ФИЗИКА

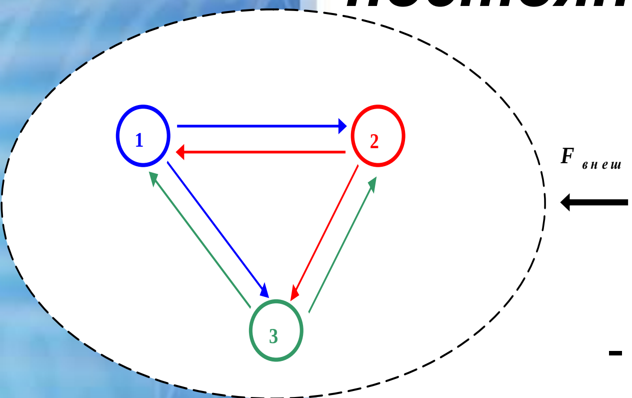
Лекция 3

Динамическая теория механических систем

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Модели механических систем

1. Система материальных точек постоянной массы



Параметры:

-*импульс системы* векторная сумма импульсов материальных точек

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{\upsilon}_i$$

- *действующие силы* – векторная сумма сил, приложенных к материальным точкам системы внешних F_i и внутренних f_i

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i + \sum \vec{f}_i$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$$

$$\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = 0$$

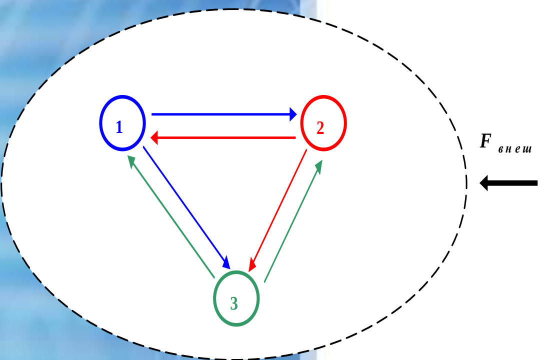
$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 - III\,з.\quad Ньютона$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\,внеш} = \vec{F}_{внеш} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{d(m_i \vec{\upsilon}_i)}{dt} = \vec{F}_{внеш}$$

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Модели механических систем

1. Система материальных точек постоянной массы



$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\,внутр}}_{\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik} = 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\,внеш}}_{\vec{F}_{внеш}} = \vec{F}_{внеш}$$

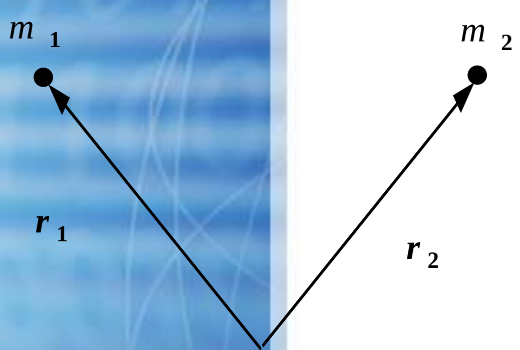
$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i \right)}_{\vec{p}} = \vec{F}_{внеш}$$

Замкнутая система:

$$\vec{F}_{внеш} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const.$$

Модели механических систем

1. Система материальных точек постоянной массы



Параметры:

-*центром масс* системы называют точку с радиус-вектором

$$\vec{r}_{ц.м.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \qquad \vec{r}_{ц.м.} = \frac{1}{M}\sum m_{0i}\vec{r}_i$$

$$\vec{\upsilon}_{ц.м.} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} \qquad M\vec{\upsilon}_{ц.м.} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i,\ \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Движение системы как целого можно рассматривать, как движение материальной точки, масса которой равна сумме масс тел, входящих в систему, а равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, равна главному вектору внешних сил, действующих на систему

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Модели механических систем

1. Система материальных точек постоянной массы

$$M\frac{d\vec{v}_{ц.м.}}{dt}=\vec{F}$$

закон движения центра масс

Упрощение:
движение системы сводится к движению материальной точки.

$$F_{равнодейст}=0 \Rightarrow M\frac{d\vec{\upsilon}_{ц.м.}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{\upsilon}_{ц.м.}=const.$$

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Модели механических систем

2. Система материальных точек переменной массы (Ур-е Мещерского)

Параметры:

-*импульс системы* $\vec{p} = m(t)\cdot\overrightarrow{\upsilon(t)}$

- *действующие силы*

$$\boxed{\vec{F} =} \frac{d}{dt}\left[m(t)\overrightarrow{\upsilon(t)}\right] = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \vec{\upsilon}\frac{dm}{dt} = \boxed{m\vec{a} + \vec{F}_{реактив}}$$

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F} + \vec{F}_p}{m}} \qquad \vec{F}_p = -\mu\cdot\vec{u} \qquad \frac{dm}{dt} = \mu$$

удельный расход массы

При некоторых условиях поведение частиц в сложной системе может отличаться от поведения их вне системы. Это связано с действием, кроме внешней силы, ещё внутренних сил системы. В ФМ это свойство (изменение инерции) компенсируют введением понятия «**эффективной массы**». Она может быть как больше, так и меньше массы покоя. Если частица в системе меняет и другие свои свойства, то такие частицы называют «**квазичастицами**».

Модели механических систем

2. Система материальных точек переменной массы

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{dm}{dt}, \\ & F = F_{внеш} = 0, \\ & u = const. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm}{dt} \Rightarrow \\ & d\vec{\upsilon} = -\vec{u}\frac{dm}{m}, \end{aligned}$$

$$\upsilon = -u\int\frac{dm}{m} = -u\ln m + C,$$

Н.у.: $v_0 = 0$, m_0 – стартовая масса.

$$\boxed{\upsilon = u\ln\frac{m_0}{m}}$$ – формула Циолковского.

Модели механических систем

2. Система материальных точек переменной массы

$$\upsilon = u \ln \frac{m_0}{m}$$ – формула Циолковского.

u – скорость истечения газов, для химического топлива *u* = 4 км/с.

Формула Циолковского показывает:
1. Чем больше конечная масса ракеты, тем больше должна быть стартовая масса m_0.
2. Чем больше *u*, тем больше может быть конечная масса ракеты при стартовой m_0.

Космические скорости:
1 (круговая) – спутник Земли: $v_1 \approx$ **8 км/с**.
2 (параболическая) – скорость, для удаления из поля тяготения Земли и стать спутником Солнца: $v_2 \approx$ **11,2 км/с**.
3 – тело уходит из Солнечной системы: $v_3 \approx$ **16,7 км/с**.

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Модели механических систем

3. Механическая система, состояние которой описывается энергетическими параметрами

$$\underbrace{\vec{F}d\vec{r}}_{dA}=\frac{d\vec{p}d\vec{r}}{dt}=\underbrace{\frac{pd\vec{p}}{m}}_{-dE}\Rightarrow\vec{F}=-\frac{dE}{d\vec{r}}$$

Знак “–” отражает то, что сила F направлена в сторону уменьшения энергии.

$$F_x=-\frac{\partial E}{\partial x};F_y=-\frac{\partial E}{\partial y};\qquad \vec{F}=-gradE=-\nabla E,$$

$$F_z=-\frac{\partial E}{\partial z}.\qquad grad=\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

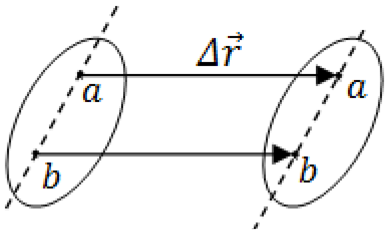
Следствие: действие силы во времени изменяет импульс тела; действие силы в пространстве - изменяет энергию тела.

$$E(p,r)=E_к(p_x,p_y,p_z)+E_п(x,y,z)$$

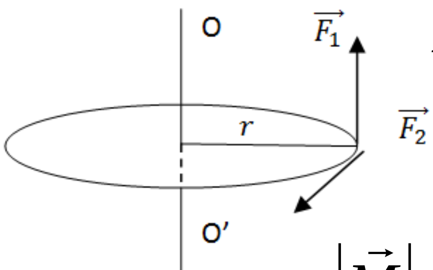
$$E=\frac{p^2}{2m}=\frac{m\upsilon^2}{2},\quad E=mgh$$

Модели механических систем

4. Механическая система твердого тела

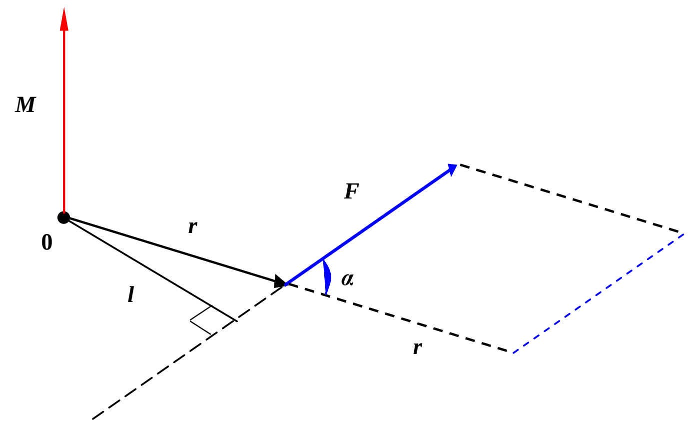


$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow d\vec{r} \Leftrightarrow \overrightarrow{\upsilon(t)} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \overrightarrow{a(t)} = \frac{d\overrightarrow{\upsilon(t)}}{dt}$$



$$\vec{F}_1 \uparrow\uparrow OO', \vec{F}_2 \perp OO'$$

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\cdot\vec{F}\right],$$



$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\cdot\sin\alpha,$$

$$\left|\vec{r}\right|\cdot\sin\alpha = l - \text{плечо силы.}$$

$$M_x = \left|\left[\vec{r}\cdot\vec{F}\right]_x\right|, M_y = \left|\left[\vec{r}\cdot\vec{F}\right]_y\right|,$$

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k},$$

$$M_z = \left|\left[\vec{r}\cdot\vec{F}\right]_z\right|.$$

$\vec{M}_1 \perp OO', \vec{M}_2 \uparrow\uparrow OO'$ Проекция M_1 на ось =0, проекция $M_2 \neq 0$

$\vec{F}_1 \uparrow\uparrow OO'$ - вращения не будет $\vec{F}_2 \perp OO'$ - вращения будет

Модели механических систем

4. Механическая система твердого тела

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left[\vec{r}\cdot\vec{p}\right]}_{\vec{N}}=\left[\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{\upsilon}}\cdot\vec{p}\right]+\left[r\cdot\underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}}\right]\Rightarrow\frac{d\overrightarrow{N}}{dt}=\underbrace{\left[\vec{\upsilon}\cdot\vec{p}\right]}_{\substack{0,\vec{\upsilon}\uparrow\uparrow\vec{p}\\ \sin\angle\vec{\upsilon},\vec{p}=0}}+\underbrace{\left[\vec{r}\cdot\vec{F}\right]}_{\vec{M}}$$

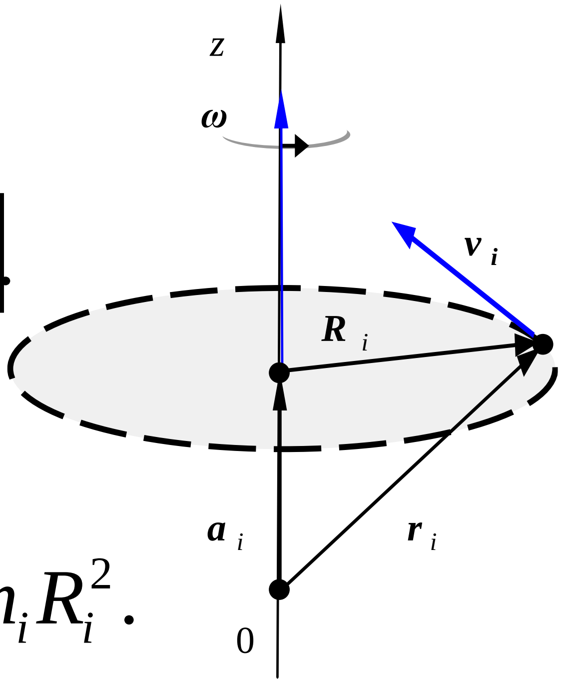
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\overrightarrow{N}}{dt}=\vec{M}}$$

Уравнение моментов

$$\overrightarrow{N_i}=\left[\vec{r_i}\cdot m_i\overrightarrow{\upsilon_i}\right]=\left[\left(\vec{a}_i+\vec{R}_i\right)\cdot m_i\overrightarrow{\upsilon_i}\right].$$

$$\left|\overrightarrow{N_i}\right|_z=\underbrace{\left|\left[\vec{a}_i\cdot m_i\overrightarrow{\upsilon_i}\right]\right|_z}_{=0}+\underbrace{\left|\left[\vec{R}_i\cdot m_i\overrightarrow{\upsilon_i}\right]\right|_z}_{=\left|\overrightarrow{N_i}\right|}$$

$$N_z=\sum_{i=1}^{n}N_{iz}=\sum_{i=1}^{n}\omega m_iR_i^2=\omega\sum_{i=1}^{n}m_iR_i^2.$$



Модели механических систем

4. Механическая система твердого тела

$I_i = m_i R_i^2$ -момент инерции материальной точки

$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ - момент инерции твердого тела относительно оси Z

$$\frac{d(\omega I_z)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \cdot \varepsilon = M_z \Rightarrow \boxed{M = I \cdot \varepsilon}$$

основное ур-е динамики вращательного движения

Ускорение вращения твердого тела относительно неподвижной оси прямо пропорционально моменту всех внешних сил относительно этой оси и обратно пропорционально моменту инерции твердого тела относительно этой оси.

Физический смысл:
Момент инерции относительно оси – мера инерции твердого тела при вращательном движении относительно оси.

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

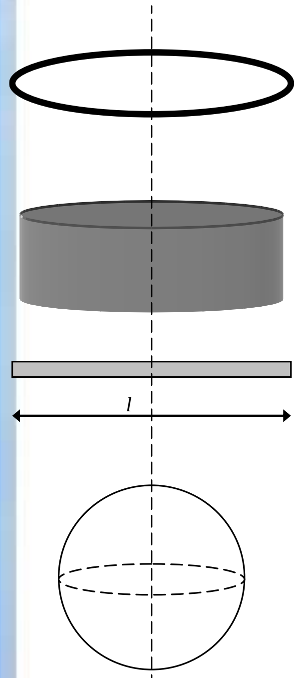
Теорема Штейнера-Гюйгенса

Момент инерции системы тел – физическая величина равная сумме произведений m_i на r_i^2:

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2$$

В случае непрерывного распределения:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV.$$



$$I = mR^2.$$

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

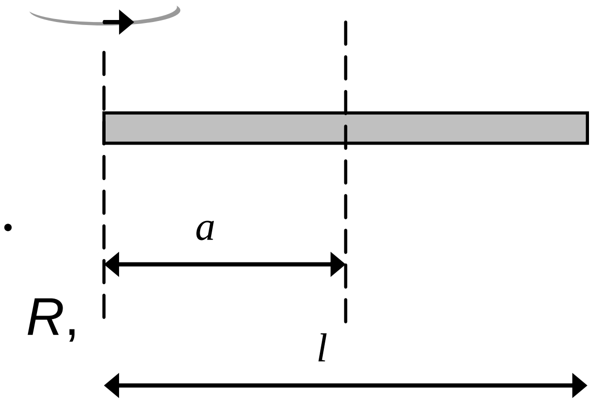
$$I = \frac{ml^2}{12}.$$

$$I = \frac{2}{5} mR^2.$$

Момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс I_0, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между ними a^2:

$$I = I_0 + ma^2.$$

Теорема Штейнера-Гюйгенса



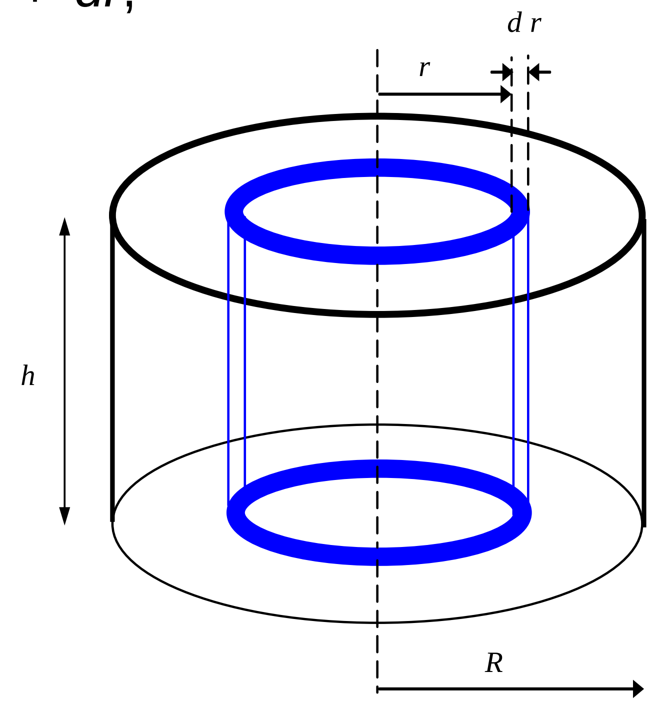
Примеры:

1. Стержень

$$I = I_0 + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

2. Сплошной цилиндр радиуса *R*, высотой *h*.

Разобьем на полые цилиндры *r*, *r* + *dr*, *dr*→0.



$$dr << r \Rightarrow dI = r^2 dm,$$

$$dV = 2\pi rhdr, dm = 2\pi rh\rho dr$$

$$dI = 2\pi h\rho r^3 dr$$

$$I = \int dJ = 2\pi h\rho\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi hR^4\rho,$$

$$\left(V = \pi R^2 h\right) \Rightarrow \qquad I = \frac{mR^2}{2}.$$

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Теорема Штейнера-Гюйгенса

Найдем кинематическое ур-е вращательного движения:

$$M = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\varphi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M}{I} = \beta$$

$$M = const, I = const \Rightarrow \beta = const$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t \Leftrightarrow \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 + \frac{\beta t^2}{2}$$

***Инерция и кинетическая энергия вращения твёрдого тела зависит не только от массы тела, но и от её расположения, относительно оси вращения*:**

$$E_к = \frac{I\omega^2}{2}$$

Итоги

Поступательное движение

$$\vec{r}, m, \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon},$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

$$A = FS - работа$$

$$P = F\upsilon - мощность$$

Вращательное движение

$$\vec{\varphi}, I, \quad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

$$\vec{N} = I\vec{\omega}, \vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt},$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I},$$

$$E_к = \frac{I\omega^2}{2}$$

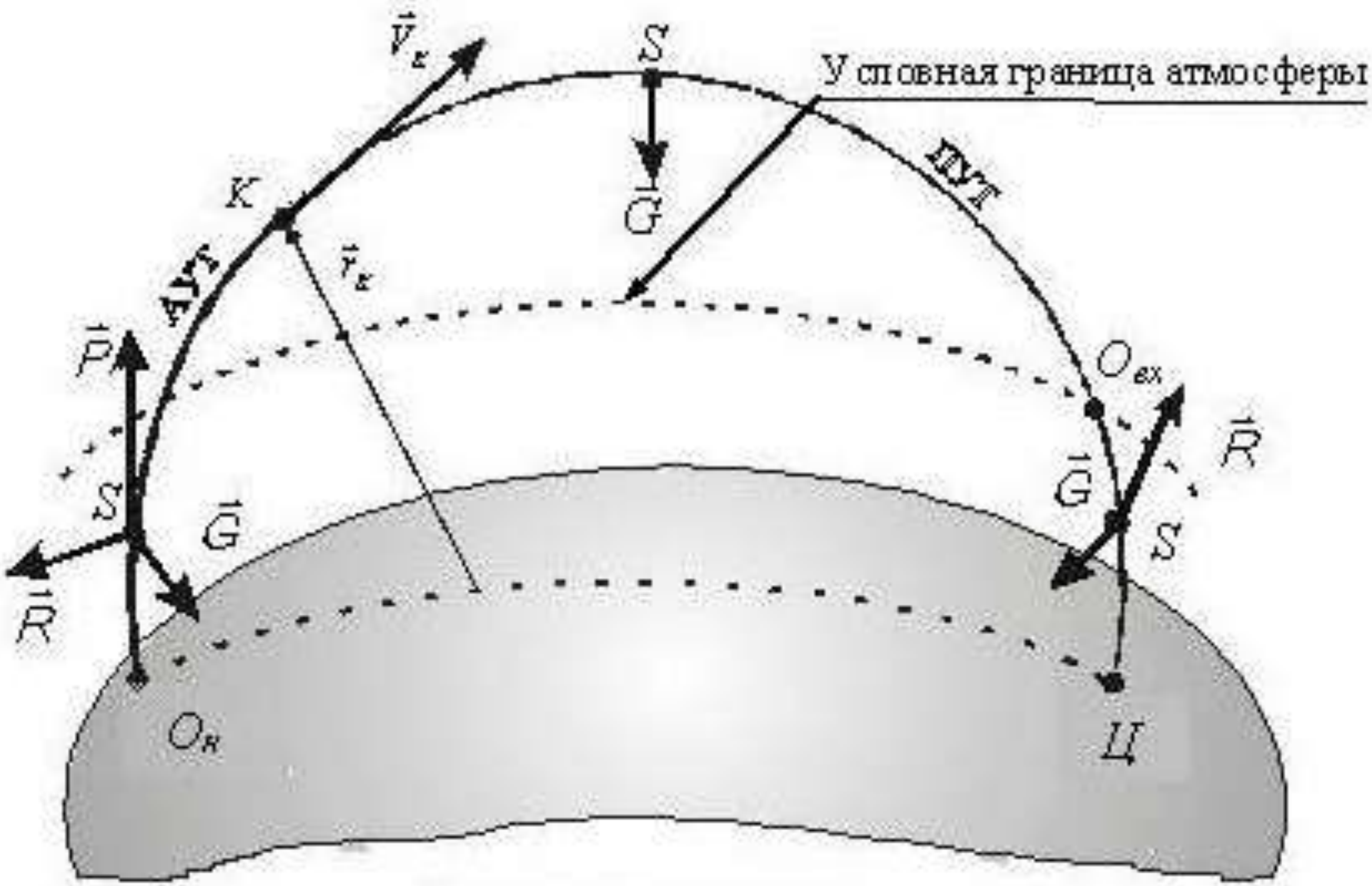
$$A = M\varphi - работа$$

$$P = M\omega - мощность$$

$$E_к = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

Автор: к.ф.-м.н., доцент Черкасова О.А.

Спасибо за внимание!



Траектория полета

Полезные ссылки

1. Скамья Жуковского https://www.youtube.com/watch?v=58MwXX541Dg&t=109s
2. Вся физика за 16 минут))) https://www.youtube.com/watch?v=ErMSHiQRnc8 (смотреть с паузами для понимания демонстрируемых процессов и законов)

Кинетическая энергия относительно точки O равна:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2},$$

где I – момент инерции цилиндра относительно точки O. По теореме Штейнера $I = I_0 + mR^2$, следовательно,

$$E_k = \frac{I_0\omega^2}{2} + \frac{m}{2}\omega^2 R^2 = \frac{I_0\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

так как $v_0 = \omega R$.