2020年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试题与参考答案

一、选择题

（1）当$x\to 0^+$时，下列无穷小量最高阶是（　　）

（A）$\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt$.　　（B）$\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt$.

（C）$\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt$.　　（D）$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^2}dt$.

（1）【答案】（D）.

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$,

故$x\to 0^+$时，$\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt$是$x$的3阶无穷小；

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt}{x^{\frac{5}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x^3}\right)}{\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^3}}{\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{5}$,

故$x\to 0^+$时，$\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt$是$x$的$\dfrac{5}{2}$阶无穷小；

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\left(\sin x\right)^2\cdot\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$,

故$x\to 0^+$时，$\int_0^{\sin x}\sin t^2dt$是$x$的3阶无穷小；

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^2}\mathrm{d}t}{\int_0^{1-\cos x}t\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{\sin(1-\cos x)^2}\cdot\sin x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\dfrac{\sin(1-\cos x)^2}{(1-\cos x)^2}}=1$,

又 $\int_0^{1-\cos x}t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}t^2\Big|_0^{1-\cos x}=\dfrac{1}{2}(1-\cos x)^2\sim\dfrac{1}{8}x^4$，

故 $x\to0^+$ 时，$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^2}\mathrm{d}t$ 是 x 的 4 阶无穷小；

综上，$x\to0^+$ 时，无穷小量中最高阶的是 $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^2}\mathrm{d}t$.

故应选（D）.

（2）若 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$，则 $f(x)$ 第二类间断点的个数为 （ ）

（A）1. （B）2. （C）3. （D）4.

（2）【答案】（C）.

【解析】由 $f(x)$ 表达式知，间断点有 $x=0,\pm1,2$.

因 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\cdot x}{x(x-2)}$ 存在，故 $x=0$ 为可去间断点；

因 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\infty$，故 $x=1$ 为第 2 类间断点；

因 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\infty$，故 $x=-1$ 为第 2 类间断点；

因 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\infty$，故 $x=2$ 为第 2 类间断点；

综上，共有 3 个第 2 类间断点. 故应选（C）.

（3） $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=$ （　　）

（A）$\frac{\pi^2}{4}$.　　（B）$\frac{\pi^2}{8}$.　　（C）$\frac{\pi}{4}$.　　（D）$\frac{\pi}{8}$.

（3）【答案】（A）.

【解析】

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x \xlongequal{令\sqrt{x}=t} \int_0^1 \frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}}\cdot 2t\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=2\int_0^1 \mathrm{arcsintdarcsint}$$

$$=(\mathrm{arcsint})^2\Big|_0^1=(\arcsin 1)^2=\frac{\pi^2}{4}.$$

故应选（A）.

（4） $f(x)=x^2\ln(1-x)$，当 $n\geq 3$ 时，$f^{(n)}(0)=$ （　　）

（A）$-\frac{n!}{n-2}$.　　（B）$\frac{n!}{n-2}$.　　（C）$-\frac{(n-2)!}{n}$.　　（D）$\frac{(n-2)!}{n}$.

（4）【答案】（A）.

【解析】由 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{n-2}}{n-2}+\cdots$ 知，

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{n-2}}{n-2}-\cdots$$

故 $f(x)=x^2\ln(1-x)=-x^3-\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n-2}-\cdots$

又 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

由泰勒展开的唯一性知，$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=-\frac{1}{n-2}$，得 $f^{(n)}(0)=-\frac{n!}{n-2}$.

故应选（A）.

（5）关于函数 $f\left(x,y\right)=\begin{cases}xy, & xy\neq 0,\\ x, & y=0,\\ y, & x=0.\end{cases}$ 给出下列结论

① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$.

② $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$.

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

④ $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

正确的个数为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

（A）4.　　　　　　（B）3.　　　　　　（C）2.　　　　　　（D）1.

（5）**【答案】**（B）.

【解析】

①因 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x}=1$，故①正确.

②因 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y-0}$，先求 $f_x'(0,y)$，

而 $f_x'(0,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)-y}{x}$，

当 $y\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)-y}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy-y}{x}$ 不存在；

当 $y=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)-y}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$；

综上可知，$f_x'(0,y)$ 不存在.

故 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在，因此②错误.

③当 $xy\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} xy=0$，

当 (x,y) 沿着 y 轴趋近于 $(0,0)$ 点时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} y=0$，

当 (x,y) 沿着 x 轴趋近于 $(0,0)$ 点时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{y=0\\ x\to 0}} x=0$，

综上可知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$，故③正确.

当 $y=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$；

当 $y\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} xy=0$，

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$，则 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$，故④正确.

综上，正确个数为 3. 故应选（B）.

（6）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导，且 $f'(x)>f(x)>0$, 则　　　　（　　）

（A）$\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$.　　　　（B）$\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$.

（C）$\dfrac{f(1)}{f(-1)}<\mathrm{e}^2$.　　　　（D）$\dfrac{f(2)}{f(-1)}<\mathrm{e}^2$.

（6）【答案】（B）.

【解析】因 $f'(x)>f(x)>0$, 故 $f'(x)-f(x)>0$，从而

$$\mathrm{e}^{-x}\left[f'(x)-f(x)\right]>0, \text{即} \left[\mathrm{e}^{-x}f(x)\right]'>0.$$

从而 $\mathrm{e}^{-x}f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增，故 $\mathrm{e}^{-0}f(0)>\mathrm{e}^{1}f(-1)$, 得 $f(0)>\mathrm{e}f(-1)$.

又 $f(x)>0$，故 $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$. 故应选（B）.

由 $\mathrm{e}^{-1}f(1)>\mathrm{e}^{1}f(-1)$, 得 $\dfrac{f(1)}{f(-1)}>\mathrm{e}^{2}$，选项（C）错；

由 $\mathrm{e}^{-2}f(2)>\mathrm{e}^{1}f(-1)$, 得 $\dfrac{f(2)}{f(-1)}>\mathrm{e}^{2}$, 选项（D）错；

对于选项（A）：因 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增，从而

$f(-1)>f(-2)$, 得 $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}<1$, 选项（A）错.

（7）设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆，元素 a_{12} 对应的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为（　　）

（A）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

（B）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

（C）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

（D）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

（7）【答案】（C）.

【解析】由 $\boldsymbol{A}$ 不可逆知，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<4$，又元素 a_{12} 对应的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geq 3$，从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.

由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & \mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n-1, \end{cases}$ 可知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$.

故 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 3 个解向量.

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可看作 A_{12} 对应矩阵列向量组的延长组，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

又 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

综上，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，故 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

故应选（C）.

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量，则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为（　　）

（A）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.　　（B）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

（C）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.　　（D）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

（8）【答案】（D）.

【解析】$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 1 的线性无关的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 1 的特征向量.

设 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $k_1=k_2=0$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 -1 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_3$，因此 $\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{\alpha}_3)=-(-\boldsymbol{\alpha}_3)$，即 $-\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 -1 的特征向量

可取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$，则 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，且满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

故应选（D）.

二、填空题

9. 已知$\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1}, \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}), \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ ________.

（9）【答案】$-\sqrt{2}$.

【解析】因为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}\right)}{\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=\frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3},$$

故 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\left.\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}.$

（10）$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx=$ ________.

（10）【答案】$\frac{4}{9}\sqrt{2}-\frac{2}{9}$.

【解析】交换积分次序，得

$$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dy=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{x^3+1}d\left(x^3+1\right)$$

$$=\frac{2}{9}\left.\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{4}{9}\sqrt{2}-\frac{2}{9}.$$

（11）设 $z=\arctan\left[xy+\sin\left(x+y\right)\right]$，则 $\left.dz\right|_{(0,\pi)}=$ ________.

（11）【答案】$\left(\pi-1\right)dx-dy$.

【解析】因为

$$z'_x=\frac{y+\cos(x+y)}{1+\left[xy+\sin(x+y)\right]^2},$$
$$z'_y=\frac{x+\cos(x+y)}{1+\left[xy+\sin(x+y)\right]^2},$$

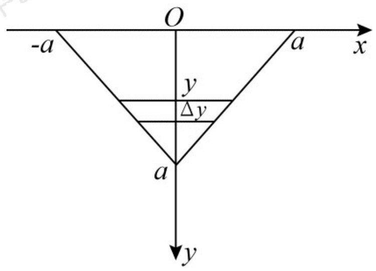
从而

$$z'_x\big|_{(0,\pi)}=\frac{\pi+\cos\pi}{1+(\sin\pi)^2}=\pi-1,$$
$$z'_y\big|_{(0,\pi)}=\frac{0+\cos\pi}{1+(\sin\pi)^2}=-1,$$

故 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

（12）斜边为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，设重力加速度为 g，水密度为 ρ，则该平板一侧所受的水压力为_______.

（12）【答案】 $\frac{1}{3}\rho g a^3$.



【解析】如图建立坐标系，在 $[0,a]$ 上任取小区间 $[y,y+\Delta y]$，则 $\Delta F=\rho g y\cdot 2(a-y)\cdot\Delta y$，从而 $\mathrm{d}F=2\rho g y(a-y)\mathrm{d}y$，故

$$F=\int_0^a \mathrm{d}F=\int_0^a 2\rho g y(a-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\rho g a^3.$$

13. 设 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$，且 $y(0)=0,y'(0)=1$，则

$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=$_______.

（13）【答案】1.

【解析】解方程 $y''+2y'+y=0$，得 $y=y(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2x\mathrm{e}^{-x}$.

又 $y(0)=0,y'(0)=1$，故 $C_1=0,C_2=1$.从而 $y(x)=x\mathrm{e}^{-x}$，故

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}\\&=-\left[x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right]\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1.\end{aligned}$$

14. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

（14）【答案】$a^2\left(a^2-4\right)$.

【解析】

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = a\left(a^3-4a\right) = a^2\left(a^2-4\right).$$

三、解答题

（15）（本题满分 10 分）

求曲线 $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\ (x>0)$ 的斜渐近线方程.

（15）【解析】因为

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{\mathrm{e}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\mathrm{e}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\mathrm{e}^2}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{x\to+\infty} x\cdot\mathrm{e}\left(1-\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{x\to+\infty} x\left(1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2\mathrm{e}},$$

从而曲线的斜渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

（16）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（16）【解析】 由 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知，$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

当 $x=0$ 时，$g(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=0$；

当 $x\neq0$ 时，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}(xt)=\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}$.

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2};$$

当 $x\neq0$ 时，$g'(x)=\dfrac{f(x)x-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}g'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}=g'(0)$，所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（17）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

（17）【解析】 因为 $f_x'=3x^2-y, f_y'=24y^2-x,$

联立方程组 $\begin{cases}f_x'=3x^2-y=0,\\ f_y'=24y^2-x=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}\begin{cases}x=\dfrac{1}{6},\\ y=\dfrac{1}{12}.\end{cases}$

故驻点为 $(0,0),\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$.

在点 $(0,0)$ 处：

$$A=f''_{xx}(0,0)=0,\ B=f''_{xy}(0,0)=-1,\ C=f''_{yy}(0,0)=0,$$

$AC-B^2=-1<0$，故$(0,0)$不是极值点.

在点$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$处：

$$A=f''_{xx}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=1>0,\ B=f''_{xy}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-1,\ C=f''_{yy}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=4,$$

$AC-B^2=4-1>0$，故$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$是极小值点，极小值为

$$f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{12}\right)^3-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}=-\frac{1}{216}.$$

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$且满足$2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f(x)$，并求曲线 $y=f(x),y=\frac{1}{2},y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

（18）【解析】因为$2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$， (1)

所以$2f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1+2x}{x\sqrt{1+x^2}}$， (2)

$(1)\times2-(2)\times x^2$，得 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},x\in(0,+\infty)$.

故旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\sqrt{3}-\pi(\frac{1}{2})^2\frac{\sqrt{3}}{3}-\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\pi(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})^2\mathrm{d}x\\&=\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x\\&=\pi\arctan x\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

（19）（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由直线 $x=1,x=2,y=x$ 与 x 轴所围，计算$\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（19）【解析】

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{r}{\cos\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}}\frac{r}{\cos\theta}\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta,$$

因为

$$\begin{aligned}\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta&=\int\sec\theta\mathrm{d}\tan\theta=\sec\theta\tan\theta-\int\tan\theta\mathrm{d}\sec\theta=\sec\theta\tan\theta-\int\tan\ \theta\sec\theta\mathrm{d}\theta\\&=\sec\theta\tan\theta-\int(\sec^2\theta-1)\sec\theta\mathrm{d}\theta=\sec\theta\tan\theta-\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta+\int\sec\theta\mathrm{d}\theta\\&=\sec\theta\tan\theta-\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|,\end{aligned}$$

所以 $\int\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta+\frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+C$，

从而 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\left(\sec\theta\tan\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{4}\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right]$.

（20）（本题满分 11 分）

已知 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t$，证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

（20）【解析】（Ⅰ）令 $F(x)=f(x)-(2-x)e^{x^2}$，有 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且

$$F(1)=f(1)-e=-e<0,\quad F(2)=f(2)=\int_1^2 e^{t^2}\mathrm{d}t>0,$$

由零点定理，存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$.

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 及 $\ln x$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f'(x)=e^{x^2}$，所以由柯西中值定理，存在 $\eta\in(1,2)$，使得

$$\frac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ln 1}=\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}},\ \text{即 } f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}.$$

（21）（本题满分 11 分）

已知 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0(x\ge 0)$. 曲线 $y=f(x)$ 的图象过原点 O，曲线上任意一点 M 的切线与 x 轴交于 T，$MP\perp x$ 轴，曲线 $y=f(x), MP, x$ 轴围成面积与 ΔMTP 面积比为 $3:2$，求曲线方程.

（21）【解析】设点 M 的坐标为 (x,y)，则曲线 $y=f(x)$ 经过点 $M(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，从而点 T 的坐标为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$，故

$$S_{\Delta MTP}=\frac{1}{2}|MP||PT|=\frac{1}{2}\cdot y\cdot\frac{y}{y'}=\frac{y^2}{2y'},$$

$$S_{\text{曲边三角形}OMP}=\int_0^x y\mathrm{d}t,$$

由题意知，$\dfrac{\int_0^x y\mathrm{d}t}{\dfrac{y^2}{2y'}}=\dfrac{3}{2}$，即 $\int_0^x y\mathrm{d}t=\dfrac{3y^2}{4y'}$，两边对 x 求导，得

$$y=\frac{3}{4}\cdot\frac{2yy'^2-y^2y''}{y'^2},$$

整理得 $2yy'^2=3y^2y''$　　　（1）

由已知，得 $y(0)=0, y'(x)>0$，故 $x>0$ 时，$y(x)>0$，则（1）式可化为 $y'^2=\dfrac{3}{2}yy''$（2），此方程为可降阶的微分方程，令 $P=y'$，则（2）式可化为

$$P^2=\frac{3}{2}y\cdot P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y},$$

又 $P=y'>0$，故有 $P=\dfrac{3}{2}y\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，解方程，得 $\ln P=\dfrac{2}{3}\ln y+C_1$，则 $P=C_2y^{\frac{2}{3}}$，其中

$C_2=\mathrm{e}^{C_1}>0$. 即有 $y'=C_2y^{\frac{2}{3}}$，分离变量，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{2}{3}}}=C_2\mathrm{d}x$，两边积分，得

$3y^{\frac{1}{3}}=C_2x+C_3(x>0)$.

因 $y(0)=0$, 又 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $\lim\limits_{x\to 0} y=0$, 得 $C_3=0$，故 $3y^{\frac{1}{3}}=C_2 x$，

即 $y=\left(\dfrac{C_2}{3}\right)^2 x^3$．令 $C=\left(\dfrac{C_2}{3}\right)^2>0$, 得 $y=Cx^3\,(x>0)$，C 为大于 0 的任意常数.

（22）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

（22）【解析】（Ⅰ）设二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$，$f$ 经过可逆线性变换

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 化成 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$, 即

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}}{=}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}.$$

记 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，从而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

易知 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$，故 $|\boldsymbol{A}|=(2a+1)(1-a)^2=0$, 解得 $a=-\dfrac{1}{2}$ 或 1，又 $a=1$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，

排除，故 $a=-\dfrac{1}{2}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3 \\
&= \left(x_1-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+\frac{3}{4}x_3^2-\frac{3}{2}x_2x_3 \\
&= \left(x_1-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2,
\end{aligned}
$$

令 $\begin{cases} x_1-\dfrac{x_2}{2}-\dfrac{x_3}{2}=z_1, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_3)=z_2, \\ x_3=z_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=z_1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}z_2+z_3, \\ x_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}z_2+z_3, \\ x_3=z_3, \end{cases}$ 则 $f=z_1^2+z_2^2$.

记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

又 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$,

令 $\begin{cases} y_1+y_2=z_1, \\ y_2=z_3, \\ 2y_3=z_2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1-z_3, \\ y_2=z_3, \\ y_3=\dfrac{z_2}{2}, \end{cases}$ 则 $f=z_1^2+z_2^2$.

记 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{2}- & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

因此 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$，则 $(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$,

可取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为所求的可逆矩阵.

（23）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角阵.

（23）【解析】

（Ⅰ）若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 成比例，即有 $\boldsymbol{A\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，故根据特征值、特征向量的定义知，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 k 的特征向量. 与已知矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 无关，从而 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

（Ⅱ）由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 知，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{A\alpha}+6\boldsymbol{\alpha}$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},-\boldsymbol{A\alpha}+6\boldsymbol{\alpha})\\&=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$, 得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

因为$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&6\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda+3)(\lambda-2)$,

可知，$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=2$.

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=2$.

因此 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.