# Ранг матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

В матрице $A$ размера $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы $k$-го порядка, где $k \le \min(m, n)$. Определители таких подматриц называются *минорами $k$-го порядка матрицы $A$.*

Например, из матрицы $A_{3\times 4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

**Определение**. ***Рангом*** *матрицы $A$ называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.*

Ранг матрицы $A$ обозначается *rang $A$, или $r(A)$.*

Из определения следует: а) *ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A) \le \min(m, n)$;*

б) $r(A) = 0$ *тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A = \mathbf{0}$;*

в) *для квадратной матрицы $n$-го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица $A$ — невырожденная.*

▷ **Пример 1.11**. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Матрица $A$ имеет четвертый порядок, поэтому $r(A) \le 4$. Однако $|A| = 0$, так как матрица $A$ содержит нулевой

столбец, поэтому $r(A) \le 3$ Все подматрицы третьего порядка тоже содержат нулевой столбец и поэтому имеют нулевые определители, значит $r(A) \le 2$. Все подматрицы второго порядка либо имеют нулевой столбец (второй или четвертый), либо имеют пропорциональные столбцы (первый и третий), поэтому тоже имеют нулевые определители, таким образом $r(A) \le 1$. Поскольку матрица $A$ содержит ненулевые элементы, т.е. невырожденные подматрицы первого порядка, то $r(A) = 1$. ▶

▷ **Пример 1.12.** Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е Для матрицы $A_{3\times 4}$ $r(A) \le \min(3;4)=3$.

Проверим, равен ли ранг 3-м, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы).

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) \le 2$. Так как существует ненулевой минор второго порядка, например, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \ne 0$, то $r(A) = 2$. ▶

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы.

Назовем ***элементарными преобразованиями*** матрицы следующие.

1) *Отбрасывание нулевой строки (столбца).*

2) *Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю*

3) *Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.*

4) *Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.*

5) *Транспонирование матрицы.*

**Теорема.** *Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.*

□ При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т.е. ее ранг не изменяется. ■

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица $A$ называется *ступенчатой*, если она имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}, \qquad (1.15)$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = 1,2,\dots,r$; $r \leq k$.

З а м е ч а н и е. Условие $r \leq k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен $r$, так как имеется минор $r$-го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{1r} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Покажем на примере *алгоритм вычисления ранга матрицы* с помощью элементарных преобразований.

▷ **Пример 1.13.** Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. $1^0$. Если $a_{11} = 0$, то при перестановке строк или столбцов добиваемся того, что $a_{11} \neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы (см. ниже).

$2^0$ Если $a_{11} \neq 0$, то умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11} = 0$, $-a_{31}/a_{11} = 2$, $-a_{41}/a_{11} = 1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й[1], 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме $a_{11}$) равнялись нулю[2].

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$3^0$. Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$ ( у нас $a_{22} = -1 \neq 0$), то умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно, на $-a_{32}/a_{22} = -3$, $-a_{42}/a_{22} = -3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме $a_{12}$, $a_{22}$) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы равен 2. ▶

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения.

1) $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$, 2) $r(A+B) \geq \left| r(A) - r(B) \right|$,

3) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$, 4) $r(A'A) = r(A)$,

5) $r(AB) = r(A)$, если $B$ – квадратная матрица и $|B| \neq 0$.

6) $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$, где $n$ – число столбцов матрицы $A$ или строк матрицы $B$.

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк или столбцов[1].

В матрице $A$ обозначим ее строки следующим образом.

$e_1 = (a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n})$, $\quad e_2 = (a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n}), \ldots,$

$e_m = (a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn})$.

Две строки матрицы называются *равными*, если равны их соответствующие элементы. $e_k = e_s$, если $a_{kj} = a_{sj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Арифметические операции над строками матрицы (умножение строки на число, сложение строк) вводятся как операции, проводимые поэлементно:

$$\lambda e_k = (\lambda a_{k1}\ \lambda a_{k2} \ldots \lambda a_{kn});$$

$$e_k + e_s = [(a_{k1} + a_{s1})\,(a_{k2} + a_{s2}) \ldots (a_{kn} + a_{sn})].$$

Строка $e$ называется *линейной комбинацией* строк $e_1, e_2, \ldots, e_s$ матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа.

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_s e_s, \qquad \textbf{(1.16)}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — любые числа.

Строки матрицы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = \mathbf{0}, \qquad \textbf{(1.17)}$$

где $\mathbf{0}$=(0 0 ..0).

*Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных*

□ Действительно, пусть для определенности в формуле (1.17) $\lambda_m \neq 0$, тогда

---

[1] В дальнейшем материал излагается для строк матрицы, для столбцов матрицы изложение аналогично

$$e_m = (-\lambda_1/\lambda_m)e_1 + (-\lambda_2/\lambda_m)e_2 + \ldots + (-\lambda_{m-1}/\lambda_m)e_{m-1}, \text{ или}$$

$$e_m = \tilde{\lambda}_1 e_1 + \tilde{\lambda}_2 e_2 + \ldots + \tilde{\lambda}_{m-1} e_{m-1}, \qquad \textbf{(1.18)}$$

где $\tilde{\lambda}_i = (-\lambda_i/\lambda_m)$; $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Таким образом, строка $e_m$ является линейной комбинацией остальных строк. ■

Если линейная комбинация строк (1.17) равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\lambda_i$ равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются *линейно независимыми*.

**Теорема о ранге матрицы.** *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).*

□ Пусть матрица $A$ размера $m \times n$ имеет ранг $r$ $(r \le \min(m,n))$. Это означает, что существует отличный от нуля минор $r$-го порядка. Всякий ненулевой минор $r$-го порядка будем называть *базисным минором*. Пусть для определенности это минор

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \ne 0 .$$

Тогда строки матрицы $e_1, e_2, \ldots, e_r$ линейно независимы. Действительно, предположим противное, т.е. одна из этих строк, например $e_r$, является линейной комбинацией остальных.

$$e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{r-1} e_{r-1} .$$

Вычтем из элементов $r$-й строки элементы 1-й строки, умноженные на $\lambda_1$, элементы 2-й строки, умноженные на $\lambda_2$, и т.д., наконец, элементы $(r-1)$-й строки, умноженные на $\lambda_{r-1}$. На основании свойства 8 (см. § 1.4) при таких преобразованиях матрицы ее определитель $\Delta$ не изменится, но тек как теперь $r$-я строка будет состоять из одних нулей, то $\Delta = 0$ — противоречие, и наше предположение о том, что строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ матрицы линейно зависимы, неверно.

Строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ назовем *базисными*.

Покажем, что любые $(r+1)$ строк матрицы линейно зависимы, т.е. любая строка выражается через базисные.

Рассмотрим минор $(r+1)$-го порядка, который получается при дополнении рассматриваемого минора элементами еще одной строки $i$ и столбца $j$:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} .$$

Этот минор равен нулю, так как ранг матрицы равен $r$, поэтому любой минор более высокого порядка равен нулю.

Раскладывая его по элементам последнего (добавленного) столбца, получаем $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} = 0$, где последнее алгебраическое дополнение $A_{ij}$ совпадает с базисным минором $\Delta$ и поэтому отлично от нули, т.е. $A_{ij} \ne 0$.

Разделив последнее равенство на $A_{ij}$, можем выразить элемент $a_{ij}$ как линейную комбинацию:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s a_{sj} , \tag{1.19}$$

где $\lambda_s = a_{sj} / A_{ij}$.

Фиксируем значение $i$ $(i > r)$ и получаем, что для любого $j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ элементы $i$-й строки $e_i$ линейно выражаются через элементы строк $e_1, e_2, \ldots, e_r$, т.е. $i$-я сторока есть линейная комбинация базисных: $e_i = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s e_{sj}$. ■