ΜΙΧΑΛΙΤΣΗΣ ΑΛΚΙΒΙΑΔΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΑΜ: 03118868
7Ο ΕΞΑΜΗΝΟ

2Η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ»

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μετατρέψτε σε κανονική συζευκτική μορφή τις παρακάτω προτάσεις:

1. $(p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow ((r \wedge s) \vee t)$
2. $(\forall x.\forall y.\exists z.\, q(x,y,z) \vee \exists x.\forall y.\, p(x,y)) \wedge \neg(\exists x.\exists y.\, p(x,y))$

1.)

$(p <=> \neg q) => ((r \cap s) \cup t)$

$((p => \neg q) \cap (\neg q => p)) => ((r \cap s) \cup t)$

$\neg((p => \neg q) \cap (\neg q => p)) \cup ((r \cap s) \cup t)$

$\neg((\neg p \cup \neg q) \cap (q \cup p)) \cup ((r \cup t) \cap (t \cup s))$

$(\neg(\neg p \cup \neg q) \cup \neg (q \cup p)) \cup ((r \cup t) \cap (t \cup s))$

$((p \cap q) \cup (\neg q \cap \neg p)) \cup ((r \cup t) \cap (t \cup s))$

$(((p \cup (\neg q \cap \neg p)) \cap (q \cup (\neg q \cap \neg p))) \cup ((r \cup t) \cap (t \cup s))$

$((p \cup \neg p) \cap (p \cup \neg q) \cap (q \cup \neg p) \cap (q \cup \neg q)) \cup ((r \cup t) \cap (t \cup s))$

$((p \cup \neg q) \cap (q \cup \neg p)) \cup ((r \cup t) \cap (t \cup s))$

$(p \cup \neg q \cup r \cup t) \cap (p \cup \neg q \cup t \cup s) \cap (q \cup \neg p \cup r \cup t) \cap (q \cup \neg p \cup t \cup s)$

2.)

Το z στον πρώτο όρο εξαρτάται από τα x,y → Το αντικαθιστούμε με την συνάρτηση Skolem f(x,y) →

$(\forall x.\forall y.q(x,y,f(x,y)) \cup \exists x.\forall y.p(x,y)) \cap \neg(\exists x.\exists y.p(x,y))$

$(\forall x.\forall y.q(x,y,f(x,y)) \cup \exists x.\forall y.p(x,y)) \cap (\forall x \neg \exists y.p(x,y))$

$(\forall x.\forall y.q(x,y,f(x,y)) \cup \exists x.\forall y.p(x,y)) \cap (\forall x.\forall y(\neg p(x,y)))$

Ο δεύτερος όρος είναι μία υπαρξιακή πρόταση, όπου πρέπει να απαλλάξουμε για να πάρουμε CNF.

- → Αντικαθιστούμε το x με μία σταθερά Skolem c1 και παίρνουμε:

  $(\forall x.\forall y.q(x,y,f(x,y)) \cup \forall y.p(c1,y)) \cap (\forall x.\forall y(\neg p(x,y)))$
  $(q(x,y,f(x,y)) \cup p(c1,y)) \cap (\neg p(x,y))$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται οι εξής τρεις προτάσεις:

1. $\forall x.R(x, x)$
2. $\forall x.\forall y.(R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$
3. $\forall x.\forall y.\forall z.(R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z))$

Οι προτάσεις αυτές λένε ότι η R είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Για κάθε ζεύγος προτάσεων βρείτε, αν υπάρχει, ένα μοντέλο που ικανοποιεί τις δύο αυτές προτάσεις αλλά δεν ικανοποιεί την τρίτη. Τι συμπέρασμα βγάζετε σχετικά με το αν κάποια από τις προτάσεις αποτελεί λογική συνέπεια άλλων προτάσεων;

Έστω το σύνολο S = {a, b, c}

1) Ιδιότητες : Ανακλαστική και Συμμετρική

   Προκύπτει R = {(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)}

   Υπάρχουν τα (b,a) και (a,c) αλλά δεν υπάρχει το (b,c) → Δεν ισχύει η μεταβατική ιδιότητα.

2) Ιδιότητες: Ανακλαστική και Μεταβατική

   Προκύπτει R = {(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)}

   Υπάρχει το (a,c) αλλά δεν υπάρχει το (c,a) → Δεν ισχύει η συμμετρική ιδιότητα.

3) Ιδιότητες: Συμμετρική και Μεταβατική

   Προκύπτει R = {(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(b,c),(c,c),(c,b),(a,c),(c,a)}

   Συμμετρική ιδιότητα → Έχουμε R(x,y) και R(y,x)
   Μεταβατική ιδιότητα→ ∀x∀y(R(x,y)∩R(y,x)=>R(x,x))→

   Ισχύει και η ανακλαστική ιδιότητα, άρα προκύπτει ότι:
   Συμμετρική∩Μεταβατική → Ανακλαστική

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η γνώση $\mathcal{K}$ που αποτελείται από τις προτάσεις:

$$\forall x.\exists y.(A(x) \Rightarrow R(x,y) \wedge C(y))$$
$$\forall x.\exists y.(B(x) \Rightarrow S(y,x) \wedge D(y))$$
$$\forall x.(D(x) \Rightarrow A(x))$$
$$\forall x.\forall y.(S(x,y) \Rightarrow T(y,x))$$
$$\forall x.\forall y.\forall z.(T(x,y) \wedge R(y,z) \wedge C(z) \Rightarrow Q(x))$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της ανάλυσης, να ελέγξετε αν $\mathcal{K} \models \forall x.(B(x) \Rightarrow Q(x))$

Θέλουμε να δείξουμε ότι K|=∀x.(B(x)=>Q(x)) → K'
Όπου K' = K ∩ (¬∀x.(B(x)=>Q(x)) , μη ικανοποιήσιμη.
Μετατρέπουμε τις προτάσεις της K' σε CNF →

1) ∀x.∃y.(A(x)=>R(x,y)∩c(y)) → (¬A(x)∪R(x,f(x)))∩ (¬A(x)∪C(f(x)))

   ¬A(x)∪R(x,f(x)) , ¬A(x)∪C(f(x)) , Skolem function f(x)

2) ∀x.∃y.(B(x)=>S(y,x)∩D(y)) → (¬B(x)∪S(f(x),x))∩ (¬B(x)∪D(g(x)))

   ¬B(x)∪S(g(x),x), ¬B(x)∪D(g(x)), Skolem function g(x)

3) ∀x.(D(x) => A(x))

   ¬B(x)∪A(x)

4) ∀x.∀y.(S(x,y)=>T(y,x))

   ¬S(x,y)∪T(y,x)

5) ∀x.∀y.∀z.(T(x,y)∩R(y,z)∩C(z)=>Q(x))

   ¬T(x,y)∪¬R(y,z)∪¬C(z)∪Q(x)

6) ¬∀x.(B(x)=>Q(x)) → ∃x.(B(x)∩¬Q(x))

   B(c), ¬Q(c), Skolem constant c

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις:

5, 1α → 7) ¬T(x,y)∪¬A(z)∪¬C(z)∪Q(x)
7, 3 → 8) ¬T(x,y)∪¬B(z)∪¬C(z)∪Q(x)
8, 6α → 9) ¬T(x,y)∪¬C(z)∪Q(x)
9, 1β →10) ¬T(x,y)∪¬A(x)∪Q(x)
10, 3 →11) ¬T(x,y)∪¬B(x)∪Q(x)
11, 6α →12) ¬T(x,y)∪Q(x)
12, 4 → 13) ¬S(y,x)∪Q(x)

13, 2α → 14) ¬B(x)∪Q(x)
14, 6α → 15) Q(x)
15, 6β → Κενή πρόταση →

→ K ∩ (¬∀x.(B(x)=>Q(x)) είναι μη ικανοποιήσιμη.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Διατυπώστε σε λογική πρώτης τάξης τις ακόλουθες προτάσεις:

1. Όλες οι χώρες ανήκουν σε κάποια ήπειρο.
2. Μερικές χώρες έχουν πληθυσμό πάνω από 300 εκατομμύρια.
3. Δεν υπάρχουν χώρες που να ανήκουν σε τρεις ηπείρους.
4. Κάποια χώρα της Αμερικής είναι πολυπληθέστερη από όλες τις χώρες της Ευρώπης.
5. Υπάρχουν ακριβώς δύο χώρες με πληθυσμό πάνω από 1 δισεκατομμύριο.
6. Η Κίνα και η Ινδία είναι οι δύο πολυπληθέστερες χώρες.

Θεωρήστε ότι η γλώσσα διαθέτει τα κατηγορήματα Χώρα(x), Ήπειρος(x), ΑνήκειΣε(x, y), ΜεγαλύτεροΑπό(x, y), τη συνάρτηση πληθυσμός(x) με τις προφανείς ερμηνείες, και σταθερές για τις χώρες, τις ηπείρους και τις αριθμητικές τιμές πληθυσμών.

1. ∀x∃y(Χώρα(x)=>(Ήπειρος(y)∩ΑνήκειΣε(x,y)))
2. ∃x(Χώρα(x)∩ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(x), $3*10^8$))
3. ¬∃x∀y∀z∀w(Χώρα(x) ∩ Ήπειρος(y) ∩ ΑνήκειΣε(x,y) ∩ Ήπειρος(z) ∩ ΑνήκειΣε(x,z) ∩ Ήπειρος(w) ∩ ΑνήκειΣε(x,w))
4. ∃x∀y(Χώρα(x)∩ΑνήκειΣε(x,Αμερική)=> (Χώρα(y)∩ΑνήκειΣε(y,Ευρώπη)∩ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(x), πληθυσμός(y)))
5. ∃x∃y∀z((Χώρα(x) ∩ Χώρα(y) ∩ Χώρα(z) ∩ ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(z), 10^9))=>((z=x∩z≠y)∪(z=y∩z≠x)))
6. ¬∃x(Χώρα(x) ∩ ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(x), πληθυσμός(Κίνα)) ∩ ΜεγαλύτεροΑπό(πληθυσμός(x), πληθυσμός(Ινδία)))

ΑΣΚΗΣΗ 5

Βρείτε, αν υπάρχει, μια ερμηνεία που να ικανοποιεί την πρώτη πρόταση αλλά να μην ικανοποιεί την δεύτερη πρόταση στις εξής δύο περιπτώσεις:

1. $\forall x.(p(x) \Rightarrow q(a))$
   $(\forall x.p(x)) \Rightarrow q(a)$
2. $\exists x.(p(x) \Rightarrow q(a))$
   $(\exists x.p(x)) \Rightarrow q(a)$

1.

∀x.(p(x)=>q(α))	(∀x.p(x))=>q(α)
∀x.(¬p(x) ∪ q(α))	(¬∀x.p(x)) ∪ q(α)
∀x.(¬p(x) ∪ q(α))	(∃x.¬p(x)) ∪ q(α)

Μετατρέπουμε τις δύο προτάσεις σε CNF

Αντικαθιστούμε την υπαρξιακή δεύτερη πρόταση με μία πρόταση CNF χρησιμοποιώντας την Skolem σταθερά c1:

$\neg p(x) \cup q(\alpha)$	$\neg p(c1) \cup q(\alpha)$

Οι δύο προτάσεις δεν είναι ίδιες → Υπάρχει ερμηνεία της πρώτης που δεν ικανοποιεί την δεύτερη.

2.

$\exists x.(p(x) \Rightarrow q(\alpha))$	$(\exists x.p(x)) \Rightarrow q(\alpha)$
$\exists x.(\neg p(x) \cup q(\alpha))$	$(\neg \exists x.p(x)) \cup q(\alpha)$
$\exists x.(\neg p(x) \cup q(\alpha))$	$(\forall x.\neg p(x)) \cup q(\alpha)$

Μετατρέπουμε τις δύο προτάσεις σε CNF

Αντικαθιστούμε την υπαρξιακή πρώτη πρόταση με μία πρόταση CNF χρησιμοποιώντας την Skolem σταθερά c2:

$\neg p(c2) \cup q(\alpha)$	$\neg p(x) \cup q(\alpha)$

Οι δύο προτάσεις δεν είναι ίδιες → Υπάρχει ερμηνεία της δεύτερης που δεν ικανοποιεί την πρώτη.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Γράψτε το σύμπαν και τη βάση Herbrand των εξής λογικών προγραμμάτων:

1. $r(x,b) \leftarrow r(a,x).$
   $r(x,z) \leftarrow r(x,y), r(y,z).$

2. $q(0) \leftarrow .$
   $p(x) \leftarrow p(f(x)).$

1. S = { $r(x,b) \leftarrow r(a,x).$ $r(x,z) \leftarrow r(x,y),r(y,z).$ }

   Σύμπαν Herbrand: Hs = {a,b}

   Βάση Herbrand: Hs(S) = {r(a,a), r(a,b), r(b,a), r(b,b)}

2. S = { $q(0) \leftarrow .$ $p(x) \leftarrow p(f(x)).$ }

   Σύμπαν Herbrand: Hs = {q(0), f(q(0)), f(f(q(0))), …}

   Βάση Herbrand: Hs(S) = {p(q(0)), p(f(q(0))), p(f(f(q(0)))), …}

   Προκύπτει ότι έχουμε άπειρο πλήθος βασικών όρων στο σύμπαν Herbrand → Προκύπτει ότι η βάση έχει επίσης άπειρα στοιχεία.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται το παρακάτω λογικό πρόγραμμα:

$\text{parent}(x, y) \leftarrow \text{father}(x, y).$
$\text{parent}(x, y) \leftarrow \text{mother}(x, y).$
$\text{sibling}(y, z) \leftarrow \text{parent}(y, x), \text{parent}(z, x).$
$\text{sibling}(x, y) \leftarrow \text{sibling}(y, x).$
$\text{grandparent}(x, z) \leftarrow \text{parent}(x, y), \text{parent}(y, z).$
$\text{cousin}(y, z) \leftarrow \text{grandparent}(y, x), \text{grandparent}(z, x).$
$\text{mother}(A, B) \leftarrow .$
$\text{father}(A, C) \leftarrow .$
$\text{mother}(B, D) \leftarrow .$
$\text{mother}(E, D) \leftarrow .$
$\text{father}(F, E) \leftarrow .$
$\text{father}(G, E) \leftarrow .$

Εκτελώντας τους αλγορίθμους: 1) forward chaining και 2) backward chaining, απαντήστε στα ερωτήματα $\text{cousin}(A, F)$ και $\text{sibling}(A, G)$. (Θεωρήστε ότι η απάντηση μπορεί να είναι είτε επιτυχία ή είτε αποτυχία).

1. Forward Chaining

Mother(A,B)	Father(A,C)	Mother(B, D)	Mother(E,D)	Father(F,E)	Father(G,E)
Parent(A,B)	Parent(A,C)	Parent(B,D)	Parent(E,D)	Parent(F,E)	Parent (G,E)
	GrandParent(A,D)	Sibling(B,E)	GrandParent(F,D)	GrandParent(G, D)	Sibling(F,G)
	Cousin(A,F)	Sibling(E,B)	Cousin(A,G)	Cousin(F,G)	Sibling(G,F)

Cousin(A,F): επιτυχία
Sibling(A,G): αποτυχία

2. Backward Chaining

Cousin(A,F)			
GrandParent(A,x)		GrandParent(F,x)	
Parent(A,y) {y/B}	Parent(y,x) {y/B}	Parent(F,z) {z/E}	Parent(z,x) {z/E}
Mother(A,B)	Mother(B,x) {x/D}	Father(F,E)	Mother(E,x) {x/D}
	Mother(B,D) {}		Mother(F,D) {}

Sibling(A,G)	
Parent(A,x)	Parent(G,x)
X	X

Cousin(A,F) : επιτυχία
Sibling (A,G): αποτυχία

Στον παραπάνω αλγόριθμο backward chaining για το Sibling(A,G) δεν πήραμε και την συνεπαγωγή Sibling(x,y)←Sibling(y,x), διότι θα δημιουργούνταν άπειρα υπό - δέντρα και δεν θα τελείωνε ποτέ η αναζήτηση, γεγονός που δεν γίνεται, εφόσον η εκφώνηση λέει ότι έχουμε είτε επιτυχία είτε αποτυχία.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνεται το εξής λογικό πρόγραμμα:

$add(x, 0, x) \leftarrow .$
$add(x, s(y), s(z)) \leftarrow add(x, y, z).$

Εφαρμόστε τον αλγόριθμο ανάλυσης backward SLD για το ερώτημα $add(s(0), v, s(s(0)))$. Αν ο αλγόριθμος καταλήγει σε επιτυχία, θα πρέπει να επιστρέψει και την αντικατάσταση που οδήγησε στην επιτυχία.

Έχουμε:

C1: add(x,0,x)←.
C2: add(x,s(y),s(z))←add(x,y,z)

Εφαρμόζουμε Backward SLD:

add(s(0), v, s(s(0)))

{ v/s(y1)}

add(s(0), y1, s(0))

{y1/0}

add(s(0), 0, s(0))

.

Έχουμε επιτυχία.

Αυτό προέκυψε με την παρακάτω αντικατάσταση:

v/s(y1) ∩ y1/0 → v/s(0)

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνεται η βάση γνώσης Περιγραφικής Λογικής που περιέχει τα παρακάτω αξιώματα:

$A \sqsubseteq \exists r.B$
$B \sqsubseteq \exists s.(A \sqcap C)$
$s \equiv r^{-}$
$A(a)$
$\neg C(a)$

Γράψτε τα σύνολα IN, CN και RN και δώστε ένα μοντέλο της γνώσης αν υπάρχει, αλλιώς εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει.

α ∈ IN
A,B,C ∈ CN
r,s ∈ RN

Δεν μπορεί να παραχθεί γνωστικό μοντέλο με βάση τα παραπάνω, καθώς έχουμε μόνο ένα άτομο που δεν μπορεί να ανήκει σε όλες τις έννοιες, γιατί τότε δεν έχουν νόημα οι ρόλοι.

r = hasSolution, A = Problem, B = Algorithm, a = Sorting.

Βάση του A≤∃r.B και του ισχυρισμού έννοιας A(a) προκύπτει:
r(A(a),B(?)) ή hasSolution(Problem(Sorting),Algorithm(?))

το οποίο δεν μπορεί να συμπληρωθεί από το σύνολο αλγορίθμων που διαθέτουμε. Συνεπώς δεν υπάρχει μοντέλο γνώσης τη; παραπάνω βάσης γνώσης.