Теорема Кронекера—Капелли. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.*

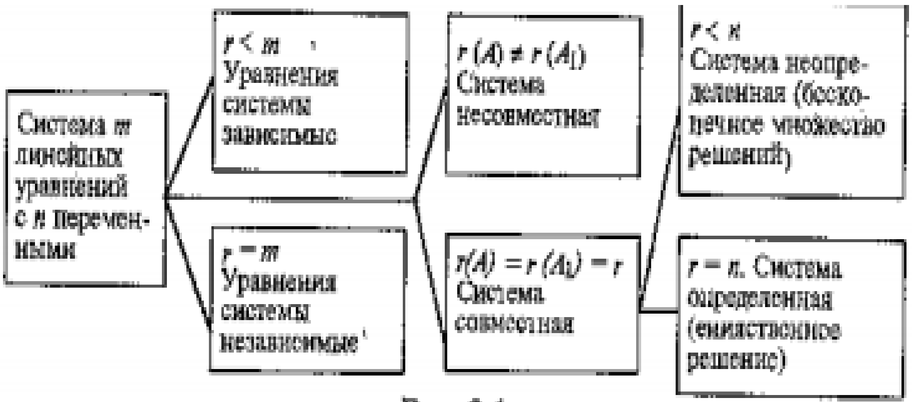

Рис. 2.1

2.5. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Система m линейных уравнений с n переменными называется системой линейных *однородных* уравнений, если все их свободные члены равны нулю. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots \ a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (2.12)$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение (0; 0; ...; 0).

Если в системе (2.12) $m = n$, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение, как это следует из теоремы и формул Крамера. Ненулевые решения, следовательно, возможны лишь для таких систем линейных однородных уравнений, в которых число уравнений меньше числа переменных или при их равенстве, когда определитель системы равен нулю.

Иначе: *система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных, т.е. при $r(A) < n$.*

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами:

1. *Если строка* $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ *— решение системы* (2.12), то и строка $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \dots, \lambda k_n)$ *— также решение этой системы.*

2. *Если строки* $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ и $e_2 = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ *— решения системы* (2.12), *то при любых* c_1 и c_2 *их линейная комбинация* $c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1 k_1 + c_2 l_1, c_1 k_2 + c_2 l_2, + \dots, c_1 k_n + c_2 l_n)$ *— также решение данной системы.*

Из сформулированных свойств следует, что *всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.* Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (2.12), через которые линейно выражались бы все остальные ее решения.

Определение. *Система линейно независимых решений* $e_1, e_2, \dots, e_k$ *называется* ***фундаментальной,*** *если каждое решение системы* (2.12) *является линейной комбинацией решений* $e_1, e_2, \dots, e_k$.

Теорема. *Если ранг* r *матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений* (2.12) *меньше числа переменных* n, *то всякая фундаментальная система решений системы* (2.12) *состоит из* $n - r$ *решений.*