2020 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题与参考答案

一、选择题

（1）当 $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量最高阶是　　　　（　　）

（A）$\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt.$　　　　（B）$\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt.$

（C）$\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt.$　　　　（D）$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^2} dt.$

（1）【答案】（D）.

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$,

故 $x \to 0^+$ 时，$\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt$ 是 x 的 3 阶无穷小；

$$因为\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt}{x^{\frac{5}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x^3}\right)}{\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^3}}{\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{5},$$

故 $x \to 0^+$ 时，$\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt$ 是 x 的 $\dfrac{5}{2}$ 阶无穷小；

$$因为\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\left(\sin x\right)^2\cdot\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

故 $x \to 0^+$ 时，$\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt$ 是 x 的 3 阶无穷小；

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^2}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{1-\cos x} t\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{\sin(1-\cos x)^2}\cdot\sin x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{\sin(1-\cos x)^2}{(1-\cos x)^2}}=1,$

又 $\int_0^{1-\cos x} t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}t^2\Big|_0^{1-\cos x}=\dfrac{1}{2}(1-\cos x)^2\sim\dfrac{1}{8}x^4$，

故 $x\to 0^+$ 时，$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^2}\,\mathrm{d}t$ 是 x 的 4 阶无穷小；

综上，$x\to 0^+$ 时，无穷小量中最高阶的是 $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^2}\,\mathrm{d}t$.

故应选（D）.

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 则　　（　　）

（A）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

（B）当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

（C）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

（D）当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$.

（2）【答案】（C）.

【解析】

对于选项（A）：取 $f(x)=|x|$，满足已知，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，排除（A）.

对于选项（B）：$f(x)=\begin{cases}x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 满足已知，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，排除（B）.

对于选项（C）：当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 且 $f'(0)$ 存在，不妨设 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$,

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=0$. 同理可排除（D）.

故应选（C）.

（3）设函数 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f(0,0)=0,\boldsymbol{n}=\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\right|_{(0,0)}$，非零向量 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，则（　　）

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在.

（B）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在.

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{d}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在.

（D）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{d}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在.

（3）【答案】（A）.

【解析】因 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且 $f(0,0)=0$，故

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

因为 $\boldsymbol{n}=\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\right|_{(0,0)}=\left(f_x'(0,0),f_y'(0,0),-1\right)$，故

$$\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))=f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y-f(x,y)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 故应选（A）.

（4） 设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径， r 是实数，则 （　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 发散时，$|r|\ge R$.

（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 发散时，$|r|\le R$.

（C）$|r|\ge R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 发散.

（D）$|r|\le R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 发散.

（4）【答案】（A）.

【解析】若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 发散，则 $|r|\ge R$，否则，若 $|r|<R$，由阿贝尔定理知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nr^n$ 绝对收敛，矛盾. 故应选（A）.

（5）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 （　　）

（A）存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.

（B）存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$.

（C）存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$.

（D）方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

（5）【答案】（B）.

【解析】$\boldsymbol{A}$ 经过初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$，相当于 $\boldsymbol{A}$ 右乘可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 变成 $\boldsymbol{B}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$，得 $\boldsymbol{BQ}^{-1}=\boldsymbol{A}$. 取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}$，则存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$.

故应选（B）.

（6）已知直线$L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$与直线$L_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$相交于一点，法向量$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix},i=1,2,3$.则　　　　（　　）

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.　　　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_2$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示.　　　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

（6）【答案】（C）.

【解析】已知L_1,L_2相交于一点，故向量$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$，即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关.

且有$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3-a_2\\b_3-b_2\\c_3-c_2\end{pmatrix}$，即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关.

故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_3$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，且表示法唯一.

故应选（C）.

（7）设A,B,C为三个随机事件，且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12},$$

则A,B,C恰有一个事件发生的概率为　　　　（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$.　　（B）$\dfrac{2}{3}$.　　（C）$\dfrac{1}{2}$.　　（D）$\dfrac{5}{12}$.

（7）【答案】（D）.

【解析】事件A,B,C中前有一个发生的概率可用至少一个发生的概率减去至少发生两个的概率表示，即$P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A+B+C)-P(AB+AC+BC)$,

而$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$，因$P(AB)=0$，故$P(ABC)=0$，从而

$$P(A+B+C)=\frac{3}{4}-0-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-0=\frac{7}{12},$$
$$\begin{aligned}P(AB+AC+BC)&=P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)-P(ABC)-P(ABC)+P(ABC)\\&=0+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-0=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

故 $P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=\frac{7}{12}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$. 故应选（D）.

（8）设$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$为来自总体X的简单随机样本，其中$P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$，$\Phi(x)$表示标准正态分布，则利用中心极限定理可得$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right\}$的近似值为（　　）

（A）$1-\Phi(1)$.　　（B）$\Phi(1)$.　　（C）$1-\Phi(0.2)$.　　（D）$\Phi(0.2)$.

（8）【答案】（B）.

【解析】由中心极限定理知，$\sum_{i=1}^{100}X_i$近似服从$N(\mu,\sigma^2)$，其中$\mu=E(\sum_{i=1}^{100}X_i)=50$，$\sigma^2=D(\sum_{i=1}^{100}X_i)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25$，故

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-50}{5}\le\frac{55-50}{5}\right\}\approx\Phi(1).$$

故应选（B）.

二、填空题

9. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$________.

（9）【答案】-1.

【解析】

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{\left(e^x-1\right)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+1+o\left(x^2\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=-1.$$

10. 已知$\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),\end{cases}$ 则$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ ________.

（10）【答案】$-\sqrt{2}$.

【解析】因为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}\right)}{\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=\frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3},$$

故$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\left.\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}.$

11. 设$y=f(x)$满足$f''(x)+af'(x)+f(x)=0\ (a>0), f(0)=m, f'(0)=n$，则

$\int_0^{+\infty}f(x)dx=$ ________.

（11）【答案】$am+n$.

【解析】由已知，得

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=-\int_0^{+\infty}\left[f''(x)+af'(x)\right]dx=-\left[f'(x)+af(x)\right]\Big|_0^{+\infty}.$$

方程$f''(x)+af'(x)+f(x)=0$的特征方程为$\lambda^2+a\lambda+1=0$，

当$0<a<2$时，$\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{4-a^2}i}{2}$，故

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right),$$

$$\begin{aligned}f'(x)=&-\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right)\\&+\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\left(-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}C_1\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x+\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right),\end{aligned}$$

从而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

当$a=2$时，$\lambda_{1,2}=-1$，故

$$f(x)=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x},$$
$$f'(x)=-(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-x},$$

从而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

当$a>2$时，$\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$，故

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}x},$$
$$f'(x)=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}C_1\mathrm{e}^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}x}+\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}C_2\mathrm{e}^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}x},$$

从而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

综上，

$$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=-\left[f'(x)+af(x)\right]\Big|_0^{+\infty}=-\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)+af(x)\right]+\left[f'(0)+af(0)\right]=am+n.$$

12. $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\mathrm{d}t$，则$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$________.

（12）【答案】$4\mathrm{e}$.

【解析】因为$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$，又$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{x(xy)^2}\cdot x=x\mathrm{e}^{x^3y^2}$，

从而

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=1}\right)\right|_{x=1}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\mathrm{e}^{x^3}\right)\right|_{x=1}$$

$$=\left.\left(\mathrm{e}^{x^3}+x\cdot\mathrm{e}^{x^3}\cdot 3x^2\right)\right|_{x=1}$$

$$=4\mathrm{e}.$$

13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

（13）【答案】 $a^2\left(a^2-4\right)$.

【解析】

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}=a\left(a^3-4a\right)=a^2\left(a^2-4\right).$$

（14）设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=$________.

（14）【答案】 $\frac{2}{\pi}$.

【解析】由题意 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

又 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y), Y=\sin X$, 而

$$E(X)=0,$$

$$E(XY)=E(X\sin X)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\cos x=-\frac{2}{\pi}\left[\left.x\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\left.\frac{2}{\pi}\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

故 $\operatorname{cov}(X,Y)=\dfrac{2}{\pi}-0=\dfrac{2}{\pi}$.

三、解答题

（15）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

（15）【解析】 因为 $f_x'=3x^2-y, f_y'=24y^2-x$,

联立方程组 $\begin{cases} f_x'=3x^2-y=0, \\ f_y'=24y^2-x=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{1}{6}, \\ y=\dfrac{1}{12}. \end{cases}$

故驻点为 $(0,0),\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$.

在点 $(0,0)$ 处：

$$A=f_{xx}''(0,0)=0,\ B=f_{xy}''(0,0)=-1,\ \ C=f_{yy}''(0,0)=0,$$

$AC-B^2=-1<0$，故 $(0,0)$ 不是极值点.

在点 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 处：

$$A=f_{xx}''\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=1>0,\ B=f_{xy}''\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-1,\ \ C=f_{yy}''\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=4,$$

$AC-B^2=4-1>0$，故 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 是极小值点，极小值为

$$f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{12}\right)^3-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}=-\frac{1}{216}.$$

（16）（本题满分 10 分）

计算 $I=\int_L \dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中 L 为 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

（16）【解析】补曲线 $L_1:4x^2+y^2=\varepsilon^2$, 其中 $\varepsilon>0$ 为一个很小的数，使得 $4x^2+y^2=\varepsilon^2$ 在曲线 L 的内部，方向顺时针，则

$$I=\oint_{L+L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y-\oint_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

记 $P=\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2},Q=\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-4x^2-8xy+y^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-4x^2-8xy+y^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2},$$

由格林公式知，$\oint_{L+L_1}\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y=0.$

又

$$\begin{aligned}\oint_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y&=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_1}(4x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y\\&=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}\left[1-(-1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=-\pi.\end{aligned}$$

从而 $I=0-(-\pi)=\pi.$

（17）（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,(n+1)a_{n+1}=(n+\frac{1}{2})a_n$.

证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数.

（17）【证明】 由 $(n+1)a_{n+1}=(n+\frac{1}{2})a_n$，有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1,$$

故当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛.

当 $|x|<1$ 时，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，且 $a_1=1,$ 则

$$
\begin{aligned}
S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n + \frac{1}{2}) a_n x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\
&= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \frac{1}{2} S(x) \\
&= 1 + x S'(x) + \frac{1}{2} S(x),
\end{aligned}
$$

进而有$(1-x)S'(x) = 1 + \frac{1}{2}S(x)$, 整理得

$$
S'(x) - \frac{1}{2(1-x)} S(x) = \frac{1}{1-x},
$$

解之得$S(x) = C\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 2.$

由题意知，$S(0) = 0$，故$C = 2$，从而有$S(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2.$

（18）（本题满分 10 分）

Σ为曲面$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(1 \le x^2+y^2 \le 4\right)$的下侧，$f(x)$为连续函数，计算

$$
I = \iint_{\Sigma} \left[xf(xy) + 2x - y\right] \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[yf(xy) + 2y + x\right] \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left[zf(xy) + z\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
$$

（18）【解析】因Σ为曲面$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(1 \le x^2+y^2 \le 4\right)$的下侧，故由转换投影法知，

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma} \left[xf(xy) + 2x - y\right] \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[yf(xy) + 2y + x\right] \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left[zf(xy) + z\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\iint_{D} \left\{\left[xf(xy) + 2x - y\right] \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left[yf(xy) + 2y + x\right]\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left[zf(xy) + z\right]\right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\iint_{D} \left\{\left[xf(xy) + 2x - y\right] \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \left[yf(xy) + 2y + x\right] \cdot \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left[\sqrt{x^2+y^2} f(xy) + \sqrt{x^2+y^2}\right]\right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D} \sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \mathrm{r} \cdot \mathrm{r}\mathrm{d}r = \frac{14\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

其中$D = \left\{(x, y) \middle| 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

（19）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有一阶连续导数，且 $f(0)=f(2)=0, M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$.

证明：（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\ge M$；

（Ⅱ）若对任意 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\le M$，则 $M=0$.

（19）【证明】（Ⅰ）因 $|f(x)|$ 在 $[0,2]$ 上连续，故存在最大值 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$.

若 $M=0$，则对 $\forall\xi\in(0,2)$，都有 $|f'(\xi)|\ge 0$，命题成立.

若 $M>0$，因 $f(0)=f(2)=0$, 故存在 $x_0\in(0,2)$，使得 $|f(x_0)|=M$.

当 $x_0\in(0,1)$，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_1\in(0,x_0)\subset(0,1)$，使得

$$f(x_0)-f(0)=f'(\xi_1)x_0,$$

则有 $|f'(\xi_1)|=\dfrac{|f(x_0)|}{x_0}=\dfrac{M}{x_0}>M$.

当 $x_0\in(1,2)$，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_2\in(x_0,2)\subset(1,2)$，使得

$$f(2)-f(x_0)=f'(\xi_2)(2-x_0),$$

则有 $|f'(\xi_2)|=\dfrac{|f(x_0)|}{2-x_0}=\dfrac{M}{2-x_0}>M$.

当 $x_0=1$，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_3\in(0,1)$，使得

$$|f'(\xi_3)|=|f(1)-f(0)|=|f(1)|=M.$$

综上，存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\ge M$.

（Ⅱ）假设 $M>0$，因对任意 $x\in(0,2)$，有 $|f'(x)|\le M$，由（Ⅰ）知，

当 $x_0\in(0,1)$ 或 $x_0\in(1,2)$ 时，存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|>M$，矛盾，从而有 $M=0$.

当 $x_0=1$ 时，有 $|f(1)|=M$，则 $f(1)=\pm M$，不妨设 $f(1)=M$.

构造函数 $g(x)=f(x)-Mx, x\in[0,1]$.

因为$g'(x)=f'(x)-M\le 0$,故$g(x)$单调不增．又$g(0)=0,g(1)=0$，从而$g(x)\equiv 0,x\in[0,1]$，即$f(x)=Mx,x\in[0,1]$.

构造函数$h(x)=f(x)+Mx-2M,x\in[1,2]$.

因为$h'(x)=f'(x)+M\ge 0$，故$h(x)$单调不减.

又$h(1)=M+M-2M=0,h(2)=0$，从而$h(x)\equiv 0,x\in[1,2]$，即$f(x)=-Mx+2M$.

综上，当$x_0=1$时，$f(x)=\begin{cases} Mx, & 0\le x\le 1, \\ -Mx+2M, & 1<x\le 2. \end{cases}$

因为

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{Mx-M}{x-1}=M>0,$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-Mx+2M-M}{x-1}=-M<0,$$

故与$f(x)$在$x=1$处可导矛盾，从而当$x_0=1$时，有$M=0$.

若$f(1)=-M$ ，则可构造$g(x)=f(x)+Mx,h(x)=f(x)-Mx+2M$,同理可证.

综上，若对任意$x\in(0,2)$，$|f'(x)|\le M$ ，则$M=0$.

（20）（本题满分 11 分）

设二次型$f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$经正交变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$化为二次型

$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$,其中$a\ge b$.

（Ⅰ）求a,b的值；

（Ⅱ）求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$.

（20）【解析】 （Ⅰ）设二次型f的矩阵为$\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

又f经正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$化成$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$,即

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}}{=}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}\boldsymbol{Y}.$$

因此$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}$. 记$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}$，由于$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵，故$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似且合同，

故$\begin{cases}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}),\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\end{cases}$即$\begin{cases}1+4=a+b,\\ab-4=0,\end{cases}$解得$a=4,b=1$或$a=1,b=4$.

又$a\geq b$，故$a=4,b=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似. 又

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2\\-2&4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda,$$

可知，$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$特征值均为$\lambda_1=0,\lambda_2=5$.

对于$\lambda_1=0$，解$(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得$\boldsymbol{A}$的属于特征值 0 的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，

对于$\lambda_2=5$，解$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得$\boldsymbol{A}$的属于特征值 5 的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$已经正交化，故直接单位化，得$\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

故可取$\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，则$\boldsymbol{P}_1$为正交矩阵，且有$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&\\&5\end{pmatrix}$.

对于$\lambda_1=0$，解$(\boldsymbol{B}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得$\boldsymbol{B}$的属于特征值 0 的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，

对于$\lambda_2=5$，解$(\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得$\boldsymbol{B}$的属于特征值 5 的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，

故可取$\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)$，则$\boldsymbol{P}_2$为正交矩阵，且有$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&\\&5\end{pmatrix}$.

则有$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$，因此$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$.

取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\left(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}.$$

综上，有 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

（21）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角阵.

（21）【解析】（Ⅰ）若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 成比例，即有 $\boldsymbol{A\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，故根据特征值、特征向量的定义知，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 k 的特征向量. 与已知矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 无关，从而 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

（Ⅱ）由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 知，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{A\alpha}+6\boldsymbol{\alpha}$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=\left(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}\right)=(\boldsymbol{A\alpha},-\boldsymbol{A\alpha}+6\boldsymbol{\alpha})\\&=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$, 得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

因为 $|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&6\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda+3)(\lambda-2)$,

可知，$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=2$.

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=2$.

因此 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

22. （本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 和 X_2 服从标准正态分布， X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}$， $Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（Ⅰ）求二维随机变量 (X_1,Y) 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示；

（Ⅱ）证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

（22）【解析】

（Ⅰ）由

$$\begin{aligned}F(x,y)&=P\{X_1\le x,Y\le y\}=P\{X_1\le x,[X_3X_1+(1-X_3)X_2]\le y\}\\&=P\{X_1\le x,[X_3X_1+(1-X_3)X_2]\le y,X_3=0\}+P\{X_1\le x,[X_3X_1+(1-X_3)X_2]\le y,X_3=1\}\\&=P\{X_1\le x,X_2\le y,X_3=0\}+P\{X_1\le x,X_1\le y,X_3=1\}\end{aligned}$$

又 X_1,X_2,X_3 相互独立，故 $F(x,y)=\dfrac{1}{2}\Phi(x)\cdot\Phi(y)+\dfrac{1}{2}P\{X_1\le x,X_1\le y\}$.

当 $x\ge y$ 时， $F(x,y)=\dfrac{1}{2}\Phi(x)\cdot\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(y)=\dfrac{1}{2}\Phi(y)\left[\Phi(x)+1\right]$；

当 $x<y$ 时， $F(x,y)=\dfrac{1}{2}\Phi(x)\cdot\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(x)=\dfrac{1}{2}\Phi(x)\left[\Phi(y)+1\right]$.

综上， $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(y)\left[\Phi(x)+1\right], & x\ge y,\\ \dfrac{1}{2}\Phi(x)\left[\Phi(y)+1\right], & x<y.\end{cases}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）有，

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\Phi(x)\cdot\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)\right]=\frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)=\Phi(y),$$

故 Y 服从标准正态分布.

（23）（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命T的分布函数为：$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geq 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

其中θ,m为参数且大于零.

（Ⅰ）求概率$P\{T>t\}与P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中$s>0,t>0$；

（Ⅱ）任取n个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为$t_1,t_2,\cdots t_n$，若m已知，求θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$.

（23）【解析】

（Ⅰ）

$$P\{T>t\}=1-P\{T\leq t\}=1-F(t)=1-\left[1-\mathrm{e}^{-(\frac{t}{\theta})^m}\right]$$

$$P\{T>s+t\mid T>s\}=\frac{P\{T>s+t,T>s\}}{P\{T>s\}}=\frac{P\{T>s+t\}}{P\{T>s\}}=\frac{1-F(t+s)}{1-F(s)}$$

$$=\frac{1-[1-\mathrm{e}^{-(\frac{t+s}{\theta})^m}]}{1-[1-\mathrm{e}^{-(\frac{s}{\theta})^m}]}=\frac{\mathrm{e}^{-(\frac{t+s}{\theta})^m}}{\mathrm{e}^{-(\frac{s}{\theta})^m}}=\mathrm{e}^{\frac{s^m-(t+s)^m}{\theta^m}}.$$

（Ⅱ）由题意得，T的概率密度为$f(t)=F'(t)=\begin{cases}m\cdot\dfrac{t^{m-1}}{\theta^m}e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

似然函数$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(t_i;\theta)=\begin{cases}m^n\cdot\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{m-1}}{\theta^{mn}}\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{t_i}{\theta})^m}, & t_i>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当$t_i > 0$时，$L(\theta) = m^n \cdot \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n} t_i^{\,m-1}}{\theta^{mn}} \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{t_i}{\theta})^m}$，

$$\ln L(\theta) = n\ln m + \ln\prod_{i=1}^{n} t_i^{\,m-1} - mn\ln\theta - \sum_{i=1}^{n}(\frac{t_i}{\theta})^m,$$

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{mn}{\theta} + m\sum\limits_{i=1}^{n}\left[(\dfrac{t_i}{\theta})^{m-1}\cdot\dfrac{t_i}{\theta^2}\right] = -\dfrac{mn}{\theta} + m\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^{\,m}}{\theta^{m+1}} = 0$，解之得$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta} = \sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^m}$.