Algebrajski učinki

Definicija <u>Algebrajska teorija</u> je sestavljena iz
- signature operacij $op_1 : n_1, op_2 : n_2, \dots, op_k : n_k$
- množice enačb med izrazi, sestavljenimi iz operacij in spremenljivk

$$e ::= x \mid op_i(e_1, \dots, e_{n_i})$$

Primer Alg. teorija grup:
- signatura: $m : 2$, $i : 1$, $e : 0$
- enačbe:

$$m(m(x,y),z) = m(x, m(y,z))$$
$$m(x, i(x)) = e() = m(i(x), x)$$
$$m(x, e()) = x$$
$$m(e(), x) = x$$

Definicija <u>Model</u> algebrajske teorije je množica M skupaj z družino operacij $op_i^M : M^{n_i} \to M$, ki zadoščajo enačbam teorije.

Primer Modeli zgoraj podane teorije grup so natanko grupe.

Definicija <u>Homomorfizem</u> med modeloma M in N je preslikava $f : M \to N$, da velja

$$f(op_i^M(a_1, \dots, a_{n_i})) = op_i^N(f(a_1), \dots, f(a_{n_i}))$$

za vse operacije $op_i : n_i$.

Primer Homomorfizmi med modeli teorije grup so natanko homomorfizmi grup.

Primer Prosta grupa nad množico X je sestavljena iz nizov $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}$, kjer je $m_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ in $a_i \neq a_{i+1}$.
$k \geq 0$

Definicija <u>Prosti model</u> algebrajske teorije nad množico X dobimo tako, da sestavimo vse možne izraze iz elementov X in operacij teorije, nato pa izenačimo izraze glede na enačbe teorije.

z, r

e

$\dots\ z^{-2}\ z^{-1}\ z\ z^2\ z^3 \dots$

$\dots\ r\ r^2 \dots$

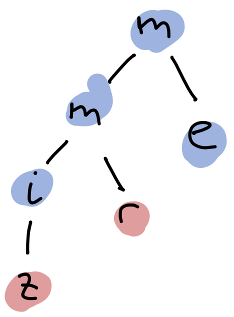
$zr\quad zr^2\quad zr^2z$

$zzr\quad z^{-1}zr$

Če odmislimo enačbe, si lahko elemente prostih modelov predstavljamo z drevesi, ki imajo

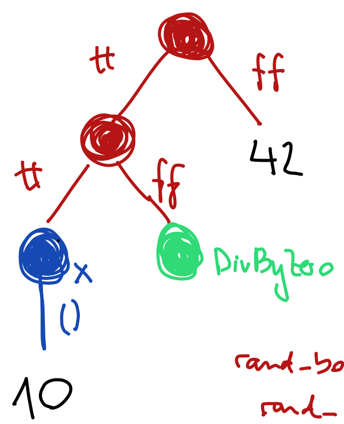
- za vozlišča operacije signature
- za liste elemente množice X

Npr. $m(m(i(z), r)), e())$



Z drevesi si lahko predstavljamo tudi izvajanje programa, ki se razveji ob vsakem učinku, v listih pa ima vrednosti.

```
let x = rand_bool () in
if x then
  let y = rand_bool () in
  if y then
    print "X";
    10
  else
    1/0
else
  42
```



rand_bool (
  rand_bool (
    print_x (ret 10),
    divByZero ()),
  ret 42)

rand_bool : 2

print_x : 1   za vsak $x \in O$

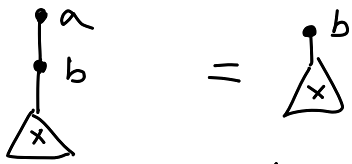
divByZero : 0

Programe, ki sprožajo te učinke si lahko predstavimo z elementi prostega modela nad množico vrednosti, ki jih vrača program.

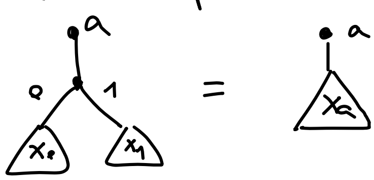
Primeri

- izjeme (brez lovljenja)
  - signatura: $\mathrm{raise}_e : 0$ za vsak $e \in E$
  - enačbe: $\emptyset$

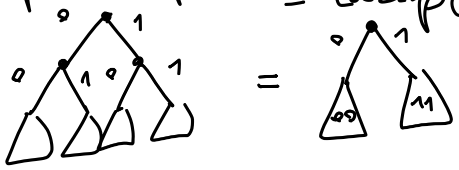
- pomnilnik, ki hrani 1 bit informacije
  - signatura: $\mathrm{lookup} : 2$
    $\mathrm{update}_0 : 1$
    $\mathrm{update}_1 : 1$
  - enačbe: $\mathrm{update}_a(\mathrm{update}_b(x)) = \mathrm{update}_b(x)$



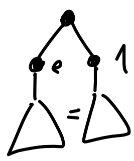
$\mathrm{update}_a(\mathrm{Lookup}(x_0, x_1)) = \mathrm{update}_a(x_a)$



$\mathrm{lookup}(\mathrm{lookup}(x_{00}, x_{01}), \mathrm{lookup}(x_{10}, x_{11}))$
$= \mathrm{Lookup}(x_{00}, x_{11})$



$\mathrm{lookup}(\mathrm{update}_0(x), \mathrm{update}_1(x)) = x$



Izkaže se, da je prosti model za to teorijo nad X enak $(S \times X)^S$, kjer je $S = \{0, 1\}$.

Vsaka algebrajska teorija porodi monado.

TX = prosti model nad množico X

FX ... prosti model nad X

$$op_i^{FX}([m_1],\dots,[m_{n_i}]) = [op_i(m_1,\dots,m_{n_i})]$$

$$\eta(x) = \mathrm{ret}\ x$$

$$\gg= : TX \to (X \to TY) \to TY$$

$$[\mathrm{ret}\ x] \gg= f := f(x)$$

$$[op_i(m_1,\dots,m_{n_i})] \gg= f := [op_i(m_1 \gg= f,\dots,m_{n_i} \gg= f)]$$

Preveriti moramo

- $\eta(x) \gg= f = [\mathrm{ret}\ x] \gg= f = f(x)$ ✓
- $m \gg= \eta = m$ } z indukcijo
- asoc. $\gg=$

Kako bi predstavili lovljenje izjem?

Ideja: dodamo operacijo handle : 2 skupaj z enačbo
$\mathrm{handle}(\mathrm{raise}(), y) = y$.

Težava je, da $\underset{m \gg= f}{\underset{\parallel}{[\mathrm{handle}(m,n)] \gg= f}} \neq \underset{m \gg= f}{\underset{\parallel}{[\mathrm{handle}(m \gg= f, n \gg= f)]}}$

kadar m ne sproži izjeme, f pa jo.

Izkaže se, da prestreznike lahko predstavimo s homomorfizmi.

Prestreznike razširimo z:

- veje za vsako izjemo: $h : E \to Y$
- veje za uspešno vrnjene vrednosti: $f : X \to Y$

/ model za alg. teorijo izjem
/ $f : X \to Y$

$$X + E \xrightarrow{[h,f]} Y$$

$$[\alpha,\beta](\iota_1(x)) = \alpha(x)$$
$$[\alpha,\beta](\iota_2(y)) = \beta(y)$$

prosti model teorije ... model teorije

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, dashed, "\hat{f}"] & Y \\ X \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$