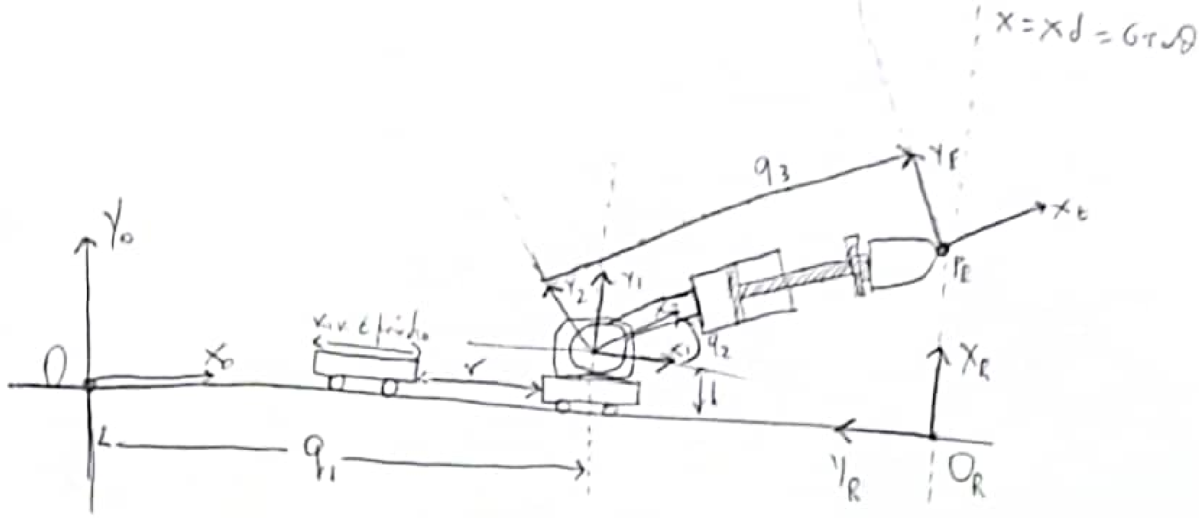
Ρομποτική 2 1η Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

2021 - 2022

Μιχαλίτσης Αλκιβιάδης Παναγιώτης

03118868

Άσκηση 1.1



Σύστημα Ρομποτικού χειριστή τριών βαθμών ελευθερίας

α) Εφαρμογή κινηματικού ελέγχου με διάσπαση υποεργασιών

1 Υποεργασία (ΥΠ1): Διατήρηση τελικού άκρου P_E επί ευθείας $x = x_d = σταθ$ στο επίπεδο

2 Υποεργασία (ΥΠ2): Διατήρηση απόστασης ασφαλείας Ρομπ. - Εμποδίου.

- $P_1 = f_1(q)$: Συνάρτηση γεωμετρικού μοντέλου 1ης υποεργασίας
- $\dot{P}_1 = J_1(q)\cdot\dot{q}$, $J_1(q) = \frac{\partial f_1}{\partial q}$: Ιακωβιανή Μήτρα 1ης υποεργασίας
- P_{1d} : Επιθυμητή Θέση ΥΠ1 . $\dot{P}_{1d}$: Επιθυμητή ταχύτητα ΥΠ1

$$\dot{q} = \underbrace{J_1^{+}(q)\left[\dot{p}_{1d} + \underbrace{K_1}_{\text{Κέρδος ενίσχυσης ΥΠ1}}\left(P_{1d} - f_1(q)\right)\right]}_{\text{Ταχύτητες ΥΠ1}} + \underbrace{K_2}_{\text{Κέρδος ενίσχυσης ΥΠ2}}\underbrace{\left[I - J_1^{+}(q)\,J_1(q)\right]\cdot\underbrace{\dot{q}_r^{(2)}}_{\text{Ταχύτητα διαφοράς ΥΠ2}}}_{\text{Ταχύτητες ΥΠ2}}$$

Ευθύ Κινηματικό Μοντέλο:

- $A_0^1 = Tra(x, q_1) \cdot Tra(y, h)$
- $A_2^1 = Rot(z, q_2)$
- $A_E^2 = Tra(x, q_3)$

$$P_E^0 = \begin{bmatrix} P_{Ex} \\ P_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 + C_2 q_3 \\ h + S_2 q_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{P}_E = \begin{bmatrix} \dot{P}_{Ex} \\ \dot{P}_{Ey} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - S_2 q_3 \dot{q}_2 + C_2 \dot{q}_3 \\ C_2 q_3 \dot{q}_2 + S_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -S_2 q_3 & C_2 \\ 0 & C_2 q_3 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

όπου $J_E(q) = \begin{bmatrix} 1 & -S_2 q_3 & C_2 \\ 0 & C_2 q_3 & S_2 \end{bmatrix}$

Κινηματική εξίσωση ως προς $(O_R - X_R Y_R Z_R)$:

$$A_R^0 = Tra(x, x_d) \cdot Rot(z, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & x_d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0^R = Rot(z, -\pi/2)\, Tra(x, -x_d) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x_d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^{(R)}P_E = \begin{bmatrix} h + S_2 q_3 \\ -q_1 - C_2 q_3 + x_d \end{bmatrix}, \quad {}^{(R)}\dot{P}_E = \begin{bmatrix} C_2 \dot{q}_2 q_3 + S_2 \dot{q}_3 \\ -\dot{q}_1 + S_2 \dot{q}_2 q_3 - C_2 \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_2 q_3 & S_2 \\ -1 & S_2 q_3 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

όπου ${}^{(R)}J_E(q) = \begin{bmatrix} 0 & C_2 q_3 & S_2 \\ -1 & S_2 q_3 & -C_2 \end{bmatrix}$

• Υποεργασία 1

$$p_1 = p_{Ey}^{(R)} = -q_1 - c_2 q_3 + x_d$$

$$f_1(q) = x_d - q_1 - c_2 q_3 \quad , \quad p_{1d} = 0$$

$$\dot p_1 = \dot p_{Ey}^{(R)} = -\dot q_1 + s_2 q_3 \dot q_2 - c_2 \dot q_3 = \begin{bmatrix} -1 & s_2 q_3 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \\ \dot q_3 \end{bmatrix}$$

$$J_1(q) = \begin{bmatrix} -1 & s_2 q_3 & -c_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \dot p_{1d} = 0$$

$$J_1^{+} = J_1^T (J_1 J_1^T)^{-1} = \frac{1}{(1 + c_2^2 + s_2^2 q_3^2)} \begin{bmatrix} -1 \\ s_2 q_3 \\ -c_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\dot q^{(1)} = \frac{-K_1 (x_d - q_1 - c_2 q_3)}{(1 + c_2^2 + s_2^2 q_3^2)} \begin{bmatrix} -1 \\ s_2 q_3 \\ -c_2 \end{bmatrix}}$$

• Υποεργασία 2

$V(q)$: ~~Δυναμική~~ Συνάρτηση Απόστασης : Συνάρτηση Κριτηρίου

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_R (r - r_0)^2 , & r < r_0 \\ 0 , & r \geq r_0 \end{cases}$$

K_R: Σταθερός Συντελεστής Ενίσχυσης

r_0 : όριο απόστασης

• x_0 : απόσταση εμποδίου από $(0 - xyz)$
• $r = |q_1 - x_0|$

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_R (q_1 - x_0 - r_0)^2 , & r < r_0 \\ 0 , & r \geq r_0 \end{cases}$$

• $r < r_0$: $\dot q_r^{(2)} = \nabla_q V(q) = \begin{bmatrix} K_R (q_1 - x_0 - r_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_R (r - r_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

• $r \geq r_0$: $\dot q_r^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\dot{q}^{(2)} = K_2 \left[\mathbb{I} - J_1^{+}(q) J_1(q) \right] \dot{q}_v^{(2)}$$

$$= K_2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{(1+c_2^2+s_2^2 q_3^2)} \begin{bmatrix} -1 \\ s_2 q_3 \\ -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & s_2 q_3 & -c_2 \end{bmatrix} \right\} \dot{q}_v^{(2)}$$

$$= \frac{K_2}{(1+c_2^2+s_2^2 q_3^2)} \begin{bmatrix} 1+c_2^2+s_2^2 q_3^2 - 1 & s_2 q_3 & -c_2 \\ s_2 q_3 & 1+c_2^2+s_2^2 q_3^2 - s_2^2 q_3^2 & s_2 c_2 q_3 \\ -c_2 & c_2 s_2 q_3 & 1+s_2^2 q_3^2 + c_2^2 - c_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_R(v-v_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{K_2 K_R}{(1+c_2^2+s_2^2 q_3^2)} (v-v_0) \begin{bmatrix} c_2^2 + s_2^2 q_3^2 \\ s_2 q_3 \\ -c_2 \end{bmatrix}$$

B) $h=1$, $v_0=6$, $x_d=15$

$q_1(t) = x_d = 15$, $q_2(t) = \pi/2$, $q_3(t) = 5$, $v(t) = (v_0 - 2) = 4$

- $$\dot{q}^{(1)} = -\frac{k_1(x_d - q_1(t) - [\cos \overset{0}{q_2(t)}] q_3(t))}{(1+\underset{0}{\cos^2 q_2(t)} + \sin^2 q_2(t) q_3^2(t))} \begin{bmatrix} -1 \\ s_2 q_3 \\ -c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$\dot{q}^{(2)} = \frac{K_2 K_R}{(1+c_2^2(t)+s_2^2(t) q_3^2(t))} (v(t)-v_0) \begin{bmatrix} c_2^2 + s_2^2 q_3^2 \\ s_2 q_3 \\ -c_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{K_2 K_R(-2)}{26} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = K_2 K_R \begin{bmatrix} -25/13 \\ -5/13 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = K_2 K_R \begin{bmatrix} -25/13 \\ -5/13 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.2

Ρομποτικός Μηχανισμός 2 Βαθμών Ελευθερίας

$W_{q_1}=0, \quad l_1=0$

$\tau_1=(mq_2^2)\ddot{q}_1+(2mq_2)\dot{q}_1\dot{q}_2, \quad \tau_2=m\ddot{q}_2-(mq_2)\cdot\dot{q}_1^2$

α) Προσαρμοστικός Έλεγχος:

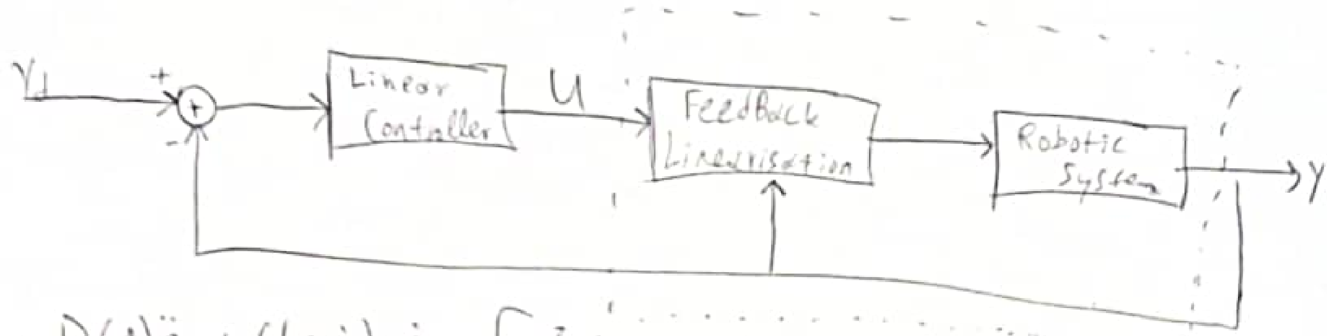
$$\tau=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}mq_2^2 & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}mq_2\dot{q}_2 & mq_2\dot{q}_1\\ -mq_2\dot{q}_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{bmatrix}$$

$$D(q)=\begin{bmatrix}mq_2^2 & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}, \quad C(q,\dot{q})=\begin{bmatrix}mq_2\dot{q}_2 & mq_2\dot{q}_1\\ -mq_2\dot{q}_1 & 0\end{bmatrix}$$

$\underline{\text{Computed Torque}} \rightarrow \tau=\hat{D}u+\hat{C}\dot{q}$

$u=\ddot{q}_d+K_d(\dot{q}_d-\dot{q})+K_p(q_d-q)$

$e=q_d-q, \quad \dot{e}=\dot{q}_d-\dot{q}$



$$\bar{\tau}=D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\cdot\dot{q}=\begin{bmatrix}q_2^2\ddot{q}_1+2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2\\ \ddot{q}_2-q_2\dot{q}_1^2\end{bmatrix}\cdot\phi$$

$\phi=(m)$: μητρώο άγνωστων παραμέτρων συστήματος $\rightarrow K(\ddot{q},\dot{q},q)$

$\hat{\phi}=[\hat{m}]$

$$\tau=\hat{D}u+\hat{C}\cdot\dot{q}=\begin{bmatrix}q_2^2u_1+2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2\\ u_2-q_2\dot{q}_1^2\end{bmatrix}\cdot[\hat{m}]=K(q,\dot{q},u)\cdot\hat{\phi}$$

$\tilde{\Phi}=\phi-\hat{\phi}$: Σφάλμα Εκτίμησης Παραμέτρων

$\bullet\ \ddot{q} = u \implies K(q,\dot q,u)\cdot\tilde{\phi} = K(q,\dot q,u)(\phi-\hat\phi) = D(q)\cdot(u-\ddot q)$

$\xi(e_q) = u-\ddot q = \ddot e_q + K_D \dot e_q + K_p e_q$: Σφάλμα παρακολούθησης

Lyapunov

Γ: Μήτρα κερδών

$$V(\tilde\phi, s) = \frac{1}{2}\left[\tilde\phi^T\cdot\Gamma\cdot\tilde\phi + s^T D s\right]$$

$\xi = \dot s + \Lambda s = \ddot e_q + K_D \dot e_q + K_p e_q$

$$\dot V = -s^T\left(D\Lambda - \tfrac{1}{2}\dot D\right)s$$

Για να προκύψει αρνητική παράγωγος της $\dot V$, πρέπει $(D\Lambda - \frac{1}{2}\dot D)$ να είναι θετικό. Άρα πρέπει να επιλεγεί Λ ώστε:

$$D\Lambda - \tfrac{1}{2}\dot D = \begin{bmatrix} mq_2^2 & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2mq_2\dot q_2 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mq_2(\lambda_1 q_2 - \dot q_2) & 0 \\ 0 & m\lambda_2\end{bmatrix}$$

κριτ1: $mq_2(\lambda_1 q_2 - \dot q_2) > 0$

κριτ2: $m^2 q_2\lambda_2(\lambda_1 q_2 - \dot q_2) > 0$ $\implies \lambda_1 q_2 - \dot q_2 > 0$, $\lambda_2 > 0$

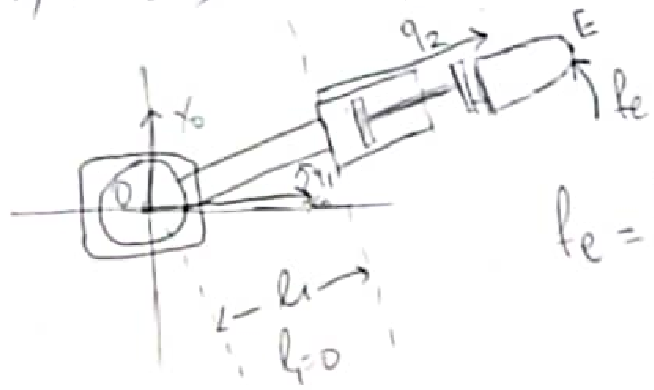
$\dot V(\tilde\phi, s) \le 0$: $\dot V = 0 \implies s = 0 \implies \xi = 0$

$$\dot{\hat\phi} = \Gamma^{-1}K^T(q,\dot q,u)\cdot s = \Gamma^{-1}\left[q_2^2\ddot q_1 + 2q_2\dot q_1\dot q_2,\ \ddot q_2 - q_2\dot q_1^2\right]\cdot s$$

$~~= \Gamma^{-1}[q_2^2 \ddot q_1 + 2 q_2 \dot q_1 \dot q_2, \ \ddot q_2 - q_2 \dot q_1^2]~~$

Scanned with CamScanner

B) Έλεγχος Επίδοσης



$$f_e = [f_{ex}, f_{ey}]^T$$

$$A_E^0(q_1, q_2) = Rot(z, q_1)\, Tra(x, q_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 q_2 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ιακωβιανή Μήτρα (1R-1P)

- $i=1$: Περιστροφική Άρθρωση

$$\begin{bmatrix} J_{L1} \\ J_{A1} \end{bmatrix}_{6\times1} = \begin{bmatrix} b_0 \times p_E \\ b_0 \end{bmatrix}_{6\times1} = \begin{bmatrix} -s_1 q_2 \\ c_1 q_2 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $i=2$: Πρισματική Άρθρωση

$$\begin{bmatrix} J_{L2} \\ J_{A2} \end{bmatrix}_{6\times1} = \begin{bmatrix} b_i \\ \hline \emptyset \end{bmatrix}_{6\times1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\right\} J = \left[\begin{array}{c|c} -s_1 q_2 & c_1 \\ c_1 q_2 & s_1 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right]_{6\times2}$$

Δυναμικό Μοντέλο Ρομποτικού Χειριστή:

$$M(q)\cdot\ddot{q} + h(q,\dot{q}) = \tau + J^T \cdot f_e$$

$$\begin{bmatrix} m q_2^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 m q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -m q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 q_2 \\ c_1 & s_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{ex} \\ f_{ey} \end{bmatrix}$$

Task Space

$$M^{-1}(q) = \frac{1}{m^2 q_2^2}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m q_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m q_2^2 & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}$$

$$Q = J M^{-1} J^T = \begin{bmatrix} -s_1/m q_2 & c_1/m \\ c_1/m q_2 & s_1/m \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -s_1 q_2 & c_1 q_2 \\ c_1 & s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}$$

$$\det Q = \frac{1}{m^2} \Rightarrow M^*(q) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$h^* = (M^* J M^{-1}) h - M^* \dot{J} \dot{q}$$

$$M^* J M^{-1} = \begin{bmatrix} -s_1/q_2 & c_1 \\ c_1/q_2 & s_1 \end{bmatrix}, \quad \dot{J} = \begin{bmatrix} -c_1 q_2 \dot{q}_1 - s_1 \dot{q}_2 & -s_1 q_2 \dot{q}_1 + c_1 \dot{q}_2 \\ -s_1 \dot{q}_1 & c_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^* \dot{J} \dot{q} = m \cdot \begin{bmatrix} -c_1 q_2 \dot{q}_1^2 - s_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - s_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + c_1 \dot{q}_2^2 \\ -s_1 \dot{q}_1^2 + c_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$(M^* J M^{-1}) \cdot h = \begin{bmatrix} -2m s_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m c_1 q_2 \dot{q}_1^2 \\ 2m c_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m s_1 q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$h^* = (M^* J M^{-1}) h - M^* \dot{J} \dot{q} = m \begin{bmatrix} -c_1 \dot{q}_2^2 + s_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - s_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ c_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - s_1 q_2 \dot{q}_1^2 + s_1 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

F_G: Γενικευμένη Δύναμη

Task Space $\Rightarrow$ $M^* \cdot \ddot{p} + h^* = f_e + F_G$

$$\boxed{\tau = J^T F_G}$$

Επιθυμητή Μηχανική Εμπέδηση:

$$M_d(\ddot{p}_d - \ddot{p}) + B_d(\dot{p}_d - \dot{p}) + K_d(p_d - p) = F_d - f_e$$

$$\underbrace{M_d = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \end{bmatrix}}_{\text{Μητρώο Αδράνειας}}, \quad \underbrace{B_d = \begin{bmatrix} b_x & 0 \\ 0 & b_y \end{bmatrix}}_{\text{Μητρώο Απόσβεσης}}, \quad \underbrace{K_d = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}}_{\text{Μητρώο Ακαμψίας}}$$

Σχεδίαση Δυναμικού Ελέγχου / Computed Torque Control

$$\tau = J^T F_G$$

$$F_G = M^* u + h^* - f_e$$

$$u = \ddot{p}_d + M_d^{-1} \left[B_d \underbrace{(\dot{p}_d - \dot{p})}_{\text{speed error}} + K_d \underbrace{(p_d - p)}_{\text{Position error}} - \underbrace{(F_d - f_e)}_{\text{Force error}} \right]$$

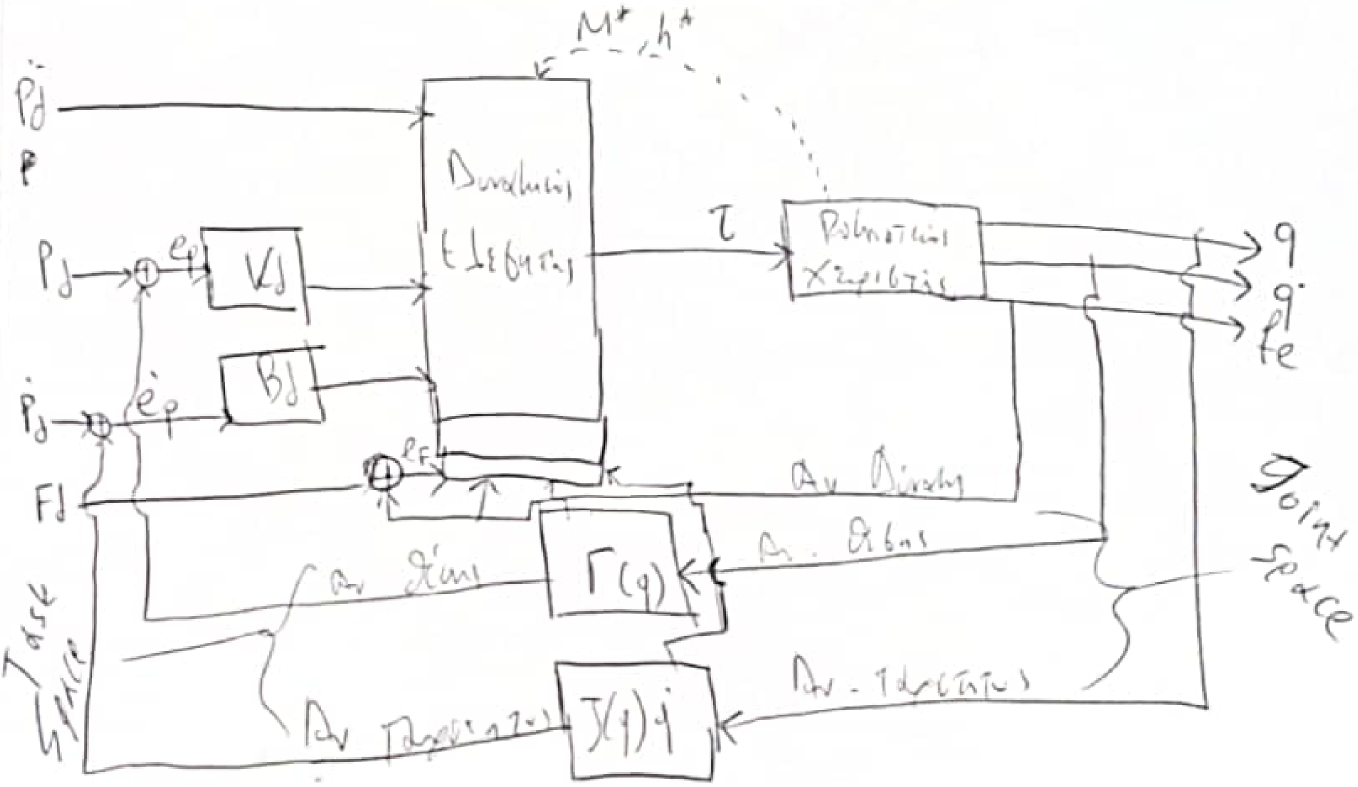
Speed Gain: $K_D = M^* M_d^{-1} B_d = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m_x & 0 \\ 0 & 1/m_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & 0 \\ 0 & b_y \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} (m/m_x) b_x & 0 \\ 0 & (m/m_y) b_y \end{bmatrix}$$

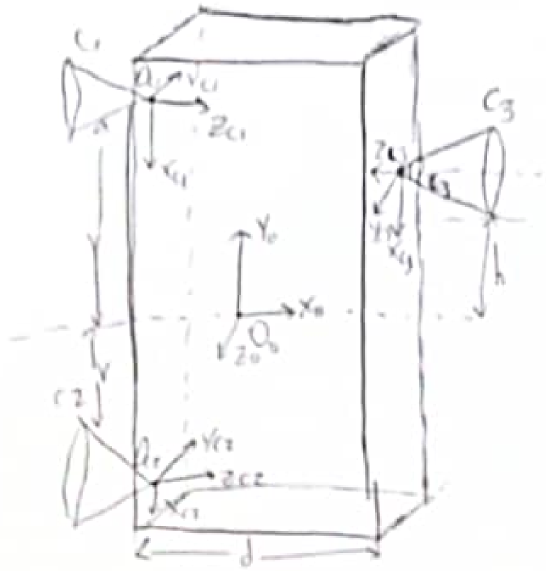
Position Gain: $K_P = M^* M_d^{-1} K_d = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m_x & 0 \\ 0 & 1/m_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} (m/m_x) k_x & 0 \\ 0 & (m/m_y) k_y \end{bmatrix}$$

Force Gain: $K_F = M^* M_d^{-1} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m_x & 0 \\ 0 & 1/m_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m/m_x & 0 \\ 0 & m/m_y \end{bmatrix}$



Άσκηση 1.3



C_1, C_2 Χωρίς τριβή

C_3 Τριβή (συντελεστής μ)

α)

$$\underline{C_1}: \quad R_{c_1}^0 = Rot(y, \pi/2)\, Rot(z, -\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{c_1}^{(0)} = \left[-\frac{d}{2}, r, 0\right]^T$$

$$\left[\vec{r}_{c_1}^{(0)} \times\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & d/2 \\ -r & -\frac{d}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{r}_{c_1}^{(0)} \times R_{c_1}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -r & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ d/2 & 0 & -r \end{bmatrix}$$

$$B_{c1} = [0\,0\,1\,0\,0\,0]^T$$

$$W_{c1} = \begin{bmatrix} R_{c_1}^0 & O_{3\times3} \\ \vec{r}_{c_1}^{(0)} \times R_{c_1}^0 & R_{c_1}^0 \end{bmatrix}, \quad G_{c1} = \begin{bmatrix} R_{c_1}^0 & O_{3\times3} \\ \vec{r}_{c_1}^{(0)} \times R_{c_1}^0 & R_{c_1}^0 \end{bmatrix} \cdot B_{c1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix}$$

C_2: $R^0_{C_2} = R^0_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{r}^{(0)}_{C_2} = \begin{bmatrix} -d/2 \\ -v \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\vec{r}^{(0)}_{C_2} \times\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v \\ 0 & 0 & d/2 \\ v & -d/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left(\vec{r}^{(0)}_{C_2} \times\right) R^0_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 & v & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ d/2 & 0 & v \end{bmatrix}$$

$$B_{C_2} = B_{C_1} = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^T, \quad W_{C_2} = \begin{bmatrix} R^0_{C_2} & 0_{3\times3} \\ \vec{r}^{(0)}_{C_2} \times R^0_{C_3} & R^0_{C_3} \end{bmatrix}$$

$$G_{C_2} = W_{C_2} B_{C_2} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ v]^T$$

C_3: Πλευρικό τριβής

$$R^0_{C_3} = Rot(y, -\tfrac{\pi}{2}) \cdot Rot(z, -\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}^{(0)}_{C_3} = [d/2\ h\ 0]^T$$

$$\left[\vec{r}^{(0)}_{C_3} \times\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & -d/2 \\ -h & d/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left(\vec{r}^{(0)}_{C_3} \times\right) R^0_{C_3} = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ -d/2 & 0 & h \end{bmatrix}$$

Πλήρης τριβής: $B_{C_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad W_{C_3} = \begin{bmatrix} R^0_{C_3} & 0_{3\times3} \\ \vec{r}^{(0)}_{C_3} \times R^0_{C_3} & R^0_{C_3} \end{bmatrix}$

$$G_{C_3} = W_{C_3} B_{C_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ -d/2 & 0 & h \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow G_C = [G_{C1}\ G_{C2}\ G_{C3}] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d/2 & 0 \\ -r & r & -d/2 & 0 & h \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{\ \ }_{G_{C1}} & \underbrace{\ \ }_{G_{C2}} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{G_{C3}} \end{array} \end{array}$$

Κώνοι Τριβής (K_{C1}, K_{C2}, K_{C3}):

$$\left.\begin{array}{l} K_{C1} = \{k_{C1} \in \mathbb{R} : k_{C1} \geq 0\} \\ K_{C2} = \{k_{C2} \in \mathbb{R} : k_{C2} \geq 0\} \end{array}\right\} \text{χωρίς τριβή}$$

$$K_{C3} = \{k_{C3} = [k_{C3x}, k_{C3y}, k_{C3z}]^T \in \mathbb{R}^3 : k_{C3z} \geq 0, \sqrt{k_{C3x}^2 + k_{C3y}^2} \leq \mu k_{C3z}\}$$

$$\Longrightarrow K_C = \{k_C = [k_{C1}, k_{C2}, k_{C3}]^T \in \mathbb{R}^5 : k_{C1} \in K_{C1}, k_{C2} \in K_{C2}, k_{C3} \in K_{C3}\}$$

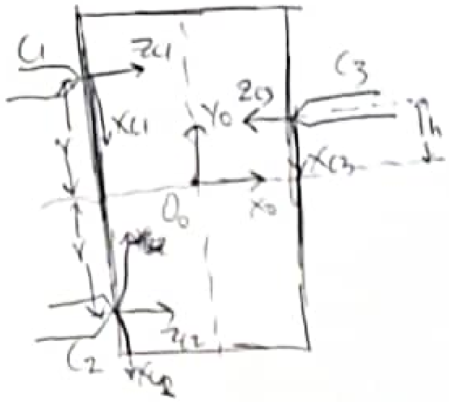
Διδιάστατη Μήτρα G (ελάττωση στο επίπεδο):

$$G_{2D} = \left[\begin{array}{c|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -r & r & -d/2 & 0 & h \end{array}\right]$$

β) Επίπεδο:

c_1, c_2 : χωρίς τριβή

c_3 : τριβή $(\mu=1)$

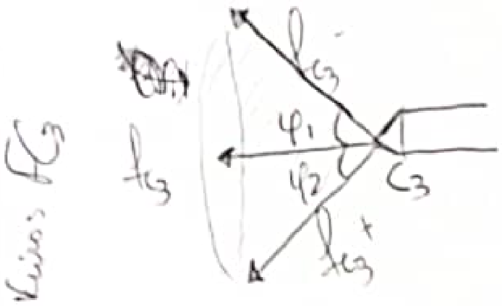


$$G_{2D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -r & r & -d/2 & 0 & h \end{bmatrix}$$

Για να εξεταστούν υπό ποιες συνθήκες η δοθείσα λαβή παρέχει κλείσιμο θα χρειαστεί να αντικατασταθεί η c_3 με την f_{c_3} και πιο συγκεκριμένα με τις δυνάμεις $f_{c_3^+}$, $f_{c_3^-}$, οι οποίες θα είναι εφαπτόμενες στα όρια του F_{c_3}, και θα αντιστοιχούν σε σημειακές επαφές δίχως τριβή:

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\mu = 1 \Longrightarrow \tan\varphi_1 = \tan\varphi_2 = 1 \Longrightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = 45^\circ} = \pi/4$$



$$R^0_{c_3^-} = R^0_{c_3} \cdot Rot(y, -\pi/4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\vec{r}^{(0)}_{c_3} \times\right] \cdot R^0_{c_3^-} = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h - \frac{d}{2}\right) & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h + \frac{d}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$G_3^- = \begin{bmatrix} R^0_{c_3^-} & 0_{3\times3} \\ \vec{r}^{(0)}_{c_3} \times R^0_{c_3^-} & R^0_{c_3^-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2\,(h+d/2) \end{bmatrix}$$

$$R^0_{C_3^+} = R^0_{C_3} \cdot Rot(y, \pi/4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\overrightarrow{r}^{(0)}_{C_3^+} \times\right] R^0_{C_3^+} = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ 0 & -d/2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(h+d/2) & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(h-d/2) \end{bmatrix}$$

$$G_3^+ = \begin{bmatrix} R^0_{C_3^+} & 0_{3\times3} \\ \overrightarrow{r}^{(0)}_{C_3} \times R^0_{C_3^+} & R^0_{C_3^+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(h-\frac{d}{2}) \end{bmatrix}$$

$$G'_{2D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -r & r & \frac{\sqrt{2}}{2}(h-d/2) & \frac{\sqrt{2}}{2}(h+d/2) \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} G_{C_1} & G_{C_2} & G_{C_3^+} & G_{C_3^-} \end{array}$$

Επιπεδο στηλων $G_{C_3^+}$, $G_{C_3^-}$:

$$LV_3 = G_{C_3^+} \times G_{C_3^-} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(h-d/2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(h+\frac{d}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h \\ -d/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Για να ασφαλιση κλειστη αλλαγη θα πρεπει :

$LV_3^T G_{C_1}$ και $LV_3^T G_{C_2}$ να μην ειναι ομοσημα:

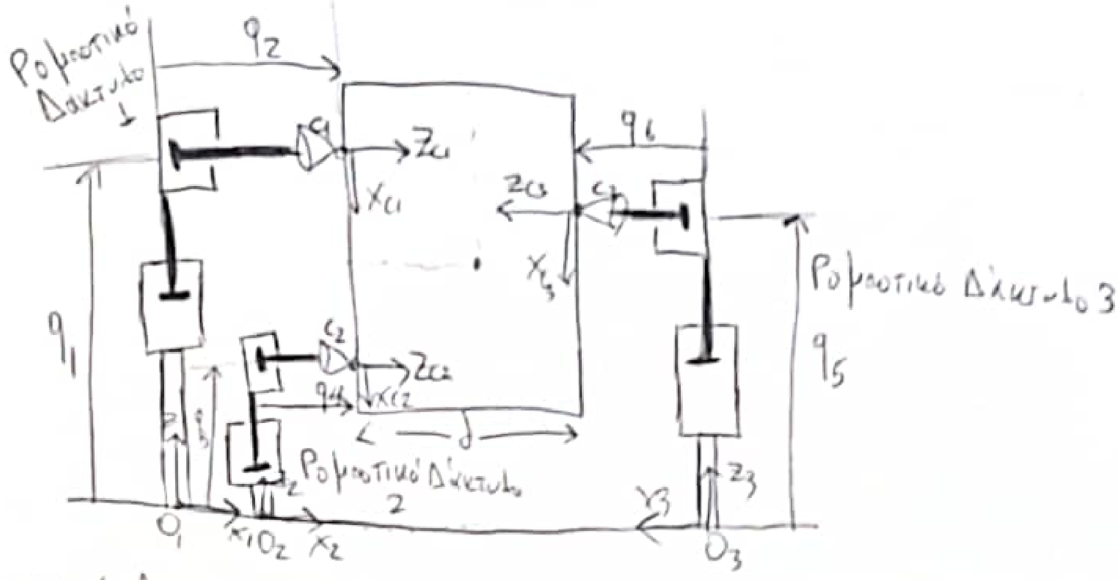
- $LV_3^T \cdot G_{C_1} = [-h \;\; d/2 \;\; -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} = -h + r = -(h-r)$
- $LV_3^T \cdot G_{C_2} = [-h \;\; d/2 \;\; -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = -h - r = -(h+r)$

Εστω ομοσημα $\Rightarrow$

$$(h-r)(h+r) \geq 0 \Rightarrow h^2 - r^2 \geq 0 \quad h^2 \geq r^2 \Rightarrow |h| \geq |r|$$

$\Rightarrow$ Θα πρεπει $|h| < |r|$

β)



Ρομποτικό Δάκτυλο i

<u>i=1</u>

$$A_{c_1}^{o_1} = Tra(z,q_1)\cdot Rot(y,\pi/2)\, Tra(z,q_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_E^{c_1} = Rot(y,-\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_E^{c_1} = \begin{bmatrix} R_E^{c_1} & O_{3\times3} \\ O_{3\times3} & R_E^{c_1} \end{bmatrix} \qquad B_{c_1}^T = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]$$

$$J_{h_1} = B_{c_1}^T \cdot T_E^{c_1} J_1 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]\, J_1 = [0\ \ 1]$$

<u>i=2</u>

$$A_{c_2}^{o_2} = Tra(z,q_3)\cdot Rot(y,\pi/2)\cdot Tra(z,q_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & q_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T_E^{c_2} = T_E^{c_1}, \quad B_{c_2} = [0\,0\,1\,0\,0\,0]^T$$

$$\Longrightarrow J_{h_2} = B_{c_2}^T T_E^{c_2} J_2 = [0, 1]$$

$\underline{i=3}$

$$A_{C_3}^{O_3} = Tra(z, q_5) \cdot Rot(y, \pi/2)\, Tra(z, q_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & q_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & q_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_E^{C_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T_E^{C_3} = \begin{bmatrix} R_E^{C_3} & O_{3\times 3} \\ O_{3\times 3} & R_E^{C_3} \end{bmatrix}$$

$$B_{C_3}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jh_3 = B_{C_3}^T \cdot T_E^{C_3} J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$Jh_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Jh = diag(Jh_1, Jh_2, Jh_3) = \begin{array}{c} \\ f_{C_1} \\ f_{C_2} \\ f_{C_{3x}} \\ f_{C_{3z}} \\ \tau_{C_3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$