Практика 2

Логическое следование формул

Логическое следование формул есть отношение между конечными множествами формул и отдельно взятыми формулами, в основе которого лежит сравнение значений истинностных функций данных формул. С помощью этого понятия определяются общие способы доказательства взаимосвязи между истинностными значениями высказываний посредством исследования формальной структуры высказываний.

Определение. Формула Φ называется *логическим следствием формул* $\Phi_1, \dots, \Phi_m$, если при любой подстановке в эти формулы вместо их переменных $X_1, \dots, X_n$ конкретных высказываний $A_1, \dots, A_n$ из истинности высказываний $\Phi_1(A_1, \dots, A_n), \dots, \Phi_m(A_1, \dots, A_n)$ следует истинность высказывания $\Phi(A_1, \dots, A_n)$. Такое логическое следствие формул символически обозначается $\Phi_1, \dots, \Phi_m \vDash \Phi$ и называется *логическим следованием*. При этом формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ называются *посылками*, а формула Φ – *следствием* логического следования $\Phi_1, \dots, \Phi_m \vDash \Phi$.

Задачи

1. Пользуясь определением логического следствия, выясните, справедливо ли следующее логическое следование: $X \wedge Y, Y \Rightarrow \neg Z \vDash \neg Y$.

Решение. Построим истинностные таблицы для формул

$\Phi_1 = X \wedge Y, \Phi_2 = Y \Rightarrow \neg Z$ и $\Phi = \neg Y$ (табл. 14—16).

Таблица 14

X	Y	Z	Φ_1
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Таблица 15

X	Y	Z	$\neg Z$	Φ_2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Таблица 16

X	Y	Z	Φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Из построенных таблиц видно, что формула $\neg Y$ не является логическим следствием формул $X \wedge Y, Y \Rightarrow \neg Z$, так как, например, при значениях $X = 1, Y = 1, Z = 0$ формулы $\Phi_1 = X \wedge Y$, $\Phi_2 = Y \Rightarrow \neg Z$ в 7-й строке табл. 14,15 имеют логическое значение 1, а формула $\Phi = \neg Y$ в 7-й табл. 16 имеет значение 0.

2. Выясните, справедливо ли следующее логическое следование:

$$F \Rightarrow G,\ \ K \Rightarrow \neg H,\ \ H \vee \neg G \ \ \vDash\ F \Rightarrow \neg K.$$

Решение. Справедливость данного логического следования покажем методом доказательства от противного. Допустим, что данное логическое следование не выполняется, т.е. существуют такие истинностные значения пропозициональных переменных $F, G, K, H,$ при которых истинностные значения формул-посылок равны 1, а истинностное значение формулы-следствия равно 0, т.е. выполняются равенства:

1) $\lambda(F \Rightarrow G) = 1;$

2) $\lambda(K \Rightarrow \neg H) = 1$;

3) $\lambda(H \vee \neg G) = 1$;

4) $\lambda(F \Rightarrow \neg K) = 0$.

Тогда по определению операции импликации (см. табл. 4) из условия 4) следует, что $\lambda(F) = 1$ и $\lambda(\neg K) = 0$, значит $\lambda(K) = 1$. Из условия 1) в силу $\lambda(F) = 1$ по определению операции импликации (см. табл. 4) следует, что $\lambda(G) = 1$, а значит, $\lambda(\neg G) = 0$. Далее из условия 3) в силу $\lambda(\neg G) = 0$ по определению операции дизъюнкции (см. табл. 3) следует, что $\lambda(H) = 1$, а значит, $\lambda(\neg H) = 0$. Наконец, из условия 2) в силу $\lambda(\neg H) = 0$ по определению операции импликации (см. табл. 4) следует, что $\lambda(K) = 0$. Пришли к противоречию с ранее полученным условием $\lambda(K) = 1$. Следовательно, при любой подстановке в рассматриваемые формулы вместо их переменных конкретных высказываний формула $F \Rightarrow \neg K$ не может превращаться в ложное высказывание, если все формулы $F \Rightarrow G,\ K \Rightarrow \neg H,\ H \vee \neg G$ превратились в истинные высказывания. Это означает, что рассматриваемое логическое следование верно.

Определение. Множество формул $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ называется *противоречивым*, если при любой подстановке в формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ вместо их переменных конкретных высказываний хотя бы одна из данных формул превращается в ложное высказывание. Это равносильно тому, что из множества формул $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула Φ.

Поэтому противоречивость множества формул $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ символически обозначается $\Phi_1, \dots, \Phi_m \vDash$ и называется *логическим противоречием*.

ЛЕММА (критерии логического следования). Условие логического следования $\Phi_1, \dots, \Phi_m \vDash \Phi$ равносильно каждому из следующих условий:

1) $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_m \vDash \Phi$;

2) $\vDash \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$;

3) $\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg\Phi \vDash$.

В частности, $\Phi \vDash \Psi$ равносильно $\vDash \Phi \Rightarrow \Psi$. Отсюда также следует, что $\Phi = \Psi$ равносильно тому, что $\Phi \vDash \Psi$ и $\Psi \vDash \Phi$.

Задания для самостоятельной работы

Задача 4. Для следующих формул выясните, будет ли какая-либо из них логическим следствием другой:

1) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z), \quad (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$;

2) $(X \vee Z) \Leftrightarrow Y, \quad (X \vee Y) \Leftrightarrow Z$;

3) $(X \wedge Y) \Rightarrow Z, \quad X \vee (Y \Rightarrow Z)$;

4) $X \vee (Y \Rightarrow Z), \quad (X \vee Y) \Leftrightarrow Z$;

5) $(X \wedge Y) \Rightarrow Z, \quad (X \Rightarrow Y) \vee Z$.

Задача 5. Методом от противного выясните, верны ли следующие логические следования:

1) $F \Rightarrow G,\ K \Rightarrow L,\ F \vee K \ \vDash\ G \vee L$;

2) $F \Rightarrow G,\ ((F \vee L) \wedge H) \Rightarrow M,\ L \Rightarrow H \ \vDash\ ((F \vee L) \wedge G) \Rightarrow \neg M$;

3) $(F \wedge G) \Rightarrow H,\ (H \wedge K) \Rightarrow L,\ \neg M \Rightarrow (K \wedge L) \ \vDash\ (F \wedge G) \Rightarrow M$;

4) $F \Rightarrow (G \Rightarrow H),\ (H \wedge K) \Rightarrow L,\ \neg M \Rightarrow (K \wedge L) \ \vDash\ F \Rightarrow (G \Rightarrow M)$;

$(F \Rightarrow G) \wedge (H \Rightarrow K),\ (G \Rightarrow L) \wedge (K \Rightarrow M),\ \neg(\mathrm{L} \wedge M),\ F \Rightarrow H \ \vDash \neg F$.

Методы проверки тождественной истинности формул

Рассмотрим основные методы, которые используются при исследовании формулы $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ на тождественную истинность.

1. *Прямой метод* составления истинностной таблицы формулы $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ является довольно громоздкой, но всегда выполнимой процедурой вычисления значений истинностной функции $F_\Phi(k_1,\dots,k_n)$ для 2^n упорядоченных наборов $(k_1,\dots,k_n)$ n элементов $k_1,\dots,k_n$ множества $\{0,1\}$.

2. *Алгебраический метод* преобразования формулы $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ с помощью равносильных преобразований в тождественно истинную формулу 1.

Задача. С помощью равносильных преобразований выясните, является ли тождественно истинной формула

$$\Phi = \big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee V).$$

Решение. Формула Φ равносильно преобразовывается следующим образом:

$$\big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee V) =$$
$$= \neg\big((\neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee V) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \vee (\neg Y \vee V) =$$
$$= \big((Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg V) \vee (\neg X \wedge Z)\big) \vee \neg Y \vee V =$$
$$= \big((Y \wedge \neg Z) \vee \neg Y\big) \vee \big((X \wedge \neg V) \vee V\big) \vee (\neg X \wedge Z) =$$
$$= \big((Y \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg Y)\big) \vee \big((X \vee V) \wedge (\neg V \vee V)\big) \vee (\neg X \wedge Z) =$$
$$= \neg Z \vee \neg Y \vee V \vee \big(X \vee (\neg X \wedge Z)\big)$$
$$= \neg Z \vee \neg Y \vee V \vee \big((X \vee \neg X) \wedge (X \vee Z)\big) =$$
$$= \neg Z \vee \neg Y \vee V \ \vee X \vee Z = (Z \vee \neg Z) \vee \neg Y \vee V \ \vee X = 1.$$

З а м е ч а н и е. Если в результате упрощения исследуемой формулы не получается тождественно истинная формула 1, то следует попытаться подобрать значения пропозициональных переменных, при которых истинностное значение формулы равно 0. Это докажет, что исследуемая формула не является тождественно истинной.

3. *Алгоритм Квайна* позволяет сократить полный перебор значений пропозициональных переменных за счет последовательного фиксирования возможных значений 0 или 1 пропозициональных переменных и последующего анализа истинностных значений полученных формул с меньшим числом переменных.

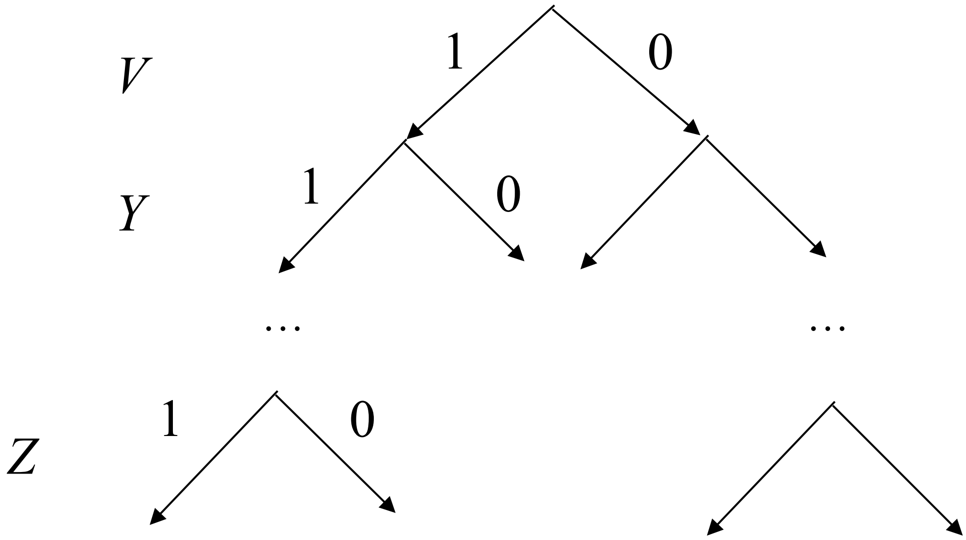
При этом используются основные тавтологии и следующие простейшие равенства, которые следуют из определения логических операций (см. табл. 1—5):

$$X \wedge 1 = X,\ X \wedge 0 = 0,\ X \vee 1 = 1,\ X \vee 0 = X,\ X \wedge \neg X = 0,\ X \vee \neg X = 1,$$
$$X \Rightarrow 1 = 1,\ 1 \Rightarrow X = X,\ 0 \Rightarrow X = 1,\ X \Rightarrow 0 = \neg X,\ X \Rightarrow X = 1,\ X \Leftrightarrow X = 1.$$

Задача. С помощью алгоритма Квайна выясните, является ли тождественно истинной формула

$$\big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee V).$$

Решение. Для входящих в формулу пропозициональных переменных последовательно фиксируем возможные значения 0 или 1 и упрощаем получающиеся формулы с помощью перечисленных выше простейших равенств до тех пор, пока не получим тождественно истинную формулу 1. При этом порядок последовательного фиксирования значений пропозициональных переменных может быть произвольным.



Так, если начать со значения $V = 1$, то из данной формулы

$$\big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$$

получим

$$\big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow 1) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee 1) = 1,$$

так как $\neg Y \vee 1 = 1$. В то же время при $V = 0$ из данной формулы получим

$$\big((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow 0) \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow (\neg Y \vee 0),$$

что равносильно $\big((Y \Rightarrow Z) \wedge \neg X \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow \neg Y$.

Отсюда при $Y = 0$ получаем формулу

$$\big((0 \Rightarrow Z) \wedge \neg X \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow \neg 0 = 1,$$

а при $Y = 1$ – формулу

$$\big((1 \Rightarrow Z) \wedge \neg X \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow \neg 1,$$

что равносильно

$$\big(Z \wedge \neg X \wedge (X \vee \neg Z)\big) \Rightarrow 0 = \neg\big(Z \wedge \neg X \wedge (X \vee \neg Z)\big) =$$

$$= \neg Z \vee X \vee (\neg X \wedge Z) = (\neg Z \vee X \vee \neg X) \wedge (\neg Z \vee X \vee Z) = 1.$$

З а м е ч а н и е 2. Если на каком-то заключительном шаге вычислений получается не тождественно истинная формула 1, а тождественно ложная формула 0, то исследуемая формула не является тождественно истинной – она опровергается соответствующими фиксированными значениями пропозициональных переменных.

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Составив истинностные таблицы, докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

1) $X \vee (X \wedge Y) \Leftrightarrow X$;

2) $(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg X \Rightarrow Y)$;

3) $\big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X\big) \Rightarrow X$;

4) $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$;

5) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow \big((Y \Rightarrow X) \Rightarrow (X \Leftrightarrow Y)\big)$.

Задача 2. С помощью равносильных преобразований выясните, какие из следующих формул являются тождественно истинными:

1) $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \Leftrightarrow \neg Y)$;

2) $\big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X\big) \Rightarrow Y$;

3) $\big((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y\big) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$;

4) $\Big(\big((X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge Z)\big) \wedge \neg Z\Big) \vee Y$;

5) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow \Big((X \Rightarrow Z) \Rightarrow \big(X \Rightarrow (Y \wedge Z)\big)\Big)$.

Задача 3. С помощью алгоритма Квайна выясните, какие из следующих формул являются тождественно истинными:

1) $\neg(X \Rightarrow Y) \Rightarrow \neg\Big(\neg(X \Rightarrow Z) \Rightarrow \neg\big(X \Rightarrow (Y \wedge Z)\big)\Big)$;

2) $\neg\Big(\Big(\neg Z \Rightarrow \neg\big(X \Rightarrow \neg(Y \Rightarrow Z)\big)\Big) \Rightarrow \neg(X \Rightarrow \neg Y)\Big)$;

3) $\Big(\big((X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \Leftrightarrow Z)\big) \Leftrightarrow (Y \Leftrightarrow Z)\Big) \Leftrightarrow X$;

4) $\Big(\big((X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee Z)\big) \vee \neg Z\Big) \wedge Y$;

5) $(X \Rightarrow Z) \Rightarrow \Big((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow \big((X \vee Y) \Rightarrow Z\big)\Big)$.

Метод резолюций в алгебре высказываний

Из предыдущих результатов следует, что задачи проверки тождественной истинности формул, логического следования формул, тождественной ложности формул и противоречивости множества формул сводится к задаче проверки противоречивости множества дизъюнктов, которая эффективно решается методом автоматического доказательства теорем, известного под называнием *метода резолюций*.

Определение. Пусть для некоторой переменной X дизъюнкты D_1, D_2 представимы в виде $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. Тогда дизъюнкт $D_1' \vee D_2'$ называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 по переменной X и обозначается $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

В общем случае резольвента дизъюнктов D_1, D_2 по некоторой переменной X называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 и обозначается $\mathrm{Res}(D_1, D_2)$. По определению для любой переменной X *резольвента* $\mathrm{Res}(X, \neg X) = 0$.

ЛЕММА 1. Ели для дизъюнктов D_1, D_2 и некоторой переменной X определена резольвента $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$, то из выполнимости множества формул D_1, D_2 следует выполнимость резольвенты $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Доказательство леммы следует из тавтологии

$$(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \Rightarrow (Y \vee Z).$$

Определение. *Резолютивным выводом формулы* Φ из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ называется такая последовательность формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ что $\Phi_n = \Phi$ и каждая из формул Φ_i $(i = 1, \dots, n)$ либо принадлежит множеству S, либо является резольвентой $\Phi_i = \mathrm{Res}(\Phi_j, \Phi_k)$ предыдущих формул Φ_j, Φ_k при некоторых $1 \le j, k \le i$.

ЛЕММА 2. Если существует резолютивный вывод формулы Φ из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ и множество формул S выполнимо, то и формула Φ также выполнима.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ (корректность и полнота метода резолюций). Множество дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$ противоречиво в том и только том случае, если существует резолютивный вывод значения 0 из множества S.

Задача 1. С помощью метода резолюций докажите, что множество формул

$$S = \{\neg X \vee Y \vee Z,\ \neg Y \vee Z \vee X,\ \neg Z \vee X,\ X \vee Y,\ Y \vee \neg Z,\ \neg X \vee \neg Y\}$$

противоречиво.

Решение. Рассмотрим резолютивный вывод:

$\Phi_1 = \neg X \vee Y \vee Z$,

$\Phi_2 = X \vee Y$,

$\Phi_3 = \mathrm{Res}_X(\Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{Res}_X(\neg X \vee Y \vee Z, X \vee Y) = Y \vee Z$,

$\Phi_4 = Y \vee \neg Z$,

$\Phi_5 = \mathrm{Res}_Z(\Phi_3, \Phi_4) = \mathrm{Res}_Z(Y \vee Z, Y \vee \neg Z) = Y$,

$\Phi_6 = \neg X \vee \neg Y$,

$\Phi_7 = \mathrm{Res}_Y(\Phi_5, \Phi_6) = \mathrm{Res}_Y(Y, \neg X \vee \neg Y) = \neg X$,

$\Phi_8 = \neg Y \vee Z \vee X$,

$\Phi_9 = \mathrm{Res}_X(\Phi_7, \Phi_8) = \mathrm{Res}_X(\neg X, \neg Y \vee Z \vee X) = \neg Y \vee Z$,

$\Phi_{10} = \mathrm{Res}_Y(\Phi_5, \Phi_9) = \mathrm{Res}_Y(Y, \neg Y \vee Z) = Z$,

$\Phi_{11} = \neg Z \vee X$,

$\Phi_{12} = \mathrm{Res}_Z(\Phi_{10}, \Phi_{11}) = \mathrm{Res}_Z(Z, \neg Z \vee X) = X$,

$\Phi_{13} = \mathrm{Res}(\Phi_7, \Phi_{12}) = \mathrm{Res}(\neg X, X) = 0$.

Следовательно, из множества формул S резолютивно выводится значение 0 и по основной теореме метода резолюций множество S противоречиво.

Так как соотношение $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \vDash \Phi$ равносильно условию $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \neg\Phi \vDash$, то справедлив следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4 (проверка логического следования формул). Пусть для формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi$ формула $\Psi = \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ имеет КНФ $\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$. Тогда выполнимость логического следования $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \vDash \Phi$ равносильна существованию резолютивного вывода значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.

Алгоритм проверки логического следования формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$:

1) рассматриваем формулу $\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ и находим ее КНФ $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$;

2) ищем резолютивный вывод значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$;

3) если такой вывод существует, то выполняется $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$.

Задача 1. Методом резолюций проверьте логическое следование:

$$\neg X \Rightarrow Z,\ Y \Rightarrow W,\ (W \wedge Z) \Rightarrow V,\ \neg V \ \vDash\ X \vee \neg Y.$$

Решение. Данное логическое следование равносильно противоречивости множества формул:

$$\neg X \Rightarrow Z,\ Y \Rightarrow W,\ (W \wedge Z) \Rightarrow V,\ \neg V,\ \neg(X \vee \neg Y\,)\ \vDash,$$

что равносильно противоречивости формулы

$$\Psi = (\neg X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge \big((W \wedge Z) \Rightarrow V\big) \wedge \neg V \wedge \neg(X \vee \neg Y\,).$$

Найдем КНФ этой формулы с помощью тавтологий $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y, \neg(X \vee Y\,) = \neg X \wedge \neg Y,\ \neg(X \wedge Y\,) = \neg X \vee \neg Y,\ \neg\neg X = X$:

$$\Psi = (\neg\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg(W \wedge Z) \vee V) \wedge \neg V \wedge\ (\neg X \wedge Y) =$$
$$= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg Z \vee V) \wedge \neg V \wedge \neg X \wedge Y.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы Ψ:

$$S = \{\, X \vee Z,\ \neg Y \vee W,\ \neg W \vee \neg Z \vee V,\ \neg V,\ \neg X,\ Y\,\}.$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S:

$\Phi_1 = \mathrm{Res}_X(X \vee Z, \neg X) = Z,$

$\Phi_2 = \mathrm{Res}_Y(\neg Y \vee W, Y) = W,$

$\Phi_3 = \mathrm{Res}_Z(\Phi_1, \neg W \vee \neg Z \vee V) = \mathrm{Res}_Z(Z, \neg W \vee \neg Z \vee V)$
$= \neg W \vee V,$

$\Phi_4 = \mathrm{Res}_W(\Phi_2, \Phi_3) = \mathrm{Res}_W(W, \neg W \vee V) = V,$

$\Phi_5 = \mathrm{Res}(\Phi_4, \neg V) = \mathrm{Res}(V, \neg V) = 0.$

Таким образом, из множества формул S резолютивно выводится значение 0 и по основной теореме множество S противоречиво. Следовательно, формула Ψ противоречива и выполняется исходное логическое следование.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы Φ:

1) рассматриваем формулу $\Psi = \neg\Phi$ и находим ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m;$$

2) ищем резолютивный вывод значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$;

3) если такой вывод существует, то выполняется $\vDash \Phi$.

Задача 2. Методом резолюций проверьте тождественную истинность формулы:

$$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow \big((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X\big).$$

Решение. По критерию логического следования из лекции 2 тавтология $\vDash \Phi$ равносильна противоречивости формулы:

$$\Psi = \neg\Phi = \neg\Big((X \Rightarrow Y) \Rightarrow \big((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X\big)\Big).$$

Найдем КНФ этой формулы

$$\Psi = \neg\big(\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg(\neg X \vee \neg Y) \vee \neg X)\big) =$$
$$= (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge X\,.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы Ψ :

$$S = \{\,\neg X \vee Y,\ \neg X \vee \neg Y,\ X\,\}.$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества *S:*

$\Phi_1 = \neg X \vee Y,$

$\Phi_2 = \neg X \vee \neg Y,$

$\Phi_3 = \mathrm{Res}_Y(\Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{Res}_Y(\neg X \vee Y, \neg X \vee \neg Y) = \neg X \vee \neg X = \neg X,$

$\Phi_4 = X,$

$\mathrm{Res}(\Phi_3, \Phi_4) = \mathrm{Res}(\neg X, X) = 0.$

Таким образом, из множества дизъюнктов S резолютивно выводится значение 0 и по основной теореме множество S противоречиво. Следовательно, формула Ψ противоречива и выполняется $\vDash \Phi$.

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. С помощью метода резолюций докажите, что следующие множества формул противоречивы:

1) $S = \{\neg Z, \neg Y, \neg X \vee Z, X \vee Y \vee Z\}$;
2) $S = \{\neg X \vee Y, \neg Y \vee Z, \neg Z \vee X, X \vee Z, \neg X \vee \neg Z\}$;
3) $S = \{X \vee Y \vee Z, X \vee Y \vee \neg Z, X \vee \neg Y, \neg X \vee \neg Z, \neg X \vee Z\}$.

Задача 2. Методом резолюций проверьте логические следования:

1) $X \Rightarrow Y, Z \Rightarrow V, V \Rightarrow Y, Y \vee Z \vee V \vDash X \wedge Y$;
2) $(X \wedge Y) \Rightarrow Z, X \Rightarrow Y \vDash X \Rightarrow Z$;
3) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y, X \wedge \neg Y \vDash X \Rightarrow Y$.

Задача 3. Методом резолюций проверьте общезначимость следующих формул:

1) $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$;
2) $\big((X \wedge Y) \Rightarrow Z\big) \Leftrightarrow \big(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)\big)$;
3) $\big(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)\big) \Leftrightarrow \big(Y \Rightarrow (X \Rightarrow Z)\big)$.