СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия и определения

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид[1]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.1)$$

где a_{ij}, $b_i \left(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n\right)$ — произвольные числа, называемые соответственно *коэффициентами при переменных* и *свободными членами* уравнений.

В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \left(i = 1,2,\ldots,m\right). \quad (2.2)$$

Решением системы (2.1) называется такая совокупность n чисел $\left(x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n\right)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. Например, система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ — совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10;0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ — несовместная; а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ — совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее бесконечное множество решений ($x_1 = c$, $x_2 = 10 - 2c$, где c — любое число).

Две системы уравнений называются *равносильными*, или *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений. С помощью элементарных преобразований системы уравнений, рассмотренных в гл.1 применительно к матрицам (например, умножение обеих частей уравнений на числа, не равные нулю; сложение уравнений системы), получается система (2.1), равносильная данной.

Запишем систему (2.1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A — *матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы*, X — *матрица-столбец переменных;* B — *матрица-столбец свободных членов.*

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, то их произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

есть матрица-столбец. Элементами полученной матрицы являются левые части системы (2.1). На основании определения равенства матриц систему (2.1) можно записать в виде:

$$AX=B. \tag{2.3}$$

2.2. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера

Для получения решения системы (2.1) при $m = n$ **в общем виде** предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая *слева* обе части матричного равенства (2.3) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \tag{2.7}$$

Теорема Крамера. *Пусть* Δ *— определитель матрицы системы* A, *а* Δ_j *— определитель матрицы, получаемой из матрицы* A *заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если* $\Delta \neq 0$, *то система имеет единственное решение, определяемое по формулам.*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1,2,\dots,n). \tag{2.8}$$

Формулы (2.8) получили название *формул Крамера*

□ В соответствии с (1.14) обратиая матрица $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$, где $\tilde{A}$ — матрица, присоединенная к матрице A. Так как элементы матрицы $\tilde{A}$ есть алгебраические дополнения элементов матрицы A', транспонированиой к A, то запишем равенство (2.7) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $|A| = \Delta$, получим после умножения матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} \\ \dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{nn} \end{pmatrix},$$ откуда следует, что для любого $j (j = 1, 2, \dots, n)$

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{1j} + \quad b_2A_{2j} + \quad \dots \quad + b_nA_{nj}\right).$$

На основании свойства 9 опредаянтелей (см. § 1.4) $b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj} = \Delta_j$, где Δ_j — определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j-го столбца ($j = 1, 2, \dots, n$) столбцом свободиых членов. Следоватаяьно, $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$. ■

двумя переменными.

▷ **Пример 2.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_1 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Р е ш е н и е. а) Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид: $AX = B$. Найдем определитель $|A| = 5$ (см. пример **1.10**). Так как $|A| \neq 0$, то матрица A — невырожденная, и существует обратная матрица A^{-1}. Матрицу A^{-1} находим по алгоритму, приведенному в §1.5. Получим (см. пример **1.10**):

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$ Теперь по формуле **(2.7)**

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4, 2; 1).

б) Найдем определитель системы $\Delta = |A| = 5$ (см. п. а). Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матрицы A, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

(рекомендуем читателю вычислить самостоятельно).

Теперь по формулам Крамера (2.8)

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

2.3. Метод Гаусса

Рассмотрим решение системы (2.1) m линейных уравнений с n переменными в общем виде.

Метод Гаусса — метод последовательного исключения переменных — заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (2.1) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, ..., m-му уравнению системы (2.1), исключим переменную x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases} \tag{2.9}$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$).

Умножая второе уравнение на подходящие числа $\left(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)},\right.$ $\left.-a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \ldots, -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}\right)$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, ..., m-му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных $x_3, x_4, \ldots, x_{r-1}$, после $(r-1)$-го шага получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \qquad \textbf{(2.10)}$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n$. *Если хотя бы одно из чисел* $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ *не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система* (2.1) *несовместна.*

Таким образом, для любой *совместной системы числа* $b_{r+1}^{(r-1)}$, ..., $b_m^{(r-1)}$ *в системе* (2.10) *равны нулю.* В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе (2.10) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (2.1). Очевидно, что после отбрасывания "лишних" уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (2.10) равно числу переменных, т.е. $r = n$ (в этом случае система (2.10) имеет треугольный вид); б) $r < n$ (в этом случае система (2.10) имеет ступенчатый вид).

Переход системы (2.1) к равносильной ей системе (2.10) называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (2.10) — *обратным ходом.*

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right), \qquad \textbf{(2.11)}$$

называемую *расширенной матрицей системы* (2.1), ибо в нее, кроме матрицы системы A, дополнительно включен столбец свободных членов.

▷**Пример 2.2.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 - & 2x_4 = & 6, \\ 2x_1 + & 4x_2 - & 2x_2 - & 3x_4 = & 18, \\ 3x_1 + & 2x_2 - & x_3 + & 2x_4 = & 4, \\ 2x_1 - & 3x_2 + & 2x_3 + & x_4 = & -8. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица системы имеет вид.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} \neq 0$, то умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2), (-3), (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, то умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{117}{16} & \dfrac{117}{8} \end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на 13,5/8=27/16, и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ \quad\quad -8x_3 + x_4 = 6, \\ \quad\quad\quad -\dfrac{117}{16}x_4 = \dfrac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \dfrac{6 - x_4}{-8} = \dfrac{6+2}{-8} = -1$; из второго $x_2 = \dfrac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \dfrac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + 2(-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы (1; 2; −1; 2). ▶

▷**Пример 2.3.** Методом Гаусса решить систему уравнения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво — оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.▶