



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ρομποτική 1:
Pendubot

Ομάδα A2-4

Αλκιβιάδης Παναγιώτης Μιχαηλίτσης Α.Μ: 03118868

Αργύρης Μανέτας Α.Μ.: 03117019

Παναγιώτης Κάπρος Α.Μ: 03118926

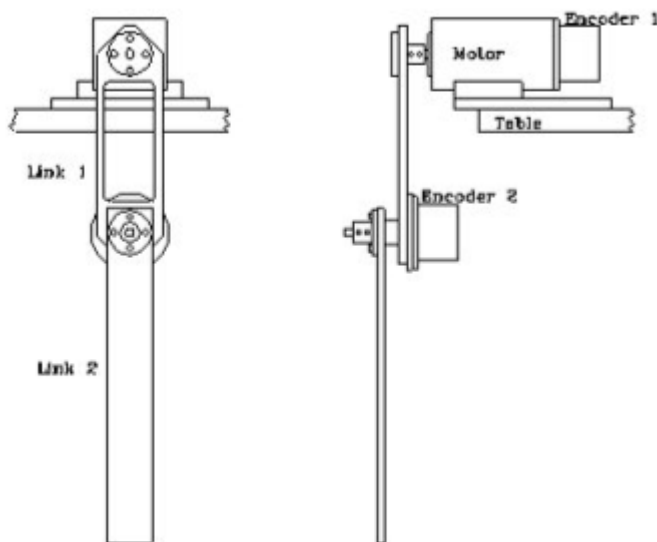
Θεοδόσιος Πουντρίδης Α.Μ.: 03117093

Περιγραφή πειράματος και θεωρίας ελέγχου:

Στόχος

Στόχος του εργαστηρίου είναι η εξοικείωση και κατανόηση από πλευράς των φοιτητών των τεχνικών ελέγχου ρομποτικών συστημάτων. Με την πειραματική ρύθμιση ενός PD ελεγκτή, την υλοποίηση της τεχνικής της αντιστάθμισης της βαρύτητας και την υλοποίηση σε πειραματικό στάδιο ενός ελεγκτή δύο φάσεων ο οποίος θα συμπεριλαμβάνει μη γραμμικούς όρους βασισμένους στο δυναμικό ρομποτικό μοντέλο, επιτυγχάνεται καλύτερη κατανόηση της θεωρίας του γραμμικού, μη γραμμικού και δυναμικού ελέγχου ρομποτικών συστημάτων.

Σε αυτή την πειραματική διαδικασία χρησιμοποιήθηκε ο ρομποτικός μηχανισμός pendubot, ο οποίος αποτελείται από δύο συνδέσμους συνδεδεμένους σε μορφή “δέντρου” μέσω μιας περιστροφικής άρθρωσης χωρίς τριβές. Συνολικά έχει δύο αρθρώσεις, εκ των οποίων μόνο η μία είναι ελεγχόμενη. Συγκεκριμένα, πρώτη άρθρωση οδηγείται από έναν DC κινητήρα 90V, ενώ η δεύτερη άρθρωση κινείται μέσω των επιταχύνσεων του πρώτου συνδέσμου. Επειδή, λοιπόν το σύστημα διαθέτει περισσότερους βαθμούς ελευθερίας από αυτούς που μπορούν να ελεγχθούν, αυτό ανήκει στην κατηγορία των υποοδηγούμενων συστημάτων. Το όλο σύστημα είναι πακτωμένο στο έδαφος.

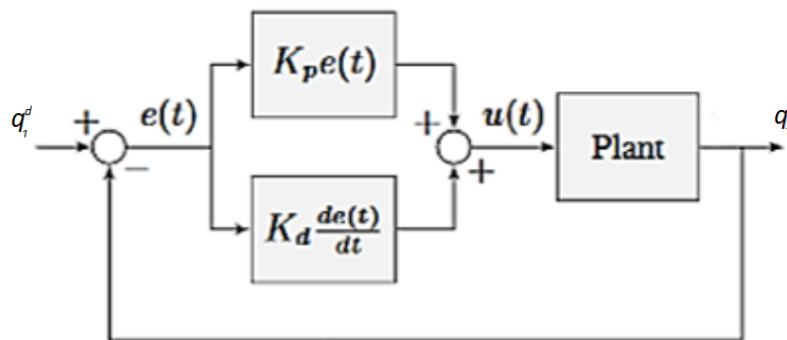


Ο ελεγχος του μηχανισμού ήταν εφικτός μέσω της σύνδεσής του με τον υπολογιστή του εργαστηρίου. Στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab θέταμε τις τιμές των K_p και K_d , ενώ μέσω εντολών σε terminal στέλλονταν οι οδηγίες στο pendubot.

Θεωρητικό Μέρος - Ελεγκτής PD

Για την πραγματοποίηση των παραπάνω είναι απαραίτητη η κατανόηση της θεωρίας ελέγχου. Στο πείραμα χρησιμοποιήθηκε ελεγκτής τύπου PD οποίο έχει το εξής χαρακτηριστικό: η έξοδός του ποικίλλει ανάλογα με το σήμα σφάλματος καθώς και με την παράγωγο του σήματος σφάλματος.

Ο PD ελεγκτής που χρησιμοποιήθηκε στο εργαστήριο έχει την εξής μορφή:



Παρακάτω παρατίθεται η μαθηματική έκφραση του παραπάνω ελεγκτή χρησιμοποιώντας ως είσοδο την βηματική:

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

όπου:

$$e(t) = (q_1^d - q_1)$$

Το σύστημα λαμβάνει ως είσοδο q_1^d και έχει ως έξοδο την ποσότητα q_1 . Τα K_p και K_d αποτελούν τα αναλογικά και διαφορικά αντίστοιχα κέρδη τα οποία θα τροποποιηθούν κατάλληλα για να έχουμε την επιθυμητή έξοδο στο σύστημα ενώ οι ποσότητες $e(t)$ και $de(t)/dt$ αποτελούν τα σφάλματα θέσης και ταχύτητας αντίστοιχα.

Ο όρος K_d επηρεάζει την μεταβατική κατάσταση, δηλαδή το πόσο γρήγορα σταθεροποιείται το σύστημα στην επιθυμητή κατάσταση. Ο όρος K_p μειώνει, όσο γίνεται, το συνολικό σφάλμα.

Αρχικά ζητήθηκε η μετακίνηση του πρώτου βραχίονα σε γωνία -60 μοιρών από την θέση ηρεμίας όπου είναι οι -90 μοίρες. Για να πραγματοποιηθεί αυτό έγινε σταδιακή τροποποίηση στις τιμές των κερδών K_p και K_d παρατηρώντας το σφάλμα της εξόδου σε σχέση με το

επιθυμητό αποτέλεσμα. Αξίζει να σημειωθεί πως η αύξηση του K_d έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της ταχύτητας. Αυτό είναι κάτι το οποίο πρέπει να συμπεριληφθεί κατά την διαδικασία τροποποίησης των κερδών, καθώς η μεγάλη ταχύτητα ανύψωσης του βραχίονα, θα έχει ως αποτέλεσμα μικρό χρόνο ανύψωσης, αλλά θα προκαλέσει μεγαλύτερο ποσοστό υπερύψωσης. Αντίστοιχα για το κέρδος K_p το οποίο είναι υπεύθυνο για το σφάλμα στην τελική θέση του βραχίονα.

Τέλος, έχοντας κατανοήσει την όλη θεωρία ελέγχου ως προς την κίνηση του pendubot, έγινε η παρουσίαση ενός demo στο οποίο εξετάστηκε η λειτουργία ενός μη γραμμικού ελεγκτή για την εξισορρόπηση ανάστροφου εκκρεμούς (180 μοίρες) χωρίζοντας τον ελεγκτή σε δύο φάσεις αυτές της ταλάντωσης και εξισορρόπησης.

Μετρήσεις και σχολιασμός

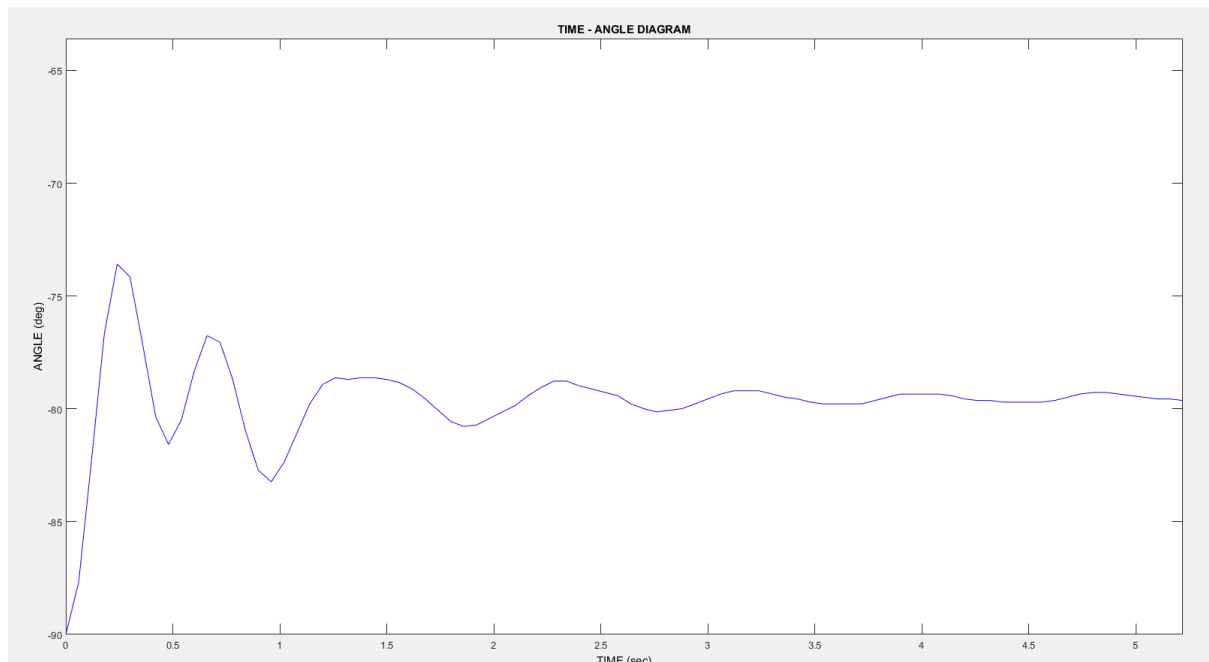
Ξεκινάμε παραθέτοντας τον πίνακα των μετρήσεων που προέκυψαν από την πειραματική διαδικασία όπου πραγματοποιήθηκε παραμετροποίηση του PD ελεγκτή χωρίς αντιστάθμιση:

ΑΑ	K_p	K_d	$e_{ss}(deg)$	$t_{rise}(sec)$	$Overshoot(rad)$	τελική τιμή(rad)
1	1	0	19.488	0.18	0.0967	-1.3873
2	1	0.15	19.344	0.24	0.0138	-1.3848
3	1	0.3	19.776	0.54	0.0038	-1.3924
4	5	0.4	8.400	0.18	0.0314	-1.1938
5	5	0.6	8.184	0.48	0.0088	-1.1900
6	10	0.6	4.008	0.12	0.0076	-1.1172
7	10	0.8	4.512	0.42	0.0075	-1.1259
8	20	0.8	2.640	0.12	0.0428	-1.0933
9	20	1.3	2.280	0.48	0.0038	-1.0870

Παρακάτω παρατίθενται τα αντίστοιχα διαγράμματα. Να σημειωθεί ότι στόχος είναι $x_d = 60^\circ$:

- $K_p = 1, K_d = 0$

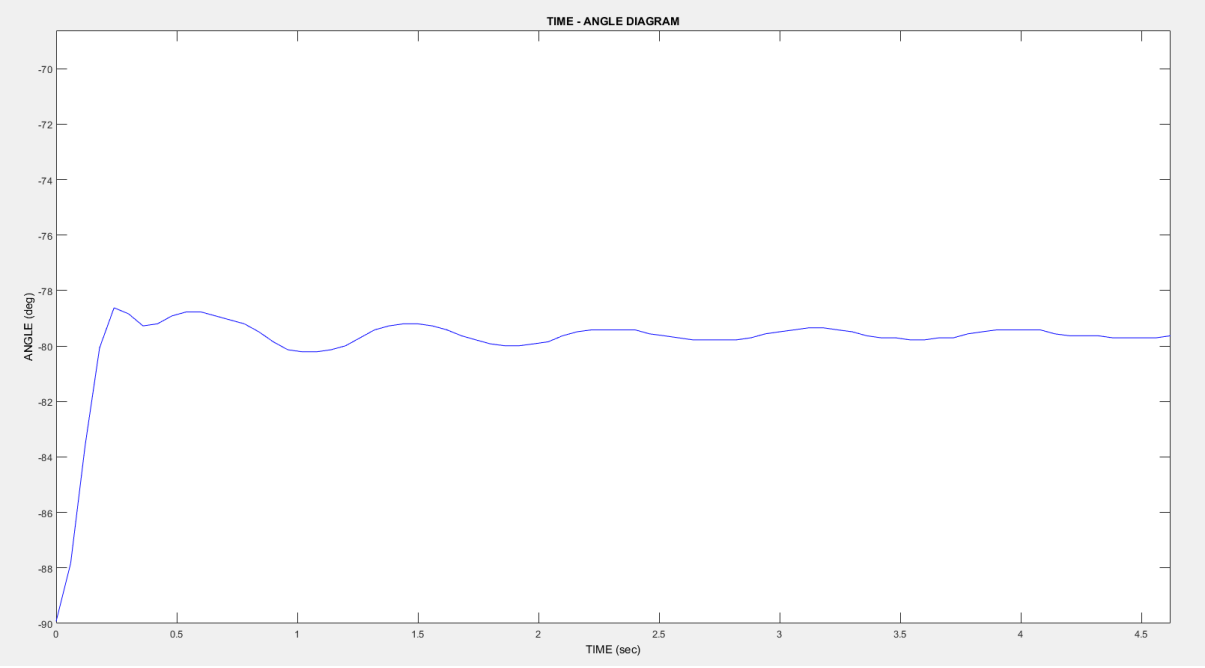
Σφάλμα e_{ss} (deg)	Χρόνος Ανύψωσης (s)	Overshoot (rad)	Τελική Τιμή (rad)
19.4880	0.18	0.0967	-1.3873



Η παραπάνω περίπτωση αφού το K_d ισούται με μηδέν, αντιστοιχεί σε αυτή της χρήσης ενός αναλογικού ελεγκτή. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μεγάλο overshoot και ότι χρειάζεται πολύ χρόνο μέχρι να φτάσει σε ένα σημείο που παραμένει κάπως ακίνητο. Ο χρόνος ανύψωσης ωστόσο είναι μικρός. Επίσης, το σφάλμα μόνιμης κατάστασης είναι περίπου ίσο με 20 μοίρες. Τέλος παρατηρούμε ότι στη μόνιμη κατάσταση υπάρχουν ταλαντώσεις που οφείλονται στις κινήσεις του δεύτερου συνδέσμου.

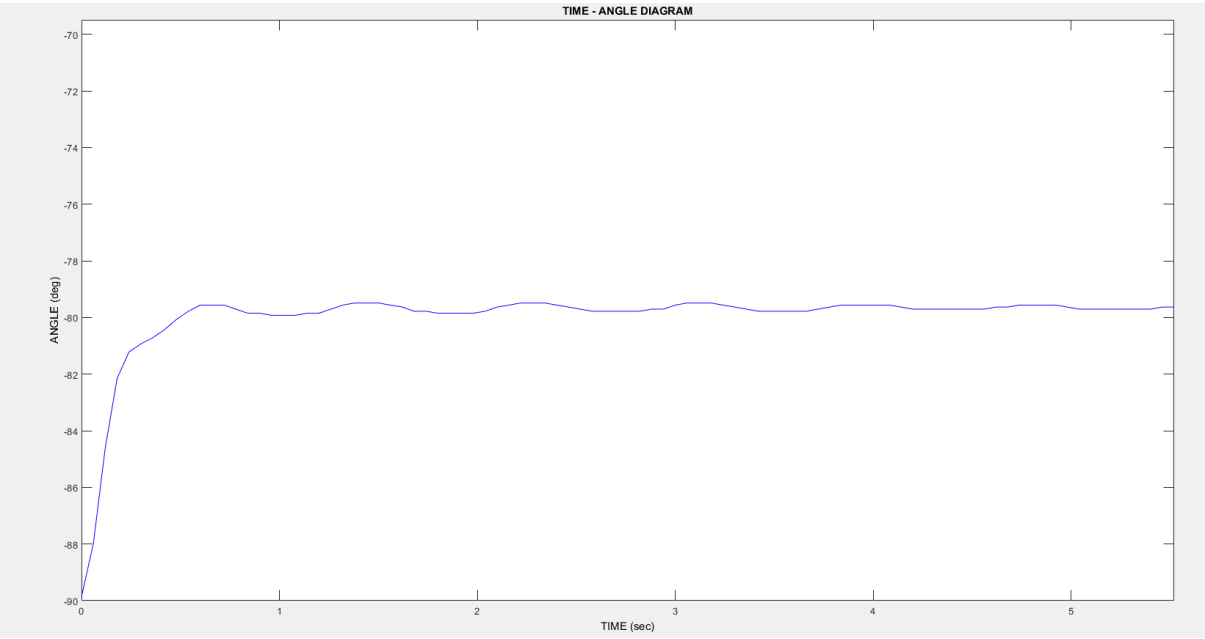
- $K_p = 1, K_d = 0.15$

Σφάλμα e_{ss} (deg)	Χρόνος Ανύψωσης (s)	Overshoot (rad)	Τελική Τιμή (rad)
19.3440	0.2400	0.0138	-1.3848



- $K_p = 1, K_d = 0.3$

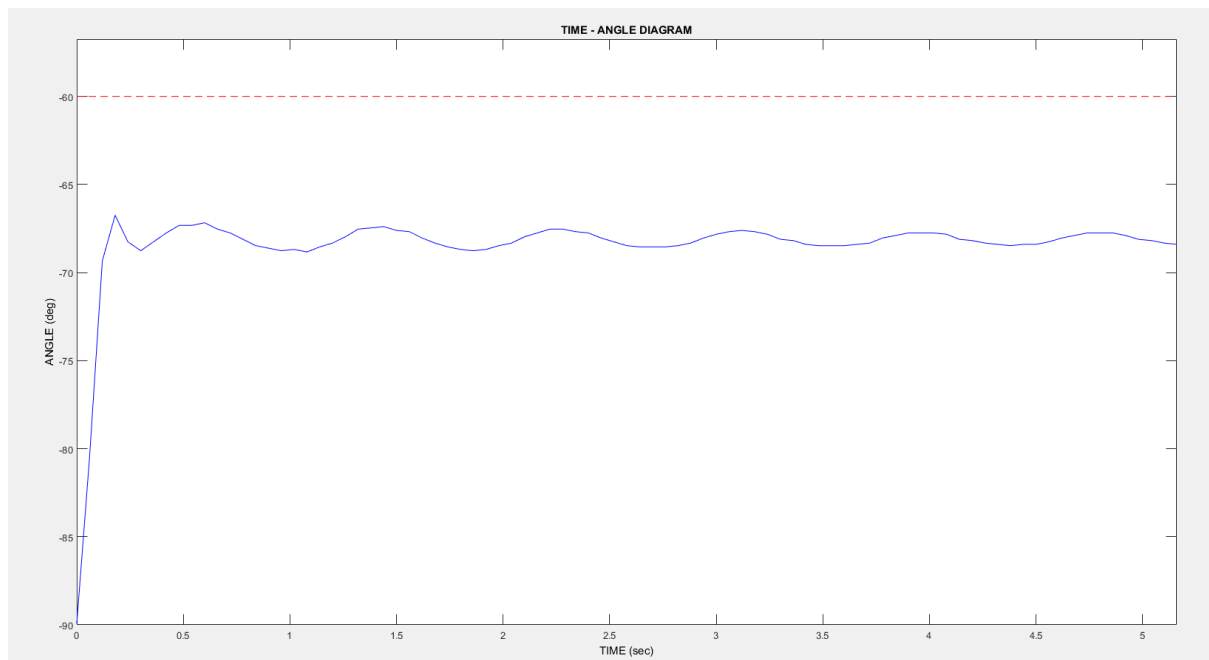
Σφάλμα e_{ss} (deg)	Χρόνος Ανύψωσης (s)	Overshoot (rad)	Τελική Τιμή (rad)
19.7760	0.5400	0.0038	-1.3924



Στα παραπάνω δύο διαγράμματα διατηρήσαμε σταθερό το K_p (ίσο με 1) και αυξήσαμε το K_d σε 0.15 και σε 0.3. Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται το K_d βελτιώνεται η μεταβατική συμπεριφορά. Το overshoot μειώθηκε αλλά αυξήθηκε ο χρόνος ανύψωσης. Στο τελευταίο διάγραμμα φαίνεται να υπάρχει κρίσιμη απόσβεση, αφού το overshoot είναι σχεδόν ίσο με 0. Για αυτό το λόγο στη συνέχεια αυξάνουμε το K_p , αφού η αύξηση του K_d δεν θα επέφερε κάποια βελτίωση στο σφάλμα.

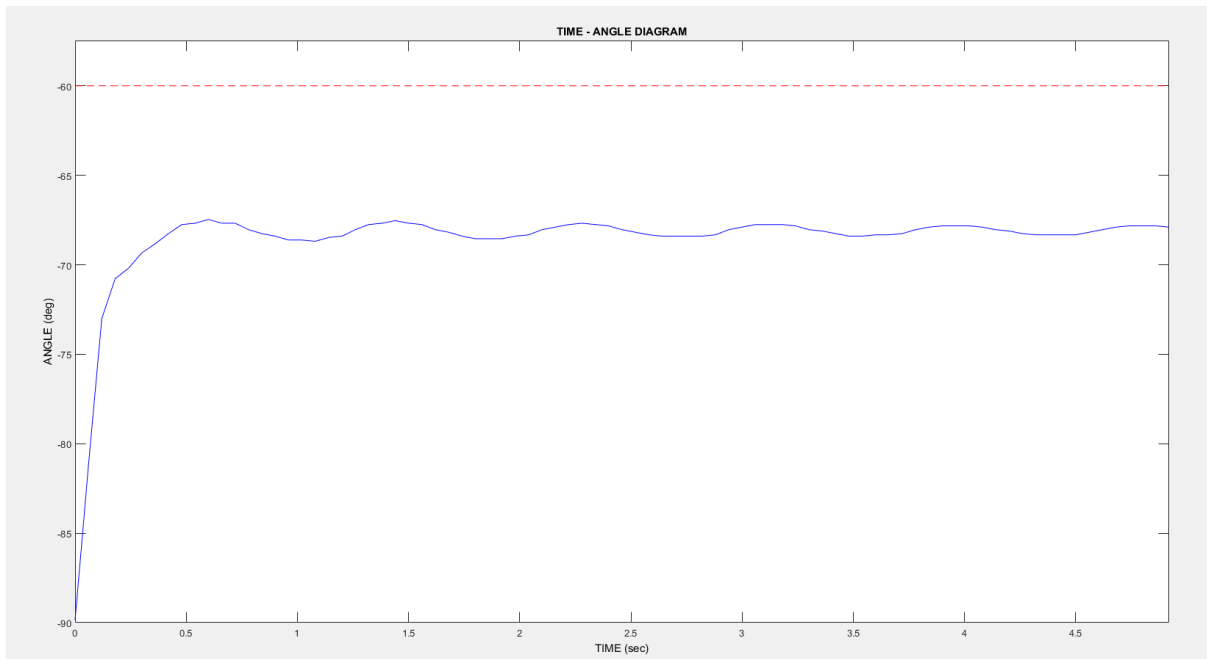
- $K_p = 5, K_d = 0.4$

Σφάλμα e_{ss} (deg)	Χρόνος Ανύψωσης (s)	Overshoot (rad)	Τελική Τιμή (rad)
8.4000	0.1800	0.0314	-1.1938



- $K_p = 5, K_d = 0.6$

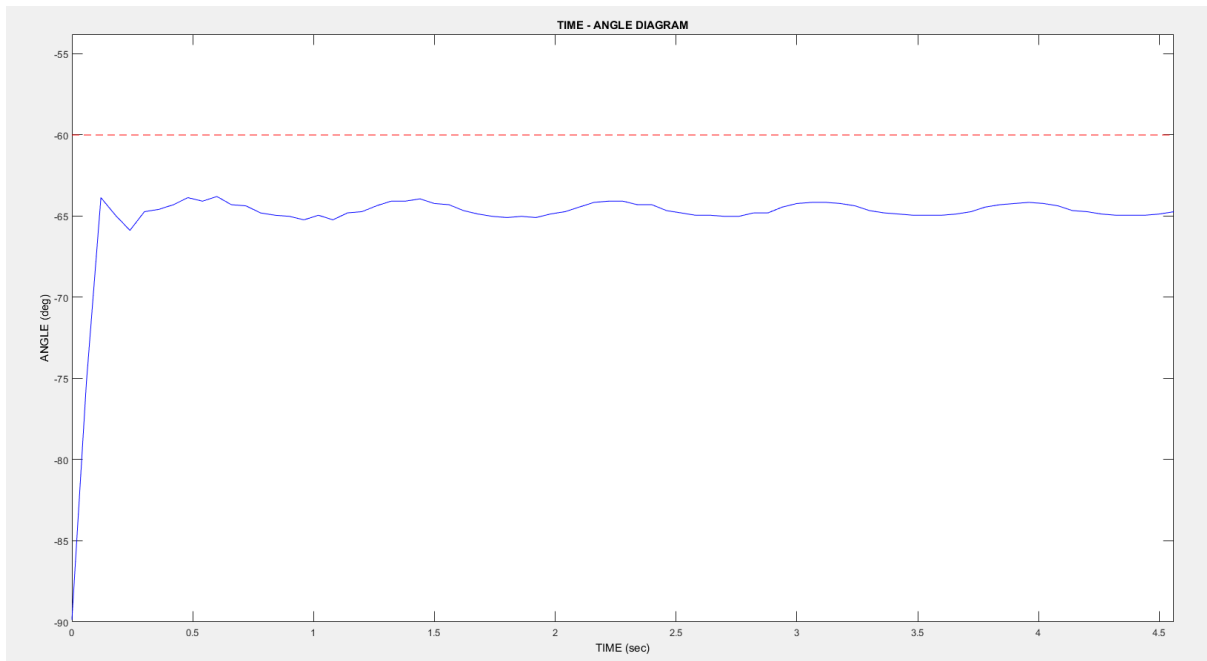
Σφάλμα e_{ss} (deg)	Χρόνος Ανύψωσης (s)	Overshoot (rad)	Τελική Τιμή (rad)
8.1840	0.4800	0.0088	-1.1900



Για $K_p = 5$, παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις για τιμές του K_d ίσες με 0.4 και 0.6 ότι το σφάλμα γωνιακής θέσης μειώθηκε αισθητά. Για το μικρότερο K_d υπάρχει overshoot, αλλά για το $K_d = 0.6$ το overshoot μειώνεται ακόμα περισσότερο από ότι προηγουμένως. Στο τέλος ο χρόνος ανύψωσης κυμαίνεται στα ίδια επίπεδα με πριν.

- $K_p = 10, K_d = 0.6$

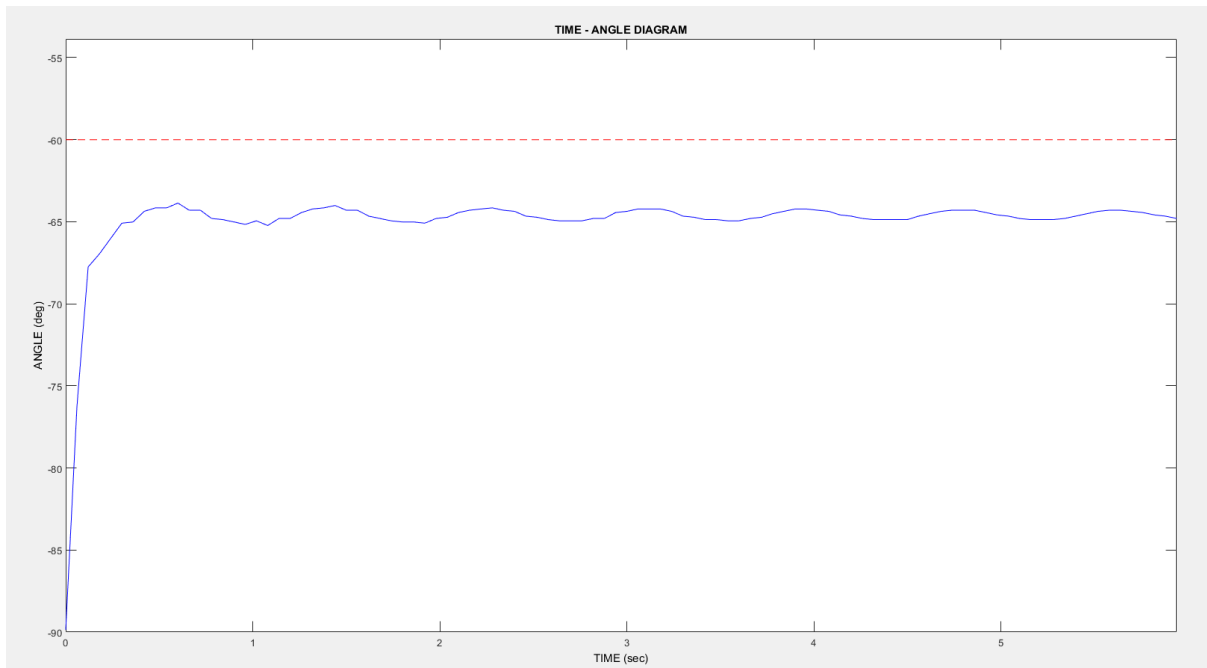
Σφάλμα e_{ss} (deg)	Χρόνος Ανύψωσης (s)	Overshoot (rad)	Τελική Τιμή (rad)
4.0080	0.1200	0.0076	-1.1172



Για αύξηση του K_p μειώνεται ακόμα περισσότερο το σφάλμα θέσης, ωστόσο υπάρχουν πάλι ταλαντώσεις και overshoot.

- $K_p = 10, K_d = 0.8$

Σφάλμα e_{ss} (deg)	Χρόνος Ανύψωσης (s)	Overshoot (rad)	Τελική Τιμή (rad)
4.5120	0.4200	0.0075	-1.1259

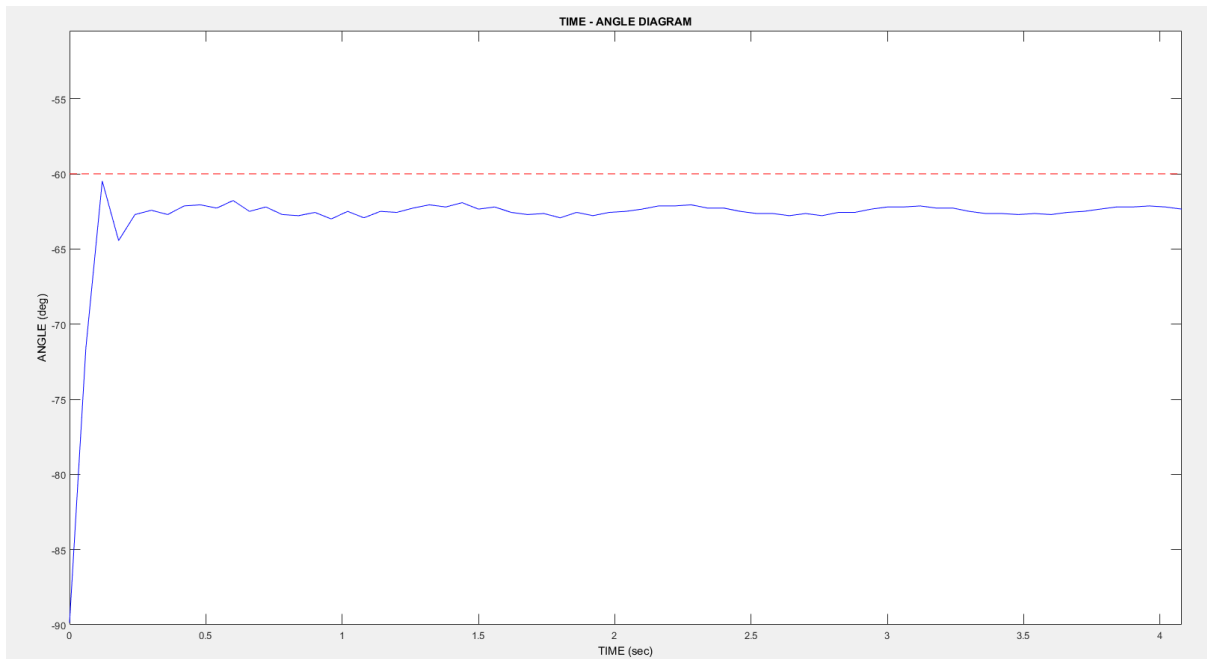


Με την αύξηση του K_d εξαλείφθηκε το overshoot και αυξήθηκε όπως ήταν αναμενόμενο ο χρόνος ανύψωσης.

Για να μειώσουμε ακόμα περισσότερο το σφάλμα θέσης στην συνέχεια διπλασιάζουμε το K_p .

- $K_p = 20$, $K_d = 0.8$

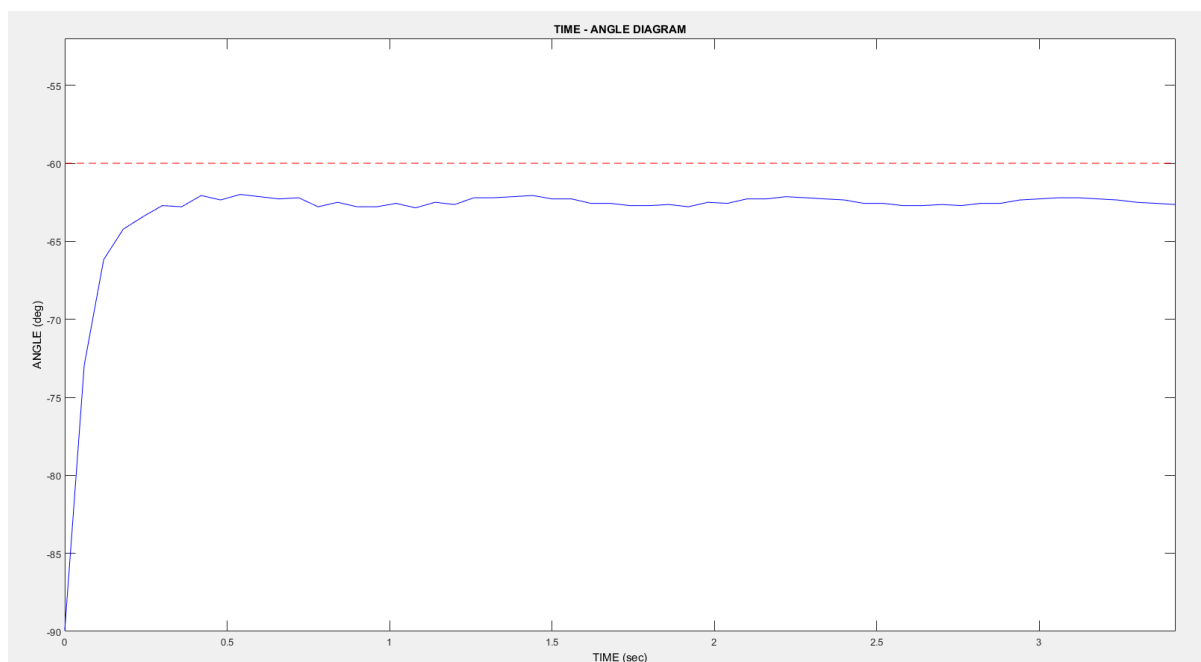
Σφάλμα e_{ss} (deg)	Χρόνος Ανύψωσης (s)	Overshoot (rad)	Τελική Τιμή (rad)
2.6400	0.1200	0.0428	-1.0933



Παρατηρούμε ότι πράγματι μειώθηκε αρκετά το σφάλμα θέσης, αλλά αυξήθηκε πάλι το ποσοστό ανύψωσης.

- $K_p = 20$, $K_d = 1.3$

Σφάλμα e_{ss} (deg)	Χρόνος Ανύψωσης (s)	Overshoot (rad)	Τελική Τιμή (rad)
2.2800	0.4800	0.0038	-1.0870



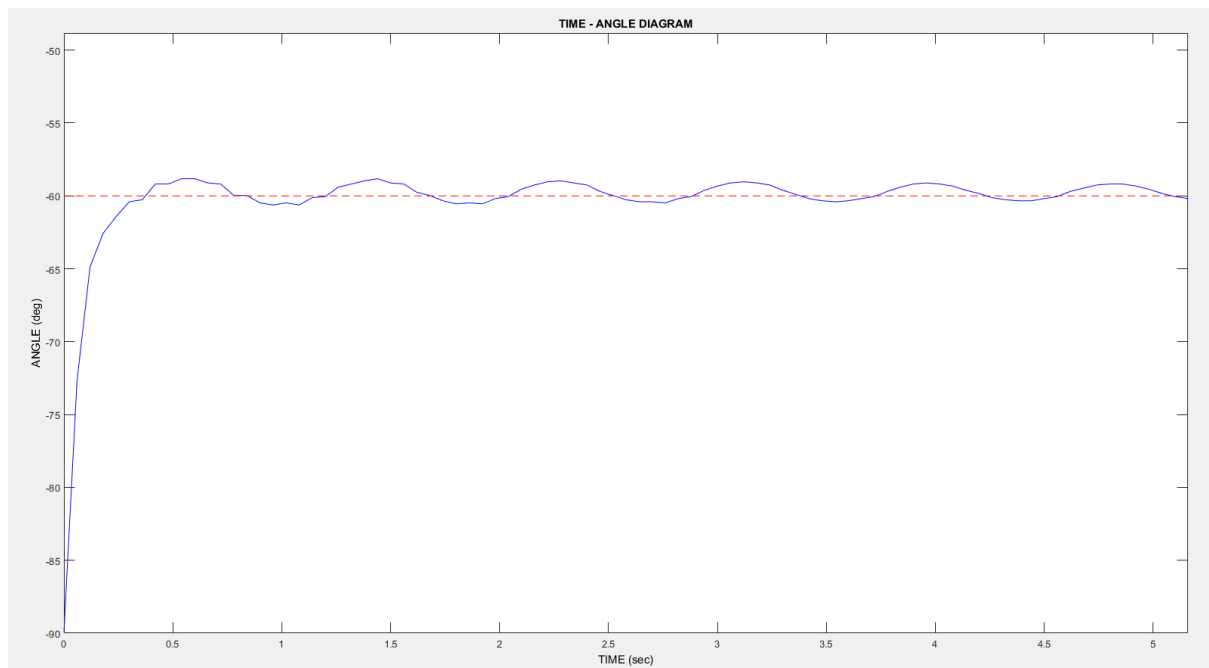
Με την αύξηση του K_d βλέπουμε ότι το σφάλμα θέσης διατηρείται στα ίδια επίπεδα και επιτυγχάνεται κρίσιμη απόσβεση, αφού ουσιαστικά δεν υπάρχει overshoot. Παραμένει μια μικρή ταλάντωση στην μόνιμη κατάσταση η οποία οφείλεται στην κίνηση του δεύτερου συνδεσμου εξαιτίας της αδράνειας.

Για αυτό το K_r επιτυγχάνεται το μικρότερο σφάλμα θέσης και δεν μπορεί να επιτευχθεί περεταίρω σημαντική βελτίωση με αύξηση του K_r και του K_d . Για αυτό τον λόγο θα εφαρμόσουμε την τεχνική της αντιστάθμισης της βαρύτητας, την οποία θα αναλύσουμε περισσότερο στην επόμενη ενότητα.

Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα που προκύπτει από την παραμετροποίηση του PD ελεγκτή με αντιστάθμιση T_g :

- $K_p = 20$, $K_d = 1.3$

Σφάλμα e_{ss} (deg)	Χρόνος Ανύψωσης (s)	Overshoot (rad)	Τελική Τιμή (rad)
0.3360	0.3600	0.0264	-1.0531

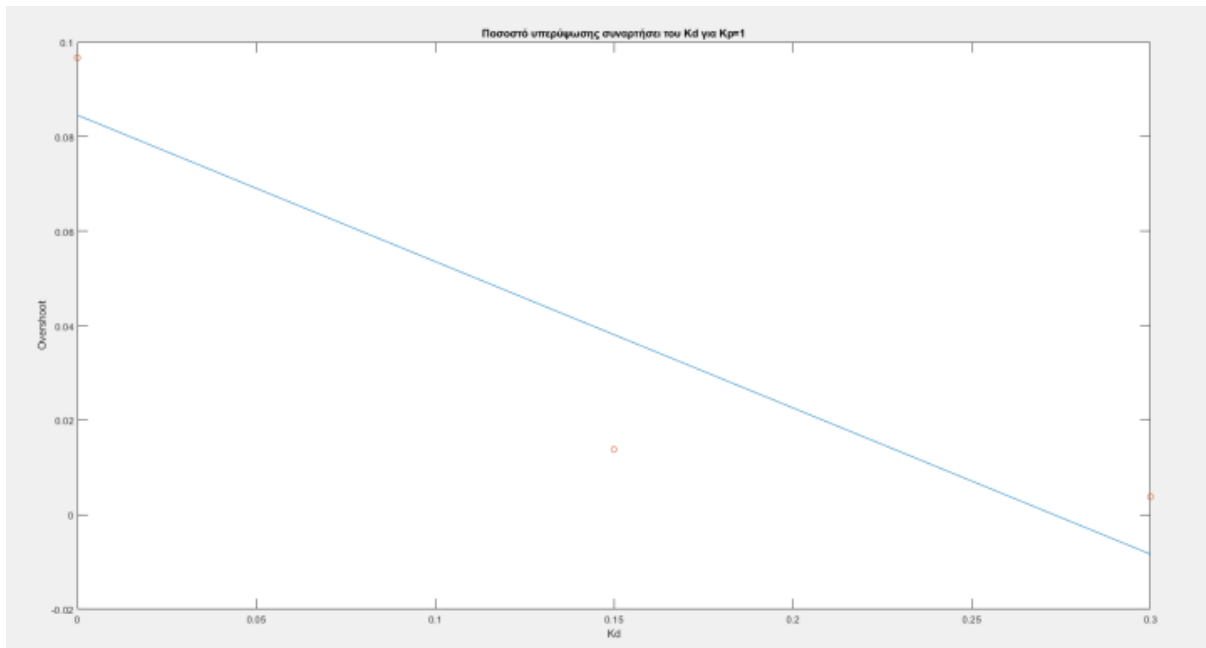


Παρατηρούμε ότι το σφάλμα θέσης σχεδόν μηδενίστηκε, ενώ και το overshoot είναι πολύ μικρό. Φαίνεται στο διάγραμμα ότι υπάρχει μια σημαντική ταλάντωση γύρω από την επιθυμητή θέση, η οποία οφείλεται όπως και προηγουμένως στον δεύτερο σύνδεσμο. Αν το σύστημα αφηνόταν για παραπάνω χρόνο αυτή η ταλάντωση θα μειωνόταν και τελικά η άρθρωση θα σταθεροποιούταν στις -60 μοίρες.

Διαγράμματα των τριών χαρακτηριστικών των μετρήσεων συναρτήσει του K_d :

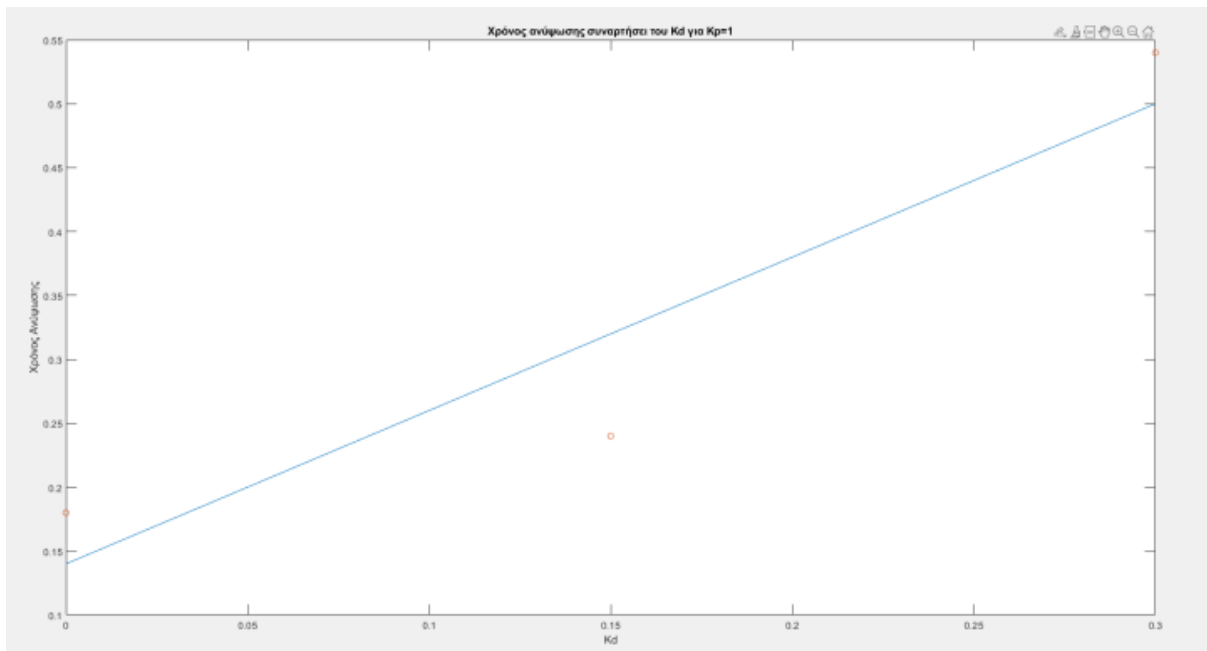
Παρατίθενται τα διαγράμματα που δείχνουν πως μεταβάλλονται τα τρία χαρακτηριστικά για τα οποία έχουμε μετρήσεις ως συνάρτηση του K_d για $K_p=1$. Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (Παράρτημα) υλοποιήθηκε η ευθεία των σημείων.

- Γραφική παράσταση του Overshoot (rad):



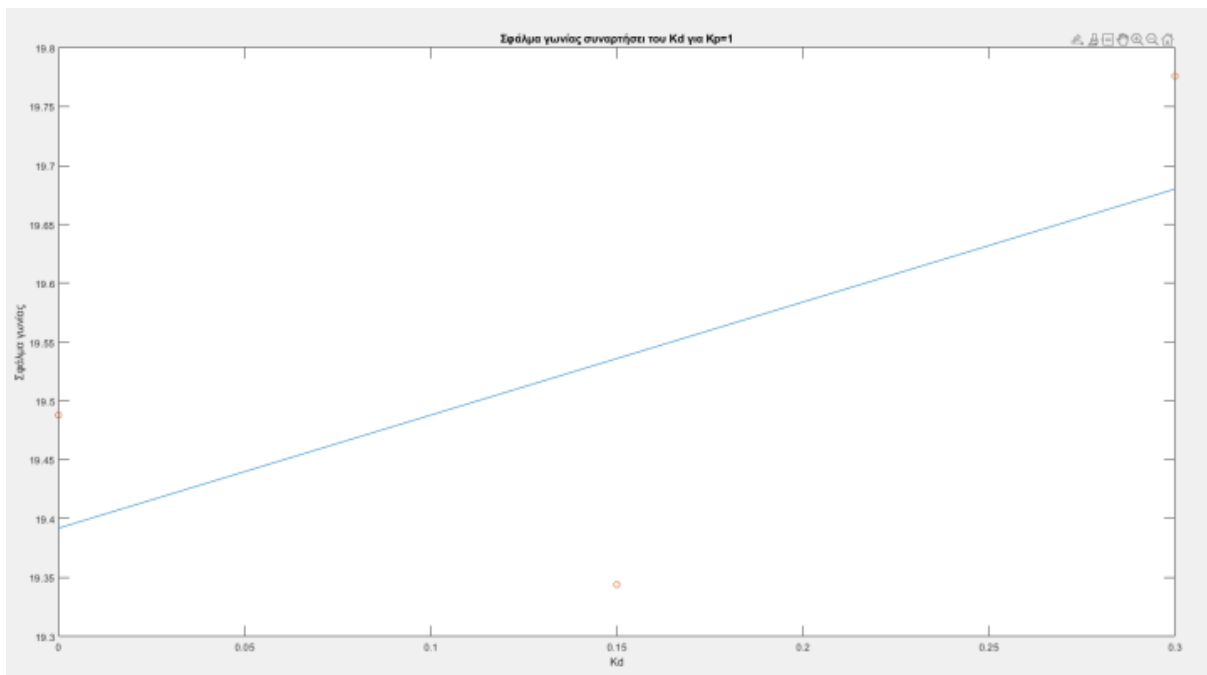
Παρατηρούμε ότι η αύξηση του K_d έχει ως συνέπεια την μείωση του overshoot, όπως είναι και αναμενόμενο. Ο διαφορικός όρος του PD ελεγκτή “τιμωρεί” τις απότομες αλλαγές του error και επομένως αν αυτό μειώνεται με πολύ μεγάλη ταχύτητα καθώς πλησιάζει στην επιθυμητή θέση, επιβάλλεται ένα “φρενάρισμα”. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για μεγαλύτερα K_d το σύστημα να ξεφεύγει λιγότερο από την επιθυμητή θέση και άρα να προκύπτουν μικρότερα overshoots.

- Γραφική παράσταση του χρόνου ανύψωσης (s):



Παρατηρούμε ότι ο χρόνος ανύψωσης αυξάνεται όσο μεγαλώνει το Kd. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω ο όρος Kd επιβάλλει ένα φρενάρισμα, επομένως είναι λογικό όσο αυτό αυξάνεται, το σύστημα να χρειάζεται περισσότερο χρόνο για να φτάσει στην επιθυμητή κατάσταση.

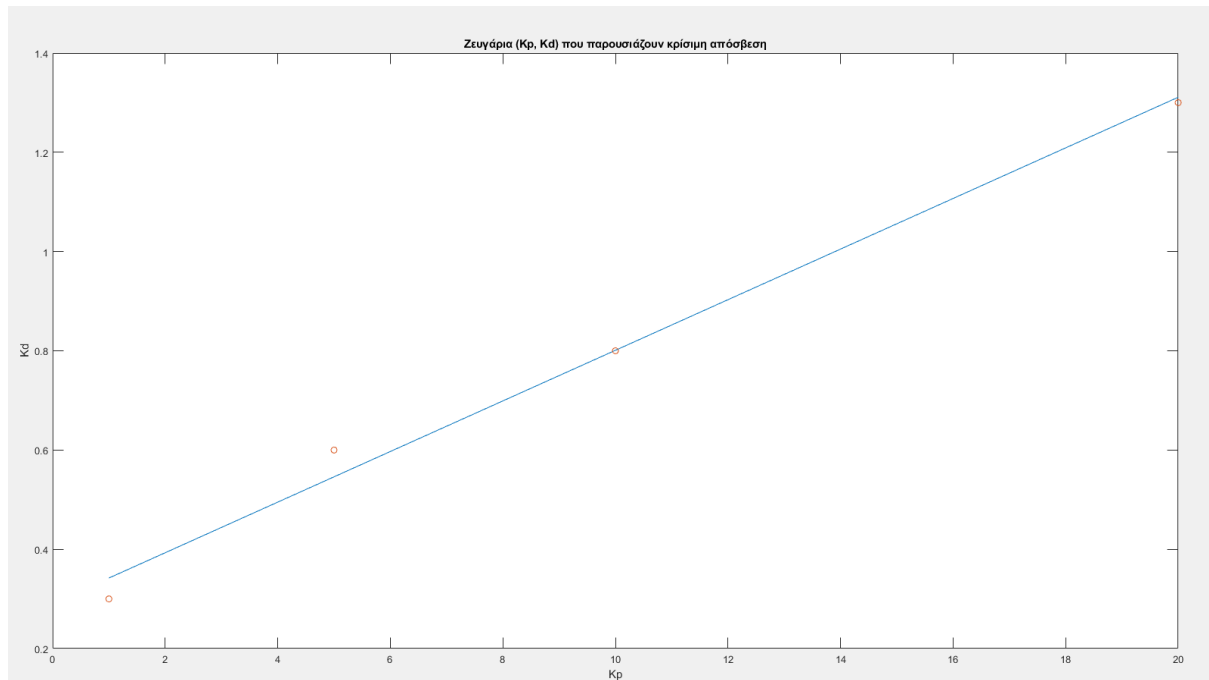
- Γραφική παράσταση του σφάλματος e_{ss} (deg):



Παρατηρούμε πολύ μικρές μεταβολές του σφάλματος γωνιακής θέσης για διαφορετικά K_d , οπότε μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι το K_d δεν επηρεάζει την μόνιμη κατάσταση.

Κρίσιμη Απόσβεση

Τέλος παραθέτουμε τη γραφική παράσταση των ζευγαριών (K_p, K_d) για τα οποία έχουμε κρίσιμη απόσβεση.



Είναι φανερό ότι τα σημεία, με μικρές αποκλίσεις, κείτονται πάνω σε μια ευθεία την οποία σχεδιάσαμε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Αυτό σημαίνει ότι το K_p/K_d παραμένει σταθερό στις περιπτώσεις που έχουμε κρίσιμη απόσβεση.

Ανάλυση του λόγου που το σφάλμα θέσης δεν μπορεί να μηδενιστεί με τον παραπάνω PD έλεγχο:

Όπως προαναφέρθηκε, χρησιμοποιούμε PD ελεγκτή. Όπως γνωρίζουμε από την θεωρία ελέγχου, αν ο Laplace εισόδου ολόκληρου του συστήματος είναι $Q_d(s)$, ο Laplace εξόδου $Q(s)$ και ο Laplace του συστήματος $P(s)$, ισχύει ότι:

$$Q^d(s) = \frac{(K_d s + K_p) \cdot P(s)}{1 + (K_d s + K_p) \cdot P(s)} Q(s)$$

Επομένως, για το σφάλμα του συστήματος ισχύει ότι:

$$E(s) = Q(s) - Q^d(s) = \frac{Q(s)}{1 + (K_d s + K_p) \cdot P(s)}$$

Εχουμε από το θεώρημα τελικής τιμής ότι για βηματική είσοδο:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + (K_d s + K_p) P(s)} = \frac{1}{1 + P(0) K_p}$$

Άρα, για το σφάλμα μόνιμης κατάστασης ισχύει ότι:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + P(0) K_p}, \text{ όπου το } P(0) K_p \text{ είναι η σταθερά σφάλματος θέσης. Για να είναι το σφάλμα θέσης μηδενικό σε βηματική είσοδο είναι φανερό ότι το } K_p \text{ πρέπει να τείνει στο άπειρο, αφού}$$
$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \infty} = 0.$$

Αυτό όπως είναι αναμενόμενο, είναι αδύνατο να συμβεί σε φυσικά συστήματα, καθώς υπάρχουν τεχνικοί περιορισμοί. Και κατά τη διάρκεια της διεξαγωγής του πειράματος παρατηρήσαμε ότι ο μηχανισμός για $K_p = 20$ έφτασε σχεδόν στον κορεσμό του.

Ένας τρόπος για να μηδενιζόταν το σφάλμα θέσης θα ήταν η χρήση ενός PID ελεγκτή, ο οποίος εισάγει και έναν ολοκληρωτικό όρο, με το οποίο υπεισέρχεται ένα είδος μνήμης στο σύστημα. Αυτός ο όρος αθροίζει το σφάλμα θέσης στην τωρινή και σε προηγούμενες στιγμές και με αυτό τον τρόπο το εξαναγκάζει να πάει προς το 0. Ωστόσο η προσθήκη ενός I-όρου, γνωρίζουμε ότι μπορεί να μετακινήσει πόλους στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο και επομένως το σύστημα να οδηγηθεί προς αστάθεια.

Τεχνική της αντιστάθμισης της βαρύτητας

Για την αποφυγή αυτού του κινδύνου επιλέγουμε την τεχνική της αντιστάθμισης της βαρύτητας, με την οποία θέλουμε να εξαλείψουμε τον μη γραμμικό όρο της βαρύτητας. Πιο συγκεκριμένα, παρακάτω παρουσιάζεται η εξίσωση κίνησης του pendubot που προκύπτει με ανάλυση κατά Lagrange:

$$\tau = D(q)q'' + C(q, q')q' + g(q)$$

όπου τ το διάνυσμα των ροπών πάνω στους συνδέσμους και q οι σχετικές γωνίες με:

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \text{ όπου:}$$

$$d_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2$$

$$d_{12} = d_{21} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2$$

$$d_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

και

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h\dot{q}_2 + h\dot{q}_1 \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ όπου}$$

$$h = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2$$

και

$$g(q) = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \tau_{g(q)}, \text{ όπου}$$

$$\varphi_1 = (m_2 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

$$\varphi_2 = m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2)$$

Άρα, αρκεί να συμπεριλάβουμε στον PD έλεγχο τον όρο $\tau_{g(q)}$. Τότε, η εξίσωση έχει ως εξής:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + \tau_{g(q)} \quad (1), \text{ όπου } e \text{ το σφάλμα θέσης.}$$

Στην μόνιμη κατάσταση η συνολική ροπή θα είναι 0 (δηλαδή $\Sigma \tau = 0$), αφού το σύστημα θα βρίσκεται σε ισορροπία. Δηλαδή, θέλουμε να ισχύει ότι $u_{ss} = \tau_{g(q)} \neq 0$, όπου u_{ss} και $\tau_{g(q)}$ το σήμα που στέλνεται στον actuator -δηλαδή στον κινητήρα- και η ροπή του βάρους αντίστοιχα. Όμως, στην μόνιμη κατάσταση $\frac{de(t)}{dt} = 0$. Άρα, η (1) γίνεται

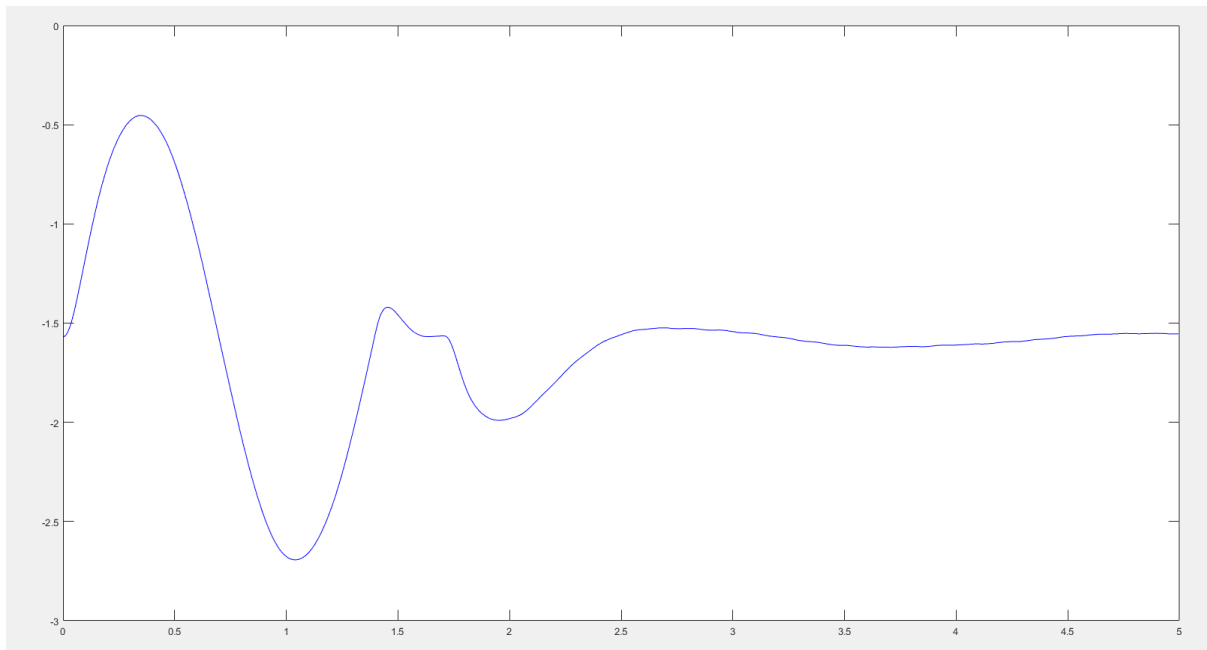
$u_{ss} = K_p e(t) + \tau_{g(q)}$. Αφού ισχύει $u_{ss} = \tau_{g(q)}$, είναι πλέον δυνατό να ισχύει $e(t) = 0$ στην μόνιμη κατάσταση χωρίς το K_p να απειρίζεται.

Περιγραφή μη γραμμικού ελεγκτή δύο φάσεων

Σε αυτό το μέρος της εργαστηριακή άσκησης στόχος ήταν η εξισορρόπηση του δεύτερου συνδέσμου στην πάνω θέση ισορροπίας του μηχανισμού, δηλαδή για $q_1 = -\pi/2$ rad και $q_2 = \pi$ rad. Αυτό το πρόβλημα έχει αρκετά κοινά με το γνωστό πρόβλημα του cart-pole. Επειδή το σύστημα είναι underactuated, δηλαδή έχει περισσότερους βαθμούς ελευθερίας από αυτούς που ελέγχουμε, για να πετύχουμε το παραπάνω αποτέλεσμα χωρίζουμε τη διαδικασία σε δύο φάσεις:

- Την φάση ταλάντωσης (swing up control): σε αυτή την φάση χρησιμοποιούμε τον κινητήρα συνεχούς τάσης ώστε να προκαλέσουμε μια ταλάντωση του μηχανισμού γύρω από την πρώτη άρθρωση ώστε να έρθει η δεύτερη μη ελεγχόμενη άρθρωση κοντά στο σημείο ασταθούς ισορροπίας με μικρή ταχύτητα. Η ταλάντωση είναι απαραίτητη ώστε να προσφερθεί η απαραίτητη ενέργεια στο σύστημα, διότι παρατηρήθηκε ότι ο κινητήρας δεν έχει αρκετή ισχύ ώστε να φέρει την δεύτερη άρθρωση στο επιθυμούμενη θέση με άσκηση άμεσης ροπής.
- Την φάση της εξισορρόπησης (balancing control): αυτή η φάση ξεκινάει όταν η δεύτερη άρθρωση έχει έρθει κοντά στο σημείο ισορροπίας με κατάλληλα μικρή ταχύτητα η οποία επιτυγχάνεται με κατάλληλη επιλογή του K_p και του K_d του PD controller στην πρώτη φάση. Επειδή η άρθρωση βρίσκεται στην γειτονιά εκείνου του σημείου, είναι δυνατή η γραμμικοποίηση της μη γραμμικής εξίσωσης του Pendubot γύρω του με τη χρήση αναπτύγματος Taylor. Οι εξισώσεις που προκύπτουν από αυτή την μελέτη μπορούν να διατηρήσουν τον μηχανισμό σε αυτή την ισορροπία ακόμα και με την είσοδο μικρών διαταραχών (για παράδειγμα να σπρώξουμε λίγο μια απο τις δύο αρθρώσεις)

Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα της πειραματικής υλοποίησης της παραπάνω θεωρίας, όπως πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο:



Είναι εύκολος ο διαχωρισμός των δύο φάσεων. Στην πρώτη φάση υπάρχουν έντονες ταλαντώσεις μέχρις ότου ο δεύτερος σύνδεσμος φτάσει στην επιθυμητή θέση. Αυτό συμβαίνει περίπου στο $t = 1.5 \text{ sec}$. Στην δεύτερη φάση οι ταλαντώσεις τελικά εκμηδενίζονται και το σύστημα παραμένει στο σημείο $q_1 = -\pi/2 \text{ rad}$ και $q_2 = \pi \text{ rad}$

Παράρτημα:

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων:

Τα βάρη της ευθείας προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του ψευδοαντίστροφου πίνακα των δειγμάτων και του πίνακα των προς εκτίμηση τιμών. Αν δηλαδή Y είναι ο πίνακας των δειγμάτων και b ο πίνακας των τιμών που θέλουμε να προσεγγίσουμε με την ευθεία, τα βάρη a προκύπτουν από την εξής σχέση:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{Y}^t \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^t \mathbf{b} \\ &= \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{b} \end{aligned}$$

Κώδικας matlab για την υλοποίηση των διαγραμμάτων:

```
%Overshoots
%x = linspace()
Kd = [1 0;
      1 0.15;
      1 0.3;];

b = [0.0967;
     0.0138;
     0.0038];

W = inv(Kd.' * Kd) * Kd.' * b;

y = Kd * W;

figure(1)
plot( Kd(:, 2), y);
hold on;
scatter(Kd(:, 2), b);
title('Ποσοστό υπερύψωσης συναρτήσεϊ του Kd για Kr=1')
xlabel('Kd')
ylabel('Overshoot')

%Χρόνος ανύψωσης

b2 = [0.18;
      0.24;
      0.54];

W = inv(Kd.' * Kd) * Kd.' * b2;
```

```

y = Kd * W;

figure(2)
plot( Kd(:, 2), y);
hold on;
scatter(Kd(:, 2), b2);
title('Χρόνος ανύψωσης συναρτήσει του Kd για Kr=1')
xlabel('Kd')
ylabel('Χρόνος Ανύψωσης')

%Σφάλμα τιμής

b3 = [19.4880;
      19.3440;
      19.7760];

W = inv(Kd.' * Kd) * Kd.' * b3;

y = Kd * W;

figure(3)
plot(Kd(:, 2), y);
hold on;
scatter(Kd(:, 2), b3);
title('Σφάλμα γωνίας συναρτήσει του Kd για Kr=1')
xlabel('Kd')
ylabel('Σφάλμα γωνίας')

%Κρίσιμες αποσβέσεις

Kp = [1 1;
      1 5;
      1 10;
      1 20];

Kd = [0.3;
      0.6;
      0.8;
      1.3];

W = inv(Kp.' * Kp) * Kp.' * Kd;

y = Kp * W;

figure(4)
plot(Kp(:, 2), y);
hold on;
scatter(Kp(:, 2), Kd);
title('Ζευγάρια (Kp, Kd) που παρουσιάζουν κρίσιμη απόσβεση')
xlabel('Kp')
ylabel('Kd')

```