Graphes i6s3 — Licence L3 Info
Université de Bourgogne

Exercices

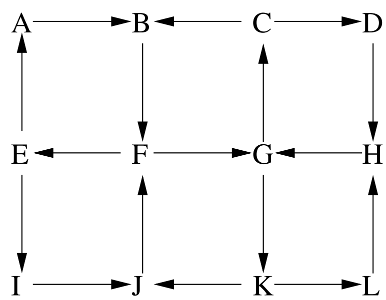
Exercice 1- Pour commencer

1) Montrer que tout graphe connexe sans boucle possède deux sommets de même degré.

2) Dessiner tous les graphes cubiques d'ordre 8 non isomorphes.

3) Le graphe ci-dessous est-il fortement connexe ? Si oui, déterminer son diamètre. Mêmes questions pour le graphe obtenu à partir de celui-ci en supprimant l'arc FG.

4) En partant du graphe non orienté sous-jacent, trouver une orientation qui maximise le diamètre (tout en restant fortement connexe).

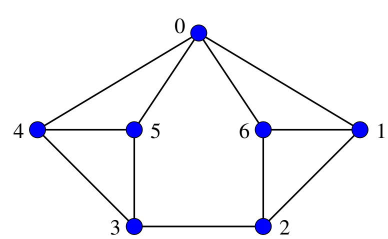


Exercice 2- *Algorithmes*

1) Donner la matrice d'adjacence et le tableau de listes d'incidence du graphe ci-dessous.

2) Écrire un algorithme qui affiche la liste des degrés d'un graphe en partant de chacune des structures de données de la question 1).

3) Lister toutes cliques maximales du graphe. Que vallent ω et α ?



Exercice 3- *Graphes planaires et formule d'Euler*

La formule d'Euler dit que pour tout graphe planaire dessiné sur le plan sans croisements d'arêtes, on a $v - e + f = 2$, où v est le nombre de sommets, e le nombre d'arêtes et f le nombre de faces.

1) En utilisant la formule d'Euler, montrer que le graphe K_5 n'est pas planaire.

2) En utilisant la formule d'Euler, montrer que le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

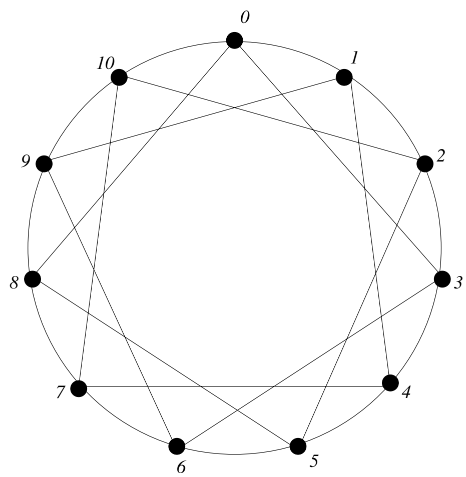
3) En utilisant la formule d'Euler, montrer qu'un ballon de football, composé d'hexagones et de pentagones, contient nécessairement 12 pentagones.

Exercice 4- *Parcours*

1) Donner l'ordre de parcours des algorithmes BFS et DFS sur le graphe suivant en partant du sommet 0 et en considérant les voisins de chaque sommet dans l'ordre croissant (indiquer également l'arbre construit (tableau prédécesseur) et les temps de visite et distance pour BFS). Les arbres BFS et DFS seront-il les mêmes si l'on part du sommet 5 ?

2) Déterminer les graphes pour lesquels l'arbre DFS est toujours un chemin (quel que soit le sommet initial).

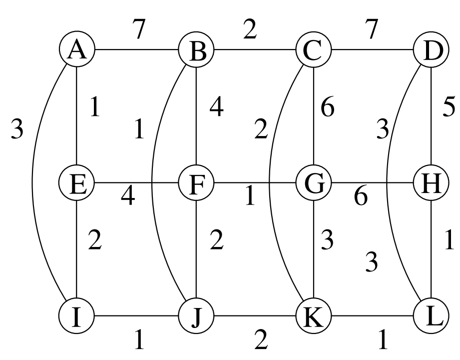
3) En utilisant BFS, écrire une fonction qui calcule les composantes connexes d'un graphe non orienté.

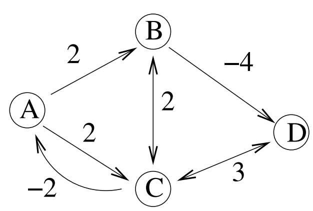


Exercice 5- *Arbres couvrants*

1) Executer les algorithmes de Prim et de Kruskal sur le graphe de gauche ci-dessous et indiquer le coût de l'arbre obtenu et l'ordre d'ajout des arêtes. Existe-t-il d'autres arbres de même coût ?

2) Écrire en pseudo code java le contenu de la boucle Tant-Que de l'algorithme de Prim.



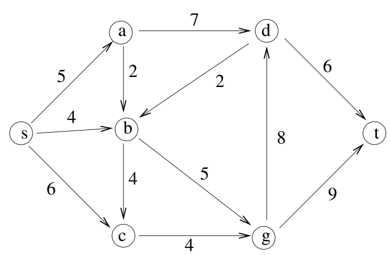


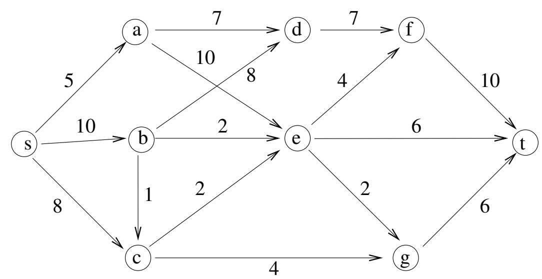
Exercice 6- *Plus courts chemins*

1) Appliquer l'algorithme de Dijkstra sur le graphe de gauche de l'exercice en partant du sommet en A ; puis du sommet G.

2) Appliquer l'algorithme de Bellman-Ford puis de Dijkstra sur le graphe de droite, en partant du sommet A.

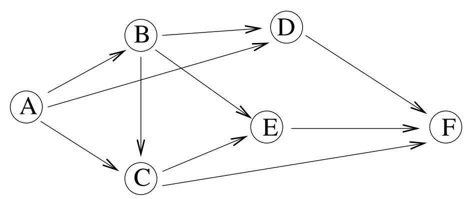
Exercice 7- Déterminer les flots maximum dans les réseaux ci-dessous par l'algorithme de Ford-Fulkerson.





Exercice 8- Pour le graphe H ci-dessous, quel est le plus grand nombre de chemins entre A et F disjoints au niveau des sommets, hormis les extrémités ?

1) Répondre à cette question par recherche d'un flot maximum dans un réseau G obtenu à partir de H.



Exercice 9- *Coloration*

1) Trouver un graphe G d'ordre n pour lequel $\omega(G) > \frac{n}{\alpha(G)}$.

2) Trouver un graphe G d'ordre n pour lequel $\omega(G) < \frac{n}{\alpha(G)}$.

3) Trouver un graphe G d'ordre n pour lequel $\omega(G) = \frac{n}{\alpha(G)}$.

4) Trouver un graphe G pour lequel $\omega(G) = \Delta(G) + 1$.

5) Trouver un graphe G pour lequel $\chi(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$.

6) Trouver un graphe G pour lequel $\chi(G) = \chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Exercice 10- *Algorithmes*

1) Pour le cycle C_6 de 6 sommets, trouver un ordre sur les sommets qui rend l'algorithme glouton optimal et un ordre pour lequel il ne produira pas une coloration optimale.

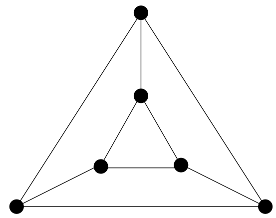
2) Montrer que pour tout graphe G, il est possible d'ordonner les sommets de G de façon telle que l'algorithme glouton produise une coloration de G utilisant $\chi(G)$ couleurs.

3) Pour tout $n > 1$, trouver un graphe biparti à $2n$ sommets ordonnés de façon que l'algorithme glouton utilise n plutôt que 2 couleurs.

Exercice 11-

1) Calculer le nombre chromatique total du cycle C_n de longueur n.

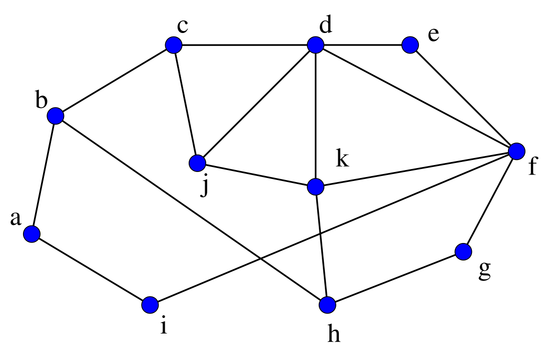
2) Pour le prisme du triangle(voir dessin ci-dessous) et le prisme du carré, calculer χ, χ', et χ''.



Exercice 12- Modéliser chacun des deux problèmes suivants en terme de coloration de graphe (en prenant la variante de coloration la plus appropriée) et indiquer si le calcul d'une solution optimale est faisable ou non :

1. **Planification d'avions :** une compagnie possède k avions à affecter à n vols, le ième vol ayant lieu dans l'intervalle de temps $[a_i, b_i]$. Elle veut savoir si les k avions sont suffisants pour proposer ses n vols.
2. **Tâches biprocesseur :** sur un ensemble de k processeurs (machines) $p_1, p_2, \ldots, p_k$, on souhaite faire exécuter un ensemble de r tâches $t_1, \ldots t_r$; chaque tâche devant s'exécuter sur deux processeurs prédéfinis simultanément (par exemple, un transfert de fichiers entre deux processeurs). Un même processeur ne peut exécuter deux tâches simultanément. On s'intéresse au temps global minimum pour exécuter toutes les tâches.

Exercice 13- Dans quel ordre l'algorithme DSATUR va-t-il colorier le graphe dessiné ci-dessous et quelle va être la coloration produite ?



Exercice 14- *Coloration fractionnaire*

La puissance p d'un graphe G est le graphe G^p avec le même ensemble de sommets que G et une arête entre toute paire de sommets à distance au plus p dans G.

1) Pour $b = 1, 2, 3$, déterminer l'entier k minimum tel que le graphe C_7^2 (le carré du cycle de longueur 7) soit (k, b)-coloriable.

2) Que peut-on alors dire de $\chi_f(C_7^2)$?