# «Проект по сложностям, тема№82 Вершинное покрытие в взвешенном графе»

ФПМИ МФТИ

Автор решения

Осень 2023

# Содержание

# Аннотация

В данном тексте приводится обоснование алгоритма, который даёт 2 приближение следующей задачи:

Дан граф G(V, E), а также функция $w : V \to \mathbf{R}_+$, требуется найти множество минимального веса, покрывающее все рёбра графа, т.е. такое $U \subset V$, что для любого $(u, v) \in E$ верно $u \in V$ или $v \in V$ и сумма $\sum\limits_{u \in U} w(u)$ минимальна

# Введение

Стоит заметить, что исходная задача без 2 приближения является **NP** полной, поэтому найти хоть какое-то приближение является важной задачей, так как задачи такого вида могут встречаться в реальной жизни. Основная идея этого алгоритма: жадность

# Обозначения

Давайте введем некоторые определения и обозначения которые нам понадобятся в решение исходной задаче:
Граф G(V,E) наш исходный граф
V множество вершин, E множество ребер
w(u) вес u вершины
deg(u) степень вершины u
c(u) $= \frac{w(u)}{deg(u)}$
все эти 3 функции считают значение динамически(то есть при обращение к ним они пересчитываются и пересчитываются функции к которым мы обращаемся и так далее)
OPT - значение оптимального ответа
ANS - наш ответ
m - количество рёбер
Пусть D $=$ множество вершин которые отобрал наш алгоритм
Пусть D' $=$ множество вершин в оптимальном ответе
Также предполагается, что буквы u,v закреплены за обозначением вершин, а буква e за обозначением рера
y(e) функция, которая заполняется по ходу алгоритма
N(u) - множество ребер исходящих из нашей вершины

## Алгоритм

Наш алгоритм будет жадным:

1) Если в нашем графе нет рёбер заканчиваем алгоритм

2) Берём вершину с минимальным значением функции c(u), пусть это вершина u

3) Меняем веса всех смежных вершин w(v) -= c(u) в нашем графе

4) Понижаем степень всех смежных вершин

5) Выкидываем из нашего графа все смежные рёбра с вершиной u

6) переходим к пункту 1

## Асимптотика

Выбор каждой вершины O(n)

3 4 5 пункт тоже за O(n)

Максимум количества операций n

Итоговая асимптотика $O(n^2 + m)$

## Доказательство корректности

Про заполнение функции y(e):

На каждом шаге нашего алгоритма,когда выбираем вершину u, всем смежным рёбрам(понятно, что только тем которые остались в нашем графе) мы ставим значение y(e) = c(u) (тут важно отметить, что c(u) каждый раз обновляется, так как степени вершин обновляются)

после этого наш алгоритм выкидывает помеченные ребра из графа, и в виду вершинного покрытия, мы определим значения y(e) для каждого ребра

Заметим такое свойство нашей функции

$\forall u \in D \sum\limits_{e \in N(u)} y(e) = w(u)$ ну действительно, это следует очевидно из построения нашей функции

$\forall u \sum\limits_{e \in N(u)} y(e) \leq w(u)$

Это уже менее очевидно, для вершин из нашего ответа это верно, а для остальных, которых мы не выбирали это следует из жадности нашего алгоритма. Вес просто никогда не будет отрицательным у вершин, так как мы вычитаем число, меньше или равное весу, значит у нас сохраняется инвариант, $\forall u \ w(u) \geq 0$, ну а значит сумма весов исходящих рёбер всегда меньше.

Теперь докажем 2 приближение:

$\text{ANS} = \sum\limits_{u \in D} w(u) = \sum\limits_{u \in D} \sum\limits_{e \in N(u)} y(e) \leq 2 \cdot \sum\limits_{e \in E} y(e)$

Так как каждое ребро может встретиться в нашей сумме дважды

Теперь оценим оптимальный ответ

$\text{OPT} = \sum\limits_{u \in D'} w(u) \geq \sum\limits_{u \in D'} \sum\limits_{e \in N(u)} y(e) \geq \sum\limits_{e \in E} y(e)$

Получили желаемое, что ANS $\leq 2$ * OPT

Значит наш алгоритм даёт 2 приближение

То что вершинное покрытие следует очевидно из алгоритма, мы останавливаемся только на 1 пункте, а мы обязательно остановимся, так как с каждой итерацией мы убираем хотя бы 1 ребро

## Источники

Идея доказательства взята отсюда: https://www.cs.umd.edu/class/fall2018/cmsc858E/pdfs/651/vc.pdf