2020 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试题与参考答案

一、选择题

（1）设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$ （　　）

（A）$b\sin a$.　　（B）$b\cos a$.

（C）$b\sin f(a)$.　　（D）$b\cos f(a)$.

（1）【答案】（B）.

【解析】由拉格朗日中值定理知，存在 ξ 介于 a 与 $f(x)$ 之间，使得

$$\sin f(x)-\sin a=\cos\xi\cdot\left[f(x)-a\right].$$

由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，则有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$.

从而有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{\cos\xi\cdot\left[f(x)-a\right]}{x-a}=b\cdot\lim_{x\to a}\cos\xi\\&=b\cdot\lim_{\xi\to a}\cos\xi=b\cdot\cos a.\end{aligned}$$

故应选（B）.

（2）若 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$，则 $f(x)$ 第二类间断点的个数为 （　　）

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

（2）【答案】（C）.

【解析】由 $f(x)$ 表达式知，间断点有 $x=0,\pm1,2$.

因 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\cdot x}{x(x-2)}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$，故 $x=0$ 为可去间断点；

因 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\infty$，故 $x=1$ 为第二类间断点；

因 $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\infty$，故 $x=-1$ 为第二类间断点；

因 $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\infty$，故 $x=2$ 为第二类间断点；

综上，共有 3 个第二类间断点. 故应选（C）.

（3）设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，则（　　）

（A）$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.

（B）$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

（C）$\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.

（D）$\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

（3）【答案】（A）.

【解析】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，且为奇函数，故 $f'(x)$ 为偶函数，又 $\cos f(x)$ 也为偶函数，从而 $\cos f(t)+f'(t)$ 为偶函数，进而 $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.故应选（A）.

（4）设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$的收敛区间为$(-2,6)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$的收敛区间为（　）

（A）$(-2,6)$.　　（B）$(-3,1)$.　　（C）$(-5,3)$.　　（D）$(-17,15)$.

（4）【答案】（B）.

【解析】由幂级数性质知，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$有相同的收敛半径.

因$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$的收敛区间为$(-2,6)$，故有$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$的收敛半径$R=4$，从而$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R=4$，故当$(x+1)^2<4$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$收敛，所以其收敛区间为$(-3,1)$.故应选（B）.

（5）设4阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$不可逆，元素a_{12}对应的代数余子式$A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为　　（　）

（A）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数.

（B）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数.

（C）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数.

（D）$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数.

（5）【答案】（C）.

【解析】由$\boldsymbol{A}$不可逆知，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<4$，又元素$a_{12}$对应的代数余子式$A_{12}\neq 0$，故$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geq 3$，从而$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.

由$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & \mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n-1, \end{cases}$可知$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^*)=1$.

故$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系含有3个解向量.

因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$可看作$A_{12}$对应矩阵列向量组的延长组，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

又 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

综上，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，故 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

故应选（C）.

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量，则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为　　（　　）

（A）$\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3\right)$.　　　　（B）$\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3\right)$.

（C）$\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2\right)$.　　　　（D）$\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2\right)$.

（6）【答案】（D）.

【解析】$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 1 的线性无关的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 1 的特征向量.

设 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，即 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $k_1=k_2=0$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 -1 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_3$，因此 $\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{\alpha}_3)=-(-\boldsymbol{\alpha}_3)$，即 $-\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 -1 的特征向量

可取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$，则 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，且满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

故应选（D）.

（7）设 A,B,C 为三个随机事件，且

$$P\left(A\right)=P\left(B\right)=P\left(C\right)=\frac{1}{4},P\left(AB\right)=0,P\left(AC\right)=P\left(BC\right)=\frac{1}{12},$$

则 A,B,C 恰有一个事件发生的概率为　　（　　）

（A）$\frac{3}{4}$.　　（B）$\frac{2}{3}$.　　（C）$\frac{1}{2}$.　　（D）$\frac{5}{12}$.

（7）【答案】（D）.

【解析】事件 A,B,C 中仅有一个发生的概率可用至少一个发生的概率减去至少发生两个的概率表示，即 $P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)=P(A+B+C)-P(AB+AC+BC)$,

而 $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$，因 $P(AB)=0$，故 $P(ABC)=0$，从而

$$
\begin{aligned}
&P(A+B+C)=\frac{3}{4}-0-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-0=\frac{7}{12},\\
&P(AB+AC+BC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)-P(ABC)-P(ABC)+P(ABC)\\
&\qquad\qquad\qquad\quad=0+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-0=\frac{1}{6},
\end{aligned}
$$

故 $P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)=\frac{7}{12}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$. 故应选（D）.

（8）设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N\left(0,0;1,4;-\frac{1}{2}\right)$，下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是（　　）

（A）$\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$.　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$.

（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$.　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

（8）【答案】（C）.

【解析】由二维正态的性质知 $X+Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，因

$$
\begin{aligned}
\mu&=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=0,\\
\sigma^2&=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)\\
&=1+4+2\cdot\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}\\
&=1+4+2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot1\cdot2=3,
\end{aligned}
$$

故 $\frac{X+Y-0}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\sim N(0,1)$.

又$\left(\dfrac{\sqrt{3}(X+Y)}{3},X\right)$服从二维正态分布，而

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left[\frac{\sqrt{3}(X+Y)}{3},X\right]&=\frac{\sqrt{3}}{3}[\operatorname{cov}(X,X)+\operatorname{cov}(X,Y)]\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[D(X)+\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}\right]\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[1+(-\frac{1}{2})\cdot1\cdot2\right]\\&=0,\end{aligned}$$

故$\dfrac{\sqrt{3}(X+Y)}{3}$与X不相关，由二维正态的性质知，$\dfrac{\sqrt{3}(X+Y)}{3}$与X独立.

故应选（C）.

二、填空题

（9）设$z=\arctan\left[xy+\sin\left(x+y\right)\right]$，则$\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$________.

（9）【答案】$\left(\pi-1\right)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

【解析】因为

$$z_x'=\frac{y+\cos\left(x+y\right)}{1+\left[xy+\sin\left(x+y\right)\right]^2},$$
$$z_y'=\frac{x+\cos\left(x+y\right)}{1+\left[xy+\sin\left(x+y\right)\right]^2},$$

从而

$$z_x'\big|_{(0,\pi)}=\frac{\pi+\cos\pi}{1+\left(\sin\pi\right)^2}=\pi-1,$$
$$z_y'\big|_{(0,\pi)}=\frac{0+\cos\pi}{1+\left(\sin\pi\right)^2}=-1,$$

故$\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=\left(\pi-1\right)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

（10）曲线$x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$在点$\left(0,-1\right)$处的切线方程为________.

（10）【答案】$y=x-1$.

【解析】方程 $x+y+e^{2xy}=0$ 两边对 x 求导，得

$$1+y'+e^{2xy}\left(2y+2xy'\right)=0,$$

代入 $y(0)=-1$，得 $1+y'(0)+(-2+0)=0$，解得 $y'(0)=1$.

从而切线方程为 $y+1=1\times(x-0)$,即 $y=x-1$.

（11）Q 表示产量，成本 $C(Q)=100+13Q$，单价为 p，需求量 $Q(p)=\dfrac{800}{p+3}-2$.则工厂取得利润最大值时的产量________.

（11）【答案】$Q=8$.

【解析】设收益函数为 R，则 $R=pQ$，又 $p=\dfrac{800}{Q+2}-3$，故 $R=\dfrac{800Q}{Q+2}-3Q$.

要使得利润最大，则有 $MR=MC$，即 $\dfrac{1600}{(Q+2)^2}-3=13$，解得 $Q=8$.

（12）设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x}{2}\le y\le\dfrac{1}{1+x^2},0\le x\le1\right\}$,则 D 绕 y 轴旋转所成旋转体体积为________.

（12）【答案】$\pi\ln2-\dfrac{\pi}{3}$.

【解析】

$$V_y=\int_0^1\frac{2\pi x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1 2\pi x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\pi\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\pi\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\pi\ln2-\frac{\pi}{3}.$$

13. 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$________.

（13）【答案】$a^2\left(a^2-4\right)$.

【解析】

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = a\left(a^3-4a\right)=a^2\left(a^2-4\right).$$

（14）设随机变量 X 的概率分布为 $P\left\{X=k\right\}=\dfrac{1}{2^k}(k=1,2,\cdots)$，$Y$ 表示 X 除以 3 的余数，则 $EY=$ ________.

（14）【答案】 $\dfrac{8}{7}$.

【解析】 Y 的全部可能取值为 $0,1,2$.

当 $X=3k-2(k=1,2,\cdots)$ 时，$Y=1$；当 $X=3k-1(k=1,2,\cdots)$ 时，$Y=2$；当 $X=3k(k=1,2,\cdots)$ 时，$Y=0$.

故 $P\left\{Y=1\right\}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{3k-2}}=\dfrac{4}{7}$，$P\left\{Y=2\right\}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{3k-1}}=\dfrac{2}{7}$，$P\left\{Y=0\right\}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{3k}}=\dfrac{1}{7}$，

从而 $EY=\dfrac{8}{7}$.

三、解答题

（15）（本题满分 10 分）

已知 $(1+\dfrac{1}{n})^n-\mathrm{e}$ 与 $\dfrac{b}{n^a}$ 为 $n\to\infty$ 时的等价无穷小，求 a,b.

（15）【解析】 由题意有

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^a}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}-1)}{\frac{b}{n^a}}=\mathrm{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}{\frac{b}{n^a}},$$

令 $\frac{1}{n}=t$，则

$$1=\mathrm{e}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}{b\cdot t^a}=\mathrm{e}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{b\cdot t^{a+1}}=\mathrm{e}\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{b\cdot t^{a+1}},$$

从而 $a+1=2,-\frac{\mathrm{e}}{2b}=1$，解之得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-\frac{\mathrm{e}}{2}.\end{cases}$

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

（16）【解析】 因为 $f_x'=3x^2-y, f_y'=24y^2-x,$

联立方程组 $\begin{cases}f_x'=3x^2-y=0,\\ f_y'=24y^2-x=0,\end{cases}$ 解得驻点为 $(0,0),\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$.

在点 $(0,0)$ 处：

$$A=f_{xx}''(0,0)=0,\ B=f_{xy}''(0,0)=-1,\ C=f_{yy}''(0,0)=0,$$

$AC-B^2=-1<0$，故 $(0,0)$ 不是极值点.

在点 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 处：

$$A=f_{xx}''\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=1>0,\ B=f_{xy}''\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-1,\ \ C=f_{yy}''\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=4,$$

$AC-B^2=4-1>0$，故 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 是极小值点，极小值为

$$f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{12}\right)^3-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}=-\frac{1}{216}.$$

（17）（本题满分 10 分）

已知 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5f(x)=0,$ 且有 $f(0)=1,f'(0)=-1.$

（Ⅰ）求 $f(x)$；

（Ⅱ）$a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，求 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

(17)【解析】（Ⅰ）由 $y''+2y'+5f(x)=0$，得其特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+5=0$，

解得 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}i}{2}=-1\pm 2i.$

故方程通解为 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$

因 $f(0)=1, f'(0)=-1$，则有 $\begin{cases}C_1=1,\\ 2C_2-C_1=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C_1=1,\\ C_2=0,\end{cases}$

从而有 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x.$

（Ⅱ）因

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x&=-\int \cos 2x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}\\&=-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x-2\int \mathrm{e}^{-x}\sin 2x\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+2\int \sin 2x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}\\&=-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x-4\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故 $5\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x+C_1$，从而有

$$\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)+C,$$

故 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)\Big|_{n\pi}^{+\infty}.$

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)=0$，故 $a_n=\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}(\cos 2n\pi-0)=\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}.$

进而有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\dfrac{1}{5(\mathrm{e}^{\pi}-1)}.$

（18）（本题满分 10 分）

已知 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\big|x^2+x^2\le 1, y\ge 0\right\}$.

求 $\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（18）【解析】记 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$，则 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+Ax$，故

$$\begin{aligned}A&=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(y\sqrt{1-x^2}+Ax)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

因积分区域 D 关于 y 轴对称，故 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

又

$$\begin{aligned}A&=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\xlongequal{令x=\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^4 t\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}.\end{aligned}$$

可知 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+\frac{3\pi}{16}x$,因此 $\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(xy\sqrt{1-x^2}+\frac{3\pi}{16}x^2)\mathrm{d}\sigma.$

因积分区域 D 关于 y 轴对称，$xy\sqrt{1-x^2}$ 是 x 的奇函数，故 $\iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}\sigma=0.$

故

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D\frac{3\pi}{16}x^2\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{3\pi}{16}x^2\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^{1}\frac{3\pi}{16}x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{令x=\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\pi}{16}\sin^2 t\cdot\cos t\cdot\cos t\mathrm{d}t\\&=\frac{3\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=\frac{3\pi}{8}(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{3\pi^2}{128}.\end{aligned}$$

（19）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有一阶连续导数，且 $f(0)=f(2)=0, M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}.$

证明：（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$；

（Ⅱ）若对任意 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\le M$，则 $M=0$.

（19）【证明】（Ⅰ）因 $|f(x)|$ 在 $[0,2]$ 上连续，故存在最大值 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$.

若 $M=0$，则对 $\forall\xi\in(0,2)$，都有 $|f'(\xi)|\ge 0$，命题成立.

若 $M>0$，因 $f(0)=f(2)=0,$ 故存在 $x_0\in(0,2)$，使得 $|f(x_0)|=M$.

当 $x_0\in(0,1)$，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_1\in(0,x_0)\subset(0,1)$，使得

$$f(x_0)-f(0)=f'(\xi_1)x_0,$$

则有 $|f'(\xi_1)|=\dfrac{|f(x_0)|}{x_0}=\dfrac{M}{x_0}>M.$

当 $x_0\in(1,2)$，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_2\in(x_0,2)\subset(1,2)$，使得

$$f(2)-f(x_0)=f'(\xi_2)(2-x_0),$$

则有 $|f'(\xi_2)|=\dfrac{|f(x_0)|}{2-x_0}=\dfrac{M}{2-x_0}>M.$

当 $x_0=1$，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_3\in(0,1)$，使得

$$|f'(\xi_3)|=|f(1)-f(0)|=|f(1)|=M.$$

综上，存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\ge M$.

（Ⅱ）假设 $M>0$，因对任意 $x\in(0,2)$，有 $|f'(x)|\le M$，由（Ⅰ）知，

当 $x_0\in(0,1)$ 或 $x_0\in(1,2)$ 时，存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|>M$，矛盾，从而有 $M=0$.

当 $x_0=1$ 时，有 $|f(1)|=M$，则 $f(1)=\pm M$，不妨设 $f(1)=M$.

构造函数 $g(x)=f(x)-Mx,x\in[0,1]$.

因为 $g'(x)=f'(x)-M\le 0,$ 故 $g(x)$ 单调不增. 又 $g(0)=0,g(1)=0$，从而 $g(x)\equiv 0,x\in[0,1]$，即 $f(x)=Mx,x\in[0,1]$.

构造函数 $h(x)=f(x)+Mx-2M,x\in[1,2]$.

因为 $h'(x)=f'(x)+M\ge 0$，故 $h(x)$ 单调不减.

又 $h(1)=M+M-2M=0, h(2)=0$，从而 $h(x)\equiv 0, x\in[1,2]$，即 $f(x)=-Mx+2M$.

综上，当 $x_0=1$ 时，$f(x)=\begin{cases}Mx, & 0\le x\le 1,\\ -Mx+2M, & 1<x\le 2.\end{cases}$

因为

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{Mx-M}{x-1}=M>0,$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-Mx+2M-M}{x-1}=-M<0,$$

故与 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导矛盾，从而当 $x_0=1$ 时，有 $M=0$.

若 $f(1)=-M$ ，则可构造 $g(x)=f(x)+Mx, h(x)=f(x)-Mx+2M$, 同理可证.

综上，若对任意 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\le M$ ，则 $M=0$.

（20）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 其中 $a\ge b$.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

（20）【解析】 （Ⅰ）设二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

又 f 经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 化成 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$, 即

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}}{=}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}a & 2\\ 2 & b\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}.$$

因此 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}a & 2\\ 2 & b\end{pmatrix}$. 记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & 2\\ 2 & b\end{pmatrix}$，由于 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似且合同，

故 $\begin{cases}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}),\\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1+4=a+b,\\ ab-4=0,\end{cases}$ 解得 $a=4,b=1$ 或 $a=1,b=4$.

又 $a\ge b$ ，故 $a=4,b=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 又

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2\\-2&4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda,$$

可知，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 特征值均为 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$.

对于 $\lambda_1=0$，解 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，

对于 $\lambda_2=5$，解 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 5 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 已经正交化，故直接单位化，得 $\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

故可取 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，则 $\boldsymbol{P}_1$ 为正交矩阵，且有 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&\\&5\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_1=0$，解 $(\boldsymbol{B}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 0 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，

对于 $\lambda_2=5$，解 $(\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 5 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，

故可取 $\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)$，则 $\boldsymbol{P}_2$ 为正交矩阵，且有 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&\\&5\end{pmatrix}$.

则有 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$，因此 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$.

取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac45&\frac35\\\frac35&\frac45\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\left(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}.$$

综上，有 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

（21）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}\right)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角阵.

（21）【解析】

（Ⅰ）若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 成比例，又 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，故有 $\boldsymbol{A\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$.

由特征值、特征向量的定义知，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 k 的特征向量，与已知矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\alpha}$ 无关，从而 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

（Ⅱ）由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 知，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{A\alpha}+6\boldsymbol{\alpha}$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AP}&=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}\right)=\left(\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}\right)=\left(\boldsymbol{A\alpha}, -\boldsymbol{A\alpha}+6\boldsymbol{\alpha}\right)\\&=\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}\right)\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$, 得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

因为 $\left|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 6\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-6=\left(\lambda+3\right)\left(\lambda-2\right)$,

可知，$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3, \lambda_2=2$.

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $\lambda_1=-3, \lambda_2=2$.

因此 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

（22）（本题满分 11 分）

已知因 (X,Y) 服从区域 $D:0<y<\sqrt{1-x^2}$ 上的均匀分布，且

$$U=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X+Y\le 0,\end{cases}\quad V=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\le 0.\end{cases}$$

求：（Ⅰ）(U,V) 的联合分布；

（Ⅱ）ρ_{UV}.

（22）【解析】（Ⅰ）因(X,Y)服从区域$D:0<y<\sqrt{1-x^2}$上的均匀分布，故

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X+Y\le 0,X-Y\le 0\}=\frac{1}{4},$$
$$P\{U=0,V=1\}=P\{X+Y\le 0,X-Y>0\}=0,$$
$$P\{U=1,V=0\}=P\{X+Y>0,X-Y\le 0\}=\frac{1}{2},$$
$$P\{U=1,V=1\}=P\{X+Y>0,X-Y>0\}=\frac{1}{4}.$$

从而(U,V)的概率分布为

$U \backslash V$	0	1
0	1/4	0
1	1/2	1/4

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，

UV	0	1
P	3/4	1/4

U	0	1
P	1/4	3/4

V	0	1
P	3/4	1/4

故$E(UV)=\frac{1}{4},E(U)=\frac{3}{4},E(V)=\frac{1}{4},D(U)=\frac{3}{16},D(V)=\frac{3}{16}.$

从而$\rho_{UV}=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{E(UV)-E(U)E(V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{3}.$

23. （本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命T的分布函数为：$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\ge 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

其中θ,m为参数且大于零.

（Ⅰ）求概率$P\{T>t\}$与$P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中$s>0,t>0$；

（Ⅱ）任取n个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为$t_1,t_2,\cdots t_n$，若m已知，求θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$.

（23）【解析】（Ⅰ）

$$P\{T>t\}=1-P\{T\le t\}=1-F(t)=1-\left[1-\mathrm{e}^{-(\frac{t}{\theta})^m}\right]=\mathrm{e}^{-(\frac{t}{\theta})^m}.$$

$$P\{T>s+t\mid T>s\}=\frac{P\{T>s+t,T>s\}}{P\{T>s\}}=\frac{P\{T>s+t\}}{P\{T>s\}}=\frac{1-F(t+s)}{1-F(s)}$$

$$=\frac{1-[1-\mathrm{e}^{-(\frac{t+s}{\theta})^m}]}{1-[1-\mathrm{e}^{-(\frac{s}{\theta})^m}]}=\frac{\mathrm{e}^{-(\frac{t+s}{\theta})^m}}{\mathrm{e}^{-(\frac{s}{\theta})^m}}=\mathrm{e}^{\frac{s^m-(t+s)^m}{\theta^m}}.$$

（Ⅱ）由题意得，T的概率密度为$f(t)=F'(t)=\begin{cases}m\cdot\dfrac{t^{m-1}}{\theta^m}e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

似然函数$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(t_i;\theta)=\begin{cases}m^n\cdot\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{m-1}}{\theta^{mn}}\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{t_i}{\theta})^m}, & t_i>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当$t_i>0$时，$L(\theta)=m^n\cdot\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{m-1}}{\theta^{mn}}\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{t_i}{\theta})^m}$，

$$\ln L(\theta)=n\ln m+\ln\prod_{i=1}^{n}t_i^{\,m-1}-mn\ln\theta-\sum_{i=1}^{n}(\frac{t_i}{\theta})^m,$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{mn}{\theta}+m\sum_{i=1}^{n}\left[(\frac{t_i}{\theta})^{m-1}\cdot\frac{t_i}{\theta^2}\right]=-\frac{mn}{\theta}+m\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,m}}{\theta^{m+1}}=0$，解之得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$.