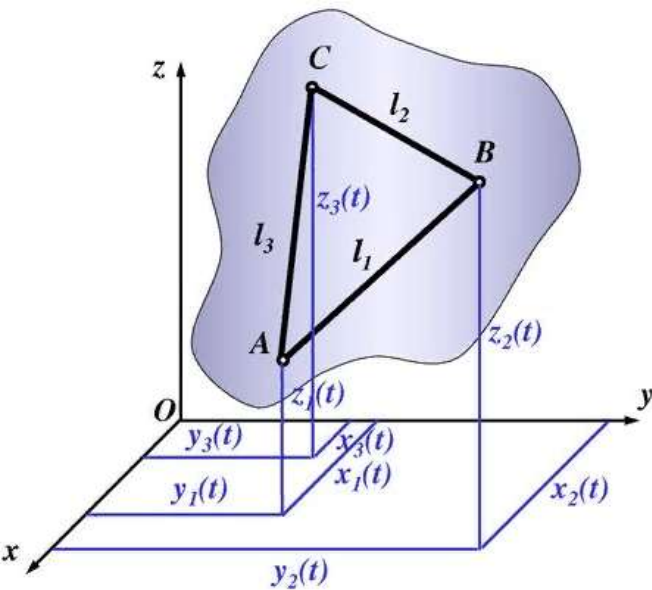


Кинематическая и динамическая теория механических систем

Кинематика движения твердого тела

2

Физическая система (ФС) – абсолютно твердое тело - модель, у которого расстояние между любыми двумя точками в процессе движения не меняется, т.е. деформациями можно пренебречь.



Степень свободы твердого тела – число независимых переменных, описывающих состояние данной системы.

$$x_1 = x_1(t); y_1 = y_1(t); z_1 = z_1(t)$$

$$l_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Мат.точка – 3; ТТ – 6;

ТТ, закрепленное в одной точки – 3;

ТТ, закрепленное на неподвижной оси – 1;

Плечелучевой сустав – 1;

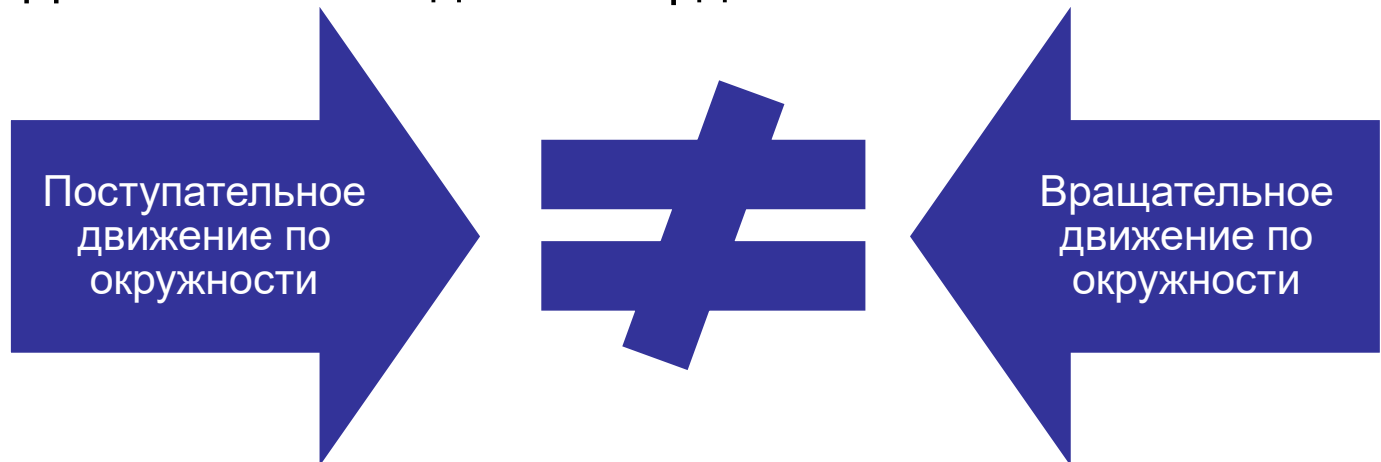
Лучезапястный сустав – 2;

Тазобедренный сустав – 3; Череп - 6

Кинематика движения твердого тела

При анализе движения твердого тела выделяют специальные случаи движения:

- 1) Поступательное движение;
- 2) Вращательное движение;
- 3) Плоское движение;
- 4) Движение твердого тела с одной неподвижной точкой;
- 5) Движение свободного твердого тела.



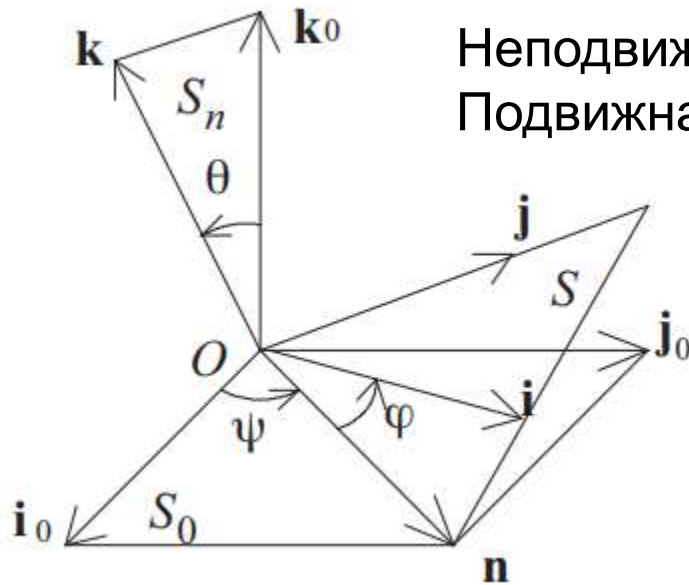
Кинематика движения твердого тела

Плоским движением ТТ называется такое движение, при котором траектории всех его точек лежат в параллельных плоскостях.

Движение твердого тела, закрепленного в одной точке, можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку закрепления.

Произвольное движение твердого тела – суперпозиция вращательного движения вокруг мгновенной оси и поступательного перемещения вдоль этой же оси

Теорема Эйлера о произвольном движении твердого тела



Неподвижная системы координат с ортами i_0, j_0, k_0 .
Подвижная системы координат с ортами i, j, k .

Линией узлов называется линия пересечения плоскостей $S_0 \perp k_0$ и $S \perp k$. Введем единичный вектор n , направленный по линии узлов. Ввиду того что $n \perp k_0$ и $n \perp k$, плоскость $S_n \perp n$ содержит вектора k_0 и k .

Углами Эйлера называются **угол собственного вращения φ** между ортами n и i , **угол прецессии ψ** между i_0 и n и **угол нутации θ** между k_0 и k .

p, q, r - проекции
угловой скорости на оси

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

Теорема Эйлера о произвольном движении твердого тела

Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством его вращения вокруг неподвижной оси, проходящей через эту точку. При этом ось вращения и угол поворота $\Delta\varphi$ определяются однозначно элементами матрицы

$$A(\Delta t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Скорость произвольной точки тела, т.к. $r = r[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)]$.

$$v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

Динамика движения механических систем⁷

Инерциальные системы отсчета (ИСО) – такие системы отсчета, в которых свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно из любого начального положения в любом направлении.

Свободная материальная точка – это точка, которая не взаимодействует с другими телами.

Если действие сил скомпенсировано, то точка – квазисвободная.

Однородность пространства означает, что все точки пространства эквивалентны.

Изотропность пространства означает, что все направления эквивалентны (равноправны).

Однородность времени означает, что все моменты времени эквивалентны.

Инерция – стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного (прямолинейного) движения.

Масса – количественная мера инерции.

Динамика движения механических систем

Сила (F) – количественная мера интенсивности взаимодействия материальных тел.

Закон инерции: всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её изменить это состояние.

Первый закон Ньютона: *всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

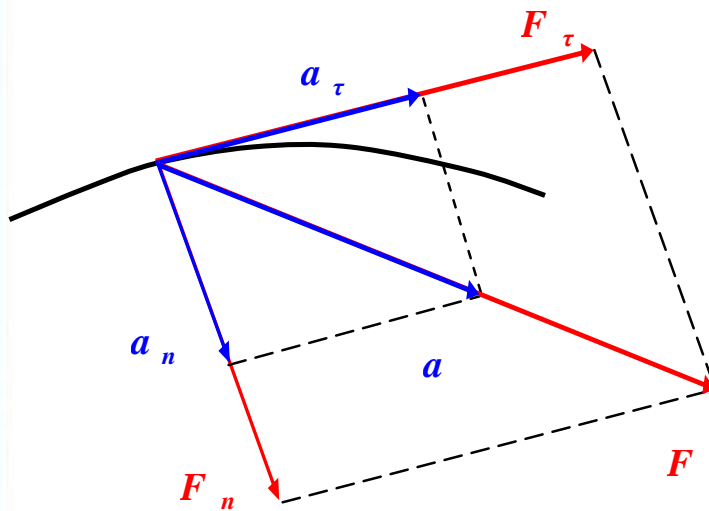
Под действием силы тела

- либо изменяют вектор скорости, т.е. приобретают ускорение (**динамическое проявление F**),
- либо изменяют свою форму и размеры, т.е. деформируются (**статическое проявление F**).

Динамика движения механических систем⁹

Второй закон Ньютона устанавливает количественную связь между силой, действующей на тело, и его импульсом/ускорением: *скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе*

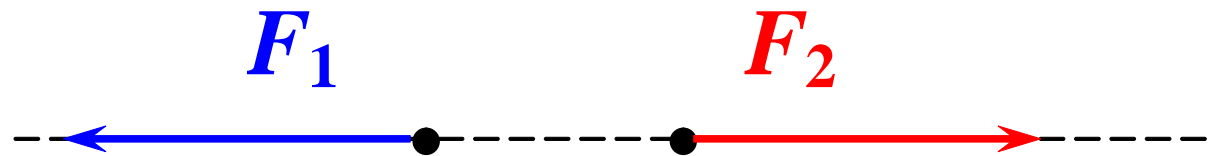
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a}$$



Принцип независимого действия сил: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил нет.

Динамика движения механических систем

Третий закон Ньютона: две материальные точки взаимодействуют друг с другом силами равными по величине, противоположно направленными вдоль одной прямой.



$$|F_1| = |F_2|$$

Из 3-на следует:

1. Силы имеют одну и ту же физическую природу (например, гравитационную, электрическую, контактную).
2. Эти силы не уравнивают друг друга, т.к. приложены к различным телам (поэтому их нельзя складывать).

Силы и взаимодействия в механике



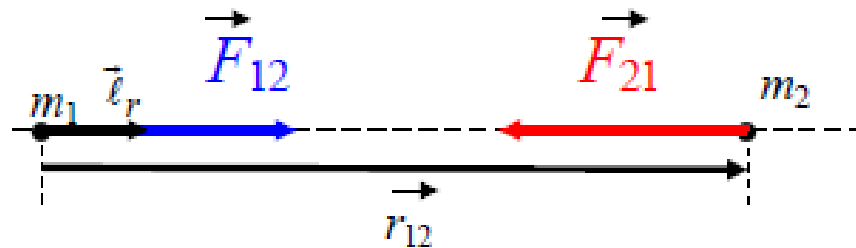
Динамика движения механических систем

1. Гравитационные силы

Согласно **закону всемирного тяготения** два тела (материальные точки) притягиваются с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$\vec{F}_{gp} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad F_{gp} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

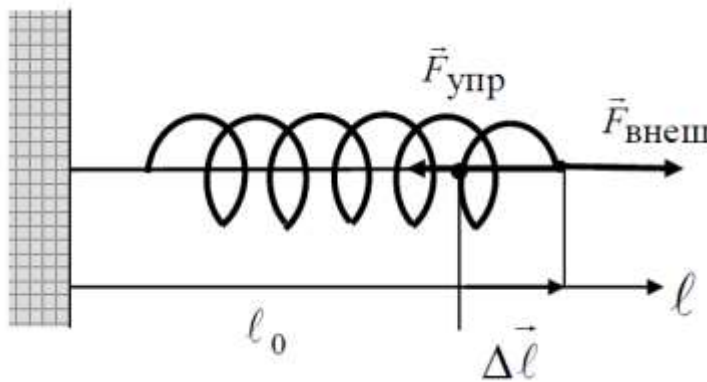
$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$



Динамика движения механических систем

2. Силы упругости

Всякое реальное тело под действием приложенных к нему внешних сил деформируется. Если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется **упругой**.



$$\vec{F}_{упр} = -k \vec{\Delta l}$$

где k – коэффициент жесткости пружины.

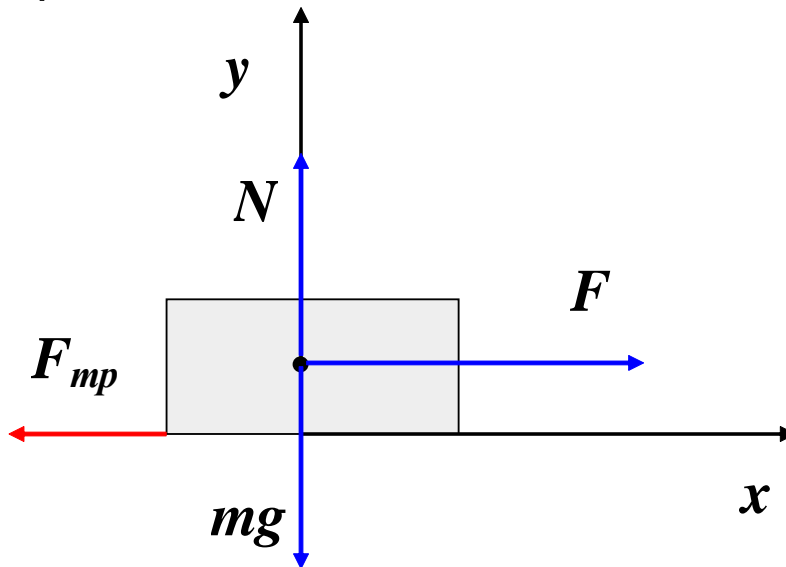
Знак минус указывает на то, что сила упругости направлена в сторону, противоположную деформации.

Динамика движения механических систем

3. Силы трения

Силы трения возникают при перемещении соприкасающихся тел друг относительно друга.

Трение между поверхностями двух твердых тел называется **сухим**, а между твердым телом и жидкой или газообразной средой – **вязким**.



$$\vec{F}_{mp.n} = -\vec{F}$$
$$0 \leq F_{mp.n} \leq F_0$$

Динамика движения механических систем



Кулон Шарль Оюстен

3. Силы трения

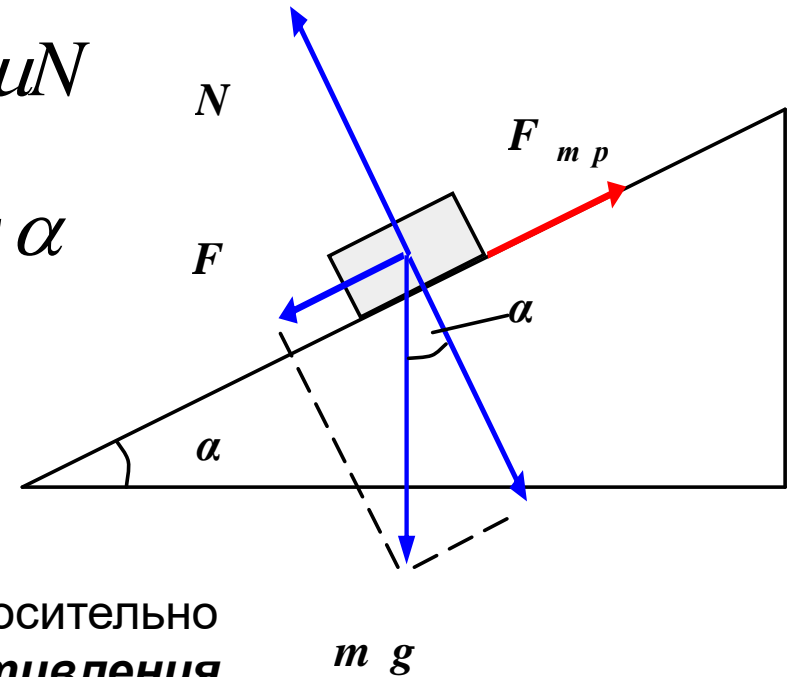
Сила трения скольжения, возникает при перемещении (скольжении) соприкасающихся тел друг относительно друга.

$$F_{тр.ск} = \mu F_n = \mu N$$

$$F_{тр.ск} = \mu \cdot mg \cdot \cos \alpha$$

$$\mu = \tan \alpha_0$$

предельный угол



При малых скоростях тела относительно вязкой среды **сила сопротивления пропорциональна относительной скорости:**

$$F_{в.тр} = \beta v_{отн}$$



Амонтон Гийом

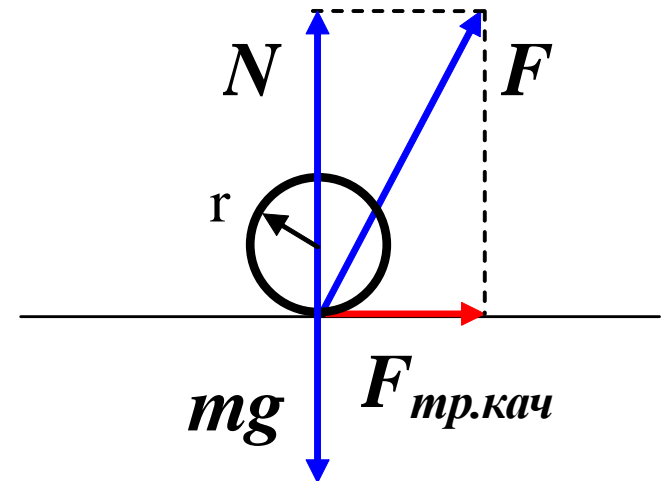
Динамика движения механических систем

3. Силы трения

Сила трения качения возникает при качении тел цилиндрической или шарообразной формы по гладкой поверхности вследствие деформации обоих соприкасающихся тел.

$$F_{тр.кач} = \mu_{кач} \frac{N}{r}$$

Силы трения качения во много раз меньше силы трения скольжения.



Динамика движения механических систем

Таблица коэффициентов трения

Трущиеся материалы (при сухих поверхностях)	Коэффициенты трения	
	покоя	при движении
Резина по сухому асфальту	0,95-1,0	0,5-0,8
Дерево по дереву (в среднем)	0,65	0,33
Кирпич по кирпичу (гладко отшлифованные)	0,80	0,55
Сталь (коньки) по льду	0,19	

Спасибо за внимание!

