Системы линейных уравнений

5.1. Основные понятия

Определения

Линейным уравнением (или *уравнением 1-го порядка*) с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b. \qquad (1)$$

Величины $a_1, a_2, \dots, a_n$ называются *коэффициентами* при неизвестных, а b — *свободным членом* уравнения (1). Коэффициенты при неизвестных и свободный член предполагаются известными.

Произвольная система линейных уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Всюду далее мы будем предполагать, что коэффициенты при неизвестных и свободные члены в системах линейных уравнений лежат в некотором поле F и называть систему (4) *системой линейных уравнений над полем* F. Элементы поля F мы будем называть *скалярами*.

Определения

Частным решением (или просто *решением*) системы (4) называется упорядоченный набор скаляров $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ из поля F такой, что при подстановке в любое уравнение системы (4) x_1^0 вместо x_1, x_2^0 вместо x_2, $\dots$, x_n^0 вместо x_n получается верное равенство. Система линейных уравнений (4) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно частное решение, и *несовместной* в противном случае. *Общим решением* системы (4) называется множество всех ее частных решений.

- Общее решение есть у любой системы. В частности, у несовместной системы общим решением является пустое множество.
- Решить систему линейных уравнений — значит найти ее общее решение.

Определение

Система линейных уравнений, в которой правые части всех уравнений равны 0, называется *однородной*.

Очевидно, что если в любое уравнение однородной системы вместо всех неизвестных подставить 0, то получится верное равенство. Иначе говоря, набор скаляров $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ раз}})$, где n — число неизвестных в системе, является частным решением любой однородной системы. Это решение называется *нулевым* решением. Из сказанного вытекает

Замечание 5.1

Любая однородная система линейных уравнений совместна. $\square$

Определение

Если в системе (4) все свободные члены заменить нулями, то мы получим однородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3}$$

которую мы будем называть *однородной системой, соответствующей системе* (4).

Определения

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* (или просто *матрицей*) *системы* (4). Первый из столбцов

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

называется *столбцом неизвестных* системы (4), а второй — *столбцом свободных членов* этой системы.

Обозначим основную матрицу, столбец неизвестных и столбец свободных членов системы (4) через A, X и B соответственно. Матрицы A и X имеют размеры $m \times n$ и $n \times 1$, соответственно. По определению произведения матриц, матрица AX существует и имеет размер $m \times 1$ — такой же, как у матрицы B. Запишем матрицу AX:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

и приравняем ее к матрице B:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если расписать полученное матричное равенство поэлементно, то получится не что иное, как система (4). Таким образом, это матричное равенство равносильно системе (4). Равенство $AX = B$ (при условии, что X и B — матрицы, состоящие из одного столбца) называется *матричной записью системы линейных уравнений* (4).

Определение

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{4}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{5}$$

называется *расширенной матрицей* этой системы.

Обычно, записывая расширенную матрицу, ее последний столбец отделяют от остальной части матрицы вертикальной чертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Это делается, чтобы подчеркнуть, что слева и справа от вертикальной черты стоят скаляры, играющие принципиально разную роль в системе: слева — коэффициенты при неизвестных, а справа — свободные члены уравнений.

- расширенная матрица системы содержит в себе полную информацию о системе.

Определение

Мы будем говорить, что система (4) *соответствует* матрице (5).

5.2. Общая схема и корректность метода Гаусса

Приступим к изложению метода Гаусса. Его можно реализовывать двумя способами — на языке линейных уравнений и на языке матриц. Мы изложим второй из этих способов. В самом общем виде метод Гаусса можно описать как последовательность из следующих четырех шагов:

1) записываем расширенную матрицу данной системы линейных уравнений;
2) с помощью некоторых преобразований (называемых *элементарными преобразованиями матрицы*) приводим эту матрицу к некоторому специальному виду (так называемой *ступенчатой* матрице);
3) восстанавливаем систему, соответствующую полученной ступенчатой матрице;
4) решаем систему, полученную на предыдущем шаге.

При этом оказывается, что общее решение системы, соответствующей полученной ступенчатой матрице, совпадает с общим решением исходной системы, а система, соответствующая произвольной ступенчатой матрице, решается легко.

Шаги 1) и 3) тривиальны, и мы их далее комментировать не будем (отметим, что при решении конкретных задач шаг 3), как правило, в явном виде не осуществляют).

Определение

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие действия:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;
2) прибавление одной строки к другой;
3) перестановка двух строк;
4) перестановка двух столбцов;
5) вычеркивание или добавление нулевой строки.

Определение

Матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований. Тот факт, что матрицы A и B эквивалентны, обозначается так: $A \sim B$.

Определение

Системы линейных уравнений называются *равносильными*, если они имеют одно и то же общее решение.

Следующее несложно проверяемое утверждение принципиально важно, так как оно обосновывает корректность метода Гаусса.

Предложение 5.1

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований типов 1)–3) *и* 5), *то системы линейных уравнений, соответствующие матрицам A и B равносильны.*