

Teorija programskih jezikov: 2. izpit

13. februar 2020

1. naloga (20 točk)

V λ -računu definirajmo funkcijo višjega reda, ki predstavlja komponiranje funkcij:

$$cmp = \lambda f. (\lambda g. (\lambda x. f(gx)))$$

- a) Zapišite drevo izpeljave za $((cmp(\lambda m. 7 * m))(\lambda n. 3 * n)) 2 \Downarrow 42$.
- b) Zapišite vse korake v evalvaciji izraza $((cmp(\lambda m. 7 * m))(\lambda n. 3 * n)) 2$ v semantiki malih korakov.
- c) Izračunajte najbolj splošen tip izraza cmp .

2. naloga (20 točk)

V λ -račun dodamo izraz za izpisovanje celih števil:

$$e ::= x \mid \text{true} \mid \text{false} \mid \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \mid \lambda x. e \mid e_1 e_2 \mid \text{print}_e(e')$$

Izraz $\text{print}_e(e')$ izpiše celo število, predstavljeno z izrazom e , in nadaljuje z izvajanjem izraza e' . Na primer, izraz $e_{42} = \text{print}_{2+2}(\text{print}_{1+1}(\text{true}))$ najprej izpiše 4, nato 2 in vrne vrednost true .

- a) Zapišite pravilo za določanje tipa izraza $\text{print}_e(e')$.
- b) Za razširjeni λ -račun zapišite pravila za semantiko velikih korakov oblike $e \Downarrow v, [n_1, \dots, n_k]$, ki poleg končne vrednosti v vrne tudi seznam izpisanih števil. Na primer, zgornji izraz bi se evalviral kot $e_{42} \Downarrow \text{true}, [4, 2]$.

3. naloga (20 točk)

V λ -račun dodamo eno izjemo in njeno prestrezanje s sledečo sintakso:

$$\begin{aligned} e &::= x \mid \text{true} \mid \text{false} \mid \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \mid \lambda x. e \mid e_1 e_2 \mid \text{err} \mid \text{handle } e_1 \text{ with } e_2 \\ v &::= \text{true} \mid \text{false} \mid \lambda x. e \mid \text{err} \end{aligned}$$

s sledečima dodatnima praviloma za določanje tipov:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{err} : A} \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 : A \quad \Gamma \vdash e_2 : A}{\Gamma \vdash \text{handle } e_1 \text{ with } e_2 : A}$$

ter s sledečimi dodatnimi pravili za operacijsko semantiko:

$$\begin{array}{c} \frac{}{\text{if err then } e_1 \text{ else } e_2 \rightsquigarrow \text{err}} \quad \frac{}{\text{err } e_2 \rightsquigarrow \text{err}} \quad \frac{}{v_1 \text{ err} \rightsquigarrow \text{err}} \\[10pt] \frac{e_1 \rightsquigarrow e'_1}{\text{handle } e_1 \text{ with } e_2 \rightsquigarrow \text{handle } e'_1 \text{ with } e_2} \quad \frac{}{\text{handle err with } e_2 \rightsquigarrow e_2} \quad \frac{v_1 \neq \text{err}}{\text{handle } v_1 \text{ with } e_2 \rightsquigarrow v_1} \end{array}$$

Dokažite izrek o varnosti za zgornjo razširitev. Pri tem je dovolj, da v dokazu naštejete le spremembe glede na dokaz s predavanj.

4. naloga (20 točk)

Za denotacijsko semantiko nedeterminističnih programov uporabljamo potenčne množice. Za domeno (D, \leq) in množici $X, Y \subseteq D$ definiramo

$$X \sqsubseteq Y \iff \forall x \in X. \exists y \in Y. x \leq y \quad \text{in} \quad \downarrow X = \{x' \in D \mid \exists x \in X. x' \leq x\}$$

ter za množico X pravimo, da je *navzdol zaprta*, če velja $X = \downarrow X$. Naj bo $\mathcal{P}_\downarrow(D)$ množica vseh podmnožic D , ki so (1) neprazne, (2) navzdol zaprte in (3) zaprte za supremume naraščajočih verig.

a) Dokazite, da je $(\mathcal{P}_\downarrow(D), \sqsubseteq)$ domena. Namig: supremum verige $X_1 \sqsubseteq X_2 \sqsubseteq \dots$ je enak $\overline{\bigcup_i X_i}$ (to morate dokazati), kjer \overline{X} označuje množico X , razširjeno s supremumi vseh naraščajočih verig v X .

b) Dokazite, da je preslikava $\eta : D \rightarrow \mathcal{P}_\downarrow(D)$, ki vsakemu elementu $x \in D$ priredi $\downarrow\{x\}$, dobro definirana in zvezna.