

## TP/PROJET: QUASI-CLIQUE DANS LES GRANDS GRAPHS

Le but de ce projet est d'implanter une version modifiée de l'algorithme de Bron-Kerboch pour trouver, pour un entier  $k$  donné, la plus grande  $k$ -quasi-clique d'un graphe donné.

**Idée générale** L'algorithme de Bron - Kerbosch (1973) est un algorithme listant toutes les **cliques maximales** d'un graphe. Il a servi de base à de nombreuses variations par la suite. Il est facilement modifiable pour calculer la taille de la clique maximum d'un graphe ou lister toutes les **cliques maximum**. Pour un sommet  $x$ ,  $N(x)$  désigne l'ensemble des voisins de  $x$ . L'appel initial à cette fonction récursive se fait avec  $K = \emptyset$ ,  $P = V(G)$  et  $X = \emptyset$ .

```

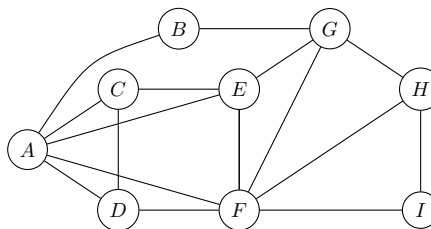
BronKerbosch( $K, P, X$ )
if  $P = \emptyset$  and  $X = \emptyset$  then
    | afficher que  $K$  est une clique maximale
end
foreach sommet  $v \in P$  do
    | BronKerbosch( $K \cup \{v\}, P \cap N(v), X \cap N(v)$ );
    |  $P \leftarrow P \setminus \{v\}$ ;
    |  $X \leftarrow X \cup \{v\}$ ;
end

```

En fonction des problèmes considérés, on peut s'intéresser à des versions relaxées du problème de clique maximum, c'est à dire vouloir trouver le plus grand ensemble de sommets qui forment presque une clique. Pour cela on définit la notion de  $k$ -quasi clique :

**Définition 1** Pour un entier  $k \geq 1$ , une  $k$ -quasi clique d'un graphe  $G$  est un ensemble de sommets formant une clique dans laquelle on a enlevé au plus  $k$  arêtes. On note  $\omega_k$  la taille d'une  $k$ -quasi clique maximum.

A noter que si  $k = 0$ , on retombe sur le problème de clique maximum. Sur le graphe de la figure ci-dessous,  $\{E, G, F, H\}$  est une 1-quasi-clique maximum (il manque l'arête EH) et  $\{A, C, D, E, F\}$  est une 2-quasi-clique maximum (il manque les arêtes CF et ED). On a donc  $\omega_0 = 3$ ,  $\omega_1 = 4$ ,  $\omega_2 = 5$ .



## Travail à effectuer

1. Écrire la fonction BronKerbosch qui devra afficher la taille de la clique maximum et lister toutes les cliques maximum dans un fichier.
2. Tester cette fonction sur les graphes aléatoires  $G(n, p)$  avec  $n$  sommets et probabilité d'arête  $p$  (comme dans le TP3). On indiquera dans un tableau la taille moyenne de clique maximum en fonction de  $n$  et  $p$ .
3. Écrire une version modifiée de BronKerbosch qui calcule la taille de  $k$ -quasi clique maximum et écrit dans un fichier les  $k$ -quasi cliques maximum.
4. Tester à nouveau sur les graphes  $G(n, p)$  pour  $k = 1, 2, 3, \dots$ .
5. Effectuer des tests plus approfondis sur **une des deux** classes de graphes suivantes :
  - (a) grands graphes réels provenant des bases SNAP et KONECT. Attention de ne prendre que des graphes non orientés (ou bien d'oublier l'orientation).
  - (b) graphes de disques aléatoires (cf. TP2) : Un graphe de disque  $G(d, h, l, n)$  est un graphe obtenu à partir de  $n$  disques de diamètre  $d$  dont les centres sont positionnés aléatoirement dans le plan sur une zone de largeur  $l$  et hauteur  $h$  en associant un sommet par disque et en mettant une arête entre deux sommets si les disques correspondants s'intersectent.

## Modalités de réalisation

- Projet à réaliser en binôme. Si trinôme, les tests devront être réalisés sur les deux classes de graphes.
- Langage de programmation libre, mais sans utiliser de librairie de graphes (JGraphT, Guava, Networkx, python-graph, etc).
- La notation sera basée sur une partie démo (début en TP4 et démo finale, 6 pts) ; sur le fonctionnement du programme et la façon dont les fonctions sont implantées (8 pts) ; ainsi que sur le mini-rapport (6 pts).
- le mini-rapport doit valoriser votre travail de façon synthétique (5 pages max) : brève introduction expliquant le contexte et le problème ; travail réalisé (expliquer l'essentiel : codage du graphe, façon de répondre aux questions, fonctionnement du programme) ; résultats obtenus (tableaux montrant les éléments les plus pertinents et limites observées) ; sources utilisées (dont la page où vous avez trouvé le code de l'algo Bron-Kerbosch le cas échéant).
- Le code et le rapport sont à déposer sur plubel avant le 5/5 23h59 ; les démos auront lieu les 6 et 7 mai.

## Inscription

A faire lors du TP n°4.

## Questions techniques ou relatives à l'organisation

A poster sur le forum d'aide de plubel ou par mel [olivier.togni@u-bourgogne.fr](mailto:olivier.togni@u-bourgogne.fr) après avoir été voir si la réponse n'apparaît pas déjà sur le forum.