Практика 3

Предикаты и операции над предикатами

<u>Определение</u>. *Предикатом* называется утверждение, содержащее переменные $x_1,\dots,x_n$, которое превращается в высказывание при замене этих переменных конкретными объектами из некоторой области возможных значений.

Предикат P с n предметными переменными называется *n-арным* или *n-местным предикатом* и обозначается $P(x_1,\dots,x_n)$.

Предикат $P(x_1,\dots,x_n)$ является функцией, которая каждому набору значений $x_1=a_1,\dots,x_n=a_n$ его n предметных переменных $x_1,\dots,x_n$ ставит в соответствие некоторое высказывание $P(a_1,\dots,a_n)$, имеющее определенное истинностное значение $\lambda(P(a_1,\dots,a_n))$. Если отвлечься от содержания высказываний и учитывать только их истинностные значения, то предикат можно рассматривать как функцию со значениями в множестве $\{0,1\}$. Такая функция на множестве возможных значений M полностью определяется *множеством истинности* P^+ - множеством всех таких упорядоченных наборов $(a_1,\dots,a_n)\in M^n$, для которых $P(a_1,\dots,a_n)$ является истинным высказыванием.

$$P^+=\{(a_1,\dots,a_n)\in M^n:\ \lambda(P(a_1,\dots,a_n))=1\}.$$

Для любого множества M допустимых значений предметных переменных предикатов множества истинности предикатов P,Q взаимосвязаны с логическими операциями по следующим формулам:

$$(\neg P)^+ = M^n \setminus P^+,\ (P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+,\ (P \vee Q)^+ = P^+ \cup Q^+,$$

$$(P \Rightarrow Q)^+ = (\neg P)^+ \cup Q^+,\ (P \Leftrightarrow Q)^+ = (P \Rightarrow Q)^+ \cap (Q \Rightarrow P)^+.$$

Пример 1. Если предикат $P(x)$ выражается равенством $(x^2-1)(x+\sqrt{2})(x-1{,}5)=0,$ то множество истинности этого предиката над множеством $\boldsymbol{N}$ состоит из одного элемента 1; над множеством $\boldsymbol{Z}$ – из двух элементов $-1{,}1$; над множеством Q – из трех элементов $-1{,}1$ и 1,5; над множеством $\boldsymbol{R}$ – из четырех элементов $-1{,}1,-\sqrt{2}$ и 1,5.

Задача 1. **Изобразите на координатной прямой множества истинности следующих заданных на R одноместных предикатов:**

а) $x < 3$;
б) $|x| = 4$;
в) $|x| < 2$;
г) $|x| > 2$;
д) $|x-4| \geqslant 1$;
е) $|x+3| < 2$;
ж) $x^2 + 6x - 16 \leqslant 0$;
з) $x^2 \geqslant 0$;
и) $|x-1| \leqslant |2x+4|$;
к) $|3x-1| + |2x+4| \geqslant 3$;
л) $|x+2| < 5$.

Задача 2. **Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих двухместных предикатов, заданных на множестве действительных чисел R:**

а) $x = y$;
б) $|x| = |y|$;
в) $x^2 + y^2 = 9$;
г) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 14 = 0$;
д) $x^2 \leqslant y$;
е) $y = 1/x$;
ж) $x + 3y < 6$;
з) $(x^2 - y^2)/(x + y) = x - y$;
и) $xy = 0$;
к) $y = \lg(x+1)$;
л) $x^2 = y^2$.

Задача 3. На множестве вещественных чисел R найти множества истинности предикатов $P \wedge Q,\ P \Rightarrow Q,\ P \Leftrightarrow Q$, где

$P(x) = (x \geq 1)$ и $Q(x) = (|x-1| \leq 1)$.

Решение.

$$P^+ = [1; +\infty) \text{ и } Q^+ = [0; 2].$$

$$(P \wedge Q)^+ = [1; 2],$$
$$(P \Longrightarrow Q)^+ = (-\infty; 1) \cup [0; 2] = (-\infty; 2],$$
$$(P \Leftrightarrow Q)^+ = [1; 2] \cup (-\infty; 0).$$

Пример 2. На множестве вещественных чисел $\boldsymbol{R}$ найти множества истинности предикатов $P \wedge Q$ и $P \vee Q$, где

$$P(x, y) = (y - x \geq 0) \text{ и } Q(x, y) = (x + y \geq 0).$$

Решение. Множества истинности предикатов $P \wedge Q$ и $P \vee Q$ взаимосвязаны с множествами истинности предикатов P, Q по следующим формулам: $(P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+$ и $(P \vee Q)^+ = P^+ \cup Q^+$.

Обозначим множества истинности данных предикатов

$$P^+ = X = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : y - x \geq 0\} \text{ и}$$

$$Q^+ = Y = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : x + y \geq 0\}.$$

Построим на координатной плоскости эти множества и найдем их пересечение $X \cap Y$ и объединение $X \cup Y$.

Для построения множества решений неравенства $y - x \geq 0$ рассмотрим уравнение $y - x = 0$, которое определяет на числовой плоскости линию, разбивающую эту плоскость на две области знакопостоянства выражения $y - x$. В данном случае эта линия является прямой – биссектрисой 1-го и 3-го координатных углов, которая разбивает плоскость на две полуплоскости (см. рис.1).

Возьмем произвольную точку в верхней полуплоскости, например, точку $M(0;1)$ и определим в ней знак выражения $y-x$: $1-0=1>0$. Так как в точке M выполняется $y-x>0$, то выражение $y-x$ будет положительно во всей верхней полуплоскости. По аналогии нетрудно проверить, что в нижней полуплоскости выражение $y-x$ будет отрицательно. Таким образом, множество X изображается на рис.1 заштрихованной областью.

Для построения множества решений неравенства $x+y\geq 0$ рассмотрим уравнение $x+y=0$, которое определяет на числовой плоскости прямую – биссектрису 2-го и 4-го координатных углов. Эта линия разбивает плоскость на две полуплоскости (см. рис.2) – области знакопостоянства выражения $x+y$.

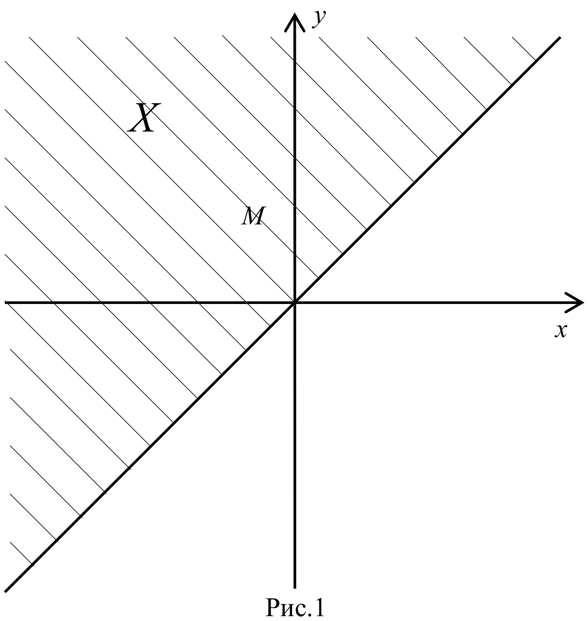

Рис.1

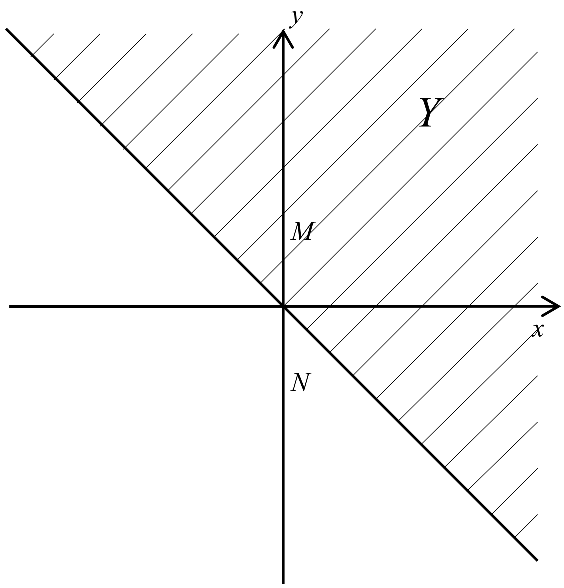

Рис.2

С помощью пробных точек (например, $M(0;1)$ – в верхней полуплоскости и $N(0;-1)$ – в нижней полуплоскости) убеждаемся, что выражение $x+y$ в верхней полуплоскости положительно и в нижней полуплоскости отрицательно. Значит, множество Y изображается на рис.2 заштрихованной областью.

Тогда пересечение $X \cap Y$ и объединение $X \cup Y$ изображаются заштрихованными областями на рис.3,4.

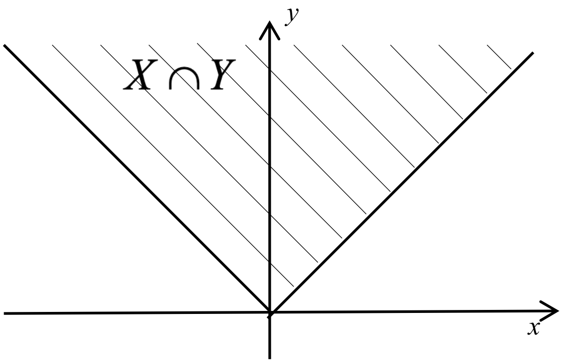

Рис.3

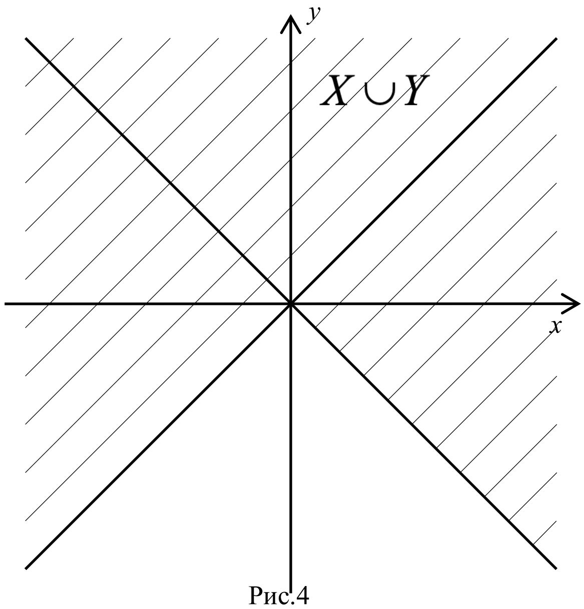

Рис.4

Формулы алгебры предикатов

Пример 3**.** Введем необходимые предикаты и построим формулу алгебры предикатов, выражающую следующее утверждение:

$A =$ «Хотя бы один предмет, лежащий ниже всех белых квадратов, является черным шаром».

Из формулировки утверждения видно, что нам понадобятся следующие предикаты:

$B(x) -$ «x – черный предмет»,

$C(x) -$ «x – квадрат»,

$S(x) -$ «x – шар»,

$U(x, y)$ - «объект x лежит ниже объекта y »,

$W(x) -$ «x – белый предмет»,

Переформулируем это утверждение так, чтобы были видны предметные переменные и логические операции над соответствующими предикатами:

A = «Найдется предмет x, который является черным шаром и лежит ниже всех белых квадратов y».

Выразим формулами алгебры предикатов отдельные части утверждения A:

- утверждение «найдется предмет x» выражается формулой $(\exists x)$,
- «x является черным шаром» выражается формулой $B(x) \wedge S(x)$,
- «y является белым квадратом» выражается формулой $W(y) \wedge C(y)$,
- «x лежит ниже всех белых квадратов y» выражается формулой с ограниченным квантором общности $\big(\forall W(y) \wedge C(y)\big)(U(x,y))$, что по определению такого квантора равносильно формуле

$$(\forall y)(W(y) \wedge C(y) \Rightarrow U(x,y)).$$

Таким образом, утверждение A выражается формулой алгебры предикатов:

$$A = (\exists x)\big(B(x) \wedge S(x) \wedge (\forall y)(W(y) \wedge C(y) \Rightarrow U(x,y))\big).$$

Заметим, что с помощью предикатов $P(x) = B(x) \wedge S(x) -$ «x – черный шар» $Q(y) = W(y) \wedge C(y) -$ «y – белый квадрат» утверждение A можно выразить формулой с ограниченными кванторами существования и общности

$$A = (\exists P(x))(\forall Q(y))(U(x,y)),$$

что по определению таких кванторов равносильно формуле

$$A = (\exists x)\big(P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \Rightarrow U(x,y))\big).$$

Домашнее задание

Задача 1. На множестве вещественных чисел $\boldsymbol{R}$ найти множества истинности предикатов $P \wedge Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$, где

$P(x,y) = (x + y \leq 2)$ и $Q(x,y) = (|x - y| \geq 1)$.

Задача 2. Ввести необходимые предикаты и построить формулу алгебры предикатов, выражающую следующие утверждения:

1) «Каков бы ни был белый шар, не лежащий над некоторым черным квадратом, ниже его найдется белый квадрат»,
2) «Найдется белый квадрат, который лежит под некоторым черным шаром и ниже которого находятся все белые шары».