

«Проект по сложностям, тема №82 Вершинное покрытие в
взвешенном графе»
ФПМИ МФТИ

Автор решения

Осень 2023

Содержание

Аннотация	3
Введение	3
Обозначения	3
Алгоритм	4
Асимптотика	4
Доказательство корректности	4

Аннотация

В данном тексте приводится обоснование алгоритма, который даёт 2 приближение следующей задачи:

Дан граф $G(V, E)$, а также функция $w : V \rightarrow \mathbf{R}_+$, требуется найти множество минимального веса, покрывающее все рёбра графа, т.е. такое $U \subset V$, что для любого $(u, v) \in E$ верно $u \in U$ или $v \in U$ и сумма $\sum_{u \in U} w(u)$ минимальна

Введение

Стоит заметить, что исходная задача без 2 приближения является **NP** полной, поэтому найти хоть какое-то приближение является важной задачей, так как задачи такого вида могут встречаться в реальной жизни. Основная идея этого алгоритма: жадность

Обозначения

Давайте введем некоторые определения и обозначения которые нам понадобятся в решение исходной задаче:

Граф $G(V, E)$ наш исходный граф

V множество вершин, E множество ребер

$w(u)$ вес u вершины

$\deg(u)$ степень вершины u

$$c(u) = \frac{w(u)}{\deg(u)}$$

все эти 3 функции считают значение динамически (то есть при обращении к ним они пересчитываются и пересчитываются функции к которым мы обращаемся и так далее)

OPT - значение оптимального ответа

ANS - наш ответ

m - количество рёбер

Пусть D = множество вершин которые отобрал наш алгоритм

Пусть D' = множество вершин в оптимальном ответе

Также предполагается, что буквы u, v закреплены за обозначением вершин, а буква e за обозначением рера

$y(e)$ функция, которая заполняется по ходу алгоритма

$N(u)$ - множество ребер исходящих из нашей вершины

Алгоритм

Наш алгоритм будет жадным:

- 1) Если в нашем графе нет рёбер заканчиваем алгоритм
- 2) Берём вершину с минимальным значением функции $c(u)$, пусть это вершина u
- 3) Меняем веса всех смежных вершин $w(v) \leftarrow c(u)$ в нашем графе
- 4) Понижаем степень всех смежных вершин
- 5) Выкидываем из нашего графа все смежные рёбра с вершиной u
- 6) переходим к пункту 1

Асимптотика

Выбор каждой вершины $O(n)$

3 4 5 пункт тоже за $O(n)$

Максимум количества операций n

Итоговая асимптотика $O(n^2 + m)$

Доказательство корректности

Про заполнение функции $y(e)$:

На каждом шаге нашего алгоритма, когда выбираем вершину u , всем смежным рёбрам (понятно, что только тем которые остались в нашем графе) мы ставим значение $y(e) = c(u)$ (тут важно отметить, что $c(u)$ каждый раз обновляется, так как степени вершин обновляются)

после этого наш алгоритм выкидывает помеченные ребра из графа, и в виду вершинного покрытия, мы определим значения $y(e)$ для каждого ребра

Заметим такое свойство нашей функции

$\forall u \in D \sum_{e \in N(u)} y(e) = w(u)$ ну действительно, это следует очевидно из построения нашей функции

$$\forall u \sum_{e \in N(u)} y(e) \leq w(u)$$

Это уже менее очевидно, для вершин из нашего ответа это верно, а для остальных, которых мы не выбирали это следует из жадности нашего алгоритма. Вес просто никогда не будет отрицательным у вершин, так как мы вычитаем число, меньше или равное весу, значит у нас сохраняется инвариант, $\forall u \ w(u) \geq 0$, ну а значит сумма весов исходящих рёбер всегда меньше.

Теперь докажем 2 приближение:

$$ANS = \sum_{u \in D} w(u) = \sum_{u \in D} \sum_{e \in N(u)} y(e) \leq 2 \cdot \sum_{e \in E} y(e)$$

Так как каждое ребро может встретиться в нашей сумме дважды

Теперь оценим оптимальный ответ

$$\text{OPT} = \sum_{u \in D'} w(u) \geq \sum_{u \in D'} \sum_{e \in N(u)} y(e) \geq \sum_{e \in E} y(e)$$

Получили желаемое, что $\text{ANS} \leq 2 * \text{OPT}$

Значит наш алгоритм даёт 2 приближение

То что вершинное покрытие следует очевидно из алгоритма, мы останавливаемся только на 1 пункте, а мы обязательно остановимся, так как с каждой итерацией мы убираем хотя бы 1 ребро

Список литературы

[1] <https://www.cs.umd.edu/class/fall2018/cmsc858E/pdfs/651/vc.pdf>