«Проект по сложностям, тема№82 Вершинное покрытие в взвешенном графе»

ФПМИ МФТИ

Автор решения

Осень 2023

Содержание

Решение

Тема №82 Введем парочку обозначений Граф G(V,E) наш исходный граф V множество вершин, E множество ребер w(u) вес u вершины deg(u) степень вершины u c(u) = w(u)/deg(u) OPT - значение оптимального ответа m - количество рёбер n - количетсов вершин ANS - наш ответ

Алгоритм: Наш алгоритм будет жадным, будем на каждом шаге находить вершину с минимальным значением c(u) для каждой вершины, добавляем вершину u в наш ответ, выкидываем из нашего графа все смежные ребра с этой вершиной, также меняем вес смежных вершин, w(v) - c(u), и уменьшаем их степень на 1 Продолжаем так до тех пор, пока в нашем графе есть ребра

Асимптотика понятно, что полиномиальная, можно реализовать за O(n^2 + m) можно за O(mlogn), я буду реализовывать за O($n^2 + m$)

Доказательство корректности: Рассмотрим подсказку, и поймём что в ней мы можем взять весь граф и это будет 2 приближение: OPT >= c * m в виду того, что нам надо обязательно взять ребро Если мы возьмём все вершины, то каждое ребро возьмётся дважды, следовательно ANS = c * 2 * m c * m <= OPT <= ANS <= c * 2 * m <= 2 * OPT Победили

Теперь если веса не удовлетворяют этому свойству ВВедем функцию y(e) и будет заполнять её по ходу алгоритма На каждом шаге нашего алгоритма,когда выбираем вершину u, всем смежным рёбрам(понятно, что только тем которые остались в нашем графе) мы ставим значение y(e) = c(u) (тут важно отметить, что c(u) каждый раз обновляется, так как стпени вершин обновляются) после этого наш алгоритм выкидывает помеченные ребра из графа, и в виду вершинного покрытия, мы определим значения y(e) для каждого ребра
Пусть G = множество вершин которые отобрал наш алгоритм
Пусть G' = множество вершин в оптимальном ответе
Заметим такое свойство нашей функции
N(u) - множество ребер исходящих из нашей вершины
$\forall u \in G \sum\limits_{e \in N(u)} y(e) = w(u)$ ну действительно, это следует очевидно из построения нашей функции
$\forall u \sum\limits_{e \in N(u)} y(e) \leq w(u)$
Это уже менее очевидно, для вершин из нашего ответа это верно, а для остальных, которых мы не выбирали это следует из жадности нашего алгоритма. Вес просто никогда не будет отрицательным у вершин, так как мы вычитаем число, меньше или равное весу, значит у нас сохраняется инвариант, $\forall u \ w(u) \geq 0$, ну а значит сумма весов исходящих рёбер всегда меньше.

Теперь докажем 2 приближение:

ANS = $\sum\limits_{u \in G} w(u) = \sum\limits_{u \in G} \sum\limits_{e \in N(u)} y(e) \leq 2 * \sum\limits_{e \in E} y(e)$
Так как каждое ребро может встретиться в нашей сумме дважды
Теперь оценим оптимальный ответ
OPT = $\sum\limits_{u \in G'} w(u) \geq \sum\limits_{u \in G'} \sum\limits_{e \in N(u)} y(e) \geq \sum\limits_{e \in E} y(e)$

Получили желаемое, что ANS $\leq 2 * \mathrm{OPT}$