

# Problema 1: Análise do efeito da superposição espectral para sinais multifrequência

1<sup>st</sup> Allan Capistrano de Santana Santos  
Universidade Estadual de Feira de Santana  
Feira de Santana - BA, Brasil  
asantos@ecompu.uefs.br

2<sup>nd</sup> Daniel Fernandes Campos  
Universidade Estadual de Feira de Santana  
Feira de Santana - BA, Brasil  
dfc152@gmail.com

3<sup>rd</sup> João Erick Barbosa Teixeira da Silva  
Universidade Estadual de Feira de Santana  
Feira de Santana - BA, Brasil  
jsilva@ecompu.uefs.br

4<sup>th</sup> João Pedro Rios Carvalho  
Universidade Estadual de Feira de Santana  
Feira de Santana - BA, Brasil  
jpriocarvalho1@gmail.com

**Resumo**—Este relatório descreve sobre a análise e processamento de um sinal contínuo qualquer, à fim de remover o ruído atrelado à ele e, então, transformá-lo para a forma discreta, evitando sempre distorções e atenuações durante o processo.

**Index Terms**—sinal, contínuo, discreta, distorções

## I. INTRODUÇÃO

Sinais com naturezas diversas estão presentes na vida humana de forma natural, mecânica, elétrica, e entre outras. À medida que a tecnologia avança, existem novas tentativas de digitalização do mundo. Esse processo é feito com equipamentos eletrônicos, os quais recebem uma quantidade específica de entradas, realizam um processamento previamente configurado, e produzem saídas.

Para tal, todos os passos do processo de conversão contínua/discreta (C/D) são de suma importância para que o processamento digital seja realizado com êxito. Através de simulações em *software*, muitas empresas buscam demonstrar o funcionamento de seus equipamentos com o objetivo de garantir resultados positivos que, posteriormente, serão utilizados para projetar soluções para o mercado.

Um exemplo comum em que pode-se perceber a operação de conversão está relacionado à gravação de voz, na qual tem-se um sinal contínuo (mecânico) de entrada, geralmente com um ruído presente, que precisa ser removido da informação que o acompanha. Para isso, é necessário realizar algumas operações digitais como amostragem, filtragem e reconstrução caso o sinal discreto precise ser emitido por um alto-falante.

No presente problema, o sinal contínuo de entrada é composto por uma superposição de senóides com ruído aditivo. A resolução deste tem como objetivo, eliminar o ruído do sinal, apresentar o sinal filtrado no domínio discreto e demonstrar analiticamente esses procedimentos com a reconstrução desse sinal discretizado. Para o desenvolvimento do projeto, utilizou-se conceitos da Teoria de Amostragem, Transformada de Fourier ( $\mathcal{FT}$ ), conversão C/D e Transformada de Fourier de Tempo Discreto ( $\mathcal{DTFT}$ ).

## II. DESENVOLVIMENTO

O pré-processamento de sinal de multifrequência, é dividido em alguns passos, sendo esses: **filtragem de entrada**, cujo objetivo é a remoção de ruídos e limitação do sinal em banda, **conversão contínua/discreta (C/D)** e **reconstrução do sinal**, que caso seja executada corretamente, será exatamente igual ao sinal filtrado e limitado em banda. Esses passos serão melhor explicados logo na sequência.

### A. Filtro de entrada

Inicialmente tem-se um sinal de entrada qualquer no sistema, denominado  $x(t)$ , o qual é composto por uma superposição de senóides bem definidas, e, contendo ruído. Este sinal pode ser definido por  $x(t) = x_f(t) + x_r(t)$ , onde  $x_f(t)$  é a informação do sinal e  $x_r(t)$  um ruído aditivo. Sabendo que o módulo do espectro da informação,  $|X_f(j\omega)|$ , está limitado em banda de  $4000\pi$  rad/s, por consequência,  $\omega = 2\pi f \Rightarrow 4000\pi = 2\pi f \Rightarrow f = 2000\text{Hz}$ , o ruído aditivo encontra-se presente nas frequências fora desse intervalo, nesse caso, utiliza-se um filtro passa-baixa no sinal para remover este ruído. Assim, basta aplicar a Transformada de Fourier no sinal de entrada e, então, multiplicar o espectro obtido por um pulso retangular com largura igual a duas vezes a frequência de corte ( $B = 4000\pi$ ), obtendo, dessa forma, o espectro do sinal sem ruído ( $X_c(j\omega)$ ). Como abaixo:

$$F(j\omega) = \begin{cases} 1, & |w| \leq B \\ 0, & c.c \end{cases} \quad (1)$$

$$X_c(j\omega) = X(j\omega) \cdot F(j\omega) \quad (2)$$

$$X_c(j\omega) \xrightarrow{iFT} x_c(t) \quad (3)$$

Como não existe um equipamento eletrônico capaz de simular um filtro ideal, para fins de implementação e simulação, foi utilizado o filtro *Butterworth* passa-baixa. Este é um tipo de filtro eletrônico que atenua as frequências acima de uma determinada frequência de corte e permite que as frequências

abaixo desse ponto passem sem atenuação significativa. A resposta de magnitude plana na região de passagem de frequência é a principal característica desse filtro [2] [4].

### B. Conversor C/D

Obtido o sinal  $x_c(t)$ , resultado do filtro passado no sinal de entrada, o próximo passo é convertê-lo para um sinal discreto  $x[n]$ , o qual pode ser representado por  $x_c(nT_s)$ , ou seja,  $x[n] = x_c(n \cdot T_s); \forall n \in \mathbb{N}$ , uma vez que o sinal de áudio não apresenta valores para  $n < 0$ . Para isso, foram seguidos uma sequência de passos baseando-se nas condições do Teorema da Amostragem [3].

Inicialmente, é necessário verificar se o sinal está limitado em banda, o que demonstra a importância do filtro de entrada demonstrado anteriormente. A partir disso, define-se uma frequência de amostragem com valor maior ou igual a duas vezes a frequência de banda ( $f_s \geq 2 \cdot B$ ). Isso é descrito no Teorema de Nyquist [3] e seu objetivo é evitar efeitos de *aliasing*, no qual, após a amostragem, ocorre sobreposição nas replicações espectrais a cada múltiplo da frequência de amostragem, o que faz com que a frequência do sinal seja medida erroneamente como sendo de frequência mais baixa, de modo que não é possível recuperar o sinal por amostragem e interpolação ideal. Como evidenciado na Fig. 1, caso a frequência seja menor, ocorre interferências no sinal, ocasionando perda de informação, como exemplificado na Fig. 2.

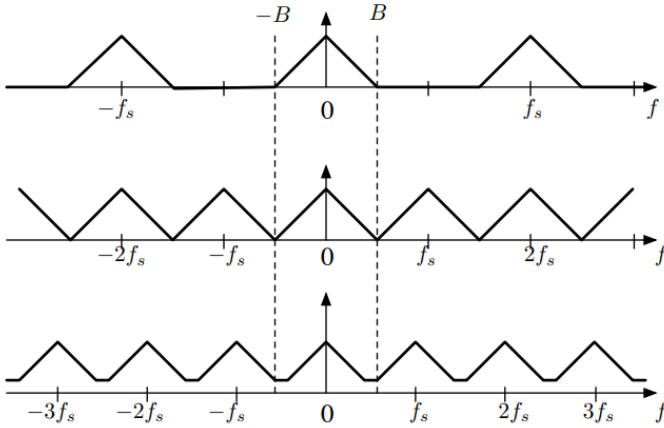


Figura 1. Exemplo de réplicas espectrais sem e com diferentes frequências. [1]

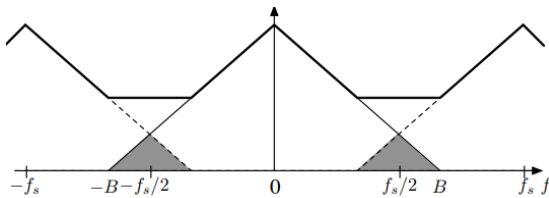


Figura 2. Exemplo do efeito de *aliasing*. [1]

1) *Amostragem*: Uma vez escolhida a  $f_s$ , monta-se um trem de impulsos ( $s(t)$ ), o qual servirá para selecionar as amostras, nos pontos múltiplos de  $T_s$ , que é definido como  $T_s = \frac{1}{f_s}$ . Entretanto, devido à impossibilidade de implementação do trem de impulsos, visto que, um impulso tem energia infinita, o que torna impossível sua simulação exata, foi utilizado um trem de pulsos retangulares:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - n \cdot T_s) \quad (4)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad (5)$$

Assim, no processo de amostragem é feita com a multiplicação do sinal pelo trem de pulsos no domínio do tempo. Resultando no sinal amostrado  $x_s(t)$ :

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot p(t)$$

$$x_s(t) = x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - n \cdot T_s) \quad (6)$$

$$\mathcal{FT}\{x_s(t)\} = \mathcal{FT}\{x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - n \cdot T_s)\}$$

$$\mathcal{FT}\{x_s(t)\} = \mathcal{FT}\{x_c(t) \cdot h(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_s)\}$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \{X_c(j\omega) * [H(j\omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \cdot \omega_s)]\}$$

$$X_s(j\omega) = \frac{2\pi}{2\pi \cdot T} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\omega) * [H(j\omega) \cdot \delta(\omega - k \cdot \omega_s)] \right\} \quad (7)$$

Fazendo a  $\mathcal{FT}$  de  $h(t)$  tem-se:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T 1 \cdot e^{-j\omega t} dt \\ H(j\omega) &= \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T}^T = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{j\omega} \cdot \frac{2}{2} \\ H(j\omega) &= \frac{2}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j} = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T) \end{aligned}$$

$$H(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T \cdot \frac{\pi}{\pi}) \cdot \frac{\pi T}{\pi T} = 2\pi T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) \quad (8)$$

Assim, usando (8) em (7), tem-se:

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\omega) * H(j\omega) \cdot \delta(\omega - k \cdot \omega_s) \right\}$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\omega) * 2\pi T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) \cdot \delta(\omega - k \cdot \omega_s) \right\}$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) \cdot X_c(j\omega) * \delta(\omega - k \cdot \omega_s) \right\}$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) \cdot X_c(j(\omega - k \cdot \omega_s)) \right\} \quad (9)$$

2) *Relação FT e DTFT*: Para que seja possível obter o sinal formado por um conjunto de amostras  $x[n]$ , deve-se encontrar a  $\mathcal{DTFT}$ . Sabe-se que, de acordo com (9) a  $\mathcal{FT}$  do sinal  $x_s(t)$  é periódica em  $\omega_s$ .

De acordo com [3], existe a relação:

$$X(e^{j\Omega}) = X(j\omega)|_{\omega=\Omega/T} \quad (10)$$

Deste modo, é possível encontrar a  $\mathcal{DTFT}$  a partir da  $\mathcal{FT}$  da seguinte maneira:

$$X_s(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi T \text{sinc}\left(\frac{\Omega}{\pi}\right) \cdot X_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - k \cdot \omega_s\right)\right) \right\} \quad (11)$$

$$X_s(e^{j\Omega}) \xrightarrow{iDTFT} x[n]$$

Portanto, usando a  $i\mathcal{DTFT}$  em (11), ou seja, no  $X_s(e^{j\Omega})$ , tem-se, por fim, o sinal discreto  $x[n]$ .

### C. Reconstrução do sinal

Por fim, o último passo é a reconstrução do sinal, ou seja, realizar uma operação a partir do sinal discreto  $x[n]$  com o objetivo de obter novamente o sinal contínuo no tempo. Considerando que o sinal foi amostrado por um trem de impulsos, sabe-se que:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$$

Como,  $x[n] = x_c(nT_s)$  :

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT_s)$$

Para tal, foram utilizados os conceitos de Interpolação Ideal. Isso quer dizer que:

$$X_{re}(j\omega) = X_s(j\omega) \cdot H_r(j\omega) \quad (12)$$

Onde:

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Utilizando (12) no domínio do tempo, tem-se que:

$$x_{re}(t) = x_s(t) * h_r(t)$$

$$x_{re}(t) = h_r(t) * \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT_s) \right]$$

$$x_{re}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot [\delta(t - nT_s) * h_r(t)]$$

$$x_{re}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h_r(t - nT_s) \quad (13)$$

Uma vez que:

$$h_r(t) = \frac{\omega_s \cdot T_s}{2\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_s \cdot t}{2\pi}\right)$$

Pode-se reescrever (13) da seguinte maneira:

$$x_{re}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \frac{\omega_s \cdot T_s}{2\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_s \cdot (t - nT_s)}{2\pi}\right) \quad (14)$$

Isto é, no domínio do tempo, o sinal é reconstruído através da soma ponderada de funções *sinc* que estão deslocadas pelo período de amostragem com amplitude de cada uma das funções correspondendo aos valores da sequência de tempo discreto em cada um dos instantes de amostragem, como pode ser observado na Fig. 3.

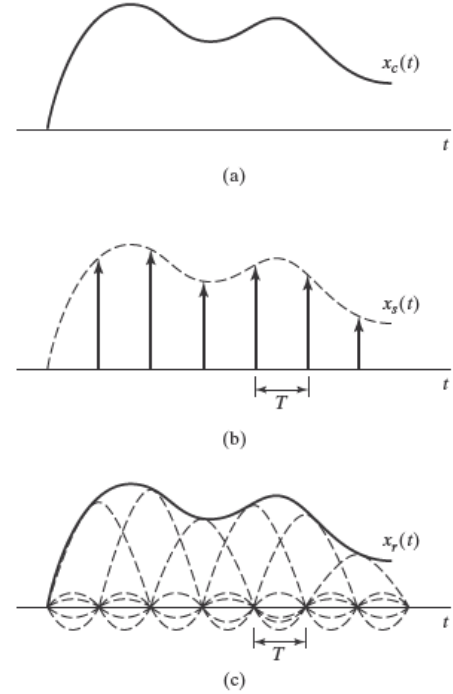


Figura 3. Reconstrução do sinal através de interpolação ideal. [3]

## III. DISCUSSÕES E RESULTADOS

Nesta seção será discutido à respeito da implementação que foi realizada utilizando o *software MatLab*, versão 2019a, mostrando os resultados obtidos e fazendo análises sobre os mesmos.

### A. Gerador

O sinal de entrada usado ( $x(t)$ ) foi gerado utilizando um somatório de senoides com fases e amplitudes aleatórias com duração de dois segundos, dessa forma, cada execução gera um sinal diferente, onde as senoides são espaçadas em 100Hz e iniciando em 10Hz. Vale ressaltar, que a frequência de amostragem do sinal de entrada foi simulada com 24K Hz. Na Fig. 4 é possível ver um exemplo de sinal gerado, juntamente com o seu espectro.

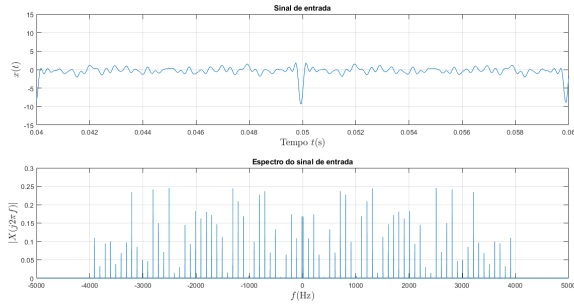


Figura 4. Sinal de entrada no domínio do tempo e na frequência.

### B. Filtro de entrada

Em seguida é realizada a filtragem do sinal de entrada, para isso foi utilizada as funções *butter* e *filter*, para aplicar um filtro passa-baixa. Com isso, é feita a limitação espectral, caracterizando uma remoção de um ruído com um filtro *Butterworth*, o qual serve tanto para sinais digitais, como também, analógicos.

Na Fig. 5 é possível ver o sinal filtrado tanto no domínio do tempo quanto na frequência. Já na Fig. 6, tem-se o comparativo do sinal filtrado com o sinal original.

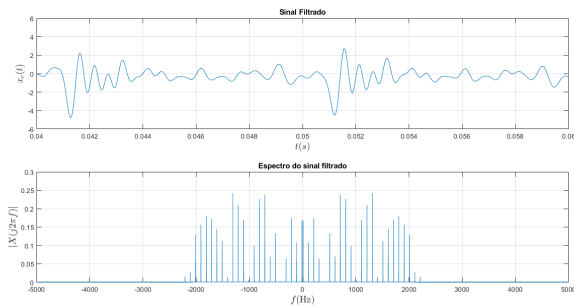


Figura 5. Sinal filtrado no domínio do tempo e na frequência.

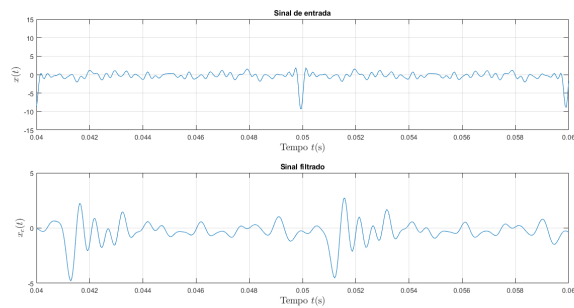


Figura 6. Sinal de entrada e sinal filtrado no domínio do tempo.

### C. Conversor D/C

1) *Amostragem*: Em sequência, no processo de amostragem é feita a reamostragem do sinal, uma vez que o gerador cria um vetor de valores e um vetor de tempo, os quais

são manipulados na filtragem. Para realizar a reamostragem é gerado um trem de pulsos usando a função *pulstran* com uma frequência de amostragem, ou, de repetição dos pulsos, de 6000 Hz, escolhida obedecendo o critério do Teorema de *Nyquist*. Também é possível utilizar outros valores para a frequência de amostragem, contanto que tal critério continue sendo respeitado. Os pulsos tem um *duty cycle* de 50%, ou seja, permanece ativo (amplitude igual a 1) durante metade do ciclo de pulso. Na Fig. 7 é exemplificado o trem de pulsos.

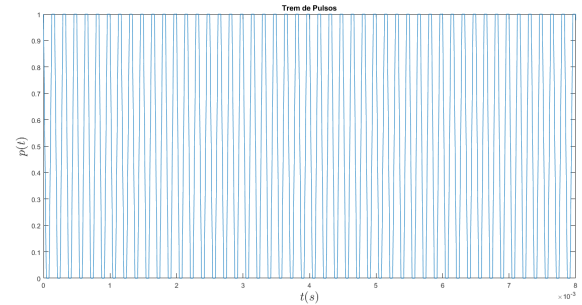


Figura 7. Trem de pulsos retangulares.

Em seguida é realizada uma multiplicação, no domínio do tempo, entre o sinal filtrado e o trem de pulsos, podendo ser observado na Fig. 8, gerando, dessa forma, o sinal amostrado. Na Fig. 9, é exibido o sinal amostrado e seu respectivo espectro.

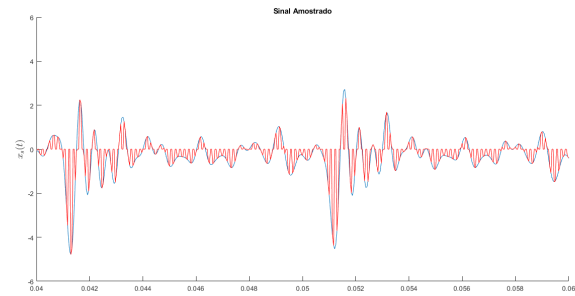


Figura 8. Sinal filtrado (azul) e sinal amostrado (vermelho) no domínio do tempo.

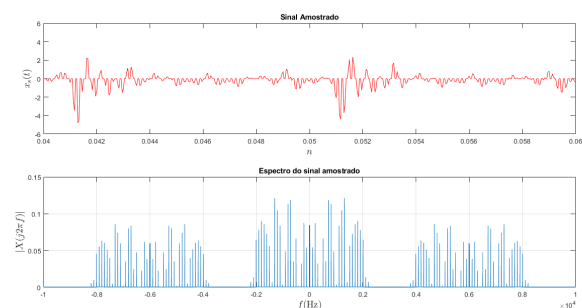


Figura 9. Sinal amostrado no domínio do tempo e na frequência.

Como pode ser observado na Fig. 9, ocorre um decaimento na amplitude das repetições do espectro do sinal amostrado, isso acontece devido a multiplicação do sinal filtrado pelo trem de pulsos, que no domínio da frequência resulta em uma convolução desses sinais. O trem de pulsos no tempo torna-se um trem de funções *sinc* na frequência, com largura inversamente proporcional a largura do pulso retangular. Logo, como a largura dos pulsos escolhida na simulação é pequena, a largura das funções *sinc* se torna grande, o que resulta em uma modulação nas repetições do espectro do sinal amostrado.

2) *Conversão*: Em seguida, partindo da relação da  $FT$  com a  $DTFT$ , é utilizado outro filtro *Butterworth* passa-baixa para eliminar as replicações espectrais. Depois, o sinal é multiplicado por um fator para corrigir a distorção no eixo das ordenadas geradas pela filtragem, obtendo, assim, o sinal discreto ( $x[n]$ ). Na Fig. 10 tem-se a comparação do sinal filtrado ( $x_c(t)$ ) com o sinal amostrado ( $x[n]$ ).

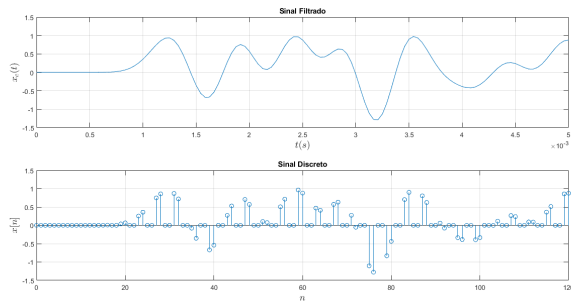


Figura 10. Sinal filtrado e sinal discreto.

#### D. Conclusões

A partir da solução obtida, será possível reconfigurar o sistema em *hardware* embarcado da empresa Analog Inc, com base em descrições analíticas, matematicamente fundamentadas, é perceptível o funcionamento esperado em todas as etapas do pré-processamento.

Com o desenvolvimento desse projeto, foi possível aprender mais sobre o pré-processamento de um sinal multifrequência, a necessidade da aplicação da remoção de ruídos, os problemas causados pelo efeito *aliasing* e como evitá-lo, amostragem, discretização e, também, sobre a reconstrução de um sinal. Todos esses processos foram realizados de forma analítica, e, posteriormente a sua implementação, exceto a reconstrução, a qual não foi implementada no código. Outro fator interessante foi ver como a parte teórica se relaciona estritamente com a parte simulada.

A análise de sinais no domínio da frequência permite identificar facilmente as componentes de frequência presentes em um sinal. É especialmente útil para analisar sistemas lineares, já que nesse caso as componentes de frequência podem ser estudadas separadamente. Através dessa análise, é possível realizar modificações que não são possíveis ou não de maneira fácil no domínio do tempo, um exemplo disso é justamente a remoção de um ruído aditivo de caráter aleatório.

Dessa forma, tornou-se mais claro e perceptível a grande importância da análise de sinais e consequente processamento e/ou tratamento, uma vez que a área de estudo e mercado é extremamente vasta, estando presente em todo o dia a dia das pessoas.

#### REFERÊNCIAS

- [1] J. M. Pauly, "Sampling and Pulse Modulation" in stanford, <https://web.stanford.edu/class/ee179/lectures/notes11.pdf> (accessed Mar. 05, 2023).
- [2] Li, Z.S. "New Study on Butterworth Low Pass Filter." Proceedings of the 1st International Symposium on Test Automation & Instrumentation, 3, 1532-1535. 2006.
- [3] OPPENHEIM, Alan V.; SCHAFER, Ronald W. "Processamento em tempo discreto de sinais". Tradução Daniel Vieira. 3ª ed.-São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.
- [4] ROBERTS, Jo; ROBERTS, Thomas D. "Use of the Butterworth low-pass filter for oceanographic data.". Journal of Geophysical Research: Oceans, v. 83, n. C11, p. 5510-5514, 1978.