Imejmo $\emptyset \vdash M : int$. S čim bi ga predstavili?

$[\![M]\!] \in [\![int]\!] = \mathbb{Z}$ - če imamo čist prog. jezik brez rekurzije

$= \mathbb{Z}_\perp$ - če imamo rekurzijo

$= \mathbb{Z} + E$ - če lahko programi sprožijo izjeme iz množice E

$= \mathbb{Z} \times O^*$ - če lahko izpiše znake iz množice O

$= \mathcal{P}\mathbb{Z}$ - če lahko delamo nedeterministične izbire

$= (S \times \mathbb{Z})^S$ - če lahko beremo in pišemo pomnilnik z vrednostmi S

$(S \times \mathbb{Z} \times O^*)^S$ - če imamo pomnilnik in izpis

$(S \times (\mathbb{Z} + E))^S$ - če imamo pomnilnik in izjeme

$((S \times \mathbb{Z}) + E)^S$ /

Vsi zgornji primeri so primer monad

<u>Definicija</u> Monada $(T, \eta, \gg=)$ je sestavljena iz:

- preslikave T (funktorja), ki vsaki množici X priredi množico TX
- družine preslikav (naravne transformacije) $\eta_X : X \to TX$ (enota)
- družine preslikav $\gg=_{X,Y} : TX \to (X \to TY) \to TY$

Ki zadoščajo enakostim

$$m \gg=_{X,X} \eta_X = m \qquad \text{za vsak } m \in TX$$

$$\eta_X(a) \gg=_{X,Y} f = f(a) \qquad \text{za vsak } a \in X \text{ in } f : X \to TY$$

$$(m \gg=_{X,Y} f) \gg=_{Y,Z} g \qquad \text{za poljubne } f : X \to TY \text{ in } g : Y \to TZ \text{ in } m \in TX$$

$$= m \gg=_{X,Z} (\text{fun } x \to f\,x \gg=_{Y,Z} g)$$

<u>Primeri:</u>

- nedeterminizem

$TX = \mathcal{P}X$

$\eta_X(a) = \{a\}$

$\underset{\mathcal{P}X}{m} \gg= \underset{X \to \mathcal{P}Y}{f} = \bigcup_{a \in m} f(a)$

Za vir nedeterminizma potrebujemo še:

$\oplus : TX \times TX \to TX$

$\oplus : (m, n) \mapsto m \cup n$

$amb : TB = \{tt, ff\}$

- izjeme

$TX = X + E$

$\eta_X(a) = \iota_1(a)$

$\underset{X+E}{m} \gg= \underset{X \to Y+E}{f} = \begin{cases} f(a) & m = \iota_1(a) \\ \iota_2(e) & m = \iota_2(e) \end{cases}$

Za vir izjem pa potrebujemo:

$raise : E \to TX$

$raise : e \mapsto \iota_2(e)$

Običajno želimo še

$handle : TX \times TX^E \to TX$

$handle : (m, h) \mapsto \begin{cases} m & m = \iota_1(a) \\ h(e) & m = \iota_2(e) \end{cases}$

$$[\![\Gamma \vdash M : A]\!] : \underset{[\![A_1]\!] \times \cdots \times [\![A_n]\!]}{\underset{\parallel}{[\![\Gamma]\!]}} \to T[\![A]\!]$$

$$[\![\Gamma \vdash \underline{n} : \mathrm{int}]\!](\varepsilon) = \eta_{\mathbb{Z}}(n)$$

$$[\![\Gamma \vdash x_i : A_i]\!](a_1, \ldots, a_n) = \eta_{[\![A_i]\!]}(a_i)$$

$$[\![\Gamma \vdash M + N : \mathrm{int}]\!](\varepsilon) = \overset{T\mathbb{Z}}{[\![M]\!](\varepsilon)} \gg\!= \underbrace{(\overset{\mathbb{Z}}{x} \mapsto \overset{T\mathbb{Z}}{[\![N]\!](\varepsilon)} \gg\!= (\overset{\mathbb{Z}}{y} \mapsto \eta_{\mathbb{Z}}(x+y)))}_{\mathbb{Z} \to T\mathbb{Z}}$$

$$\vdots$$

Primeri za konkretne učinke:

- Nedeterminizem

$$[\![\Gamma \vdash \mathrm{choose}\ M\ N : A]\!](\varepsilon) = [\![M]\!](\varepsilon) \oplus [\![N]\!](\varepsilon)$$

- Izjeme

$$[\![\Gamma \vdash \mathrm{raise}\ E : A]\!](\varepsilon) = \mathrm{raise}([\![E]\!])$$

$$[\![\Gamma \vdash \mathrm{try}\ M\ \mathrm{with}\ N : A]\!](\varepsilon) = \mathrm{handle}([\![M]\!](\varepsilon), [\![N]\!](\varepsilon))$$