МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Структура курса

1. Математическая логика
   1.1. Логика высказываний
   1.2. Алгебра логики
   1.3. Логика предикатов
2. Аксиоматический метод
3. Теория алгоритмов

1. Игошин, В. И. Математическая логика и теория алгоритмов. - Москва, 2008.
2. Молчанов, В. А. Логика высказываний: учебное пособие для студентов факультета компьютерных наук и информационных технологий. - Саратов, 2014.
3. Ершов, Ю. Л., Е. А. Палютин. Математическая логика. - Москва, 2011.
4. Игошин, В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие. - Москва, 2007.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Предмет математической логики

Логика возникла в VI—IV вв. до н. э. как «анализ мышления», т.е. анализ принципов правильных рассуждений.

Основоположник логики – древнегреческий ученый Аристотель (384-322 гг. до н. э.), который в сочинениях «Аналитики» впервые изложил идею дедуктивного вывода.

ЛОГИКА (ФОРМАЛЬНАЯ)

изучает **формы,** в которых проявляются законы причинно-следственных связей, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся.

Математическая логика занимается обоснованием правильных способов рассуждений с помощью **математического аппарата.**

Главная цель классической математической логики – формализация и обоснование правильных способов **математических рассуждений** с целью точного определения понятия «математическое доказательство».

Этапы развития математической логики:

Английский математик Дж.Буль (1815—1864) создал алгебру логики.

Немецкий математик Г.Фреге (1848—1925) разработал логико-математические языки и теорию их осмысления (так называемую семантику).

Немецкий математик Д.Гильберт (1862—1943) разработал программу обоснования математики на основе **аксиоматического подхода.**

Главная задача современной математической логики – изучение формальных теорий, представляющих собой множества теорем, получающихся из исходных аксиом с помощью дедуктивных умозаключений.

Проблемы: **непротиворечивость, полнота** и **разрешимость** теорий.

Проблема разрешимости теорий – первоисточник теории алгоритмов!

В настоящее время актуальность математической логики и теории алгоритмов обусловлена:

- широким применениеми информационно-коммуникационных технологий,
- необходимостью создания теоретических основ обработки и передачи информации, математического моделирования самых разнообразных задач и процессов,
- созданием искусственного интеллекта (ИИ).

ИИ – интеллектуальный агент (система), который воспринимает окружающую среду с помощью специальных датчиков и воздействует на эту среду с помощью исполнительных механизмов.

Логические агенты – агенты, основанные на знаниях и принимающие решения с помощью выводов по определенным правилам.

Логика высказываний

Высказывание - повествовательное предложение, о котором можно судить, истинное оно или ложное.

Обозначаются высказывания $A, B, C, \ldots$

Истинностное значение высказывания A обозначается символом $\lambda(A)$ и определяется по формуле:

$\lambda(A)=1$, если высказывание A истинно, и

$\lambda(A)=0$, если A ложно.

Алгебра высказываний

Из высказываний путем соединения их с помощью связок «не», «и», «или», «следует», «равносильно» можно составлять новые, более сложные высказывания.

При этом главное внимание уделяется функциональным зависимостям истинностных значений высказываний, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих их высказываний.

Определение. *Отрицанием высказывания* A называется высказывание $\neg A$ (читается «не A»), которое истинно в том и только том случае, если высказывание A ложно.

Таблица истинностных значений операции отрицания

A	$\neg A$
1	0
0	1

Определение. *Конъюнкцией высказываний* A, B называется высказывание $A \wedge B$ (читается «A и B»), которое истинно в том и только том случае, если оба высказывания A, B истинны.

Дизъюнкцией высказываний A, B называется высказывание $A \vee B$ (читается «A или B»), которое ложно в том и только том случае, если оба высказывания A, B ложны.

Импликацией высказываний A, B называется высказывание $A \Rightarrow B$ (читается «A влечет B»), которое ложно в том и только том случае, если высказывание A истинно, а высказывание B ложно.

Эквивалентностью высказываний A, B называется высказывание $A \Leftrightarrow B$ (читается «A равносильно B»), которое истинно в том и только том случае, если высказывания A и B имеют одинаковое истинностное значение.

Таблица истинностных значений логических операций.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Определение. *Алгеброй высказываний* называется множество всех высказываний $\mathscr{P}$ с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Формулы алгебры высказываний

Свойства алгебры высказываний $\mathscr{P}$ описываются с помощью формул, которые строятся из переменных символов с помощью знаков логических операций. Такие формулы принято называть также *пропозициональными формулами*

Символы логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ называются *пропозициональными связками*.

Переменные символы $X, Y, Z, \ldots,$ которые используются для обозначения высказываний, называются *пропозициональными переменными*.

Определение. *Формулы* алгебры высказываний индуктивно определяются по правилам:

1) каждая пропозициональная переменная является формулой,
2) если Φ, Ψ – формулы, то формулами являются также выражения

$$(\neg\Phi),\ (\Phi \wedge \Psi),\ (\Phi \vee \Psi),\ (\Phi \Rightarrow \Psi),\ (\Phi \Leftrightarrow \Psi).$$

Множество всех формул алгебры высказываний обозначим $\mathcal{F}_{\mathrm{AB}}$.

Для упрощения записи формул скобки в них по возможности опускаются с учетом следующего **приоритета выполнения логических операций**: $\neg, \wedge, \vee$ и остальные.

Так, формула

$$\left(\left(\left((\neg X) \wedge (\neg Y)\right) \vee (\neg(\neg Z))\right) \Rightarrow (X \vee (\neg Y))\right)$$

сокращенно записывается в виде

$$\neg X \wedge \neg Y \vee \neg\neg Z \Rightarrow X \vee \neg Y.$$

Если в формулу Ф входят переменные $X_1,\ldots,X_n$, то записывают $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$.

Из индуктивного определения формул следует, что если в формулу Ф вместо переменных $X_1,\ldots,X_n$ подставить произвольные конкретные высказывания $A_1,\ldots,A_n$, то получится некоторое сложное высказывание $\Phi(A_1,\ldots,A_n)$.

Истинностное значение высказывания $\lambda(\Phi(A_1,\ldots,A_n))$ определяется истинностными значениями исходных высказываний $\lambda(A_1),\ldots,\lambda(A_n)$ согласно таблицам истинностных значений логических операций $\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow$.

Формула Ф определяет функцию n переменных F_{Φ}, которая каждому упорядоченному набору $(\lambda(X_1),...,\lambda(X_n))$ n элементов множества $\{0,1\}$ ставит в соответствие элемент $\lambda(\Phi(X_1,...,X_n))$ этого же множества.

Функция F_{Φ} называется *истинностной функцией формулы* Ф и графически представляется *истинностной таблицей*.

Такая таблица содержит 2^n строк и имеет одно из 2^{2^n} возможных распределений значений 0 и 1 в последнем столбце.

Пример. Формула $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y)$ имеет следующую истинностную таблицу:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y$	$X \vee \neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Пример. Составим таблицу истинности для формулы

1 5 2 4 3

$$\left(P \Rightarrow Q\right) \Leftrightarrow \left(\neg Q \Rightarrow \neg P\right)$$

P	Q	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

Таблица показывает, что, какого бы истинностного значения высказывания ни подставлялись в данную формулу вместо пропозициональных переменных P и Q, формула всегда превращается в истинное высказывание.

Определение. Формула Ф называется:

– *тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*) и обозначается $\models \Phi$, если ее истинностная функция тождественно равна 1;

– *противоречием* (или *тождественно ложной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 0;

– *выполнимой,* если ее истинностная функция не равна тождественно 0;

– *опровержимой,* если ее истинностная функция не равна тождественно 1.

Тавтологии являются общими схемами построения истинных высказываний и в этом смысле выражают определенные *логические законы*.

Примеры таких законов являются:

$\models X \vee \neg X$ – закон исключенного третьего,

$\models \neg\neg X \Leftrightarrow X$ – закон двойного отрицания,

$\models \neg(X \wedge \neg X)$ – закон противоречия,

$\models (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$ – закон контрапозиции.

Новые тавтологии можно получить с помощью следующего правила.

Правило подстановки:

если $\models \Phi(X_1,\dots,X_n)$, то для любых формул $\Phi_1,\dots,\Phi_n$ тавтологией является формула $\Phi(\Phi_1,\dots,\Phi_n)$.

Логическая равносильность формул

Определение. Формулы Φ, Ψ называются *логически равносильными* (или просто *равносильными*), если они принимают одинаковые логические значения при любых истинностных значениях их переменных.

Это равносильно условию $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Для обозначения логически эквивалентных формул используется символическая запись $\Phi = \Psi$, или $\Phi \cong \Psi$.

Такие выражения называются *логическими равенствами* или просто *равенствами формул*.

Лемма 1. Справедливы следующие равенства формул:

1) $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$, $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$ – свойства ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции;

2) $X \vee Y = Y \vee X$, $X \wedge Y = Y \wedge X$ – свойства коммутативности дизъюнкции и конъюнкции;

3) $X \vee X = X$, $X \wedge X = X$ – свойства идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции;

4) $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$, $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – законы дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5) $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$ – законы де Моргана;

6) $(X \wedge Y) \vee X = X$, $(X \vee Y) \wedge X = X$ – законы поглощения;

7) $\neg\neg X = X$ – закон двойного отрицания;

8) $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y$, $X \Rightarrow Y = \neg(X \wedge \neg Y)$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией и конъюнкцией;

9) $X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$, $X \Leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$ – взаимосвязь эквивалентности с импликацией, дизъюнкцией и конъюнкцией.

Лемма (Правило замены). Если формулы Φ, Φ' равносильны, то для любой формулы $\Psi(X)$, содержащей переменную X, выполняется равенство: $\Psi(\Phi) = \Psi(\Phi')$.

Это правило означает, что при замене в любой формуле $\Psi = \Psi(\Phi)$ некоторой ее подформулы Φ на равносильную ей формулу Φ' получается формула $\Psi' = \Psi(\Phi')$, равносильная исходной формуле Ψ.

Такие переходы называются *равносильными преобразованиями формул*.

Пример.

Формула $\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$ с помощью равенств 5),7),8) из леммы 1 равносильно преобразовывается следующим образом:

$$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z = \neg(X \Rightarrow Y) \vee Z =$$

$$= \neg(\neg(X \wedge \neg Y)) \vee Z = (X \wedge \neg Y) \vee Z \cdot$$