Практика 4

Классификация формул алгебры предикатов

<u>Определение</u>. Формула Ф называется *тождественно истинной*, если она тождественно истина в любой интерпретации *M*. Такая формула называется также *общезначимой формулой*, или *тавтологией алгебры предикатов* и обозначается $\models Ф$. Множество всех тавтологий алгебры предикатов обозначим $\mathcal{T}_{АП.}$.

<u>Определение</u>. Формула Ф называется *выполнимой*, если она выполнима хотя бы в одной интерпретации *M*.

<u>Определение</u>. Формула Ф называется *опровержимой*, если она опровержимаа хотя бы в одной интерпретации *M*.

<u>Определение</u>. Формула Ф называется *тождественно ложной,* если она тождественно ложна в любой интерпретации *M*. Такая формула называется также *невыполнимой формулой*, или *противоречием алгебры предикатов* и обозначается $Ф \models$.

По определению условие $Ф \models$ равносильно условию $\models \neg Ф$.

<u>Пример 1.</u> Выясним, какие из приведенных ниже формул являются выполнимыми, какие являются невыполнимыми, а какие – общезначимыми.

1. $Ф = (\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)$.

Решение. Рассмотрим одноэлементную область интерпретации $M = \{a\}$ с тривиальным предикатом $P_M(x) = (x = x)$. Очевидно, что множество истинности этого предиката $P_M^+ = M$ и, значит,

$$\lambda\big((\forall x)P_M(x)\big) = 1, \lambda\big((\exists x)P_M(x) \Rightarrow (\forall x)P_M(x)\big) = 1,$$

$$M \vDash \Phi.$$

Это означает, что формула Ф выполнима.

С другой стороны, для двухэлементной области интерпретации $M = \{a, b\}$ с предикатом $P_M(x) = (x = a)$ выполняется $P_M^+ = \{a\} \neq M$ и, значит,

$$\lambda\big((\exists x)P_M(x)\big) = 1,\ \lambda\big((\forall x)P_M(x)\big) = 0,$$

$\lambda\big((\exists x)P_M(x) \Rightarrow (\forall x)P_M(x)\big) = 0$ и неверно, что $M \vDash \Phi$. Это означает, что формула Ф не является общезначимой.

2. $\Phi = (\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$.

Решение. Очевидно, что для одноэлементной области интерпретации $M = \{a\}$ с тривиальным предикатом $P_M(x) = (x = x)$ выполняется $M \vDash \Phi$, т.е. формула Ф выполнима.

С другой стороны, пусть для произвольной области интерпретации M с предикатом $P_M(x)$ выполняется $\lambda\big((\forall x)P_M(x)\big) = 1$. Это означает, что $P_M^+ = M$ и, следовательно,

$\lambda\big((\exists x)P_M(x)\big) = 1, \lambda\big((\forall x)P_M(x) \Rightarrow (\exists x)P_M(x)\big) = 1$ и $M \vDash \Phi$.

Это означает, что формула Ф является общезначимой.

3. $\Phi = (\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Leftrightarrow \big((\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)\big)$.

Решение. Очевидно, что для одноэлементной области интерпретации $M = \{a\}$ с тривиальными предикатами $P_M(x) = Q_M(x) = (x = x)$ выполняется $M \vDash \Phi$, т.е. формула Φ выполнима.

С другой стороны, для трехэлементной области интерпретации $M = \{a, b, c\}$ с предикатами

$$P_M(x) = (x = a),\ Q_M(x) = (x = a \vee x = b)$$

выполняется $P_M^+ = \{a\} \neq \emptyset,\ Q_M^+ = \{a, b\} \neq M$ и, значит,

$$\lambda\big((\exists x)P_M(x)\big) = 1,\ \lambda\big((\forall x)Q_M(x)\big) = 0,$$

$$\lambda\big((\exists x)P_M(x) \Rightarrow (\forall x)Q_M(x)\big) = 0,$$

$$\lambda\Big((\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\Big) = 1,\ \text{т.к. } (P \Rightarrow Q)^+ = \{b, c\} \cup \{a, b\} = M,$$

$$\lambda\Big((\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big) \Leftrightarrow \big((\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)\big)\Big) = 0,$$

т.е. неверно, что $M \vDash \Phi$. Это означает, что формула Φ не является общезначимой.

Домашнее задание

Задача 1. Выяснить, какие из приведенных ниже формул являются выполнимыми, какие являются невыполнимыми, а какие – общезначимыми.

1) $(\exists x)\, P(x) \implies \neg(\forall x)\neg P(x)$;

2) $\big((\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)R(x)\big) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge R(x))$.

Нормальные формы формул исчисления предикатов

Первым шагом алгоритма метода резолюций является приведение рассматриваемой формулы к специальным нормальным формам, которые аналогичны ДНФ и КНФ для формул алгебры высказываний (сокращенно, АВ).

Говорят, что бескванторная формула исчисления предикатов Ф находится в *конъюнктивной нормальной форме* (сокращенно КНФ), если она получается из некоторой формулы исчисления высказываний $\Phi'(X_1,...,X_n)$, находящейся в КНФ, заменой входящих в нее пропозициональных переменных $X_1,...,X_n$ некоторыми атомарными формулами АП $A_1,...,A_n$.

Говорят, что формула исчисления предикатов Ф находится в *предваренной* (или *пренексной*) *нормальной форме* (сокращенно ПНФ), если она имеет вид

$$(K_1x_1)...(K_nx_n)\Psi,$$

где $K_1,...,K_n$ – некоторые кванторы и Ψ – бескванторная формула, имеющая вид КНФ. При этом последовательность кванторов $(K_1x_1)...(K_nx_n)$ называется *кванторной приставкой* и формула Ψ называется *конъюнктивным ядром* формулы Ф.

Из основных логических равенств алгебры предикатов следует

Теорема 1. Любая формула исчисления предикатов Ф логически эквивалентна формуле Φ', находящейся в ПНФ.

Такая формула Φ' называется *пренексной нормальной формой* (сокращенно ПНФ) *формулы* Φ.

Алгоритм приведения формулы Φ к ПНФ:

1) преобразуем формулу Φ в эквивалентную ей формулу Φ_1, которая не содержит импликации и эквивалентности и в

которой отрицание действует только на атомарные формулы; при этом используются равенства:

$$\Phi \Rightarrow \Psi = \neg\Phi \vee \Psi,\ \Phi \Leftrightarrow \Psi = (\Phi \Rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \Rightarrow \Phi),$$

$$\neg(\Phi \wedge \Psi) = \neg\Phi \vee \neg\Psi,\ \neg(\Phi \vee \Psi) = \neg\Phi \wedge \neg\Psi,$$

$$\neg(\forall x)\Phi = (\exists x)\neg\Phi,\ \ \neg(\exists x)\Phi = (\forall x)\neg\Phi;$$

2) формулу Φ_1 преобразуем в эквивалентную ей формулу $\Phi_2 = (K_1 x_1)\ldots(K_n x_n)\Psi$, в которой все кванторы стоят в начале формулы и Ψ – бескванторная формула; при этом кванторы общности $(\forall x)$ выносятся из конъюнкции и кванторы существования $(\exists x)$ выносятся из дизъюнкции по правилам:

$$(\forall x)(\Phi \wedge \Psi) = (\forall x)\Phi \wedge (\forall x)\Psi,\ \ (\exists x)(\Phi \vee \Psi) = (\exists x)\Phi \vee (\exists x)\Psi,$$

кванторы общности $(\forall x)$ выносятся из дизъюнкции и кванторы существования $(\exists x)$ выносятся из конъюнкции по правилам:

$$(\forall x)(\Phi \vee \Psi) = (\forall x)\Phi \vee \Psi,\ \ (\exists x)(\Phi \wedge \Psi) = (\exists x)\Phi \wedge \Psi,$$

где при необходимости переименовываются связанные переменные x в новые переменные y, которые не входят в рассматриваемую формулу;

3) в формуле Φ_2 преобразуем бескванторную формулу Ψ в КНФ; при этом используются законы дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

4) в результате получаем формулу Φ', которая является ПНФ формулы Φ.

Пример 1. Приведем к ПНФ формулу

$$\Phi = (\forall y)(\exists x)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)Q(x, y),$$

где $P(x, y), Q(x, y)$ – атомарные формулы.

С помощью равенств, указанных в п. 1) алгоритма, заменяем импликацию и проносим отрицания к атомарным формулам:

$$\Phi = \neg(\forall y)(\exists x)P(x, y) \vee (\exists y)(\forall x)Q(x, y) =$$

$$= (\exists y)(\forall x)\neg P(x, y) \vee (\exists y)(\forall x)Q(x, y).$$

С помощью равенств, указанных в п. 2) алгоритма, выносим все кванторы в начало формулы:

$$\Phi = (\exists y)((\forall x)\neg P(x, y) \vee (\forall x)Q(x, y)) = (\exists y)((\forall x)\neg P(x, y) \vee (\forall z)Q(z, y)) =$$

$$= (\exists y)(\forall x)(\forall z)(\neg P(x, y) \vee Q(z, y)).$$

Так как бескванторная формула $\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ находится в КНФ, то полученная формула $(\exists y)(\forall x)(\forall z)(\neg P(x, y) \vee Q(z, y))$ является ПНФ формулы Φ.

Пусть замкнутая формула исчисления предикатов Ф находится в ПНФ:

$$\Phi = (K_1 x_1)\ldots(K_n x_n)\Psi,$$

где $K_1, \ldots, K_n$ – некоторые кванторы и $\Psi = \Psi(x_1, \ldots, x_n)$ – конъюнктивное ядро формулы Ф, т.е. бескванторная формула со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$, находящаяся в КНФ.

Тогда в кванторной приставке формуле Φ можно удалить любой квантор существования $(\exists x_s)$ для $1 \le s \le n$ по следующему правилу:

1) если левее квантора существования $(\exists x_s)$ в формуле Φ не стоит никакой квантор общности, то выбираем новый предметный символ *c,* заменяем этим символом *c* все вхождения переменной x_s в конъюнктивное ядро формулы Φ и вычеркиваем $(\exists x_s)$ из кванторной приставки формулы Φ;
2) если же левее квантора существования $(\exists x_s)$ стоят кванторы общности $(\forall x_{s_1}) \dots (\forall x_{s_m})$ для значений $1 \le s_1 < \dots < s_m < s$, то выбираем новый m-арный функциональный символ *f,* заменяем все вхождения переменной x_s в конъюнктивное ядро формулы Φ выражением $f(x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$ и вычеркиваем $(\exists x_s)$ из кванторной приставки формулы Φ.

В результате такой замены всех кванторов существования в формуле Φ получим замкнутую ПНФ Φ′, кванторная приставка которой получается из кванторной приставки формулы Φ удалением всех кванторов существования и которая содержит новые символы – функциональные или предметные. При этом формула Φ выполнима или противоречива одновременно с формулой Φ′.

Рассмотренный прием удаления квантора существования был введен Скулемом и называется *скулемизацией формул*. Вводимые в процессе скулемизации новые функциональные и предметные символы называются *функторами Скулема* или *скулемовскими функциями*. Полученную в результате скулемизации замкнутую ПНФ Φ' называют *скулемовской стандартной формой* (сокращенно ССФ).

Теорема 2. Любая замкнутая формула исчисления предикатов Φ эффективно преобразуется в логически эквивалентную ей *скулемовскую стандартную форму* (сокращенно ССФ) Φ'. При этом формула Φ выполнима или противоречива одновременно с ее ССФ.

Пример 2. Как показано в предыдущем примере, замкнутая формула

$$\Phi = (\forall y)(\exists x)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)Q(x, y)$$

имеет ПНФ

$$(\exists y)(\forall x)(\forall z)(\neg P(x, y) \vee Q(z, y)),$$

результатом скулемизации которой является формула

$$\Phi' = (\forall x)(\forall z)(\neg P(x, c) \vee Q(z, c))$$

с новым предметным символом c. Значит, Φ' является ССФ формулы Φ.

Заметим, что в результате скулемизации формул могут появиться не толь новые постоянные символы, но и новые функциональные символы.

Пример 3**.** Результатом скулемизации формулы

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists w)\big((\neg P(x) \vee R(y)) \wedge P(z) \wedge \neg R(w)\big)$$

является удаление квантора существования $(\exists x)$ с заменой переменной x новым предметным символом с и удаление квантора существования $(\exists w)$ с заменой переменной w выражением $f(y,z)$ с новым бинарным функциональным символом f, что дает следующую ССФ

$$(\forall y)(\forall z)\big((\neg P(c) \vee R(y)) \wedge P(z) \wedge \neg R(f(y,z))\big).$$

Домашнее задание

Задача 1. Найти ПНФ и ССФ следующей формулы:

1) $(\exists x)(\exists y)(P(x,y) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)P(x,y) \vee R(x))$;

2) $(\exists x)\big(M(x,x) \Rightarrow (N(x) \Rightarrow (\forall x)\big((\forall x)M(x,x) \wedge N(x)\big))\big)$;

3) $(\exists x)((\exists y)\neg P(x,y) \Rightarrow (\forall x)R(x)) \Rightarrow (\forall x)(R(x) \vee (\exists x)P(x,f(x)))$.