

Методы и алгоритмы решения нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии

Докладчик: В. Е. Мисилов

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения
Российской академии наук
Уральский федеральный университет

2015

Специальность: 05.13.18. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Научный руководитель: д. ф.-м. н., вед. н. с. Е. Н. Акимова

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена проблеме построения параллельных итерационных алгоритмов и их использованию при решении обратных структурных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении контактных поверхностей.

Актуальность темы. Задача о восстановлении контактных поверхностей используются при построении региональных геофизических моделей и поэтому являются крайне важными.

Целью диссертационной работы является построение параллельных итерационных алгоритмов решения систем нелинейных уравнений применительно к решению обратных структурных задач гравиметрии и магнитометрии.

Методы исследований. В диссертационной работе использован математический аппарат численных методов оптимизации, теории некорректных задач и методы математического моделирования

Научная новизна.

1. Предложено обобщенная постановка структурной задачи магнитометрии о восстановлении одной контактной поверхности для случая произвольно направленной намагниченности.
2. Для решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении одной контактной поверхности построены новые методы: линеаризованный метод сопряженных градиентов и покомпонентный градиентный метод.
3. Для решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении нескольких контактных поверхностей предложен Предлагаемый подход. Подход основан на применении методов градиентного типа с весовыми множителями.
4. Разработан и реализован для комплекс параллельных программ решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении контактных поверхностей на основе предложенных методов. Комплекс программ доступен для использования через систему удаленных вычислений «Веб-портал решения прикладных задач на многопроцессорных вычислительных системах».

Защищаемые положения.

1. Выведено интегральное уравнение обратной задачи нахождения контактной поверхности по магнитным данным для случая произвольно направленной намагниченности, что расширяет класс решаемых задач по сравнению с идеализированным случаем вертикально направленной намагниченности.
2. Разработаны новые итерационные методы решения задач восстановления формы одной контактной поверхности по гравитационному или магнитному полю (линеаризованный метод сопряженных градиентов и покомпонентный градиентный метод), существенно уменьшающие время счета по сравнению с традиционными методами

Защищаемые положения.

3. Для решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии предложен новый подход, основанный на применении градиентных методов с переменными весовыми множителями, обеспечивающий высокую точность и скорость моделирования сложнопостроенных геологических сред.
4. Разработан комплекс параллельных программ для многоядерных и графических процессоров, позволяющий быстро решать обратные задачи на сетках большой размерности с целью получения принципиально новой геологической информации.

Практическая значимость.

Разработанные в диссертационной работе и апробированные в расчетах параллельных алгоритмы и программы могут быть эффективно использованы при численном решении широкого круга геофизических задач, связанных с прогнозом и поиском месторождений углеводородов и твердых полезных ископаемых. Комплекс параллельных программ решения задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении контактных поверхностей успешно используется для интерпретации практических данных совместно с сотрудниками Института геофизики УрО РАН (ИГФ УрО РАН) на ... площади в Уральском регионе.

Апробация работы.

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на всероссийских и международных конференциях и семинарах: международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии» (Новосибирск, 2012; Челябинск, 2013; Ростов-на-Дону, 2014; Екатеринбург, 2015), XIII Уральской молодежной научной школы по геофизике (Екатеринбург, 2012), XIV Уральской молодежной научной школы по геофизике (Пермь, 2013), 41-ой сессии международного семинара имени Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей» (Екатеринбург 2013), 2-ом, 3-ем и 4-ом Национальных Суперкомпьютерных Форумах (Переславль-Залесский, 2013; 2014; 2015).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах, в том числе в научных изданиях, рекомендованных ВАК [1–6].

- 1 Акимова Е. Н., Мартышко П. С., Мисилов В. Е. Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде // ДАН. 2013. Т. 453. № 6. С. 676-679.
- 2 Акимова Е. Н., Белоусов Д. В., Мисилов В. Е. Алгоритмы решения обратных геофизических задач на многопроцессорных вычислительных системах // Сиб. журнал вычислительной математики. 2013. Т. 16. № 2. С. 107–121.
- 3 Martyshko P. S., Pyankov V. A. Akimova E. N., Vasin V. V., Misilov V. E. On solving a structural gravimetry problem on supercomputer «Uran» for the Bashkir Predural's area // Proc. of XII th International Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kiev, Ukraine. 13–16 May 2013. 5 р.
- 4 Акимова Е. Н., Васин В. В., Мисилов В. Е. Алгоритмы решения обратных задач гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник УГАТУ. 2014. Т.18. № 2 (63). С. 208 -217.
- 5 Акимова, Е. Н., Мисилов В. Е., Скурыдина А. Ф. Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник УГАТУ. 2014. Т.18, № 4 (65). С. 206-215.
- 6 Акимова, Е. Н., Мисилов, В. Е., Скурыдина, А. Ф., Третьяков, А. И. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” // Вычислительные методы и программирование, 2015. Т. 16, 155–164.

Публикации

В работе [1] В. Е. Мисилову принадлежит идея использования переменных весовых множителей, способ выбора весовых множителей, разработка и реализация параллельного алгоритма.

В работе [2] В. Е. Мисилову принадлежит разработка и реализация параллельных алгоритмов решения задачи нахождения плотности в слое и разработка специализированного веб-портала.

В работе [3] В. Е. Мисилову принадлежит разработка и реализация параллельных алгоритмов решения задачи восстановления плотностной границы по гравитационным данным.

В работах [4–5] В. Е. Мисилову принадлежит разработка и реализация параллельных алгоритмов решения задачи восстановления нескольких контактных поверхностей по гравитационным данным или магнитным данным.

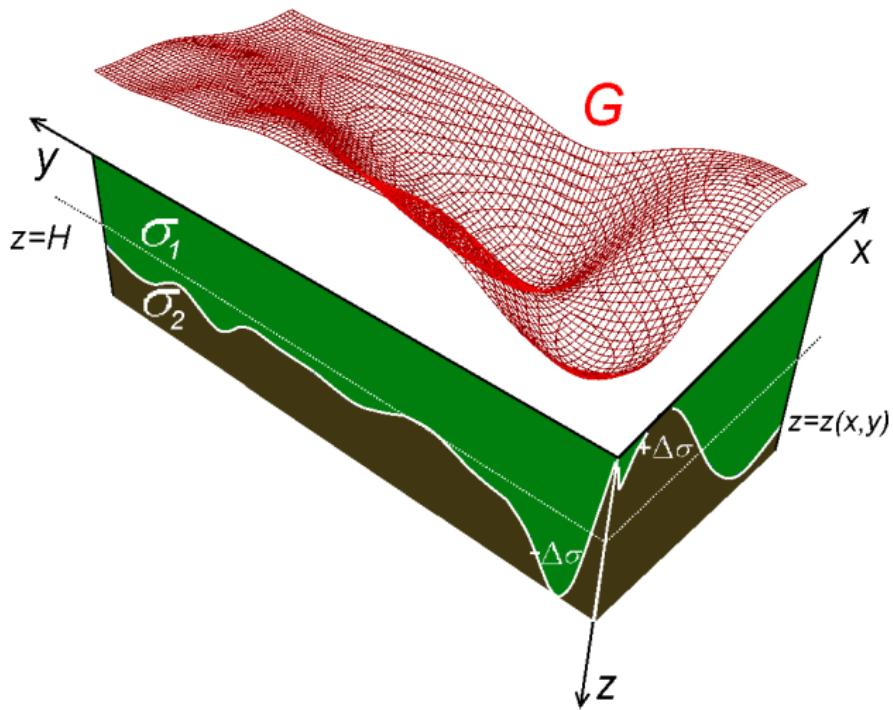
В работе [6] В. Е. Мисилову принадлежит построение алгоритма решения систем нелинейных уравнений на основе нелинейного метода сопряженных градиентов, построение модифицированных методов решения задачи восстановления нескольких контактных поверхностей по гравитационным или магнитным данным.

Глава 1: задачи гравиметрии и магнитометрии о для случая одной контактной поверхности

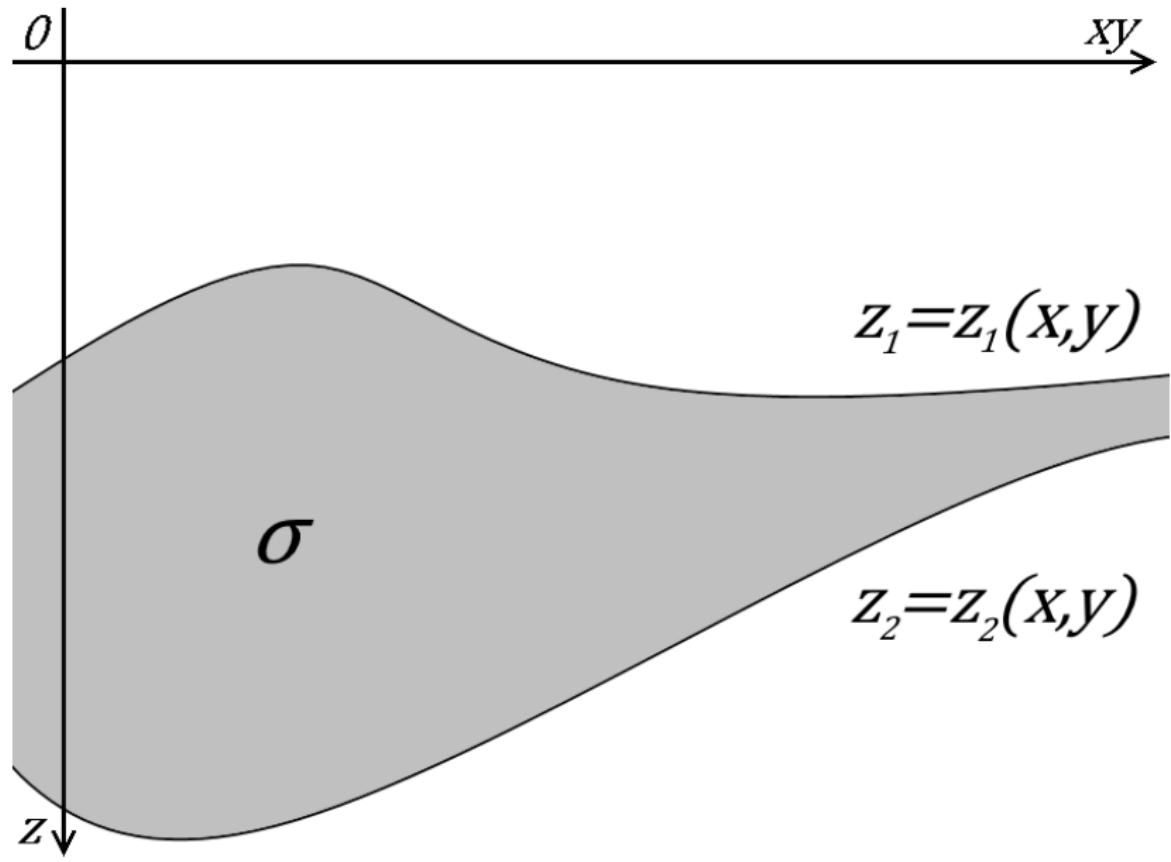
Содержание:

- §1: постановка гравиметрии для двуслойной среды —
Б. В. Нумеров (1930); В. Н. Страхов (1974); Н. В. Федорова,
А. В. Цирульский (1976);
- §2: постановка магнитометрии для двуслойной среды —
Н. П. Малкин(1931); В. Н. Страхов, С. Н. Иванов (1984); +
обобщение на случай произвольно направленного вектора
намагниченности.
- §3: построение алгоритм решения систем нелинейных уравнений
на основе варианта метода сопряженных градиентов,
предложенного Ж. Жильбером и Х. Носедалем.
- §4: построение алгоритма решения систем нелинейных уравнений
применительно к решению задач о восстановлении контактной
поверхности на основе идеи локальности, предложенной И. Л.
Пруткиным.

Модель двуслойной среды в задаче гравиметрии



Субгоризонтальный слой



Гравитационный эффект от слоя

Известно, что гравитационный потенциал однородного тела D равен

$$V(\mathbf{r}_0) = f\sigma \int_D \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dD,$$

где \mathbf{r}_0 – радиус-вектор точки наблюдения, а \mathbf{r} – радиус-векторы точек тела D , f – гравитационная постоянная, и σ – плотность тела.

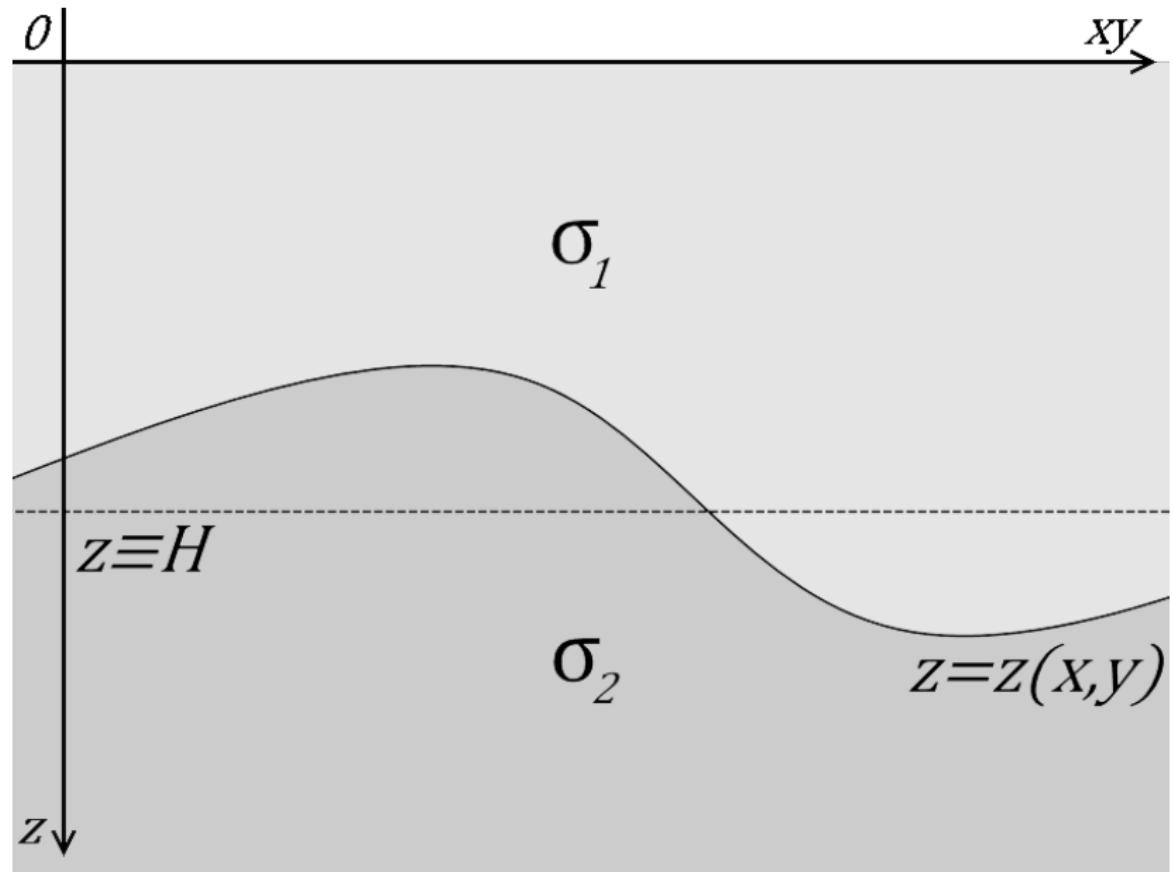
⁰О. А. Шванк, Е. Н. Люстих. Интерпретация гравитационных наблюдений. 1947.

Гравитационный эффект от слоя

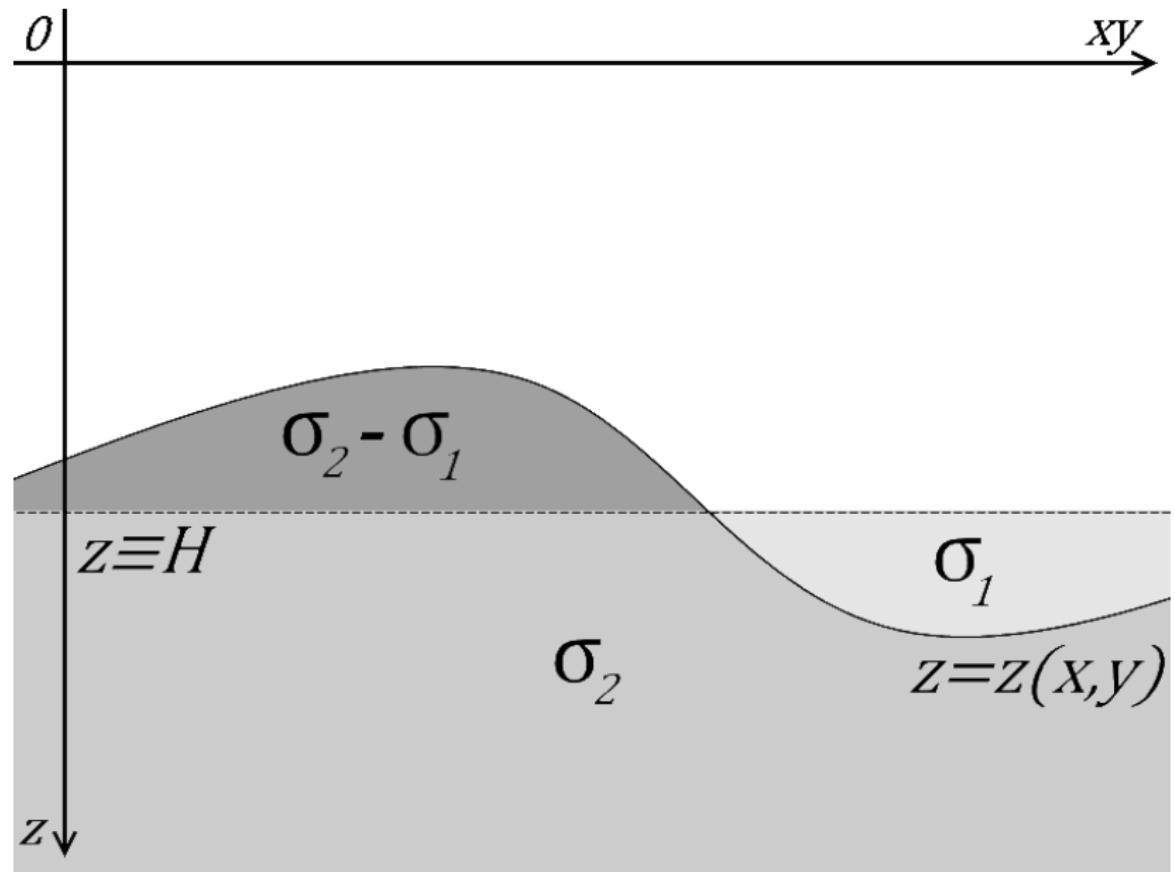
Для рассматриваемого слоя имеем:

$$g(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial V}{\partial z_0} = f_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{1/2}} \right] dx dy.$$

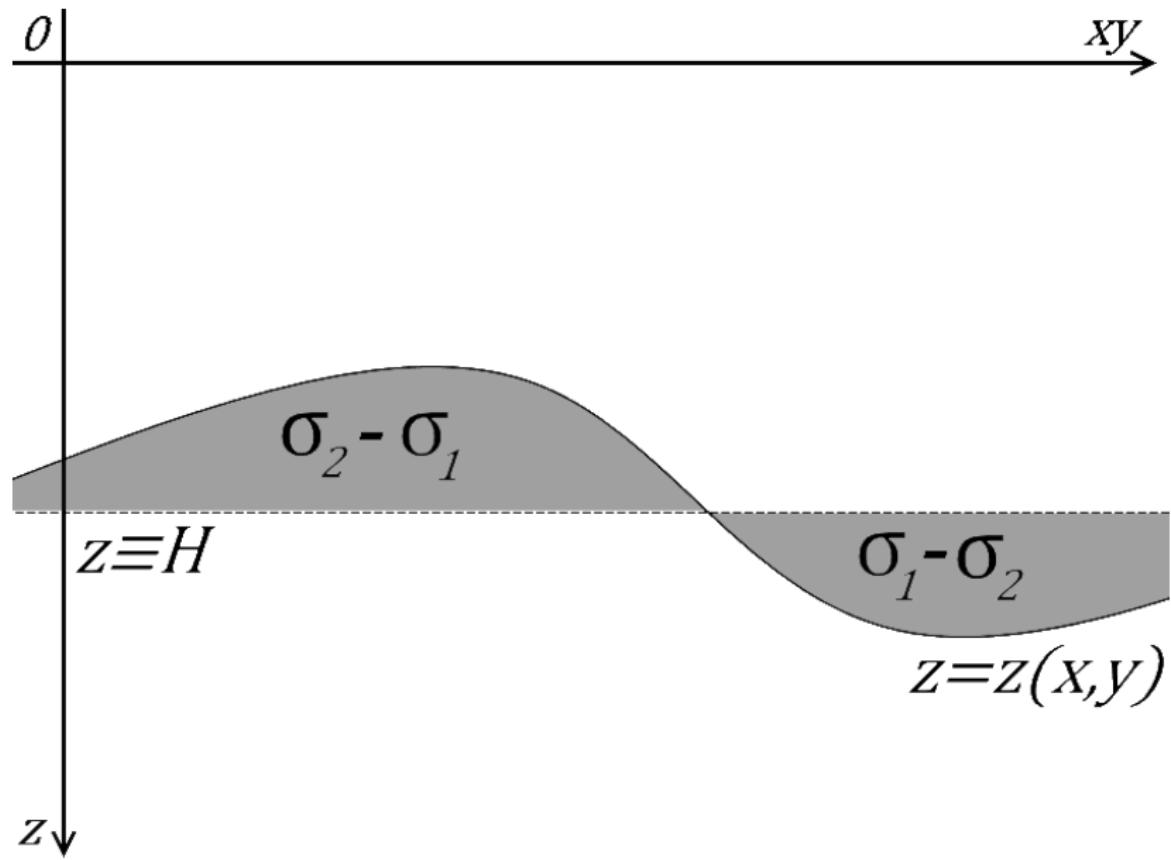
Гравитационный эффект от контактной поверхности



Гравитационный эффект от контактной поверхности



Гравитационный эффект от контактной поверхности



Гравитационный эффект от контактной поверхности

$$\Delta g(x_0, y_0, 0) = f \Delta \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2(x, y))^{1/2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2)^{1/2}} \right] dx dy,$$

где $\Delta \sigma = \sigma_2 - \sigma_1$.

Обратная задача гравиметрии

Уравнение

$$f \Delta\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2(x_0, y_0))^{1/2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2)^{1/2}} \right] dx_0 dy_0 = \Delta g(x, y).$$

является уравнением Фредгольма первого рода от z :

$$A(z) = \Delta g(x, y).$$

Дискретизация и аппроксимация

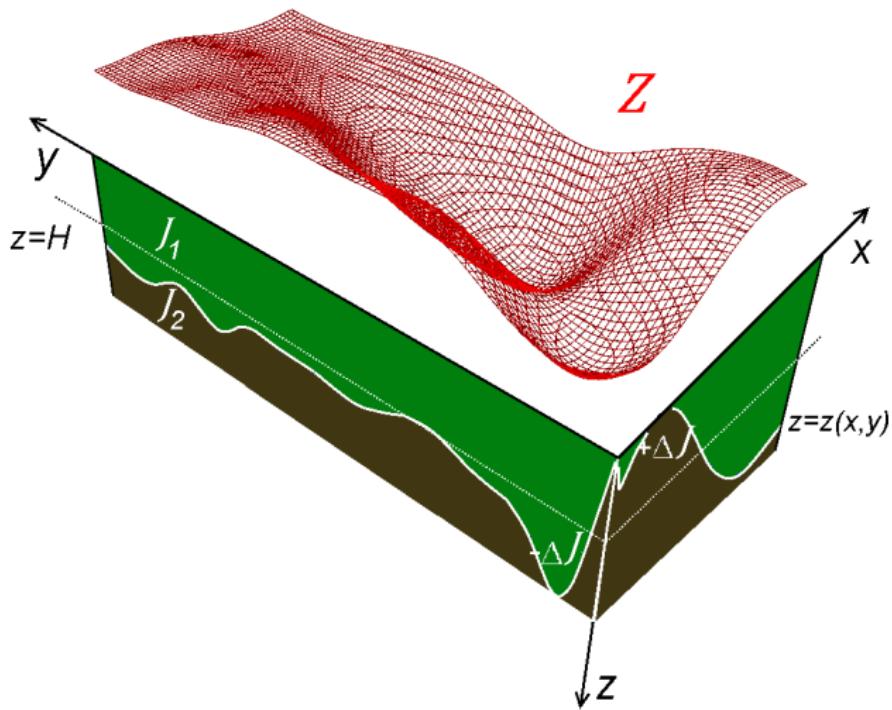
После дискретизации уравнения на сетке $n = M \times N$ и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам имеем векторы правой части F и решения z размерности n

$$f \Delta \sigma \Delta x \Delta y \sum_{j=1..n} \left[\frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_j^2)^{1/2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2)^{1/2}} \right] = F,$$

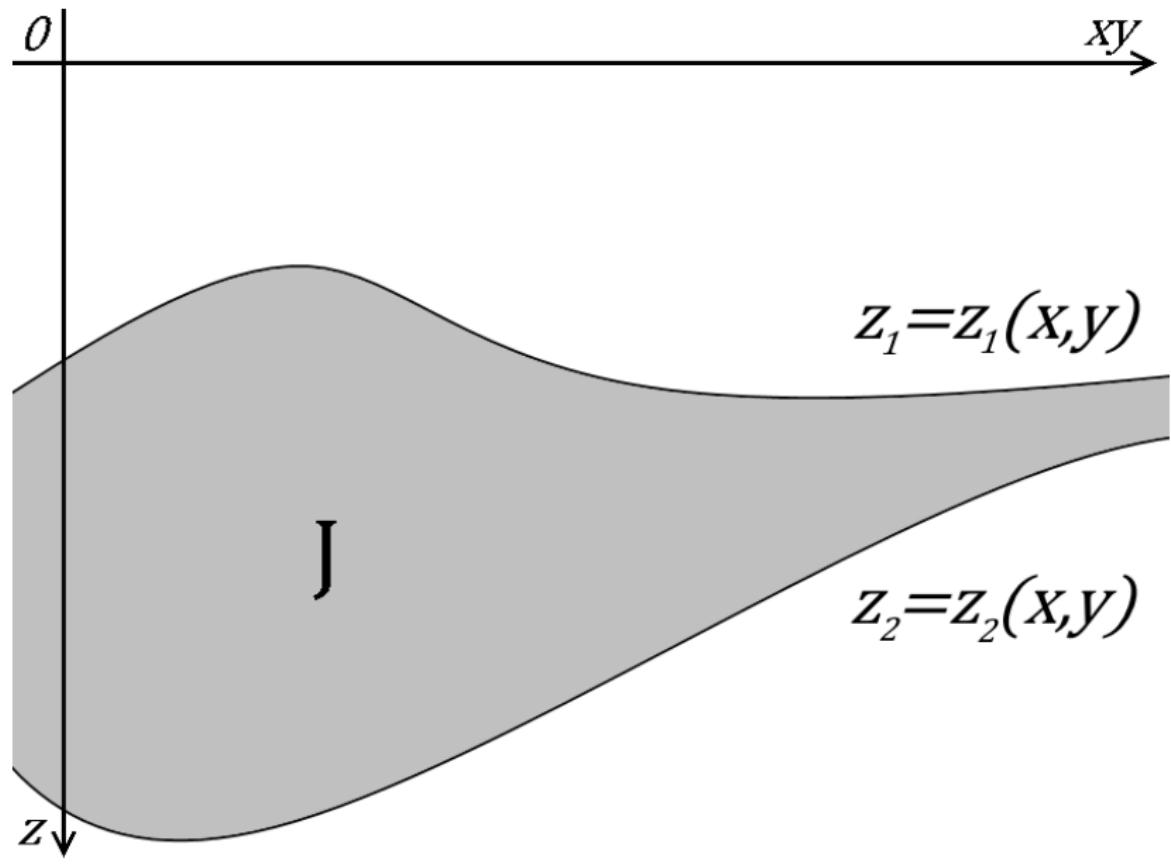
и получаем систему нелинейных уравнений

$$A_j(z) = F_j, j = 1..n.$$

Модель двуслойной среды в задаче магнитометрии



Субгоризонтальный слой



Магнитный эффект от слоя

Известно, что магнитный потенциал однородного тела D с намагниченностью \mathbf{J} равен

$$U = -\frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{J}, \nabla V \rangle,$$

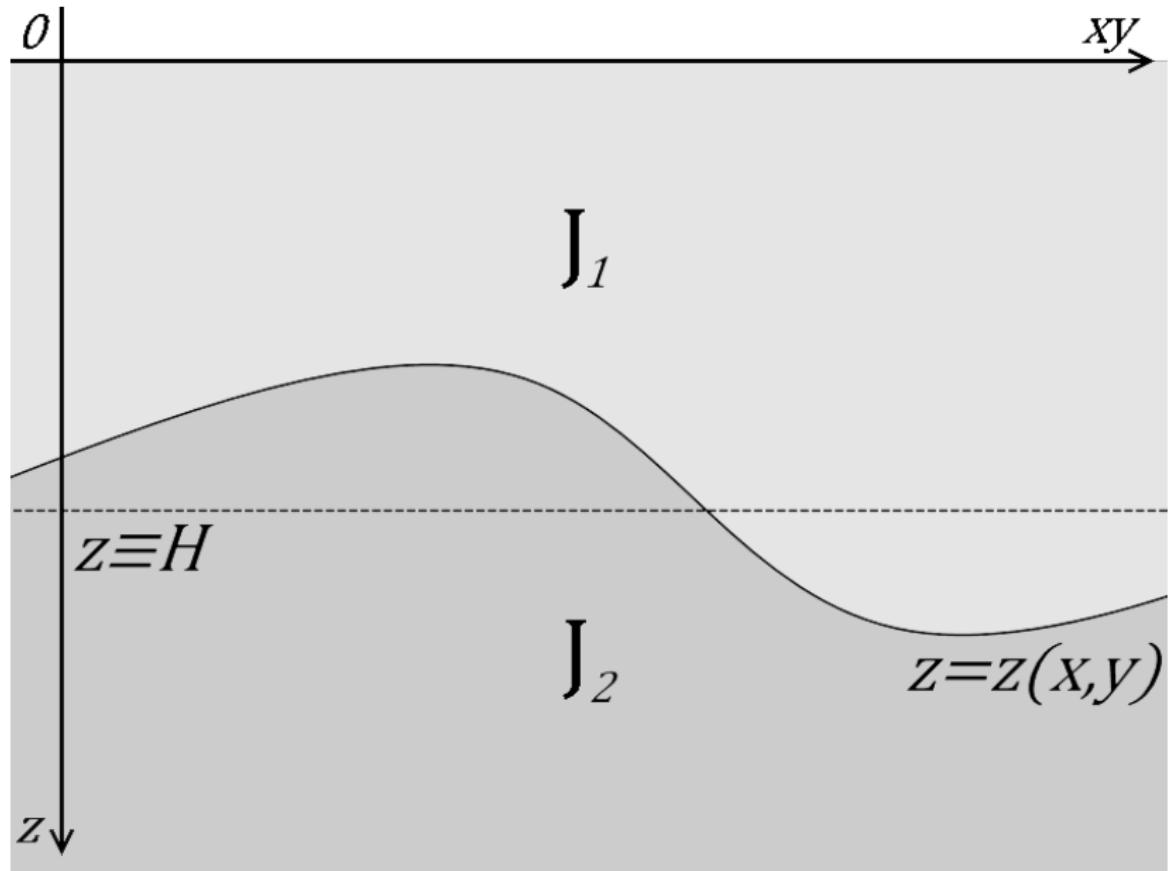
где V — гравитационный потенциал тела такой же формы и размеров, имеющего постоянную плотность σ , равную обратной величине гравитационной постоянной f .

Магнитный эффект от слоя

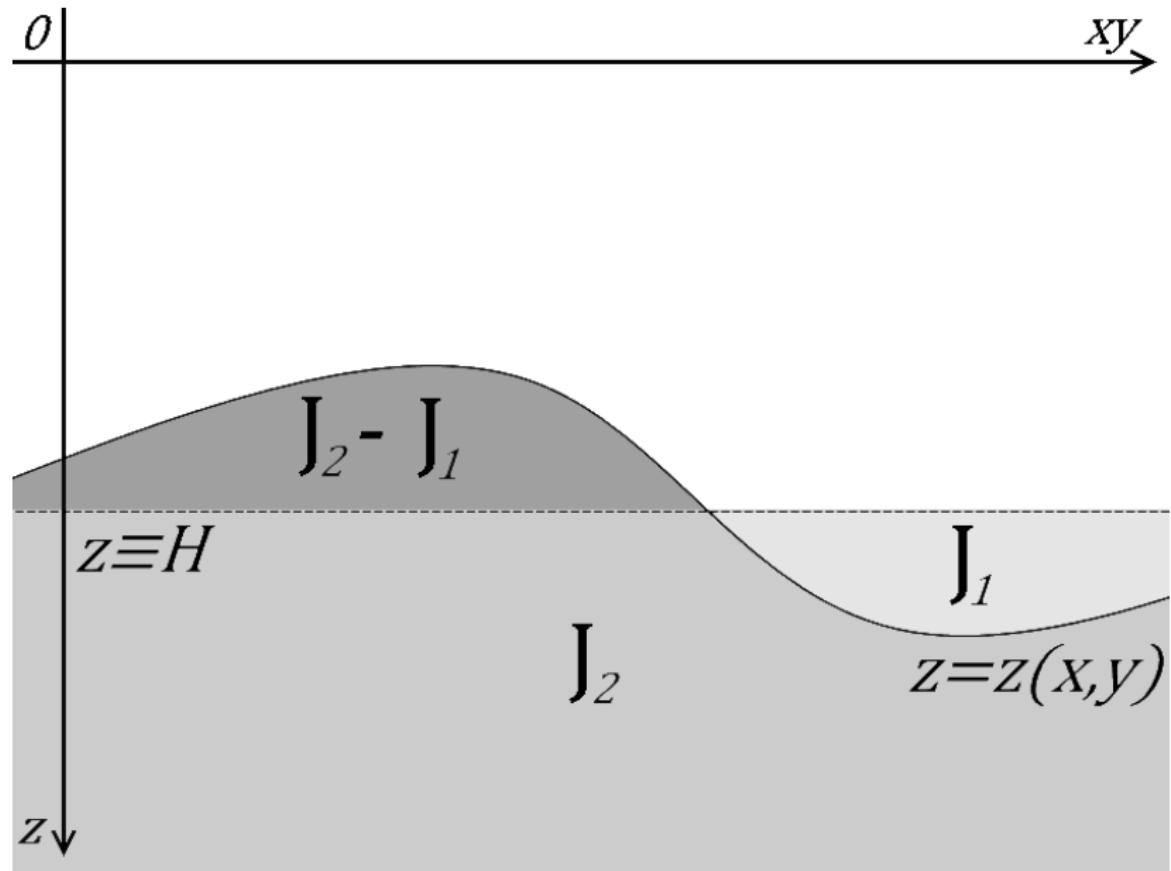
Для рассматриваемого слоя имеем:

$$\begin{aligned} H_z(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} = -\frac{1}{4\pi} \partial \left(J_z \frac{\partial V}{\partial z_0} \right) / \partial z_0 = \\ &= -\frac{J_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{-(z_2(x, y) - z_0)}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2 \right)^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{-(z_1(x, y) - z_0)}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2 \right)^{3/2}} \right] dx dy. \end{aligned}$$

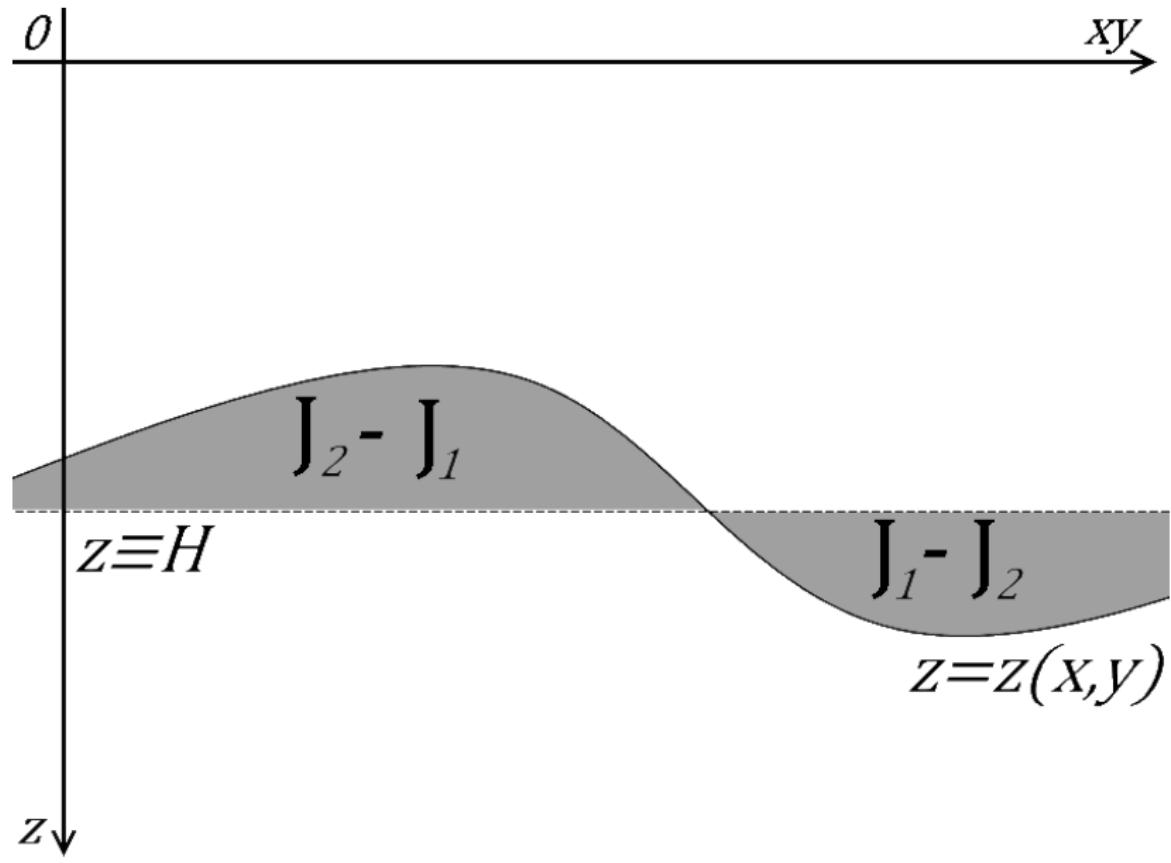
Магнитный эффект от контактной поверхности



Магнитный эффект от контактной поверхности



Магнитный эффект от контактной поверхности



Магнитный эффект от контактной поверхности

$$\Delta Z(x_0, y_0, 0) = \frac{\Delta J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{z(x, y)}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2(x, y) \right)^{3/2}} - \right. \\ \left. - \frac{H}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2 \right)^{3/2}} \right] dx dy.$$

где $\Delta J = J_2 - J_1$.

Обратная задача магнитометрии

Уравнение

$$\frac{\Delta J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{z(x_0, y_0)}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2(x_0, y_0) \right)^{3/2}} - \frac{H}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2 \right)^{3/2}} \right] dx_0 dy_0 = \Delta Z(x, y)$$

тоже является уравнением Фредгольма первого рода от z :

$$B(z) = \Delta Z(x, y).$$

Дискретизация и аппроксимация

После дискретизации уравнения на сетке $n = M \times N$ и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам имеем векторы правой части F и решения z размерности n

$$\frac{\Delta J}{4\pi} \Delta x \Delta y \sum_{i=1..n} \left[\frac{z_j}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_j^2)^{3/2}} - \frac{H}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2)^{3/2}} \right] = F$$

и получаем систему нелинейных уравнений

$$B_j(z) = F_j, j = 1..n.$$

Задача магнитометрии в случае произвольно направленной намагниченности (NEW)

Пусть $\mathbf{J} = \{J_x, J_y, J_z\}$. Для слоя с криволинейными границами получим:

$$\begin{aligned} H_z(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \partial \left(J_x \frac{\partial V}{\partial x_0} + J_y \frac{\partial V}{\partial y_0} + J_z \frac{\partial V}{\partial z_0} \right) / \partial z_0 = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{J_x(x - x_0) + J_y(y - y_0) - J_z(z_2(x, y) - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_2(x, y) - z_0)^2)^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{J_x(x - x_0) + J_y(y - y_0) - J_z(z_1(x, y) - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z_1(x, y) - z_0)^2)^{3/2}} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Магнитный эффект от контактной поверхности

$$\Delta Z(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta J_x(x_0 - x) + \Delta J_y(y_0 - y) - \Delta J_z h}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + h^2)^{3/2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\Delta J_x(x_0 - x) + \Delta J_y(y_0 - y) - \Delta J_z z(x_0, y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2(x_0, y_0))^{3/2}} \right] dx_0 dy_0,$$

где $\Delta \mathbf{J} = \mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1$ - скачок намагниченности.

Методы решения

- Метод локальных поправок — И. Л. Пруткин (1983; 1986); П. С. Мартышко и др. (2003–2015);
- Парные монотонные процессы и градиентные методы — В. В. Васин, Л. Ю. Тимерханова (1998, 1999, 2003);
- Метод Левенберга-Марквардта — В. В. Васин, Г. Я. Пересторонина (2003; 2010);
- Метод Гаусса-Ньютона и модифицированный метод Гаусса-Ньютона с решением СЛАУ градиентными методами и параллельная реализация — В. В. Васин, Е. Н. Акимова, (2003–2015).

Методы градиентного типа

Обозначим $S(z^k) = A'(z^k)^T (A(z^k) - F)$.

- Линеаризованный метод наискорейшего спуска (ЛМНС)

$$z^{k+1} = z^k - \gamma \frac{\|S(z^k)\|^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|^2} S(z^k);$$

- Линеаризованный метод минимальной ошибки (ЛММО)

$$z^{k+1} = z^k - \gamma \frac{\|A(z_k) - F\|^2}{\|S(z^k)\|^2} S(z^k).$$

где γ — демпфирующий множитель.

Условие останова здесь и далее: $\|A(z) - F\| / \|F\| < \varepsilon$ при достаточно малом ε , начальное приближение $z^0 \equiv H$.

⁰В. В. Васин, И. И. Еремин. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. 2005.

Нелинейный метод сопряженных градиентов

Предлагается процесс вида

$$z^{k+1} = z^k + \alpha^k p^k,$$

где направления p^k получаются по формулам

$$\begin{aligned} p^k &= -A'(z^k)^T (A(z^k) - F) + \beta^k p^{k-1}, \\ p^0 &= -A'(z_0)^T (A(z^0) - F), \end{aligned}$$

коэффициенты β^k по формуле Полака-Рибьера-Поляка

$$\beta^k = \max \left\{ 0, \frac{\langle S(z^k), (S(z^k) - S(z^{k-1})) \rangle}{\|S(z^{k-1})\|^2} \right\},$$

а размер шага $\alpha_k \geq 0$ находится из задачи

$$\alpha^k = \operatorname{argmin}_{\alpha} \left\{ \|A(z^k + \alpha p^k) - F\|^2 \right\}.$$

Размер шага

Линеаризуем оператор A в точке z^k

$$A(z) \cong A(z^k) + A'(z^k)(z - z_k)$$

и найдем размер шага α^k решением задачи минимизации для линеаризованного выражения:

$$\begin{aligned}\alpha^k &\approx \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \left\| A(z^k) + A'(z^k)(z^k + \alpha p^k - z^k) - F \right\|^2 = \\ &= \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \left\| (A(z^k) - F) + \alpha A'(z^k)p^k \right\|^2 = \\ &= \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \left\| (A(z^k) - F) \right\|^2 + 2\alpha \langle p^k, S(z^k) \rangle + \alpha^2 \|A'(z^k)p^k\|^2. \\ \alpha_k &\approx -\frac{\langle p^k, S(z^k) \rangle}{\|A'(z^k)p^k\|^2}.\end{aligned}$$

Линеаризованный метод сопряженных градиентов

Метод принимает следующий вид

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k - \gamma \frac{\langle p^k, S(z^k) \rangle}{\|A'(z^k)p^k\|^2} p^k, \\ p^k &= S(z^k) + \beta^k p^{k-1}, \quad p^0 = S(z^0), \\ \beta^k &= \max \left\{ \frac{\langle S(z^k), (S(z^k) - S(z^{k-1})) \rangle}{\|S(z^{k-1})\|^2}, 0 \right\}. \end{aligned}$$

⁰Акимова Е. Н., Мисилов В. Е., Скурыдина А. Ф., Третьяков А. И. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере "Уран". 2015

Покомпонентный градиентный метод

Возьмем одно из уравнений системы:

$$A_i(z) = F_i.$$

Рассмотрим для него задачу

$$\min \left\{ \frac{1}{2}(A_i(z) - F_i)^2 : z \in R^n \right\}.$$

Условие минимума:

$$\nabla\left(\frac{1}{2}(A_i(z) - F_i)^2\right) = (A_i(z) - F_i)\nabla A_i(z) = S_i(z) = 0.$$

Построим процесс по аналогии с линеаризованным методом наискорейшего спуска:

$$z^{k+1} = z^k + \alpha^k S_i(z^k). \quad (1)$$

Размер шага

α^k находится из условия $\alpha^k = \operatorname{argmin}_{\alpha} (A_i(z^k + \alpha S_i(z^k)) - y_i)^2$.

$$\begin{aligned}(A_i(x^k + \alpha^k S_i(x^k)) - y_i)^2 &\simeq \\ &\simeq (A_i(x^k) - y_i)^2 + 2(A_i(x^k) - y_i)\alpha^k < \nabla A_i(x^k), S_i(x^k) > + \\ &+ \alpha_k^2 < \nabla A_i(x^k)^T S_i(x^k) >^2.\end{aligned}$$

Отсюда $\alpha^k = 1/\|\nabla A_i(x^k)\|^2$.

Таким образом, процесс примет вид

$$z^{k+1} = z^k - \frac{A_i(z^k) - F_i}{\|\nabla A_i(z^k)\|^2} \nabla A_i(z^k).$$

Воспользовавшись идеей, лежащей в основе метода локальных поправок (И. Л. Пруткин), возьмем из процесса только часть, отвечающую за z_i :

$$< e_i, z^{k+1} > = < e_i, z^k > - \frac{A_i(z^k) - F_i}{\|\nabla A_i(z^k)\|^2} < e_i, \nabla A_i(z^k) >.$$

Покомпонентный градиентный метод

Получаем метод вида

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \frac{A_i(z^k) - F_i}{\|\nabla A_i(z^k)\|^2} \left(\frac{\partial A_i(z_i^k)}{\partial z_i} \right),$$

где ψ — демпфирующий параметр.

Преимущества метода

Меньшая алгоритмическая сложность по сравнению с остальными рассмотренными. Численные эксперименты показали, что данный метод по сравнению с другими обеспечивает меньшее число итераций и время счета для достижения той же точности.

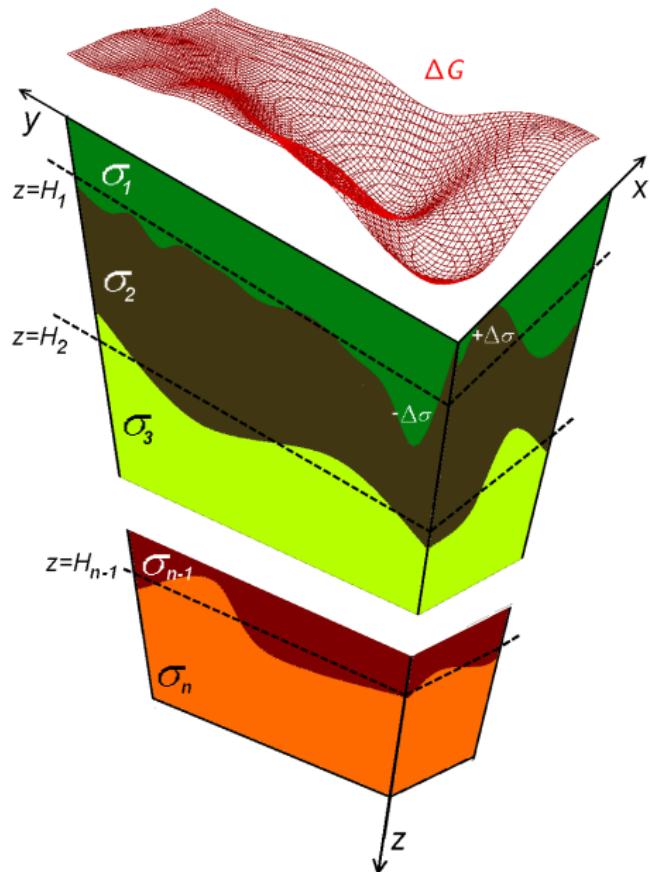
⁰E. N. Akimova, V. E. Misilov. A fast componentwise gradient method for solving structural inverse gravity problem. 2015.

Глава 2: задачи гравиметрии и магнитометрии для случая нескольких контактных поверхностей

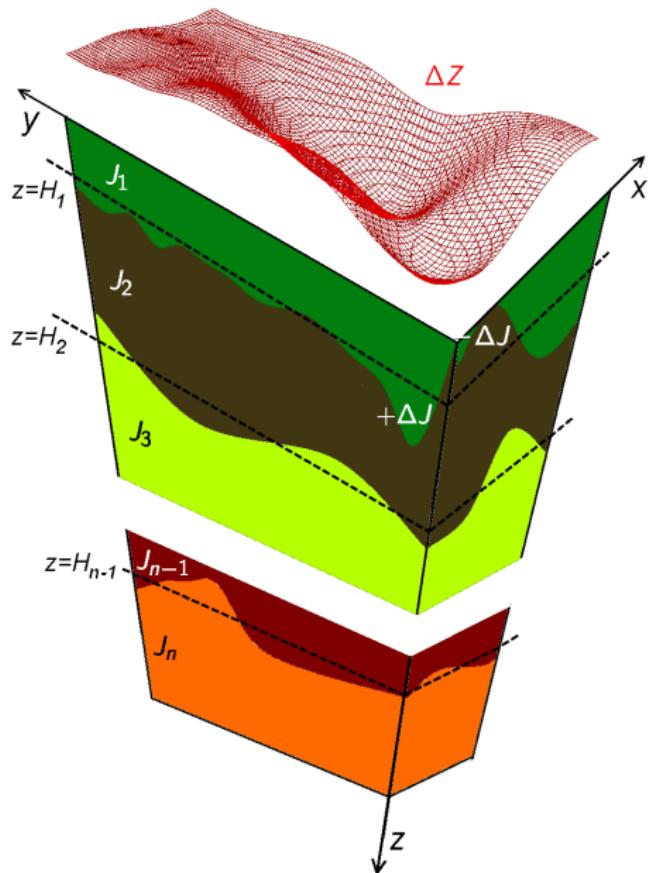
Содержание:

- §1: постановки задач (Старostenко (1978), Пруткин (1986));
- §2: способы решения
- §3: Предлагаемый подход, градиентные методы с весовыми множителями

Модель многослойной среды для задачи гравиметрии



Модель среды для задачи магнитометрии



Интегральные уравнения

Эффект от нескольких границ равен суперпозиции эффектов от каждой границы:

$$\begin{aligned} & f \sum_{l=1}^L \Delta \sigma_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_l^2(x_0, y_0))^{1/2}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H_l^2)^{1/2}} \right] dx_0 dy_0 = \Delta g(x, y), \\ & \sum_{l=1}^L \frac{\Delta J_l}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{z_l(x_0, y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_l^2(x_0, y_0))^{3/2}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{H_l}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H_l^2)^{3/2}} \right] dx_0 dy_0 = \Delta Z(x, y). \end{aligned}$$

Дискретизация и аппроксимация

После дискретизации уравнения на сетке $n = M \times N$ и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам имеем векторы правой части F размерности n и решения z размерности Ln . Таким образом, задача является недоопределенной.

$$f \sum_{I=1}^L \Delta\sigma_I \Delta x \Delta y \sum_{j=1}^{Ln} \left[\frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_j^2)^{1/2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H_I^2)^{1/2}} \right] = F,$$
$$\sum_{I=1}^L \frac{\Delta J_I}{4\pi} \Delta x \Delta y \sum_{j=1}^{Ln} \left[\frac{z_j}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_j^2)^{3/2}} - \right. \\ \left. - \frac{H_I}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H_I^2)^{3/2}} \right] = F.$$

Традиционный подход

Разделение наблюденного поля на составляющие, которые считаются полями от искомых границ.

Выделение составляющих осуществляется с помощью методики повышотных трансформаций.

Таким образом, задача сводится к случаю одной поверхности.

⁰Мартышко П.С., Ладовский И.В., Цидаев А.Г. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных. 2010.

Предлагаемый подход

Подход заключается в применении линеаризованных методов градиентного типа с весовыми множителями и позволяет по сумме аномальных полей восстанавливать несколько структурных границ одновременно.

Весовые множители выбираются с использованием аномальных полей, выделенных из наблюденных данных по методике повышотных трансформаций либо с использованием начальных приближений границ.

Преимущества подхода

Численные эксперименты показывают, что применение данного подхода уменьшает число итераций, время счета, повышает точность по сравнению со старым подходом.

⁰Акимова Е. Н., Мартышко П. С., Мисилов В. Е. Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде. 2013.

Градиентные методы с переменными весовыми множителями

- линеаризованный метод наискорейшего спуска (ЛМНС)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \gamma_i \frac{\|S(z^k)\|^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|^2} S_i(z^k);$$

- линеаризованный метод минимальной ошибки (ЛММО)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \gamma_i \frac{\|A(z_k) - F\|^2}{\|S(z^k)\|^2} S_i(z^k),$$

где z_i — i -я компонента результирующего вектора z , k — номер итерации, γ_i — весовые множители.

Модифицированные градиентные методы

Замена $S(z)$ на v , где i -й элемент вектора получается по формуле
 $v_i = \gamma_i S_i(z)$.

Методы принимают вид :

- Модифицированный метод наискорейшего спуска

$$z^{k+1} = z^k - \frac{\langle v_k, S(z^k) \rangle}{\|A'(z^k)v_k\|^2} v_k;$$

- Модифицированный метод сопряженных градиентов

$$z^{k+1} = z^k - \frac{\langle p_k, S(z^k) \rangle}{\|A'(z^k)p_k\|^2} p_k, \quad p_k = v_k + \beta_k p_{k-1},$$

$$p_0 = v_0, \beta_k = \max \left\{ \frac{\langle v_k, (v_k - v_{k-1}) \rangle}{\|v_{k-1}\|^2}, 0 \right\}.$$

Выбор весовых множителей

Весовые множители γ_i для каждой компоненты $z_i (i = 1..L_n)$ можно выбирать двумя способами:

- используя выделенные поля

$$F \rightarrow [F_1, F_2, \dots, F_L] = (f_1, f_2, \dots, f_{L_n}) \rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L_n}),$$

$$F_l \rightarrow (\gamma_{(l-1)n+1}, \gamma_{(l-1)n+2}, \dots, \gamma_{ln}), \quad \gamma_i = \alpha \frac{|f_i|^\beta}{\max_i |f_i|^\beta},$$

- используя известные начальные приближения границ

$$\hat{Z} = [\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \dots, \hat{Z}_L] = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_{L_n}) \rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L_n}),$$

$$\hat{Z}_l \rightarrow (\gamma_{(l-1)n+1}, \gamma_{(l-1)n+2}, \dots, \gamma_{ln}), \quad \gamma_i = \alpha \frac{|\hat{f}_i/H_l - 1|^\beta}{\max_i |\hat{f}_i/H_l - 1|^\beta},$$

где $0 < \alpha \leq 1$ — параметр шага, $\beta > 1$ — параметр сглаживания.

Глава 3: Численная реализация, распараллеливание, численные эксперименты

Содержание:

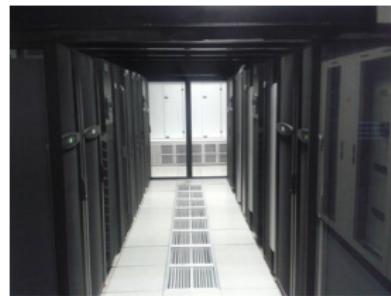
- §1: Численная реализация и распараллеливание;
- §2: Результаты численных экспериментов.

Численная реализация и распараллеливание

Алгоритмы численно реализованы на суперкомпьютере кластерного типа Уран.

Алгоритмы реализованы на многоядерном процессоре с помощью OpenMP и на ускорителях NVIDIA Tesla с помощью технологии CUDA и библиотеки CUBLAS.

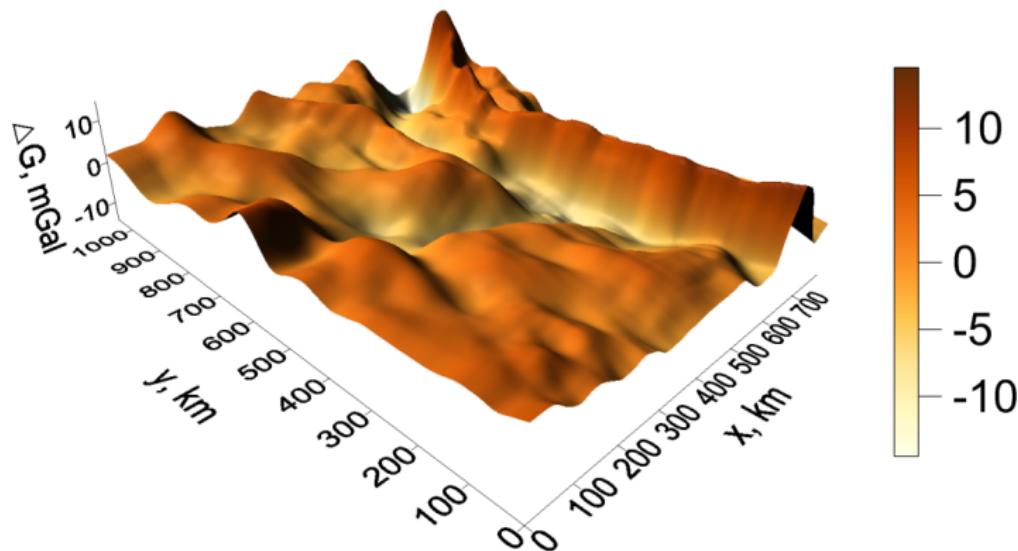
Для многоядерных процессоров Intel Xeon проведена оптимизация с помощью средств компилятора Intel.



Задача 1

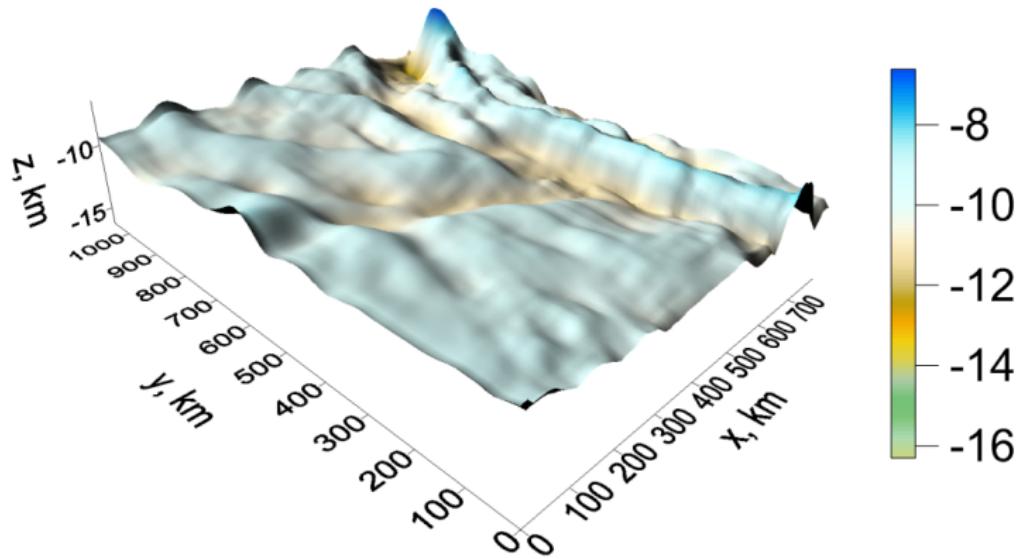
По наблюденному гравитационному полю на площади 1000×800 км было восстановлено плотностная границы с асимптотой $H = 10$ км и скачком плотности $\Delta\sigma = 0.2 \text{ г}/\text{см}^3$.

Гравитационное поле



Задача 1

Восстановленная граница



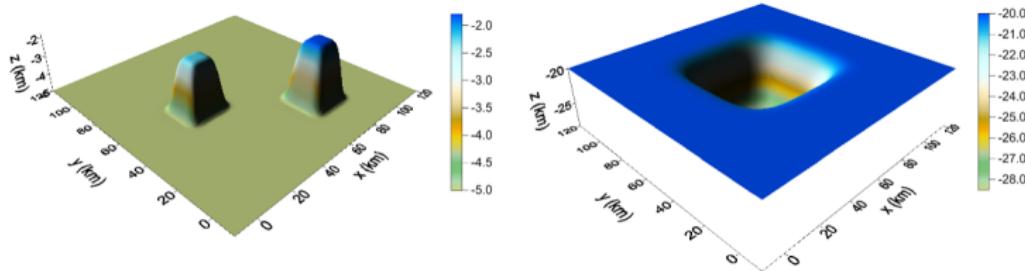
Задача 1 — число итераций и время выполнения

Задача была решена четырьмя методами на 1 и 8 ядрах процессора Intel Xeon E5-2660 (2.2 GHz). Условие останова $\varepsilon = 10^{-3}$.

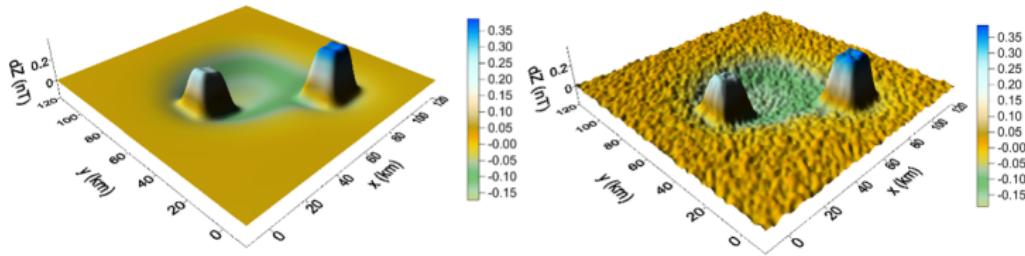
| Метод | N | 1 ядро | 8 ядер |
|------------------------|-----|----------|---------|
| Метод наиск. спуска | 210 | 600 мин. | 72 мин. |
| Метод сопр. градиентов | 45 | 140 мин. | 18 мин. |
| Метод лок. поправок | 28 | 66 мин. | 8 мин. |
| Покомпонентный метод | 17 | 40 мин. | 5 мин. |

Задача 2 — магниторазведка, две поверхности

Исходные поверхности

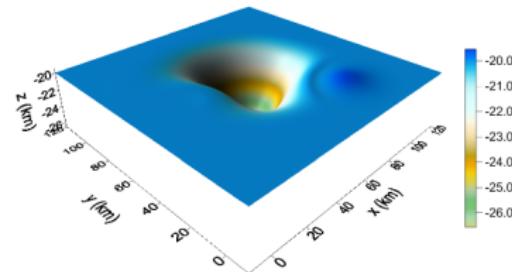
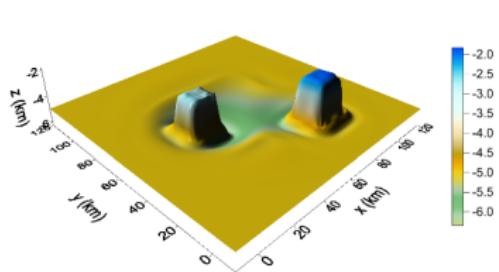


Суммарные магнитные поля — «чистое» и зашумленное нормальным шумом с амплитудой в 15% от амплитуды поля.

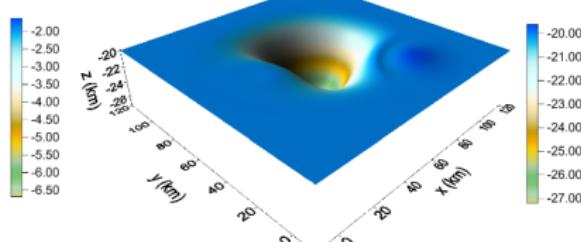
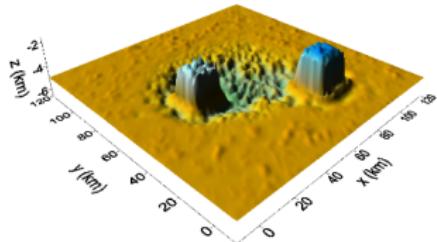


Задача 2 — восстановленные поверхности

Без шума



С шумом



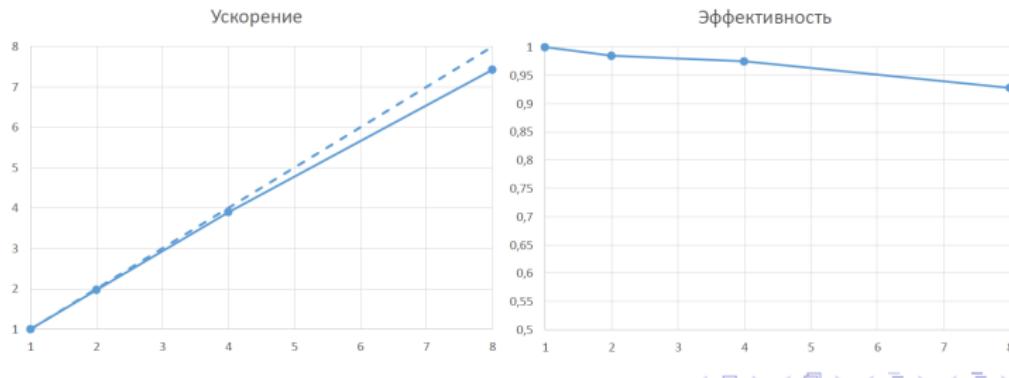
Задача 2 — число итераций и время выполнения

Две поверхности с асимптотами $H_1 = 5\text{км}$, $H_2 = 20\text{км}$. Скачки намагнченности $\Delta J_1 = 0.2\text{А/м}$, $\Delta J_2 = 0.2\text{А/м}$. Задача решалась на сетке $2^8 \times 2^8$. T_1 , T_2 , T_3 — времена выполнения на 1 ядре процессора Intel Xeon X5675, на 8 ядрах и на видеоускорителе NVIDIA Tesla M2090 соответственно. $\delta = \|\bar{z} - z\| / \|\bar{z}\|$ — относительная погрешность

| Подход+метод | δ_1 | δ_2 | N | T_1 | T_2 | T_3 |
|-------------------|------------|------------|-----|----------|---------|----------|
| традиционный+ЛМНС | 0.061 | 0.056 | 154 | 9.5 часа | 68 мин. | 11 мин. |
| традиционный+ЛММО | 0.061 | 0.056 | 89 | 5.5 часа | 39 мин. | 6.5 мин. |
| Предлагаемый+ЛМНС | 0.038 | 0.039 | 69 | 4.5 часа | 37 мин. | 6 мин. |
| Предлагаемый+ЛММО | 0.038 | 0.039 | 39 | 2.5 часа | 21 мин. | 3.5 мин. |

Задача 2 — Времена выполнения на нескольких видеоускорителях

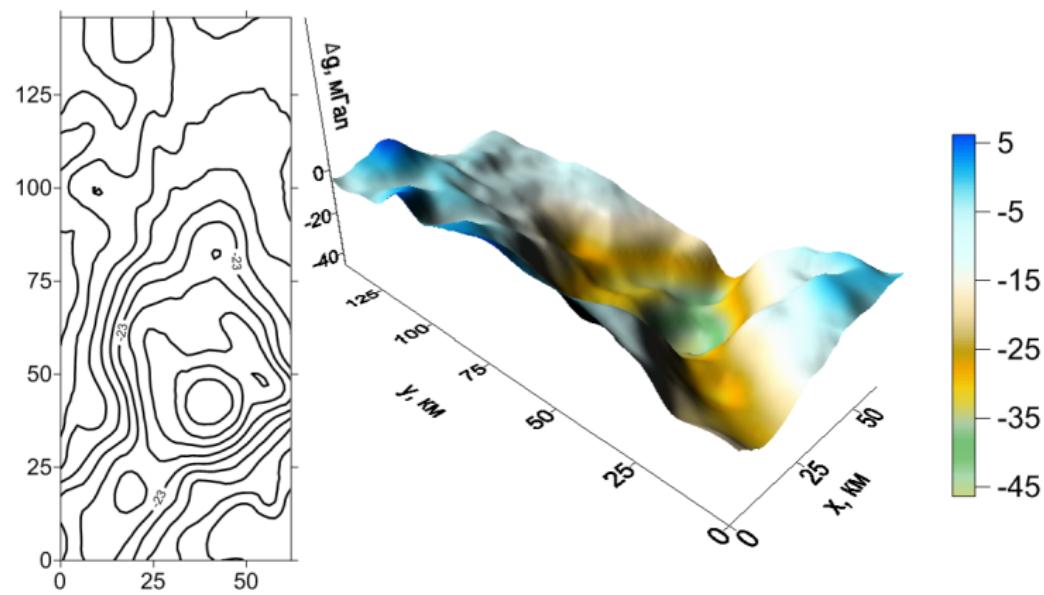
| Число ускорителей | Время, с | Ускорение | Эффективность |
|-------------------|----------|-----------|---------------|
| 1 | 386 | 1 | 1 |
| 2 | 196 | 1,97 | 0,98 |
| 4 | 99 | 3,90 | 0,97 |
| 8 | 52 | 7,42 | 0,93 |



Задача 3

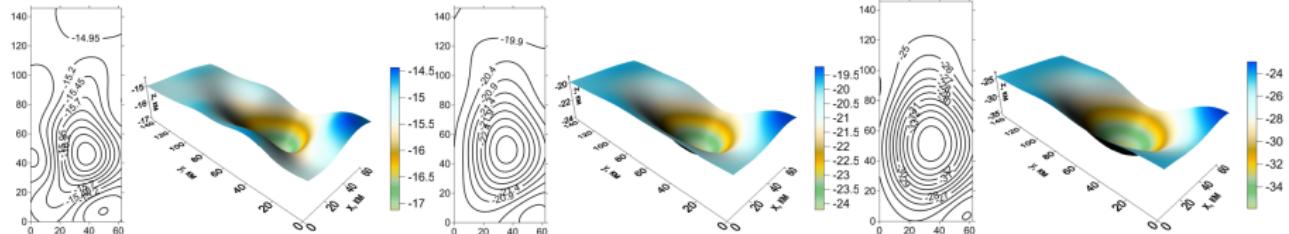
Для восточной части Среднего Урала по наблюденным гравитационным данным, измеренным на площади $S = 62 \times 146 \text{ км}^2$ решена задача о восстановлении трех плотностных контактов.

Параметры: $\Delta\sigma_1 = 0.3$, $\Delta\sigma_2 = 0.2$, $\Delta\sigma_3 = 0.1 \text{ г/см}^3$.
 $H_1 = 15 \text{ км}$, $H_2 = 20 \text{ км}$, $H_3 = 25 \text{ км}$. Сетка 82×108 .

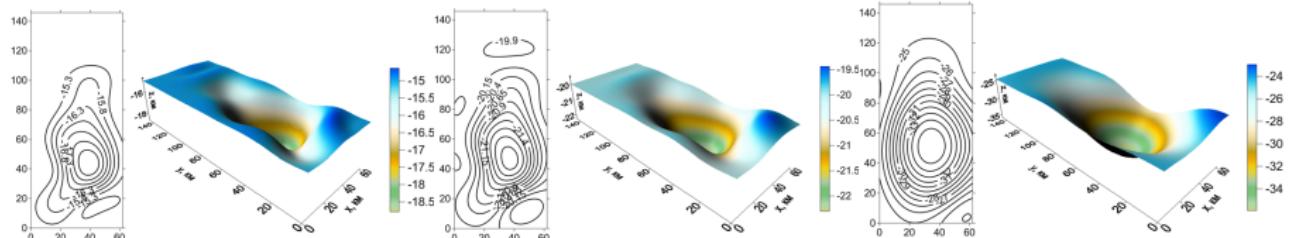


Задача 3 — восстановленные границы

традиционный подход (разделение полей)



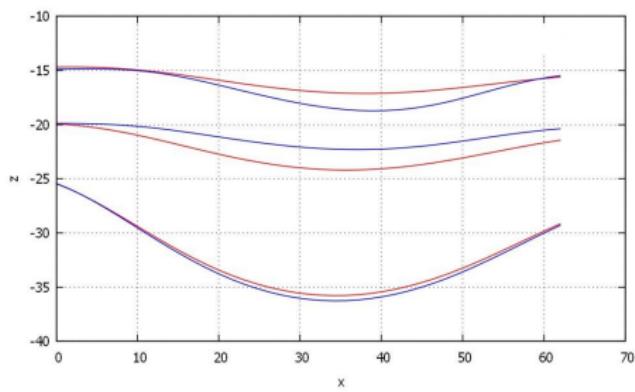
Предлагаемый подход



Задача 4 — число итераций и время выполнения

| Подход | ε | N | T |
|--------------|---------------|-----|-------|
| традиционный | 0.015 | 288 | 102 с |
| Предлагаемый | 0.015 | 70 | 73 с |

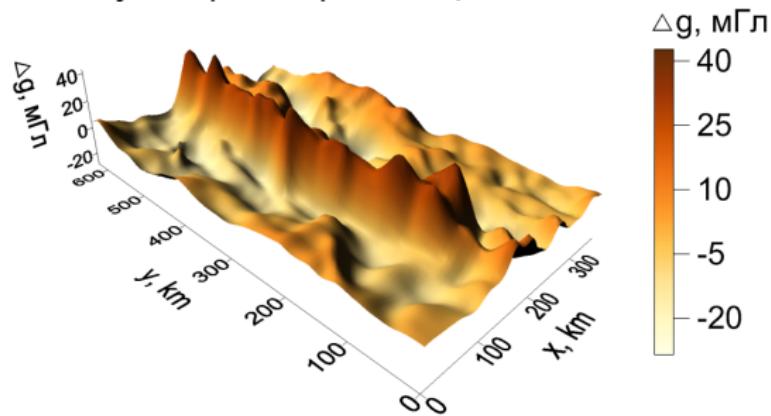
Разрез по линии $y = 46\text{км}$



Задача 4

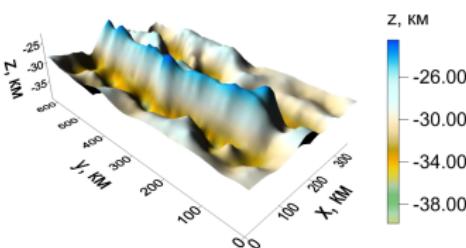
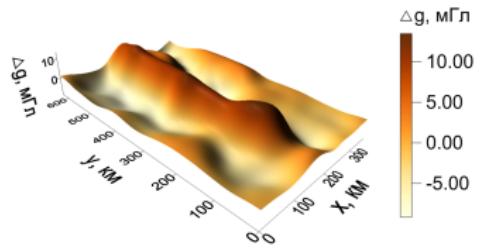
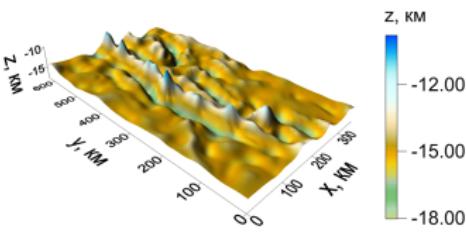
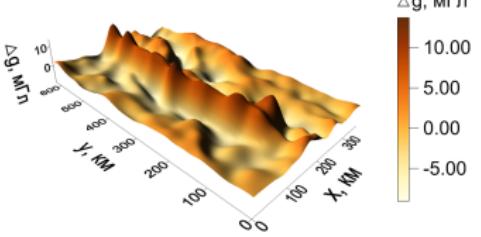
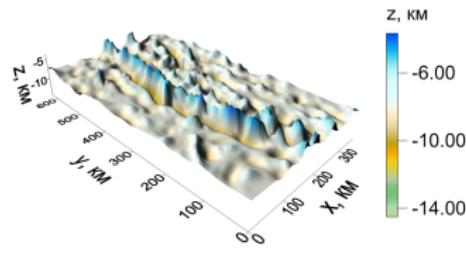
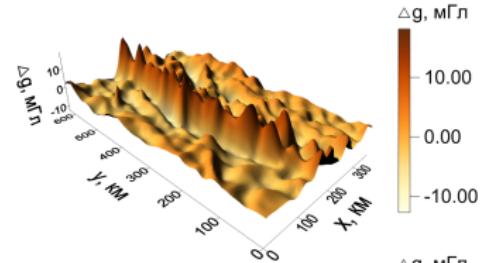
По гравитационным данным была решена структурная задача о нахождении трех плотностных границ. Выделено поле на площади $S = 360 \times 63\text{км}^2$. По суммарному полю восстановлены границы с асимптотическими плоскостями $H_1 = 8\text{км}$, $H_2 = 15\text{км}$, $H_3 = 30\text{км}$ и скачками плотностей $\Delta\sigma_1 = 0.2$, $\Delta\sigma_2 = 0.15$, $\Delta\sigma_3 = 0.1\text{г/см}^3$. Задача решалась на сетке 168×256 , условие останова $\varepsilon = 0.05$

Суммарное гравитационное поле



Задача 4

Отдельные поля и найденные границы



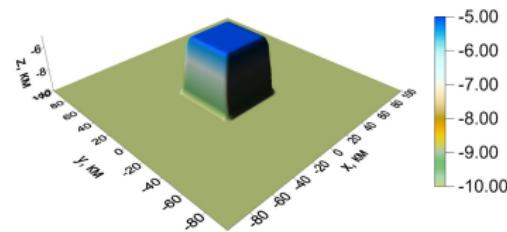
Задача 4 — число итераций и время счета

| Метод | N | T_1 | T_2 |
|-------|-----|-----------|---------|
| ЛМНС | 200 | 8.7 часа | 67 мин. |
| ЛММНС | 45 | 2 часа | 15 мин. |
| ЛМСГ | 171 | 7.5 часов | 57 мин. |
| ЛММСГ | 31 | 1.4 часа | 10 мин. |

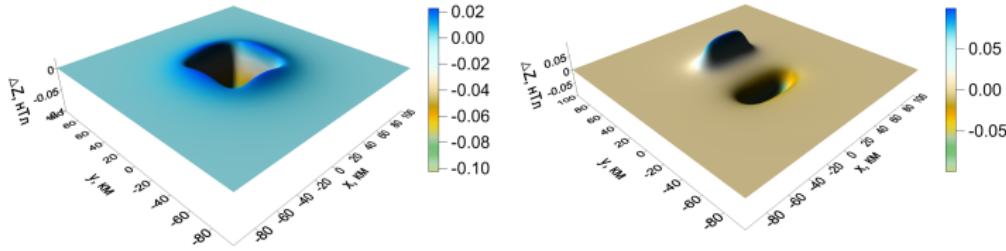
Задача 5

Задача магнитометрии о восстановлении одной границы по синтетическим данным.

Исходная граница

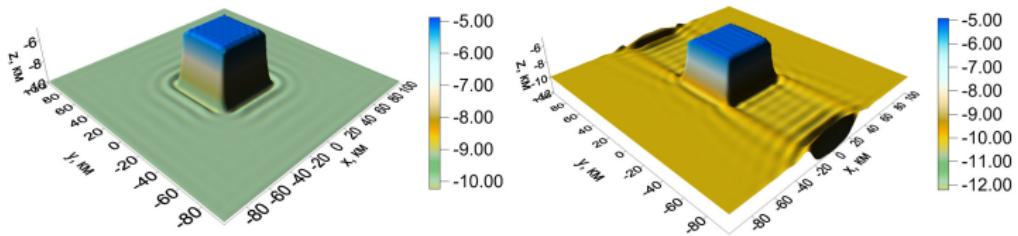


Магнитные поля для разных направлений вектора намагниченности



Задача 5 — решения и времена выполнения

Восстановленные границы



| J | δ | N | T |
|-----------------|----------|------|-------|
| $\{1,0,0\}$ A/m | 0.007285 | 384 | 218 с |
| $\{0,1,0\}$ A/m | 0.007279 | 1096 | 637 с |

Основные результаты

- Для решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении одной контактной поверхности построены эффективные методы: линеаризованный метод сопряженных градиентов и покомпонентный градиентный метод.
- Для решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении нескольких контактных поверхностей предложен Предлагаемый подход. Подход основан на применении методов градиентного типа с весовыми множителями.
- На основе предложенных методов разработаны параллельные алгоритмы.
- Разработан комплекс программ для многоядерных процессоров, входящих в суперкомпьютер «Уран».
- Проведены численные эксперименты на синтетических и натуральных данных, показавшие, что предложенные подходы и методы обеспечивают меньшее число итераций, время счета и более высокую точность.
- Построены примеры практической интерпретации натурных гравитационных данных.

Спасибо за внимание!