高数录播讲义课后练习

【基础练习题 1】

1. 求函数 $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$ 的定义域.

2. 讨论函数 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

3. 讨论函数 $y=\frac{a^{x}+a^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

4.讨论函数 $y=\sin^{2}x$ 的周期性.

1. 【解析】 $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，即定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$.

2. 【解析】 $y=f(x)=x+\ln x$， $x\in(0,+\infty)$.

设 $0<x_1<x_2$，因为

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，由定义知， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

3. 【解析】 $y=f(x)=\frac{a^{x}+a^{-x}}{2}$， $x\in(-\infty,+\infty)$.

因为 $f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{x}}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

4. 【解析】因为 $y=\sin^{2}x=\frac{1-\cos 2x}{2}$，所以函数的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

【基础练习题 2】

思考题：上网搜一搜基本初等函数的图形，这些函数是否有界？

【基础练习题 3】

1. 求下列函数的反函数：

（1）$y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；　　　　（2）$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

2. 求 $y=\mathrm{e}^u$, $u=x^2$ 所构成的复合函数，并求这个函数分别对应于给定自变量 $x_1=0$ 和 $x_2=1$ 的函数值.

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\qquad g(x)=\mathrm{e}^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

1. **【解析】**

（1）易知，函数 $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值域为 $[-2,2]$.

由函数可解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，故反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}, x\in[-2,2]$.

（2）易知，函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的值域为 $(0,1)$.

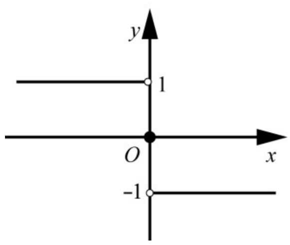
由函数可解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，故反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}, x\in(0,1)$.

2. **【答案】** $y=\mathrm{e}^{x^2}$；$y_1=1$，$y_2=\mathrm{e}$.

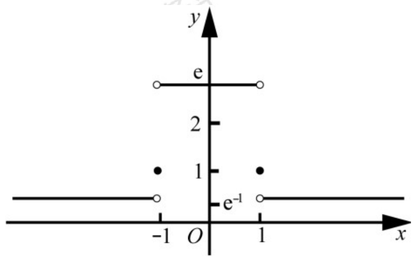
3. **【解析】**

$$f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}\qquad \text{如图（1）}$$

$$g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1.\end{cases}\qquad \text{如图（2）}$$



图（1）



图（2）

4. **【解析】** 因为 $f[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ f(x), & f(x)>0,\end{cases}$ 而 $f(x)\geqslant 0\,(x\in\mathbf{R})$，所以

$$f[f(x)]=f(x)，\quad x\in\mathbf{R}.$$

因为 $g[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ -g^2(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant 0\,(x\in\mathbf{R})$，所以

$$g[g(x)]=0，\quad x\in\mathbf{R}.$$

因为 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)\leqslant 0,\\ g(x), & g(x)>0,\end{cases}$ 而 $g(x)\leqslant 0\,(x\in\mathbf{R})$，所以

$$f[g(x)]=0，\quad x\in\mathbf{R}.$$

因为 $g[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0,\\ -f^2(x), & f(x)>0,\end{cases}$ 而 $f(x)\geqslant 0\left(x\in\mathbf{R}\right)$，所以

$$g[f(x)]=g(x)，\quad x\in\mathbf{R}.$$

【基础练习题 4】

1. 讨论以下数列的敛散性. 对收敛数列，求出它们的极限.

（1）$\left\{\dfrac{2^n-1}{3^n}\right\}$；　　　　（2）$\left\{\left[(-1)^n+1\right]\cdot\dfrac{n+1}{n}\right\}$.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：如果数列 $\left\{|x_n|\right\}$ 有极限，数列 $\left\{x_n\right\}$ 未必有极限.

3. 设数列 $\left\{x_n\right\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

4. 对于数列 $\left\{x_n\right\}$，若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明：$x_n\to a(n\to\infty)$.

5. 对于数列 $\left\{x_n\right\}$，下列说法正确的是　　（　　）

（A）数列有界一定收敛.
（B）数列无界一定发散.
（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 且 $A>1$，则 $x_n>1$.
（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 且 $x_n>1$，则 $A>1$.

【注】2，3，4 题为极限定义题目，不做要求，可选做.

1. **【答案】**（1）收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{3^n}=0$.　　（2）发散.

2. **【证明】** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\, N$，当 $n>N$ 时，有 $|u_n-a|<\varepsilon$，从而有

$$\big|\,|u_n|-|a|\,\big|\leqslant|u_n-a|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

但由$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，并不能推得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$. 例如，对于数列$\left\{(-1)^n\right\}$，虽然$\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\right|=1$，但$\left\{(-1)^n\right\}$没有极限.

3. 【证明】 因数列$\{x_n\}$有界，故$\exists M>0$，使得对一切n有$|x_n|\leqslant M$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故对$\forall\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$，$\exists\ N$，当$n>N$时，有$|y_n|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$，从而有

$$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

4.【证明】因为$x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，所以对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ k_1$，当$k>k_1$时，有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$.

又$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，所以对于上述$\varepsilon>0$，$\exists\ k_2$，当$k>k_2$时，有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

记$K=\max\{k_1,k_2\}$，取$N=2K$，则当$n>N$时，

若$n=2k-1$，则$k>K+\dfrac{1}{2}>k_1\Rightarrow|x_n-a|=|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$，

若$n=2k$，则$k>K\geqslant k_2\Rightarrow|x_n-a|=|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

从而只要$n>N$，就有$|x_n-a|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

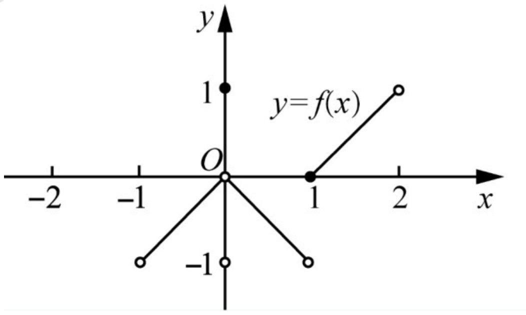
5.【解析】有界是收敛的必要不充分条件，即数列收敛$\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$数列有界，故（A）错误，（B）正确.对选项（A）举反例如下：$\{\sin n\}$，显然数列有界，但极限不存在.

对于选项（C）：因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,\ A>1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-1)=A-1>0,$ 由极限的保号性知，存在正整数N，当$n>N$时，$x_n-1>0,$即$x_n>1$. 但数列极限与前有限项无关，故（C）错误.

对于选项（D）举反例如下：$x_n=1+\dfrac{1}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1,$ 且$x_n>1$，但$A=1$，故（D）错误.

【基础练习题 5】

1. 对下图所示的函数 $f(x)$，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？



（1）$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$；

（5）$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在；　　（6）对每个 $x_0\in(-1,1)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

2. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x},\ \varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

3. 证明：若 $x\to +\infty$ 及 $x\to -\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

4. 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

5. 试判定函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>1,\\ x^2 & 0\le x\le 1,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x<0\end{cases}$ 分别在 $x\to 0, x\to 1$ 时极限是否存在，若存在求出该极限.

【注】3，4 题为极限定义题目，不做要求，可选做.

1. 【解析】

（1）错.　　　　　　　　（2）对.　　　　　　　　（3）错.

因为$f(0^+)=f(0^-)=0$，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$（$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在与$f(0)$的值无关）.

（4）错.　　　　　　　　（5）对.

因为$f(1^+)=0$，$f(1^-)=-1$，故$f(1^-)\neq f(1^+)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在.

（6）对.

2. 【证明】

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^-}1=1,$$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)$，故$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$不存在.

3.【证明】因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，故对$\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，当$x>X_1$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

又因为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，所以对上面的$\varepsilon>0$，$\exists X_2>0$，当$x<-X_2$时，有

$|f(x)-A|<\varepsilon$.

令$X=\max\{X_1,X_2\}$，则当$|x|>X$时，即$x>X$或$x<-X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，

即$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

4.【证明】因为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，所以对$\varepsilon=1>0$，$\exists\ X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<1$，

从而

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|,$$

取$M=|A|+1$，即有当$|x|>X$时，$|f(x)|\leqslant M$.

5.【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{-x}=1,\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0,$故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在；

因为$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1,\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1,$故$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1.$

【基础练习题 6】

1. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$.

2. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

3. 下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ 不存在；

（2）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ 不存在；

（3）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$ 不存在.

1. **【解析】**

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=1\cdot 2=2$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)=2\left(1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)=2$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{5}.$$

2. 【解析】

（1）因为 $x^2\to 0\left(x\to 0\right)$，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

（2）因为 $\frac{1}{x}\to 0\left(x\to\infty\right)$，$\left|\arctan x\right|<\frac{\pi}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0$.

3. 【解析】

（1）对. 因为若 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也存在，与已知条件矛盾.

（2）错. 例如 $f(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=-\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时极限都不存在，但 $f(x)+g(x)\equiv 0\left(x\neq 0\right)$ 在 $x\to 0$ 时极限存在.

（3）错. 例如 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

【基础练习题 7】

1. 利用极限存在准则证明：

（1）数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 的极限存在；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$.

2. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

1. 【证明】

（1）$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $(n\in\mathbf{N}^+)$，$x_1=\sqrt{2}$.

先证数列$\{x_n\}$有界：

当$n=1$时，$x_1=\sqrt{2}<2$；假定当$n=k$时，$x_k<2$，当$n=k+1$时，

$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$，故$x_n<2(n\in\mathbf{N}^+)$.

再证数列$\{x_n\}$单调增加：

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=-\frac{(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n},$$

由$0<x_n<2$，得$x_{n+1}-x_n>0$，即$x_{n+1}>x_n$ $(n\in\mathbf{N}^+)$.

由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由于$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，即$x_{n+1}^2=2+x_n$，两端同时取极限，得$a^2=2+a$，解得$a_1=2$，$a_2=-1$（舍去），故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

【注】题目仅让证明极限存在，因此可不必求出最终的极限值. 另外，只有在证明了数列极限存在的情况下，才能同上求极限值.

（2）当$x>0$时，$1<\sqrt[n]{1+x}\leqslant 1+x$；

当$-1<x<0$时，$1+x\leqslant\sqrt[n]{1+x}<1$.

而$\lim\limits_{x\to 0}1=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$. 由夹逼准则，即得证.

2. **【证明】**因为$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<1$，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}1=1,$$

由夹逼准则，即得证.

【基础练习题 8】

1. 计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不为零的常数）.

2. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$（$k$ 为正整数）.

1. 【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x\right)=x$.

2. 【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{(-x)(-k)}=\mathrm{e}^{-k}$.

【基础练习题 9】

利用等价无穷小的性质，求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$（$n,m$ 为正整数）；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)}$.

【解析】

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}=\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-m}=\begin{cases}0, & m<n,\\ 1, & m=n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^3}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^3}{\dfrac{x^2}{3}\cdot\dfrac{\sin x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^3}{\dfrac{x^3}{6}}=-3$.

【基础练习题 10】

用洛必达法则求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$.

【解析】

（1）

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-6\cos x\sin x}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3.$$

（2）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\sec x\tan x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)\sin x}=1.$$

（3）因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x}$，又

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\mathrm{e}^0=1$.

【基础练习题 11】

1. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

（1）$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$（2）$f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1\text{或}x>1.\end{cases}$

2. 下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

（1）如果函数 $f(x)$ 在 a 连续，那么 $|f(x)|$ 也在 a 连续；

（2）如果函数 $|f(x)|$ 在 a 连续，那么 $f(x)$ 也在 a 连续.

3. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & 0<|x|<\dfrac{\pi}{2},\\ a, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续，则 $a=$____________.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，应该怎样选择数 a？

1. **【解析】**

（1） $f(x)$ 在 $[0,1)$ 及 $(1,2]$ 内表达式为初等函数，故连续. 在 $x=1$ 处，因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2=1,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(2-x)=1,\quad f(1)=1,$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 综上， $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续. 如图（1）所示.

（2）同上，仅需讨论 $f(x)$ 在 $x=1$， $x=-1$ 处的连续性，因为

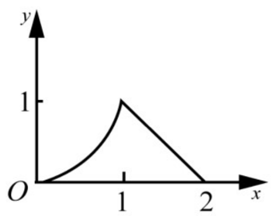
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 1=1,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1,\quad f(1)=1,$$

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

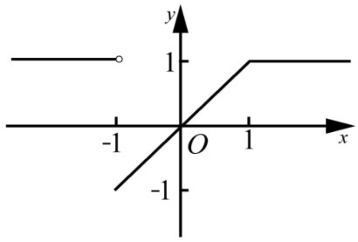
因为

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} x=-1,\quad \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} 1=1,\quad f(-1)=-1,$$

故 $f(x)$ 仅在 $x=-1$ 处间断，但右连续. 如图（2）所示.



图（1）



图（2）

2. 【解析】

（1）对. 因为$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|\to 0$（$x\to a$），所以$|f(x)|$也在$a$连续.

（2）错. 例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则$|f(x)|$在 $x=0$ 处连续，而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

3. 【解析】 由连续的定义知，$a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-x^2}=1$.

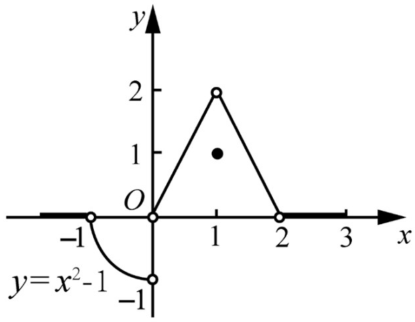
4. 【解析】 因 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内连续，要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只要选择数 a，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可. 而

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+x^2)=a,\quad f(0)=a,$$

故应选择 $a=0$，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

【基础练习题 12】

1. 设 $y=f(x)$ 的图形如下图所示，试指出 $f(x)$ 的全部间断点，并对可去间断点补充或修改函数值的定义，使它成为连续点.



2. 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，则判别其类型.

3. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点所属类型.

1. **【解析】** $x=-1,0,1,2$ 均为 $f(x)$ 的间断点，其中 $x=0$ 为跳跃间断点；$x=-1,1,2$ 为可去间断点，补充定义 $f(-1)=f(2)=0$，修改定义使 $f(1)=2$，则它们成为 $f(x)$ 的连续点.

2. **【解析】**

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -x, & |x|>1,\end{cases}$$

在分段点 $x=-1$ 处，因为

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-x)=1,\quad \lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}x=-1,$$

所以 $x=-1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点.

在分段点 $x=1$ 处，因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x=1,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x)=-1,$$

所以 $x=1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点.

3. **【解析】**

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & |x|>1\text{或}x=-1,\\ 1, & x=1,\\ 1+x, & |x|<1.\end{cases}$$

在分段点 $x=-1$ 处，因为

$$f(-1^+)=f(-1^-)=f(-1)=0,$$

所以 $x=-1$ 为连续点.

在分段点 $x=1$ 处，因为

$$f(1^+)=0，\quad f(1^-)=2，$$

故 $f(1^+)\neq f(1^-)$，所以 $x=1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点.

【基础练习题 13】

1. 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$.

试证：在 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$（c 称为函数 $f(x)$ 的不动点）.

2. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

3. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a,b]$ 上的任意两点 x,y 恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L

为正常数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

4. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

5. 试说明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内

有界.

【注】3 题为极限定义题目，不做要求，可选做.

1. **【证明】** 令 $F(x)=f(x)-x$，则

$$F(0)=f(0)-0=f(0)\geqslant 0，\quad F(1)=f(1)-1\leqslant 0，$$

若 $F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则有 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$，0 或 1 即为 $f(x)$ 的不动点；

若 $F(0)>0$ 且 $F(1)<0$，则由零点定理知，$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$，

这时 ξ 为 $f(x)$ 的不动点.

2. 【证明】 令 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且

$$f(1)=-3<0，\quad f(2)=25>0，$$

由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=0$，ξ 即为方程的根.

3.【证明】任取 $x_0\in(a,b)$，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{L},x_0-a,b-x_0\right\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，

由已知，得

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|<L\delta\leqslant\varepsilon，$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 连续. 由 $x_0\in(a,b)$ 的任意性知，$f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

当 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 时，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$，并将 $|x-x_0|<\delta$ 换成 $x\in[a,a+\delta)$ 或 $x\in(b-\delta,b]$，便可知 $f(x)$ 在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

又 $f(a)\cdot f(b)<0$，由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

4. 【证明】 令 $f(x)=\sin x+x+1$，则 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续. 因为

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}<0,$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+1=\frac{\pi}{2}+2>0,$$

由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $\sin\xi+\xi+1=0$.所以方程 $\sin x+x+1=0$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

5.【解析】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=A$，由极限的局部有界性知，存在 $X>0$，使得 $f\left(x\right)$ 在 $|x|>X$ 时有界，即 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-X\right)$ 和 $\left(X,+\infty\right)$ 内有界.

又 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内连续，故 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-X,X\right]$ 上连续，由闭区间上连续函数的有

界性知，$f\left(x\right)$在$\left[-X,X\right]$上有界.

综上，$f\left(x\right)$必在$\left(-\infty,+\infty\right)$内有界.

【基础练习题 14】

1. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 表示什么：

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，其中 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在；

（3）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

2. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（　　）.

（A）充分必要条件.　　（B）充分条件但非必要条件.

（C）必要条件但非充分条件.　　（D）既非充分条件又非必要条件.

3. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形面积都等于 $2a^2$.

1. **【解析】**

（1）

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0).$$

（2）由于 $f(0)=0$，故

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0).$$

（3）

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{-h\to 0}\frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h} \\
&= 2f'(x_0).
\end{aligned}
$$

2. **【解析】** 因为

$$
\begin{aligned}
F'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+f(0), \\
F'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)-f(0),
\end{aligned}
$$

故 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Leftrightarrow F'_+(0)=F'_-(0)\Leftrightarrow f'(0)+f(0)=f'(0)-f(0)\Leftrightarrow f(0)=0.$

故应选（A）.

3. **【证明】** 设双曲线 $xy=a^2$ 上任一点为 (x_0,y_0)，曲线在该点处的切线斜率

$$
k=\left.\left(\frac{a^2}{x}\right)'\right|_{x=x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2},
$$

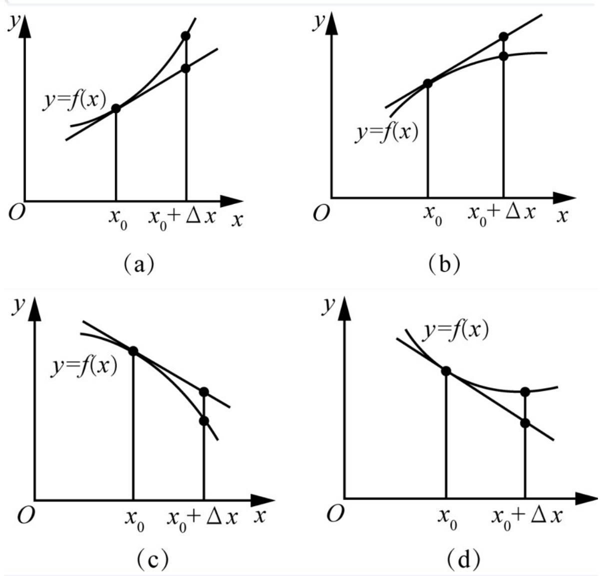
故切线方程为 $y-y_0=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0)$ 或 $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$.

由此可得所构成的三角形面积为 $A=\frac{1}{2}|2x_0|\cdot|2y_0|=2a^2$.

【基础练习题 15】

1. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如下，试在图（a）、（b）、（c）、（d）中分别标出在点 x_0 的 $\mathrm{d}y$ 、Δy 、

$\Delta y-\mathrm{d}y$，并说明其正负.



2. 将适当的函数填入下列括号内，使等式成立：

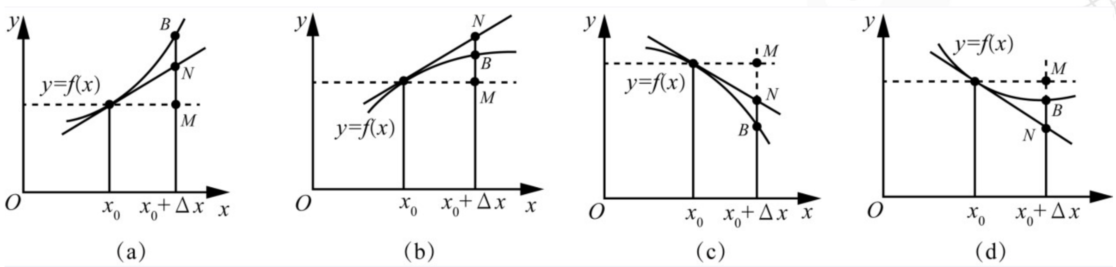
（1）$\mathrm{d}(\qquad)=2\mathrm{d}x$；（2）$\mathrm{d}(\qquad)=3x\mathrm{d}x$；

（3）$\mathrm{d}(\qquad)=\cos t\mathrm{d}t$；（4）$\mathrm{d}(\qquad)=\sin\omega x\mathrm{d}x\left(\omega\neq 0\right)$；

（5）$\mathrm{d}(\qquad)=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$；（6）$\mathrm{d}(\qquad)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$；

（7）$\mathrm{d}(\qquad)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；（8）$\mathrm{d}(\qquad)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$.

1. **【解析】** 如图所示，



在图（a）中，$|MN|$表示$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}y>0$，

$|BM|$表示Δy，$\Delta y>0$，

$|BN|$表示$\Delta y-\mathrm{d}y$，$\Delta y-\mathrm{d}y>0$.

在图（b）中，$|MN|$表示$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}y>0$，

$|BM|$表示Δy，$\Delta y>0$，

$-|BN|$表示$\Delta y-\mathrm{d}y$，$\Delta y-\mathrm{d}y<0$.

在图（c）中，$-|MN|$表示$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}y<0$，

$-|BM|$表示Δy，$\Delta y<0$，

$-|BN|$表示$\Delta y-\mathrm{d}y$，$\Delta y-\mathrm{d}y<0$.

在图（d）中，$-|MN|$表示$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}y<0$，

$-|BM|$表示Δy，$\Delta y<0$，

$|BN|$表示$\Delta y-\mathrm{d}y$，$\Delta y-\mathrm{d}y>0$.

2. **【解析】**

（1）$\mathrm{d}(2x+C)=2\mathrm{d}x$；

（2）$\mathrm{d}\left(\frac{3}{2}x^2+C\right)=3x\mathrm{d}x$；

（3）$\mathrm{d}(\sin t+C)=\cos t\mathrm{d}t$；

（4）$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega x+C\right)=\sin\omega x\mathrm{d}x$；

（5）$\mathrm{d}(\ln(1+x)+C)=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$；

（6）$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C\right)=\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$；

（7）$\mathrm{d}(2\sqrt{x}+C)=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（8）$\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}\tan 3x+C\right)=\sec^2 3x\mathrm{d}x$.

其中C为任意常数.

【基础练习题 16】

1. 求下列函数的导数：

（1）$s=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$；（2）$y=\ln(\sec x+\tan x)$.

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

3. 试从 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$ 导出：

（1）$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；（2）$\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 所确定，求 $y''(0)$.

1. **【解析】**

（1）$s'=\dfrac{\cos t(1+\cos t)-(1+\sin t)(-\sin t)}{(1+\cos t)^2}=\dfrac{1+\cos t+\sin t}{(1+\cos t)^2}$.

（2）$y'=\dfrac{1}{\sec x+\tan x}\cdot(\sec x\tan x+\sec^2 x)=\sec x$.

2. **【解析】**

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1,$$

由于 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$，故 $f'(0)=1$，因此 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

3. **【解析】**

（1）$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{y'}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{y''}{(y')^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；

（2）

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y'''\cdot(y')^3-y''\cdot 3(y')^2y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.$$

4. **【解析】**把方程两边分别对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^y y'+y+xy'=0. \qquad (1)$$

将 $x=0$ 代入 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$，得 $y=1$，再将 $x=0,y=1$ 代入（1）式中得 $y'\big|_{x=0}=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，在（1）式两端分别关于 x 再求导，可得

$$\mathrm{e}^y y'^2+\mathrm{e}^y y''+y'+y'+xy''=0. \qquad (2)$$

将 $x=0,y=1,y'\big|_{x=0}=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 代入（2）式，得 $y''(0)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

【基础练习题 17】

1. 求下列函数所指定的阶的导数：

（1）$y=\mathrm{e}^x\cos x$，求 $y^{(4)}$；　　（2）$y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

2. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)\ (n\geqslant 3)$.

1. **【解析】**

（1）由莱布尼茨公式，得

$$\begin{aligned}y^{(4)}&=(\mathrm{e}^x\cdot\cos x)^{(4)}\\&=C_4^0\cos x\mathrm{e}^x+C_4^1(\cos x)'\mathrm{e}^x+C_4^2(\cos x)''\mathrm{e}^x+C_4^3(\cos x)'''\cdot\mathrm{e}^x+C_4^4(\cos x)^{(4)}\cdot\mathrm{e}^x\\&=\mathrm{e}^x\cos x-4\mathrm{e}^x\sin x-6\mathrm{e}^x\cos x+4\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^x\cos x\\&=-4\mathrm{e}^x\cos x.\end{aligned}$$

（2）由 $(\sin 2x)^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$ 及莱布尼茨公式，得

$$
\begin{aligned}
y^{(50)} &= (x^2\sin 2x)^{(50)} = C_{50}^0(\sin 2x)^{(50)}\cdot x^2 + C_{50}^1(\sin 2x)^{(49)}\cdot(x^2)' \\
&\quad + C_{50}^2(\sin 2x)^{(48)}\cdot(x^2)'' + 0 + \cdots + 0 \\
&= 2^{50}x^2\sin\left(2x + 50\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 50\cdot 2x\cdot 2^{49}\sin\left(2x + 49\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + \frac{50\times 49}{2}\cdot 2\cdot 2^{48}\sin\left(2x + 48\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -2^{50}x^2\sin 2x + 50\cdot 2^{50}x\cos 2x + 2450\cdot 2^{48}\cdot\sin 2x.
\end{aligned}
$$

2. 【解析】 设 $u=\ln(1+x)$， $v=x^2$，则

$$u^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\ (n=1,2,\cdots),\quad v'=2x,\quad v''=2,\quad v^{(k)}=0\quad (k\geqslant 3),$$

故由莱布尼茨公式，得

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\cdot x^2+n\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\cdot 2\ (n\geqslant 3),$$

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}\ (n\geqslant 3).$$

【基础练习题 18】

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

2. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 只有一个正根 $x=x_0$，证明方程

$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

3. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

1. 【证明】 函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上连续，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上可导，又

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{\pi}{6}=\ln\frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{5\pi}{6}=\ln\frac{1}{2},$$

则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理条件，由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，使 $f'(\xi)=0$.

又 $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.根据验证区间，取 $n=0$，得 $\xi=\frac{\pi}{2}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$. 因此罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上是正确的.

2.【证明】令 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$，$f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，在 $(0,x_0)$ 内可导，且 $f(0)=f(x_0)=0$，由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,x_0)$，使得 $f'(\xi)=0$，即方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

3. 【证明】令 $F(x)=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$F(0)=0, \quad F(1)=a_0+\frac{1}{2}a_1+\cdots+\frac{1}{n+1}a_n=0,$$

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即多项式 $f(x)=F'(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

【基础练习题 19】

1. 设 $a>b>0,\ n>1$，证明：

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

2. 证明下列不等式：

（1）$|\arctan a-\arctan b| \leqslant |a-b|$；

（2）当 $x>1$ 时，$e^x > ex$.

3. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，证明在 (a,b) 内有一点 ξ，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

4. 列举一个函数 $f(x)$ 满足：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内除某一点外处处可导，但在 (a,b) 内不存在点 ξ，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

1. **【证明】** 设 $f(x)=x^n$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(b,a)$ 使 $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$，即

$$a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b),$$

其中 $0<b<\xi<a$. 又 $n>1$，故 $0<b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}$，因此

$$nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b),$$

即 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

2. **【证明】**

（1）当 $a=b$ 时，显然成立；

当 $a\neq b$ 时，不妨设 $a<b$，令 $f(x)=\arctan x$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，故由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即
$$\arctan a-\arctan b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b),$$

故$|\arctan a-\arctan b|=\dfrac{1}{1+\xi^2}|a-b| \leqslant |a-b|$.

（2）令$f(x)=\mathrm{e}^x$，$f(x)$在$[1,x]$上连续，在$(1,x)$内可导，所以由拉格朗日中值定理知，至少存在$\xi\in(1,x)$，使$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1)$，即

$$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{\xi}(x-1),$$

又$1<\xi<x$，故$\mathrm{e}^{\xi}>\mathrm{e}$，因此$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}>\mathrm{e}(x-1)$，即$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}x$.

3.【证明】设$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$，由$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，$(a,b)$内可导知，$F(x)$在$[a,b]$上连续，$(a,b)$内可导. 由拉格朗日中值定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$F(a)-F(b)=F'(\xi)(b-a)$，又

$$F(b)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix},\ F(a)=\begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix}=0,$$

$$F'(x)=\begin{vmatrix} 0 & f(x) \\ 0 & g(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix},$$

故$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}(b-a)$.

4.【解析】取$f(x)=|x|$，区间为$[-1,1]$，则函数$f(x)$在$[-1,1]$上连续，在$(-1,1)$内除$x=0$外处处可导，但$f(x)$在$(-1,1)$内不存在点ξ，使$f'(\xi)=0$，即不存在$\xi\in(-1,1)$，使

$$f(1)-f(-1)=f'(\xi)[1-(-1)].$$

【基础练习题 20】

1. 设函数$y=f(x)$在$x=0$的某邻域内具有n阶导数，且$f(0)=f'(0)=\cdots=$

$f^{(n-1)}(0)=0$，试用柯西中值定理证明：

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

2. 当$\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$时，证明：$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

1.【证明】已知$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有n阶导数，在该邻域内任取点x，由柯西中值定理知，

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}\text{（}\xi_1\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间），}$$

$$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n(\xi_1^{n-1}-0^{n-1})}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}\text{（}\xi_2\text{ 介于 }0\text{ 与 }\xi_1\text{ 之间），}$$

依此类推，可得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!(\xi_{n-1}-0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}\text{（}\xi_n\text{ 介于 }0\text{ 与 }\xi_{n-1}\text{ 之间）}.$$

记$\xi_n=\theta x\ (0<\theta<1)$，因此

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

2.【证明】设$f(x)=\ln^2 x\ (\mathrm{e}<a<x<b<\mathrm{e}^2)$，$f(x)$在$[a,b]$连续，在$(a,b)$内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a).$$

设$\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$，则$\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$.

当$t>\mathrm{e}$时，$\varphi'(t)<0$，所以$\varphi(t)$在$[\mathrm{e},+\infty)$上单调减少，而$\mathrm{e}<a<\xi<b<\mathrm{e}^2$，从而$\varphi(\xi)>\varphi(\mathrm{e}^2)$，即$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}=\frac{2}{\mathrm{e}^2}$，因此

$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a).$$

【注】拉格朗日中值定理可看作是柯西中值定理在$g(x)=x$的特殊情况.

【基础练习题 21】

1. 求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

2. 利用泰勒公式求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2\left[x+\ln(1-x)\right]}$；　　　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

1. 【解析】 因为 $f(x)=x\mathrm{e}^x$，$f^{(n)}(x)=(n+x)\mathrm{e}^x$，$f^{(n)}(0)=n$，故

$$\begin{aligned}x\mathrm{e}^x&=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n)\\&=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n).\end{aligned}$$

2. 【解析】

（1）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)-1-\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)}{x^2\left[x+\left(-x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{-\dfrac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{12}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}}{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{-\dfrac{1}{12}}{-\dfrac{1}{2}}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

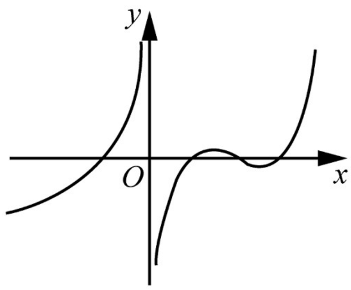
（2）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]&=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}+\frac{o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x^2}}\right]=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

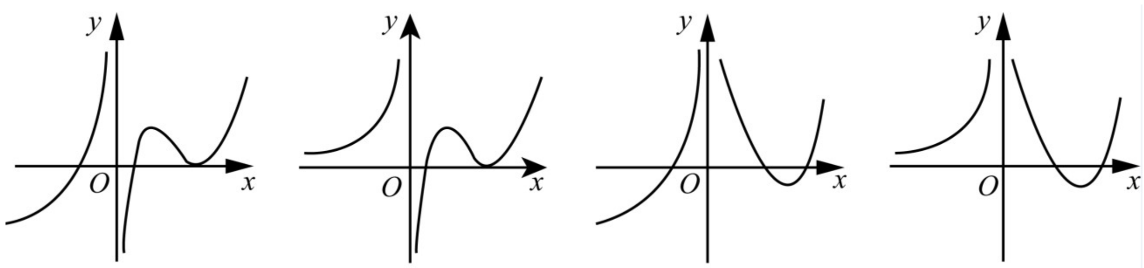
【基础练习题 22】

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性.

2. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如下图所示，



则导函数 $f'(x)$ 的图形为下面所示的四个图形中的哪一个？



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

3. 证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$.

1. 【解析】 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1=-\dfrac{x^2}{1+x^2}\leqslant 0$，且 $f'(x)=0$ 仅在 $x=0$ 时成立，因此函数 $f(x)=\arctan x-x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

2. 【解析】 由图形知，当 $x<0$ 时，$y=f(x)$ 单调增加，则 $f'(x)\geqslant 0$，故排除（A）、（C）；当 $x>0$ 时，随着 x 增大，$y=f(x)$ 先单调增加，然后单调减少，再单调增加，因此随着 x 增大，先有 $f'(x)\geqslant 0$，然后 $f'(x)\leqslant 0$，继而又有 $f'(x)\geqslant 0$，故应选（D）.

3. 【解析】 令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2,$$

$$f''(x)=-\sin x+2\sec^2 x\tan x=\sin x(2\sec^3 x-1)>0,$$

因此 $f'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，故当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，即 $f(x)>f(0)=0$，也即 $\sin x+\tan x-2x>0$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $\sin x+\tan x>2x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

【基础练习题 23】

1. 求函数 $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$ 的极值.

2. 试证明：如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$，那么这个函数没有极值.

3. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

1. **【解析】** 当 $x\neq -1$ 时，$y'=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}<0$. 又 $x=-1$ 时函数连续，因此可知函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少，从而函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内无极值.

2. **【证明】** $y'=3ax^2+2bx+c$，由 $b^2-3ac<0$ 知，$a\neq 0,c\neq 0$，y' 是二次三项式.

$$\Delta=(2b)^2-4\cdot 3a\cdot c=4(b^2-3ac)<0.$$

当 $a>0$ 时，y' 图像开口向上，且在 x 轴上方，故 $y'>0$，从而所给函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加；

当 $a<0$ 时，y' 图像开口向下，且在 x 轴下方，故 $y'<0$，从而所给函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

因此，只要条件 $b^2-3ac<0$ 成立，所给函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调，故函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内无极值.

3. 【解析】 $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，函数在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，即

$a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\pi=0$，得 $a=2$.

又 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$，$f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{3}-3\sin\pi=-\sqrt{3}<0$，故函数在

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极大值，极大值为 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{3}\sin\pi=\sqrt{3}$.

【基础练习题 24】

1. 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7\ (1\leqslant x\leqslant 4)$ 在何处取得最大值？并求出它的最大值.

2. 问函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}\ (x\geqslant 0)$ 在何处取得最大值？

3. 要造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

1. 【解析】 函数在 $[1,4]$ 上可导，且 $y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$.

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=-1$（舍去），$x_2=3$，比较

$$y\big|_{x=1}=-29,\quad y\big|_{x=3}=-61,\quad y\big|_{x=4}=-47,$$

得函数在 $x=1$ 处取得最大值，最大值为 $y\big|_{x=1}=-29$.

2. 【解析】 函数在 $[0,+\infty)$ 上可导，且

$$y'=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2},\quad y''=\frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3},$$

令 $y'=0$，得驻点 $x=-1$（舍去），$x=1$．由 $y''\big|_{x=1}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}<0$ 知，$x=1$ 为的极大值点，又函数在 $[0,+\infty)$ 上的驻点唯一，故极大值点就是最大值点，即 $x=1$ 为最大值点，且

最大值为 $y\big|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

3. 【解析】 已知 $\pi r^2 h=V$，即 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$. 圆柱形油罐的表面积为

$$A=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r},\quad r\in(0,+\infty).$$

则 $A'=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}$，$A''=4\pi+\dfrac{4V}{r^3}$.

令 $A'=0$，得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. 由 $A''\Big|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=4\pi+8\pi=12\pi>0$ 知，$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 为极小值点，又驻点唯一，故极小值点就是最小值点. 此时 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}=2r$，即 $2r:h=1:1$，所以当底半径 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 和高 $h=2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时，才能使表面积最小. 这时底直径与高的比为 $1:1$.

【基础练习题 25】

1. 求曲线 $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$ 的拐点及凹凸区间.

2. 利用函数图形的凹凸性，证明下列不等式：

（1）$\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0,\ y>0,\ x\neq y,\ n>1)$；

（2）$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2} \quad (x>0,\ y>0,\ x\neq y)$.

3. 试证明曲线 $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

1. 【解析】 $y=\mathrm{e}^{\arctan x}\dfrac{1}{1+x^2}$，$y''=\dfrac{-2\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$. 令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$.

当 $-\infty<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ 上是凹的；

当 $\dfrac{1}{2}<x<+\infty$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上是凸的.

故点$\left(\frac{1}{2},\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$为拐点.

2. 【证明】

（1）设$f(t)=t^n$，$t\in(0,+\infty)$，则

$$f'(t)=nt^{n-1}，\quad f''(t)=n(n-1)t^{n-2}，\quad t\in(0,+\infty).$$

当$n>1$时，$f''(t)>0$，$t\in(0,+\infty)$. 因此$f(t)=t^n$在$(0,+\infty)$内图形是凹的，故对任意的$x>0,y>0,x\neq y$，恒有

$$\frac{1}{2}\left[f(x)+f(y)\right]>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\quad(x>0,\ y>0,\ x\neq y,\ n>1)$.

（2）令$f(t)=t\ln t$，$t\in(0,+\infty)$，则

$$f'(t)=\ln t+1，\quad f''(t)=\frac{1}{t}>0，\quad t\in(0,+\infty).$$

因此$f(t)$在$(0,+\infty)$内图形是凹的，故对任何$x,y\in(0,+\infty)$，$x\neq y$，有

$$\frac{1}{2}\left[f(x)+f(y)\right]>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即$\frac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$，也即$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}\ (x\neq y)$.

3. 【证明】

$$y'=\frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$y''=\frac{(-2x+2)(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{2(x+1)\left[x-(2-\sqrt{3})\right]\left[x-(2+\sqrt{3})\right]}{(x^2+1)^3},$$

令$y''=0$，得驻点$x_1=-1$，$x_2=2-\sqrt{3}$，$x_3=2+\sqrt{3}$.

当$-\infty<x<-1$时，$y''<0$，因此曲线在$(-\infty,-1]$上是凸的；

当$-1<x<2-\sqrt{3}$时，$y''>0$，因此曲线在$\left[-1,2-\sqrt{3}\right]$上是凹的；

当$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$时，$y''<0$，因此曲线在$\left[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right]$上是凸的；

当$2+\sqrt{3}<x<+\infty$时，$y''>0$，因此曲线在$\left[2+\sqrt{3},+\infty\right)$上是凹的，

故曲线有三个拐点，分别是$(-1,-1)$，$\left(2-\sqrt{3},\dfrac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$，$\left(2+\sqrt{3},\dfrac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$.

由于$\dfrac{\dfrac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\dfrac{\dfrac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\dfrac{1}{4}$，故这三个拐点在一条直线上.

【基础练习题 26】

求下列函数曲线的渐近线：

（1）$y=\dfrac{x}{1+x^2}$；　　（2）$y=\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$；

（3）$y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

1. **【解析】**

（1）因$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$，所以图形有一条水平渐近线$y=0$，图形无铅直渐近线及斜渐近线.

（2）因$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-(x-1)^2}=0$，所以图形有一条水平渐近线$y=0$，图形无铅直渐近线及斜渐近线.

（3）易知函数$y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$为周期为$2\pi$的偶函数，故仅需讨论函数在$[0,\pi]$内的渐近线：

因$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=\infty$及$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=\infty$，图形有两条铅直渐近线：$x=\dfrac{\pi}{4}$及$x=\dfrac{3\pi}{4}$，无水平及渐近线.

由对称性及周期性可知，图形仅有铅直渐近线：

$$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ \left(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【基础练习题 27】

1. 求下列不定积分：

（1）$\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$；（2）$\int \cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)\mathrm{d}\theta$；

（3）$\int \frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

2. 证明函数 $\arcsin(2x-1)$, $\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

1. **【解析】**

（1）$\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x=2\int \mathrm{d}x-5\int\left(\frac{2}{3}\right)^x\mathrm{d}x=2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C,$

其中 C 为任意常数.

（2）$\int \cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)\mathrm{d}\theta=\int \sin\theta\mathrm{d}\theta+\int \mathrm{d}\theta=-\cos\theta+\theta+C,$

其中 C 为任意常数.

（3）$\int \frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int 3x^2\mathrm{d}x-\int \mathrm{d}x+\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=x^3-x+\arctan x+C,$

其中 C 为任意常数.

2. **【证明】** 因为

$$\left[\arcsin(2x-1)\right]'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$\left[\arccos(1-2x)\right]'=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$\left[2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right]'=2\frac{1}{1+\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

故结论成立.

【基础练习题 28】

求下列不定积分：

（1）$\int(\sin ax-\mathrm{e}^{\frac{x}{b}})\mathrm{d}x\ (a,b)$为常数；　　（2）$\int\frac{x+1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$；

（3）$\int\frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　　（4）$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

1. **【解析】**

（1）

$$\begin{aligned}\int(\sin ax-\mathrm{e}^{\frac{x}{b}})\mathrm{d}x&=\int\sin ax\mathrm{d}x-\int\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{a}\sin ax\mathrm{d}(ax)-\int b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{b}\right)\\&=\frac{1}{a}(-\cos ax)-b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}+C=-\frac{\cos ax}{a}-b\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}+C,\end{aligned}$$

其中C为任意常数.

（2）$\int\frac{x+1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C,$

其中C为任意常数.

（3）$\int\frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int-10^{2\arccos x}\mathrm{d}(\arccos x)=-\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln10}+C,$

其中C为任意常数.

（4）

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x&=\int\frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x}=\int2\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})\\&=(\arctan\sqrt{x})^2+C,\end{aligned}$$

其中C为任意常数.

【基础练习题 29】

求下列不定积分：

（1）$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$；　　（2）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；

（3）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$；　　（4）$\int\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$；

（5）$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$

【注】3 题为选做题目.

1. **【解析】**

（1）设 $x=a\sin u\left(-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos u$， $\mathrm{d}x=a\cos u\mathrm{d}u$， 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}&=\int a^2\sin^2 u\mathrm{d}u=a^2\int\frac{1-\cos 2u}{2}\mathrm{d}u=\frac{a^2}{2}\left(u-\frac{\sin 2u}{2}\right)+C\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

（2）$x>1$ 时，令 $x=\frac{1}{t}$，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+C=-\arcsin\frac{1}{x}+C;$$

当 $x<-1$ 时，令 $x=\frac{1}{t}$，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin\frac{1}{x}+C,$$

故在 $(-\infty,-1)$ 或 $(1,+\infty)$ 内，有 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C$，其中 C 为任意常数.

（3）令 $x=\sin t\left(-\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$， $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$， 于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t,$$

记$I_1 = \int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$， $I_2 = \int \frac{\sin t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}$，利用

$$I_1 + I_2 = \int \mathrm{d}t = t + C,$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t} = \ln|\sin t+\cos t| + C,$$

求得$I_1 = \int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t} = \frac{1}{2}(t+\ln|\sin t+\cos t|)+C$，即求得在$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$内，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}(\arcsin x + \ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|)+C;$$

再设$x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<-\frac{\pi}{4}\right)$，重复上面的过程，可得在$\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$内有与上面不定积分形式相同的结果. 从而在$\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$内，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|\right)+C,$$

其中C为任意常数.

（4）令$x=\tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则$x^2+1=\sec^2 t$， $\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{\tan^3 t+1}{\sec^2 t}\mathrm{d}t = \int\left(\frac{\sin^3 t}{\cos t}+\cos^2 t\right)\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{\cos^2 t-1}{\cos t}\mathrm{d}(\cos t) + \int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\cos^2 t - \ln\cos t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C\\ &= \frac{1}{2}\cos^2 t - \ln\cos t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C,\end{aligned}$$

由$x=\tan t$可知，$\cos t = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$， $\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$，则

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1+x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x + C,$$

其中C为任意常数.

（5）【解析】令 $\sqrt{2x}=t$，得 $x=\dfrac{t^2}{2}$， $\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}&=\int\frac{t\mathrm{d}t}{1+t}=\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\&=t-\ln(1+t)+C\\&=\sqrt{2x}-\ln\left(1+\sqrt{2x}\right)+C,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

【基础练习题 30】

求下列不定积分：

（1）$\displaystyle\int \mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；　　（2）$\displaystyle\int \mathrm{e}^{x}\sin^2 x\mathrm{d}x$；

（3）$\displaystyle\int x\ln^2 x\mathrm{d}x$.

1. 【解析】

（1）

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x}\\&=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\int\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})\\&=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\int\mathrm{e}^{-2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{8}\left(4\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{16}\int\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=-\frac{2}{17}\left(4\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}+C$, 其中 C 为任意常数.

（2）

$$\int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int e^x (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx,$$

$$\begin{aligned}\int e^x \cos 2x dx &= \int \cos 2x d(e^x) = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx \\ &= e^x \cos 2x + 2\int \sin 2x d(e^x) \\ &= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x dx,\end{aligned}$$

得 $\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x}{5} + C$，因此有

$$\int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{5}e^x \sin 2x - \frac{1}{10}e^x \cos 2x + C,$$

其中 C 为任意常数.

（3）

$$\begin{aligned}\int x\ln^2 x dx &= \int \ln^2 x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}dx \\ &= \frac{x^2}{4}(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

【基础练习题 31】

求下列不定积分：

（1）$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$；　　（2）$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$；

（3）$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$；　　（4）$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

1. **【解析】**

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx &= \int\left(x^2+x+1+\frac{8}{x}-\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-3\ln|x-1|-4\ln|x+1|+C,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

2. 【解析】令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$， $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$， $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ （万能公式）

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}&=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

3. 【解析】令 $t=\tan\frac{x}{2}$，同上，得

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}&=\int\frac{1}{\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}u\\&=\int\frac{1}{3t^2+2t+2}\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3t+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

4. 【解析】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$，令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$，即 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$，得

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}&=\int\frac{t}{\left(\frac{t^3+1}{t^3-1}\right)^2-1}\cdot\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}\int\mathrm{d}t\\&=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

【基础练习题 32】

1. 利用定积分的几何意义，求积分 $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

2. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的____________条件，而 $f(x)$ 在

$[a,b]$上连续是$f(x)$在$[a,b]$上可积的____________条件.

3. 利用定积分的定义计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$； （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

1.【解析】根据定积分的几何意义，$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$表示的是上半圆周$y=\sqrt{9-x^2}$以及$x$轴所围成的半圆的面积，因此有$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\pi$.

2. 【答案】 必要；充分.

3. 【解析】

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p=\int_0^1x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}$.

【基础练习题 33】

1. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明$\int_0^1f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

2. 设$f(x)$及$g(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

（1）若在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant0$，且$f(x)\not\equiv0$，则$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x>0$；

（2）若在$[a,b]$上，$f(x)\geqslant0$，且$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x=0$，则在$[a,b]$上，$f(x)\equiv0$；

（3）若在$[a,b]$上，$f(x)\leqslant g(x)$，且$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x=\int_a^bg(x)\mathrm{d}x$，则在$[a,b]$上$f(x)\equiv g(x)$.

1. 【证明】 记$a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，由定积分性质知，$\int_0^1\left[f(x)-a\right]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$，即

$$\int_0^1\left[f(x)-a\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+a^2=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant 0,$$

结论得证.

2. 【证明】

（1）根据条件必定存在$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>0$. 由函数$f(x)$在x_0连续可知，存在$a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$，使得当$x\in[\alpha,\beta]$时，$f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{2}$. 因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x+\int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x,$$

由定积分性质知，

$$\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0，\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta\frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x=\frac{\beta-\alpha}{2}f(x_0)>0，\int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

故$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

（2）用反证法：如果$f(x)\not\equiv 0$，则由（1）知，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，与假设条件矛盾，因此结论成立.

（3）令$h(x)=g(x)-f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0,$$

由（2）知，在$[a,b]$上，$h(x)\equiv 0$，即$f(x)\equiv g(x)$.

【基础练习题 34】

1. 求由$\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^x\cos t\mathrm{d}t=0$所确定的隐函数对$x$的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 证明$f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t$在$[1,+\infty)$上是单调增加函数，并求$(f^{-1})'(0)$.

3. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\leqslant 0$，令 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

证明：在 (a,b) 内有 $F'(x)\leqslant 0$.

1.【解析】 方程两边分别对 x 求导，得 $\mathrm{e}^y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos x=0$，故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{e}^{-y}\cos x$.

2.【证明】 显然 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上可导，且当 $x>-1$ 时，$f'(x)=\sqrt{1+x^3}>0$，因此 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 是单调增加函数.

注意到 $f(1)=0$，故 $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 【解析】

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}}{1}=2$.

4. 【证明】 $F'(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}\left[(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$

$$=\frac{1}{(x-a)^2}\left[(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)\right]\quad（\xi\in(a,x)\subset[a,b]）$$

$$=\frac{x-\xi}{x-a}f'(\eta)\quad（\eta\in(\xi,x)\subset(a,b)），$$

由条件可知结论成立.

【基础练习题 35】

1. 计算下列定积分：

（1）$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$；（2）$\int_0^{\sqrt{2}a}\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}\ (a>0)$；

（3）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$n\in\mathbf{Z}$，证明：

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f\left(\left|\sin x\right|\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f\left(\left|\cos x\right|\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

4. 计算下列定积分：

（1）$\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\mathrm{d}x$；　　（2）$J_m=\int_0^{\pi}x\sin^m x\mathrm{d}x(m\in\mathbf{N}_+)$.

1. **【解析】**

（1）

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\overset{x=a\sin u}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^4\sin^2 u\cos^2 u\mathrm{d}u=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2u)^2\mathrm{d}(2\mathrm{u})$$

$$\overset{t=2u}{=\!=\!=}\frac{a^4}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{16}a^4.$$

（2）$\int_0^{\sqrt{2a}}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2a}}\frac{\mathrm{d}(3a^2-x^2)}{\sqrt{3a^2-x^2}}=-\sqrt{3a^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2a}}=\sqrt{3}a-\sqrt{3a^2-2a}.$

（3）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x\overset{u=\cos x}{=\!=\!=}-2\int_1^0\sqrt{u}\mathrm{d}u=\frac{4}{3}.$

2. **【证明】** 令 $x=a+b-u$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(a+b-u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(a+b-u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

3. **【证明】** 令 $x=u+\frac{n}{2}\pi$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，因此

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f\left(|\sin x|\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\sin\left(u+\frac{n}{2}\pi\right)\right|\right)\mathrm{d}u=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin u\right)\mathrm{d}u, & n\text{为偶数},\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos u\right)\mathrm{d}u, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f\left(|\cos x|\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\cos\left(u+\frac{n}{2}\pi\right)\right|\right)\mathrm{d}u=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos u\right)\mathrm{d}u, & n\text{为偶数},\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin u\right)\mathrm{d}u, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，因此结论成立.

4. **【解析】**

（1）

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2(1-\cos 2x)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}(\sin 2x)=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}(\cos 2x)=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}x\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}J_m&\xlongequal{x=\pi-t}\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\sin^m(\pi-t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin^m(\pi-t)\mathrm{d}t\\&=\pi\int_0^{\pi}\sin^m t\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}t\sin^m t\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}\sin^m x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}x\sin^m x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因而 $J_m=\int_0^{\pi}x\sin^m x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^m x\mathrm{d}x$（可直接用此结论）.

而 $\int_0^{\pi}\sin^m x\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\mathrm{d}x$，

故

$$J_m=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{2}, & \text{当}m\text{为偶数},\\ \frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi, & \text{当}m\text{为大于 1 的奇数},\\ \pi, & \text{当}m=1.\end{cases}$$

【基础练习题 36】

1. 判定下列各反常积分的收敛性，如果收敛，计算反常积分的值：

（1）$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} \sin \omega t \mathrm{d}t \ (p>0, \omega>0)$；（2）$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$；

（3）$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

2. 当 k 为何值时，反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，该反常积分发散？又当 k 为何值时，该反常积分取得最小值？

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x \ (n \in \mathbf{N})$.

1. 【解析】

（1）

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-pt} \sin \omega t \mathrm{d}t &= -\frac{1}{p}\int \sin \omega t \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-pt}) = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\sin \omega t + \frac{\omega}{p}\int \mathrm{e}^{-pt}\cos \omega t \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\sin \omega t - \frac{\omega}{p^2}\int \cos \omega t \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-pt}) \\ &= -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\sin \omega t - \frac{\omega}{p^2}\mathrm{e}^{-pt}\cos \omega t - \frac{\omega^2}{p^2}\int \mathrm{e}^{-pt}\sin \omega t \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因此 $\int \mathrm{e}^{-pt}\sin \omega t \mathrm{d}t = \frac{-p\mathrm{e}^{-pt}\sin \omega t - \omega \mathrm{e}^{-pt}\cos \omega t}{p^2+\omega^2} + C$，故

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\sin \omega t \mathrm{d}t = \left[\frac{-p\mathrm{e}^{-pt}\sin \omega t - \omega \mathrm{e}^{-pt}\cos \omega t}{p^2+\omega^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

（2）$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\Big|_0^t = \frac{1}{1-t} - 1$，当 $t \to 1$ 时极限不存在，故原反常积分发散.

（3）$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \arcsin \ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\pi}{2}.$

2. 【解析】 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int\dfrac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^k}=\begin{cases}\ln\ln x+C, & k=1,\\ -\dfrac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}+C, & k\neq 1.\end{cases}$

当$k\leqslant 1$时，反常积分发散；当$k>1$时，该反常积分收敛，此时

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=-\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}\bigg|_2^{+\infty}=\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}},$$

记 $f(k)=\dfrac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$，则

$$\begin{aligned}f'(k)&=-\frac{1}{(k-1)^2(\ln 2)^{2k-2}}\left[(\ln 2)^{k-1}+(k-1)(\ln 2)^{k-1}\ln\ln 2\right]\\&=-\frac{1+(k-1)\ln\ln 2}{(k-1)^2(\ln 2)^{k-1}},\end{aligned}$$

令 $f'(k)=0$，得 $k=1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$，

当$1<k<1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$时，$f'(k)<0$；

当$k>1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$时，$f'(k)>0$，

故$k=1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$为函数$f(k)$的最小值点，即当$k=1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$时所给反常积分取得最小值.

3. 【解析】 $I_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty}=1$.

当$n\geqslant 1$时，$I_n=-\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-x^n\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=nI_{n-1}$，

故有$I_n=n!$.

【基础练习题 37】

1. 求由曲线 $y=\ln x$， y 轴与直线 $y=\ln a,\ y=\ln b(b>a>0)$ 所围成的图形的面积.

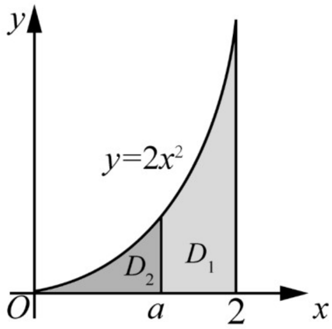
2. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

3. 求由摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ 的一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成的图形的面积.

4. 把星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转，计算所得旋转体的体积.

5. 求圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 绕 $x=-b\ (b>a>0)$ 旋转所成旋转体的体积.

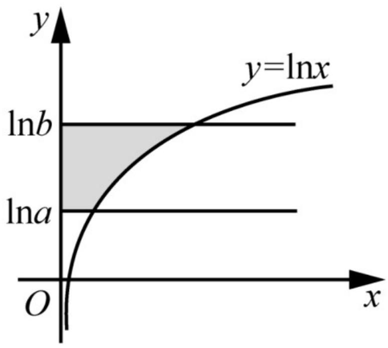
6. 设由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,\ x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_1；由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_2，其中 $0<a<2$（如下图）.



（1）试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1， D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

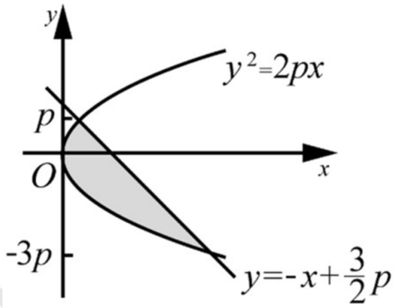
（2）问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

1. 【解析】 如图所示，取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[\ln a, \ln b]$，相应于 $[\ln a, \ln b]$ 上的任一小区间 $[y, y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 e^y 的窄矩形面积，因此有



$$A=\int_{\ln a}^{\ln b}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\mathrm{e}^y\Big|_{\ln a}^{\ln b}=b-a.$$

2. 【解析】抛物线方程 $y^2=2px$ 两端分别对 x 求导，得 $2yy'=2p$，即得 $y'\Big|_{\left(\frac{p}{2},p\right)}=1$，故法线斜率 $k=-1$，从而得到法线方程为 $y=-x+\dfrac{3p}{2}$（如图所示），因此所求面积为



$$A=\int_{-3p}^{p}\left(-y+\frac{3}{2}p-\frac{1}{2p}y^2\right)\mathrm{d}y=\left(-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}py-\frac{1}{6p}y^3\right)\Bigg|_{-3p}^{p}=\frac{16}{3}p^2.$$

3. 【解析】以 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,2\pi a]$，设摆线上的点为 (x,y)，则所求面积为 $A=\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x$，根据参数方程换元，得

$$A=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t$$
$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 t)\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$

【注】摆线，心形线，星形线的参数方程以及图形在同济课本 P372，要求掌握.

4. 【解析】 记 x 轴上方部分星形线的函数为 $y=y(x)$，由对称性知，所求体积为曲线 $y=y(x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转而成，故有 $V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x$.

根据参数方程 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 换元，得

$$V=\int_{\pi}^{0}\pi(a\sin^3 t)^2(a\cos^3 t)'\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

5. 【解析】 记由曲线 $x=\sqrt{a^2-y^2}$，$x=-b$，$y=-a$，$y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_1；由曲线 $x=-\sqrt{a^2-y^2}$，$x=-b$，$y=-a$，$y=a$ 围成的图形绕

$x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为V_2，则所求体积为

$$\begin{aligned}V&=V_1-V_2=\int_{-a}^{a}\pi(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}\pi(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y\\&=\int_{-a}^{a}4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y\xlongequal{y=a\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\pi a^2b\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=8\pi a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=2\pi^2a^2b.\end{aligned}$$

6. **【解析】**

（1）

$$V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5),$$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

（2）取$V=V_1+V_2=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$,

令$V'=4\pi a^3(1-a)=0$，解得区间$(0,2)$内唯一驻点$a=1$.

当$0<a<1$时，$V'>0$；当$a>1$时，$V'<0$，因此$a=1$是极大值点也是最大值点，此时V_1+V_2取得最大值$\dfrac{129}{5}\pi$.