Monade

Kako bi interpretirali program $\vdash M : \mathrm{int}$, ki sproža:

- nobenega učinka – $[\![\mathrm{int}]\!] = \mathbb{Z}$
- izjeme – $\mathbb{Z} + \mathbb{E}$ $\iota_1(n)$ ... program vrne št. n
  $\iota_2(e)$ ... program sproži izjemo e
- nedeterminizem – $\mathcal{P}_{fin}\mathbb{Z}$ ← končne podmnožice $\mathbb{Z}$
- pisanje po izhodu – $\mathbb{Z} \times O^*$ ← O izhodna abeceda
- branje z vhoda – $\mathbb{Z}^{I^*}$ ← I vhodna abeceda
- branje in pisanje po pomnilniku – $(\mathbb{Z} \times S)^S$ ← množica stanj
- izjeme & pomnilnik – $((\mathbb{Z}+E)\times S)^S$ ali $(\mathbb{Z}\times S + E)^S$

<u>Def</u> Funktor F je predpis, ki:

- vsaki množici X priredi množico FX
- vsaki preslikavi $f : X \to Y$ priredi preslikavo $Ff : FX \to FY$,

da velja

$$F\,id_X = id_{FX}$$

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff \quad \text{za } f : X \to Y,\ g : Y \to Z$$

Poleg tega potrebujemo še preslikavo $X \to FX$, ki predstavlja vrnjene vrednosti, ter preslikavo $FX \times (FY)^X \to FY$.

Def <u>Monada</u> (ali Kleislijeva trojica) je trojica $(T, \eta, \gg=)$, kjer je:

- T funktor
- enota η družina preslikav $\eta_X : X \to TX$ za vse množice X (naravna transformacija)
- veriženje $\gg=$ družina preslikav $\gg=_{X,Y} : TX \times (X \to TY) \to TY$ za vse X, Y,

da velja

$$\forall x \in X,\ k : X \to TY .\ (\eta_X(x) \gg= k) = k(x)$$

let y = return V in M = M[V/x]

$$\forall m \in TX .\ (m \gg= \eta_X) = m$$

let y = M in return y = M

$$\forall m \in TX,\ k : X \to TY,\ k' : Y \to TZ$$

$$\underbrace{\underbrace{(m \gg=_{X,Y} k)}_{TY} \gg=_{Y,Z} k'}_{TZ} = m \gg=_{X,Z} (x \mapsto k(x) \gg=_{Y,Z} k')$$

let y =
let x = M₁ in
M₂
in
M₃

let x = M₁ in
let y = M₂ in
M₃

Primer Monada za nedeterminizem

$(P, \eta, \gg=)$

$\eta(x) = \{x\}$

$\underset{Px}{m} \gg= \underset{x \to Py}{k} = \bigcup_{x \in m} k(x)$

- $\eta(x) \gg= k = \{x\} \gg= k = \bigcup_{y \in \{x\}} k(y) = k(x)$
- $m \gg= \eta = \bigcup_{x \in m} \eta(x) = \bigcup_{x \in m} \{x\} = m$
- asociativnost $\gg=$ D.N.

Opombi

- Monade lahko definiramo tudi z trojicami:
  - (T, η, μ), kjer je μ nar. transf. $\mu_X : TTX \to TX$

    množenje

    z ustreznimi lastnostmi

    Tedaj je $\underset{TX}{m} \gg= \underset{X \to TY}{k} := \mu(\underset{TX \to TTY}{Tk}(m))$

    obratno $\mu(\underset{TTX}{mm}) := \underset{TTX}{mm} \underset{TX, X}{\gg=} \underset{TX \to TX}{id_{TX}}$

  - $(T, \eta, -^*)$, kjer je $-^*$ dvig, ki preslikavi $f : X \to TY$

    dvig

    priredi $f^* : TX \to TY$

    $\gg= : TX \times (X \to TY) \to TY$

    $-^* : (X \to TY) \to (TX \to TY)$

- Pri definiciji z $\gg=$ in $-^*$ ne potrebujemo tega, da je T funktor, dovolj je da podamo predpis na množicah, saj je $Tf = (\eta_Y \circ f)^*$

Predpostavimo, da imamo monado $(T, \eta, \gg\!=)$

Tedaj vsak tip A interpretiramo z $[\![A]\!]$, kjer je

$$[\![\mathrm{int}]\!] = \mathbb{Z} \qquad [\![\mathrm{bool}]\!] = \mathbb{B} \qquad [\![A \to B]\!] = (T[\![B]\!])^{[\![A]\!]}$$

vrednosti $\Gamma \vdash_v V : A$ in izračune $\Gamma \vdash_c M : A$ pa s preslikavami

$$[\![\Gamma \vdash_v V : A]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!] \qquad [\![\Gamma \vdash_c M : A]\!] : [\![\Gamma]\!] \to T[\![A]\!]$$

podanimi kot

$$[\![x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash_v x_i : A_i]\!](a_1, \ldots, a_n) = a_i$$

$$\vdots$$

$$[\![\Gamma \vdash_v \lambda x. M : A \to B]\!](\vec{a}) = y \in [\![A]\!] \longmapsto [\![\Gamma, x : A \vdash_c M : B]\!](\vec{a}, y)$$

$$[\![\Gamma \vdash_c V_1 V_2 : B]\!](\vec{a}) = \left([\![\Gamma \vdash_v V_1 : A \to B]\!](\vec{a})\right)\left([\![\Gamma \vdash_v V_2 : A]\!](\vec{a})\right)$$

$$[\![\Gamma \vdash_c \mathrm{return}\, V : A]\!](\vec{a}) = \eta_{[\![A]\!]}\left([\![\Gamma \vdash_v V : A]\!](\vec{a})\right)$$

$$[\![\Gamma \vdash_c \mathrm{let}\ x = M_1\ \mathrm{in}\ M_2 : B]\!](\vec{a}) =$$

$$\underset{\in T[\![A]\!]}{[\![\Gamma \vdash_c M_1 : A]\!](\vec{a})} \gg\!=_{[\![A]\!], [\![B]\!]} \left(y \in [\![A]\!] \longmapsto \underbrace{[\![\Gamma, x : A \vdash_c M_2 : B]\!](\vec{a}, y)}_{T[\![B]\!]}\right)$$

To je samo okvir, za posamezne učinke pa moramo dodati še njihove vire, npr.

$$[\![\Gamma \vdash_c \mathrm{raise}\ E : A]\!](\vec{a}) = \iota_2(E) \in [\![A]\!] + E$$

$$[\![\Gamma \vdash_c \mathrm{try}\ M\ \mathrm{with}\ E_i \to M_i : A]\!](\vec{a}) = \begin{cases} \iota_1(x) & [\![M]\!] = \iota_1(x) \\ [\![M_1]\!] & [\![M]\!] = \iota_2(E_1) \\ \vdots & \vdots \\ [\![M_n]\!] & [\![M]\!] = \iota_2(E_n) \end{cases}$$

$$[\![\Gamma \vdash_c M_1 \oplus M_2 : A]\!](\vec{a}) = [\![\Gamma \vdash_c M_1 : A]\!](\vec{a}) \cup [\![\Gamma \vdash_c M_2 : A]\!](\vec{a})$$