Indukcija

Teorija programskih jezikov

Karakterizacija množice naravnih števil $\mathbb{N}$

- $0 \in \mathbb{N}$
- $n \in \mathbb{N} \implies n^+ \in \mathbb{N}$
- so najmanjša taka množica

induktivno definirana množica

~

najmanjša množica, zaprta za dane konstrukcije

Definicijo bolj pregledno zapišemo s **pravili sklepanja**

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}} \qquad \frac{n \in \mathbb{N}}{n^+ \in \mathbb{N}}$$

Zahteva po najmanjši taki množici je običajno implicitna

V pravilih so nad črto **predpostavke**, pod njo **zaključek**

$$\frac{h_1 \quad h_2 \quad \cdots \quad h_n}{c}$$

Če predpostavk ni, imamo **aksiom**

$$\frac{}{c}$$

Induktivna definicija množice **aritmetičnih izrazov**

$$e ::= \underline{n} \mid e_1 + e_2 \mid e_1 * e_2 \mid -e$$

$$\frac{}{\underline{n} \in \mathbb{E}}(n \in \mathbb{N}) \qquad \frac{e_1 \in \mathbb{E} \quad e_2 \in \mathbb{E}}{e_1 + e_2 \in \mathbb{E}}$$

$$\frac{e_1 \in \mathbb{E} \quad e_2 \in \mathbb{E}}{e_1 * e_2 \in \mathbb{E}} \qquad \frac{e \in \mathbb{E}}{-e \in \mathbb{E}}$$

Vsakemu elementu induktivne množice pripada **drevo izpeljave**

$$
\dfrac{\dfrac{}{\underline{42} \in \mathbb{E}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\underline{6} \in \mathbb{E}} \quad \dfrac{}{\underline{7} \in \mathbb{E}}}{\underline{6} * \underline{7} \in \mathbb{E}}}{\underline{42} + (\underline{6} * \underline{7}) \in \mathbb{E}}
$$

Induktivno lahko podamo tudi **relacije** (oz. predikate)

- n sodo

$$\frac{}{0 \text{ sodo}} \qquad \frac{n \text{ sodo}}{n^{++} \text{ sodo}}$$

- $m \leq n$

$$\frac{}{0 \leq n} \qquad \frac{m \leq n}{m^{+} \leq n^{+}}$$

Relacije lahko podamo prek **družine induktivnih množic**

- n sodo $\iff \mathsf{DS}_n \neq \emptyset$

$$\frac{}{\mathsf{nicSodo} \in \mathsf{DS}_0} \qquad \frac{d \in \mathsf{DS}_n}{\mathsf{plusDvaSodo}\, d \in \mathsf{DS}_{n+2}}$$

- $m \leq n \iff \mathsf{DM}_{m,n} \neq \emptyset$

$$\frac{}{\mathsf{nicManjEnak} \in \mathsf{DM}_{0,n}} \qquad \frac{d \in \mathsf{DM}_{m,n}}{\mathsf{naslManjEnak}\, d \in \mathsf{DM}_{m^+,n^+}}$$

Konstrukcija induktivnih množic

Induktivno množico **gradimo postopoma**

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots$$

$$23 + 19 \quad 41 + 1 \quad 6 * 7 \quad 7 * 6 \quad -42 \quad \cdots$$

$$(4 + 3) * (2 * 4) \quad 1 * (41 + 1) \quad (-6) * (-7)$$

Kasnejši elementi množice I imajo večja **drevesa izpeljave**

- I_0 ~ elementi z drevesom izpeljave višine ≤ 0
- I_1 ~ elementi z drevesom izpeljave višine ≤ 1
- I_2 ~ elementi z drevesom izpeljave višine ≤ 2
- $\dots$

Vsako izmed množic I_n **skonstruiramo** iz prejšnje

- $I_0 = \emptyset$
- I_1 ~ zaključki pravil s predpostavkami iz I_0
- I_2 ~ zaključki pravil s predpostavkami iz I_1
- $\dots$

oziroma

- $I_0 = \emptyset, \quad I_1 = F\, I_0, \quad I_2 = F\, I_1, \quad \dots$
- $F\, X$ ~ zaključki pravil s predpostavkami iz X
- I bo najmanjša množica, zaprta za F, torej da velja $FI \subseteq I$

Množico pravil bomo predstavili **ekonomično**

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}} \qquad \frac{n \in \mathbb{N}}{n^+ \in \mathbb{N}}$$

$$\frac{}{\iota_1(*) \in \mathbb{N}} \qquad \frac{n \in \mathbb{N}}{\iota_2(n) \in \mathbb{N}}$$

$$\mathbb{N} = 1 + \mathbb{N}$$

$$FX = 1 + X$$

Definicija. *Funktor F* je predpis, ki:

- vsaki množici X priredi množico FX,
- vsaki preslikavi $f : X \to Y$ priredi preslikavo $Ff : FX \to FY$,

tako da velja:

- $F\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$
- $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$

Trditev. Vzemimo funktor F, da velja:

- $X \subseteq Y \implies FX \subseteq FY$ (**monotonost**)
- $FX = \bigcup_{A \subseteq^{\text{končna}} X} FA$ (**Scottova zveznost**)

Definirajmo

- $I_0 = \emptyset, \quad I_{n+1} = FI_n$
- $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$

Tedaj je I najmanjša množica, zaprta za F

Načelo indukcije sledi iz lastnosti množice I

$$P(0) \land (\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n) \Rightarrow P(n^+))$$

$$\implies Q = \{x \in \mathbb{N} \mid P(x)\}$$

$$\implies (0 \in Q) \land (n \in Q \Rightarrow n^+ \in Q)$$

$$\implies FQ \subseteq Q \implies \mathbb{N} = Q$$

$$\implies \forall m \in \mathbb{N}.\, P(m)$$

Strukturna rekurzija

Skoraj vse funkcije na induktivnih tipih definiramo **rekurzivno**

$$\begin{aligned}
\mathsf{ev}(\underline{n}) &= n \\
\mathsf{ev}(e_1 + e_2) &= \mathsf{ev}(e_1) + \mathsf{ev}(e_2) \\
\mathsf{ev}(e_1 * e_2) &= \mathsf{ev}(e_1) \cdot \mathsf{ev}(e_2) \\
\mathsf{ev}(-e) &= -\mathsf{ev}(e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{zrc}(\underline{n}) &= \underline{n} \\
\mathsf{zrc}(e_1 + e_2) &= \mathsf{zrc}(e_2) + \mathsf{zrc}(e_1) \\
\mathsf{zrc}(e_1 * e_2) &= \mathsf{zrc}(e_2) * \mathsf{zrc}(e_1) \\
\mathsf{zrc}(-e) &= -\mathsf{zrc}(e)
\end{aligned}$$

Skoraj vse funkcije na induktivnih tipih definiramo **rekurzivno**

$$\begin{aligned}
\mathsf{ev}(\underline{n}) &= n \\
\mathsf{ev}(e_1 + e_2) &= \mathsf{ev}(e_1) + \mathsf{ev}(e_2) \\
\mathsf{ev}(e_1 * e_2) &= \mathsf{ev}(e_1) \cdot \mathsf{ev}(e_2) \\
\mathsf{ev}(-e) &= -\mathsf{ev}(e)
\end{aligned}$$

Desna stran je določena s preslikavami

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$\alpha : (\mathbb{N} + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} + \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

Skoraj vse funkcije na induktivnih tipih definiramo **rekurzivno**

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ev}(\iota_1(n)) &= \alpha(\iota_1(n)) \\
\mathsf{ev}(\iota_2(\langle e_1, e_2 \rangle)) &= \alpha(\iota_2(\langle \mathsf{ev}(e_1), \mathsf{ev}(e_2) \rangle)) \\
\mathsf{ev}(\iota_3(\langle e_1, e_2 \rangle)) &= \alpha(\iota_3(\langle \mathsf{ev}(e_1), \mathsf{ev}(e_2) \rangle)) \\
\mathsf{ev}(\iota_4(e)) &= \alpha(\iota_4(\mathsf{ev}(e)))
\end{aligned}
$$

$$FX = \mathbb{N} + X \times X + X \times X + X$$

$$\alpha : F\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$\mathsf{ev} = \alpha \circ F\mathsf{ev}$$

Trditev. Vzemimo funktor F kot prej in naj bo:

- I najmanjša množica, zaprta za F
- $\alpha : FX \to X$ poljubna preslikava (**algebra za** F)

Tedaj obstaja natanko določen $f : I \to X$, da velja

$$f = \alpha \circ Ff$$