intern. Conf. "Inverse Problems: Modeling and Simulation"held on May 21–26, 2012, Antalya, Turkey. — P. 106–107.

79. *Landweber, L.* An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. — 1951. — Vol. 73. — P. 615–624.

80. *Lindenstrauss, J.* Classical Banach spaces, II / J. Lindenstrauss, L. Tzafriry. — New York; Berlin: Springer-Verlag, 1979. — 243 p.

81. *Mosco, U.* Approximation of the solutions of some variational inequalities / U. Mosco // Ann. Scuola Normale Sup. (Pisa). — 1967. — №21. — P. 373—394.

82. *Mosco, U.* Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities / U. Mosco // Advances in Mathematics. — 1969. — Vol. 3, № 4. — P. 510—585.

83. *Neubauer, A.* On enhanced convergence rates for Tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems in Banach spaces / A. Neubauer // Inverse Probl. — 2009. — Vol. 25, № 6. — 065009 (10pp).

84. *Resmerita, E.* Regularization of ill-posed problems in Banach spaces: convergence rates / E. Resmerita // Inverse Probl. — 2005. — Vol. 21, № 4. — P. 1303–1314.

85. *Schöpfer, F.* Nonlinear iterative methods for linear ill-posed problems in Banach spaces / F. Schöpfer, A. K. Louis, T. Schuster // Inverse Probl. — 2006. — Vol. 22, № 1. — P. 311–329.

86. *Schöpfer, F.* Metric and Bregman projections onto affine subspaces and their computation via sequential subspace optimization methods / F. Schöpfer, T. Schuster, A. K. Louis // J. Inverse Ill-posed Probl. — 2008. — Vol. 16, № 5. — P. 479–506.

87. *Schöpfer, F.* Fast regularizing sequential subspace optimization in Banach spaces / F. Schöpfer, T. Schuster // Inverse Probl. — 2009. — Vol. 25, № 1. — 22 p.

88. *Stummel, F.* Diskrete Konvergenz Linear Operatoren. I; II / F. Stummel // Math. Ann. — 1970. — Vol. 190, №1. — S. 45–92.

89. *Vainikko, G.* Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden / G. Vainikko. — Leipzig: Teubner, 1976. — 136 p.

90. *Vasin, V.V.* Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional / V.V. Vasin, M.A. Korotkii // J. Inverse Ill-posed Probl. — 2007. — Vol. 15, № 8. — P. 853–865.

91. *Xu, Z.B.* Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces / Z.B. Xu, G.F. Roach // J. Math. Anal. Appl. — 1991. — Vol. 157. — P. 189–210.

Публикации автора

92. *Чистяков, П. А.* Регуляризация операторных уравнений с B-симметричным и B-положительным оператором в банаховых пространствах / П.А. Чистяков // Изв. вузов. Математика. — 2009. — № 10. — С. 81–87.

93. *Чистяков, П. А.* Итерационные методы решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах / П.А. Чистяков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 3. — С. 303–318.

94. *Чистяков, П. А.* Многошаговый итерационный метод решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах / П.А. Чистяков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 1. — С. 318–328.