Определители квадратных матриц

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или *определителем первого порядка*, называется элемент a_{11}:
$\Delta_1 = |A| = a_{11}$. Например, пусть $A = (3)$, тогда $\Delta_1 = |A| = 3$.

Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$, или *определителем второго порядка*, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами определителя* второго порядка. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

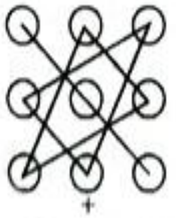
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка, или *определителем третьего порядка*, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \qquad \textbf{(1.4)}$$



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

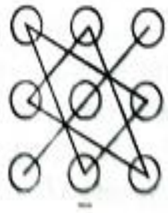


Рис. 1.1

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Из общего числа n^2 элементов этой матрицы выберем набор, содержащий n элементов, таким образом, чтобы в него входило по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Например, набор элементов $(a_{11}a_{22}\dots a_{nn})$ или $(a_{n1}a_{n-1,2}\dots a_{1n})$ соответственно главной и побочной диагоналей матрицы.

Любой такой набор можно упорядочить, записав сначала элемент из 1-й строки, затем из 2-й и т.д., т.е.

$$(a_{1j_1}a_{2j_2},\dots,a_{nj_n}). \quad \textbf{(1.5)}$$

Номера столбцов $(j_1; j_2; \dots; j_n)$ образуют при этом *перестановку J* из *n* чисел: 1, 2, .., *n*. Всего существует $n!$[1] различных перестановок из *n* натуральных чисел.

Определение. ***Определителем*** *квадратной* ***матрицы n-го порядка***, *или* ***определителем n-го порядка****, называется число*[1] , равное алгебраической сумме $n!$ *членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем знак каждого члена определяется как* $(-1)^{r(J)}$, *где r(J) — число инверсий в перестановке J из номеров столбцов элементов матрицы, если при этом номера строк записаны в порядке возрастания:*

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(J)} (-1)^{r(J)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}, \quad \textbf{(1.7)}$$

где сумма берется по всем перестановкам *J*. Проверим, например, что при *n*=3 мы получаем введенный ранее определитель третьего порядка (1.4):

$$\Delta_3 = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + \\ + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32},$$

т.е. то же число, что и по формуле (1.4).

Заметим, что с ростом n резко увеличивается число членов определителя ($n!$), поэтому даже для $n = 4$ использование формулы (1.7) весьма трудоемко (получим 24 слагаемых!).

На практике при вычислении определителей высоких порядков используют другие формулы. Для их рассмотрения необходимо ввести новые понятия.

Пусть дана квадратная матрица A n-го порядка.

***Минором** M_{ij} **элемента** a_{ij}* матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad \textbf{(1.8)}$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ — четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$ — нечетное число.

Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}; A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

▷ **Пример 1.7.** Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы (из примера **1.6**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$; $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$; $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$;

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$. ▶

Важное значение для вычисления определителей имеет следующая теорема.

Теорема Лапласа[1]. *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is} \tag{1.9}$$

(разложение по элементам i-й строки; $i = 1;\ 2;\ \ldots;\ n$);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj} \tag{1.10}$$

(разложение по элементам j-го столбца; $j = 1;\ 2;\ \ldots;\ n$).

□ Убедимся в справедливости теоремы Лапласа на примере определителя матрицы третьего порядка. Разложим его вначале по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

После преобразований (представляем их сделать читателю) нетрудно убедиться в том, что полученное выражение совпадает с определением (1.4). Аналогичный результат получаем разложением определителя матрицы по любой строке или столбцу. ■

1.4. Свойства определителей

1. *Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен 0.*

2. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число λ.*

□ Пусть определитель исходной матрицы равен Δ. Для определенности первую строку матрицы умножим на λ, получим новый определитель Δ', который разложим по элементам первой строки:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}A_{11} + \lambda a_{12}A_{12} + \ldots + \lambda a_{1n}A_{1n} =$$

$$= \lambda(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}) = \lambda\Delta. \ \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех элементов.

3. *При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется:* $|A'| = |A|$.

4. *При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.*

□ Предположим вначале, что переставлены две соседние строки матрицы: i и $i+1$. Разложим определитель исходной матрицы Δ по элементам i-й строки, а определитель новой матрицы (с переставленными строками) Δ' — по элементам $(i+1)$-й строки. Разложения будут отличаться только знаком, так как в формуле (1.9) для Δ' каждое алгебраическое дополнение будет иметь противоположный знак (множители $(-1)^{i+j}$ сменятся на множители $(-1)^{i+1+j}$), поэтому $\Delta' = -\Delta$.

Если переставить не соседние строки, а, скажем, i-ю и $(i+k)$-ю, то такую перестановку можно представить как последовательное смещение i-й строки на k строк вниз (при этом каждый раз знак определителя меняется), а $(i+k)$-й строки на $(k-1)$ вверх, что тоже сопровождается $(k-1)$ изменением знака, т.е. знак поменяется нечетное число $(2k-1)$ раз: $\Delta' = -\Delta$.

Доказательство для столбцов аналогично ■

5. *Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен 0.*

□ Действительно, переставим эти строки (столбцы). С одной стороны, определитель не изменится, но, с другой стороны, по свойству 4 поменяет знак, т.е. $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$. ■

6. *Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.*

□ Пусть для определенности пропорциональны первая и вторая строки. Тогда, вынося коэффициент пропорциональности λ, получаем по свойству 2: $\Delta' = \lambda \cdot \Delta$, где Δ имеет две одинаковые строки и по свойству 5 равен 0. ■

7. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна 0, т.е.*

$$\sum_{S=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0 \text{, при } i \neq j. \qquad \textbf{(1.11)}$$

□ Рассмотрим квадратную матрицу A и вспомогательную матрицу $\widetilde{A}$, полученную из матрицы A заменой j-й строки на i-ю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

т.е. матрица $\widetilde{A}$ имеет две одинаковые строки, поэтому согласно свойству **5** ее определитель равен 0. Вычисляя его разложением по элементам j-й строки, получаем:

$$\left|\widetilde{A}\right| = \sum_{S=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0 \quad (i \neq j). \ ■$$

З а м е ч а н и е. Объединяя результат теоремы Лапласа и свойство **7**, получаем:

$$\sum_{S=1}^{n} a_{is} A_{js} = \begin{cases} |A| & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases} \qquad \textbf{(1.12)}$$

$\sum_{s=1}$ [0 при $i \neq j$.

8. *Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.*

□ Пусть для определенности к элементам i-й строки матрицы прибавим элементы j-й строки, умноженные на $\lambda (i \neq j)$. Тогда первая строка матрицы имеет вид: $[(a_{i1} + \lambda a_{j1})(a_{i2} + \lambda a_{j2})\ldots(a_{in} + \lambda a_{jn})]$. Определитель полученной матрицы вычислим разложением по элементам i-й строки:

$$\Delta' = (a_{i1} + \lambda a_{j1})A_{i1} + (a_{i2} + \lambda a_{j2})\ A_{i2} + \ldots + (a_{in} + \lambda a_{jn})A_{in},$$

где A_{is} — алгебраические дополнения элементов i-й строки исходной матрицы $(s = 1;2;\ldots,n; i \neq j)$. Раскроем скобки и получим после преобразования:

$$\Delta' = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is} + \lambda \sum_{s=1}^{n} a_{js}A_{is}.\quad (i \neq j).$$

Используя формулу (1.12), получаем, что первая сумма равна определителю исходной матрицы, а вторая — 0, т.е. $\Delta' = \Delta$. ■

9. Сумма произведений произвольных чисел на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Свойство вытекает непосредственно из теоремы Лапласа.

10. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:* $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; A и B — матрицы n-го порядка.

З а м е ч а н и е. Из свойства **10** следует, что даже если $AB \neq BA$, то $|AB| = |BA|$.

...енные свойства определителей позволяют сущест-

1.5. Обратная матрица

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1} такое, что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

Матрица A^{-1} называется *обратной по отношению к квадратной матрице A*, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \tag{1.13}$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1}, то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля $(|A| \neq 0)$, то такая квадратная матрица называется *невырожденной*, или *неособенной;* в противном случае (при $|A| = 0$) — *вырожденной*, или *особенной.*

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). *Обратная матрица* A^{-1} *существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.*

□ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть матрица A имеет обратную A^{-1}, т.е $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$. По свойству **10** определителей имеем $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$, т.е. $|A| \neq 0$ и $|A^{-1}| \neq 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $|A| \neq 0$. Рассмотрим квадратную матрицу n – го порядка $\widetilde{A}$, называемую *присоединенной*, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A', транспонированной к A: $\widetilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$ $(i = 1,2,\ldots,n;$ $j = 1,2,\ldots,n)$. Тогда элементы произведения матриц $\widetilde{A} \cdot A = B$ определяются по правилу умножения матриц:

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \widetilde{a}_{is} a_{sj} = \sum_{s=1}^{n} A_{si} \cdot a_{sj} = \begin{cases} |A| & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$ (см. формулу 1.12).

Поэтому матрица B является диагональной, элементы ее главной диагонали равны определителю исходной матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & |A| \end{pmatrix}.$$ Аналогично доказывается, что произведение A на $\widetilde{A}$ равно той же матрице B: $A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = B$. Отсюда следует, что если в качестве обратной матрицы взять матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A} \quad (|A| \neq 0), \qquad \textbf{(1.14)}$$

то произведения $A^{-1} \cdot A$ и $A \cdot A^{-1}$ равны единичной матрице E n-го порядка: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot B = E$.

Докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что существуют еще матрицы X и Y такие, что $X \neq A^{-1}$ и $Y \neq A^{-1}$, где матрица A^{-1} получена по формуле (1.14), и выполняются равенства: $AX = E$ и $YA = E$. Тогда, умножая на A^{-1} слева первое из них, получаем: $A^{-1}AX = A^{-1}E$, откуда $EX = A^{-1}E$, т.е. $X = A^{-1}$. Аналогично, умножая второе равенство на A^{-1} справа, получаем $Y = A^{-1}$. Единственность доказана. ■

Алгоритм вычисления обратной матрицы: 1^0. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица существует.

2^0. Находим матрицу A', транспонированную к A.

3^0. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji} (i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,n)$ и составляем из них присоединенную матрицу $\widetilde{A}$: $\widetilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji}$ $(i = 1,2,\ldots,n;\quad j = 1,2,\ldots,n)$.

4^0. Вычисляем обратную матрицу по формуле (1.14).

5^0. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ (п. 5^0 не обязателен).

▷ **Пример 1.10.** Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. 1^0. Определитель матрицы $|A| = 5 \neq 0$ (см. пример **1.6**), т.е. матрица A — невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2^0. Находим матрицу A', транспонированную к A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3^0. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу $\widetilde{A}$, учитывая, что $A'_{ij} = A_{ji}$: $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (см. пример **1.6**).

4^0. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$