Практика 1

Алгебра высказываний

Таблица истинностных значений логических операций.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Определение. *Алгеброй высказываний* называется множество всех высказываний $\mathcal{V}$ с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Формулы алгебры высказываний

Свойства алгебры высказываний $\mathcal{V}$ описываются с помощью специальных формул, которые строятся из переменных символов с помощью знаков логических операций. Такие формулы принято называть также *пропозициональными формулами.*

Для упрощения записи формул скобки в них по возможности опускаются с учетом следующего приоритета выполнения логических операций: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Если в формулу Ф входят переменные $X_1, \dots, X_n$, то записывают $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$. Формула Ф определяет функцию n переменных F_Φ, которая каждому упорядоченному набору $\lambda(X_1), \dots, \lambda(X_n)$ n элементов множества $\{0,1\}$ ставит в соответствие элемент $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$ этого же множества. Такая функция F_Φ называется *истинностной функцией формулы* Ф и графически представляется *истинностной таблицей*, в которой для каждого упорядоченного набора $(k_1, \dots, k_n)$ возможных значений $k_1 = \lambda(X_1), \dots, k_n = \lambda(X_n)$ переменных $X_1, \dots, X_n$ формулы Ф по таблицам истинностных значений логических операций вычисляется значение функции $F_\Phi(k_1, \dots, k_n) = \lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$.

Задача. Найти истинностную таблицу следующей формулы

$$\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y).$$

1 3 2 5 4

Сокращенная запись таблицы $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y)$

Φ, F_{Φ}

X	Y	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Определение. Формула **Ф** называется:

– *тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 1;
– *противоречием* (или *тождественно ложной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 0;
– *выполнимой,* если ее истинностная функция не равна тождественно 0;
– *опровержимой,* если ее истинностная функция не равна тождественно 1.

Задания для самостоятельной работы

Задача 2. Составьте истинностные таблицы для следующих формул и укажите, какие из формул являются выполнимыми, какие опровержимыми, какие тождественно истинными (тавтологиями), а какие тождественно ложными (противоречиями):

1) $\big(X \wedge (Y \vee \neg X)\big) \wedge \big((Y \Rightarrow X) \vee Y\big)$;

2) $\Big(\big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y\big) \Rightarrow Y\Big) \Rightarrow Y$;

3) $\Big(\big((X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \Leftrightarrow Z)\big) \Leftrightarrow (Y \Leftrightarrow Z)\Big) \Leftrightarrow X$;

4) $\big((X \vee \neg Y) \Rightarrow Y\big) \wedge (\neg X \vee Y)$;

5) $\neg\Big(\Big(\neg Z \Rightarrow \neg\big(X \Rightarrow \neg(Y \Rightarrow Z)\big)\Big) \Rightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)\Big)$.

Логическая равносильность формул

Понятие равносильности формул основывается на тождественном равенстве истинностных функций этих формул. С помощью этого важного понятия осуществляются равносильные преобразования формул и приведение исследуемых формул к специальному виду.

Определение. Формулы Φ, Ψ называются *логически эквивалентными* (или просто *равносильными*), если при любой подстановке в формулы Φ, Ψ вместо переменных конкретных высказываний эти формулы превращаются в высказывания с одинаковыми истинностными значениями, т.е. выполняется $\vDash \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Для обозначения логически эквивалентных формул используется символическая запись $\Phi = \Psi$. Такие выражения называются *логическими эквивалентностями* или просто *равенствами формул.*

Задача. Составьте истинностные таблицы и проверьте справедливость равенства формул

$$X \Rightarrow (Y \vee Z) = (X \Rightarrow Y) \vee (X \Rightarrow Z).$$

Решение. Составим истинностные таблицы формул

$\Phi = X \Rightarrow (Y \vee Z)$, $\Psi = (X \Rightarrow Y) \vee (X \Rightarrow Z)$:

X	Y	Z	$Y \vee Z$	Φ
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

X	Y	Z	$X \Rightarrow Y$	$X \Rightarrow Z$	Ψ
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Так как в таблицах столбцы со значениями истинностных функций формул Φ, Ψ одинаковые, то при любой подстановке в формулы Φ, Ψ

вместо переменных X, Y, Z конкретных высказываний эти формулы превращаются в высказывания с одинаковыми истинностными значениями. Значит, формулы Φ, Ψ логически эквивалентны и выполняется равенство $\Phi = \Psi$.

ЛЕММА (основные равенства формул). Справедливы следующие равенства формул:

1) $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$, $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$ – свойства ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции;

2) $X \vee Y = Y \vee X$, $X \wedge Y = Y \wedge X$ – свойства коммутативности дизъюнкции и конъюнкции;

3) $X \vee X = X$, $X \wedge X = X$ – свойства идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции;

4) $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$, $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – свойства дистрибутивности соответственно конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5) $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$ – законы де Моргана;

6) $(X \wedge Y) \vee X = X$, $(X \vee Y) \wedge X = X$ – законы поглощения;

7) $\neg\neg X = X$ – закон двойного отрицания;

8) $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y$, $X \Rightarrow Y = \neg(X \wedge \neg Y)$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

9) $X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$, $X \Leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)$, $X \Leftrightarrow Y = (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ – взаимосвязь эквивалентности с импликацией, дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием.

ЛЕММА (правило замены). Если формулы Φ, Φ' равносильны, то для любой формулы $\Psi(X)$, содержащей переменную X, выполняется равенство $\Psi(\Phi) = \Psi(\Phi')$.

Это правило означает, что при замене в любой формуле $\Psi = \Psi(\Phi)$ некоторой ее подформулы Φ на равносильную ей формулу Φ' получается формула $\Psi' = \Psi(\Phi')$, равносильная исходной формуле Ψ. По этому правилу замены можно от одной формулы переходить к равносильной ей формуле с помощью основных равенств формул. Такие переходы называются *равносильными преобразованиями формул* и используются как для упрощения формул, так и для представления их в некоторой специальной форме. В частности, любую формулу можно равносильно преобразовать в формулу, содержащую символы логических операций $\neg, \wedge, \vee$.

Пример.

Формула $\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$ с помощью равенств 5),7),8) из леммы равносильно преобразовывается следующим образом:

$$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z = \neg(X \Rightarrow Y) \vee Z = \neg\big(\neg(X \wedge \neg Y)\big) \vee Z$$
$$= (X \wedge \neg Y) \vee Z.$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 3. С помощью равносильных преобразований докажите, что следующие формулы являются противоречиями:

1) $\big((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg(X \Rightarrow Z)\big) \wedge \neg(Z \Rightarrow Y)$;

2) $\big(Z \Rightarrow \neg(X \wedge \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg(X \vee Z) \wedge X \wedge Y)$;

3) $\neg Y \wedge X \wedge (X \Rightarrow Y)$;

4) $(X \vee Y) \Leftrightarrow \big(\neg X \wedge (Y \Rightarrow \neg Y)\big)$;

5) $\Big((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \big((\neg Z \Rightarrow \neg V) \Rightarrow (X \wedge Y)\big)\Big) \wedge \neg(Z \Rightarrow X)$;

6) $\Big((\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \big((\neg X \Rightarrow Y) \Rightarrow X\big)\Big) \Rightarrow \neg\big((\neg X \Rightarrow X) \Rightarrow X\big)$.

Задача 4. С помощью равносильных преобразований установите, какие из следующих равенств действительно выполняются:

1) $X \Rightarrow (X \wedge Y) = X \Rightarrow Y$;

2) $X \Rightarrow (X \vee Y) = X \Rightarrow Y$;

3) $X \wedge (Y \Leftrightarrow Z) = (X \wedge Y) \Leftrightarrow (X \wedge Z)$;

4) $X \vee (Y \Rightarrow Z) = (X \vee Y) \Rightarrow (X \vee Z)$;

5) $(X \Rightarrow Y) \vee Z = (X \vee Z) \Rightarrow (Y \vee Z)$;

6) $(X \Rightarrow Y) \wedge Z = (X \wedge Z) \Rightarrow (Y \wedge Z)$.

Нормальные формы формул алгебры высказываний

По определению формулы Φ, Ψ равносильны в том и только том случае, если их истинностные функции F_Φ, F_Ψ совпадают. Значит, отношение равносильности формул $\cong$ является отношением эквивалентности на множестве всех формул $F_{\text{АВ}}$, которое разбивает это множество на классы эквивалентности $[\Phi] = \{\Psi \in F_{\text{АВ}} \,:\, \Phi = \Psi\}$, определяемые формулами $\Phi \in F_{\text{АВ}}$. Из основных равенств формул следует, что для каждой формулы $\Phi \in F_{\text{АВ}}$ можно указать равносильные ей формулы специального вида, содержащие только символы логических операций $\neg, \wedge, \vee$.

Определение. *Литерой* называется пропозициональная переменная X или ее отрицание $\neg X$. Для обозначения литеры используется символ X^α, где $\alpha \in \{0,1\}$ и по определению $X^1 = X,\ X^0 = \neg X$.

Определение. *Конъюнктом* (соответственно *дизъюнктом*) называется литера или конъюнкция (соответственно дизъюнкция) литер.

При этом конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все пропозициональные переменные рассматриваемой формулы.

Определение. *Конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно КНФ) называется дизъюнкт или конъюнкция дизъюнктов. *Дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ) называется конъюнкт или дизъюнкция конъюнктов.

При этом КНФ (соответственно ДНФ) называется *совершенной*, если совершенны все ее дизъюнкты (соответственно конъюнкты).

ТЕОРЕМА 1. Любая формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.

Алгоритм приведения произвольной формулы Φ к ДНФ (соответственно, к КНФ):

1) согласно равенствам 8),9) выражаем все входящие в формулу Φ импликации и эквивалентности через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;

2) согласно законам де Моргана все отрицания, стоящие перед скобками, вносим в эти скобки и сокращаем все двойные отрицания;

3) согласно законам дистрибутивности преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций (соответственно, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше конъюнкций).

Очевидно, что в результате выполнения этих действий получается ДНФ (соответственно, КНФ) исходной формулы Ф. Ясно также, что такие формы для формулы Ф определяются неоднозначно.

Задача. Равносильными преобразованиями приведите формулу $(X \Leftrightarrow \neg Y) \vee \neg(X \Rightarrow Y)$ к дизъюнктивной нормальной форме и к конъюнктивной нормальной форме.

Решение. Данная формула с помощью равенств 1),5),7),8) из леммы равносильно преобразовывается следующим образом:

$$(X \Leftrightarrow \neg Y) \vee \neg(X \Rightarrow Y) = \big((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge \neg\neg Y)\big) \vee \neg(\neg X \vee Y) =$$
$$= (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y).$$

Полученная формула $(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$ является ДНФ. Раскрывая в этой формуле скобки с помощью равенств 4), получаем следующую КНФ:

$$(X \Leftrightarrow \neg Y) \vee \neg(X \Rightarrow Y) = (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) =$$
$$= (X \vee \neg X) \wedge (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X) \wedge (\neg Y \vee Y) = (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X).$$

ТЕОРЕМА 2. Любая выполнимая формула $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ равносильна формуле вида

$$\bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (X_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge X_n^{\alpha_n}),$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, для которых $F_\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СДНФ) формулы Ф.

ТЕОРЕМА 3. Любая опровержимая формула $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ равносильна формуле вида

$$\bigwedge_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} (X_1^{1-\alpha_1} \vee \dots \vee X_n^{1-\alpha_n}),$$

где конъюнкция берется по всем наборам $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, для которых $F_\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ) формулы Ф .

<u>Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ</u> формулы $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$:

1) составляем истинностную таблицу формулы Ф и добавляем к ней два дополнительных столбца с заголовками «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты» (табл. 10);

2) если при значениях $\lambda(X_1) = k_1, \dots, \lambda(X_n) = k_n$ истинностное значение $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$ формулы Ф равно 1, то в соответствующей строке табл. 10 в столбце «Совершенные конъюнкты» записываем конъюнкт $X_1^{k_1} \wedge \dots \wedge X_n^{k_n}$, а в столбце «Совершенные дизъюнкты» делаем прочерк. При этом учитываем, что $X_i^1 = X_i$ и $X_i^0 = \neg X_i$;

3) Если при значениях $\lambda(X_1) = m_1, \dots, \lambda(X_n) = m_n$ истинностное значение $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$ формулы Ф равно 0, то в соответствующей строке табл. 10 в столбце «Совершенные дизъюнкты» записываем дизъюнкт $X_1^{1-m_1} \vee \dots \vee X_n^{1-m_n}$, а в столбце «Совершенные конъюнкты» делаем прочерк;

Таблица 10

X_1	…	X_n	…	$\Phi(X_1, \dots, X_n)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
…	…	…	…	…	…	…
k_1	…	k_n	…	1	$X_1^{k_1} \wedge \dots \wedge X_n^{k_n}$	–
…	…	…	…	…	…	…
m_1	…	m_n	…	0	–	$X_1^{1-m_1} \vee \dots \vee X_n^{1-m_n}$
…	…	…	…	…	…	…

4) СДНФ формулы Ф равна дизъюнкции полученных совершенных конъюнктов: $(X_1^{k_1} \wedge \dots \wedge X_n^{k_n}) \vee \dots$;

5) СКНФ формулы Ф равна конъюнкции полученных совершен-

ных дизъюнктов: $(X_1^{1-m_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-m_n}) \wedge \ldots$.

Задачи

1. Найдите СДНФ и СКНФ формулы

$$\Phi(X, Y, Z) = \neg(X \wedge Y) \Rightarrow \neg(X \vee Z).$$

Решение. Составляем истинностную таблицу формулы Ф и добавляем к ней два дополнительных столбца с заголовками «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты» (табл. 11).

В строках табл. 11, где значение формулы Ф равно 1, в столбце «Совершенные дизъюнкты» делаем прочерк, а в столбце «Совершенные конъюнкты» записываем конъюнкты $X^\alpha \wedge Y^\beta \wedge Z^\gamma$, где α, β, γ – соответствующие значения переменных X, Y, Z в этой строке табл. 11.

В строках табл. 11, где значение формулы Ф равно 0, в столбце «Совершенные конъюнкты» делаем прочерк, а в столбце «Совершенные дизъюнкты» записываем дизъюнкты $X^{1-\alpha} \vee Y^{1-\beta} \vee Z^{1-\gamma}$, где α, β, γ – соответствующие значения переменных X, Y, Z в этой строке табл. 11.

Таблица 11

X	Y	Z	$\Phi(X,Y,Z)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
0	0	0	1	$X^0 \wedge Y^0 \wedge Z^0$	–
0	0	1	0	–	$X^1 \vee Y^1 \vee Z^0$
0	1	0	1	$X^0 \wedge Y^1 \wedge Z^0$	–
0	1	1	0	–	$X^1 \vee Y^0 \vee Z^0$
1	0	0	0	–	$X^0 \vee Y^1 \vee Z^1$
1	0	1	0	–	$X^0 \vee Y^1 \vee Z^0$
1	1	0	1	$X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^0$	–
1	1	1	1	$X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^1$	–

С учетом равенств $X^1 = X$, $X^0 = \neg X$ записываем СДНФ данной формулы Ф в виде дизъюнкции совершенных конъюнктов:

$$\Phi(X,Y,Z) = (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \\ \vee (X \wedge Y \wedge Z).$$

Аналогично записываем СКНФ данной формулы Ф в виде конъюнкции совершенных дизъюнктов:

$$\Phi(X,Y,Z) = (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \\ \wedge (\neg X \vee Y \wedge \neg Z).$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 5. Равносильными преобразованиями приведите каждую из следующих формул к дизъюнктивной нормальной форме:

1) $\big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Z \Rightarrow \neg X)\big) \Rightarrow (Y \Rightarrow \neg Z)$;
2) $\big((X \Rightarrow Y) \vee \neg Z\big) \Rightarrow \big(X \vee (X \Leftrightarrow Z)\big)$;
3) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$;
4) $(X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow (X \wedge Z)$;
5) $\big(X \vee \neg(Y \Rightarrow Z)\big) \wedge (X \vee Z)$.

Задача 6. Равносильными преобразованиями приведите каждую из следующих формул к конъюнктивной нормальной форме:

1) $\big(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)\big) \Rightarrow \big((X \Rightarrow \neg Z) \Rightarrow (X \Rightarrow \neg Y)\big)$;
2) $\big((X \Rightarrow Y) \vee \neg Z\big) \Rightarrow \big(X \vee (X \Leftrightarrow Z)\big)$;
3) $(X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow (X \wedge Z)$;
4) $\big(X \vee \neg(Y \Rightarrow Z)\big) \wedge (X \Leftrightarrow Z)$;
5) $\neg(X \vee Z) \wedge (X \Rightarrow Y)$.

Задача 7. Для следующих формул составьте истинностные таблицы, найдите СДНФ и СКНФ:

1) $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \Rightarrow \neg Y) \wedge \neg Z$;
2) $\neg\Big(\neg X \Leftrightarrow \big((Y \vee \neg Z) \Rightarrow \neg(X \vee Y)\big)\Big)$;
3) $\big((\neg X \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Z)\big) \wedge \neg Y$;
4) $\neg(\neg X \vee \neg Y) \wedge \big(X \Rightarrow (Y \wedge Z)\big)$;
5) $(X \Leftrightarrow Z) \Rightarrow (X \wedge \neg Y)$;

6) $\big((X \vee Y) \Rightarrow Z\big) \Leftrightarrow \neg X$.