

Регуляризованные методы на основе схем Гаусса-Ньютона и
нелинейных альфа-процессов в приложении к задачам гравиметрии и
магнитометрии

А.Ф. Скурыдина

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

620990, Екатеринбург, Россия

e-mail: afinapal@gmail.com

05.13.18, Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Научный руководитель: д. ф.-м. н., вед. н.с. Е.Н. Акимова

April 6, 2017

Общая характеристика работы

Доклад посвящен регуляризованным итерационным методам решения нелинейных некорректных операторных уравнений.

Актуальность темы. Построение итеративно регуляризованных алгоритмов востребовано для решения широкого круга прикладных задач. Так, решение структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии сводится к решению нелинейных интегральных уравнений Урысона первого рода.

Цель. Построить новые методы решения нелинейных операторных уравнений, исследовать их сходимость. Реализовать параллельные алгоритмы, провести численные эксперименты.

1.1. Общая постановка задачи

Рассматривается нелинейное уравнение с неизвестной функцией u

$$A(u) = f \tag{1.1}$$

с нелинейным непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором A , действующим на паре гильбертовых пространств, для которого обратные операторы $A'(u)^{-1}$, A^{-1} в общем случае разрывны в окрестности решения, что влечет некорректность задачи (1.1).

1.2. Двухэтапный метод аппроксимации решения

Рассматривается двухэтапный метод построения регуляризующего алгоритма (РА):

1. Регуляризация по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \quad (1.2)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, u_0 — некоторое приближение к u_α ;

2. Применение итерационных алгоритмов аппроксимации регуляризованного решения u_α . Рассматриваются методы на основе метода Гаусса-Ньютона и методы градиентного типа на основе нелинейных α -процессов.

Рассматривается линейное уравнение в гильбертовом пространстве

$$Ax = y,$$

с ограниченным, самосопряженным, положительно полуопределенным оператором A .

Пусть $\alpha \in [-1, \infty)$ — некоторое фиксированное вещественное число.

Определяется итерационная последовательность

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\langle A^\alpha \Delta^k, \Delta^k \rangle}{\langle A^{\alpha+1} \Delta^k, \Delta^k \rangle} \Delta^k,$$

где $\Delta^k = Ax^k - y$.

- при $\alpha = 1$ — метод минимальных невязок (Красносельский и др., 1969),
- при $\alpha = 0$ — метод наискорейшего спуска (например, Канторович, Акилов, 1959),
- при $\alpha = -1$ — метод минимальной ошибки.

2.1. Регуляризованный метод Гаусса-Ньютона

Итерации производятся по формуле:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \quad (2.1)$$

где $A'(u^k)$ — производная по Фреше оператора A уравнения (1.1), γ — демпфирующий множитель, $\bar{\alpha} \geq \alpha > 0$ — параметры регуляризации, T — оператор шага.

Модифицированный вариант:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \quad (2.2)$$

где $A'(u^0)$ — производная в начальной точке итераций.

2.2. Принципы построения α -процессов для нелинейного оператора

В литературе (например, Васин, Еремин, 2009) изложена схема построения итерационных α -процессов в случае линейного оператора. В случае нелинейного оператора требуется использовать линеаризацию оператора в точке u^k по формуле Тейлора.

Итерационный процесс запишем в виде:

$$u^{k+1} = u^k - \beta_k (A(u^k) - f_\delta),$$

и в случае метода минимальной ошибки (ММО) найдем параметр β из условия

$$\min_{\beta_k} \|u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta) - z\|^2,$$

где z — решение уравнения $A'(u^k)z = y^k$, $y^k = f_\delta + A'(u^k)u^k - A(u^k)$ (используем разложение Тейлора в точке u^k).

Регуляризованный метод минимальной ошибки

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\langle B^{-1}(u^k)S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|S_\alpha(u^k)\|^2} S_\alpha(u^k),$$

где $B(u^k) = A'(u^k) + \bar{\alpha}I$, $S_\alpha(u^k) = A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta$.

Если использовать экстремальные принципы

$$\min_{\beta} \{ \langle A'(u^k)u^{k+1}, u^{k+1} \rangle - 2\langle u^{k+1}, y^k \rangle \},$$

либо

$$\min_{\beta} \{ \|A'(u^k)(u^k - \beta(A(u^k) - f_{\delta}) - y^k)\|^2 \},$$

то получаем нелинейные регуляризованные методы наискорейшего спуска (МНС)

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\langle S_{\alpha}(u^k), S_{\alpha}(u^k) \rangle}{\langle B(u^k)S_{\alpha}(u^k), S_{\alpha}(u^k) \rangle} (A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_{\delta})$$

и минимальных невязок (ММН)

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\langle B(u^k)S_{\alpha}(u^k), S_{\alpha}(u^k) \rangle}{\|B(u^k)S_{\alpha}(u^k)\|^2} (A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_{\delta}).$$

В общем виде итерационную последовательность обозначим

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa} S_{\alpha}(u^k), S_{\alpha}(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_{\alpha}(u^k), S_{\alpha}(u^k) \rangle} S_{\alpha}(u^k) \equiv T(u^k) \quad (2.3)$$

при соответствующем $\varkappa = -1, 0, 1$, γ — демпфирующий множитель.

2.3. Модифицированные варианты на основе α -процессов

Рассматривается случай модификации итерационных методов, когда производная оператора задачи вычисляется в начальной точке итераций:

- ММО:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{-1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|S_\alpha(u^k)\|^2} S_\alpha(u^k), \quad (2.4)$$

- МНС:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\|S_\alpha(u^k)\|^2}{\langle (A'(u^0)) S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k), \quad (2.5)$$

- ММН:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^0)) S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\|(A'(u^0)) S_\alpha(u^k)\|^2} S_\alpha(u^k). \quad (2.6)$$

Данный прием является более экономичным с точки зрения численной реализации, так как позволяет снизить вычислительные затраты по времени.

Определение

Усиленное свойство Фейера (Васин, Еремин, 2009) для оператора T означает, что для некоторого $\nu > 0$ выполнено соотношение

$$\|T(u) - z\|^2 \leq \|u - z\|^2 - \nu \|u - T(u)\|^2, \quad (2.7)$$

где $z \in \text{Fix}(T)$ —множество неподвижных точек оператора T . Это влечет для итерационных точек u^k , порождаемых процессом $u^{k+1} = T(u^k)$, выполнение неравенства

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \leq \|u^k - z\|^2 - \nu \|u^k - u^{k+1}\|^2. \quad (2.8)$$

Васин, 2013

Пусть $A : U \rightarrow U$ — непрерывно дифференцируемый оператор с условиями

$$\|A'(u)\| \leq N_1, \quad \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2\|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$A'(u^0)$ — самосопряженный неотрицательно определенный оператор. Если начальное приближение u^0 и параметры $\alpha, \bar{\alpha}, r, N_1, N_2$ удовлетворяют условиям:

$$\|u^0 - u_\alpha\| \leq r, \quad 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r = \alpha/(6N_2), \quad \bar{\alpha} \geq 3N_1,$$

то при $\gamma < \alpha\bar{\alpha}/(\alpha + N_1^2)^2$ последовательность u^k , порождаемая итерационным процессом, сходится сильно к решению u_α регуляризованного уравнения и выполнено соотношение

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \leq \|u^k - z\|^2 - \nu\|u^k - u^{k+1}\|^2.$$

В. В. Васин, Е. Н. Акимова, А. Ф. Миниахметова. Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник ЮУрГУ, 6:3 (2013). С. 26–37.

3. Сходимость итерационных процессов с немонотонным оператором уравнения

Цель — обосновать сходимость рассматриваемых процессов в конечномерном случае, когда оператор $A: R^n \rightarrow R^n$, для которого матрица $A'(u)$ в некоторой окрестности решения имеет спектр, состоящий из различных неотрицательных собственных значений.

Лемма (Васин, 2017)

Пусть $n \times n$ матрица $A'(u)$ не имеет кратных собственных значений λ_i и числа λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) различны и неотрицательны. Тогда при $\bar{\alpha} > 0$ матрица имеет представление $A'(u) + \bar{\alpha}I = S(u)\Lambda(u)S^{-1}(u)$ и справедлива оценка

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{\min}} \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}}, \quad (3.1)$$

где столбцы матрицы $S(u)$ составлены из собственных векторов матрицы $A'(u) + \bar{\alpha}I$, Λ — диагональная матрица, ее элементы — собственные значения матрицы $A'(u) + \bar{\alpha}I$,

$$\mu(S(u)) = \|S(u)\| \cdot \|S^{-1}(u)\|,$$

$\mu(S(u))$ — число обусловленности $S(u)$.

3.1. Сходимость регуляризованного метода Ньютона

Оператор $A: R^n \rightarrow R^n$ и $A'(u)$ имеет неотрицательный спектр, удовлетворяющий условиям леммы.

Теорема 3.1.

Пусть выполнены условия: $\sup\{\mu(S(u)) : u \in S_r(u_\alpha)\} \leq \bar{S} < \infty$,

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

$A'(u^0)$ —симметричная матрица, $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geq 4N_0$, $r \leq \alpha/8N_2\bar{S}$.

Тогда для оператора поправки на итерации

$$F(u) = (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta)$$

справедливо неравенство

$$\|F(u)\|^2 \leq \mu \langle F(u), u - u_\alpha \rangle, \quad \mu = \frac{4\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}$$

и для $\nu < 2/\mu$ выполнено свойство сильной фейеровости оператора шага T итераций

Теорема 3.2.

Пусть выполнены условия леммы, а также:

$$\sup\{\mu(S(u)) : u \in S_r(u_\alpha)\} \leq \bar{S} < \infty,$$

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

$A'(u^0)$ —симметричная матрица, $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \geq 4N_0$, $r \leq \alpha/8N_2\bar{S}$.

Тогда при $\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}$ оператор шага T процесса (2.1) при установленном ν удовлетворяет неравенству (2.7), для итераций u^k справедливо соотношение (2.8) и имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0.$$

Если параметр γ принимает значение $\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}$, то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2 \bar{S}^2}}.$$

3.2. Сходимость нелинейных α -процессов

Теорема 3.3.

Пусть выполнены условия $\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|$,
 $\|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|$, $\forall u, v \in U$, $\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1$, $\|u^0 - u_\alpha\| \leq r$,
при $u \in S_r(u_\alpha)$ матрица $A'(u)$ имеет спектр, состоящий из неотрицательных
различных собственных значений, $A'(u^0)$ — самосопряженный
неотрицательно определенный оператор, параметры удовлетворяют условиям:

$$ММО: \quad 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/6\bar{S}N_2, \quad \bar{\alpha} \geq N_0$$

$$МНС: \quad 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/3N_2,$$

$$ММН: \quad 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/6N_2.$$

Тогда для оператора поправки

$$F^\varkappa(u) = \frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^\varkappa S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k)$$

справедливо соотношение

$$\|F^\varkappa(u)\|^2 \leq \mu_\varkappa \langle F^\varkappa(u), u - u_\alpha \rangle, \quad \varkappa = -1, 0, 1,$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{-1} &= \frac{8\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}, \quad \mu_0 = \frac{18(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})}{\alpha\bar{\alpha}^2}, \\ \mu_1 &= \frac{18(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^4}{\alpha\bar{\alpha}^5}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Теорема 3.4.

Пусть выполнены условия леммы.

Тогда при $\gamma_{\varkappa} < 2/\mu_{\varkappa}$, $\varkappa = -1, 0, 1$, где значения μ_k определяются соотношениями (3.2), последовательности u^k , порождаемые процессом (2.3) при $\varkappa = -1, 0, 1$, сходятся к u_{α} , т.е.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_{\alpha}\| = 0,$$

а при $\gamma_{\varkappa}^{opt} = \frac{1}{\mu_{\varkappa}}$ справедлива оценка

$$\|u^{k+1} - u_{\alpha}\| \leq q_{\varkappa}^k r,$$

где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{64\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$
$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^6}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^6}}.$$

Теорема 3.5

Пусть выполнены условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

$A'(u^0)$ — самосопряженный оператор, спектр которого состоит из неотрицательных различных собственных значений, параметры удовлетворяют условиям:

$$0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r = \alpha/6N_2, \quad \bar{\alpha} \geq N_0.$$

Тогда для оператора поправки на итерации

$$F^\varkappa(u) = \frac{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^\varkappa S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle}{\langle (A'(u^0) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k) \rangle} S_\alpha(u^k)$$

имеет место неравенство

$$\|F^\varkappa(u)\|^2 \leq \frac{8(N_1 + \alpha)^2}{3\alpha\bar{\alpha}} \langle F^\varkappa(u), u - u_\alpha \rangle,$$

где $\varkappa = -1, 0, 1$, для модифицированных вариантов ММО, МНС и ММН соответственно.

Теорема 3.6

Пусть выполнены условия теоремы 3.5. Тогда при

$$\gamma_{\varkappa} < \frac{2}{\mu_{\varkappa}} \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$$

для последовательности $\{u^k\}$, порождаемой модифицированным α -процессом при соответствующем \varkappa , имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_{\alpha}\| = 0,$$

а при $\gamma_{\varkappa}^{opt} = \frac{1}{\mu_{\varkappa}}$ справедлива оценка

$$\|u^k - u_{\alpha}\| \leq q_{\varkappa}^k r,$$

где

$$q^{\varkappa} = \sqrt{1 - \frac{9\alpha^2}{64(N_1 + \alpha)^2}}$$

Замечание 3.1

Предложенный подход к получению оценок скорости сходимости итерационных процессов полностью переносится на случай, когда спектр матрицы $A'(u^k)$, состоящий из различных вещественных значений, содержит набор малых по абсолютной величине отрицательных собственных значений. Пусть λ_1 — отрицательное собственное значение с наименьшим модулем $|\lambda_1|$ и $\bar{\alpha} - |\lambda_1| = \bar{\alpha}_1 < \alpha^*$. Тогда оценка

$$\|(A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha} + \lambda_{min}} \leq \frac{\mu(S(u))}{\bar{\alpha}},$$

трансформируется в неравенство

$$\|(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}\| \leq \frac{\mu(S(u^k))}{\bar{\alpha}^*} \leq \frac{\bar{S}}{\bar{\alpha}^*} \quad (3.2)$$

Все теоремы остаются справедливыми при замене $\bar{\alpha}$ на $\bar{\alpha}^*$.

4.1. Оптимизация метода Ньютона для обратных задач гравиметрии и магнитометрии

Рассмотрим уравнение гравиметрии в декартовой системе координат с осью z , направленной вниз

$$A(u) = \gamma \Delta \sigma \left\{ \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{1/2}} dx' dy' - \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{1/2}} dx' dy' \right\} = \Delta g(x, y),$$

где γ — гравитационная постоянная, равная $6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$, $\Delta \sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ — скачок плотности на поверхности раздела сред, описываемой функцией $u(x, y)$ и подлежащей определению, $\Delta g(x, y)$ — аномальное гравитационное поле, вызванное отклонением поверхности от асимптотической плоскости $z = H$ для искомого решения $u(x, y)$.

Обратная задача магнитометрии при тех же условиях записывается в виде уравнения

$$A(u) = \Delta J \left\{ \iint_D \frac{H}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + H^2]^{3/2}} dx' dy' - \iint_D \frac{u(x', y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + u^2(x', y')]^{3/2}} dx' dy' \right\} = \Delta G(x, y), \quad (5.2)$$

где ΔJ — усредненный скачок z -компоненты вектора намагниченности, $z = H$ — асимптотическая плоскость, $\Delta G(x, y)$ — функция, описывающая аномальное поле, $z = u(x, y)$ — искомая функция, описывающая поверхность раздела сред с различными свойствами намагниченности.

Производная оператора A в точке $u^0(x, y)$ определяется формулой:

- в задаче гравиметрии

$$[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{u^0(x', y')h(x', y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{3/2}} dx' dy',$$

- в задаче магнитометрии

$$[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 - 2(u^0(x', y'))^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{5/2}} h(x', y') dx' dy'.$$

Как видим, элементы матрицы $A'(u^0)$ принимают наибольшие значения при малых значениях $(x - x')$ и $(y - y')$.

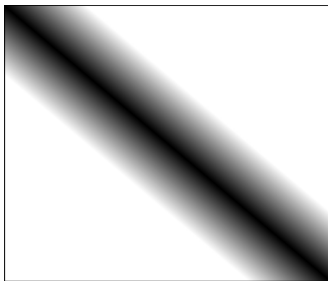


Рис. 1. Схема матрицы производной оператора A

Замечание 4.1.

В структурных обратных задачах грави- магнитометрии при решении методом Ньютона без существенной потери точности можно не учитывать значения элементов, отстоящих от диагонали далее, чем на β -ю часть размерности матрицы производной, то есть те значения a_{ij} , для которых $j \in \{i - h(\beta), ..i + h(\beta)\}$, где $h(\beta)$ — полуширина ленты матрицы, i, j — индекс элемента.

4.2. Покомпонентные методы для решения задач гравиметрии

Запишем исходное операторное уравнение (1.1) в виде:

$$P(u) = A(u) - f,$$

где $A(u) = \int_a^b \int_c^d K(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy$ — интегральный оператор задачи гравиметрии.

Итерации в методе Ньютона строятся по схеме

$$A'(u^k)(\Delta u^k) = -(A(u^k) - f),$$

где $\Delta u^k = u^{k+1} - u^k$. Для задачи гравиметрии

$$f \Delta \sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) \Delta u^k dx dy = A(u(x', y')) - f(x', y'). \quad (4.3)$$

В задаче гравиметрии на изменение гравитационного поля в правой части (4.3) наибольшее значение оказывает отклонение от асимптотической плоскости в точке (x', y') . Тогда можем записать

$$f \Delta \sigma (\Delta u^k) \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy = A(u(x', y')) - f(x', y').$$

Итерации осуществляются по схеме:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{1}{\Psi(x', y')} (A(u^k) - f),$$

где

$$\Psi(x', y') = f \Delta \sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy.$$

На основе метода Левенберга Марквардта по предположению о локальности изменения гравитационного поля предложен покомпонентный метод типа Левенберга Марквардта:

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{1}{\varphi(x', y')} [A'(u^k)^* (A(u^k) - f)],$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x', y') = & \left[f \Delta \sigma \int_a^b \int_c^d \overline{K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y))} dx dy \right] \\ & \times \left[f \Delta \sigma \int_a^b \int_c^d K'_u(x, y, x', y', u^k(x, y)) dx dy \right], \end{aligned}$$

Регуляризованные варианты покомпонентных методов:

- Ньютона

$$u^{k+1} = u^k - \frac{1}{\Psi(x', y')} (A(u^k) + \alpha u - f_\delta),$$

для решения регуляризованного по Лаврентьеву уравнения,

- Левенберга-Марквардта

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{1}{\varphi(x', y')} [A'(u^k)^* (A(u^k) - f_\delta) + \alpha u]$$

для решения уравнения, регуляризованного по Тихонову.

4.3. Приложения к обратным задачам гравиметрии и магнитометрии

Уравнение гравиметрии в декартовой системе координат с осью z , направленной вниз

$$A(u) = \gamma \Delta \sigma \left\{ \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{1/2}} dx' dy' - \iint_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{1/2}} dx' dy' \right\} = \Delta g(x, y),$$

Уравнение магнитометрии имеет вид

$$A(u) = \Delta J \left\{ \iint_D \frac{H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{3/2}} dx' dy' - \iint_D \frac{u(x', y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{3/2}} dx' dy' \right\} = \Delta G(x, y),$$

Точное решение уравнения гравиметрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x, y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6-(y/10-2.5)^6} - 3e^{-(x/10-5.5)^6-(y/10-4.5)^6},$$

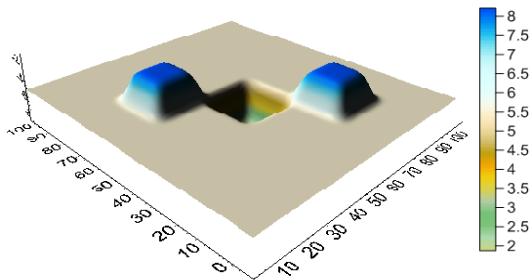


Рис.2. Модельная поверхность: $D = \{0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 110\}$,
 $H = 5, \Delta x = \Delta y = 1, \Delta \sigma = 0.21 \text{ г/см}^3$.

Число обусловленности $\mu(A'_n(u_n^k)) \approx 10^{17}$, спектр неотрицательный, собственные значения различны. Правило выхода из процесса итераций каждого из методов

$$\frac{\|\hat{u}_n - \tilde{u}_n\|_{R^n}}{\|\tilde{u}_n\|_{R^n}} \leq 10^{-2},$$

где \hat{u}_n — точное решение, а \tilde{u}_n — восстановленное каждым из четырех итерационных методов. Таким образом, точность численного решения, полученного методом Ньютона, α -процессами и их модифицированными аналогами, гарантированно не превышала $\varepsilon = 10^{-2}$.

При значениях параметров $\bar{\alpha} = \alpha = 10^{-3}$, $\gamma = 1$ представлены результаты численных расчетов, где

$$\Delta = \frac{\|A_n(\tilde{u}_n) + \alpha(\tilde{u}_n - u^0) - f_n\|_{R^n}}{\|f_n\|_{R^n}},$$

N — число итераций в процессе для достижения точности 10^{-2} , T — время реализации метода. В позициях для Δ , N , T верхняя строка соответствует основным процессам, а нижняя — их модифицированным вариантам.

Табл.1. Относительные нормы невязок, итерации и времена счета в задаче гравиметрии

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
Δ	0.0048	0.0020	0.0024	0.0023
	0.0094	0.0019	0.0019	0.0021
N	17	21	20	16
	22	23	23	16
T (сек)	20	11	14	16
	328	7	7	7

Точное решение уравнения магнитометрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x, y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6-(y/10-2.5)^6} - 3^{-(x/10-5.5)^6-(y/10-4.5)^6},$$

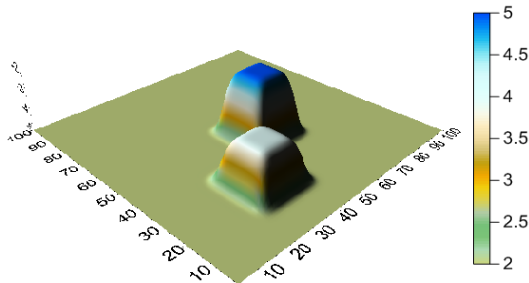


Рис.3. Модельная поверхность: $D = \{0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 100\}$,
 $H = 5$, $\Delta x = \Delta y = 1$, $\Delta J = 0.4$.

Число обусловленности $\mu(A'_n(u_n^k)) \approx 1.8 \cdot 10^7$, спектр неотрицательный, состоящий из различных собственных значений, $\bar{\alpha} = 0.01$, $\alpha = 0.0001$, $\gamma = 1$, $\varepsilon < 10^{-2}$

Табл.2. Относительные нормы невязок, итерации и времена счета в задаче магнитометрии

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
Δ	0.0636	0.0699	0.0802	0.0368
	0.0569	0.0575	0.0595	0.0369
N	4	4	4	5
	4	4	4	5
T (сек)	10	6	6	22
	5	3	3	3

4.3. Результаты численных экспериментов

Рассматривается эксперимент по восстановлению границы раздела в двухслойной среде модифицированным методом Ньютона и его оптимизированным вариантом (с использованием ленточной матрицы производной оператора).

Точное решение уравнения гравиметрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x, y) = 5 + 4e^{-(x/10-3.5)^4-(y/10-2.5)^4} - 3e^{-(x/10-5.5)^4-(y/10-4.5)^4},$$

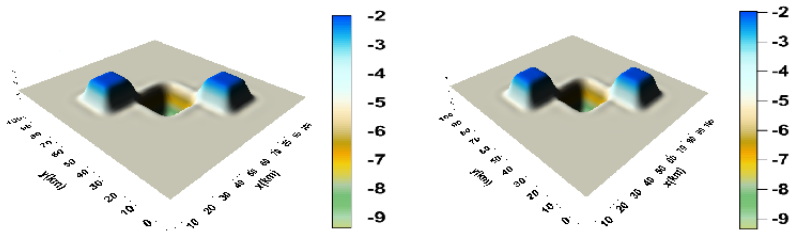


Рис.4. Модельная поверхность (слева) и приближенное решение (справа):

$$D = \{0 \leq x \leq 270, 0 \leq y \leq 300\}, \\ H = 5, \Delta x = \Delta y = 0.3, \Delta \sigma = 0.2 \text{ г/см}^3.$$

Точное решение уравнения магнитометрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x, y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6-(y/10-2.5)^6} - 3e^{-(x/10-5.5)^6-(y/10-4.5)^6},$$

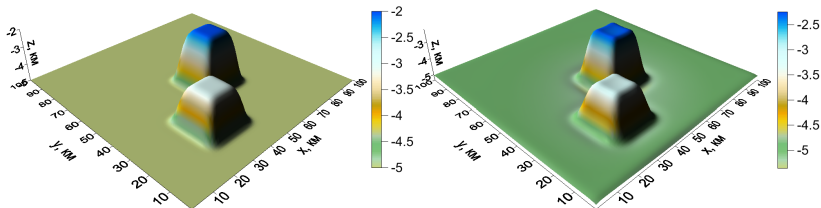


Рис.5. Модельная поверхность (слева) и приближенное решение (справа):

$$D = \{0 \leq x \leq 300, 0 \leq y \leq 300\},$$

$$H = 5, \Delta x = \Delta y = 0.3, \Delta = 0.4 \text{ А/м.}$$

В таблицах приведены результаты расчетов, критерий останова итераций

$$\delta = \frac{\|u_e - u_a\|}{\|u_e\|} \leq 0.025,$$

параметр регуляризации $\alpha = \bar{\alpha} = 10^{-3}$, полуширина ленты матрицы производной $\beta = 1/4$ для задачи гравиметрии и $\beta = 1/5$ для задачи магнитометрии.

Табл.3. Решение обратной задачи гравиметрии в двухслойной среде

Метод	Число итераций	T_1	T_8
Метод Ньютона	3	22 мин	2 мин 40 сек
Модифицированный метод Ньютона	5	32 мин	4 мин
Метод Ньютона с ленточной матрицей	4	24 мин	3 мин

Табл.4. Решение обратной задачи магнитометрии в двухслойной среде

Метод	Число итераций	T_1	T_8
Метод Ньютона	3	9 мин	1 мин 30 сек
Модифицированный метод Ньютона	6	15 мин 30 сек	2 мин
Метод Ньютона с ленточной матрицей	5	9 мин 36 сек	1 мин 12 сек

Рассматривается эксперимент по восстановлению границы раздела в двухслойной среде модифицированным методом Ньютона и покомпонентным методом типа Ньютона.

Точное решение уравнения гравиметрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x, y) = 5 - 3.21e^{-(x/10.13-6.62)^6-(y/9.59-2.93)^6} - 2.78e^{-(x/9.89-4.12)^6-(y/8.63-7.435)^6} + 3.19e^{-(x/9.89-4.82)^6-(y/8.72-4.335)^6},$$

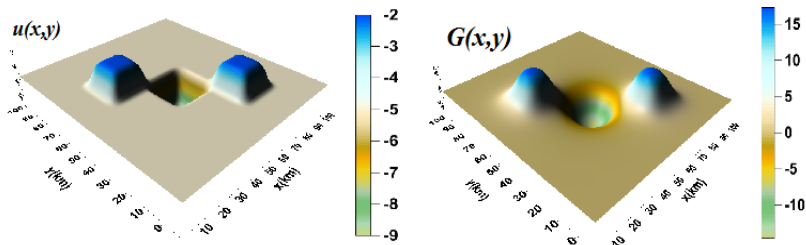


Рис.6. Модельная поверхность (слева) и синтетическое гравитационное поле (справа): $D = \{0 \leq x \leq 300, 0 \leq y \leq 330\}$, $H = 5$, $\Delta x = \Delta y = 0.33$, $\Delta \sigma = 0.21$ г/см³.

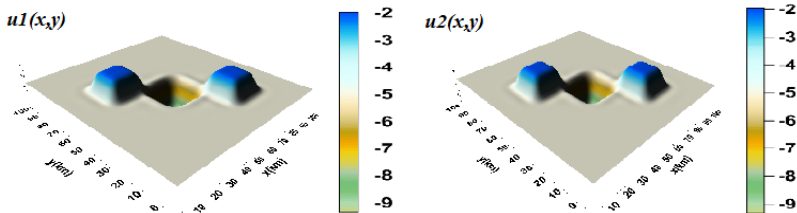


Рис.7. Решение, полученное модиф. методом Ньютона (слева) и решение, полученное покомпонентным методом (справа).

1. Параметр регуляризации взят $\alpha = \bar{\alpha} = 10^{-3}$,
2. Демпфирующий параметр $\gamma = 1.8$ для покомпонентного метода Ньютона.

Критерий останова итераций

$$\varepsilon = \frac{\|u_e - u_a\|}{\|u_e\|} = 10^{-2},$$

Табл.5. Сравнение ММН и ПМН

Метод	Число итераций	T_1 (100x110)	T_1 (300x330)	T_8 (300x330)
Модифицированный метод Ньютона	16	21 сек	25 мин	3 мин 25 сек
Покомпонентный метод типа Ньютона	21	13 сек	11 мин	1 мин 38 сек

Замечание. Размерность матрицы производной в модифицированном методе Ньютона $A'(u^0)$ при сетке 300×330 составляет 99000×99000 .

Рассматривается эксперимент по восстановлению границы раздела в двухслойной среде покомпонентным методом типа Ньютона и покомпонентным методом типа Левенберга-Марквардта. Точное решение уравнения гравиметрии, определяющее поверхность раздела сред, задается формулой

$$\hat{u}(x, y) = 5 + 4e^{-(x/10-3.5)^4-(y/10-2.5)^4} - 3e^{-(x/10-5.5)^4-(y/10-4.5)^4},$$

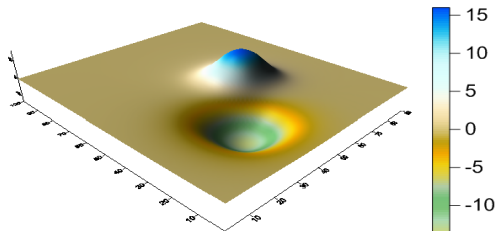


Рис.8. Синтетическое гравитационное поле (справа):

$$D = \{0 \leq x \leq 512, 0 \leq y \leq 512\},$$

$$H = 5, \Delta x = 0.17 \Delta y = 0.19, \Delta \sigma = 0.2 \text{ г/см}^3.$$

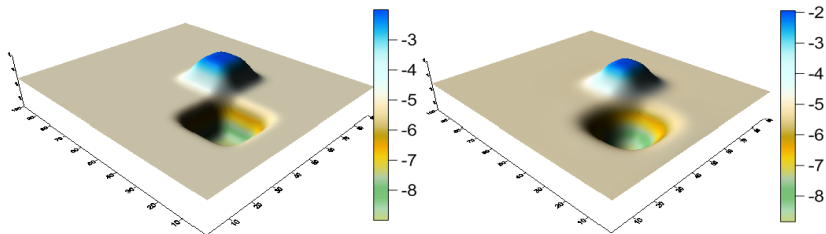


Рис.9. Точное решение (слева) приближенное решение (справа).

1. Параметр регуляризации взят $\alpha = \bar{\alpha} = 10^{-3}$,
2. Демпфирующий параметр $\gamma = 1.6$.
3. Критерий останова — достижение относительной погрешности 0.025.

Табл.6. Сравнение ПМН и ПМЛМ

Метод	Число итераций	T_1 (512x512)	T_8 (512x512)
Покомпонентный метод Ньютона	3	11 мин 27 сек	1 мин 44 сек
Покомпонентный метод Левенберга- Марквардта	3	2 ч 2 мин	16 мин

Рассматривается эксперимент по восстановлению границ раздела сред в многослойной среде (4 слоя с разной плотностью) в задаче гравиметрии на основе квазиреального аномального поля методами: регуляризованный Левенберга-Марквардта и покомпонентный типа Левенберга-Марквардта.

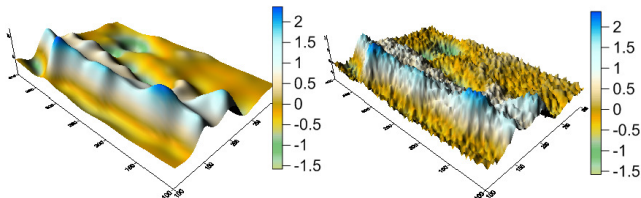


Рис. 10. Суммарное гравитационное поле и поле с шумом 15% (мГал).

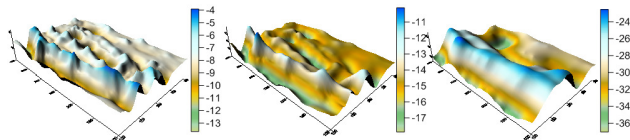


Рис. 11. Точные решения $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$.

$H_1 = 8$ км, $H_2 = 15$ км и $H_3 = 30$ км. Скачки плотности $\Delta\sigma_1 = 0.2$ г/см³, $\Delta\sigma_2 = 0.1$ г/см³, $\Delta\sigma_3 = 0.1$ г/см³. Шаги сетки $\Delta x = 2$ км, $\Delta y = 3$ км.

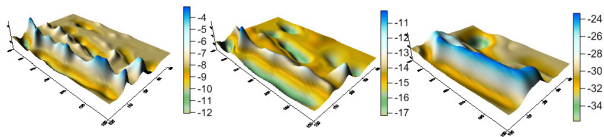


Рис. 12. Границы, восстановленные РМЛМ $\tilde{u}_0(x, y)$, $\tilde{u}_1(x, y)$, $\tilde{u}_2(x, y)$.

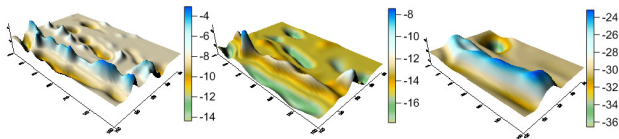


Рис. 13. Границы, восстановленные РПЛМ $\hat{u}_0(x, y)$, $\hat{u}_1(x, y)$, $\hat{u}_2(x, y)$.

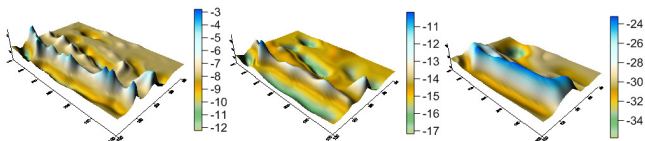


Рис. 14. Границы, восстановленные РМЛМ для данных с шумом $\tilde{u}_0(x, y)$, $\tilde{u}_1(x, y)$, $\tilde{u}_2(x, y)$.

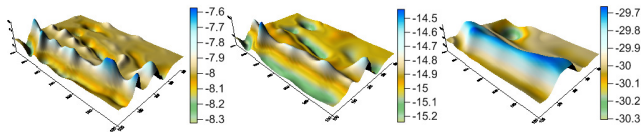


Рис. 15. Границы, восстановленные РПМЛМ для данных с шумом $\hat{u}_0(x, y)$, $\hat{u}_1(x, y)$, $\hat{u}_2(x, y)$.

- сетки 100×100 и 1000×1000 ,
- параметр регуляризации $\alpha = 10^{-3}$ и демпфирующий множитель $\gamma = 1$,
- $\varepsilon = \frac{\|A(u_a) + \alpha u_a - f_\delta\|}{\|f_\delta\|} = 0.1$,
- относительные погрешности $\delta_i = \|u_a - u_e\| / \|u_e\|$,
- T_1 — Intel Xeon (1 ядро),
- T_2 — Intel Xeon (8 ядер),
- T_3 — NVIDIA Tesla M2050.

Табл.7. Результаты расчетов в задаче гравиметрии в многослойной среде

Метод	N	ε	δ_1	δ_2	δ_3	T_1	T_2	T_3
РМЛМ	60	0.238	0.052	0.026	0.051	4 мин. 6 сек.	2 мин. 15 сек.	22 сек.
						11 ч. 40 мин.	1 ч. 25 мин.	35 мин.
РПМЛМ	20	0.237	0.051	0.035	0.060	33 сек.	16 сек.	2 сек.
						1 ч. 12 мин.	10 мин.	3 мин.

Применение инструментов параллельного программирования и оптимизация вычислений

- на основе методов и алгоритмов разработаны параллельные алгоритмы для вычислений на многоядерных процессорах и графических ускорителях;
- используются инструменты: OpenMP, CUDA;
- библиотеки Intel MKL, Cublas;
- при больших размерах сеток вычисления производились "на лету": необходимый элемент матрицы вычисляется в момент умножения его на элемент вектора.

Основные результаты по материалам диссертационной работы докладывались на конференциях:

1. XIV и XV Уральская молодежная научная школа по геофизике (Пермь, 2013 г., Екатеринбург 2014 г.);
2. Международная конференция "Параллельные вычислительные технологии" (Ростов-на-Дону, 2014 г., Екатеринбург, 2015 г., Казань, 2017 г.);
3. Международная конференция «Геоинформатика: теоретические и прикладные аспекты» (Киев 2014, 2015, 2016 г.)
4. Международная конференция "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 2014 г.)
5. Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам (Москва, 2015 г.)

- ❶ Васин В.В., Акимова Е.Н., Миниахметова А.Ф. Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестник ЮУрГУ. Т.6 В.3 (2013), С. 26–37.
- ❷ Акимова, Е. Н., Мисилов В. Е., Скурыдина А. Ф. Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на МВС // Вестник УГАТУ. 2014. Т.18, № 4 (65). С. 206-215.
- ❸ Akimova E., Miniakhmetova A., Martyshko M. Optimization and parallelization of Newton type methods for solving structural gravimetry and magnetometry inverse problems // EAGE Geoinformatics 2014 – 13th Intern. Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kiev, Ukraine. 12–15 May 2014
- ❹ Akimova E., Skurydina A. A componentwise Newton type method for solving the structural inverse gravity problem // EAGE Geoinformatics 2015 – 14th Intern. Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kiev, Ukraine. 11–14 May 2015.
- ❺ Akimova E., Skurydina A. On solving the three-dimensional structural gravity problem for the case of a multilayered medium by the componentwise Levenberg-Marquardt method // EAGE Geoinformatics 2016 – 15th Intern. Conference on Geoinformatics – Theoretical and Applied Aspects. Kiev, Ukraine. 10–13 May 2016.
- ❻ Васин В.В., Скурыдина, А.Ф. Двухэтапный метод построения регуляризирующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН Т.23 В.1 (2017), С. 57–74.

- 7 Мисиллов В.Е., Миниахметова А.Ф., Дергачев Е.А. Решение обратной задачи гравиметрии итерационными методами на суперкомпьютере «Уран» // Труды XIV Уральской молодежной научной школы по геофизике. Пермь: ГИ УрО РАН. 2013. С. 187–190
- 8 Миниахметова А.Ф. Сравнение быстрых методов решения структурной обратной задачи магнитометрии // Труды XV Уральской молодежной научной школы по геофизике. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2014. С. 160–162
- 9 E. N. Akimova, A. F. Miniakhmetova, V. E. Misilov. Fast stable parallel algorithms for solving gravimetry and magnetometry inverse problems // The International conference "Advanced mathematics, computations and applications – 2014". Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia. June 8–11, 2014.
- 10 Акимова Е.Н., Мисиллов В.Е., Миниахметова А.Ф. Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Труды межд. конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2014)», Ростов-на-Дону, 31 мар. – 4 апр. 2014 г. Челябинск: ЮУрГУ. 2014. С. 19–29.

- 1 В.В. Васин, А.Ф. Скурыдина. Регуляризованные модифицированные процессы градиентного типа для нелинейных обратных задач // Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам. Москва, 19 – 21 ноября 2015 г.
- 2 Акимова, Е. Н., Мисилов, В. Е., Скурыдина, А. Ф., Третьяков, А. И. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” // Труды межд. конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ’2015)», Екатеринбург, 31 мар. – 2 апр. 2015 г. Челябинск: ЮУрГУ. 2015. С. 8–18.

Спасибо за внимание!

Теорема 2.1.

Пусть A — монотонный оператор, для которого выполнены условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

известна оценка для нормы производной в точке u^0 , т.е.

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r \quad u^0 \in S_r(u_\alpha),$$

$$r \leq \alpha/N_2, \quad 0 < \alpha \leq \bar{\alpha}.$$

Тогда для процесса (2.1) с $\gamma = 1$ имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения u_α регуляризованного уравнения (1.2)

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \left(1 - \frac{\alpha}{2\bar{\alpha}}\right).$$

Теорема 2.2.

Пусть для монотонного оператора A выполнены условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

$A'(u^0)$ — самосопряженный оператор,

$$\|u_\alpha - u^0\| \leq r \quad 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} \geq 4N_1, \quad r \leq \alpha/8N_2.$$

Тогда для оператора

$$F(u) = (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta)$$

справедлива оценка снизу

$$\langle F(u), u - u_\alpha \rangle \geq \frac{\alpha}{4\bar{\alpha}} \|u - u_\alpha\|^2 \quad \forall u \in S_r(u_\alpha).$$

Теорема 2.3.

Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда при $\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2}$ оператор шага T процесса (2.1) при

$$\nu = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2\gamma(N_1 + \alpha)^2} - 1$$

удовлетворяет неравенству (2.3), для итераций u^k справедливо соотношение (2.4) и имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0.$$

Если параметр γ принимает значение $\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2}$, то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}.$$

3.2. Сходимость нелинейных α -процессов

Теорема 3.1.

Пусть для монотонного оператора A выполнены условия

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq N_2 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0 \leq N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

и $A'(u^0)$ — самосопряженный оператор.

Кроме того, для ММО параметры $\alpha, \bar{\alpha}, r, N_2, N_0$ удовлетворяют дополнительным соотношениям:

$$\alpha \leq \bar{\alpha}, \quad r \leq \alpha/8N_2, \quad \bar{\alpha} \geq N_0.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|F^\varkappa(u)\|^2 \leq \mu_\varkappa < F^\varkappa(u), u - u_\alpha >, \quad \varkappa = -1, 0, 1,$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{-1} &= \frac{4(N_1 + \alpha)^2}{\alpha \bar{\alpha}}, \quad \mu_0 = \frac{(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})}{\alpha \bar{\alpha}^2}, \\ \mu_1 &= \frac{(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}{\alpha \bar{\alpha}^3}, \end{aligned}$$

соответственно для ММО, МНС, ММН.

Теорема 3.2.

Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда при

$$\gamma_{\varkappa} < \frac{2}{\mu_{\varkappa}} \quad (\varkappa = -1, 0, 1)$$

для последовательности $\{u^k\}$, порождаемой α -процессом при соответствующем \varkappa , имеет место сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u_{\alpha}\| = 0,$$

а при $\gamma_{\varkappa}^{opt} = \frac{1}{\mu_{\varkappa}}$ справедлива оценка $\|u^k - u_{\alpha}\| \leq q_{\varkappa}^k r$, где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{(N_1 + \alpha)^2 (N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^4}{(N_1 + \bar{\alpha})^4}}.$$

Теорема 3.5

Пусть выполнены условия

$$\|A(u) - A(v)\| \leq N_1 \|u - v\|, \quad \forall u, v \in U,$$

$$\|A'(u^0)\| \leq N_0, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \leq r,$$

Оператор A монотонный, $A'(u^0)$ — самосопряженный оператор.

Тогда при

$$\gamma = \frac{2\alpha^3}{(N_0 + \alpha)(N_1 + \alpha)^2}$$

каждая из последовательностей, порождаемых процессами (3.3)-(3.5) сходится к регуляризованному решению u_α и удовлетворяет свойству Фейера. Для

$$\gamma = \frac{\alpha^3}{(N_0 + \alpha)(N_1 + \alpha)^2}$$

справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \leq q^k r,$$

где

$$q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^4}{(N_0 + \alpha)^2(N_1 + \alpha)^2}}.$$

4. Оценка погрешности двухэтапного метода

Согласно (Tautenhahn, 2002), при условии монотонности оператора и истокообразной представимости решения \hat{u} уравнения (1.1)

$$u^0 - \hat{u} = A'(\hat{u})v, \quad (4.1)$$

справедлива оценка погрешности регуляризованного решения

$$\|u_{\alpha}^{\delta} - \hat{u}\| \leq \|u_{\alpha}^{\delta} - u_{\alpha}\| + \|u_{\alpha} - \hat{u}\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + k_0\alpha, \quad (4.2)$$

где $k_0 = (1 + N_2\|v\|/2)\|v\|$, u_{α}^{δ} , u_{α} — решения уравнения (1.2) с возмущенной f_{δ} и точной f правой частью уравнения (1.1) соответственно.

Минимизируя правую часть соотношения (4.2) по α , имеем $\alpha(\delta) = \sqrt{\delta/k_0}$, что дает оценку

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - \hat{u}\| \leq 2\sqrt{\delta k_0} \quad (4.3)$$

Для итерационных процессов РМН, ММО, МНС, ММН получены оценки вида

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - u_{\alpha(\delta)}^{\delta}\| \leq q^k(\delta)r \quad (4.4)$$

4.1. Оценка погрешности в случае монотонного оператора

Объединяя оценки (4.3), (4.4), приходим к следующему утверждению

Теорема 4.1.

Пусть для решения \hat{u} уравнения (1.1) с монотонным оператором справедливо условие (4.1) и для метода (3.1) выполнены условия теоремы (3.1). Тогда при выборе числа итераций по правилу

$$k(\delta) = \left\lceil \frac{\ln(2\sqrt{k_0\delta}/r)}{\ln q(\delta)} \right\rceil$$

справедлива оптимальная по порядку оценка погрешности двухэтапного метода

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - u_{\alpha(\delta)}^{\delta}\| \leq 4\sqrt{k_0\delta}.$$

В. В. Васин В.В., Скурыдина, А.Ф. Двухэтапный метод построения регуляризующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН Т.23 В.1 (2017), С. 57–74.

4.2. Оценка погрешности в случае оператора с положительным спектром

В этой ситуации для двухэтапного алгоритма можно установить оценку для невязки — основной характеристики точности метода при решении задачи с реальными данными. Пусть регуляризованное уравнение разрешимо, тогда для его решения $u_{\alpha(\delta)}^\delta$ справедливо соотношение

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^\delta) - f_\delta\| = \alpha \|u_{\alpha(\delta)}^\delta - u^0\|. \quad (4.5)$$

Пусть для некоторой связи $\alpha(\delta)$ $\|u_{\alpha(\delta)}^\delta - u^0\| \leq m < \infty$, что влечет оценку

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^\delta) - f_\delta\| \leq \alpha(\delta)m \quad (4.6)$$

и сходимостъ

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|A(u_{\alpha(\delta)}^\delta) - f_\delta\| = 0,$$

при $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$.

В. В. Васин В.В., Скурыдина, А.Ф. Двухэтапный метод построения регуляризирующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН Т.23 В.1 (2017), С. 57–74.

Пусть $u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}$ — итерационные точки, полученные одним из методов рассмотренных выше методов. Имеем

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}) - f_{\delta}\| \leq \|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}) - A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta})\| + \|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta}) - f(\delta)\| \leq N_1 r q^{k(\delta)} + \alpha(\delta)m. \quad (4.7)$$

Выбирая, например, $\alpha(\delta) = \delta^p$ и приравнивая слагаемые в правой части (4.7), получаем правило выбора числа итерации

$$k(\delta) = [\ln(m\delta^p/N)/\ln q(\delta)],$$

при котором справедлива оценка для невязки двухэтапного метода

$$\|A(u_{\alpha(\delta)}^{\delta}) - f_{\delta}\| = 2m\delta^p. \quad (4.8)$$

Замечание 4.3

Соотношения (4.5)—(4.8) остаются справедливыми для случая, когда матрицы $A'(u^k)$ содержат набор малых отрицательных собственных значений с тем лишь отличием, что в неравенстве (4.7) параметр q во всех методах теперь вычисляется по формулам из раздела 3, в которых параметр $\bar{\alpha}$ заменен на α^* (см. замечание 3.2).

В. В. Васин В.В., Скурыдина, А.Ф. Двухэтапный метод построения регуляризующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Труды ИММ УрО РАН Т.23 В.1 (2017), С. 57–74.