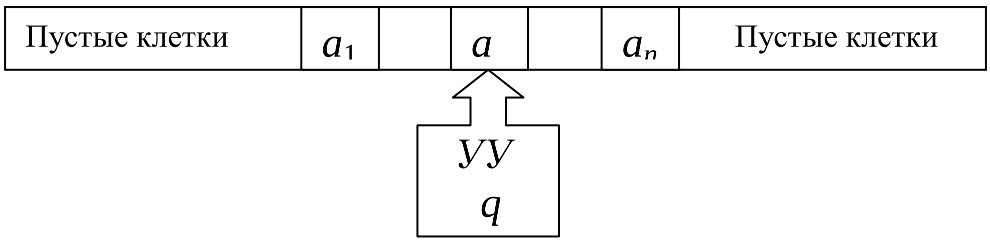
Лекция 10

Машины Тьюринга

<u>Схематическое описание машины Тьюринга</u>:



<u>Математическое описание машины Тьюринга</u>:

<u>Определение.</u> *Машина Тьюринга T* представляет собой алгебраическую систему $T=(\Sigma, Q, \delta, q_S, q_F)$, работающую в дискретные моменты времени t =0,1,2,... и состоящую из следующих частей:

- конечное множество $\Sigma = \{0,1,...\}$ - называется *внешним алфавитом,*
- конечное множество $Q = \{q_S, q_F, ...\}$ - называется *внутренним алфавитом,* элементы Q называются *состояниями машины,*
- отображение $\delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{R, L, S\}$, которое определяет список команд $T(q,a) = qa \to q'a'X$ – символическое обозначение образов $\delta(q,a) = (q', a', X)$ отображения δ для $q \in Q \setminus \{q_F\}$, $a \in \Sigma$ и $X \in \{R, L, S\}$, множество всех команд $\Pi = \{T(q,a) : q \in Q \setminus \{q_F\} \wedge a \in \Sigma\}$ называется *программой машины,*
- состояние q_S называется *начальным* и означает начало работы машины,

- состояние q_F называется *заключительным* и означает завершение работы машины.

Работа машины Тьюринга T происходит под действием ее команд и заключается в изменении ее *конфигураций,* описывающих состояния ленты и управляющего устройства, а также положение головки относительно ячеек ленты:

если лента находится в состоянии, которое описывается словом $\alpha a\beta$ над алфавитом Σ, и головка в состоянии q просматривает на ленте ячейку с состоянием a, то соответствующая конфигурация K машины T описывается выражением $M = \alpha qa\beta$, которое называется *машинным словом.*

При этом K называется *начальной конфигурацией*, если описывающее ее машинное слово содержит символ начального состояния q_S, и *заключительной конфигурацией*, если описывающее ее машинное слово содержит символ заключительного состояния q_F.

Программа указывает, что машина делает в каждый момент времени в зависимости от ее настоящей конфигурации K:

если K - заключительная конфигурация, то машина заканчивает работу, если же K не является заключительной конфигурацией и описывается машинным словом $M = \alpha qa\beta$, то в программе П машина находит команду $T(q,a)$ с левой частью qa и в зависимости от вида правой части такой команды $T(q,a)$ машина заменяет в просматриваемой ячейке букву a на букву a', состояние q на состояние q' и в зависимости от значения $X \in \{R, L, S\}$ сдвигает просматривающую головку либо в соседнюю правую ячейку при $X = R$, либо в соседнюю левую ячейку при $X = L$, либо оставляет головку на месте при $X = S$.

Изменение конфигураций $K_0, K_1, K_2, \ldots$ машины T под действием команд происходит в дискретные моменты времени t = 0,1,2,... и описывается преобразованием соответствующих машинных слов $M_0, M_1, M_2, \ldots$ по следующему правилу. За один шаг работы машины T ее машинное слово $M = \alpha q a \beta$ под действием команды $T(q,a)$ преобразуется в новое машинное слово M' по формулам:

если $T(q,a) = qa \to q'a'S$, то $M' = \alpha q'a'\beta$,

если $T(q,a) = qa \to q'a'R$ и $M = \alpha qab\beta'$, то $M' = \alpha a'q'b\beta'$,

если $T(q,a) = qa \to q'a'R$ и $M = \alpha qa$, то $M' = \alpha a'q'*$,

если $T(q,a) = qa \to q'a'L$ и $M = \alpha' bqa\beta$, то $M' = \alpha' q'ba'\beta$,

если $T(q,a) = qa \to q'a'L$ и $M = qa\beta$, то $M' = q'*a'\beta$.

Символически такое одношаговое преобразование машинных слов обозначается $M \to^T M'$.

Если существует такая последовательность преобразований машинных слов $M_i \to^T M_{i+1}$ (где $i = 0,1,\ldots,k-1$), для которой $M_0 = M$ и $M_k = M'$, то пишут $M \Rightarrow^T M'$ и говорят, что *машинное слово M′ получается из машинного слова M с помощью машины T*.

Вход (начало работы) машины: слово $w \in \Sigma^*$ на ленте машины T в начальном состоянии q_S.

Выход (завершение работы) машины: слово $w' \in \Sigma^*$ на ленте машины T в заключительном состоянии q_F.

В этом случае говорят, что машина T *принимает* слово w и выдает значение $w' = T(w)$. В результате машина T определяет язык $L(T) \subset \Sigma^*$, который состоит за всех принимаемых машиной T слов.

Определение. Язык $L \subset \Sigma^*$ *принимается* машиной Тьюринга, если $L = L(T)$ для некоторой машины Тьюринга T.

Таким образом, любая машина Тьюринга T определяет частичную функцию f из Σ^* в Σ^*, область определения которой D_f состоит из всех слов алфавита Σ, которые принимает машина T, и значения которой для слов $w \in D_f$ определяются по формуле: $f(w) = T(w)$.

Определение. Частичная функция f из Σ^* в Σ^* называется *вычислимой по Тьюрингу*, если она определяется некоторой машиной Тьюринга.

Пример. Пусть машина Тьюринга T имеет внешний алфавит $\Sigma = \{0,1\}$, внутренний алфавит $Q = \{q_S, q_F, q\}$ и программу П, которая состоит из команд: $q_S 1 \to q1R,\ q1 \to q1R,\ q* \to q_F 1S$. Тогда слово α=11 машиной T перерабатывается в слово β=111, так как

$$q_S 11 \to^T 1q1 \to^T 11q* \to^T 11q_F 1 \text{ и } T(11) = 111..$$

Легко видеть, что любое слово $\alpha = 1^n$ над алфавитом $\Sigma = \{0,1\}$ машиной T перерабатывается в слово $\beta = \alpha 1 = 1^{n+1}$. Это означает, что машина T к любому слову над алфавитом $A = \{1\}$ приписывает справа символ 1.

Определение. Частичная словарная функция $f : (\Sigma^*)^n \to \Sigma^*$ над алфавитом Σ называется *вычислимой по Тьюрингу*, если существует машина Тьюринга T с внешним алфавитом Σ, для которой при любых $w_1,...,w_n \in \Sigma^*$ условие $(w_1,...,w_n) \in D_f$ равносильно тому, что машина T применима к слову $\alpha = w_1 * ... * w_n$ и результат $T(\alpha)$ переработки машиной T такого слова равен значению функции $f(w_1,...,w_n)$.

Основная теорема. Для любой частичной словарной функции $f : (\Sigma^*)^n \to \Sigma^*$ следующие условия эквивалентны:

1) функция f вычислима по Тьюрингу;
2) функция f частично рекурсивна;
3) функция f нормально вычислима.

Такие вычислительные процедуры называются *алгоритмами.*

Можно построить *универсальную машину Тьюринга*, которая моделирует работу произвольной машины Тьюринга для любых заданных входных данных.

Тезис Черча-Тьюринга:
универсальная машина Тьюринга может выполнить любые вычисления, которые могут быть выполнены любым физически реализуемым вычислительным устройством.