Приведение матрицы к ступенчатому виду

Определение

Матрица называется *ступенчатой*, если выполнено следующее условие: если некоторая строка матрицы, отличная от первой, не является нулевой, то в начале этой строки стоит больше нулей, чем в начале предыдущей строки.

Из определения непосредственно вытекает, что если некоторая строка ступенчатой матрицы является нулевой, то и все ее последующие строки — нулевые. В самом деле, если в матрице после нулевой строки идет ненулевая, то для этой ненулевой строки нарушено условие из определения ступенчатой матрицы (в начале этой строки стоит меньше нулей, чем в начале предыдущей).

Произвольная ступенчатая матрица имеет следующий вид:

$$
\begin{pmatrix}
0 \ldots\ 0 \ * & & & & \\
0 \ldots\ldots\ldots\ 0 \ * & & & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ddots & & & \\
0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0 \ * & & & & \\
0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0 \ * & & & & \\
0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0 & & & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\
0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0 & & & &
\end{pmatrix}.
$$

Элементы, обозначенные звездочками, не должны быть равны 0. Напротив, все элементы, стоящие в «серой зоне» (левее и ниже синей ломаной линии), обязаны быть равны 0. Элементы, стоящие выше ломаной (кроме тех, что обозначены звездочками), могут быть любыми. Нулевых столбцов в левой части матрицы, как и нулевых строк в ее нижней части, может не быть.

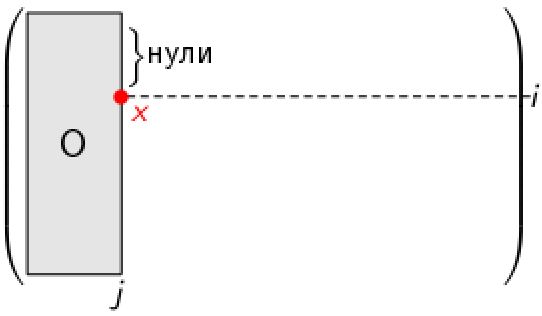
- Ломаная линия, ограничивающая сверху «нулевую часть» ступенчатой матрицы, имеет вид ступенек. Именно этим объясняется термин «ступенчатая матрица».

Предложение 5.2

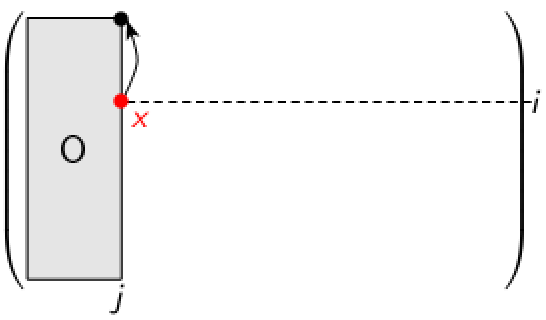
Любую матрицу с помощью конечного числа элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду. При

Доказательство этого утверждения дает алгоритм приведения произвольной матрицы к ступенчатому виду, который будет постоянно использоваться в дальнейшем при решении самых разных задач (в том числе таких, которые не связаны напрямую с решением систем линейных уравнений).

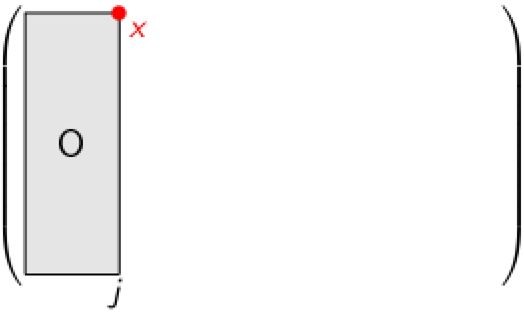
Доказательство. Пусть A — произвольная матрица. Если A — нулевая матрица, то она уже является ступенчатой. Поэтому далее будем считать, что A содержит хотя бы один ненулевой элемент. Выберем в A самый левый ненулевой столбец (обозначим его номер через j), а в этом столбце — самый верхний ненулевой элемент. Обозначим этот элемент через x, а номер строки, в которой он стоит, — через i.



Если $i > 1$, поменяем местами первую и i-ю строки.

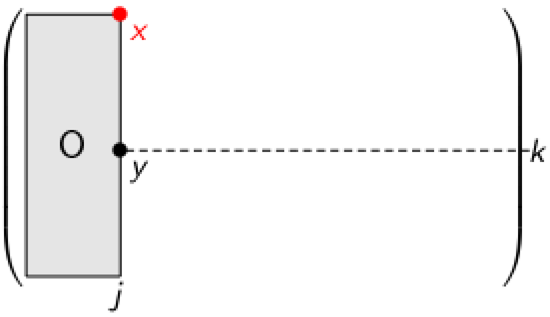


Теперь матрица выглядит так:



Наша следующая цель — обнулить все элементы j-го столбца, стоящие ниже первой строки.

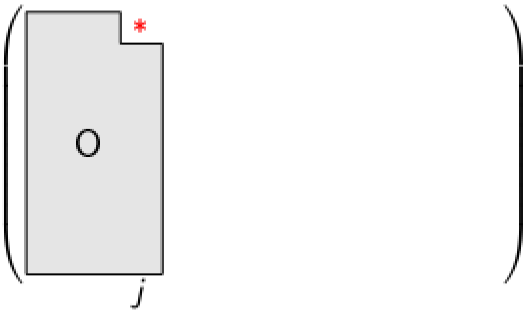
Предположим, что в j-м столбце есть ненулевой элемент y, стоящий в k-й строке, где $k > 1$.



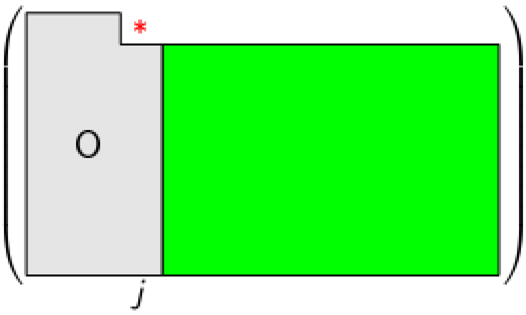
Прибавим к k-й строке, умноженной на x, первую строку, умноженную на $-y$. На самом деле мы выполнили здесь последовательность из четырех элементарных преобразований: сначала умножили первую строку на $-y$, затем умножили k-ю строку на x, затем прибавили первую строку к k-й, и, наконец, умножили первую строку на $-\frac{1}{y}$ (возвращая ее в исходное состояние). После этого в k-й строке и j-м столбце будет стоять элемент $xy - yx = 0$.

Действуя таким образом, обнулим в j-м столбце все элементы, расположенные ниже первой строки.

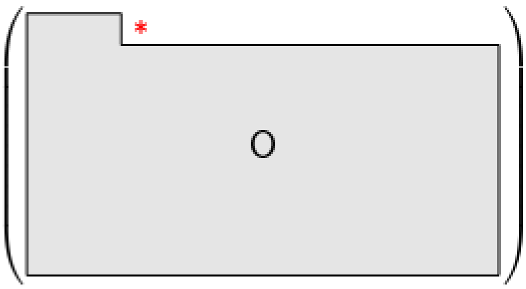
«Нулевая зона» продвинется на одну строку вниз и как минимум на один столбец вправо.



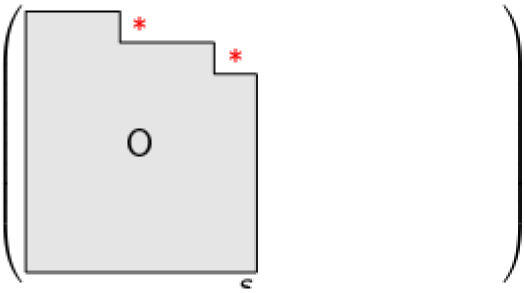
Рассмотрим часть полученной матрицы, расположенную правее j-го столбца и ниже первой строки.



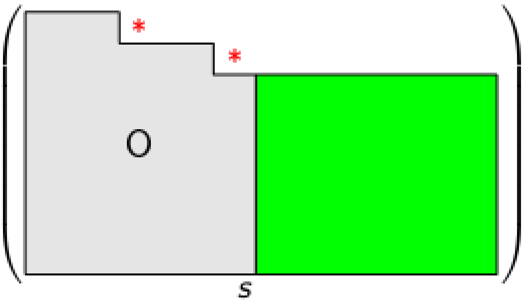
Если все элементы в этой части матрицы равны 0, то полученная матрица является ступенчатой.



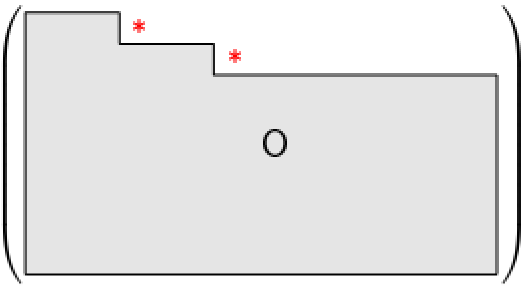
В противном случае повторим для этой части матрицы все описанные выше действия. А именно: найдем в этой части матрицы самый левый ненулевой столбец. Обозначим его номер (во всей матрице) через s. В этом столбце найдем самый верхний ненулевой элемент (расположенный ниже первой строки всей матрицы). Обозначим этот элемент через x'. Номер строки (во всей матрице), в которой стоит x', обозначим через r. Если $r > 2$, поменяем местами вторую и r-ю строки. Обнулим все ненулевые элементы s-го столбца, расположенные ниже второй строки, прибавляя к строкам, в которых стоят эти элементы, вторую строку, умноженную на подходящее число. В результате заполненная нулями зона в левой нижней части матрицы продвинется на одну строку вниз и как минимум на один столбец вправо.



Рассмотрим часть полученной матрицы, расположенную правее s-го столбца и ниже второй строки.



Если все элементы в этой части матрицы равны 0, то полученная матрица является ступенчатой.



В противном случае применим к этой части матрицы описанные выше действия. Будем продолжать этот процесс. Рано или поздно он оборвется, поскольку либо мы получим, что часть матрицы, расположенная ниже очередной строки и правее очередного столбца, состоит из нулей, либо в матрице не останется больше строк, либо в ней не останется больше столбцов. В любом случае полученная матрица будет ступенчатой. $\square$