Teorija programskih jezikov: 1. izpit

2. februar 2024

1. naloga (20 točk)

V λ-računu definirajmo izraze, s katerimi v Churchevem kodiranju predstavimo pare:

$$
\begin{aligned}
pair &= \lambda a.\lambda b.\lambda f.f\,a\,b \\
fst &= \lambda p.p(\lambda x.\lambda y.x) \\
snd &= \lambda p.p(\lambda x.\lambda y.y)
\end{aligned}
$$

a) (5 točk) Zapišite drevo izpeljave $fst\,(pair\ 42\ 24) \Downarrow 42$ v **neučakani** semantiki velikih korakov.

b) (5 točk) Zapišite vse korake v evalvaciji izraza $fst\,(pair\ 42\ 24)$ v **leni** semantiki malih korakov. Izpeljav posameznih korakov ni treba pisati.

c) (10 točk) S pomočjo Hindley-Milnerjevega algoritma izračunajte najbolj splošen tip izraza fst.

2. naloga (20 točk)

Spremenimo jezik IMP tako, da vse tri vrste izrazov združimo v eno, ki jo bomo naknadno ločili s pomočjo tipov.

$$
\begin{aligned}
\text{tip } \sigma &::= \texttt{bool} \mid \texttt{int} \mid \texttt{unit} \\
\text{izraz } t, u &::= \#\ell \mid \texttt{true} \mid \texttt{false} \mid \underline{n} \mid t_1 + t_2 \mid t_1 = t_2 \mid \\
&\qquad \texttt{if}\ t\ \texttt{then}\ u_1\ \texttt{else}\ u_2 \mid \texttt{while}\ t\ \texttt{do}\ u \mid t; u \mid \ell := t \mid \texttt{skip}
\end{aligned}
$$

Zapišite *smiselna* pravila za relacijo $L \vdash t : \sigma$, ki ob vnaprej podanem seznamu definiranih lokacij in njihovih tipov $L = \ell_1 : \sigma_1, \ldots, \ell_n : \sigma_n$ pove, da ima rezultat izraza t tip σ. Upoštevajte, da tipi omogočajo dodatno fleksibilnost:

- vsaka lokacija ima lahko poljuben (vnaprej določen) tip,
- primerjamo lahko poljubni dve vrednosti istega tipa,
- pogojni izraz lahko izbira med poljubnima dvema izrazoma istega tipa,
- v izrazu $t; u$ ima lahko u poljuben tip,
- v prirejanju $\ell := t$ zahtevamo, da je lokacija ℓ predhodno definirana.

3. naloga (20 točk)

Drobnozrnati neučakani λ-račun razširimo s sprožanjem ene same izjeme, kar določimo s sintakso

$$
\begin{aligned}
\text{tip } A, B &::= \mathtt{unit} \mid A \to B \\
\text{vrednost } V &::= x \mid () \mid \lambda x. M \\
\text{izračun } M, N &::= \mathtt{return}\, V \mid \mathtt{let}\, x = M \,\mathtt{in}\, N \mid V_1 V_2 \mid \mathtt{throw}
\end{aligned}
$$

ter pravili za določanje tipov

$$
\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash_v x : A}
\qquad
\frac{}{\Gamma \vdash_v () : \mathtt{unit}}
\qquad
\frac{\Gamma, x : A \vdash_c M : B}{\Gamma \vdash_v \lambda x. M : A \to B}
\qquad
\frac{\Gamma \vdash_v V_1 : A \to B \qquad \Gamma \vdash_v V_2 : A}{\Gamma \vdash_c V_1 V_2 : B}
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash_v V : A}{\Gamma \vdash_c \mathtt{return}\, V : A}
\qquad
\frac{\Gamma \vdash_c M : A \qquad \Gamma, x : A \vdash_c N : B}{\Gamma \vdash_c \mathtt{let}\, x = M \,\mathtt{in}\, N : B}
\qquad
\frac{}{\Gamma \vdash_c \mathtt{throw} : A}
$$

in operacijsko semantiko

$$
\frac{M \leadsto M'}{\mathtt{let}\, x = M \,\mathtt{in}\, N \leadsto \mathtt{let}\, x = M' \,\mathtt{in}\, N}
\qquad
\mathtt{let}\, x = \mathtt{return}\, V \,\mathtt{in}\, N \leadsto N[V/x]
$$

$$
\mathtt{let}\, x = \mathtt{throw} \,\mathtt{in}\, N \leadsto \mathtt{throw}
\qquad
(\lambda x. M) V \leadsto M[V/x]
$$

a) (5 točk) Podajte denotacijsko semantiko jezika v monadi za eno samo izjemo, določeni s predpisom $TX = X + \{\star\}$ ter očitnima izbirama za enoto η in veriženje $\gg\!=$.

b) (15 točk) Pokažite, da je operacijska semantika skladna z denotacijsko, torej da iz $\vdash M : A$ in $M \leadsto N$ sledi $[\![\vdash M : A]\!] = [\![\vdash N : A]\!]$. Pri tem lahko predpostavite ustrezno lemo o substituciji.

4. naloga (20 točk)

Vzemimo λ-račun z enotskim tipom in funkcijami, podan s sintakso

$$
\text{izraz } M, N ::= x \mid () \mid \lambda x. M \mid M\, N
$$

ter z običajnimi pravili za določanje tipov, neučakano operacijsko semantiko malih korakov in denotacijsko semantiko. Ne samo, da je denotacijska semantika skladna z operacijsko, temveč je tudi zadostna, torej iz $[\![\vdash M : \mathtt{unit}]\!] = \star$ sledi $M \leadsto^* ()$.

Pri dokazu si pomagamo z družino relacij $a \lhd_A M$, ki za vsak tip A povezuje vrednosti $a \in [\![A]\!]$ z izrazi $\vdash M : A$. Relacijo definiramo kot

$$
\begin{aligned}
a \lhd_{\mathtt{unit}} M &\iff (a = \star) \wedge (M \leadsto^* ()) \\
f \lhd_{A \to B} M &\iff \forall a, N. a \lhd_A N \Rightarrow f(a) \lhd_B (M\, N)
\end{aligned}
$$

a) (5 točk) Dokažite, da za vsak tip A iz $a \lhd_A M'$ in $M \leadsto M'$ sledi $a \lhd_A M$.

b) (8 točk) Dokažite, da za vsak izraz $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : A$ in vse $(a_1 \lhd_{A_1} N_1), \ldots, (a_n \lhd_{A_n} N_n)$ velja tudi $[\![M]\!](a_1, \ldots, a_n) \lhd_A M[N_1/x_1, \ldots, N_n/x_n]$.

c) (2 točki) Dokažite zadostnost denotacijske semantike.

d) (5 točk) Kaj bi bilo potrebno spremeniti v dokazu, da bi veljal tudi za dodatek rekurzivnih funkcij $\mathtt{rec}\, f\, x. M$?