Практика 5

Метод резолюций в алгебре предикатов

Унификаторы, резольвенты и резолютивный вывод

Пусть S – множество формул. Обозначим символами X_S, C_S и F_S соответственно множества всех предметных переменных, предметных постоянных символов и функциональных символов, встречающихся в формулах множества S. Обозначим T_S множество всех термов сигнатуры F_S (т.е. функциональных выражений языка сигнатуры F_S).

Отображение θ множества предметных переменных X_S в множество термов T_S определяет замену переменных $x \in X_S$ на соответствующие термы $\theta(x) \in T_S$, или подстановку термов $\theta(x)$ вместо переменных x в формулах множества S. При этом предметные символы в формулах множества S остаются без изменения, т.е. отображение θ продолжается на множество термов T_S тождественным действием на элементы из C_S. Такие отображения $\theta\colon X_S \to T_S$ называются *подстановками* и обозначаются матрицами $\theta = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$, где указываются только такие значения $t_i = \theta(x_i)$ для элементов $x_i \in X_S$ $(i = \overline{1,n})$, которые удовлетворяют условию $\theta(x_i) \neq x_i$. Другими словами, в обозначении подстановки θ указываются только ее нетождественные действия на элементы множества X_S и подразумевается, что $\theta(x) = x$ для всех остальных $x \in X_S$, которых нет в матричной записи подстановки.

Пример 1. Если в формулах множества S есть предметный символ c, предметные переменные x,y,z и унарный функциональный символ f, то примерами подстановок будут следующие отображения множества предметных переменных $X_S = \{x, y, z\}$ в множество термов T_S:

$$\theta = \begin{pmatrix} x & y \\ z & f(z) \end{pmatrix}, \; \lambda = \begin{pmatrix} x & y \\ f(c) & z \end{pmatrix}, \; \sigma = \begin{pmatrix} y & z \\ c & c \end{pmatrix} \text{ и } \; \tau = \begin{pmatrix} x \\ f(c) \end{pmatrix}.$$

Однако некорректна замена $\theta = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & f(z) & h(y) \end{pmatrix}$, так как $\theta(y) = f(z) = f\big(h(y)\big) = \cdots$ - неопределенное значение.

Действие любой подстановки $\theta\colon X_S \to T_S$ естественно продолжается на термы из T_S, атомарные формулы, встречающихся в формулах множества S, и дизъюнкты из S.

Пример 2. Если в формулах множества S есть предметный символ c, предметные переменные x,y,z, терм $t = f(x, y, z)$ и дизъюнкт $D = P(x, g(z)) \vee \neg Q(c, y)$ является одной из формул множества S, то в результате действия на формулы t, D подстановки $\theta = \begin{pmatrix} x & z \\ c & h(y) \end{pmatrix}$ получаем значения:

$$\theta(t) = f(c, y, h(y)) \quad \text{и} \quad \theta(D) = P(c, g\big(h(y)\big) \vee \neg Q(c, y).$$

Унификация формул

Пусть $W = \{\Phi_1, ..., \Phi_k\}$ – множество атомарных формул, встречающихся в дизъюнктах из множества S. Подстановка θ называется *унификатором множества формул* W, если

$\theta(\Phi_1) = \ldots = \theta(\Phi_k)$. Говорят, что множество атомарных формул W *унифицируемо*, если для него существует унификатор.

Пример 3**.** Множество формул $\{P(b,y),\ P(x, f(c))\}$ с бинарным предикатным символом P, унарным функциональным символом f и предметными символами b,c унифицируемо, так как подстановка $\theta = \begin{pmatrix} x & y \\ b & f(c) \end{pmatrix}$ является его унификатором.

Пример 4. Найдем унификатор для множества формул

$$W = \{P(c, x, f(g(y))),\ P(z, f(z), f(u))\}$$

с тернарным предикатным символом P, унарными функциональными символами f,g и предметным символом c.

Решение. Подстановка $\theta = \begin{pmatrix} z & x & u \\ c & f(c) & g(y) \end{pmatrix}$ дает результат:

$$\theta\Big(P\big(c, x, f(g(y))\big)\Big) = P\big(c, f(c), f(g(y))\big),$$
$$\theta\Big(P\big(z, f(z), f(u)\big)\Big) = P\big(c, f(c), f(g(y))\big).$$

Пример 5. Определим, унифицируемо ли множество формул $W = \{P(f(c), g(x)),\ P(y, y)\}$ с бинарным предикатным символом P, унарными функциональными символами f,g и предметным символом c.

Решение. Подстановка $\theta = \begin{pmatrix} y & y \\ f(c) & g(x) \end{pmatrix}$ некорректна и данное множество не унифицируемо.

Резольвенты дизъюнктов

С помощью унификаторов основные понятия метода резолюций логики высказываний естественно переносятся на логику предикатов и в результате получается эффективный метод доказательства противоречивости конечных множеств дизъюнктов S, который называется методом резолюций логики предикатов.

Условимся называть *литерами* простейшие формулы вида $P(t_1, \ldots, t_n)$ или их отрицания $\neg P(t_1, \ldots, t_n)$.

Пусть дизъюнкты D_1, D_2 из множеств S не имеют общих переменных и L_1, L_2 – литеры в дизъюнктах D_1 и D_2, соответственно. Если множество формул $W = \{L_1, \neg L_2\}$ имеет унификатор θ, то дизъюнкт, получаемый из дизъюнкта $\theta(D_1) \vee \theta(D_2)$ вычеркиванием литер $\theta(L_1)$ и $\theta(L_2)$, называется *бинарной резольвентой* дизъюнктов D_1 и D_2, а литеры L_1 и L_2 называются *отрезаемыми литерами.* Если $\theta(D_1) = \theta(L_1)$ и $\theta(D_2) = \theta(L_2)$, то бинарную резольвенту дизъюнктов D_1 и D_2 полагаем равной 0.

Если дизъюнкты D_1, D_2 имеют общие переменные, то, заменив в формуле D_2 эти общие переменные на переменные, не встречающиеся в D_1 и D_2, получим дизъюнкт D_2', который не имеет общих переменных с дизъюнктом D_1. *Бинарной резольвентой* дизъюнктов D_1 и D_2 называется бинарная резольвента дизъюнктов D_1 и D_2'.

Пример 1**.** Найдем бинарную резольвенту дизъюнктов $D_1 = P_1(x) \vee P_2(x)$ и $D_2 = \neg P_1(c) \vee P_3(x)$

Так как дизъюнкты D_1, D_2 имеют общую переменную x, то заменим в формуле D_2 переменную x на новую переменную y и получим дизъюнкт $D_2' = \neg P_1(c) \vee P_3(y)$, который не имеет общих переменных с дизъюнктом D_1. Выбираем в дизъюнктах D_1 и D_2'

литеры $L_1 = P_1(x)$ и $L_2 = \neg P_1(c)$, соответственно. Так как $\neg L_2 \equiv L_2' = P_1(c)$ и формулы L_1, L_2' имеют унификатор $\sigma = \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}$, то бинарная резольвента формул D_1 и D_2' получается из выражения

$$\sigma(D_1) \vee \sigma(D_2') = P_1(c) \vee P_2(c) \vee \neg P_1(c) \vee P_3(y)$$

вычеркиванием литер $P_1(c)$ и $\neg P_1(c)$. Следовательно, $P_2(c) \vee P_3(y)$ – бинарная резольвента дизъюнктов D_1 и D_2, а формулы $P_1(x)$ и $\neg P_1(c)$ – отрезаемые литеры.

Резольвента дизъюнктов D_1, D_2 обозначается символом $\mathrm{res}(D_1, D_2)$ и определяется как одна из бинарных резольвент дизъюнктов D_1 и D_2.

Пример 2. Найдем резольвенты следующих дизъюнктов

$$D_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee P_1(g(y)), \;\; D_2 = \neg P(f(g(b))) \vee P_2(c).$$

С помощью унификатора $\theta = \begin{pmatrix} x \\ f(g(b)) \end{pmatrix}$ получаем бинарную резольвенту дизъюнктов D_1 и D_2 в виде формулы

$$\mathrm{res}(D_1, D_2) = P(f(y)) \vee P_1(g(y)) \vee P_2(c).$$

С другой стороны, с помощью унификатора $\theta = \begin{pmatrix} y \\ g(b) \end{pmatrix}$ получаем бинарную резольвенту дизъюнктов D_1 и D_2 в виде формулы

$$\mathrm{res}(D_1, D_2) = P(x) \vee P_1(g(g(b))) \vee P_2(c).$$

Наконец, с помощью унификатора $\theta = \begin{pmatrix} x & y \\ f\big(g(b)\big) & g(b) \end{pmatrix}$ получаем бинарную резольвенту дизъюнктов D_1 и D_2 в виде формулы

$$\mathrm{res}(D_1, D_2) = P_1\big(g(g(b))\big) \vee P_2(c).$$

Метод резолюций

Резолютивный вывод формулы Φ из множества дизъюнктов S есть такая конечная последовательность дизъюнктов $D_1,...,D_к$, что $D_k = \Phi$ и каждый дизъюнкт D_i или принадлежит множеству S, или является резольвентой некоторых предыдущих формул этой последовательности.

Легко видеть, что резолютивный вывод сохраняет выполнимость формул при любой интерпретации множества дизъюнктов S. Следовательно, если существует резолютивный вывод нуля 0 из множества дизъюнктов S, то множество дизъюнктов S невыполнимо. Более того, имеет место следующий результат.

Основная теорема метода резолюций. Множество дизъюнктов S противоречиво тогда и только тогда, когда существует резолютивный вывод нуля из S.

Пример 1**.** Докажем противоречивость множества формул $W = \{\Phi_1,...,\Phi_6\}$, где

$\Phi_1 = P_1(a, f(b), f(c))$,

$\Phi_2 = P_2(a)$,

$\Phi_3 = P_1(x, x, f(x))$,

$\Phi_4 = \neg P_1(x, y, z) \vee P_3(x, z)$,

$\Phi_5 = \neg P_2(x) \vee \neg P_1(y, z, u) \vee \neg P_3(x, u) \vee P_3(x, y) \vee P_3(x, z)$,

$\Phi_6 = \neg P_3(a, c)$.

Продолжим эту последовательность формул для построения резолютивного вывода 0 из множества формул W:

$\Phi_7 = \mathrm{res}(\Phi_2, \Phi_5) = \mathrm{res}(\Phi_2, \begin{pmatrix} x & y \\ a & z \end{pmatrix}(\Phi_5)) = \neg P_1(z, z, u) \vee \neg P_3(a, u) \vee P_3(a, z)$,

где унификатор $\theta = \begin{pmatrix} x & y \\ a & z \end{pmatrix}$;

$\Phi_8 = \mathrm{res}(\Phi_3, \Phi_7) = \mathrm{res}(\Phi_3, \begin{pmatrix} z & u \\ x & f(x) \end{pmatrix}(\Phi_7)) = \neg P_3(a, f(x)) \vee P_3(a, x)$,

где унификатор $\theta = \begin{pmatrix} z & u \\ x & f(x) \end{pmatrix}$;

$\Phi_9 = \mathrm{res}(\Phi_6, \Phi_8) = \mathrm{res}(\Phi_6, \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}(\Phi_8)) = \neg P_3(a, f(c))$;

где унификатор $\theta = \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}$;

$\Phi_{10} = \mathrm{res}(\Phi_4, \Phi_9) = \mathrm{res}(\begin{pmatrix} x & z \\ a & f(c) \end{pmatrix}(\Phi_4), \Phi_9) = \neg P_1(a, y, f(c))$;

где унификатор $\theta = \begin{pmatrix} x & z \\ a & f(c) \end{pmatrix}$;

$\Phi_{11} = res(\Phi_1, \Phi_{10}) = \mathrm{res}\left(\Phi_1, \begin{pmatrix} y \\ f(b) \end{pmatrix}(\Phi_{10})\right) = 0$,

где унификатор $\theta = \begin{pmatrix} y \\ f(b) \end{pmatrix}$.

Построен резолютивный вывод 0 из $W=\{\Phi_1,...,\Phi_6\}$. Значит, по основной теореме метода резолюций множество дизъюнктов W противоречиво.

<u>Пример 2</u>**.** Докажем противоречивость множества формул $W=\{\mathrm{D}_1,\dots,D_7\}$, где

$D_1=\neg P(x)\vee V(x)\vee T(f(x))$,

$D_2=\neg P(x)\vee V(x)\vee Q(x,f(x))$,

$D_3=P(c)$,

$D_4=K(c)$,

$D_5=\neg Q(c,y)\vee K(y)$,

$D_6=\neg K(x)\vee\neg V(x)$,

$D_7=\neg T(x)\vee\neg K(x)$.

Для доказательства противоречия $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\neg\Phi_4\models$ продолжим эту последовательность дизъюнктов до резолютивного вывода нуля 0:

$$D_8=\mathrm{res}(D_4,D_6)=\mathrm{res}(K(c),\begin{pmatrix}x\\c\end{pmatrix}(\neg K(x)\vee\neg V(x)))=\neg V(c);$$

$$D_9=\mathrm{res}(D_1,D_3)=\mathrm{res}(\begin{pmatrix}x\\c\end{pmatrix}(\neg P(x)\vee V(x)\vee T(f(x))),P(c))=V(c)\vee T(f(c));$$

$$D_{10}=\mathrm{res}(D_8,D_9)=T(f(c));$$

$$D_{11}=\mathrm{res}(D_2,D_3)=\mathrm{res}(\begin{pmatrix}x\\c\end{pmatrix}(\neg P(x)\vee V(x)\vee Q(x,f(x))),P(c))=V(c)\vee Q(c,f(c));$$

$$D_{12}=\mathrm{res}(D_8,D_{11})=Q(c,f(c));$$

$$D_{13}=\mathrm{res}(D_5,D_{12})=\mathrm{res}(\begin{pmatrix}y\\f(c)\end{pmatrix}(\neg Q(c,y)\vee K(y)),Q(c,f(c)))=K(f(c));$$

$$D_{14}=\mathrm{res}(D_7,D_{13})=\mathrm{res}(\begin{pmatrix}x\\f(c)\end{pmatrix}(\neg T(x)\vee\neg K(x)),K(f(c)))=\neg T(f(c));$$

$$D_{15}=\mathrm{res}(D_{10},D_{14})=0.$$

В силу полученного резолютивного вывода нуля 0 из множества дизъюнктов $D_1,...,D_7$ множество универсальных замыканий этих дизъюнктов невыполнимо и, значит, множество формул $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \neg\Phi_4$ противоречиво, т.е. выполняется логическое следование $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \models \Phi_4$ в задаче о таможенниках.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы Ф:

1) рассматриваем формулу $\Psi = \neg\Phi$ и находим ее ПНФ и ССФ

$$\Psi = (\forall x_i) \dots (D_1 \wedge \dots \wedge D_m);$$

2) ищем резолютивный вывод значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$;

3) если такой вывод существует, то выполняется $\models \Phi$.

Пример 3. Методом резолюций докажем тождественную истинность формулы

$$\Phi = \big((\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)R(x)\big) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \Rightarrow R(x)).$$

Условие $\models \Phi$ равносильно $\neg\Phi \models$. Для формулы $\Psi = \neg\Phi$ найдем ПНФ и ССФ.

$$\Psi = \neg\Big(\big((\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)R(x)\big) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \Rightarrow R(x))\Big) =$$

$$= \neg\big(\neg(\neg(\exists x)P(x) \vee (\forall x)R(x)) \vee (\forall x)(\neg P(x) \vee R(x))\big) =$$

$$= (\neg(\exists x)P(x) \vee (\forall x)R(x)) \wedge \neg(\forall x)(\neg P(x) \vee R(x)) =$$

$$= \big((\forall x)\neg P(x) \vee (\forall x)R(x)\big) \wedge (\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x)) =$$

$$= \big((\forall x)\neg P(x) \vee (\forall y)R(y)\big) \wedge (\exists z)(P(z) \wedge \neg R(z)) =$$

$$= (\forall x)(\forall y)(\exists z)\big((\neg P(x) \vee R(y)) \wedge P(z) \wedge \neg R(z)\big) -$$

получили ПНФ формулы Ψ.

Для получения ССФ формулы Ψ в ПНФ необходимо удалить квантор существования $(\exists z)$ с заменой переменной z термом $z = f(x, y)$ с новым функциональным символом f. В результате получаем следующую ССФ формулы Ψ

$$(\forall x)(\forall y)\big((\neg P(x) \vee R(y)) \wedge P(f(x, y)) \wedge \neg R(f(x, y))\big).$$

Для доказательства невыполнимости этой формулы достаточно доказать противоречивость множества дизъюнктов ее конъюнктивного ядра

$$S = \{\ \neg P(x) \vee R(y), \qquad P(f(x, y)),\ \ \neg R\big(f(x, y)\big)\ \}.$$

Построим резолютивный вывод формулы 0 из множества дизъюнктов S:

$\Phi_1 = \neg P(x) \vee R(y)$,

$\Phi_2 = P(f(x, y))$,

$$\Phi_3 = \mathrm{res}(\Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{res}(\neg P(x) \vee R(y), P(f(x, y))) =$$

$$= \mathrm{res}\big(\theta\big(\neg P(x) \vee R(y)\big), P(f(x_1, y_1))\big) =$$

$$= \mathrm{res}(\neg P(x) \vee R(y), P(f(x_1, y_1))) =$$

$$= \mathrm{res}\big(\neg P\big(f(x_1, y_1)\big) \vee R(y), P(f(x_1, y_1))\big) = R(y),$$

где $\theta = \binom{x}{f(x_1, y_1)}$,

$\Phi_4 = \neg R\big(f(x,y)\big),$

$$\Phi_5 = \operatorname{res}(\Phi_3, \Phi_4) = \operatorname{res}\Big(R(y), \neg R\big(f(x,y)\big)\Big) =$$

$$= \operatorname{res}\Big(R(y_1), \neg R\big(f(x,y)\big)\Big) =$$

$$= \operatorname{res}\Big(\theta\big(R(y_1)\big), \neg R\big(f(x,y)\big)\Big) =$$

$$= \operatorname{res}\Big(R\big(f(x,y)\big), \neg R\big(f(x,y)\big)\Big) = 0,$$

где $\theta = \binom{y_1}{f(x,y)}$.

Значит, по основной теореме метода резолюций множество дизъюнктов S противоречиво и, следовательно, формула Ф тождественно истинная.

Домашнее задание

Задача 1. Найти унификатор для следующих пар атомарных формул и проверить результат унификации:

1) $P\big(f(x,y),z,h(z,y)\big)$, $P\big(f(y,x),g(y),v\big)$;

2) $R(x, g(y,a,x))$, $R(f(y), g(h(a),u,x))$.

Задача 2. Методом резолюций доказать противоречивость следующего множества дизъюнктов: $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\}$, где

$D_1 = E(x) \vee V(y) \vee C(f(x))$, $D_2 = E(x) \vee S(x, f(x))$, $D_3 = \neg E(a)$, $D_4 = P(a)$, $D_5 = P(f(x)) \vee \neg S(y,x)$, $D_6 = \neg P(x) \vee \neg V(g(x)) \vee \neg V(y)$, $D_7 = \neg P(x) \vee \neg C(y)$.

Задача 3. Методом резолюций обосновать тождественную истинность формулы:

$$\big((\forall x)P(x) \vee R(y)\big) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee R(y)).$$

Доказательство логического следования методом резолюций

Так как условие $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$ равносильно $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \neg\Phi \vDash$, $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi \vDash$, то с помощью основной теоремы метода резолюций получаем следующий

<u>Алгоритм проверки логического следования $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$:</u>

2) рассматриваем формулу $\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ и находим ее ПНФ и ССФ

$$\Psi = (\forall x_i) \dots (D_1 \wedge \dots \wedge D_m);$$

2) ищем резолютивный вывод значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$;

3) если такой вывод существует, то выполняется логическое следование $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$.