ФИЗИКА

Лекция 6

Законы сохранения в механике

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Равновесное состояние ФС

Равновесное состояние – это такое состояние ФС, которое при неизменных внешних условиях (внешних параметрах) может продолжаться сколь угодно долго.

З-н сохранения импульса

Однородность пространства означает, что свойства пространства одинаковы во всех точках: если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, то это не отразится на ходе физических процессов.

З-н сохранения момента импульса

Изотропность пространства означает, что свойства пространства в каждой точке одинаковы во всех направлениях: физические процессы не изменяются при повороте замкнутой системы в пространстве на любой угол.

З-н сохранения энергии

Однородность времени означает, что протекание физических явлений (в одних и тех же условиях) в разное время их наблюдения одинаково. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят от начальной скорости и продолжительности свободного падения и не зависят от того, когда тело станет падать.

Свойства законов сохранения

Определение условий постоянства ограниченного числа внутренних параметров системы составляет суть законов сохранения.

При этом замкнутость системы является **необходимым** условием выполнения законов сохранения.

Реальных *замкнутых систем не существует*, то законы сохранения могут быть сформулированы для их физических моделей.

В основу законов сохранения положены достоверные экспериментальные факты и уравнения состояния ФС.

Свойства законов сохранения

1. Законы сохранения позволяют рассмотреть общие свойства (движение) ФС без изучения детального развития процессов во времени. В математической модели это соответствует изучению изменения МС путём нахождения первых интегралов уравнений движения.
2. Обладают наибольшей общностью. Применимы и при исследовании других систем (не только МС). Большинство ЗС относятся к фундаментальным законам естествознания.
3. Могут применяться для анализа систем, в которых нахождение действующих сил затруднено или не известно (ядерные силы).

Закон сохранения импульса

1. *Постановка задачи*.

Пусть имеем механическую систему из n тел, массы которых m_{i0}, скорости v_i.

Общие параметры такой системы были введены в динамике:

a) Импульс системы $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_{0i}\vec{\upsilon}_i$

b) Момент импульса системы $\overrightarrow{N} = \sum \left[\vec{r}_i \cdot m_{0i}\overrightarrow{\upsilon_i}\right]$

c) Момент сил системы $\vec{M} = \sum \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\right]$

d) Центр масс системы $\vec{r}_{ц.м.} = \dfrac{1}{M}\sum m_{0i}\vec{r}_i$

e) Уравнение движения центра масс $M\dfrac{d\vec{\upsilon}_{ц.м.}}{dt} = \vec{F}$

f) Вращательное движение системы $\vec{M} = \dfrac{d\overrightarrow{N}}{dt}$

Закон сохранения импульса

2. *Модели систем.*

Пусть тела точечные, система замкнутая, ур-е состояния

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i}_{\vec{p}}\right)=\vec{F} \qquad d\vec{p}=\vec{F}dt=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{внутр}dt+\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{внеш}dt$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iвнутр}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ik}=0$$ По 3 з-ну Ньютона

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d(m_i\vec{\upsilon}_i)}{dt}=\vec{F}_{внеш}, \qquad m_i=const.$$

$$\vec{F}_{внеш}=0\Rightarrow\frac{d\vec{p}}{dt}=0\Rightarrow\vec{p}=const$$

для замкнутой системы импульс не изменяется

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Закон сохранения импульса

Особенности закона сохранения импульса:

1. Этот закон носит векторный характер.

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k},$$

Заметим, что импульс каждого тела (точки) может меняться, но импульс системы при этом остаётся неизменным и по величине и по направлению.

2. Этот закон справедлив для внутренних сил любой природы: консервативных или нет.

3. Для незамкнутых систем выполняется $d\vec{p} = \vec{F}dt$

3.1. Закон сохранения и изменения импульса справедлив и в проекциях на оси координат:

$$p_x = const, p_y = const, p_z = const$$

3.2. Если в незамкнутой системе существует направление, на которое проекции внешних сил равны 0, то система считается замкнутой по этому направлению.

Закон сохранения момента импульса

Постановка задачи. Исследуем ту же систему тел и её модель. Рассмотрим сложное движение системы как совокупность поступательного и вращательного движений (по Эйлеру)

Прямолинейное равномерное движение. Импульс любой точки системы постоянен и по величине и направлению, но радиус-вектор меняется и по величине и по направлению, тогда $d\vec{N} = d\left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right]$

Модуль вектора момента импульса ,но $N = m\upsilon r(t)\underbrace{\sin\alpha(t)}_{=const}$

$$\Rightarrow N = const$$

Т.о. в независимости от изменения радиуса-вектора ***момент импульса*** **остается** ***постоянным*** пока действующий **момент силы =0**.

Закон сохранения момента импульса

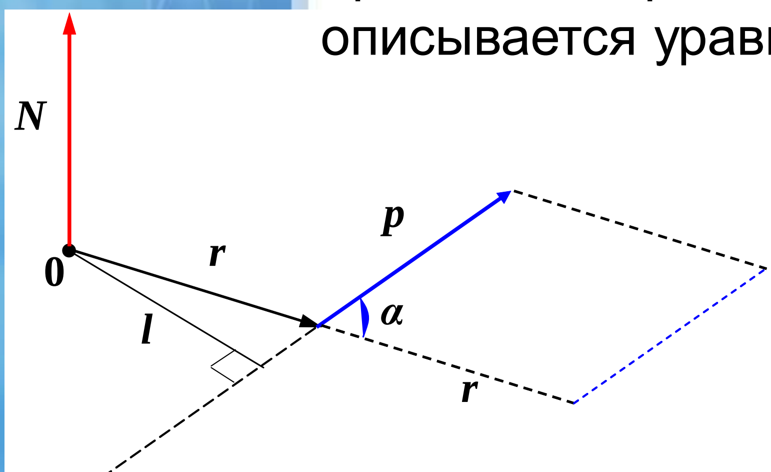
Постановка задачи.

Равномерное движение по окружности – Для замкнутой системы доказали выполнение закона сохранения **импульса**.

Пусть система вращается с постоянной скоростью, но изменяется направление импульса и направление радиуса-вектора.

Уравнение вращательного движения любой точки системы описывается уравнением моментов:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}$$



$$\vec{N} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = [\vec{r} \cdot m\vec{\upsilon}]$$

$$|\vec{N}| = |\vec{r}||\vec{p}| \cdot \sin\alpha = const \quad \Rightarrow N = const$$

$$|\vec{r}| \cdot \sin\alpha = l - плечо \quad импульса.$$

Закон сохранения момента импульса

Особенности закона сохранения момента импульса:

1. Силы не меняют момент импульса
2. Если система не замкнута, но существует ось, относительно которой сумма моментов сил равна нулю, то момент импульса системы, относительно этой же оси, остаётся постоянным. $\vec{N} = const, \sum \vec{M} = 0$
3. Этот закон справедлив для внутренних сил любой природы: консервативных или нет.
4. Для незамкнутых систем выполняется

   4.1. Закон сохранения и изменения момента импульса справедлив и в проекциях на оси координат:

$$\frac{dN_x}{dt} = M_x, \frac{dN_y}{dt} = M_y, \frac{dN_z}{dt} = M_z.$$

   4.2. Если в незамкнутой системе существует направление, на которое проекции внешних сил равны 0, то система считается замкнутой по этому направлению.

Закон сохранения энергии

Постановка задачи. Пусть МС представляет собой некоторое *потенциальное поле и материальные тела*, на которые действуют силы поля.

Общие параметры такой системы добавляются работой и энергией.

$$E = E_к + E_п$$ полная механическая энергия системы

$$dA = dE_к$$ совершается работа, идущая на увеличение $E_к$.

$$dA = F \cdot dx = -dE_п$$ связь силы и потенциальной энергии

$$F = -\frac{dE_п}{dx}$$ консервативные силы потенциального поля

$$d\left(E_к + E_p\right) = d\left(A - A\right) = 0 \Rightarrow dE = 0 \Rightarrow E = const$$

Полная механическая энергия материальной точки (тела, частицы), находящейся в потенциальном поле (в консервативной системе), есть величина постоянная, т.е. с течением времени не меняется.

Закон сохранения энергии

Пример 1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек массой m_i, движущихся со скоростями v_i. Второй закон Ньютона для i точки:

$$m_i \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \vec{F}_{i\ конс}^{\,внутр} + \vec{F}_{i\ конс}^{\,внеш} + \vec{F}_{i\ неконс}^{\,внеш}$$

Под действием силы точка за время dt совершает перемещение dr_i:

$$m_i d\vec{\upsilon}_i \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{\upsilon}_i} = \left(\vec{F}_{i\ конс}^{\,внутр} + \vec{F}_{i\ конс}^{\,внеш} + \vec{F}_{i\ неконс}^{\,внеш}\right) d\vec{r}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i\left(\vec{\upsilon}_i d\vec{\upsilon}_i\right)}_{m_i \frac{d\upsilon_i^2}{2} = d\left(\frac{m_i \upsilon_i^2}{2}\right)} - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\vec{F}_{i\ конс}^{\,внутр} + \vec{F}_{i\ конс}^{\,внеш}\right) d\vec{r}_i}_{\substack{работа\ конс-х\ сил \\ dA_{конс} = -dE_p}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\vec{F}_{i\ неконс}^{\,внеш} d\vec{r}_i}_{\substack{работа\ внеш. \\ неконс-х\ сил}} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{m_i \upsilon_i^2}{2}\right) = dE_к$$

$$d\underbrace{\left(E_к + E_p\right)}_{\substack{изменение\ полной \\ мех.\ энергии\ сист.}} = dA$$

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Закон сохранения энергии

Пример 1. При переходе системы из одного состояния в другое:

$$\int_1^2 d\underbrace{\left(E_к + E_p\right)}_{E} = A_{12}$$

работа, совершаемая внешними неконсервативными силами

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, т.е.

$$A_{12} = 0 \Rightarrow dE = 0 \Rightarrow \boxed{E = const}$$

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени*, т.е. физические законы инвариантны относительно начала отсчета времени.

Пример 2. Замкнутая система, внешние силы не рассматриваются, т.е.

$$F_{внеш} = 0 \Rightarrow E = const$$

Происходит превращение $E_п \to E_к$, и обратно $E_к \to E_п$ сумма всех видов энергии в замкнутой системе постоянна

$$\sum E_i = const$$

Применение законов сохранения импульса и энергии

Удар – кратковременное взаимодействие двух или более тел.

Центральный удар (двух шаров) – удар, при котором движение происходит по прямой, соединяющей центры тел.

Сила взаимодействия при ударе тел велика

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} \to \infty; m\frac{d\upsilon}{dt} = F \to \infty$$

Поэтому систему тел в процессе удара можно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тело во время удара претерпевает деформацию. Кинетическая энергия во время удара переходит в энергию деформации.

Если деформация упругая, то тело стремится принять прежнюю форму. Следователь, имеем ***упругий удар***.

Если деформация неупругая, то тело не принимает прежнюю форму – ***неупругий удар***.

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Применение законов сохранения импульса и энергии

В общем случае относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения, т.к. нет идеально упругих тел.

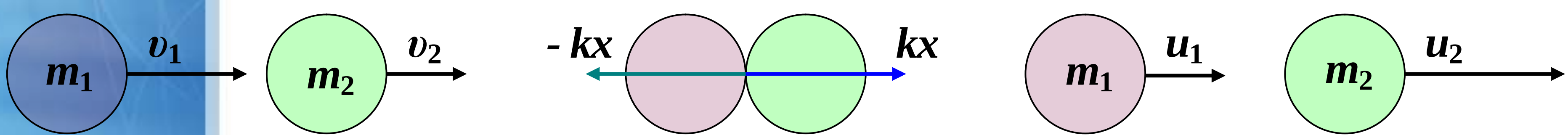
Коэффициент восстановления – отношение нормальных составляющих относительной скорости после удара u_n и до удара v_n:

$$\varepsilon = \frac{u_n}{\upsilon_n}$$

$\varepsilon = 1$ – абсолютно упругий удар

$\varepsilon = 0$ – абсолютно неупругий удар

Пример 1: **Абсолютно упругий удар** – удар, при котором внутренняя энергия соударяющихся тел не изменяется.



Возникает $F_{упр} = -kx$, шары раздвигаются и $E_к$ восстанавливается.

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \qquad \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$$

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Применение законов сохранения импульса и энергии

Пример 1

$$\begin{cases} m_1(\upsilon_1 - u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2) \\ \dfrac{m_1}{2}(\upsilon_1^2 - u_1^2) = \dfrac{m_2}{2}(u_2^2 - \upsilon_2^2) \end{cases} \Rightarrow \upsilon_1 + u_1 = u_2 + \upsilon_2 \Rightarrow$$

$$u_2 = \upsilon_1 + u_1 - \upsilon_2$$

$$u_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2} \qquad u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

$$\bullet\ m_2 >> m_1; \upsilon_2 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{\overbrace{2m_2\upsilon_2}^{=0} - m_2\upsilon_1}{m_2} = -\upsilon_1,$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - 0)\overbrace{\upsilon_2}^{0}}{m_2} = 2\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1 \approx 0$$

$$p_2 = m_2 u_2 = 2m_1\upsilon_1.$$

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Применение законов сохранения импульса и энергии

Пример 1

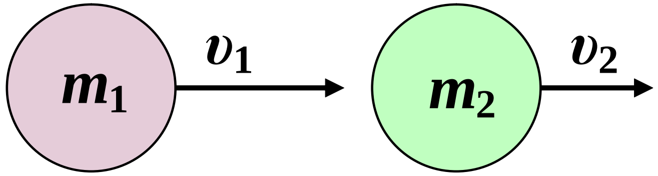
$$\bullet\, m_2 >> m_1; \upsilon_2 < 0 \Rightarrow u_1 = \frac{-2m_2\upsilon_2 - m_2\upsilon_1}{m_2} = -(2\upsilon_2 + \upsilon_1)$$

$$\bullet\, m_2 >> m_1; \upsilon_2 > 0 \Rightarrow u_1 = 2\upsilon_2 - \upsilon_1; \quad u_1 = 0$$

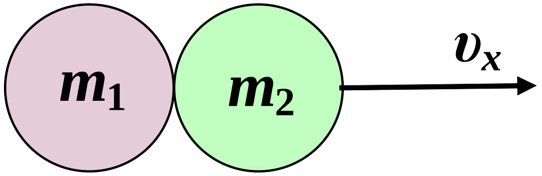
$$\textit{если} \quad \upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2}.$$

$\bullet\, m_2 = m_1 \Rightarrow u_1 = \upsilon_2; u_2 = \upsilon_1.$ При одинаковых массах происходит обмен скоростями

Пример 2: **Абсолютно неупругий удар** – удар, при котором полная механическая энергия соударяющихся тел не сохраняется, частично переходит во внутреннюю энергию; импульс сохраняется



$\upsilon_1 > \upsilon_2$



Применение законов сохранения импульса и энергии

Пример 2

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon_x$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon_x^2}{2} = Q$$

$$v_x = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

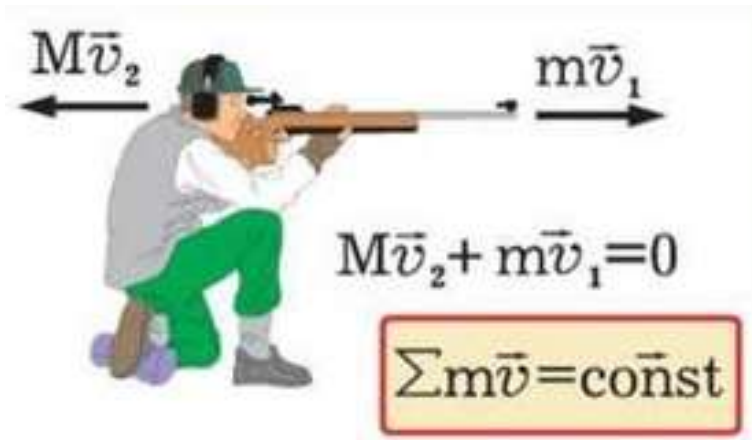
- $m_2 >> m_1; \upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon_x = \dfrac{m_1\upsilon_1 + 0}{0 + m_2} \cong 0$ Наковальня

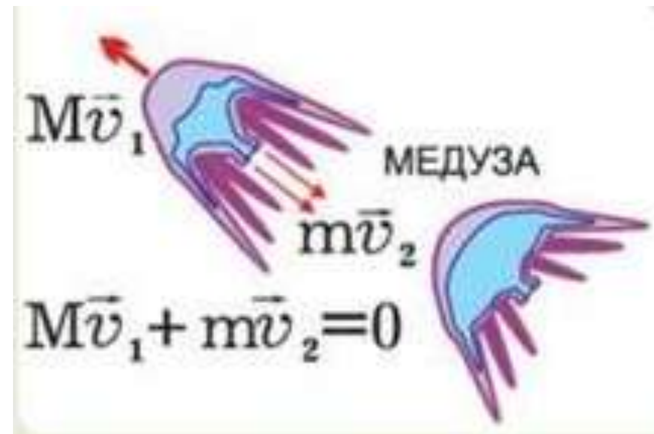
Вся энергия переходит в теплоту или деформацию.

- $m_1 >> m_2; \upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon_x = \upsilon_1$ Удар молотка по гвоздю

Вся энергия переходит в механическую энергию

Спасибо за внимание!





$$\sum \vec{M}_{i\,внеш.} = 0$$

$$\Rightarrow \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \sum \vec{L}_i = \sum I_i \vec{\omega}_i = const$$

Полезные ссылки

1. **Законы сохранения часть 1 (7 опытов)**
   https://www.youtube.com/playlist?list=PL32C81AC7B5EA0E12
2. **Законы сохранения часть 2 (7 опытов)**
   https://www.youtube.com/playlist?list=PLWM8IO-3TQjNWXvjsg3BGeErxGJdoWkUq
3. **Упругие и не упругие соударения (9 опытов)**
   https://www.youtube.com/playlist?list=PLWM8IO-3TQjNCIENKwsbTo1TVUsMk8jzT