

## Bibliography



## 前言



# Contents

<b>1 引言</b>	<b>3</b>
<b>2 多电子波函数与多电子算符</b>	<b>5</b>
2.1 电子的问题	5
2.1.1 原子单位	6
2.1.2 Born-Oppenheimer 近似	8
2.1.3 反对称/Pauli 不相容原理	9
2.2 轨道, Slater 行列式, 基函数	10
2.2.1 自旋轨道与空间轨道	10
2.2.2 Hartree 积	11
2.2.3 Slater 行列式	12
2.2.4 Hatree-Fock 近似	15
2.2.5 极小基 $H_2$ 模型	16
2.2.6 被激发的 (Slater) 行列式	19
2.2.7 从精确波函数到组态相互作用	21
2.3 算符及其矩阵元	24
2.3.1 极小基 $H_2$ 的矩阵元	24
2.3.2 单、双电子积分的记法	26
2.3.3 矩阵元的一般规则	28
2.3.4 矩阵元规则的推导	32
2.3.5 将自旋轨道转换成空间轨道	38
2.3.6 库伦积分、交换积分	41
2.3.7 行列式能量的伪经典阐释	43
2.4 二次量子化	44
2.4.1 产生、湮灭算符及其反对易关系	45
2.4.2 二次量子化算符及其矩阵元	49
2.5 自旋匹配组态	51
2.5.1 自旋算符	52
2.5.2 限制性行列式与自旋匹配组态	54
2.5.3 非限制性行列式	57
注释	60
拓展阅读	60

<b>3 Hartree-Fock 近似</b>	<b>63</b>
3.1 Hartree-Fock 方程	64
3.1.1 库伦算符和交换算符	65
3.1.2 Fock 算符	66
3.2 H-F 方程的推导	68
3.2.1 泛函变分	68
3.2.2 单行列式能量最小化	69
3.2.3 正则 H-F 方程	71
3.3 H-F 方程解的阐释	74
3.3.1 轨道能量与 Koopman 定理	74
3.3.2 Brillouin 定理	78
3.3.3 H-F 哈密顿量	79
3.4 限制性闭壳层 H-F: Roothaan 方程	80
3.4.1 闭壳层 H-F: 限制性自旋轨道	81
3.4.2 基的引入: Roothaan 方程	84
3.4.3 电荷密度	86
3.4.4 Fock 矩阵的表达式	87
3.4.5 基的正交归一化	89
3.4.6 SCF (自洽场) 手续	91
3.4.7 期望值与布局分析	93
3.5 模型算例: $\text{H}_2$ 与 $\text{HeH}^+$	96
3.5.1 1s 极小基: STO-3G	96
3.5.2 STO-3G 下的 $\text{H}_2$	101
3.5.3 STO-3G 下的 $\text{HeH}^+$ : SCF 计算	107
3.6 多原子基组	107
3.6.1 收缩型高斯函数	114
3.6.2 极小基: STO-3G	114
3.6.3 双 Zeta 基组: 4-31G	114
3.6.4 极化基组: 6-31G* 与 6-31G**	114
3.7 一些闭壳层算例	114
3.7.1 总能	114
3.7.2 离子化势能	114
3.7.3 平衡几何构型	114
3.7.4 布局分析与偶极矩	114
3.8 非限制性开壳层 H-F: Pople-Nesbet 方程	114
3.8.1 开壳层 H-F: 非限制性自旋轨道	114
3.8.2 基的引入: Pople-Nesbet 方程	114
3.8.3 非限制性密度矩阵	114
3.8.4 Fock 矩阵的表达式	114
3.8.5 非限制 SCF 方程的解	114
3.8.6 一些非限制性的算例	114
3.8.7 解离问题及其非限制性解	114

<b>4 组态相互作用</b>	<b>115</b>
4.1 多组态波函数及 Full CI 矩阵的结构	115
4.1.1 中间归一化及相关能的表达式	115
4.2 双激发 CI	115
4.3 计算示例	115
4.4 自然轨道与单粒子约化密度矩阵	115
4.5 多组态自洽场与广义价键法	115
4.6 截断 CI 与尺寸一致性问题	115
<b>5 对理论与耦合对理论</b>	<b>117</b>
5.1 独立电子对近似 (The Independent Electron Pair Approximation, IEPA)	118
5.1.1 酉变换下的不变性: 例子	118
5.1.2 一些算例	118
5.2 耦合对理论	118
5.2.1 耦合簇近似 (The Coupled Cluster Approximation, CCA)	118
5.2.2 波函数的簇展开	118
5.2.3 线性 CCA(耦合簇近似) 与耦合电子对近似 (CEPA)	118
5.2.4 一些算例	118
5.3 采用单粒子哈密顿量的多电子理论	118
5.3.1 CI、IEPA、CCA 和 CEPA 得到的弛豫能	118
5.3.2 Hückel 理论中多烯的共振能	118
<b>6 多体微扰理论</b>	<b>119</b>
6.1 Rayleigh-Schrödinger 微扰理论	119
6.2 RS 微扰论的图表示	123
6.2.1 两态系统的图微扰论	123
6.2.2 $N$ 个态的图微扰论	130
6.2.3 对图求和	131
6.3 轨道微扰论: 单粒子微扰	133
6.4 轨道微扰论的图表示	141
6.5 相关能的微扰展开	141
6.6 RS 微扰展开的 $N$ 依赖性	141
6.7 相关能微扰展开的图表示	141
6.7.1 Hugenholtz 图	141
6.7.2 Goldstone 图	141
6.7.3 对图求和	141
6.7.4 什么是 Linked-Cluster 定理?	141
6.7.5 一些示例性的计算	141
<b>7 单粒子多体 Green 函数</b>	<b>143</b>
7.1 单粒子体系的 Green 函数	143
7.2 单粒子多体 Green 函数	149
7.2.1 自能	151
7.2.2 Dyson 方程的解	152
7.3 将此框架应用于 $H_2$ 和 $HeH^+$	152
7.4 微扰理论和 Green 函数法	152

7.5 一些算例 . . . . . 152





## Chapter 1

### 引言



## Chapter 2

### 多电子波函数与多电子算符

此章来介绍量子化学的基本概念、技巧和必要的记号。具体而言有三方面：多电子算符（如哈密顿算符）的结构和多电子波函数的形式（即 Slater 行列式及其线性组合）；如何求算符在 Slater 行列式之间的矩阵元；Hartree-Fock 近似的基本思想。之后的章节就是 Hartree-Fock 近似和以 HF 为起点的高级方法，所以现在学的知识在以后的章节中极有用处。

2.1 节关注电子的问题，即在固定的原子核所产生的场中，电子的行为是怎样的。这是量子化学的中心问题，也是本书的核心关注点。如此，首先介绍完整的不含时非相对论 Schrödinger 方程，然后引入 Born-Oppenheimer 近似。接下来会对 Pauli 排斥（反对称原理）作一总的阐述，这原理是多电子波函数必须遵守的，即在交换任意两电子坐标的操作下，多电子波函数是反对称的。

2.2 节先介绍单电子函数（空间轨道和自旋轨道），并用单电子函数构建多电子函数（Hartree 积和 Slater 行列式）。然后用单个 Slater 行列式来近似体系的精确波函数（属于 Hartree-Fock 近似）并考察这种近似的特点。如此之后，我们再介绍一个简单体系：氢分子的极小基（每个原子上一个 1s 轨道）从头算模型。这个模型简单却富教益，本书将频繁使用这个模型，有些理论乍看非常繁杂，但用这个模型能够揭示出它们地根本特点。本节最后一部分讨论  $N$ -电子波函数的多行列式（multi-determinantal）展开。

2.3 的主要内容是量子化学中的单、双电子算符，以及这些算符在 Slater 行列式之间的矩阵元，并介绍了如何将这些算符关于自旋轨道的矩阵元转换为关于空间轨道的矩阵元。本节最后介绍了一个技巧以帮助记忆单个 Slater 行列式所对的应能量表达式。

2.4 节对产生、湮灭算符以及二次量子化形式作了简介。二次量子化是处理多电子体系的一种手段，它天然蕴含 Pauli 不相容原理，而非直接使用 Slater 行列式。这种形式广泛出现在多体理论的文献中。不过本书大部分的内容都不要求读者掌握二次量子化，所以跳过这一节也没什么影响。

2.5 节讨论多电子系统中的电子自旋与自旋算符，对限制性和非限制性自旋轨道、自旋匹配组态也作了阐述。自旋匹配组态和由限制性自旋轨道得出的单个 Slater 行列式不同，前者才是总电子自旋算符的正确的本征函数。本节对单、双、三重的自旋匹配组态，以及非限制性波函数（此函数不是总电子自旋算符的本征函数）作了阐述。

#### 2.1 电子的问题

本书的主要关注点在于如何近似求解非相对论不含时 Schrödinger 方程

$$\mathcal{H}|\Phi\rangle = \mathcal{E}|\Phi\rangle \quad (2.1)$$

其中  $\mathcal{H}$  是核和电子组成的系统的 Hamilton 算符, 核的坐标用  $\mathbf{R}_A$  记, 电子的用  $\mathbf{r}_i$  记. ?? 就是一个分子坐标系的示例.  $i$  电子与  $A$  核之间的距离是  $r_{iA} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_A|$ ;  $i$  电子和  $j$  电子的距离是  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ ,  $A$  核与  $B$  核之间的距离为  $R_{AB} = |\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B|$ . 若用原子坐标, 则  $N$  个电子  $M$  个核的 Hamiltonian 就是:

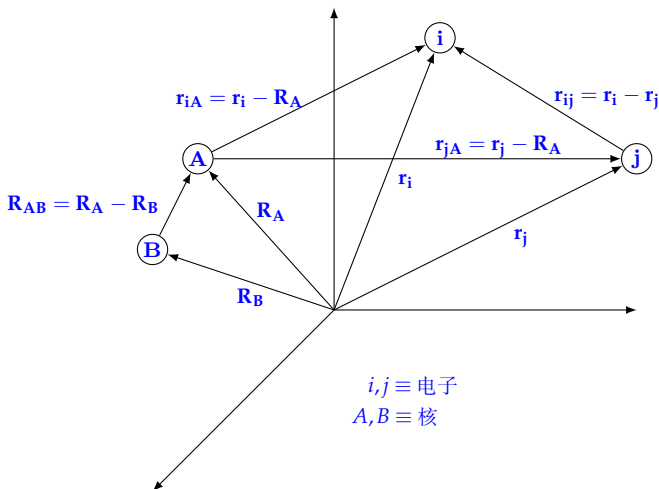


图 2.1: 一个分子中的坐标系:  $i, j$ =电子;  $A, B$ =核.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \nabla_i^2 - \sum_{A=1}^M \frac{1}{2M_A} \nabla_A^2 - \sum_{i=1}^N \sum_{A=1}^M \frac{Z_A}{r_{iA}} \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{1}{r_{ij}} + \sum_{A=1}^M \sum_{B>A}^M \frac{Z_A Z_B}{R_{AB}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

这个方程中,  $M_A$  是原子核  $A$  的质量与电子质量的比值,  $Z_A$  是核的原子序号. Laplace 算符  $\nabla_i^2, \nabla_A^2$  微分的对象分别是  $i$  电子的坐标和  $A$  核的坐标. 式??中的第一项是全部电子的动能算符, 第二项是核的动能算符, 第三项是核与电子间的 Coulomb 吸引势能, 第四项和第五项分别是电子间和核之间的排斥势.

### 2.1.1 原子单位

本书所采用的单位是原子单位. 为了理解原子单位的由来, 我们先看 SI 单位下氢原子的 Schrödinger 方程:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \phi = \mathcal{E} \phi \quad (2.3)$$

$\hbar$  是 Planck 常数除以  $2\pi$ ,  $m_e$  是电子质量,  $-e$  是电子电荷. 为将方程变为无量纲形式, 进行坐标变换:  $x, y, z \rightarrow \lambda x, \lambda y, \lambda z$ , 得到

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e \lambda^2} \nabla'^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \lambda r'} \right] \phi' = \mathcal{E} \phi' \quad (2.4)$$

动能算符核势能算符里面的常数部分可以因子化, 即选定一个  $\lambda$  使得

$$\frac{\hbar^2}{m_e \lambda^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \lambda} = \mathcal{E}_a \quad (2.5)$$

其中  $\mathcal{E}_a$  就是原子坐标下的能量, 叫作 **Hartree**. 由 2.5 可以求得  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = a_0 \quad (2.6)$$

所以  $\lambda$  就是 Bohr 半径  $a_0$ , 在原子单位中是长度单位, 叫作 **Bohr**. 最后一点, 由于

$$\mathcal{E}_a \left[ -\frac{1}{2} \nabla'^2 - \frac{1}{r'} \right] \phi' = \mathcal{E}' \phi' \quad (2.7)$$

如果定义  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} / \mathcal{E}_a$ , 则可得到无量纲的方程

$$\left( -\frac{1}{2} \nabla'^2 - \frac{1}{r'} \right) \phi' = \mathcal{E}' \phi' \quad (2.8)$$

这就是原子坐标下的 Schrödinger 方程. 该氢原子方程的基态解对应的能量是  $-0.5$  原子单位  $\equiv -0.5$  Hartrees. 2.1 中列出了原子单位和 SI 单位之间的转换因子 X, 一个量在 SI 单位中的值  $Q$  和原子单位中的值  $Q'$  按如下方程联系:

$$Q = X Q' \quad (2.9)$$

物理量	转换因子 X	X 的值 (SI 单位)
长度	$a_0$	$5.2918 \times 10^{-11} \text{ m}$
质量	$m_e$	$9.1095 \times 10^{-31} \text{ kg}$
电荷	$e$	$1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$
能量	$\mathcal{E}_a$	$4.6598 \times 10^{-18} \text{ J}$
角动量	$\hbar$	$1.0546 \times 10^{-34} \text{ Js}$
电偶极矩	$ea_0$	$8.4784 \times 10^{-30} \text{ Cm}$
电极化率	$e^2 a_0^2 \mathcal{E}_a^{-1}$	$1.6488 \times 10^{-41} \text{ C}^2 \text{ m}^2 \text{ J}^{-1}$
电场强度	$\mathcal{E}_a e^{-1} a_0^{-1}$	$5.1423 \times 10^{11} \text{ V m}^{-1}$
波函数	$a_0^{-3/2}$	$2.5978 \times 10^{15} \text{ m}^{-3/2}$

**表 2.1:** SI 转换为原子单位

下面是一些文献中常见的非 SI 单位下的物理量的转换因子. 一原子单位长度等于  $0.52918$  埃 ( $\text{\AA}$ ). 一原子单位偶极矩 (相距  $a_0$  的两个单位电荷) 等于  $2.5418$  德拜 (D), 一原子单位能量等于  $27.211$  电子伏特 (eV),  $627.51 \text{ kcal/mole}$ .

从现在起我们开始采用原子单位, 并去掉之前所有量中的撇号.

### 2.1.2 Born-Oppenheimer 近似

Born-Oppenheimer 近似在量子化学中占据着核心位置. 这里我们仅对该近似作定性的讨论. Sutcliffe<sup>1</sup> 对该近似的定量层面作了清晰的讨论, 包括如何推导对该近似的修正等. 由于原子核远比电子重, 所以它们运动得较慢. 因此, 很大程度上可将分子中的电子视作在位置固定的核产生的势场中运动. 在这个近似下, 2.2 中第二项, 即核动能项, 可以被忽略, 式中第三项, 即核间排斥势可以视作常量. 任意常数加到算符上产生的效果就是本征值加一常数, 而本征函数不变. 2.2 中剩余项称作电子的 Hamilton 量, 或描述在  $M$  个点电荷产生的势场中运动的  $N$  个电子的 Hamilton 量,

$$\mathcal{H}_{elec} = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \nabla_i^2 - \sum_{i=1}^N \sum_{A=1}^M \frac{Z_A}{r_{iA}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{1}{r_{ij}} \quad (2.10)$$

电子 Hamilton 量的 Schrödinger 方程为

$$\mathcal{H}_{elec} \Phi_{elec} = \mathcal{E}_{elec} \Phi_{elec} \quad (2.11)$$

其解就是电子波函数,

$$\Phi_{elec} = \Phi_{elec}(\{\mathbf{r}\}; \{\mathbf{R}_A\}) \quad (2.12)$$

它描述电子的运动, 并显式依赖与电子坐标, 并以参数的方式依赖于核坐标, 电子能量也参数地依赖于核坐标:

$$\mathcal{E}_{elec} = \mathcal{E}_{elec}(\{\mathbf{R}_A\}) \quad (2.13)$$

“参数地依赖”是指对每一种不同的核构型,  $\Phi_{elec}$  (电子坐标的函数) 的形式都不一样. 核坐标并不显式地出现在  $\Phi_{elec}$  中. 核固定构型下的总能量需包含核排斥能.

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{elec} + \sum_{A=1}^M \sum_{B>A}^M \frac{Z_A Z_B}{R_{AB}} \quad (2.14)$$

式 2.10 到 2.14 就构成了所谓的电子问题, 即本书所关心的.

若电子问题已经得解, 则接下来可用与电子问题同样的假设来求解核运动. 因为电子运动远比核快, 所以一个合理的近似是将 2.2 中的电子坐标换成坐标的平均值 (用电子波函数来取平均). 由此得到在电子的平均势场中运动的核的 Hamiltonian,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{nucl} &= - \sum_{A=1}^M \frac{1}{2M_A} \nabla_A^2 + \left\langle - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \nabla_i^2 - \sum_{i=1}^N \sum_{A=1}^M \frac{Z_A}{r_{iA}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{1}{r_{ij}} \right\rangle \\ &\quad + \sum_{B>A}^M \frac{Z_A Z_B}{R_{AB}} \\ &= - \sum_{A=1}^M \frac{1}{2M_A} \nabla_A^2 + \mathcal{E}_{elec}(\{\mathbf{R}_A\}) + \sum_{B>A}^M \frac{Z_A Z_B}{R_{AB}} \\ &= - \sum_{A=1}^M \frac{1}{2M_A} \nabla_A^2 + \mathcal{E}_{tot}(\{\mathbf{R}_A\}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

总能量  $\mathcal{E}_{tot}(\{\mathbf{R}_A\})$  是核运动的势能面. 势能面函数简例如 2.2 所示. 在 Born-Oppenheimer 近似中, 有电子问题求解得到势能面, 核又在势能面上运动.

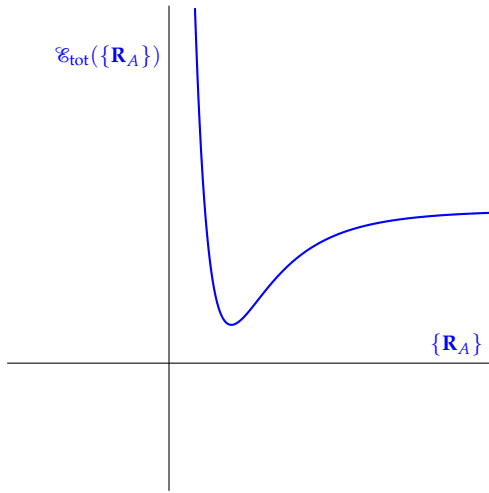


图 2.2: 势能面的图示.

核 Schrödinger 方程

$$\mathcal{H}_{\text{nuc}}\Phi_{\text{elec}} = \mathcal{E}\Phi_{\text{nuc}} \quad (2.16)$$

的解

$$\Phi_{\text{elec}} = \Phi_{\text{elec}}(\{\mathbf{R}_A\}) \quad (2.17)$$

可以描述分子的振动、转动和平动。而  $\mathcal{E}$ , 即对 2.1 中总能量的 Born-Oppenheimer 近似, 包含着电子能量、振动、转动以及平动能量。2.1 中的精确波函数的 Born-Oppenheimer 近似就是

$$\Phi(\{\mathbf{r}_i; \{\mathbf{R}_A\}) = \Phi_{\text{elec}}(\{\mathbf{r}\}; \{\mathbf{R}_A\})\Phi_{\text{elec}}(\{\mathbf{R}_A\}) \quad (2.18)$$

从现在起, 我们仅关心由 2.11 到 2.14 所代表的电子问题, 不把注意力放在振动-转动问题上。以后的表述中将舍弃下标“elec”, 这意味着仅考虑电子 Hamilton 来和电子波函数。在必要和方便的时候, 我们会区分 2.13 所代表的电子能量和 2.14 所代表的总能量 (后者中包括核-核排斥能)。

### 2.1.3 反对称/Pauli 不相容原理

方程 2.10 中的电子 Hamilton 量只取决于电子的空间坐标, 为了完整描述电子, 必须引入自旋。此处采用自旋的非相对论描述, 即引入两个自旋函数  $\alpha(\omega)$  和  $\beta(\omega)$ , 分别代表自旋朝上和朝下。函数变量是  $\omega$ , 但该变量并无明显的意义, 从操作角度而言, 只需要自旋函数正交完备:

$$\int d\omega \alpha^*(\omega)\alpha(\omega) = \int d\omega \beta^*(\omega)\beta(\omega) = 1 \quad (2.19a)$$

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \beta | \beta \rangle = 1 \quad (2.19b)$$

$$\int d\omega \alpha^*(\omega)\beta(\omega) = \int d\omega \beta^*(\omega)\alpha(\omega) = 0 \quad (2.20a)$$



$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = 1 \quad (2.20b)$$

其中的积分号仅是形式上的. 用这种办法引入自旋后, 电子就由三个空间坐标加一个自旋坐标描述. 将这四个坐标写在一起, 用  $\mathbf{x}$  来表示:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{r}, \omega\} \quad (2.21)$$

随之,  $N$  电子波函数的变量就是  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ , 即写作  $\Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ .

由于 Hamilton 算子中并无自旋, 仅仅在波函数中强加自旋无法产生任何后果. 但若对波函数加上一个额外的约束, 事情就比较完美了: **多电子波函数在交换任意两个电子坐标的操作下, 必须是反对称的**:

$$\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_N) = -\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (2.22)$$

这个额外的要求有时叫作**反对称原理**, 它是我们熟悉的 Pauli 不相容原理最常见的一种表述. 这个原理是量子力学的基本假设之一. 波函数不仅要满足 Schrödinger 方程, 也要满足反对称要求, 即式 2.22. 以后我们就会明白, 反对称性可以用 Slater 行列式来保证.

## 2.2 轨道, Slater 行列式, 基函数

本节来学习如何写出用来描述多电子系统波函数, 以及各种命名和约定俗成的习惯. 这里我们仅考虑用单 Slater 行列式或 Slater 行列式的线性组合来刻画多电子波函数. 有时量子化学研究者也用其他特殊的函数形式来刻画一些小体系的波函数, 但大部分情况下还是用 Slater 行列式. 学习多电子波函数之前, 我们先来讨论一个电子的波函数.

### 2.2.1 自旋轨道与空间轨道

**轨道**就是单粒子 (这里是一个电子) 的波函数. 我们关心分子中的电子, 所以将分子中电子的波函数叫作**分子轨道**. 而所谓**空间轨道**  $\psi_i(\mathbf{r})$ , 则是位置矢量  $\mathbf{r}$  的函数, 用来描述电子的空间分布:  $|\psi_i(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$  即在包含  $\mathbf{r}$  的体积微元  $d\mathbf{r}$  中找到电子的概率. 常认为空间分子轨道构成一组正交基

$$\int d\mathbf{r} \psi_i^*(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}) = \delta_{ij} \quad (2.23)$$

若空间轨道集合  $\{\psi_i\}$  是完备的, 则用它可以精确地展开任意函数:

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

其中  $a_i$  是常系数. 绝大多数情况, 这个集合想要完备则其元素必须无限多, 但实际运算时不可能用到完备集, 而是只用其中有限的一部分  $\{\psi_i | i = 1, 2, \dots, K\}$  (共  $K$  个轨道). 这个有限集合只是完备集中特定的一部分, 使用这  $K$  个轨道来展开, 我们就认为这种展开在这个子空间中是“精确”的了.

为完整描述一个电子, 需要指定电子自旋. 描述电子自旋的完备集包括两个相互正交的函数  $\alpha(\omega), \beta(\omega)$ , 代表自旋朝上 ( $\uparrow$ ) 和自旋朝下 ( $\downarrow$ ). 描述自旋和空间两部分的波函数叫作**自旋轨道**  $\chi(\mathbf{x})$ , 其中  $\mathbf{x}$  代表自旋坐标与空间坐标 (式 2.21). 每个空间轨道都可以构造两个自旋轨道——一个对应自旋向上, 一个对应向下, 只需要将空间轨道乘以  $\alpha$  或  $\beta$  即可, 如下式:

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi(\mathbf{r})\alpha\omega \\ \text{or} \\ \psi(\mathbf{r})\beta(\omega) \end{cases} \quad (2.25)$$

给定一由  $K$  个空间轨道组成的集合  $\{\psi_i | i = 1, 2, \dots, K\}$ , 就可以构造  $2K$  个自旋轨道  $\{\chi_i | i = 1, 2, \dots, 2K\}$ :

$$\chi_{2i-1}(\mathbf{x}) = \psi_i(\mathbf{r})\alpha\omega \quad \chi_{2i}(\mathbf{x}) = \psi_i(\mathbf{r})\beta(\omega) \quad \left\} i = 1, 2, \dots, K \quad (2.26)$$

若空间轨道相互正交, 则自旋轨道也相互正交:

$$\int d\mathbf{x} \chi_i^*(\mathbf{x}) \chi_j(\mathbf{x}) = \langle \chi_i | \chi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.27)$$

**练习 2.1** 给定一组  $K$  个正交空间轨道  $\{\psi_i^\alpha(\mathbf{r})\}$  与另一组正交函数  $\{\psi_i^\beta(\mathbf{r})\}$ , 但第一组和第二组之间不正交, 即

$$\int d\mathbf{r} \psi_i^{\alpha*}(\mathbf{r}) \psi_j^\beta(\mathbf{r}) = S_{ij}$$

其中  $\mathbf{S}$  是重叠矩阵. 请证明, 由第一组轨道乘以  $\alpha$  自旋函数生成的自旋轨道, 由第二组轨道乘以  $\beta$  自旋函数生成的自旋轨道, 总共  $2K$  个轨道  $\{\chi_i\}$ :

$$\left. \begin{aligned} \chi_{2i-1}(\mathbf{x}) &= \psi_i^\alpha(\mathbf{r})\alpha\omega \\ \chi_{2i} &= \psi_i^\beta(\mathbf{r})\beta(\omega) \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, K$$

它们之间相互正交.

### 2.2.2 Hartree 积

学习过用自旋轨道描述单电子之后, 现在来考虑电子集合的波函数, 即  $N$  电子波函数. 在考察相互作用系统的精确波函数之前, 先来看一个较简单的情况: 无相互作用电子的集合, 其 Hamilton 量形式如下:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N h(i) \quad (2.28)$$

其中  $h(i)$  是描述电子  $i$  的动能和势能的算符. 若忽略电子间排斥, 则电子哈密顿就具有这种形式. 除此之外, 我们也能将  $h(i)$  视作有效单电子哈密顿量, 即以平均的方式将电子间的排斥纳入.

算符  $h(i)$  有它自己的一组本征函数, 我们将其视作一组自旋轨道  $\{\chi_j\}$ :

$$h(i)\chi_j(\mathbf{x}_i) = \varepsilon_j\chi_j(\mathbf{x}_i) \quad (2.29)$$

现在的问题是, 知道了  $h(i)$  的本征函数, 那  $\mathcal{H}$  的本征函数是什么? 由于  $\mathcal{H}$  是单电子 Hamilton 量之和, 如果将每个电子的自旋轨道乘在一起:

$$\Psi^{\text{HP}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = \chi_i(\mathbf{x}_1)\chi_j(\mathbf{x}_2)\cdots\chi_k(\mathbf{x}_N) \quad (2.30)$$

它就是  $\mathcal{H}$  的一个本征函数:

$$\mathcal{H}\Psi^{\text{HP}} = E\Psi^{\text{HP}} \quad (2.31)$$

本征值是  $E$ ,  $E$  是  $\Psi^{\text{HP}}$  中每个自旋轨道的能量之和:

$$E = \varepsilon_i + \varepsilon_j + \cdots + \varepsilon_k \quad (2.32)$$

我们把这样的多电子波函数叫作 **Hartree 积**, 其中电子 1 用  $\chi_i$  描述. 电子 2 用  $\chi_j$  描述, 如此.

**练习 2.2** 证明 2.30 中的 Hartree 积是  $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N N h(i)$  的本征函数, 本征值是式 2.32.

Hartree 积是独立电子波函数 (或者叫无相关波函数, uncorrelated), 因为

$$|\Psi^{\text{HP}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_N$$

即在体积微元  $d\mathbf{x}_1$  中找到电子 1 的概率, 同时在  $d\mathbf{x}_2$  中找到电子 2 的概率, 等等, 就等于 (按照 2.30 的定义):

$$|\chi(\mathbf{x}_1)| d\mathbf{x}_1 |\chi_j(\mathbf{x}_2)| d\mathbf{x}_2 \cdots |\chi_k(\mathbf{x}_N)| d\mathbf{x}_N$$

即电子 1 在  $d\mathbf{x}_1$  的概率乘以电子 2 在  $d\mathbf{x}_2$  的概率等等等等. 这种情况与扑克牌很类似: 52 张牌中找到红心 A 的概率 (1/52) 等于红心的概率 (1/4) 乘以 A 的概率 (1/13), 因为红心的概率和 A 的概率是不相关的 (独立的). Hartree 积就意味着在空间中一点找到电子 1 的概率与找到电子 2 的概率是独立的. 但实际上, 电子 1 和 2 每时每刻都在通过 Colomb(库伦)作用相互排斥, 电子 1 会尽可能避开电子 2 所在的区域, 所以两个电子之间明显是相互关联着的. 举个相关概率的例子: 2 个热土豆和 2 个冷苹果放在桶内, 随机取一个出来, 取到热的东西的概率是 1/2, 取到土豆的概率是 1/2, 但取到热土豆的概率是 1/2, 不等去前两者之积, 原因是”热”属性和”土豆”属性完全是相互关联着的.

即使假设电子相互独立, Hamilton 量取 2.28 的形式, Hartree 积仍有天然的缺陷: 它将电子 1 放在  $\chi_i$  轨道上, 电子 2 放在  $\chi_j$  轨道上, 把它们很明显地区分开来, 而没有考虑到电子之间不可分辨. 反对称原理不区分全同的电子, 它幽囚电子波函数在交换任意两个电子坐标的操作下必须反对称 (改变正负).

### 2.2.3 Slater 行列式

Hartree 积不满足反对称原理, 但我们可以用如下方式得到反对称的波函数. 考虑一个两电子系统, 自旋轨道分别是  $\chi_i$  和  $\chi_j$ . 若将电子 1 放在  $\chi_i$  上, 电子 2 放在  $\chi_j$  上, 则有

$$\Psi_{12}^{\text{HP}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \chi_i(\mathbf{x}_1) \chi_j(\mathbf{x}_2) \quad (2.33a)$$

另一方面, 若置电子 1 于  $\chi_j$  轨道, 电子 2 于  $\chi_i$  轨道, 则有

$$\Psi_{12}^{\text{HP}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \chi_i(\mathbf{x}_2) \chi_j(\mathbf{x}_1) \quad (2.33b)$$

这两种 Hartree 积都明显地区分电子, 但是如果将这两种 Hartree 积线性组合在一起, 则可以得到满足反对称原理的波函数:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 2^{-1/2} (\chi_i(\mathbf{x}_1) \chi_j(\mathbf{x}_2) - \chi_i(\mathbf{x}_2) \chi_j(\mathbf{x}_1)) \quad (2.34)$$

$2^{1/2}$  是归一化因子. 式中的符号保证了  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  在交换电子 1 和 2 的坐标时是反对称的:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\Psi((\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)) \quad (2.35)$$

从 2.34 出发, 很明显, 当两个电子同时占据相同的自旋轨道时 (即  $i = j$ ), 电子波函数为 0. 由此, 从反对称原理能立马导出 Pauli 不相容原理: 不能有超过一个电子占据一个自旋轨道.

**练习 2.3** 证明 2.34 中的波函数  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  是归一化的

**练习 2.4** 若  $\chi_i$  和  $\chi_j$  是单电子算符  $h$ (见 2.29) 的本征函数, 对应本征值为  $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ . 证明, 方程 2.33ab 中的 Hartree 积和 2.34 中的反对称波函数都是独立电子 Hamilton 量  $\mathcal{H} = h(1) + h(2)$ (见 2.28) 的本征函数, 本征值是  $\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_j$

反对称波函数 (2.34) 可以写成行列式形式:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{vmatrix} \chi_i(\mathbf{x}_1) & \chi_j(\mathbf{x}_1) \\ \chi_i(\mathbf{x}_2) & \chi_j(\mathbf{x}_2) \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

这式子叫作 **Slater 行列式**. 对于  $N$  电子系统, 上式推广为

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = (N!)^{-1/2} \begin{vmatrix} \chi_i(\mathbf{x}_1) & \chi_j(\mathbf{x}_1) & \cdots & \chi_k(\mathbf{x}_1) \\ \chi_i(\mathbf{x}_2) & \chi_j(\mathbf{x}_2) & \cdots & \chi_k(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_i(\mathbf{x}_N) & \chi_j(\mathbf{x}_N) & \cdots & \chi_k(\mathbf{x}_N) \end{vmatrix} \quad (2.37)$$

$(N!)^{-1/2}$  是归一化因子. 这个 Slater 行列式代表  $N$  个电子占据  $N$  个自旋轨道  $(\chi_i, \chi_j, \dots, \chi_k)$ , 而且没有规定哪个电子在哪个轨道中. 注意 Slater 行列式中, 行标是电子: 第一行  $(\mathbf{x}_1)$ , 第一行  $(\mathbf{x}_2)$  等等; 列标是自旋轨道: 第一列  $(\chi_i)$ , 第一列  $(\chi_j)$  等等. 交换两个电子的坐标相当于交换行列式中的两行, 行列式交换两行则变号. 因此 Slater 行列式满足反对称原理. 若两个电子同时占据一个自旋轨道就意味着行列式有两列是一样的, 此时行列式为 0. 所以不能够有多于一个电子占据一个自旋轨道 (Pauli 不相容原理). 为简便计, 引入归一化的 Slater 行列式的简写符号: 隐去归一化因子, 仅写出行列式的对角项:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = |\chi_i(\mathbf{x}_1)\chi_j(\mathbf{x}_2)\cdots\chi_k(\mathbf{x}_N)\rangle \quad (2.38)$$

若我们默认电子坐标标记的顺序是  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ , 那么 2.38 可以继续简写为

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = |\chi_i\chi_j\cdots\chi_k\rangle \quad (2.39)$$

由于交换行列式中的两行要改变符号, 所以上式中自旋轨道的顺序很重要. 在这种简计符号中, Slater 行列式的反对称性表现在:

$$|\cdots\chi_m\cdots\chi_n\cdots\rangle = -|\cdots\chi_n\cdots\chi_m\cdots\rangle \quad (2.40)$$

由自旋轨道出发, 我们可以将 Slater 行列式, 决定到一个符号 (即正负号不确定). 按照如上方式从自旋轨道出发而构建的 Slater 行列式是归一化的. 对于两个  $N$  电子的 Slater 行列式而言, 如果构成它们的 (占据) 自旋轨道不同, 那么这两个 Slater 行列式相互正交.

**练习 2.5** 考虑如下 Slater 行列式:

$$\begin{aligned} |K\rangle &= |\chi_i\chi_j\rangle \\ |L\rangle &= |\chi_k\chi_l\rangle \end{aligned}$$

请证明

$$\langle K | L \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$$

注意, 上式两个 Slater 行列式之间的重叠积分只有如下情况不是 0: 1)  $k = i$  且  $l = j$ , 此时  $\langle K | L \rangle = \langle L | L \rangle$ , 重叠积分为 1. 2)  $k = j$  且  $l = i$ , 此时  $\langle L | L \rangle = \langle \chi_j \chi_i \rangle = -\langle K | K \rangle$ , 重叠积分为 -1.

到此, 我们已经知道 Hartree 积是独立电子波函数, 因为同时在  $\mathbf{dx}_1$  (在  $\mathbf{x}_1$  附近) 找到电子 1 的概率和在  $\mathbf{dx}_2$  内 (在  $\mathbf{x}_2$  附近) 找到电子 2 的概率是二者的乘积. 将 Hartree 积反对称化后, 可以得到 Slater 行列式, 由此引入**交换**作用, 所谓交换作用, 是指交换两个电子的空间+自旋坐标后, 概率密度  $|\Psi|^2$  不变. 须指出, Slater 行列式中包括了**交换相关**, 交换相关意思是两个有平行自旋的电子的运动时相互关联的. 由于自旋反平行的电子之间没有关联, 我们也习惯把 Slater 行列式叫作无相关波函数.

为了理解交换相关的起因, 现在来看看将 Hartree 积反对称化之后, 电子密度受什么影响. 考虑两电子 Slater 行列式, 自旋轨道分别为  $\chi_1, \chi_2$  (即这两个轨道被占据):

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\chi_1(\mathbf{x}_1)\chi_2(\mathbf{x}_2)\rangle \quad (2.41)$$

若两电子自旋相反, 而且占据不同的空间轨道:

$$\chi_1(\mathbf{x}_1) = \psi_1(\mathbf{r}_1)\alpha(\omega_1) \quad (2.42)$$

$$\chi_2(\mathbf{x}_2) = \psi_2(\mathbf{r}_2)\alpha(\omega_2) \quad (2.43)$$

那么由此可以得到 Slater 行列式, 将其展开就得到:

$$|\Psi|^2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \frac{1}{2} |\psi_1(\mathbf{r}_1)\alpha(\omega_1)\psi_2(\mathbf{r}_2)\beta(\omega_2) - \psi_1(\mathbf{r}_2)\alpha(\omega_2)\psi_2(\mathbf{r}_1)\beta(\omega_1)|^2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \quad (2.44)$$

这就是同时在  $\mathbf{dx}_1$  找到电子 1 和在  $\mathbf{dx}_2$  找到电子 2 的概率. 记  $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$  为在  $\mathbf{dr}_1$  (在  $\mathbf{r}_1$  附近) 找到电子 1 和在  $\mathbf{dr}_2$  (在  $\mathbf{r}_2$  附近) 找到电子 2 的概率, 如图 2.3 所示. 这个概率可以如此得到: 将 2.44 对两电子的自旋坐标积分:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 &= \int d\omega_1 d\omega_2 |\Psi|^2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ |\psi_1(\mathbf{r}_1)|^2 |\psi_2(\mathbf{r}_2)|^2 + |\psi_1(\mathbf{r}_2)|^2 |\psi_2(\mathbf{r}_1)|^2 \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

如果我们**预设**电子 1 占据  $\psi_1$ , 电子 2 占据  $\psi_2$ , 那么 2.45 中第一项是在  $\mathbf{dr}_1$  ( $\mathbf{dr}_1$  附近) 找到电子 1 的概率乘以在  $\mathbf{dr}_2$  ( $\mathbf{dr}_2$  附近) 找到电子 2 的概率. 第二项代表电子 1 占据  $\psi_2$  以及电子 2 占据  $\psi_1$ . 由于电子不可分辨, 正确的概率应当是二者的平均, 这正是该式所表达的. 因此, 两个电子的运动之间没有相关. 若  $\psi_1 = \psi_2$ , 这将更加明显:

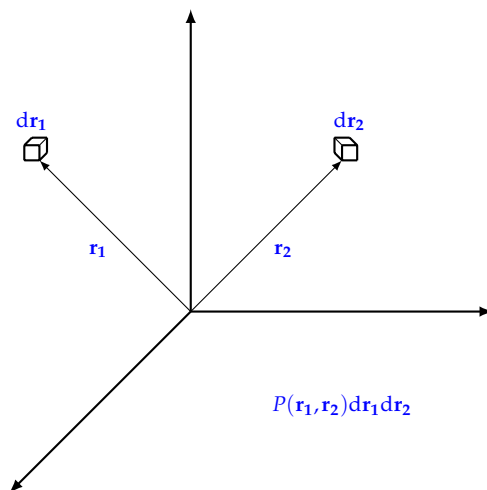
$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |\psi_1(\mathbf{r}_1)|^2 |\psi_1(\mathbf{r}_2)|^2 \quad (2.46)$$

注意  $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  永远不等于 0, 所以总有有限的概率找到两个自旋相反的电子在同一空间点.

若两电子自旋相同 (比如  $\beta$ ), 那么

$$\chi_1(\mathbf{x}_1) = \psi_1(\mathbf{r}_1)\beta(\omega_1) \quad (2.47)$$

$$\chi_2(\mathbf{x}_2) = \psi_2(\mathbf{r}_2)\beta(\omega_2) \quad (2.48)$$

图 2.3: 电子 1 在  $dr_1$  电子 2 在  $dr_2$  的概率

仿照上面的步骤有

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \{ |\psi_1(\mathbf{r}_1)|^2 |\psi_2(\mathbf{r}_2)|^2 + |\psi_1(\mathbf{r}_2)|^2 |\psi_2(\mathbf{r}_1)|^2 - [\psi_1^*(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_1) \psi_2^*(\mathbf{r}_2) \psi_2(\mathbf{r}_2) + \psi_1(\mathbf{r}_1) \psi_2^*(\mathbf{r}_1) \psi_2(\mathbf{r}_1) \psi_1^*(\mathbf{r}_2)] \} \quad (2.49)$$

此式中多出一个交叉项, 因此概率是相关的. 这就是同自旋电子之间的交换相关作用. 注意  $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) = 1$ , 所以两个同自旋电子处在同一点的概率为 0. 我们称电子周围有**费米穴**. 总之, 在单 Slater 行列式语言中, 同自旋电子之间的运动时相关的, 自旋相反的电子是不相关的.

### 2.2.4 Hartree-Fock 近似

自量子力学诞生以来, 量子化学的主要任务就是求出并解释 Schrödinger 方程的近似解. 除了特别简单的体系如  $H_2^+$  外, 量子化学所面对的都是多电子问题. 解决这种问题的核心思想, 当然也是本书的核心, 就是 Hartree-Fock 近似. 这个近似在展开现代量子化学的内容时非常重要. 此外, 很多更精确的方法的第一步就是 HF 近似. 到了学一点 HF 近似的基本思想的时候了! 到了第三章对此会有更具体的阐述.

描述  $N$  电子系统基态最简单的反对称波函数, 是单 Slater 行列式:

$$|\Psi_0\rangle = |\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_N\rangle \quad (2.50)$$

变分原理称, 如上形式的波函数中, 最优的波函数应该给出最低的能量:

$$E_0 = \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle \quad (2.51)$$

$\mathcal{H}$  是全电子 Hamilton 量. 变分中可变动的地方就是??中的自旋轨道. 选择不同的自旋轨道, 求出最小能量, 由此可以导出一个方程:Hartree-Fock 方程, 它决定了最优的自旋轨道. 第三章将会证明 Hartree-Fock 方程是如下的本征值方程:

$$f(i) \chi(\mathbf{x}_i) = \epsilon \chi(\mathbf{x}_i) \quad (2.52)$$

$f(i)$  是一有效单电子算符, 叫 Fock 算符, 其形式为:

$$f(i) = -\frac{1}{2}\nabla_i^2 - \sum_{A=1}^M \frac{Z_A}{r_{iA}} + v^{\text{HF}}(i) \quad (2.53)$$

$v^{\text{HF}}(i)$  是  $i$  电子感受到其他电子对其造成的平均势, 其定义会在第三章给出. Hartree-Fock 近似的精髓在于将复杂的多电子问题转换为单电子问题, 而单电子问题是以平均的方式处理电子之间的排斥.

Hartree-Fock 势  $v^{\text{HF}}(i)$ , 或者叫作  $i$  电子感受到的场, 由其他电子的自旋轨道决定 (即 Fock 算符依赖于它的本征函数). 因此 Hartree-Fock 方程 2.52 是非线性方程, 只能迭代求解. 求解 HF 方程的办法叫作自洽场 (self-consistent-field, SCF) 方法.

SCF 的基本想法比较简单. 首先对自旋轨道作一个初始猜测, 此时就可以算出每个电子感受到的平均场  $v^{\text{HF}}$ , 然后就可以利用这个有效势解方程 2.52, 得到一组新的自旋轨道. 再用新自旋轨道得到新的平均场, 重复这个步骤直到方程自洽 (即直到有效场不再变化, 自旋轨道与 Fock 算符的本征函数一致). Hartree-Fock 本征值问题 2.52 的解是一组正交的 Hartree-Fock 自旋轨道  $\{\chi_k\}$  和一组对应的本征值  $\{\epsilon_k\}$ .  $N$  个有最低能量的自旋轨道称为 **被占自旋轨道** 或 **穴自旋轨道**. 由这  $N$  个轨道生成的 Slater 行列式就是 Hartree-Fock 基态波函数, 也即 Hartree-Fock 单 Slater 行列式框架下体系波函数的最优变分近似. 我们暂且将占据轨道的指标记为  $a, b, c, \dots$  (即  $\chi_a, \chi_b, \chi_c, \dots$ ). 余下的轨道就是 **虚自旋轨道**, 或者叫 **未占据自旋轨道**、**粒子自旋轨道 (particle)**. 暂将虚自旋轨道指标记为  $r, s, t, \dots$  ( $\chi_r, \chi_s, \chi_t, \dots$ ).

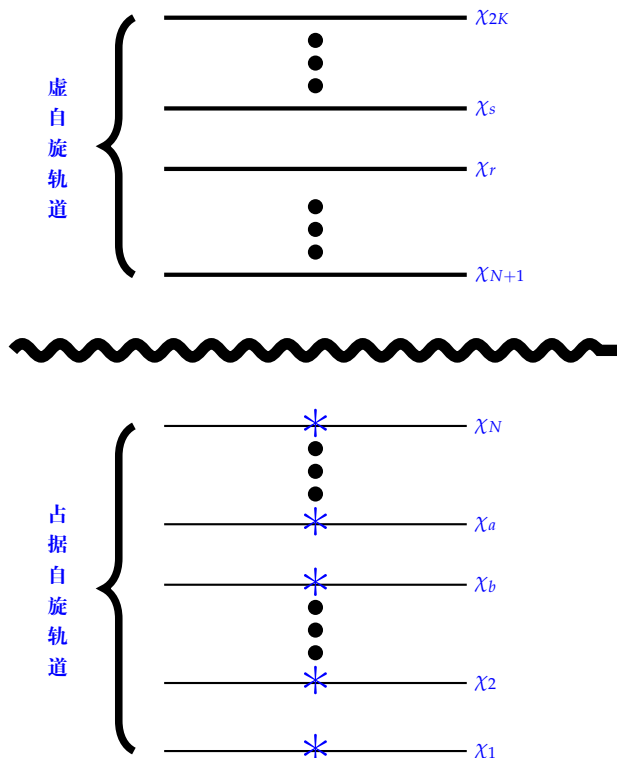
原则上, Hartree-Fock 方程 2.52 有无数个解, 即无数个自旋轨道. 但实际上在求解 Hartree-Fock 方程时, 仅能选用有限组空间基函数  $\{\psi_\mu(\mathbf{r}) | \mu = 1, 2, \dots, K\}$ . 带  $\alpha$  自旋的自旋轨道空间部分可由  $\{\psi_\mu\}$  展开, 带  $\beta$  自旋的自旋轨道也一样. 将两个展开代入本征值问题 2.52 中, 可以得到关于展开系数的矩阵本征值方程. 这些本征值方程 (也就是 Roothan 方程) 将在第三章详细讲解. 此处只要明白包含  $K$  个空间基函数的基组会生成  $2K$  个自旋轨道 (分别带  $\alpha$  自旋和  $\beta$  自旋), 其中有  $N$  个占据自旋轨道  $\{\chi_a\}$ , 余下  $2K - N$  个虚自旋轨道  $\{\chi_r\}$ . 由  $\{\chi_a\}$  构成的单 Slater 行列式就是变分 Hartree-Fock 框架下的基态, 我们用  $\Psi_0$  或  $|\Psi_0\rangle$  来记.  $|\Psi_0\rangle$  的图示如图 2.4. 在该图中,  $2K$  个自旋轨道按能量顺序排列, 而且忽略了可能的简并态. 图中有  $N$  个轨道被电子占据, (一个电子占据一个自旋轨道), 占据轨道由星号标记. 选取的基函数集  $\{\psi_\mu\}$  越大越完全, 展开自旋轨道时的灵活性就更强, 能量期望  $E_0 = \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle$  也就越低. 基组越来越大, Hartree-Fock 能量  $E_0$  也会越来越低, 直到一个极限, 我们称之为 **Hartree-Fock 极限**. 实际上, 任何有限的  $K$  (即基函数数目) 都会产生一个高于 Hartree-Fock 极限的数值.

### 2.2.5 极小基 $\text{H}_2$ 模型

现在来介绍一个简单的模型体系, 此模型贯穿全书, 我们会用它来展示许多量子化学的思想和方法. 它就是熟悉的极小基 MO-LCAO 下的  $\text{H}_2$  分子.

模型中有两个氢原子, 每个氢原子 1 个  $1s$  轨道. 按照通常处理两原子的办法, 分子轨道 (MO) 由两个原子的原子轨道线性组而成 (LCAO). 体系的坐标如图??所示, 第一个原子轨道  $\phi_1$  的中心是原子 1 的坐标  $\mathbf{R}_1$ .  $\phi_1$  在空间中  $\mathbf{r}$  点取值为  $\phi_1(\mathbf{r})$ , 由于  $\phi_1$  取值依赖于距该轨道中心  $\mathbf{R}_1$  的距离, 有时我们也写成  $\phi_1 \equiv \phi_1(\mathbf{r} - \mathbf{R}_1)$ . 第二个原子轨道中心是原子 2d 的坐标  $\mathbf{R}_2$ , 也即  $\phi_2 \equiv \phi_2(\mathbf{r} - \mathbf{R}_2)$ . 氢原子准确的  $1s$  轨道 (若以  $\mathbf{R}$  为中心) 是:

$$\phi(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = (\zeta^3 / \pi)^{1/2} e^{-\zeta|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \quad (2.54)$$



2.4

图 2.4: Hartree-Fock 基态行列式  $|\chi_1\chi_2\cdots\chi_a\chi_b\cdots\chi_N\rangle$ 

$\zeta$  是轨道指数, 本式取 1.0, 该轨道是一个 **Slater 型轨道**, 但本书中多数情况下都用 **Gaussian** 轨道, 因为它在积分时比 Slater 型的要容易. 1s Gaussian 轨道形式如下:

$$\phi(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = (2\alpha/\pi)^{3/4} e^{-\alpha|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^2} \quad (2.55)$$

$\alpha$  是 Gaussian 轨道指数. 此处我们不用关注 1s 原子轨道的具体形式. 不妨认为两个原子轨道  $\phi_1, \phi_2$  都以归一化, 但注意它们并不正交. 轨道之间会有**重叠 (overlap)**, 对应重叠积分为:

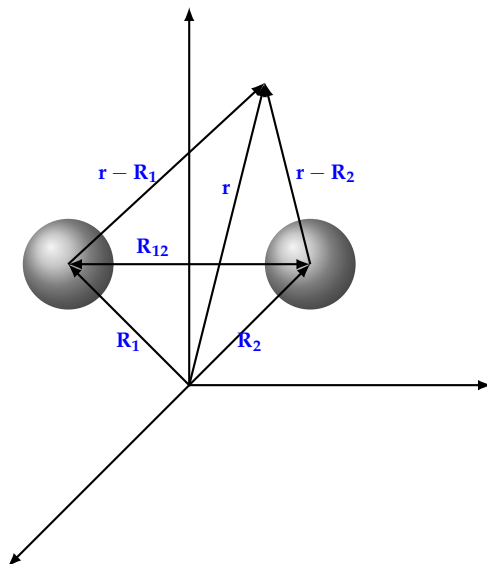
$$S_{12} = \int d\mathbf{r} \phi_1^*(\mathbf{r}) \phi_2(\mathbf{r}) \quad (2.56)$$

重叠积分依赖于距离  $R_{12} = |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|$ ,  $R_{12} = 0$  则  $S_{12} = 1$ ,  $R_{12} = \infty$  那么  $S_{12} = 0$ .

利用两个定域原子轨道  $\phi_1, \phi_2$ , 可以采取线性组合的方式构建两个离域分子轨道. 对称组合生成 *gerade* 宇称的成键分子轨道 (所谓 *gerade* 对称是指, 以两核之间的中点作为反演点, 将分子轨道反演, 轨道保持不变, 即对称):

$$\psi = [2(1 + S_{12})]^{-1/2} (\phi_1 + \phi_2) \quad (2.57)$$



图 2.5: 极小基  $H_2$  的坐标

相反地也可以构建反对称组合, 生成具有 *ungerade* 对称性的反键分子轨道 (也即在中点反演下轨道反对称):

$$\psi_1 = [2(1 - S_{12})]^{-1/2}(\phi_1 - \phi_2) \quad (2.58)$$

**练习 2.6** 请证明  $\psi_1, \psi_2$  构成一组正交基.

以上这个最简单的例子所用的是一个普适的技术: 用已知的空间 (spatial) 基函数将分子轨道展开:

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \sum_{\mu=1}^K C_{\mu i} \phi_{\mu}(\mathbf{r}) \quad (2.59)$$

仅用两个基函数描述  $H_2$  就是所谓的**极小**基组模型. 在这个体系中, 基函数的一个很自然的选择就是两个原子原来的轨道  $\phi_1, \phi_2$ . 两个基函数正确的线性组合方式由对称性决定, 而且不需要解 Hartree-Fock 方程. 2.572.58 中的  $\psi_1, \psi_2$  就是用  $\phi_1, \phi_2$  展开的 Hartree-Fock 空间轨道.

给定两个空间轨道  $\psi_1, \psi_2$ , 可以构成四个自旋轨道:

$$\begin{aligned} \chi_1(\mathbf{x}) &= \psi_1(\mathbf{r})\alpha(\omega) \\ \chi_2(\mathbf{x}) &= \psi_1(\mathbf{r})\beta(\omega) \\ \chi_3(\mathbf{x}) &= \psi_2(\mathbf{r})\alpha(\omega) \\ \chi_4(\mathbf{x}) &= \psi_2(\mathbf{r})\beta(\omega) \end{aligned} \quad (2.60)$$

对应自旋轨道的轨道能量可用 Hartree-Fock 算符得到. 但是无需计算就可以发现,  $\chi_1, \chi_2$  是简并的, 而且有更低能量, 对应成键态.  $\chi_3, \chi_4$  也是简并的, 但能量更高, 对应反键态. 此模型的 Hartree-Fock 基态是单行列式:

$$|\Psi_0\rangle = |\chi_1\chi_2\rangle \quad (2.61)$$

如图 2.6 所示. 有时用自旋轨道空间部分的记号来标记自旋轨道本身, 符号上面有无横线代表

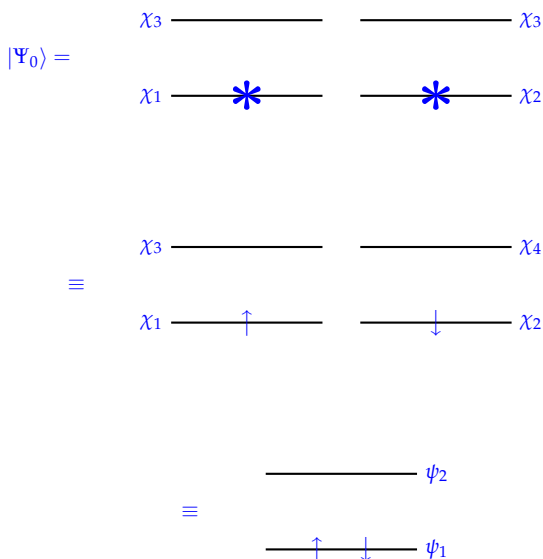


图 2.6: H<sub>2</sub> 的 Hartree-Fock 基态: 3 种表达法

自旋是  $\alpha$  或  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv \psi_1 & \chi_2 &\equiv \bar{\psi}_1 \\ \chi_3 &\equiv \psi_2 & \chi_4 &\equiv \bar{\psi}_2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

用这种记号, Hartree-Fock 基态就写成:

$$|\Psi_0\rangle = |\psi_1\bar{\psi}_1\rangle = |\bar{1}\bar{1}\rangle \quad (2.63)$$

这种符号代表两个电子占据同一个空间轨道  $\psi_1$ , 一个自旋是  $\alpha$  一个是  $\beta$ . 从上下文可以清楚地分辨出  $\psi_1$  是代表空间轨道还是由  $\psi_1$  和  $\alpha$  自旋函数组成的自旋轨道.

### 2.2.6 被激发的 (Slater) 行列式

Hartree-Fock 这种手续生成一组  $2K$  个自旋轨道  $\{\chi_i\}$ . Hartree-Fock 基态:

$$|\Psi_0\rangle = |\chi_1\chi_2\cdots\chi_a\chi_b\cdots\chi_N\rangle \quad (2.64)$$

是单行列式形式下, 对基态的最优近似 (以变分的意义来说). 然而很明显, 用  $2K < N$  个自旋轨道可以构建很多行列式, Hartree-Fock 基态只是其中之一. 从  $2K$  个物品中一次性取出  $N$  个的取法数目为 (即二项式系数):

$$\binom{2K}{N} = \frac{(2K)!}{N!(2K-N)!}$$

这也是  $2K$  个自旋轨道能构成的  $N$  电子单行列式的数目; Hartree-Fock 基态只是其一. 我们可以如此表示这些行列式: 将 Hartree-Fock 基态 2.64 作为参考态, 将其他行列式按照它们与参考态的不同来分类, 也就是: 2.64 中的某个自旋轨道 (或穴)  $\{\chi_a\}$  替换为了哪个虚轨道 (或粒子自旋轨道). 这些其他的行列式可以认为是体系激发态的一个近似. 很快我们可以知道, 由这些行列式和  $\Psi_0$  可以给出对体系基态或激发态更精确的描述.

单重激发态是指在 Hartree-Fock 基态中占据某轨道  $\chi_a$  的电子被提升到了某虚轨道  $\chi_r$  上:

$$|\Psi_a^r\rangle = |\Psi_0\rangle = |\chi_1\chi_2\cdots\chi_r\chi_b\cdots\chi_N\rangle \quad (2.65)$$

见 2.7.

双重激发态 (见 2.8) 是  $\chi_a, \chi_b$  上的电子被激发到  $\chi_r, \chi_s$ :

$$|\Psi_{ab}^{rs}\rangle = |\Psi_0\rangle = |\chi_1\chi_2\cdots\chi_r\chi_s\cdots\chi_N\rangle \quad (2.66)$$

总共  $\binom{2K}{N}$  个行列式都可按照 Hartree-Fock 基态或者单重、二重、三重、四重…… $N$  重激发态来分类. 某种程度上, 行列式的重数越高, 在近似描述体系的真实态时, 其重要性就越低. 虽然激发态行列式描述的不是真实的激发态, 但重要的是, 它们可以作为  $N$  电子基函数来展开精确的  $N$  电子态.

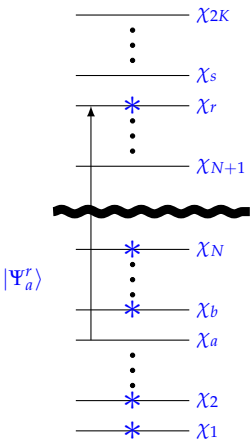


图 2.7: 一个单激发行列式.

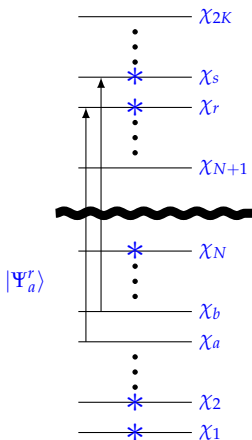


图 2.8: 一个双激发行列式.

### 2.2.7 从精确波函数到组态相互作用

现在来看如何将激发态行列式用作  $N$  电子基函数. 想象有一组完全集  $\{\chi_i(x)\}$ . 任意单变量函数  $\Phi(x_1)$  都可以展开成:

$$\Phi(x_1) = \sum_i a_i \chi_i(x_1) \quad (2.67)$$

$a_i$  是展开系数. 那么, 如何展开两个变量的函数  $\Phi(x_1, x_2)$ ? 如果想象  $x_2$  被固定, 那么可以将  $\Phi(x_1, x_2)$  展成:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_i a_i(x_2) \chi_i(x_1) \quad (2.68)$$

展开系数现在是  $x_2$  的函数. 由于  $a_i(x_2)$  是单变量的, 可用完全集  $\{\chi_j\}$  将其展开:

$$a_i(x_2) = \sum_j b_{ij} \chi_j(x_2) \quad (2.69)$$

代到 2.68 内得到:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_i \sum_j b_{ij} \chi_j(x_2) \chi_i(x_1) \quad (2.70)$$

若要求  $\Phi$  反对称:

$$\Phi(x_1, x_2) = -\Phi(x_2, x_1) \quad (2.71)$$

那么  $b_{ij} = -b_{ji}, b_{ii} = 0$ , 那么

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= \sum_i \sum_{j>i} b_{ij} [\chi_i(x_1) \chi_j(x_2) - \chi_j(x_1) \chi_i(x_2)] \\ &= \sum_{i<j} 2^{1/2} b_{ij} |\chi_i \chi_j\rangle \end{aligned} \quad (2.72)$$

可见, 任意反对称的两变量函数都可以由完全集  $\{\chi_i(x)\}$  构成的所有 (二阶) 行列式展开. 这个结论容易扩展到多变量情形. 所以,  $N$  电子问题中的基态和激发态精确波函数都可以写成由一组完全集  $\{\chi_i(x)\}$  所生成的全部可能的  $N$  电子 Slater 行列式的线性组合.

由于所有可能的行列式都可以借助基态 Hartree-Fock 行列式 (的激发) 来表示, 所以可将体系任意态对应的精确波函数写作:

$$|\Phi\rangle = c_0 |\Psi_0\rangle + \sum_{ra} c_a^r |\Psi_a^r\rangle + \sum_{\substack{a<b \\ r<s}} c_{ab}^{rs} |\Psi_{ab}^{rs}\rangle + \sum_{\substack{a<b<c \\ r<s<t}} c_{abc}^{rst} |\Psi_{abc}^{rst}\rangle + \cdots \quad (2.73)$$

求和号下的  $a < b$  是指对所有  $a$  以及所有大于  $a$  的  $b$  求和 (即对所有的占据轨道对儿进行求和). 同样,  $r < s$  代表对所有虚轨道对儿进行求和. 由此, 展开中就包含了所有双激发组态. 三重和更高激发行列式的情况是一样的. 所以, 无穷集合  $\{|\Psi_i\rangle\} = \{|\Psi_0\rangle, |\Psi_a^r\rangle, |\Psi_{ab}^{rs}\rangle, \cdots\}$  就是完备集, 可用于展开  $N$  电子波函数. 由完备集  $|\Psi_i\rangle$  生成的 Hamilton 算符矩阵, 其本征值就是基态和激发态的准确能量即 (Hamilton 算符矩阵即矩阵元为  $\langle\Psi_i|\mathcal{H}|\Psi_j\rangle$  的矩阵.) 由于每个  $|\Psi_i\rangle$  都对应一种自旋轨道的组态 (组态即生成  $|\Psi_i\rangle$  的那些自旋轨道), 所以这种方法叫作**组态相互作用 configuration interaction (CI)**. CI 在第四章有详细阐述. Hamilton 矩阵的最低本征值, 记为  $\mathcal{E}_0$ , 就是 Born-Oppenheimer 近似下体系精确的非相对论基态能量. 这个能量与 Hartree-Fock 极限能量  $E_0$  的差值就叫作**相关能**:

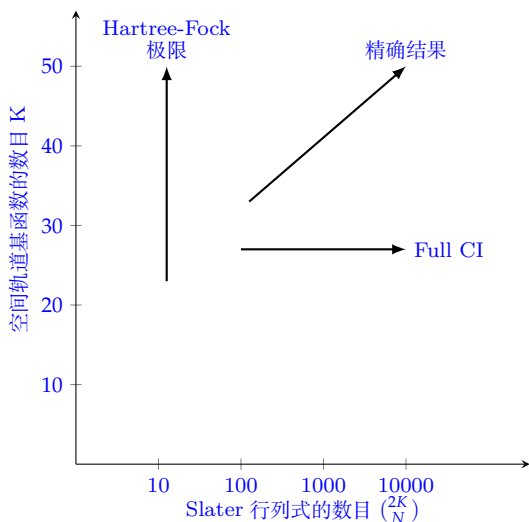
$$E_{\text{corr}} = \mathcal{E}_0 - E_0 \quad (2.74)$$

这个差值不为 0 是因为 Hartree-Fock 近似下, 有相反自旋的电子的运动没有相关.

可惜上面的程序无法实际运用于多电子问题, 即无法如此求得多电子问题所有的解, 这是由于我们无法处理无限基组. 若采用有限个自旋轨道  $\{\chi_i | i = 1, 2, \cdots, 2K\}$ , 那么这些轨道构成的  $\binom{2K}{N}$  个行列式就不是完备的  $N$  电子基. 然而, 若将这些行列式生成的有限维 Hamilton 矩阵对角化, 我们就得到这  $2K$  个自旋轨道张成的单电子子空间内的精确解 (即在这个子空间内是最精确的), 换一种等价的说法, 就是这  $\binom{2K}{N}$  个行列式构成的  $N$  电子子空间内的精确解. 这种程序叫 **full CI**. 即使是较小的体系, 采用极小基, full CI 所需要的行列式数目仍十分巨大. 因此在实际操作中, 需要对 full CI 展开进行截断, 即仅用  $\binom{2K}{N}$  个行列式中的一部分进行计算. 图 2.9 是 Born-Oppenheimer 近似下的非相对论波函数随单电子和  $N$  电子基组数目增长的关系.

**练习 2.7** 苯的极小基包含 72 个自旋轨道. 计算由行列式生成的 full CI 的矩阵的大小. 其中有多少单激发行列式, 多少双激发行列式?

下面以  $\text{H}_2$  极小基模型为例, 阐述以上操作的核心.



之前提到 (??) 该模型有四 ( $2K=4$ ) 个自旋轨道  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ .  $N=2$ , 那么可以构造  $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$  个不重复的行列式. Hartree-Fock 基态行列式是:

$$|\Psi_0\rangle = |\chi_1\chi_2\rangle = |\psi_1\bar{\psi}_1\rangle = |1\bar{1}\rangle \quad \begin{array}{c} u \text{ --- } 2 \\ g \text{ --- } \uparrow\downarrow \text{ --- } 1 \end{array} \quad (2.75)$$

单激发行列式为:

$$|\Psi_1^2\rangle = |2\bar{1}\rangle \quad \begin{array}{c} u \text{ --- } \uparrow \text{ --- } 2 \\ g \text{ --- } \downarrow \text{ --- } 1 \end{array} \quad (2.76a)$$

$$|\Psi_1^{\bar{2}}\rangle = |\bar{2}1\rangle \quad \begin{array}{c} u \text{ --- } \downarrow \text{ --- } 2 \\ g \text{ --- } \downarrow \text{ --- } 1 \end{array} \quad (2.76b)$$

$$|\Psi_1^2\rangle = |12\rangle \quad \begin{array}{c} u \text{ --- } \uparrow \text{ --- } 2 \\ g \text{ --- } \uparrow \text{ --- } 1 \end{array} \quad (2.76c)$$

$$|\Psi_1^{\bar{2}}\rangle = |\bar{1}2\rangle \quad \begin{array}{c} u \text{ --- } \downarrow \text{ --- } 2 \\ g \text{ --- } \uparrow \text{ --- } 1 \end{array} \quad (2.76d)$$

双激发行列式只有一个:

$$|\Psi_{11}^{2\bar{2}}\rangle = |2\bar{2}\rangle = |\chi_3\chi_4\rangle = |\Psi_{12}^{34}\rangle \quad \begin{array}{c} u \text{ --- } \uparrow\downarrow \text{ --- } 2 \\ g \text{ --- } \text{ --- } 1 \end{array} \quad (2.77)$$

局限在极小基组张成的空间内, 精确波函数就是这六个行列式的线性组合. Hartree-Fock 基态中两个电子都在 gerade 轨道上, 所以此态有 g 对称性 (正乘得正). 双激发行列式中两个电子在 ungerade 轨道上, 此态对称性也为 g (负乘负得正). 剩余的单激发行列式中电子一个

在 gerade 轨道一个在 ungerade 轨道, 因此这些态对称性都是 u(正乘负得负). 极小基  $H_2$  的精确波函数  $|\Phi_0\rangle$  的对称性与 Hartree-Fock 近似下的基态一样, 都有 g 对称性. 因此, 只有带 g 对称性的行列式会出现在  $|\Phi_0\rangle$  的展开中, 即

$$|\Phi_0\rangle = c_0 |\Psi_0\rangle + c_{11}^{22} |\Psi_{11}^{22}\rangle = c_0 |\Psi_0\rangle + c_{12}^{34} |\Psi_{12}^{34}\rangle \quad (2.78)$$

确定了上述展开式中的系数, 也就确定了精确波函数  $|\Phi_0\rangle$  和精确能量  $\langle \Phi_0 | \mathcal{H} | \Phi_0 \rangle$ . 为此, 我们需将全组态相互作用 (full CI) 矩阵对角化, 也即将以  $|\Phi_0\rangle$  和  $|\Phi_{11}^{22}\rangle$  为基底的  $2 \times 1$  Hamiltonian 矩阵对角化:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \langle \Phi_0 | \mathcal{H} | \Phi_0 \rangle & \langle \Phi_0 | \mathcal{H} | \Phi_{11}^{22} \rangle \\ \langle \Phi_{11}^{22} | \mathcal{H} | \Phi_0 \rangle & \langle \Phi_{11}^{22} | \mathcal{H} | \Phi_{11}^{22} \rangle \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

问题到此没有结束, 因为我们还不知道如何求出行列式之间的哈密顿矩阵元, 这在其他量子化学方法中也是常见的问题. 我们下节进行介绍.

### 2.3 算符及其矩阵元

本节来讲如何求得某算符在正交归一轨道构成的行列式之间的矩阵元. 今有某算子  $\mathcal{O}$  与两个  $N$  电子行列式  $|K\rangle, |L\rangle$ , 如何求得  $\langle K | \mathcal{O} | L \rangle$ ? 所谓求矩阵元, 指的是将这个积分化为仅包含自旋轨道  $\chi_i$  的积分 ( $\chi_i$  即  $|K\rangle, |L\rangle$  中的轨道), 然后再约化为仅包含空间轨道  $\psi_i$  的积分. 我们将以极小基  $H_2$  为例展示该过程, 然后给出求这种矩阵元的一般规则.

#### 2.3.1 极小基 $H_2$ 的矩阵元

我们先来计算极小基  $H_2$  模型的 full CI 矩阵元 (方程 2.79). 该模型的精确基态是 Hartree-Fock 基态  $|\Phi_0\rangle = |\chi_1\chi_2\rangle = |1\bar{1}\rangle$  和双激发态  $|\Phi_{12}^{34}\rangle = |\chi_3\chi_4\rangle = |\Phi_{11}^{22}\rangle = |2\bar{2}\rangle$  的线性组合, 我们要做的是求出对角元  $\langle \Phi_0 | \mathcal{H} | \Phi_0 \rangle, \langle \Phi_{11}^{22} | \mathcal{H} | \Phi_{11}^{22} \rangle$  (即 Hartree-Fock 基态和双激发态的能量) 以及非对角元  $\langle \Phi_0 | \mathcal{H} | \Phi_{11}^{22} \rangle, \langle \Phi_{11}^{22} | \mathcal{H} | \Phi_0 \rangle$ .

双电子体系的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left( -\frac{1}{2} \nabla_1^2 - \sum_A \frac{Z_A}{r_{1A}} \right) + \left( -\frac{1}{2} \nabla_2^2 - \sum_A \frac{Z_A}{r_{2A}} \right) + \frac{1}{r_{12}} \\ &= h(1) + h(2) + \frac{1}{r_{12}} \end{aligned} \quad (2.80)$$

其中  $h(1)$  是电子 1 的”核哈密顿量”, 代表电子在核的势场中的动能和势能, 此即”核哈密顿量”的由来. 为了方便, 将总哈密顿量分成单电子和双电子部分:

$$\mathcal{O}_1 = h(1) + h(2) \quad (2.81)$$

$$\mathcal{O}_2 = r_{12}^{-1} \quad (2.82)$$

先来考虑矩阵元  $\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_1 | \Psi_0 \rangle$ , 由??可知它是两项之和. 第一项为

$$\langle \Psi_0 | h(1) | \Psi_0 \rangle = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \left[ 2^{-1/2} (\chi_1(\mathbf{x}_1)\chi_2(\mathbf{x}_2) - \chi_2(\mathbf{x}_1)\chi_1(\mathbf{x}_2)) \right]^*$$

$$\begin{aligned}
& \times h(\mathbf{r}_1) \left[ 2^{-1/2} (\chi_1(\mathbf{x}_1) \chi_2(\mathbf{x}_2) - \chi_2(\mathbf{x}_1) \chi_1(\mathbf{x}_2)) \right] \\
& = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \{ \chi_1^*(\mathbf{x}) \chi_2^*(\mathbf{x}_2) h(\mathbf{r}_1) \chi_1(\mathbf{x}_1) \chi_2(\mathbf{x}_2) + \chi_2^*(\mathbf{x}_1) \chi_1^*(\mathbf{x}_2) h(\mathbf{r}_1) \chi_2(\mathbf{x}_1) \chi_1(\mathbf{x}_2) \\
& \quad - \chi_1^*(\mathbf{x}_1) \chi_2^*(\mathbf{x}_2) h(\mathbf{r}_1) \chi_2(\mathbf{x}_1) \chi_1(\mathbf{x}_2) + \chi_2^*(\mathbf{x}_1) \chi_1^*(\mathbf{x}_2) h(\mathbf{r}_1) \chi_1(\mathbf{x}_1) \chi_2(\mathbf{x}_2) \} \\
& \quad (2.83)
\end{aligned}$$

上式的四项中, 对  $\mathbf{x}_2$  的积分不是 1(前两项) 就是 0(后两项), 这是由于自旋轨道的正一性. 因此有

$$\langle \Psi_0 | h(1) | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 \chi_1^*(\mathbf{x}_1) h(\mathbf{r}_1) \chi_1(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 \chi_2^*(\mathbf{x}_1) h(\mathbf{r}_1) \chi_2(\mathbf{x}_1) \quad (2.84)$$

以同样的手续, 可以求得  $\langle \Psi_0 | h(2) | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | h(1) | \Psi_0 \rangle$ , 那么

$$\langle \Psi_0 | h(1) | \Psi_0 \rangle = \int d\mathbf{x}_1 \chi_1^*(\mathbf{x}_1) h(\mathbf{r}_1) \chi_1(\mathbf{x}_1) + \int d\mathbf{x}_1 \chi_2^*(\mathbf{x}_1) h(\mathbf{r}_1) \chi_2(\mathbf{x}_1) \quad (2.85)$$

上式中的积分叫作**单电子积分**, 也即, 积分都是对单个电子的坐标作的. 积分中的傀标习惯上都选成电子 1 的坐标. 我们引入如下记号来表示包含自旋轨道的单电子积分:

$$\langle i | h | j \rangle = \langle \chi_i | h | \chi_j \rangle = \int d\mathbf{x}_1 \chi_i^*(\mathbf{x}_1) h(\mathbf{r}_1) \chi_j(\mathbf{x}_1) \quad (2.86)$$

那么有

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O} | \Psi_0 \rangle = \langle 1 | h | 1 \rangle + \langle 2 | h | 2 \rangle \quad (2.87)$$

### 练习 2.8 请证明

$$\langle \Psi_{12}^{34} | \mathcal{O} | \Psi_{12}^{34} \rangle = \langle 3 | h | 3 \rangle + \langle 4 | h | 4 \rangle$$

以及

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O} | \Psi_{12}^{34} \rangle = \langle \Psi_{12}^{34} | \mathcal{O}_1 | \Psi_0 \rangle = 0$$

现来计算  $\mathcal{O}_2$  的矩阵元:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_2 | \Psi_0 \rangle & = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 [2^{-1/2} (\chi_1(\mathbf{x}_1) \chi_2(\mathbf{x}_2) - \chi_2(\mathbf{x}_1) \chi_1(\mathbf{x}_2))]^* \\
& \quad \times r_{12}^{-1} [2^{-1/2} (\chi_1(\mathbf{x}_1) \chi_2(\mathbf{x}_2) - \chi_2(\mathbf{x}_1) \chi_1(\mathbf{x}_2))] \\
& = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \{ \chi_1^*(\mathbf{x}_1) \chi_2^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} \chi_1(\mathbf{x}_1) \chi_2(\mathbf{x}_2) + \chi_2^*(\mathbf{x}_1) \chi_1^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} \chi_2(\mathbf{x}_1) \chi_1(\mathbf{x}_2) \\
& \quad - \chi_1^*(\mathbf{x}_1) \chi_2^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} \chi_2(\mathbf{x}_1) \chi_1(\mathbf{x}_2) + \chi_2^*(\mathbf{x}_1) \chi_1^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} \chi_1(\mathbf{x}_1) \chi_2(\mathbf{x}_2) \} \\
& \quad (2.88)
\end{aligned}$$

由于  $r_{12} = r_{21}$ , 上式中第二个积分中的傀标 (即积分变量) 可以交换, 所以该项与第一项相等. 以同样的理由, 可知第三项和第四项也相等. 因此有

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_2 | \Psi_0 \rangle = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_1^*(\mathbf{x}_1) \chi_2^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} \chi_1(\mathbf{x}_1) \chi_2(\mathbf{x}_2)$$



$$- \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_1^*(\mathbf{x}_1) \chi_2^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} \chi_2(\mathbf{x}_1) \chi_1(\mathbf{x}_2) \quad (2.89)$$

上面的积分就是**双电子积分**之一例，之所以叫双电子，是因为积分变量包括电子 1 和 2 的空间坐标以及两个自旋坐标，共八个变量。习惯上，常将所有双电子积分中的傀标都写成电子 1 和 2 的坐标。现引入记号来表示含自旋轨道的双电子积分：

$$\langle ij | kl \rangle = \langle \chi_i \chi_j | \chi_k \chi_l \rangle = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_i^*(\mathbf{x}_1) \chi_j^*(\mathbf{x}_1) r_{12}^{-1} \chi_k(\mathbf{x}_1) \chi_l(\mathbf{x}_2) \quad (2.90)$$

那么就有

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O} | \Psi_0 \rangle = \langle 12 | 12 \rangle - \langle 12 | 21 \rangle \quad (2.91)$$

Hartree-Fock 基态能量就成为

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle &= \langle \Psi_0 | \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle 1 | h | 1 \rangle + \langle 2 | h | 2 \rangle + \langle 12 | 12 \rangle - \langle 12 | 21 \rangle \end{aligned} \quad (2.92)$$

**练习 2.9** 用刚才介绍的方式写出极小基  $H_2$  的 full CI 矩阵：

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \langle 1 | h | 1 \rangle + \langle 2 | h | 2 \rangle + \langle 12 | 12 \rangle - \langle 12 | 21 \rangle & \langle 1 | 2 | 34 \rangle - \langle 12 | 43 \rangle \\ \langle 34 | 12 \rangle - \langle 34 | 21 \rangle & \langle 3 | h | 3 \rangle + \langle 4 | h | 4 \rangle + \langle 34 | 34 \rangle - \langle 34 | 43 \rangle \end{pmatrix}$$

并证明其厄密性。

### 2.3.2 单、双电子积分的记法

在推广上面的结果以及给出  $N$  电子行列式的矩阵元之前，先来总结一下此书中所用的几种不同的单、双电子积分的记号。关于自旋轨道的双电子积分已在??中提过，即：

$$\langle ij | kl \rangle = \langle \chi_i \chi_j | \chi_k \chi_l \rangle = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_i^*(\mathbf{x}_1) \chi_j^*(\mathbf{x}_1) r_{12}^{-1} \chi_k(\mathbf{x}_1) \chi_l(\mathbf{x}_2) \quad (2.93)$$

这种记法常叫作物理学家的记号。注意自旋轨道的复共轭并排出现在积分的左边，并且电子 1 的空间自旋坐标先出现。从以上定义可以知道：

$$\langle ij | kl \rangle = \langle ji | lk \rangle \quad (2.94)$$

以及

$$\langle ij | kl \rangle = \langle kl | ij \rangle^* \quad (2.95)$$

由于双电子积分经常以如下的组合形式出现，在此引入一个特别的记号来表示**反对称**双电子积分：

$$\begin{aligned} \langle ij || kl \rangle &= \langle ij | kl \rangle - \langle ij | lk \rangle \\ &= \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_2 \chi_i^*(\mathbf{x}_1) \chi_j^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \chi_k(\mathbf{x}_1) \chi_l(\mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (2.96)$$

其中  $\mathcal{P}_{12}$  是一个算子，它的效果是交换电子 1 和 2 的坐标。注意

$$\langle ij || kk \rangle = 0 \quad (2.97)$$

但略有遗憾的是，还存在另一套自旋轨道双电子积分的记号，而且还被广泛使用，尤其是在关于 Hartree-Fock 理论的文献中。这套记号常称作化学家的记号，写作：

$$[ij|kl] = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_i^*(\mathbf{x}_1) \chi_j(\mathbf{x}_1) r_{12}^{-1} \chi_k^*(\mathbf{x}_2) \chi_l(\mathbf{x}_2) \quad (2.98)$$

可以看到在这个记法中，电子 1 坐标对应的两个自旋轨道并排出现在左边，并且复共轭的函数排在第一个。交换积分中的傀标，可以得到：

$$[ij|kl] = [kl|ij] \quad (2.99a)$$

此外，若自旋轨道都是实函数，这正是大多数分子的 Hartree-Fock 计算中的情况，就有如下等式：

$$[ij|kl] = [ji|kl] = [ij|lk] = [ji|lk] \quad (2.99b)$$

**表 2.2: 关于自旋轨道 ( $\chi$ ) 以及关于空间轨道  $\psi$  的单、双电子积分**

自旋轨道
$[i h j] = \langle i h j \rangle = \int d\mathbf{x}_1 \chi_i^*(\mathbf{x}_1) h(\mathbf{r}_1) \chi_j(\mathbf{x}_1)$ $\langle ij kl \rangle = \langle \chi_i \chi_j   \chi_k \chi_l \rangle = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_i^*(\mathbf{x}_1) \chi_j^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} \chi_k(\mathbf{x}_1) \chi_l(\mathbf{x}_2) = [ik jl]$ $[ij kl] = [\chi_i \chi_j   \chi_k \chi_l] = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_i^*(\mathbf{x}_1) \chi_j(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} \chi_k^*(\mathbf{x}_1) \chi_l(\mathbf{x}_2) = \langle ik jl \rangle$ $\langle ij  kl \rangle = \langle ij kl \rangle - \langle ij lk \rangle = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_i^*(\mathbf{x}_1) \chi_j^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \chi_k(\mathbf{x}_1) \chi_l(\mathbf{x}_2)$
空间轨道
$(i h j) = h_{ij} = (\psi_i h \psi_j) = \int d\mathbf{r}_1 \psi_i^*(\mathbf{r}_1) h(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_1)$ $(ij kl) = (\psi_i \psi_j   \psi_k \psi_l) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_i^*(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) r_{12}^{-1} \psi_k^*(\mathbf{r}_2) \psi_l(\mathbf{r}_2)$ $J_{ij} = (ii jj)$ 库伦积分 $K_{ij} = (ij ji)$ 交换积分

对于自旋轨道的单电子积分来说，化学家和物理学家的记号完全一样：

$$[i|h|j] = \langle i|h|j \rangle = \int d\mathbf{x}_1 \chi_i^*(\mathbf{x}_1) h(\mathbf{r}_1) \chi_j(\mathbf{x}_1) \quad (2.100)$$

表 2.2 总结了本书所涉及的所有单、双电子积分。以后在考察如何将自旋轨道的积分转化为空间轨道的积分时，会介绍一种新的符号来表示对空间轨道的积分，为完整计，上表也包含了这些记号。

### 2.3.3 矩阵元的一般规则

我们已经看到，求两电子 Slater 行列式之间的矩阵元非常简单。 $N$  电子行列式比这要复杂。现在我们介绍一套系统地推求矩阵元的规则，其推导留在下一节再说，如果读者愿意，跳过推导也没问题。

量子化学中有两类算符。第一类是单电子算符之和

$$\mathcal{O}_1 = \sum_{i=1}^N h(i) \quad (2.101)$$

其中  $h(i)$  是仅关于第  $i$  个电子的算符，这种算符代表仅依赖于本电子的位置或动量的动力学变量，而不依赖于其他电子的位置或动量。比如动能算符，电子与核吸引之间势的算符，偶极矩算符等等。第二类算符是两电子算符之和：

$$\mathcal{O}_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N v(i, j) = \sum_{i<j}^N v(i, j) \quad (2.102)$$

其中  $v(i, j)$  同时依赖于  $i$  电子和  $j$  电子的位置（或动量）。2.102 中的求和遍及所有不同的电子对。两电子间的库伦势为：

$$v(i, j) = r_{ij}^{-1} \quad (2.103)$$

这是一个两电子算符。

求  $|K\rangle$  与  $|L\rangle$  之间的矩阵元  $\langle K | \mathcal{O} | L \rangle$  的规则视  $\mathcal{O}$  为单电子算符 ( $\mathcal{O}_1$ ) 之和还是双电子算符 ( $\mathcal{O}_2$ ) 之和而不同。此外， $\langle K | \mathcal{O} | L \rangle$  的值还视  $|K\rangle$  和  $|L\rangle$  的差异程度而不同。我们分三种情况来说：首先，若两个行列式完全相同，即矩阵元是一对角元  $\langle K | \mathcal{O} | K \rangle$ ，此时将行列式记作

$$|K\rangle = |\cdots \chi_m \chi_n \cdots\rangle \quad (2.104)$$

第二，两个行列式只差一个自旋轨道， $|K\rangle$  中的  $\chi_m$  在  $|L\rangle$  中变成  $\chi_p$ ，其余都一样：

$$|K\rangle = |\cdots \chi_p \chi_n \cdots\rangle \quad (2.105)$$

第三，两个行列式中有两个自旋轨道不同， $|K\rangle$  中的  $\chi_m, \chi_n$  在  $|L\rangle$  中变成  $\chi_p, \chi_q$ ，其余都一样：

$$|K\rangle = |\cdots \chi_p \chi_q \cdots\rangle \quad (2.106)$$

此时矩阵元为 0，不同的自旋轨道超过三个以上，矩阵元同样也是 0。

表 2.3、2.4 总结了这三种情况下的规则。注意，两个行列式的差异越大，矩阵元的形式就越简单，即其中的项数越少。单电子矩阵元在两个行列式相差两个及以上的自旋轨道时为 0，双电子矩阵元在行列式相差三个及以上自旋轨道时为 0。在表中， $m, n$  为  $|K\rangle$  中的占据自旋轨道，对  $m$  求和就代表对行列式中  $N$  个（占据）自旋轨道求和。

为更好的应用这些规则，首先两个行列式必须写成有最大相似度的形式。举个例子，比如要求  $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$  之间的某算符的矩阵元其中

$$|\Psi_1\rangle = |abcd\rangle$$

表 2.3: 单电子算符在行列式间的矩阵元 (关于自旋轨道)

---

$\mathcal{O}_1 = \sum_{i=1}^N h(i)$	
<hr/>	
Case 1: $ K\rangle =  \cdots mn\cdot\rangle$	
$\langle K   \mathcal{O}_1   K \rangle = \sum_m^N [m h m] = \sum_m^N \langle m h m\rangle$	
Case 2: $ K\rangle =  \cdots mn\cdot\rangle$ $ L\rangle =  \cdots pn\cdot\rangle$	
$\langle K   \mathcal{O}_1   L \rangle = [m h p] = \langle m h p\rangle$	
Case 3: $ K\rangle =  \cdots mn\cdot\rangle$ $ L\rangle =  \cdots pq\cdot\rangle$	
$\langle K   \mathcal{O}_1   L \rangle = 0$	

---

$$|\Psi_2\rangle = |crds\rangle$$

乍一看这两个行列式的四列好像完全不同，但如果将  $|\Psi_2\rangle$  中的列进行交换并注意变号，就得到：

$$|\Psi_2\rangle = |crds\rangle = -|crsd\rangle = |srcd\rangle$$

现在两个行列式的相似度最大，只在两列上不一样。现在使用情况三的规则可以，有如下对应：

$$\begin{array}{ll} |K\rangle = |\Psi_1\rangle & |L\rangle = |\Psi_2\rangle \\ m \equiv a & p \equiv s \\ n \equiv b & q \equiv r \end{array}$$

因此有  $\langle \Psi_1 | \mathcal{O}_1 | \Psi_2 \rangle = 0$  以及  $\langle \Psi_1 | \mathcal{O}_2 | \Psi_2 \rangle$ 。

通过表 2.32.4 可以快速写出单个行列式  $|K\rangle$  的能量：

$$\langle K | \mathcal{H} | K \rangle = \langle K | \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 | K \rangle = \sum_m^N \langle m|h|m\rangle + \frac{1}{2} \sum_m^N \sum_n^N \langle mn||mn\rangle \quad (2.107)$$

其中

$$h(i) = -\frac{1}{2} \nabla_i^2 - \sum_A \frac{Z_A}{r_{iA}} \quad (2.108)$$

2.107 中的求和是对  $|K\rangle$  中的占据自旋轨道进行的。由于 (见??)

$$\langle mm||mm\rangle = \langle nn||nn\rangle = 0 \quad (2.109)$$

以及

$$\langle mn||mn\rangle = \langle nm||nm\rangle \quad (2.110)$$

表 2.4: 双电子算符在行列式间的矩阵元 (关于自旋轨道)

---

	$\mathcal{O}_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N r_{ij}^{-1}$
<hr/>	
Case 1: $ K\rangle =  \cdots mn\rangle$	
	$\langle K   \mathcal{O}_2   K \rangle = \frac{1}{2} \sum_m^N \sum_n^N [mm nn] - [mn nm] = \frac{1}{2} \sum_m^N \sum_n^N \langle mn    mn \rangle$
Case 2: $ K\rangle =  \cdots mn\rangle$ $ L\rangle =  \cdots pn\rangle$	
	$\langle K   \mathcal{O}_2   L \rangle = \sum_n^N [mp nn] - [mn np] = \sum_n^N \langle mn    pn \rangle$
Case 3: $ K\rangle =  \cdots mn\rangle$ $ L\rangle =  \cdots pq\rangle$	
	$\langle K   \mathcal{O}_2   L \rangle = [mp nq] - [nq np] = \langle mn    pq \rangle$

---

2.107 可以写成:

$$\langle K | \mathcal{H} | K \rangle = \sum_m^N \langle m | h | m \rangle + \frac{1}{2} \sum_m^N \sum_{n>m}^N \langle mn || mn \rangle \quad (2.111)$$

$$= \sum_m^N [m|h|m] + \sum_m^N \sum_{n>m}^N [mm|nn] - [mn|nm] \quad (2.112)$$

反对称双电子积分的求和遍及  $|K\rangle$  中所有不同的占据自旋轨道对儿  $\chi_m, \chi_n$ . 这个事实可以帮助我们记忆如何把单个行列式对应的能量用关于自旋轨道的单、双电子积分表示出来: 每个占据的自旋轨道  $\chi_i$  各在总能中贡献一个  $\langle i|h|i \rangle$  项, 并且每一对占据自旋轨道  $\chi_i, \chi_j$  都贡献一个  $\langle ij||ij \rangle$  项. 因此, 可将  $N$  电子体系的总能 (在单 Slater 行列式描述下) 视作“单电子能量”(即在  $\chi_i$  轨道上电子所对应的  $\langle i|h|i \rangle$ ) 之和, 再加上每对电子之间的“相互作用能”(  $\chi_i, \chi_j$  上的电子对应着  $\langle ij||ij \rangle$ ) 之和. 在使用这种语言的时候, 要记住这仅是为方便记忆. 物理上, 两电子间的相互作用通过库伦项来体现, 而非反对称的双电子积分.

---

**练习 2.10** 从方程 (2.107) 推出 (2.110)

---

**练习 2.11** 若  $|K\rangle = |\chi_1 \chi_2 \chi_3\rangle$ , 证明

$$\langle K | \mathcal{H} | K \rangle = \langle 1|h|1 \rangle + \langle 2|h|2 \rangle + \langle 3|h|3 \rangle + \langle 12||12 \rangle + \langle 13||13 \rangle + \langle 23||23 \rangle$$


---

本书中常要用到 Hartree-Fock 基态的矩阵元. 为方便计, 我们将表 2.3 和 2.4 中的规则重写了一遍, 并将  $a, b$  等同于  $m, n$  (占据轨道),  $r, s$  等同于  $p, q$  (未占轨道). 表 2.5 和 2.6 列出了 Hartree-Fock 基态的矩阵元 (情形 1) 以及其与单激发行列式的矩阵元 (情形 2), 以及与双激发行列式的矩阵元 (情形 3).

利用这些表, 可以很快写出 Hartree-Fock 基态的能量 (以化学家的记号):

$$E_0 = \langle \Phi_0 | \mathcal{H} | \Phi_0 \rangle = \sum_a^N [a|h|a] + \frac{1}{2} \sum_a^N \sum_b^N [aa|bb] - [ab|ba] \quad (2.113)$$

表 2.5: Hartree-Fock 基态下单电子算符的矩阵元

	$\mathcal{O}_1 = \sum_{i=1}^N h(i)$
Case 1:	$\langle \Psi_0   \mathcal{O}_1   \Psi_0 \rangle = \sum_m^N [a h a] = \sum_m^N \langle a h a \rangle$
Case 2:	$\langle \Psi_0   \mathcal{O}_1   \Psi_a^r \rangle = [a h r] = \langle a h r \rangle$
Case 3:	$\langle \Psi_0   \mathcal{O}_1   \Psi_{ab}^{rs} \rangle = 0$

表 2.6: Hartree-Fock 基态下双电子算符的矩阵元

	$\mathcal{O}_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N r_{ij}^{-1}$
Case 1:	$\langle \Psi_0   \mathcal{O}_2   \Psi_0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_m^N \sum_n^N [aa bb] - [ab ba] = \frac{1}{2} \sum_m^N \sum_n^N \langle ab  ab \rangle$
Case 2:	$\langle \Psi_0   \mathcal{O}_2   \Psi_a^r \rangle = \sum_n^N [ar bb] - [ab br] = \sum_n^N \langle ab  rb \rangle$
Case 3:	$\langle \Psi_0   \mathcal{O}_2   \Psi_{ab}^{rs} \rangle = [ar bs] - [as br] = \langle ab  rs \rangle$

或以物理学家记号:

$$E_0 = \sum_a^N \langle a|h|a \rangle + \frac{1}{2} \sum_a^N \sum_b^N \langle ab||ab \rangle \quad (2.114)$$

如前所述, (2.112) 可以重写成:

$$E_0 = \sum_a^N \langle a|h|a \rangle + \sum_a^N \sum_{b>a}^N \langle ab||ab \rangle \quad (2.115)$$

在  $H_2$  极小基下,  $|\Phi_0\rangle = |\chi_1\chi_2\rangle$ , 那么由 (2.113) 可得

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle 1|h|1 \rangle + \langle 2|h|2 \rangle + \langle 12||12 \rangle \\ &= \langle 1|h|1 \rangle + \langle 2|h|2 \rangle + \langle 12|12 \rangle - \langle 12|21 \rangle \end{aligned} \quad (2.116)$$

这与之前的结果 (2.92) 相同.

**练习 2.12** 用上面总结的规则计算  $H_2$  极小基下的 Full CI 矩阵元. 与练习 2.9 的结果作比较.

**练习 2.13** 证明

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_a^r | \mathcal{O}_1 | \Phi_b^s \rangle \\ &= 0 && \text{若 } a \neq b, r \neq s \\ &= \langle r|h|s \rangle && \text{若 } a = b, r \neq s \\ &= -\langle b|h|a \rangle && \text{若 } a \neq b, r = s \\ &= \sum_c^N \langle c|h|c \rangle - \langle a|h|a \rangle + \langle r|h| \rangle && \text{若 } a = b, r = s \end{aligned}$$

**练习 2.14**  $N$  电子体系的 Hartree-Fock 基态能为  ${}^N E_0 = \langle {}^N \Phi_0 | \mathcal{H} | {}^N \Phi_0 \rangle$ . 考虑一个被电离的体系 (即其中一个电子被挪出了  $\chi_a$  轨道), 其能量为  ${}^{N-1} E_a = \langle {}^{N-1} \Phi_a | \mathcal{H} | {}^{N-1} \Phi_a \rangle$ , 其中  $|{}^{N-1} \Phi_a\rangle$  是除了  $\chi_a$  之外的被占轨道组成的单 Slater 行列式.

$$|{}^{N-1} \Phi_a\rangle = |\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_{a-1} \chi_{a+1} \cdots \chi_N\rangle$$

请利用表中的规则, 证明这个电离过程所需能量为

$${}^N E_0 - {}^{N-1} E_a = \langle a | h | a \rangle + \sum_b \langle ab || ab \rangle$$

为显出本节介绍的记忆方法的优势, 在此我们不借助运算来推导以上结果. 考虑  $|{}^N \Psi_0\rangle$  的表示, 图 2.4. 若从  $\chi_a$  中挪去一个电子, 则需从总能  ${}^N E_0$  中要扣除一项单电子能量  $\langle a | h | a \rangle$ . 此外, 之前在  $\chi_a$  上的电子会与其他电子有相互作用, 该电子挪走之后, 这些相互作用 (即  $\sum_{b \neq a} \langle ab || ab \rangle$ ) 也要被扣除. 考虑到  $\langle aa || aa \rangle = 0$ , 可以立马得到上面的结果.

### 2.3.4 矩阵元规则的推导

本节我们来推导表 2.3 和 2.4 中的矩阵元的计算规则. 这些矩阵元就是单、双电子算符夹在  $N$  电子行列式之间的算式 ( $N$  电子行列式由自旋轨道构成). 由自旋轨道  $\chi_i(\mathbf{x}_1), \chi_j(\mathbf{x}_1), \dots, \chi_k(\mathbf{x}_N)$  构成的  $N$  电子行列式就是 (见式 (1.38)):

$$|\chi_i \chi_k \cdots \chi_k\rangle = (N!)^{-1/2} \sum_{n=1}^{N!} (-1)^{p_n} \mathcal{P}_n \{ \chi_i(1) \chi_j(2) \cdots \chi_k(N) \} \quad (2.117)$$

其中我们令  $\chi(\mathbf{x}_l) = \chi(l)$ .  $\mathcal{P}_n$  是一个能够对电子标号  $1, 2, \dots, N$  进行  $n$  阶置换的算符,  $p_n$  是完成该置换所需的置换数 (简单交换的数目).

**练习 2.15** 将练习 2.14 的结果推广到  $N$  电子行列式上: 已知由自旋轨道组成的 Slater 行列式  $|\chi_i \chi_j \cdots \chi_k\rangle$  是单电子算符  $h$  (见式 2.29) 的本征函数, 请证明它也是单电子哈密顿  $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N h(i)$  (见式 2.28) 的本征函数, 对应本征值为  $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \cdots + \varepsilon_k$ . 提示: 由于  $\mathcal{H}$  在对电子指标的置换操作下是不变的, 所以它与  $\mathcal{P}$  对易.

现在要计算该形式的矩阵元  $\langle K | \mathcal{O} | L \rangle$ , 其中

$$|K\rangle = |\chi_m(1) \chi_n(2) \cdots\rangle \quad (2.118)$$

是由被占轨道  $\chi_m, \chi_n, \dots$  构成的行列式. 而  $|K\rangle$  以某种已知的方式不同于  $|K\rangle$ . 在考察单、双电子算符的矩阵元和情形 1、2、3 之前, 先令  $\mathcal{O}$  等于单位算符, 看看  $|K\rangle$  和一个任意的  $|L\rangle$  之间的重叠  $\langle K | L \rangle$ ,  $|L\rangle$  如下

$$|L\rangle = |\chi'_m(1) \chi'_n(2) \cdots\rangle \quad (2.119)$$

假设两个行列式已经按最大相似方式进行了排列. 利用 (2.115) 中的行列式表达式, 我们有

$$\langle K | L \rangle = (N!)^{-1} \sum_i \sum_j^{N!} (-1)^{p_i} (-1)^{p_j} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \quad (2.120)$$

$$\times \mathcal{P}_i\{\chi_m^*(1)\chi_n^*(2)\cdots\}\mathcal{P}_j\{\chi'_m(1)\chi'_n(2)\cdots\} \quad (2.121)$$

设 (两组) 自旋轨道 (一起) 构成正交归一集. 若上面的重叠积分非零, 带撇的自旋轨道就必须与不带撇的自旋轨道 (按脚标) 对应相等. 否则就总会有一个 0 因子出现 (因为  $|L\rangle$  中的某自旋轨道如  $\chi'_n$  与  $|K\rangle$  中的自旋轨道  $\chi_m, \chi_n, \cdots$  正交). 所以, 若某行列式中的自旋轨道与  $|K\rangle$  中的不完全相同, 那么  $|K\rangle$  就与其正交. 如过两个行列式中的行列式完美地相同, 即它们其实是相等的两个行列式, 那么

$$\langle K|K\rangle = (N!)^{-1} \sum_i^{N!} \sum_j^{N!} (-1)^{p_i} (-1)^{p_j} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \quad (2.122)$$

$$\times \mathcal{P}_i\{\chi_m^*(1)\chi_n^*(2)\cdots\}\mathcal{P}_j\{\chi_m(1)\chi_n(2)\cdots\} \quad (2.123)$$

在上面的求和中, 仅当在  $i$  置换中的电子与在  $j$  置换中的电子都占据相同的自旋轨道时积分才不为 0. 那么求和中有有效的项中, 两个置换必须相同 ( $i=j$ ), 并且  $(-1)^{2p_i} = 1$ , 所以有

$$\langle K|K\rangle = (N!)^{-1} \sum_i^{N!} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \mathcal{P}_i\{\chi_m^*(1)\chi_n^*(2)\cdots\}\mathcal{P}_j\{\chi_m(1)\chi_n(2)\cdots\} \quad (2.124)$$

求和中的每一项都是 1, 所以

$$\langle K|K\rangle = (N!)^{-1} \sum_i^{N!} 1 = 1 \quad (2.125)$$

这就是说,  $|K\rangle$  是归一化的. 因此我们有

$$\begin{aligned} \langle K|K\rangle &= 1 & \text{情形 1} \\ \langle K|L\rangle &= 0 & \text{情形 2} \end{aligned} \quad (2.126)$$

接下来考察单电子算符之和的矩阵元:

$$\langle K|\mathcal{O}_1|L\rangle = \langle K|h(1) + h(2) + \cdots + h(N)|L\rangle \quad (2.127)$$

由于行列式中的电子不可分辨, 所以  $h(1)$  的矩阵元和  $h(2), h(3)$  等等的矩阵元相同. 那么 (2.123) 中的每一项都相等, 也就是

$$\langle K|\mathcal{O}_1|L\rangle = N \langle K|h(1)|L\rangle \quad (2.128)$$

该式中我们按照惯例选择了电子 1 的算符. 先看情形 1 下的结果:

$$\begin{aligned} \langle K|\mathcal{O}_1|K\rangle &= N \langle K|h(1)|L\rangle \\ &= N(N!)^{-1} \sum_i^{N!} \sum_j^{N!} (-1)^{p_i} (-1)^{p_j} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \\ &\quad \times \mathcal{P}_i\{\chi_m^*(1)\chi_n^*(2)\cdots\} h(1) \mathcal{P}_j\{\chi'_m(1)\chi'_n(2)\cdots\} \end{aligned} \quad (2.129)$$

在对电子  $2, 3, \cdots, N$  的座标积分时, 除非所有电子在第  $i$  个置换和第  $j$  个置换中占据的轨道完全对应相同, 否则积分就为 0 (自旋轨道的正交性). 如果电子  $2, 3, \cdots, N$  在两个置换中都占



据完全相同的自旋轨道, 那么电子 1 在两个置换中所占据的自旋轨道肯定也相同. 结果就是, 只有两个置换等同时 ( $i = j$ ) 所得积分才不为 0.

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_1 | K \rangle &= [(N-1)!]^{-1} \sum_i^{N!} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \\ &\quad \times \mathcal{P}_i \{ \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) \cdots \} h(1) \mathcal{P}_j \{ \chi_m(1) \chi_n(2) \cdots \} \end{aligned} \quad (2.130)$$

上式对  $N!$  个置换求和, 电子 1 会占据每个自旋轨道  $\{ \chi_m | m = 1, 2, \cdots, N \}$  各  $(N-1)!$  次, 就是说, 若电子 1 在某特定的自旋轨道  $\chi_m$  上, 则剩余的电子  $2, 3, \cdots, N$  在剩余的  $(N-1)$  个自旋轨道中共有  $(N-1)!$  种排列方式. 对电子  $2, 3, \cdots, N$  积分仅会产生一个因子 1 (自旋轨道已归一化), 因此

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_1 | K \rangle &= (N-1)! [(N-1)!]^{-1} \sum_m^N \int d\mathbf{x}_1 \chi_m^*(1) h(1) \chi_m(1) \\ &= \sum_m^N \langle m | h | m \rangle \quad \text{情形 1} \end{aligned} \quad (2.131)$$

现在来看情形 2, 此时两个行列式的差异仅在一个自旋轨道上,  $\chi_p$  出现在  $|L\rangle$  中而  $|K\rangle$  中则是  $\chi_m$ ,

$$|K\rangle = | \chi_m(1) \chi_n(2) \cdots \rangle \quad (2.132)$$

$$|L\rangle = | \chi_p(1) \chi_n(2) \cdots \rangle \quad (2.133)$$

与在情形 1 中从 (2.125) 导出 (2.126) 时相同, 若积分结果不为 0, 则算符的两边必须有相同的置换,

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_1 | L \rangle &= [(N-1)!]^{-1} \sum_i^{N!} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \\ &\quad \times \mathcal{P}_i \{ \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) \cdots \} h(1) \mathcal{P}_j \{ \chi_p(1) \chi_n(2) \cdots \} \end{aligned} \quad (2.134)$$

由于前面那个置换中轨道  $\chi_m$  与后一个置换中的所有自旋轨道都正交, 所以只有当它被电子 1 占据时, 才有可能和  $h(1)$  联动, 以使积分不为 0. 固定了电子 1 之后, 电子  $2, 3, \cdots, N$  在余下的  $N-1$  个自旋轨道  $(\chi_n, \cdots)$  中共有  $(N-1)!$  种排列方式. 对这些电子坐标进行积分总会给出因子 1 (正交性), 因此

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_1 | L \rangle &= (N-1)! [(N-1)!]^{-1} \sum_i^{N!} \int d\mathbf{x}_1 \chi_m^*(1) h(1) \chi_p(1) \\ &= \langle m | h | p \rangle \end{aligned} \quad (2.135)$$

情形 3 时, 两个行列式中有两个自旋轨道不相同, 在  $|L\rangle$  中设为  $\chi_p, \chi_q$ ,  $|K\rangle$  中设为  $\chi_m, \chi_n$ :

$$|K\rangle = | \chi_m(1) \chi_n(2) \cdots \rangle \quad (2.136)$$

$$|L\rangle = | \chi_p(1) \chi_q(2) \cdots \rangle \quad (2.137)$$

$$(2.138)$$

与 (2.125) 类似我们可以写出:

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_1 | K \rangle = & N(N!)^{-1} \sum_i^{N!} \sum_j^{N!} (-1)^{p_i} (-1)^{p_j} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \\ & \times \mathcal{P}_i \{ \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) \cdots \} h(1) \mathcal{P}_j \{ \chi_p(1) \chi_q(2) \cdots \} \end{aligned} \quad (2.139)$$

由于  $\chi_m, \chi_n$  与第一个置换中的其他自旋轨道正交, 而且没有办法使电子 1 同时占据在这两个轨道上来和  $h(1)$  “联动”, 所以无论怎样置换, 都无法使积分不为 0 (因为自旋轨道相互正交). 因此

$$\langle K | \mathcal{O}_1 | K \rangle = 0 \quad \text{情形 3} \quad (2.140)$$

现在来考察双电子算符, 一般的双电子算符矩阵元有如下形式:

$$\langle K | \mathcal{O}_2 | K \rangle = \left\langle K \left| r_{12}^{-1} + r_{13}^{-1} + r_{14}^{-1} + \cdots + r_{23}^{-1} + r_{24}^{-1} + \cdots + r_{N-1,N}^{-1} \right| N \right\rangle \quad (2.141)$$

其中的加和遍及所有电子对. 由于行列式并不区分全同电子, 所以上式求和中每一项都给出相同结果, 因此可以用一个双电子算符  $r_{12}^{-1}$  来代替  $\mathcal{O}_2$ ——只要乘以一个因子就行 (电子对的数目):

$$\langle K | \mathcal{O}_2 | L \rangle = \frac{N(N-1)}{2} \left\langle K \left| r_{12}^{-1} \right| L \right\rangle \quad (2.142)$$

从情形 1 开始,

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_2 | K \rangle = & \frac{N(N-1)}{2} (N!)^{-1} \sum_i^{N!} \sum_j^{N!} (-1)^{p_i} (-1)^{p_j} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \\ & \times \mathcal{P}_i \{ \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) \cdots \} r_{12}^{-1} \mathcal{P}_j \{ \chi_m(1) \chi_n(2) \cdots \} \end{aligned} \quad (2.143)$$

由于 (2.138) (即上式) 中的算符仅涉及电子 1 和 2, 那么电子  $3, 4, \cdots, N$  在  $i$  置换式和  $j$  置换式中需占据相同的自旋轨道, 唯如此积分才不为 0 (自旋轨道相互正交). 若电子  $3, 4, \cdots, N$  在前后两个置换中已占据相同的自旋轨道, 而电子 1 和 2 在  $\mathcal{P}_i$  置换中分别占据  $\chi_k$  和  $\chi_l$ , 此时对于  $\mathcal{P}_j$  置换有两种可能性: 即电子 1、2 占据情况与  $\mathcal{P}_i$  中相同 ( $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_j$ ); 或者与之相反, 即电子 1 在  $\chi_l$ , 电子 2 在  $\chi_k$  ( $\mathcal{P}_i = -\mathcal{P}_j$ ), 后一种情况中, 只是将电子 1、2 的坐标交换了. 那么, 如果设

$$\mathcal{P}_i \{ \chi_m(1) \chi_n(2) \cdots \} = [\chi_k(1) \chi_l(2) \cdots] \quad (2.144)$$

则有

$$\mathcal{P}_j \{ \chi_m(1) \chi_n(2) \cdots \} = [\chi_k(1) \chi_l(2) \cdots] \quad \text{或} \quad [\chi_k(2) \chi_l(1) \cdots] \quad (2.145)$$

设  $\mathcal{P}_{12}$  是交换电子 1、2 坐标的算符, 则可以将矩阵元写成

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_2 | K \rangle = & [(2N-1)!]^{-1} \sum_i^{N!} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \mathcal{P}_i \{ \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) \cdots \} \\ & \times r_{12}^{-1} [\mathcal{P}_i \{ \chi_p(1) \chi_q(2) \cdots \} - \mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_i \{ \chi_p(1) \chi_q(2) \cdots \}] \end{aligned} \quad (2.146)$$

式中  $\mathcal{P}_{12}$  前面的符号是由于,  $\mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_i$  在  $\mathcal{P}_i$  的基础上交换了电子 1 和 2 的坐标, 因此若  $\mathcal{P}_i$  是一奇置换,  $\mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_i$  就是一偶置换, 反之亦然. 在对  $\mathcal{P}_i$  的  $N!$  项求和中, 电子 1 和 2 会遍及所

有  $|K\rangle$  中总共  $N$  个自旋轨道中的任意两个自旋轨道  $\chi_m, \chi_n$ . 每一对自旋轨道选定之后, 就有  $(N-2)!$  种方式在  $N-2$  个自旋轨道上排列剩余的  $N-2$  个电子, 因此

$$\begin{aligned}\langle K | \mathcal{O}_2 | K \rangle &= \frac{(N-2)!}{2(N-2)!} \sum_m^N \sum_{n \neq m}^N \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \{ \chi_m(1) \chi_n(2) \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_m^N \sum_{n \neq m}^N \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) r_{12}^{-1} [ \chi_m(1) \chi_n(2) - \chi_m(2) \chi_n(1) ] \\ &= \frac{1}{2} \sum_m^N \sum_{n \neq m}^N \langle mn | mn \rangle - \langle mn | nm \rangle\end{aligned}\quad (2.147)$$

由于  $\langle mn | mn \rangle = \langle mn | mn \rangle - \langle mn | nm \rangle$  当  $m = n$  时为 0, 所以上式中求和的限制 ( $m \neq n$ ) 可以去掉, 那么

$$\langle K | \mathcal{O}_2 | K \rangle = \frac{1}{2} \sum_m^N \sum_n^N \langle mn | mn \rangle \quad \text{情形 1} \quad (2.148)$$

情形 2 下, 将  $|K\rangle$  中的  $\chi_m$  用  $\chi_p$  替换得到  $|L\rangle$ , 我们有

$$\begin{aligned}\langle K | \mathcal{O}_2 | L \rangle &= \frac{N(N-1)}{2} (N!)^{-1} \sum_i^{N!} \sum_j^{N!} (-1)^{P_i} (-1)^{P_j} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \\ &\quad \times \mathcal{P}_i \{ \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) \cdots \} r_{12}^{-1} \mathcal{P}_j \{ \chi_p(1) \chi_n(2) \cdots \}\end{aligned}\quad (2.149)$$

按照在情形 1 下导出 (2.141) 式的办法, 在情形 2 同样可以写出

$$\begin{aligned}\langle K | \mathcal{O}_2 | L \rangle &= [2(N-2)!]^{-1} \sum_i^{N!} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \cdots d\mathbf{x}_N \\ &\quad \times \mathcal{P}_i \{ \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) \cdots \} r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \mathcal{P}_i \{ \chi_p(1) \chi_n(2) \cdots \}\end{aligned}\quad (2.150)$$

由于  $\chi_m$  与后一个置换中的自旋轨道正交, 它需被电子 1 或 2 占据, 如此才可与算符  $r_{12}^{-1}$  “联动”, 以产生非零的积分结果. 若  $\chi_m$  被电子 1 占据, 那么  $|K\rangle$  与  $|L\rangle$  中剩余的轨道是一样的, 电子 2 可排在剩余的  $N-1$  个自旋轨道中的任意一个上. 若  $\chi_m$  被电子 2 占据, 那么  $|K\rangle$  与  $|L\rangle$  中剩余的轨道也一样的, 电子 1 可排在剩余的  $N-1$  个自旋轨道中的任意一个上. 最终剩余的电子  $3, 4, \dots, N$  共有  $(N-2)!$  个排列方式, 将关于这些剩余电子的积分都积出来可以得到

$$\begin{aligned}\langle K | \mathcal{O}_2 | L \rangle &= \frac{(N-2)!}{2(N-2)!} \sum_{n \neq m}^N \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 [\chi_m^*(1) \chi_n^*(2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \{ \chi_p(1) \chi_n(2) \} \\ &\quad + \chi_m^*(1) \chi_m^*(2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \{ \chi_n(1) \chi_p(2) \}]\end{aligned}\quad (2.151)$$

积分号中的两项代表两种情况: 放在  $\chi_m$  上的电子可以是 1 号也可以是 2 号. 此外,  $r_{12}^{-1} = r_{21}^{-1}$  且  $\mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_{21}$ , 所以我们可以改变上式第二项的积分指标, 如此第二项就等于第一项:

$$\begin{aligned}&\int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \chi_n^*(1) \chi_m^*(2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \{ \chi_n(1) \chi_p(2) \} \\ &= \int d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_1 \chi_n^*(2) \chi_m^*(1) r_{21}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{21}) \{ \chi_n(2) \chi_p(1) \}\end{aligned}$$

$$= \int \mathbf{dx}_1 \mathbf{dx}_2 \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \{ \chi_p(1) \chi_n(2) \} \quad (2.152)$$

由此得到

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_2 | L \rangle &= \sum_{n \neq m}^N \int \mathbf{dx}_1 \mathbf{dx}_2 \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \{ \chi_p(1) \chi_n(2) \} \\ &= \sum_{n \neq m}^N \int \mathbf{dx}_1 \mathbf{dx}_2 \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) r_{12}^{-1} [\chi_p(1) \chi_n(2) - \chi_n(1) \chi_p(2)] \\ &= \sum_{n \neq m}^N \langle mn | pn \rangle - \langle mn | np \rangle = \sum_n^N \langle mn || pn \rangle \quad \text{情形 2} \end{aligned} \quad (2.153)$$

最后一步中根据  $\langle mm || pm \rangle = 0$  移去了对求和的限制。

情形 3 下, 将  $|K\rangle$  中的  $\chi_m, \chi_n$  换成  $\chi_p, \chi_q$  得到  $|L\rangle$ , 按照推导前两种情形的办法, 我们直接写出

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_2 | L \rangle &= [2(N-2)!]^{-1} \sum_i^{N!} \int \mathbf{dx}_1 \mathbf{dx}_2 \cdots \mathbf{dx}_N \\ &\quad \times \mathcal{P}_i \{ \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) \cdots \} r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \mathcal{P}_i \{ \chi_p(1) \chi_q(2) \cdots \} \end{aligned} \quad (2.154)$$

$\chi_m, \chi_n$  与后一置换中的所有自旋轨道正交, 所以它们分别需由电子 1 和 2 (或 2 和 1) 占据。剩余的电子  $3, 4, \dots, N$  共有  $(N-2)!$  种排法, 完成对这些剩余电子的积分可以得到

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_2 | L \rangle &= \frac{1}{2} \int \mathbf{dx}_1 \mathbf{dx}_2 [\chi_m^*(1) \chi_n^*(2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \{ \chi_p(1) \chi_q(2) \} \\ &\quad + \chi_n^*(1) \chi_m^*(2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \{ \chi_q(1) \chi_p(2) \}] \end{aligned} \quad (2.155)$$

与上一情形中一样, 可以通过交换积分僥标证明上式中的两项是相等的。所以有

$$\begin{aligned} \langle K | \mathcal{O}_2 | L \rangle &= \int \mathbf{dx}_1 \mathbf{dx}_2 \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \{ \chi_p(1) \chi_q(2) \} \\ &= \int \mathbf{dx}_1 \mathbf{dx}_2 \chi_m^*(1) \chi_n^*(2) r_{12}^{-1} [\chi_p(1) \chi_q(2) - \chi_q(1) \chi_p(2)] \\ &= \langle mn | pq \rangle - \langle mn | qp \rangle = \langle mn || pq \rangle \quad \text{情形 3} \end{aligned} \quad (2.156)$$

正如单电子算符之和的矩阵元在行列式相差两个及以上的自旋轨道时为 0, 双电子算符之和的矩阵元在行列式相差三个及以上自旋轨道时也为 0,

$$\langle K | \mathcal{O}_2 | L \rangle = 0 \quad (2.157)$$

到此我们就完成了对 Slater 行列式之间的矩阵元的计算规则的推导。

**练习 2.16** 推导以上矩阵元规则还有另外一种方法, 使用如下定理:  $\langle K | \mathcal{H} | L \rangle = (N!)^{1/2} \langle K^{\text{HP}} | \mathcal{H} | L \rangle$ , 其中  $|K^{\text{HP}}\rangle$  是  $|K\rangle$  对应的 Hartree 积, 就是说

$$\begin{aligned} |K\rangle &= \langle \chi_m(\mathbf{x}_1) \chi_n(\mathbf{x}_2) \cdots \rangle \\ |K^{\text{HP}}\rangle &= \chi_m(\mathbf{x}_1) \chi_n(\mathbf{x}_2) \cdots \end{aligned}$$

请先证明这个定理, 然后用它来推导单电子算符之和的矩阵元。

### 2.3.5 将自旋轨道转换成空间轨道

到本节之前我们一直在处理自旋轨道  $\chi_i$  而非空间轨道  $\psi_i$ . 使用自旋轨道可以简化量子化学理论中涉及到的代数运算和各种记号. 但是在运算中, 自旋函数  $\alpha, \beta$  必须被积分掉, 如此才能将自旋轨道约化为可数值运算的空间轨道及其积分. 本节就来介绍如何完成这种转化并介绍空间积分的记号.

为了在最简单的框架下说明这种转化手续, 考察  $H_2$  极小基的 Hartree-Fock 基态 (见式 2.92), 以物理学家的记号

$$E_0 = \langle \chi_1 | h | \chi_1 \rangle + \langle \chi_2 | h | \chi_2 \rangle + \langle \chi_1 \chi_2 | \chi_1 \chi_2 \rangle - \langle \chi_1 \chi_2 | \chi_2 \chi_1 \rangle \quad (2.158)$$

以化学家的记号

$$E_0 = [\chi_1 | h | \chi_1] + [\chi_2 | h | \chi_2] + [\chi_1 \chi_1 | \chi_2 \chi_2] - [\chi_1 \chi_2 | \chi_2 \chi_1] \quad (2.159)$$

回想起 (见式 (2.60))

$$\chi_1(\mathbf{x}) \equiv \psi_1(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{r})\alpha(\omega) \quad (2.160)$$

$$\chi_2(\mathbf{x}) \equiv \bar{\psi}_1(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{r})\alpha(\omega) \quad (2.161)$$

将上式定义带入 (2.154), 可得

$$E_0 = [\psi_1 | h | \psi_1] + [\bar{\psi}_1 | h | \bar{\psi}_1] + [\psi_1 \psi_1 | \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_1] - [\psi_1 \bar{\psi}_1 | \bar{\psi}_1 \psi_1] \quad (2.162)$$

考虑单电子积分

$$[\bar{\psi}_1 | h | \bar{\psi}_1] = \int d\mathbf{r} d\omega_1 \psi_1^*(\mathbf{r}_1) \beta^*(\omega_1) h(\mathbf{r}_1) \psi_1(\mathbf{r}_1) \beta(\omega_1) \quad (2.163)$$

式中假设单电子算符不依赖自旋 (这正是非相对论 Hamiltonian 的情况). 完成对  $\omega_1$  的积分并注意到  $\langle \beta | \beta \rangle = 1$ , 有

$$[\bar{\psi}_1 | h | \bar{\psi}_1] = \int d\mathbf{r} \psi_1^*(\mathbf{r}_1) h(\mathbf{r}_1) \psi_1(\mathbf{r}_1) \equiv (\psi_1 | h | \psi_1) \quad (2.164)$$

上式中出现了一个新记号, 我们用它来表示单电子空间积分. 知道  $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \beta | \beta \rangle = 1$  及  $\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = 0$ , 我们可以写出一般的约化规则:

$$[\psi_i | h | \psi_j] = [\bar{\psi}_i | h | \bar{\psi}_j] = (\psi_i | h | \psi_j) \quad (2.165)$$

$$[\psi_i | h | \bar{\psi}_j] = [\bar{\psi}_i | h | \psi_j] = 0 \quad (2.166)$$

由此可知  $E_0$  中单电子部分的能量贡献是  $2(\psi_1 | h | \psi_1)$ .

下面考虑 (2.157) 基态能量表达式中的第一项双电子积分

$$\begin{aligned} [\psi_1 \psi_1 | \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_1] &= \int d\mathbf{r}_1 d\omega_1 d\mathbf{r}_2 d\omega_2 \psi_1^*(\mathbf{r}_1) \alpha^*(\omega_1) \psi_1(\mathbf{r}_1) \alpha(\omega_1) r_{12}^{-1} \\ &\quad \times \psi_1^*(\mathbf{r}_2) \beta^*(\omega_2) \psi_1(\mathbf{r}_2) \beta(\omega_2) \end{aligned} \quad (2.167)$$

将自旋变量  $\omega_1, \omega_2$  积掉, 并使用事实  $\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \beta | \beta \rangle = 1$  得到

$$[\psi_1 \psi_1 | \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_1] = \int d\mathbf{r}_1 d\omega_1 d\mathbf{r}_2 d\omega_2 \psi_1^*(\mathbf{r}_1) \psi_1(\mathbf{r}_1) r_{12}^{-1} \psi_1^*(\mathbf{r}_2) \psi_1(\mathbf{r}_2)$$

$$\equiv (\psi_1 \bar{\psi}_1 | \psi_1 \bar{\psi}_1) \quad (2.168)$$

式中引入了一个新记号来表示双电子的空间积分. 这个记号就是把化学家的记号中的方括号变成了圆括号. 此处不特别引入物理学家记号来表示空间积分. 因此  $\langle ij | kl \rangle$  代表对自旋轨道还是空间轨道积分只能通过上下文判断. (2.157) 中的最后一个积分为

$$\begin{aligned} [\psi_1 \bar{\psi}_1 | \bar{\psi}_1 \psi_1] &= \int d\mathbf{r}_1 d\omega_1 d\mathbf{r}_2 d\omega_2 \psi_1^*(\mathbf{r}_1) \alpha^*(\omega_1) \psi_1(\mathbf{r}_1) \beta(\omega_1) r_{12}^{-1} \\ &\quad \times \psi_1(\mathbf{r}_2) \alpha(\omega_2) \psi_1(\mathbf{r}_2) \beta(\omega_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.169)$$

最后一步是由于  $\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = 0$ . 一般来说, 当双电子积分中某侧 (指左侧或右侧或两侧都) 只出现一个横杠时 (比如  $[\psi_i \bar{\psi}_j | \psi_k \bar{\psi}_l]$ ), 积分就会因自旋轨道的正交性而为 0. 一般的约化规则是:

$$[\psi_i \bar{\psi}_j | \psi_k \bar{\psi}_l] = [\psi_i \bar{\psi}_j | \bar{\psi}_k \bar{\psi}_l] = [\bar{\psi}_i \bar{\psi}_j | \psi_k \bar{\psi}_l] = [\bar{\psi}_i \bar{\psi}_j | \bar{\psi}_k \bar{\psi}_l] = (\psi_i \bar{\psi}_j | \psi_k \bar{\psi}_l) \quad (2.170)$$

带横线的轨道的其他排列方式积分后都为 0. 因此极小基  $H_2$  的 Hartree-Fock 基态能就是

$$E_0 = 2(\psi_1 | h | \psi_1) + (\psi_1 \bar{\psi}_1 | \psi_1 \bar{\psi}_1) \quad (2.171)$$

$$= 1(1|h|1) + (11|11) \quad (2.172)$$

**练习 2.17** 对自旋变量积分, 证明极小基  $H_2$  的 full CI 矩阵可以写成

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2(1|h|1) + (11|11) & (12|12) \\ (21|21) & 2(2|h|2) + (22|22) \end{pmatrix} \quad (2.173)$$

现在将以上结果推广到有偶数电子的  $N$  电子系统中, 用空间积分表示该系统的 Hartree-Fock 能量. 与极小基  $H_2$  的波函数

$$|\Psi_0\rangle = |\chi_1 \chi_2\rangle = |\psi_1 \bar{\psi}_1\rangle \quad (2.174)$$

类似, 可以写出  $N$  电子系统的**闭壳层限制性** Hartree-Fock 波函数

$$|\Psi_0\rangle = |\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \cdots \chi_{N-1} \chi_N\rangle \quad (2.175)$$

$$= |\psi_1 \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_2 \cdots \psi_{N/2} \bar{\psi}_{N/2}\rangle \quad (2.176)$$

该波函数的图示为图 2.10. 注意此处一对自旋  $\alpha, \beta$  对应同一个空间轨道. 每个空间轨道由两个自旋相反的电子占据. 这个波函数对应的能量 (若用自旋轨道  $\{\chi_a | a = 1, 2, \cdots, N\}$  表达) 由式 (2.111) 给出:

$$E_0 = \sum_a^N [a|h|a] + \frac{1}{2} \sum_a^N \sum_b^N [aa|bb] - [ab|ba] \quad (2.177)$$

由于波函数 (2.168) 包含  $N/2$  个  $\alpha$  自旋轨道  $N/2$  个  $\beta$  自旋轨道, 我们可以将对自旋轨道的求和分成两部分:

$$\sum_a^N \chi_a = \sum_a^{N/2} \psi_a + \sum_a^{N/2} \bar{\psi}_a \quad (2.178)$$

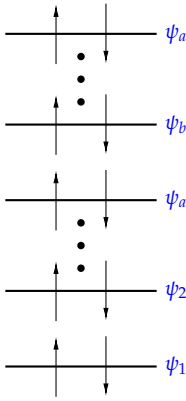


图 2.9: 闭壳层限制性 Hartree-Fock 基态行列式  $|\psi_1 \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_2 \cdots \psi_{N/2} \bar{\psi}_{N/2}\rangle$ .

其中使用了横线记号. 从符号角度来看, 我们可以写下

$$\sum_a^N = \sum_a^{N/2} + \sum_a^{N/2} \quad (2.179)$$

代表对自旋轨道的求和等于上自旋轨道之和加下自旋轨道之和. 对于双重求和, 可以写下

$$\begin{aligned} \sum_a^N \sum_b^N \chi_a \chi_b &= \sum_a^N \chi_a \sum_b^N \chi_b \\ &= \sum_a^{N/2} (\psi_a + \bar{\psi}_a) \sum_b^{N/2} (\psi_b + \bar{\psi}_b) \\ &= \sum_a^{N/2} \sum_b^{N/2} \psi_a \psi_b + \psi_a \bar{\psi}_b + \bar{\psi}_a \psi_b + \bar{\psi}_a \bar{\psi}_b \end{aligned} \quad (2.180)$$

或单纯写出符号

$$\sum_a^N \sum_b^N = \sum_a^{N/2} \sum_b^{N/2} + \sum_a^{N/2} \sum_{\bar{b}}^{N/2} + \sum_{\bar{a}}^{N/2} \sum_b^{N/2} + \sum_{\bar{a}}^{N/2} \sum_{\bar{b}}^{N/2} \quad (2.181)$$

现在可利用以上符号将 (2.169) 约化为仅含空间轨道的方程. 先处理单电子积分:

$$\sum_a^N [a|h|a] = \sum_a^{N/2} [a|h|a] + \sum_a^{N/2} [\bar{a}|h|\bar{a}] = 2 \sum_a^{N/2} (\psi_a|h|\psi_a) \quad (2.182)$$

双电子积分项:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_a^N \sum_b^N [aa|bb] - [ab|ba] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_a^{N/2} \sum_b^{N/2} [aa|bb] - [ab|ba] + \sum_a^{N/2} \sum_{\bar{b}}^{N/2} [aa|\bar{b}\bar{b}] - [a\bar{b}|\bar{b}a] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\bar{a}}^{N/2} \sum_b^{N/2} [\bar{a}\bar{a}|bb] - [\bar{a}b|b\bar{a}] + \sum_{\bar{a}}^{N/2} \sum_{\bar{b}}^{N/2} [\bar{a}\bar{a}|\bar{b}\bar{b}] - [\bar{a}\bar{b}|\bar{b}\bar{a}] \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_a \sum_b^{N/2, N/2} 2(\psi_a \psi_a | \psi_b \psi_b) - (\psi_a \psi_b | \psi_b \psi_a) \quad (2.183)$$

因此闭壳层基态的 Hartree-Fock 能量就是

$$E_0 = 2 \sum_a^{N/2} (\psi_a | h | \psi_a) + \sum_a \sum_b^{N/2, N/2} 2(\psi_a \psi_a | \psi_b \psi_b) - (\psi_a \psi_b | \psi_b \psi_a) \quad (2.184)$$

求和的上限 (代表空间轨道的数目) 实际上可以不写, 因为我们在使用之前定义的圆括号符号. 因此 (2.176) 可写为

$$E_0 = 2 \sum_a^{N/2} (a | h | a) + \sum_a \sum_b^{N/2, N/2} 2(aa | bb) - (ab | ba) \quad (2.185)$$

当转为物理学家的符号时, 求和上限必须明确写出以指明到底是对空间轨道还是自旋轨道求和. 此处我们针对物理学家的记号特别约定, 如果求和无限, 那么求和是针对自旋轨道, 如果上限是  $N/2$  则是针对空间轨道. 所以用物理学家的记号 (2.177) 可以写为

$$E_0 = 2 \sum_a^{N/2} \langle a | h | a \rangle + \sum_a \sum_b^{N/2, N/2} 2 \langle ab | ab \rangle - \langle ab | ba \rangle \quad (2.186)$$

**练习 2.18** 第六章中我们会研究微扰论, 在那里会求得 Haree-Fock 基态的领头阶修正为

$$E_0^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{abrs} \frac{|\langle ab || rs \rangle|^2}{\varepsilon_a + \varepsilon_b - \varepsilon_r - \varepsilon_s}$$

请证明, 对闭壳层体系 ( $\varepsilon_i = \varepsilon_{\bar{i}}$ ), 该式成为

$$E_0^{(2)} = \sum_{a,b=1}^{N/2} \sum_{r,s=(N/2+1)}^K \frac{\langle ab | rs \rangle (2 \langle rs | ab \rangle) - \langle rs | ba \rangle}{\varepsilon_a + \varepsilon_b - \varepsilon_r - \varepsilon_s}$$

### 2.3.6 库伦积分、交换积分

现在来考虑 (2.177) 中所给出的闭壳层 Hartree-Fock 基态能量的物理意义.

$$E_0 = 2 \sum_a^{N/2} (\psi_a | h | \psi_a) + \sum_a \sum_b^{N/2, N/2} 2(\psi_a \psi_a | \psi_b \psi_b) - (\psi_a \psi_b | \psi_b \psi_a) \quad (2.187)$$

线来看单电子项

$$(a | h | a) \equiv h_{aa} = \int d\mathbf{r}_1 \psi_a^*(\mathbf{r}_1) \left( -\frac{1}{2} \nabla_1^2 - \sum_A \frac{Z_A}{r_{1A}} \right) \psi_a(\mathbf{r}_1) \quad (2.188)$$

$h_{aa}$  就是波函数  $\psi_a(\mathbf{r}_1)$  所对应电子的平均动能加上核对它的吸引能量. 下面考虑双电子积分

$$(aa | bb) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 |\psi_a(\mathbf{r}_1)|^2 r_{12}^{-1} |\psi_b(\mathbf{r}_2)|^2 \quad (2.189)$$



这项就是电子云  $|\psi_a(\mathbf{r}_1)|^2$  与电子云  $|\psi_a(\mathbf{r}_2)|^2$  之间的经典库伦排斥. 我们把这个积分叫做**库伦积分**并用  $J_{ab}$  来表示. 也就是说

$$J_{ij} = (ii|jj) = \langle ij|ij \rangle \quad (2.190)$$

最后考虑双电子积分

$$(ab|ba) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_a^*(\mathbf{r}_1) \psi_b(\mathbf{r}_1) r_{12}^{-1} \psi_b^*(\mathbf{r}_2) \psi_a(\mathbf{r}_2) \quad (2.191)$$

这个积分没有对应的经典解释. 我们将其称为**交换积分**, 用  $K_{ij}$  来记它. 就是说

$$K_{ij} = (ij|ji) = \langle ij|ji \rangle \quad (2.192)$$

库伦积分和交换积分的值都是正的<sup>1</sup>. 下面我们证明行列式对应的能量中的交换积分是由**交换相关** (exhcange correlation) 作用引起的 (也就是说, 在单行列式近似下, 同自旋电子的运动相互关联). 2.2.3 节中已经看到, 将 Hartree 积反对称化得到 Slater 行列式这个过程会引入相关作用. 此处我们将 (2.179) 中的闭壳层体系 Hartree-Fock 基态能量用库伦积分和交换积分写出来:

$$E_0 = 2 \sum_a h_{aa} + \sum_{ab} 2J_{ab} - K_{ab} \quad (2.193)$$

**练习 2.19** 证明交换积分和库伦积分有如下性质:

$$\begin{aligned} J_{ii} &= K_{ii} \\ J_{ij}^* &= J_{ij} & K_{ij}^* &= K_{ji} \\ J_{ij} &= J_{ij} & K_{ij} &= K_{ji} \end{aligned}$$

**练习 2.20** 证明对于实空间轨道

$$\begin{aligned} K_{ij} &= (ij|ij) = (ji|ji) \\ &= \langle ii|jj \rangle = \langle jj|ii \rangle \end{aligned}$$

**练习 2.21** 证明极小基下的  $H_2$  的 full CI 矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2h_{11}J_{11} & K_{12} \\ K_{12} & 2h_{22} + J_{22} \end{pmatrix}$$

那么交换积分又是如何产生的? 我们来重新考察 2.2.3 节讨论过的一个模型, 讨论一下这个模型系统的能量, 以便令读者对交换积分的出现有个感觉. 之前已经说到, 在一个两电子自旋平行的系统  $|\bar{\psi}_1\bar{\psi}\rangle_2$  中, 在同一点同时找到这两个电子的概率为零. 但若这两个电子自旋相反, 即系统此时的波函数为  $|\psi_1\bar{\psi}_2\rangle$ , 则此概率不为零. 那么一个合理的推测就是电子间的库

<sup>1</sup> 译者注: 数学上严格证明交换积分为总为正是不平凡的一件事情. 可以参考 <https://www.zhihu.com/question/37292504>

伦排斥会使态  $|\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\rangle$  对应的能量比  $|\psi\rangle_1\bar{\psi}_2$  的能量低. 利用式 (2.110),  $|\psi_1\bar{\psi}_2\rangle$  (记为  $|\uparrow\downarrow\rangle$ ) 的能量就是

$$\begin{aligned} |\uparrow\downarrow\rangle &= [\psi_1|h|\psi_1] + [\bar{\psi}_2|h|\bar{\psi}_2] + [\psi_1\psi_1|\bar{\psi}_2\bar{\psi}_2] - [\psi_1\bar{\psi}_2|\bar{\psi}_2\psi_1] \\ &= (1|h|1) + (2|h|2) + (11|22) \\ &= h_{11} + h_{22} + J_{12} \end{aligned} \quad (2.194)$$

$|\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\rangle$  (记为  $|\downarrow\downarrow\rangle$ ) 的能量就是

$$\begin{aligned} |\downarrow\downarrow\rangle &= [\bar{\psi}_1|h|\bar{\psi}_1] + [\bar{\psi}_2|h|\bar{\psi}_2] + [\bar{\psi}_1\bar{\psi}_1|\bar{\psi}_2\bar{\psi}_2] - [\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\bar{\psi}_2\bar{\psi}_1] \\ &= (1|h|1) + (2|h|2) + (11|22) - (12|21) \\ &= h_{11} + h_{22} + J_{12} - K_{12} \end{aligned} \quad (2.195)$$

式中利用了式 (2.160)(2.161)(2.165) 将自旋坐标积掉. 由于  $K_{12}$  是正值,  $|\downarrow\downarrow\rangle$  就比  $E(|\uparrow\downarrow\rangle)$  小. 因此, Slater 行列式所对应的能量的表达式中会出现交换积分, 实际上反映了这样一个事实: 即使在单行列式近似下, 有相同自旋的两个电子的运动也是相互关联着的 (相关 correlated).

**练习 2.22** Hartree 积近似下, 两个同自旋电子的运动之间没有关联, 因此如下的两个 Hartree 积

$$\Psi_{\uparrow\downarrow}^{HP} = \psi(\mathbf{r}_1)\alpha(\omega_1)\psi(\mathbf{r}_2)\beta(\omega_2)$$

和

$$\Psi_{\downarrow\downarrow}^{HP} = \psi(\mathbf{r}_1)\beta(\omega_1)\psi(\mathbf{r}_2)\beta(\omega_2)$$

的能量与  $E_{\uparrow\downarrow}$  相等. 请证明它们相等.

### 2.3.7 行列式能量的伪经典阐释

2.3.3 节中引入了一种助记法, 以便将自旋轨道集合  $\{\chi_i\}$  构成的单行列式所对应的能量写成单电子自旋轨道积分 ( $\langle i|h|i\rangle$ ) 和反对称化的双电子自旋轨道积分 ( $\langle ij|ij\rangle$ ) 之和. 此处我们改换记法, 将限制性单行列式 (由自旋轨道  $\{\psi_i\alpha\}$  和  $\{\psi_i\beta\}$  构成) 的能量用  $h_{ii}$ 、库伦积分 ( $J_{ij}$ )、交换积分  $K_{ij}$  写出. 实际上两种写法的都很简便.

先讨论能量中的单电子项. 之前提过自旋轨道  $\chi_i$  上的一电子会贡献出一项  $\langle i|h|i\rangle$ . 若  $\chi_i = \psi_i\alpha$ , 那么  $\langle i|h|i\rangle = \langle \psi_i\alpha|h|\psi_i\alpha\rangle = \langle \psi_i|h|\psi_i\rangle = h_{ii}$ . 若  $\chi_i = \psi_i\beta$ , 那么结果也一样  $\langle i|h|i\rangle = h_{ii}$ . 如此由如下结论: 空间轨道  $\psi_i$  上的一个电子 (无论自旋如何) 会在总能量中贡献一项  $h_{ii}$ .

下面考察能量中的双电子贡献. 之前提过自旋轨道  $\chi_i, \chi_j$  中的一对电子在总能中贡献一项  $\langle ij|ij\rangle$ . 一对电子既可以有平行的自旋, 也可以是相反自旋. 若自旋相反, 即  $\chi_i = \psi_i\alpha, \chi_j = \psi_j\beta$ , 那么

$$\langle ij|ij\rangle = [\psi_i\psi_i|\bar{\psi}_j\bar{\psi}_j] - [\psi_i\bar{\psi}_j|\bar{\psi}_j\psi_i] = J_{ij} \quad (2.196)$$

与此相反, 若一对电子的自旋平行, 即  $\chi_i = \psi_i\beta, \chi_j = \psi_j\beta$ , 则

$$\langle ij|ij\rangle = [\bar{\psi}_i\bar{\psi}_i|\bar{\psi}_j\bar{\psi}_j] - [\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j|\bar{\psi}_j\bar{\psi}_i] = J_{ij} - K_{ij} \quad (2.197)$$

因此我们由如下论断：**空间轨道  $\psi_i, \psi_j$  中的每一对电子（无论其自旋）都对能量贡献一项  $J_{ij}$ ，空间轨道  $\psi_i, \psi_j$  中的一对自旋平行电子对能量贡献一项  $-K_{ij}$ 。**行列式对应的总能就是这些项之和。

如此，我们就能把一个由限制性行列式所代表的  $N$ -电子系统的能量写成单电子能量之和（空间轨道  $\psi_i$  上的一个电子贡献一项  $h_{ii}$ ），加上每一对电子产生的库伦作用（空间轨道  $\psi_i, \psi_j$  中的一对电子产生一项  $J_{ij}$ ），再加上每对自旋平行电子产生的交换作用（空间轨道  $\psi_i, \psi_j$  中的一对自旋平行电子产生一项  $-K_{ij}$ ）。按这种方式来表述能量时需记住，自旋平行的电子之间的交换作用只不过是一种方便的表述方式，是为了将由单行列式所描述的系统的能量以简单的方式表达出来，它本身并无真实物理意义。若真的论及两电子间真实的物理相互作用，我们只能说这种相互作用由哈密顿量中的库伦排斥项（ $r_{ij}^{-1}$ ）所描述，而与自旋无关。

下面举一个例子来说明以上的方法：考虑如下行列式的能量

$$\begin{array}{c} \text{---}\downarrow\text{---} 1 \\ |\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_2\bar{\psi}_3\rangle = \text{---}\uparrow\downarrow\text{---} 1 \\ \text{---}\downarrow\text{---} 1 \end{array}$$

能量中的单电子部分为  $h_{11}, 2h_{22}, h_{33}$ 。库伦部分为  $J_{22}, J_{13}, 2J_{12}, 2J_{23}$ 。交换作用的部分为  $-K_{23}, -K_{12}, -K_{13}$ 。那么总能量就是  $h_{11} + 2h_{22} + h_{33} + J_{22} + J_{13} + 2J_{12} + 2J_{23} - K_{23} - K_{12} - K_{13}$ 。

**练习 2.23** 直接看出如下几个行列式的能量，并与后面给出的式子对照。

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & \uparrow & \uparrow & & \uparrow\downarrow & \uparrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow \\ \text{---}\uparrow\downarrow\text{---} & \text{---}\downarrow\text{---} & \text{---}\uparrow\downarrow\text{---} & \text{---} & \text{---}\uparrow\downarrow\text{---} & \text{---}\uparrow\text{---} & \text{---}\uparrow\downarrow\text{---} & \text{---}\uparrow\downarrow\text{---} \\ \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} & \text{(d)} & \text{(e)} & \text{(f)} & \text{(g)} \end{array}$$

- a.  $h_{11} + h_{22} + J_{12} - K_{12}$
- b.  $h_{11} + h_{22} + J_{12}$
- c.  $2h_{11} + J_{11}$
- d.  $2h_{22} + J_{22}$
- e.  $2h_{11} + h_{22} + J_{11} + 2J_{12} - K_{12}$
- f.  $2h_{22} + h_{11} + J_{22} + 2J_{12} - K_{12}$
- g.  $2h_{11} + 2h_{22} + J_{11} + J_{22} + 4J_{12} - 2K_{12}$

2.4 二次量子化

反对称原理是量子力学中的一个公理，不用说，薛定谔方程本身也是量子力学公理之一。我们之前已经通过 Slater 行列式及其线性组合来保证波函数满足这个原理。那么能否用 Slater 行列式以外的办法来满足反对称原理呢？二次量子化就是这样一种框架，在这个框架下波函数的反对称性质被转化为一些算子的代数性质。二次量子化中不包含新的物理，它只是另外一种处理多电子体系的办法，虽然这个办法相当优雅。借助二次量子化，我们可以把重心从  $N$ -电子波函数本身上移开，转而关注之前研究过的单双电子积分  $\langle i|h|j\rangle, \langle ij|kl\rangle$ 。二次量子化在与多电子问题相关的文献中由广泛应用。这里讲述二次量子化不仅是提供一种推导之前所得结果的额外办法，更是为接触这些文献作准备。本书其余章节并未一般性地使用二次量子化，因此本节可以选读。

### 2.4.1 产生、湮灭算符及其反对易关系

我们从行列式出发, 展示行列式的性质可以转换为算符的代数性质, 逐步构建二次量子化框架. 首先我们为每个自旋轨道  $\chi_i$  配上一个产生算符, 用它作用于任意行列式  $|\chi_k \cdots \chi_l\rangle$  上产生的效果来定义这个算符本身, 作用效果如下

$$a_i^\dagger |\chi_k \cdots \chi_l\rangle = |\chi_i \chi_k \cdots \chi_l\rangle \quad (2.198)$$

因此  $a_i^\dagger$  的效果就是在自旋轨道  $\chi_i$  上产生一个电子. 两个产生算符作用到行列式上时, 作用顺序很重要. 考虑

$$a_i^\dagger a_j^\dagger |\chi_k \cdots \chi_l\rangle = a_i^\dagger |\chi_j \chi_k \cdots \chi_l\rangle = |\chi_i \chi_j \chi_k \cdots \chi_l\rangle \quad (2.199)$$

另一方面

$$\begin{aligned} a_j^\dagger a_i^\dagger |\chi_k \cdots \chi_l\rangle &= a_j^\dagger |\chi_i \chi_k \cdots \chi_l\rangle = |\chi_j \chi_i \chi_k \cdots \chi_l\rangle \\ &= -|\chi_i \chi_j \chi_k \cdots \chi_l\rangle \end{aligned} \quad (2.200)$$

其中用到了 Slater 行列式的反对称性质 (见式 (2.40)). 将式 (2.191)(2.192) 加起来可得

$$(a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger) |\chi_k \cdots \chi_l\rangle = 0 \quad (2.201)$$

由于  $|\chi_k \cdots \chi_l\rangle$  可以是任意行列式, 所以可得一个算符之间的关系:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger = 0 = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} \quad (2.202)$$

其中使用了之前引入的两个算符的反对易子记号 (见式 (1.19a)). 由于

$$a_i^\dagger a_j^\dagger = -a_j^\dagger a_i^\dagger \quad (2.203)$$

我们可以利用这个性质来交换两个产生算符的顺序——只要记得改变符号就行. 若  $i = j$ , 则有

$$a_i^\dagger a_i^\dagger = -a_i^\dagger a_i^\dagger = 0 \quad (2.204)$$

这就是说, 无法在一个自旋轨道上产生两个电子 (Pauli 排斥原理). 因此

$$a_1^\dagger a_1^\dagger |\chi_2 \chi_3\rangle = a_1^\dagger |\chi_1 \chi_2 \chi_3\rangle = |\chi_1 \chi_1 \chi_2 \chi_3\rangle = 0 \quad (2.205)$$

更一般地

$$a_i^\dagger |\chi_k \cdots \chi_l\rangle = 0, \quad \text{若 } i \in \{k, \dots, l\} \quad (2.206)$$

也就是说, 如果自旋轨道  $\chi_i$  上已有一个电子, 那么就无法再于  $\chi_i$  上产生一个电子.

#### 练习 2.24 请用行列式的性质证明

$$(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_2^\dagger a_1^\dagger) |K\rangle = 0$$

其中  $|K\rangle$  是以下行列式中的任意一个  $\{|\chi_1 \chi_2\rangle, |\chi_1 \chi_3\rangle, |\chi_1 \chi_4\rangle, |\chi_2 \chi_3\rangle, |\chi_2 \chi_4\rangle, |\chi_3 \chi_4\rangle, \}$

现在引进**湮灭算符**  $a_i$ . 它是产生算符  $a_i^\dagger$  的伴随算符 (adjoint operator) (即  $(a_i^\dagger)^\dagger = a_i$ ). 和式 (2.190) 的精神类似,  $a_i$  按下式定义:

$$a_i |\chi_i \chi_k \cdots \chi_l\rangle = |\chi_k \cdots \chi_l\rangle \quad (2.207)$$

那么  $a_i$  的作用就是在  $\chi_i$  上挪去或者湮灭一个电子. 注意湮灭算符作用在行列式上时, 若想湮灭某个自旋轨道上的电子, 该自旋轨道必须在行列式的最左边. 如果自旋轨道不在合适的位置上, 则必须交换行列式中的列, 以将自旋轨道放在合适的位置:

$$a_i |\chi_k \chi_l \chi_i\rangle = -a_i |\chi_i \chi_l \chi_k\rangle = -|\chi_l \chi_k\rangle = |\chi_k \chi_l\rangle \quad (2.208)$$

那么, 为什么湮灭算符被定义为产生算符的伴随算符? 考虑如下行列式

$$|K\rangle = |\chi_i \chi_j\rangle \quad (2.209)$$

很明显

$$|K\rangle = a_i^\dagger |\chi_j\rangle \quad (2.210)$$

取上式的伴随, 则有 (见式 (1.52)(1.57))

$$\langle K|K\rangle = \langle \chi_j | a_j | K\rangle \quad (2.211)$$

由于  $\langle K|K\rangle = 1 = \langle \chi_j | \chi_j\rangle$ , 只有当下式成立时, 我们的框架才是自洽的:

$$a_i |K\rangle = a_i |\chi_i \chi_j\rangle = |\chi_j\rangle \quad (2.212)$$

这与式 (2.199) 中湮灭算符的定义相同. 由式 (2.203) 可知道,  $a_i$  如果作用再一个放在左边的行列式上, 其作用于产生算符相同. 类似,  $a_i^\dagger$  作用在左边的行列式上, 效果和湮灭算符相同. 举个例子, 式 (2.205) 的伴随就是

$$\langle K|a_i^\dagger = \langle \chi_j| \quad (2.213)$$

为得到湮灭算子的反对易关系, 我们取 (2.194) 的伴随. 由于 (见练习 1.3):

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^\dagger = \mathcal{B}^\dagger \mathcal{A}^\dagger \quad (2.214)$$

那么

$$a_j a_i + a_i a_j = 0 = \{a_j, a_i\} \quad (2.215)$$

因此

$$a_i a_j = -a_j a_i \quad (2.216)$$

所以我们能交换两个湮灭算符的顺序, 只要记得改变符号. 若  $i = j$ , 则

$$a_i a_i = -a_i a_i = 0 \quad (2.217)$$

这就是说无法湮灭一个电子两次. 推论就是无法从一个本来没有电子占据的自旋轨道上挪去一个电子:

$$a_i |\chi_k \cdots \chi_l\rangle = 0 \quad \text{若 } i \notin \{k, \dots, l\} \quad (2.218)$$

还未讨论的就是产生算符和湮灭算符之间应该如何交换顺序. 考虑算符  $a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i$  作用于任意行列式  $|\chi_k \cdots \chi_l\rangle$  上. 若自旋轨道  $\chi_i$  在这个行列式中并未被电子占据, 则有

$$(a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i) |\chi_k \cdots \chi_l\rangle = a_i a_i^\dagger |\chi_k, \dots, \chi_l\rangle \quad (2.219)$$

$$= a_i |\chi_i \chi_k \cdots \chi_l\rangle \quad (2.220)$$

$$= |\chi_k \cdots \chi_l\rangle \quad (2.221)$$

另一方面, 若  $\chi_i$  是一个占据轨道, 则有

$$(a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i) |\chi_k \cdots \chi_l\rangle = a_i^\dagger |\chi_k \cdots \chi_i \cdots \chi_l\rangle \quad (2.222)$$

$$= -a_i^\dagger a_i |\chi_i \cdots \chi_k \cdots \chi_l\rangle \quad (2.223)$$

$$= -a_i^\dagger |\cdots \chi_k \cdots \chi_l\rangle \quad (2.224)$$

$$= |\chi_k \cdots \chi_i \cdots \chi_l\rangle \quad (2.225)$$

两种情况下所得的结果一样. 因此可得算符之间的关系

$$(a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i) = 1 = \{a_i, a_i^\dagger\} \quad (2.226)$$

最后来考虑  $(a_j^\dagger a_i + a_i a_j^\dagger) |\chi_k \cdots \chi_j\rangle$  ( $i \neq j$ ). 这个式子仅当自旋轨道  $\chi_i$  在行列式中, 且  $\chi_j$  不在行列式中时才不为 0. 否则, 由于  $a_i^\dagger$  的动作是产生一个电子 (而现在已有一个电子在相应轨道上), 或者  $a_i$  的试图湮灭一个不存在的电子, 结果就会是零. 但是, 即使  $i \in \{k, \dots, l\}, j \notin \{k, \dots, l\}$ , 结果也会是零, 因为行列式是反对称的:

$$\begin{aligned} (a_i a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i) |\chi_k \cdots \chi_i \cdots \chi_l\rangle &= -(a_i a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i) |\chi_i \cdots \chi_k \cdots \chi_l\rangle \\ &= -a_i |\chi_j \chi_i \cdots \chi_k \cdots \chi_l\rangle - a_j^\dagger |\cdots \chi_k \cdots \chi_l\rangle \\ &= a_i |\chi_i \chi_j \cdots \chi_k \cdots \chi_l\rangle - |\chi_j \cdots \chi_k \cdots \chi_l\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.227)$$

因此就有

$$a_i a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i = 0 = \{a_i, a_j^\dagger\} \quad i \neq j \quad (2.228)$$

将此式与 (2.214) 合在一起就得到了产生算符和湮灭算符的反对易关系:

$$a_i a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i = \delta_{ij} = \{a_i, a_j^\dagger\} \quad (2.229)$$

有了这个式子, 就能按照它来交换产生算符和湮灭算符的次序, 只要他们关联着的自旋轨道不同, 即  $i \neq j$ , 那么交换时只要变号即可:

$$a_i a_j^\dagger = -a_j^\dagger a_i \quad i \neq j \quad (2.230)$$

但需注意, 若这两个算符所关联的自旋轨道相同 ( $i = j$ ), 那么会有如下式子:

$$a_i a_i^\dagger = 1 - a_i^\dagger a_i \quad (2.231)$$

**练习 2.25** 请利用行列式的性质证明

$$(a_1 a_2^\dagger + a_2^\dagger a_1) |K\rangle = 0$$

$$(a_1 a_1^\dagger + a_1^\dagger a_1) |K\rangle = |K\rangle$$

当  $|K\rangle$  是如下任一个的时候都成立:  $\{|\chi_1\chi_2\rangle, |\chi_1\chi_3\rangle, |\chi_1\chi_4\rangle, |\chi_2\chi_3\rangle, |\chi_2\chi_4\rangle, |\chi_3\chi_4\rangle\}$ .

Slater 行列式的所有性质都蕴含在这几个反对易关系中, 包括: 一对产生算符的反对易关系 (式 (2.194)), 一对湮灭算符的反对易关系 (式 (2.208)), 产生算符和湮灭算符之间的反对易关系 (式 (2.217)). 为在二次量子化框架下定义 Slater 行列式, 需要引入一个真空态  $|\rangle$ . 所谓真空态, 是系统的一种状态: 此时系统内没有任何电子. 规定真空态是归一化的:

$$\langle | \rangle = 1 \quad (2.232)$$

而且有如下性质:

$$a_i |\rangle = 0 = \langle | a_i^\dagger \quad (2.233)$$

这个式子的意思是: 真空态中没有电子, 那么就无法从中挪去一个电子. 若把产生算符连续地作用到真空态上, 则可以构造出系统的任何态. 比如

$$|\chi_i\rangle = a_i^\dagger |\rangle \quad (2.234)$$

或者更一般地

$$a_i^\dagger a_k^\dagger \cdots a_l^\dagger |\rangle = |\chi_i \chi_k \cdots \chi_l\rangle \quad (2.235)$$

这个式子就是二次量子化表象下的 Slater 行列式. 从行列式中导出的一切结论同样能用产生算符和湮灭算符的代数性质导出来.

练习 2.5 中曾计算过两个行列式之间的重叠:

$$|K\rangle = |\chi_i \chi_j\rangle = a_i^\dagger a_j^\dagger |\rangle \quad (2.236)$$

$$|L\rangle = |\chi_k \chi_l\rangle = a_k^\dagger a_l^\dagger |\rangle \quad (2.237)$$

那里用的办法是将行列式展开, 再对两个电子的空间坐标和自旋坐标积分, 使用自旋轨道之间的正交性. 这里用二次量子化的办法计算这个重叠. 式 (2.223) 的伴随是:

$$\langle K| = \langle | (a_i^\dagger a_j^\dagger)^\dagger = \langle | a_j a_i \quad (2.238)$$

由此可知

$$\langle k|L\rangle = \left\langle \left| a_j a_i a_k^\dagger a_l^\dagger \right| \right\rangle \quad (2.239)$$

求这个矩阵元的一般策略就是利用反对易关系把湮灭算符挪到最右边, 这样就和真空态直接接触. 我们先处理  $a_i$ . 由于

$$a_i a_k^\dagger = \delta_{ik} - a_k^\dagger a_i \quad (2.240)$$

我们有

$$\langle K|L\rangle = \left\langle \left| a_j(\delta_{ik} - a_k^\dagger a_i) a_l^\dagger \right| \right\rangle \quad (2.241)$$

$$= \delta_{ik} \left\langle \left| a_j a_l^\dagger \right| \right\rangle - \left\langle \left| a_j a_k^\dagger a_i a_l^\dagger \right| \right\rangle \quad (2.242)$$

下一步就是将第一项中的  $a_j$  以及第二项中的  $a_i$  都挪到靠右的地方, 得到:

$$\langle K|L\rangle = \delta_{ik} \delta_{jl} \langle | \rangle - \delta_{ik} \left\langle \left| a_l^\dagger a_j \right| \right\rangle - \delta_{il} \left\langle \left| a_j a_k^\dagger \right| \right\rangle + \left\langle \left| a_j a_k^\dagger a_l^\dagger a_i \right| \right\rangle \quad (2.243)$$

上式的第二项和最后项都是一个湮灭算符作用在真空态上, 其结果为 0. 最后一步就是把第三项中的  $a_j$  挪到最右:

$$\begin{aligned} \langle K|L\rangle &= \delta_{ik} \delta_{jl} \langle | \rangle - \delta_{il} \delta_{jk} \langle | \rangle + \delta_{il} \left\langle \left| a_k^\dagger a_j \right| \right\rangle \\ &= \delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{il} \delta_{jk} \end{aligned} \quad (2.244)$$

第二个等号是由于真空态已预先规定为归一化的. 这里所得的结果于练习 2.5 中的相同.

**练习 2.26** 用二次量子化的办法证明  $\langle \chi_i | \chi_j \rangle = \delta_{ij}$ .

**练习 2.27** 设想一个态

$$|K\rangle = |\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_N\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger \cdots a_N^\dagger | \rangle$$

请证明在  $i = j, i \in \{1, 2, \dots, N\}$  的条件下,  $\langle K | a_i^\dagger a_j^\dagger | K \rangle = 1$ .

**练习 2.28** 令  $|\Psi_0\rangle = |\chi_1 \cdots \chi_a \chi_b \cdots \chi_N\rangle$  为一 Hartree-Fock 基态. 请证明

- $a_r |\Psi_0\rangle = 0 = \langle \Psi_0 | a_r^\dagger$ .
- $a_a^\dagger |\Psi_0\rangle = 0 = \langle \Psi_0 | a_a$ .
- $|\Psi_0\rangle = a_r^\dagger a_a |\Psi_0\rangle$ .
- $\langle \psi_a^r | = \langle \Psi_0 | a_a^\dagger a_r$ .
- $|\Psi_{ab}^{rs}\rangle = a_s^\dagger a_b a_r^\dagger a_a |\Psi_0\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger a_b a_a |\Psi_0\rangle$ .
- $\langle \Psi_{ab}^{rs} | = \langle \Psi_0 | a_a^\dagger a_r a_b^\dagger a_s = \langle \Psi_0 | a_a^\dagger a_b^\dagger a_s a_r$ .

### 2.4.2 二次量子化算符及其矩阵元

到此我们已经了解, 行列式可由产生算符、湮灭算符、真空态来表示. 这些算符满足一组反易关系. 目前所建立的就是一种满足反对称原理的多电子波函数的表象, 操作此表象完全不用借助行列式的性质. 为了完成这个不借助行列式的多电子体系的理论, 须将多电子算符  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  也用产生湮灭算符表示. 有一点是确定的, 二次量子化表象下正确的  $\mathcal{O}$ , 其矩阵元  $\langle K | \mathcal{O} | L \rangle$



无论是用行列式的性质求, 还是用算符的代数性质来求, 数值必须相同.  $\mathcal{O}_1$ (或单电子算符之和) 与  $\mathcal{O}_2$ (或电子间的总的库伦排斥算符) 正确的二次量子化表达式如下:

$$\mathcal{O}_1 = \sum_{ij} \langle i|h|j \rangle a_i^\dagger a_j \quad (2.245)$$

$$\mathcal{O}_2 = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij|kl \rangle a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k \quad (2.246)$$

其中求和遍及整个自旋轨道集合  $\{\chi_i\}$ . 有一点要指出, 在这种形式的算符与电子的数目并无关系, 而且单、双电子积分都显式地出现在表达式中. 二次量子化的优点就是体系的电子数目不同时, 处理方法不变. 当研究固体时这个形式有很大便利.

**练习 2.29** 令  $\Psi_0 = |\chi_1 \chi_2\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger | \rangle$  为极小基  $H_2$  的 Hartree-Fock 波函数. 请用二次量子化的办法证明

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_1 | \Psi_0 \rangle = \sum_{ij} \langle i|h|j \rangle \left\langle , \left| a_2 a_1 a_i^\dagger a_j a_1^\dagger a_2^\dagger \right| \right\rangle = \langle 1|h|1 \rangle + \langle 2|h|2 \rangle$$

为说明二次量子化与之前用 Slater 行列式所得的结果等价, 现用二次量子化的办法计算 Hartree-Fock 基态  $|\Psi_0\rangle = |\chi_1 \cdots \chi_a \chi_v \cdots \chi_N\rangle$  的能量. 对单电子算符之和, 我们有

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_1 | \Psi_0 \rangle = \sum_{ij} \langle i|h|j \rangle \left\langle \Psi_0 \left| a_i^\dagger a_j \right| \Psi_0 \right\rangle \quad (2.247)$$

由于上式中  $a_j, a_i^\dagger$  的作用就是湮灭一个电子 ( $a_j$  作用在右边,  $a_i^\dagger$  作用在左边), 指标  $i, j$  须在集合  $\{a, b, \dots\}$  之内取, 那么

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_1 | \Psi_0 \rangle = \sum_{ab} \langle a|h|b \rangle \left\langle \Psi_0 \left| a_a^\dagger a_b \right| \Psi_0 \right\rangle \quad (2.248)$$

利用

$$a_a^\dagger a_b = \delta_{ab} - a_b a_a^\dagger \quad (2.249)$$

把  $a_a^\dagger$  挪到右边, 有

$$\left\langle \Psi_0 \left| a_a^\dagger a_b \right| \Psi_0 \right\rangle = \delta_{ab} \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle - \left\langle \Psi_0 \left| a_b a_a^\dagger \right| \Psi_0 \right\rangle \quad (2.250)$$

右边第二项为 0, 因为  $a_a^\dagger$  试图在  $\chi_a$  上产生一个电子, 而这个  $|\Psi_0\rangle$  中的轨道已经被电子占据了. 又由于  $\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = 1$ , 最终结果就是

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_1 | \Psi_0 \rangle = \sum_{ab} \langle a|h|b \rangle \delta_{ab} = \sum_a \langle a|h|a \rangle \quad (2.251)$$

与表 2.5 给出的结果完全相同.

对双电子算符之和, 有

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_2 | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij|kl \rangle \left\langle \Psi_0 \left| a_i^\dagger a_j^\dagger a_i a_k \right| \Psi_0 \right\rangle \quad (2.252)$$

基于和单电子算符那里一样的理由, 指标  $i, j, k, l$  应该限制在  $\{a, b, \dots\}$  内:

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_2 | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{abcd} \langle ab | cd \rangle \langle \Psi_0 | a_a^\dagger a_b^\dagger a_c a_d | \Psi_0 \rangle \quad (2.253)$$

然后就是和上面一样的办法: 将  $a_a^\dagger, a_b^\dagger$  挪到右边使其作用到  $|\Psi_0\rangle$  上:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | a_i^\dagger a_j^\dagger a_i a_k | \Psi_0 \rangle &= \delta_{bd} \langle \Psi_0 | a_a^\dagger a_c | \Psi_0 \rangle - \langle \Psi_0 | a_a^\dagger a_d a_b^\dagger a_c | \Psi_0 \rangle \\ &= \delta_{bd} \delta_{ac} \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle - \delta_{bd} \langle \Psi_0 | a_c a_a^\dagger | \Psi_0 \rangle \\ &\quad - \delta_{bc} \langle \Psi_0 | a_a^\dagger a_d | \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0 | a_i^\dagger a_d a_c a_b^\dagger | \Psi_0 \rangle \\ &= \delta_{bd} \delta_{ac} - \delta_{bc} \delta_{ad} \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle + \delta_{bc} \langle \Psi_0 | a_d a_a^\dagger | \Psi_0 \rangle \\ &= \delta_{bd} \delta_{ac} - \delta_{bc} \delta_{ad} \end{aligned}$$

结果就是两项: 第一项中令  $c = a, d = b$ , 第二项令  $c = b, d = a$ , 就得到与表 2.6 相同的结果:

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{O}_2 | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{ab} \langle ab | ab \rangle - \langle ab | ba \rangle \quad (2.254)$$

**练习 2.30** 证明:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_a^\dagger | \mathcal{O}_1 | \Psi_0 \rangle &= \sum_{ij} \langle i | h | j \rangle \langle \Psi_0 | a_a^\dagger a_r a_i^\dagger a_j | \Psi_0 \rangle \\ &= \langle r | h | a \rangle \end{aligned}$$

记得将  $a_a^\dagger, a_r$  挪到最右.

**练习 2.31** 证明:

$$\langle \Psi_a^\dagger | \mathcal{O}_2 | \Psi_0 \rangle = \sum_a^N \langle r b | a b \rangle$$

提示: 先证明

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | a_a^\dagger a_r a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k | \Psi_0 \rangle &= \delta_{rj} \delta_{al} \langle \Psi_0 | a_i^\dagger a_k | \Psi_0 \rangle - \delta_{rj} \delta_{ak} \langle \Psi_0 | a_i^\dagger a_l | \Psi_0 \rangle \\ &\quad + \delta_{ri} \delta_{ak} \langle \Psi_0 | a_j^\dagger a_l | \Psi_0 \rangle - \delta_{ri} \delta_{al} \langle \Psi_0 | a_j^\dagger a_k | \Psi_0 \rangle \end{aligned}$$

之后可参考练习 2.27.

## 2.5 自旋匹配组态

之前提到, 电子的自旋可由两个自旋函数  $\alpha(\omega) \equiv \alpha, \beta(\omega) \equiv \beta$  来描述. 本节会更详细地讨论自旋, 并讨论多电子系统的自旋态. 会讲述由一组自旋轨道构成的**限制性** Slater 行列式:  $\alpha$  自旋所对应的空间轨道与  $\beta$  自旋所对应的相同, 也即  $\{\chi_i\} = \{\psi_i \alpha, \psi_b \beta\}$ . 限制性行列式除了一些特殊情形外, 都不是总自旋算符的本征函数. 但可以将行列式恰当地线性组合起来, 以得到**自旋匹配组态**, 它是正确的本征函数. 本节最后会讲述**非限制性**行列式, 其中的每一对自旋轨道中, 两个自旋对应的空间轨道是不一样的, 即  $\{\chi_i\} = \{\psi_i^\alpha \alpha, \psi_b^\beta \beta\}$ .

### 2.5.1 自旋算符

单个粒子的自旋角动量算符是矢量算符:

$$\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k} \quad (2.255)$$

此处  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  是沿着  $x, y, z$  方向的单位向量.  $\vec{s}$  的平方则是标量算符:

$$s^2 = \vec{s} \cdot \vec{s} = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 \quad (2.256)$$

自旋角动量分量满足如下 易关系:

$$[s_x, s_y] = i s_z, \quad [s_y, s_z] = s_x, \quad [s_z, s_x] = i s_y \quad (2.257)$$

描述单个粒子的完全集可以选为  $s^2$  及其某个分量的共同本征函数, 一般将分量选为  $s_z$ :

$$s^2 |s, m_s\rangle = s(s+1) |s, m_s\rangle \quad (2.243a)$$

$$s_z |s, m_s\rangle = m_s |s, m_s\rangle \quad (2.243b)$$

式中  $s$  是描述总自旋的一个量子数,  $m_s$  是描述自旋  $z$  分量的量子数.  $s$  的允许值为  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ ,  $m_s$  有  $2s+1$  个可能值:  $-s, -s+1, -s+2, \dots, s-1, s$ . 对于电子这两个值是  $s = \frac{1}{2}, m_s = \pm \frac{1}{2}$ . 那么描述电子自旋的完全集为

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\alpha\rangle \quad (2.259a)$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\beta\rangle \quad (2.259b)$$

这两个态是  $s^2, s_z$  的本征态:

$$s^2 |\alpha\rangle = \frac{3}{4} |\alpha\rangle, \quad s^2 |\beta\rangle = \frac{3}{4} |\beta\rangle \quad (2.260a)$$

$$s_z |\alpha\rangle = \frac{1}{2} |\alpha\rangle, \quad s_z |\beta\rangle = -\frac{1}{2} |\beta\rangle \quad (2.260b)$$

但不是  $s_x, s_y$  的本征态:

$$s_x |\alpha\rangle = \frac{1}{2} |\beta\rangle, \quad s_x |\beta\rangle = \frac{1}{2} |\alpha\rangle \quad (2.261a)$$

$$s_y |\alpha\rangle = \frac{i}{2} |\beta\rangle, \quad s_y |\beta\rangle = -\frac{i}{2} |\alpha\rangle \quad (2.261b)$$

我们平常不太使用  $s_x, s_y$ , 而是使用更为方便的阶梯算符: “上升” 算符  $s_+$  “下降” 算符  $s_-$ ,

$$s_+ = s_x + i s_y \quad (2.262a)$$

$$s_- = s_x - i s_y \quad (2.262b)$$

这两个算符可以升降  $m_s$  的值, 作用一次  $m_s$  的值变化 1:

$$s_+ |\alpha\rangle = 0, \quad s_+ |\beta\rangle = |\alpha\rangle \quad (2.263a)$$

$$s_- |\alpha\rangle = |\beta\rangle, \quad s_- |\beta\rangle = 0 \quad (2.263b)$$

(2.263c)

用 (2.242) 中的 易关系, 可将 (2.241) 中的  $s^2$  的表达式改写为:

$$s^2 = s_+ s_- - s_z + s_z^2 \quad (2.264a)$$

$$s^2 = s_- s_+ + s_z + s_z^2 \quad (2.264b)$$

**练习 2.32** a) 由 (2.245) 导出 (2.247); b) 推导式 (2.248).

**练习 2.33** 求出  $s^2, s_z, s_+, s_-$  在  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$  为基时的矩阵表示. 验证式 (2.248a,b) 的矩阵表示.

**练习 2.34** 用 (2.242) 中的反 易关系证明  $[s^2, s_z] = 0$ .

多电子体系的总自旋算符就是每个电子自旋算符的矢量和:

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^N \vec{S}(i) \quad (2.265)$$

由此式可以看出, 总自旋的分量以及阶梯算符就是对应的单电子算符之和:

$$S_I = \sum_{i=1}^N s_I(i) \quad I = x, y, z \quad (2.266a)$$

$$S_{\pm} = \sum_{i=1}^N s_{\pm}(i) \quad (2.266b)$$

总自旋的平方为

$$\begin{aligned} S^2 &= \vec{S} \cdot \vec{S} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{S}(i) \cdot \vec{S}(j) \\ &= S_+ S_- - S_z + S_z^2 \\ &= S_- S_+ + S_z + S_z^2 \end{aligned} \quad (2.267)$$

它就是对应的单电子算符 (对角项  $i = j$ ) 之和加上双电子算符 (交叉项  $i \neq j$ ) 之和.

在通常的非相对论处理下 (本书即如此), 哈密顿量中并无自旋坐标, 因此  $S, S_z$  都与哈密顿量对易:

$$[\mathcal{H}, S^2] = 0 = [\mathcal{H}, S_z] \quad (2.268)$$

那么, 哈密顿量的精确本征函数也就是这两个自旋算子的本征函数:

$$S^2 |\Phi\rangle = S(S+1) |\Phi\rangle \quad (2.269a)$$

$$S_z |\Phi\rangle = M_S |\Phi\rangle \quad (2.269b)$$

式中  $S, M_S$  分别是  $N$ -电子态  $|\Phi\rangle$  的总自旋量子数及其分量. 总自旋为  $S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  的态, 其多重度为  $(2S + 1) = 1, 2, 3, 4$ , 我们分别把这些态称作单重态、双重态、三重态、四重态等等. Schrödinger 方程的近似解并不一定是纯自旋态. 但是将近似波函数限制为单重、双重、三重态等等会比较方便.

所有的单行列式都是  $S_z$  的本征函数 (见练习 2.37). 写出来就是

$$S_z |\chi_i \chi_j \cdots \chi_k\rangle = \frac{1}{2}(N^\alpha - N_\beta) |\chi_i \chi_j \cdots \chi_k\rangle = M_S |\chi_i \chi_j \cdots \chi_k\rangle \quad (2.270)$$

式中  $N^\alpha$  是具有  $\alpha$  自旋的轨道数目,  $N^\beta$  是具有  $\beta$  自旋的轨道数目. 但要注意, 单行列式并不一定是  $S^2$  的本征函数. 正如我们在下一小节要讨论的那样, 通过几个行列式的线性组合, 可以构造出自旋匹配组态, 即  $S^2$  的正确的本征函数.

**练习 2.35** 考虑一个算符  $\mathcal{A}$ , 它与哈密顿量对易. 设  $|\Phi\rangle$  是  $\mathcal{H}$  的本征函数, 本征值为  $E$ . 证明  $\mathcal{A}|\Phi\rangle$  也是  $\mathcal{H}$  的本征函数, 对应本征值为  $E$ . 如果  $|\Phi\rangle$  是 (能量上的) 非简并态, 那么  $\mathcal{A}|\Phi\rangle$  就是  $|\Phi\rangle$  的倍数 (即  $\mathcal{A}|\Phi\rangle = a|\Phi\rangle$ ). 那么  $|\Phi\rangle$  就是  $\mathcal{A}$  的本征函数. 若存在简并, 可以用  $\mathcal{H}$  的简并本征函数的线性组合构造出  $\mathcal{A}$  的本征函数.

**练习 2.36** 设想厄米算符  $\mathcal{A}$  与  $\mathcal{H}$  对易, 它的两个非简并本征函数为  $|\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle$ , 即  $\mathcal{A}|\Phi_1\rangle = a_1|\Phi_1\rangle, \mathcal{A}|\Phi_2\rangle = a_2|\Phi_2\rangle, a_1 \neq a_2$ . 请证明  $|\Phi_1|\mathcal{H}|\Phi_2\rangle = 0$ . 由此可知, 哈密顿量在单重、三重态组态 (仅举一例) 之间的矩阵元为 0.

**练习 2.37** 证明式 (2.254). 提示: 使用式 (2.115) 将 Slater 行列式展开, 并注意到  $S_z$  与  $\mathcal{P}_n$  对易, 因为  $S_z$  在对电子指标的任意置换下都不变.

## 2.5.2 限制性行列式与自旋匹配组态

2.2.1 节中已经提过, 给定一组  $K$  个正交的空间轨道  $\{\psi_i | i = 1, 2, \dots, K\}$ , 可以构造  $2K$  个自旋轨道  $\{\chi_i | i = 1, 2, \dots, 2K\}$ , 每个空间轨道乘以  $\alpha$  或  $\beta$  即可:

$$\chi_{2i-1}(\mathbf{x}) = \psi_i(\mathbf{r})\alpha(\omega) \quad (2.271)$$

$$\chi_{2i}(\mathbf{x}) = \psi_i(\mathbf{r})\beta(\omega) \quad (2.272)$$

这些自旋轨道称为**限制性**自旋轨道, 用这些轨道构成的行列式称为限制性行列式. 在这样的行列式内,

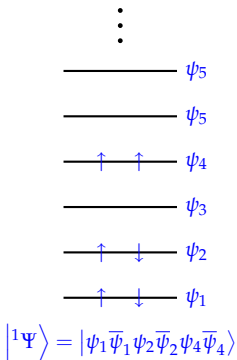


图 2.10: 一个单重态限制性行列式.

一个空间轨道  $\psi_i$  既可以由单个电子占据 (自旋上下都可以), 也能被两个电子占据 (自旋一上一下). 非限制性行列式可以按照单占据轨道的数目来分类. 所有轨道都被两个电子占据的行列式称为**闭壳层**行列式. 一个**开壳层**就代表一个仅含一个电子的空间轨道. 可以按照开壳层的数目来称呼行列式.

闭壳层行列式中的所有电子都配对, 那么很自然, 闭壳层行列式就是一个纯自旋单态. 也即, 它是  $S^2$  的本征函数, 本征值为零:

$$S^2 |\psi_i\bar{\psi}_i\psi_j\bar{\psi}_j\rangle = 0(0+1) |\psi_i\bar{\psi}_i\psi_j\bar{\psi}_j\rangle = 0 \quad (2.273)$$

可见练习 2.38. 最简单的闭壳层行列式就是极小基  $H_2$  的 Hartree-Fock 基态波函数:

$$|\Psi_0\rangle = |\psi_1\bar{\psi}_1\rangle = [\psi_1(1)\psi_1(2)]^{-1/2}(\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)) \quad (2.274)$$

式中最末的等号就是将行列式展开. 这个波函数的自旋部分就是一双电子系统的单重自旋函数. 同样, 双激发态  $|\Psi_{11}^{22}\rangle$  也是单重态.

**练习 2.38** 证明式 (2.256). 提示: 1)  $S^2 = S_-S_+ + S_z + S_z^2$ , 2) 用式 (2.254) 即可证明  $S_+ |\psi_i\bar{\psi}_i\rangle = 0$ , 3) 用式 (2.115) 展开行列式, 注意到  $S_+$  与置换算符对易, 4) 最后一步,  $s_+\psi\beta = \psi_\alpha$ , 但行列式此式为 0, 因为其中有相同的两列.

现在来看开壳层限制性行列式. 开壳层行列式**不是**  $S_2$  的本征函数, 除非所有开壳层电子的自旋都平行, 如图 2.12 中那样. 举个例子, 考虑极小基  $H_2$  的四个单激发行列式 (见式 (2.76), 四个都是开壳层行列式). 其中的两个

$$|\Psi_1^2\rangle = |\bar{2}\bar{1}\rangle = -2^{-1/2}[\psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_2(1)\psi_1(2)]\beta(1)\beta(2) \quad (2.275a)$$

$$|\Psi_1^2\rangle = |12\rangle = -2^{-1/2}[\psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_2(1)\psi_1(2)]\alpha(1)\alpha(2) \quad (2.275b)$$

$$(2.275c)$$

是  $S^2$  的本征函数, 本征值为  $1(1+1) = 2$ , 都是三重态. 另一方面, 剩下的两个行列式

$$|\Psi_1^2\rangle = |\bar{2}\bar{1}\rangle \quad (2.276a)$$

$$|\Psi_1^2\rangle = |1\bar{2}\rangle \quad (2.276b)$$

不是纯自旋态. 但若对这两个行列式进行恰当的线性组合, 就可以构造出自旋匹配组态, 那也就成为  $S^2$  的本征函数. 具体而言, 单重的自旋匹配组态可以如此构造:

$$\begin{aligned} |^1\Psi_1^2\rangle &= 2^{-1/2}(|\Psi_1^{\bar{2}}\rangle + |\Psi_1^2\rangle) \\ &= 2^{-1/2}(|1\bar{2}\rangle + |2\bar{1}\rangle) \\ &= 2^{-1/2}[\psi_1(1)\psi_2(2) + \psi_1(2)\psi_2(1)]2^{-1/2}(\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)) \end{aligned} \quad (2.277)$$

三重的自旋匹配组态构造如下

$$\begin{aligned} |^3\Psi_1^2\rangle &= 2^{-1/2}(|\Psi_1^{\bar{2}}\rangle - |\Psi_1^2\rangle) \\ &= 2^{-1/2}(|1\bar{2}\rangle - |2\bar{1}\rangle) \\ &= 2^{-1/2}[\psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_1(2)\psi_2(1)]2^{-1/2}(\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)) \end{aligned} \quad (2.278)$$

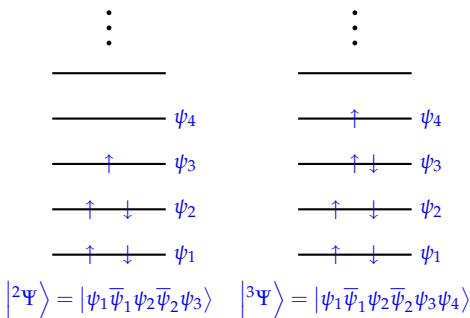


图 2.11: 双重和三重限制性行列式.

真如我们所期望的,  $|^1\Psi_1^2\rangle$  的自旋部分和闭壳层波函数 (2.257) 相同, 因为二者都是单重态.

---

**练习 2.39** 用此式  $S^2 = S_-S_+ + S_z + S_z^2$  证明  $|^1\Psi_1^2\rangle$  式单态,  $|^3\Psi_1^2\rangle$  和  $|^3\Psi_1^2\rangle$  是三态.

---

**练习 2.40** 证明

$$\begin{aligned} \langle ^2\Psi_1^2 | \mathcal{H} | ^1\Psi_1^2 \rangle &= h_{11} + h_{22} + J_{12} + K_{12} \\ \langle ^3\Psi_1^2 | \mathcal{H} | ^3\Psi_1^2 \rangle &= h_{11} + h_{22} + J_{12} - K_{12} \end{aligned}$$

由此三重态的能量就闭单重态能量低. 请用波函数的空间部分解释此现象.

$$\begin{array}{l}
s \text{ ---} \\
r \text{ ---} \uparrow\downarrow \text{ ---} \\
b \text{ ---} \uparrow\downarrow \text{ ---} \\
a \text{ ---}
\end{array} \quad |^1\Psi_{aa}^{rr}\rangle = |\Psi_{aa}^{r\bar{r}}\rangle$$

$$\begin{array}{l}
s \text{ ---} * \\
r \text{ ---} * \\
b \text{ ---} \uparrow\downarrow \text{ ---} \\
a \text{ ---}
\end{array} \quad |^1\Psi_{aa}^{rs}\rangle = 2^{-1/2}(|\Psi_{aa}^{r\bar{s}}\rangle + |\Psi_{aa}^{s\bar{r}}\rangle)$$

$$\begin{array}{l}
s \text{ ---} \\
r \text{ ---} \uparrow\downarrow \text{ ---} \\
b \text{ ---} * \\
a \text{ ---} *
\end{array} \quad |^1\Psi_{ab}^{rr}\rangle = 2^{-1/2}(|\Psi_{ab}^{r\bar{r}}\rangle + |\Psi_{ab}^{r\bar{r}}\rangle)$$

$$\begin{array}{l}
s \text{ ---} * \\
r \text{ ---} * \\
b \text{ ---} * \\
a \text{ ---} *
\end{array} \quad \begin{aligned}
|^A\Psi_{ab}^{rs}\rangle &= (12)^{-1/2}(2|\Psi_{ab}^{rs}\rangle + 2|\Psi_{ab}^{rs}\rangle - |\Psi_{ab}^{sr}\rangle + |\Psi_{ab}^{rs}\rangle + |\Psi_{ab}^{rs}\rangle - |\Psi_{ab}^{sr}\rangle) \\
|^B\Psi_{ab}^{rs}\rangle &= \frac{1}{2}(|\Psi_{ab}^{sr}\rangle + |\Psi_{ab}^{rs}\rangle + |\Psi_{ab}^{rs}\rangle + |\Psi_{ab}^{sr}\rangle)
\end{aligned}$$

下面将刚才所得的极小基  $H_2$  的结果推广. 第四章和第五章会用到单重自旋匹配组态, 它由如下闭壳层 Hatree-Fock 基态的单激发和双激发组成:

$$|\Psi_0\rangle = |1\bar{1}\dots a\bar{a}b\bar{b}\rangle \quad (2.279)$$

到底怎么找到办法来把单激发和双激发行列式线性组合为正确的自旋匹配组态就超出了本书的范围; 我们仅引用这些结果. 构建自旋本征函数的办法非常多. 对这些方法的一个权威且清晰的描述由 Paunz<sup>2</sup> 给出.

由单激发态 (一个电子由  $\psi_a$  激发到  $\psi_r$ ) 可以构建一个单重自旋匹配组态:

$$|^1\Psi_a^r\rangle = 2^{-1/2}(|\Psi_a^{r\bar{r}}\rangle + |\Psi_a^{r\bar{r}}\rangle) \quad (2.280)$$

若  $a=1, b=2$  则上面的式子就退化为极小基  $H_2$  的情形, 即 (2.260).

对双激发而言, 可能的单重自旋匹配组态很多, 结果已列在表 2.7 中. 若同一空间轨道的两个电子共同激发到另外一个空间轨道上, 由这种激发态构成的单重自旋匹配组态记为  $|\Psi_{aa}^{rr}\rangle$ . 同一空间轨道上的两个电子激发到了不同的空间轨道上, 由这种激发态构成的单重自旋匹配组态记为  $|\Psi_{aa}^{rs}\rangle$ . 不同空间轨道的两个电子激发到同一空间轨道, 由这种激发态构成的单重自旋匹配组态记为  $|\Psi_{ab}^{rr}\rangle$ . 最后一个, 不同空间轨道的两个电子激发到不同的空间轨道时, 有两个线性无关的单重自旋匹配组态, 记为  $|^A\Psi_{ab}^{rs}\rangle, |^B\Psi_{ab}^{rs}\rangle$ .

### 2.5.3 非限制性行列式

之前讨论的限制性行列式中,  $\alpha$  自旋和  $\beta$  自旋的空间轨道被限制为相同的. 举个例子, Li 原子的限制性 Hartree-Fock 基态为:

$$|^2\Psi_{\text{RHF}}\rangle = |\psi_{1s}\bar{\psi}_{1s}\psi_{2s}\rangle \quad (2.281)$$



如图 2.13 所示. 在这个行列式中,  $1s\alpha$  电子的空间部分和  $1s\beta$  电子的空间部分被限制为相同的函数. 这个限制是真实的, 因为  $1s\alpha$  电子与  $2s\alpha$  电子间由交换作用, 但与  $1s\beta$  之间没有. 那么  $2s\alpha$  电子就会“极化”  $1s$  壳层.  $1s\alpha$  和  $1s\beta$  电子感受到的有效势场不相同, 这两个电子更倾向于待在不同的空间波函数上. 直觉上我们可以预期, 如果空间波函数相同这个限制被打开, 即不同自旋可对应不同的空间轨道:

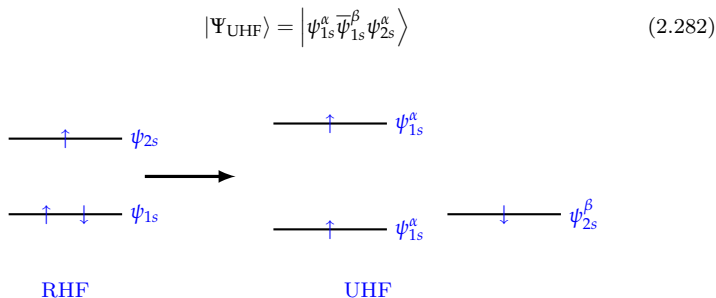


图 2.12: 将限制性的单行列式放宽为非限制性的单行列式: 以 Li 原子为例.

那么得到的能量应当更低. 事实确实如此. 波函数 (2.265) 是**非限制性**行列式一例. 它就是 Li 原子的非限制性基态波函数.

非限制性行列式由非限制自旋轨道构成. 使用非限制自旋轨道时, 不同自旋对应不同的空间轨道. 给定一组  $K$  个正交归一空间轨道  $\{\psi_i^{\alpha}\}$

$$\langle \psi_i^{\alpha} | \psi_j^{\alpha} \rangle = \delta_{ij} \quad (2.283)$$

以及另外一组  $K$  个正交归一空间轨道  $\{\psi_i^{\beta}\}$

$$\langle \psi_i^{\beta} | \psi_j^{\beta} \rangle = \delta_{ij} \quad (2.284)$$

而这两组轨道之间并不正交

$$\langle \psi_i^{\alpha} | \psi_j^{\beta} \rangle = S_{ij}^{\alpha\beta} \quad (2.285)$$

此处  $S_{ij}^{\alpha\beta}$  为重叠积分, 我们可以构造  $2K$  个**非限制性**自旋轨道:

$$\begin{aligned} \chi_{2i-1}(\mathbf{x}) &= \psi_i^{\alpha}(\mathbf{r})\alpha(\omega) \\ \chi_{2i}(\mathbf{x}) &= \psi_i^{\beta}(\mathbf{r})\beta(\omega) \end{aligned} \quad (2.286)$$

正如练习 2.1 所示, 这  $2K$  个非限制性轨道构成一个正交归一集, 虽然在空间部分,  $\alpha\beta$  轨道并不正交.

非限制性行列式不是  $S^2$  的本征函数. 此外, 它们也无法通过不多 (a small number of) 的行列式之间线性组合来成为自旋匹配的. 因此, Li 原子的 UHF 基态不像 RHF(2.264) 那样是一个纯双重态. 但是, 非限制性波函数场用作双重和三重态的初始近似.

图 2.14 代表一个非限制性波函数, 它是近似单重的. 注意到  $N^{\alpha} = N^{\beta}$ . 图中为强调非限制性, 将  $\alpha, \beta$  轨道特别画成非简并的状态. 非限制性单态常会收敛到对应的限制性单态上, 也

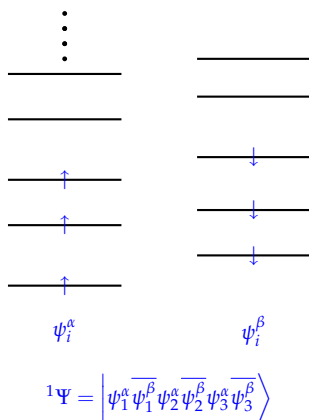


图 2.13: 一个近似为单重态的非限制性行列式.

就是闭壳层状态. 举个例子, 在我们的极小基  $\text{H}_2$  中, 在正常的兼长下, 闭壳层基态是  $|\psi_1 \bar{\psi}_1\rangle$ , 如果两个电子的空间部分不一样, 那么能量绘上升而非下降. 但是当键长很大时, 一个电子等效地处于一个氢核旁边, 另一个电子处在另一个核旁边, 那么这两个电子的空间部分应该很不相同. 因此在大键长下, 使用非限制性行列式要闭限制性所得的能量更低, 正如我们在下一章将看到的那样.

若  $N^\alpha = N^\beta + 1$ , 那么非限制性行列式近似地为双重态 (见图 2.15). 非限制性双重态常作为自由基的初级描述, 自由基有一个未配对电子, 如  $\text{CH}_3$ . 近似的三重态  $\alpha$  电子比  $\beta$  电子多两个, 如图 2.16 所示.

若  $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$  等是精确的自旋单、双、三...态, 那么图 2.14, 2.15, 2.16 中的非限制性态可以展开为:

$$|1\Psi\rangle = c_1^1 |1\rangle + c_3^1 |3\rangle + c_5^1 |5\rangle + \dots \quad (2.287a)$$

$$|1\Psi\rangle = c_2^1 |2\rangle + c_4^1 |4\rangle + c_6^1 |6\rangle + \dots \quad (2.287b)$$

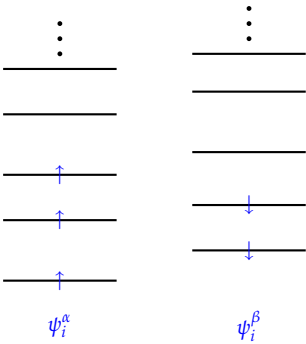
$$|1\Psi\rangle = c_3^1 |3\rangle + c_5^1 |5\rangle + c_7^1 |7\rangle + \dots \quad (2.287c)$$

可以看出非限制波函数绘包含更高自旋多重度的态, 而不包含更低的. 如果以上展式中领头项占主导地位, 那么就可以将非限制性行列式近似作双重态、三重态等等. 在非限制性行列式下,  $S^2$  的期望值常常过大, 因为非自旋纯态 (或称之为自旋污染态) 的  $S$  值绘比纯态更大. 具体而言, 可以证明

$$\langle S^2 \rangle_{\text{UHF}} = \langle S^2 \rangle_{\text{Exact}} + N^\beta - \sum_i^N \sum_j^N |S_{ij}^{\alpha\beta}|^2 \quad (2.288)$$

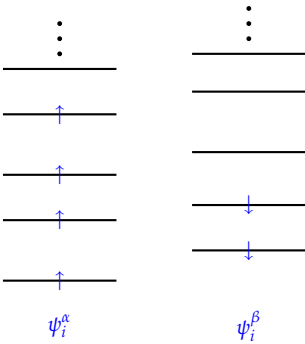
式中已设  $N^\alpha > N^\beta$ , 且

$$\langle S^2 \rangle_{\text{Exact}} = \left( \frac{N^\alpha - N^\beta}{2} \right) \left( \frac{N^\alpha - N^\beta}{2} + 1 \right) \quad (2.289)$$



$$^1\Psi = \left| \psi_2^\alpha \overline{\psi_1^\beta} \psi_2^\alpha \overline{\psi_2^\beta} \psi_3^\alpha \right\rangle$$

图 2.14: 一个近似为双重态的非限制性行列式。



$$^1\Psi = \left| \psi_3^\alpha \overline{\psi_1^\beta} \psi_2^\alpha \overline{\psi_2^\beta} \psi_3^\alpha \psi_3^\alpha \right\rangle$$

图 2.15: 一个近似为三重态的非限制性行列式。

虽然有自旋污染这个问题，但非限制性行列式仍常用作双重态核三重态的第一次近似，因为非限制性行列式的能量比对应的限制性行列式更低。

**练习 2.41** 考虑行列式  $|K\rangle = |\psi_1^\alpha \overline{\psi_1^\beta}\rangle$ ，它由非正交的空间轨道构成：  $\langle \psi_1^\alpha | \psi_1^\beta \rangle = S_{11}^{\alpha\beta}$ 。请证明只有当  $\psi_1^\alpha = \psi_1^\beta$  时  $|K\rangle$  才是  $\mathcal{S}^2$  的本征函数。另外证明  $\langle K | \mathcal{S}^2 | K \rangle = 1 - |S_{11}^{\alpha\beta}|^2$ ，与式 (2.271) 相吻合。

注释

<sup>1</sup> B. T. Sutcliffe, Fundamentals of computational quantum chemistry, in Computational Techniques in Quantum Chemistry, G. H. F. Diercksen, B. T. Sutcliffe, and A. Veillard(Eds), Reidel, Boston, 1975, p. 1.  
<sup>2</sup> R. Paunz, Spin Eigenfunctions, Plenum, New York, 1979.

拓展阅读

Avery, J., Creation and Annihilation Operators, McGraw-Hill, New York, 1976. 此书第二章用二次量子化的语言梳理了量子力学中的各种近似，包括 Hartree-Fock 近似。  
Flurry, R. L. Jr., Symmetry Groups, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980. 这是一个对群论在化学中的应用的相当精彩的介绍。您正在看的这本书假设您对基本的群论与相关的记号较为熟悉。  
Mattuck, R. D., 2nd ed., A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem, McGraw-Hill, New York, 1976. 第七章用比本书更高级的方式介绍了二次量子化。

McWeeny, R. and Sutcliffe, B. T., *Methods of Molecular Quantum Mechanics*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1976. 讨论了计算由非正交自旋轨道构成的 Slater 行列式的矩阵元的规则. 此书对如何得到自旋本征函数也作了简明介绍.

Slater, J. C., *Quantum Theory of Matter*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1968. 第十一章讨论了行列式波函数, 并以与本书较为不同的方式推导了行列式间的矩阵元.



## Chapter 3

### Hartree-Fock 近似

Hartree-Fock 近似, 也即分子轨道近似, 在化学中相当重要. 这个简单的图像——电子占据着轨道——是化学家用以思考的工具, 然需记得, 虽然这个方法有时确实有效, 但它确实是一个近似. 本章中来详细介绍 Hartree-Fock 理论以及**从头**的 Hartree-Fock 计算. 此章篇幅较长, 这也反映了 Hartree-Fock 在量子化学中的重要地位. Hartree-Fock 不仅就其本身十分重要, 它也是其他考虑了电子相关效应的更精确近似的起点. 量子化学中确实有一些方法不以 Hartree-Fock 为基础, 但是大多数都如此. 本书之后讲述的所有方法都基于 Hartree-Fock 近似. 第一章及第二章已经及介绍了一些基本概念和数学工具, 这对更好的理解多电子理论的结构大有裨益. 那么现在就到了在一种绝非粗浅的层面上讨论 Hartree-Fock 理论本身及其计算过程的时候了.

除了 Hartree-Fock 理论的基本框架, 本章还包括了大量从头算例. 讲述这些算例的目的不是罗列已有计算结果, 而是要用以阐释重要的思想. 它们能帮助理解本章即之后介绍的方法, 读者决不能低估其重要性. 为阐述 Hartree-Fock 近似, 我们对正文中提到的每一个量 (如总能量, 离子化势, 平衡几何结构, 偶极矩等等) 都作了计算, 所用基组是一套包含不同级别的标准基组 (STO-3G, 4-31G, 6-31G\*, 6-31G\*\*), 分子对象是一组标准分子 ( $\text{H}_2$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{CH}_4$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{FH}$ ). 打算通过这些计算为读者展示 Hartree-Fock 框架及其精确核不精确的地方. 本章之后章节所讲述的方法也会用这些基组和分子作例. 如此, 我们就能比较每章介绍的方法, 比如微扰理论如何改进 Hartree-Fock 下  $\text{CO}$  的偶极矩, 格林函数如何改进 Hartree-Fock 下  $\text{N}_2$  的离子化势等等. 这些算例与我们所讨论的量子化学理论方法是紧密关联在一起的.

除了这些比较大的算例之外, 我们也会用两个较小的**从头算**模型来阐述理论. 一是极小基  $\text{H}_2$  模型, 之前章节已经介绍过了, 这个模型贯穿全书. 为了更具体地讲述 Hartree-Fock 自洽场 (self-consistent-field, SCF) 计算的细节, 我们另外引进一个模型——极小基下的  $\text{HeH}^+$ . 这个模型大概是本书讲授 SCF 计算过程最重要的途径. 附录 A. 中推导了  $\text{HeH}^+$  计算中所需的积分, 附录 B. 中是一段简短的双原子分子在 STO-3G 基组下的 Hartree-Fock 从头算 Fortran 程序. 而且包括了计算后的详细输出结果. 这个程序写得较为移动, 所以读过本书并有一点 Fortran 知识的同仁都可以看懂. 虽然程序简短, 但是其中蕴含着更大的从头算程序 (如 Gaussian 80<sup>1</sup>) 的基本思想 (但并没有细节). 附录 A 和 B 及 3.5.3 小节的目的是将 SCF 过程的基本操作展示出来, 并揭开其中的某些疑难之处.

3.1 节介绍 Hartree-Fock 本征值方程并定义及讨论其中的一些量: 例如库伦、交换、Fock 算符. 我们将不加推导地直接给出这节的一些结果, 这些结果可做 Hartree-Fock 理论中主要方程的一个总结.

3.2 节会补足前一节的推导. 本节和前一节材料经过人为组织, 以使如果读者愿意, 可

以跳过本节。若想充分了解 Hartree-Fock 理论,那么可以阅读这一节。本节现介绍泛函变分,然后用这个级数来最小化单行列式的能量。接下来对自旋轨道进行酉变换以导出正则 Hartree-Fock 方程。

3.3 节继续介绍 Hartree-Fock 理论的形式部分。现推导并讨论两个与 Hartree-Fock 方程相关的重要定理: Koopman 定理和 Brillouin 定理。第一个定理说的是 Hartree-Fock 轨道能量可以堪称离子化势和电子亲和力。第二个定理说的是两个 Hartree-Fock 行列式之间的矩阵元: 如果两个行列式只差一个单激发,那么矩阵元为零。此定理在多行列式理论中非常重要。最后,作为微扰论的预备知识,我们特别定义 Hartree-Fock 哈密顿,以使由 Hartree-Fock 自旋轨道所构成的行列式就是该哈密顿的本征函数。

3.4 节是本章哪个中最重要的一节。本节来推导 Roothaan 方程,有了它就可以计算闭壳层分子的 Hartree-Fock 基态解。为求解 Hartree-Fock 方程,需显式地给出自旋轨道的形式,本书使用两组自旋轨道。限制性闭壳层自旋轨道通过 Roothaan 方程生成限制性闭壳层波函数。非限制性开壳层自旋轨道由 Pople-Nesbet 方程生成非限制性开壳层波函数,后者会在之后的一节讨论。本节中,将一组限制性闭壳层自旋轨道带入一般性的自旋轨道 Hartree-Fock 方程,然后自旋轨道转化为空间轨道,方程随之变为限制性闭壳层的。接下来引入基组,如此将空间上的积分微分闭壳层 Hartree-Fock 方程转化为一组代数方程,也即 Roothaan 方程。接下来仔细地讨论 Roothaan 方程及其求解方法(自洽场过程, self-consistent-field procedure, SCF),以及对所得波函数的诠释。

3.5 节用两个简单的系统——极小基下的双电子分子,同核的  $\text{H}_2$  和异核的  $\text{HeH}^+$ ——对闭壳层从头算 SCF 过程作详细解说。首先介绍计算这两个分子时用到的 STO-3G 基组,然后将闭壳层 Hartree-Fock 理论用到  $\text{H}_2$  系统上。这是一个很简单的模型系统,可以用明显的解析形式来得到计算结果。最后,将 Roothaan SCF 手续用到极小基  $\text{HeH}^+$  上。这个系统与  $\text{H}_2$  不同,它的 SCF 波函数形式无法从对称性确定,这个模型是迭代 SCF 手续中最简单的一个例子。正文中对  $\text{HeH}^+$  从头算的讲述基于附录 B 中给出的  $\text{HeH}^+$  FORTRAN 代码和输出结果。读者若能随正文一起完成这个简单(但真实)的例子中的计算细节,那么就会对闭壳层从头算 SCF 手续有一个明晰的了解。

3.6 节讲述现时许多计算中所用的多原子基组的概况。量子化学计算中的基组选择更像艺术而非科学,但是本节要介绍的是基组选择背后的一般概念。此外,我们具体地写出了 Pople 及其合作者提出的基组(即本书算例所用的基组)。

3.7 节中会进行一系列的从头算,以帮助理解闭壳层 SCF 手续的应用和结果。主要目的是让读者对从头 SCF 计算能够处理的问题以及这些 HF 计算到底能精确到何种程度有一个感觉。为系统地介绍这些应用,我们在每一个问题上都用一组标准的分级基组进行计算。

最后一节 3.8 不再讨论限制性闭壳层方法,转而推导并阐述非限制性开壳层计算。此处并不讨论限制性开壳层计算。用 3.4 节推导 Roothaan 方程的方法,我们来推导对应的非限制性 Roothaan 方程——Pople-Nesbet 方程。为阐述非限制性计算的框架和结果,我们用之前提过的标准基组来讨论甲基自由基的电子结构和 ESR 谱,以及  $\text{N}_2$  分子的离子化势,还有三重态  $\text{O}_2$  的轨道结构。最后我们仔细讨论在分子解离时,如何用非限制性波函数来代替限制性开壳层波函数,后者在解离时的表现不正确。为简明计,我们仍以极小基  $\text{H}_2$  作例。

### 3.1 Hartree-Fock 方程

本节对 Hartree-Fock 方程推导的结果作一个总括。推导中比较繁琐的具体细节放到下一节,如此,若读者愿意,就可跳过下节的推导细节。

在我们当前的目标下, Hartree-Fock 理论等价于单行列式理论<sup>2</sup>, 如此,我们的目的就是

寻找一组自旋轨道, 以使由这些自旋轨道构成的单行列式:

$$|\Psi_0\rangle = |\chi_1\chi_2\cdots\chi_a\chi_b\cdots\chi_N\rangle \quad (3.1)$$

成为该形式下  $N$ -电子系统 (由算符  $\mathcal{H}$  表征) 之基态的最佳近似. 根据变分原理, 最优的自旋轨道就是那些使如下的能量最小的轨道:

$$E_0 = \langle\Psi_0|\mathcal{H}|\Psi_0\rangle = \sum_a \langle a|h|a\rangle + \frac{1}{2} \sum_{ab} \langle ab||ab\rangle \quad (3.2)$$

$$= \sum_a \langle a|h|a\rangle + \frac{1}{2} \sum_{ab} [aa|bb] - [ab|ba] \quad (3.3)$$

通过 3.2 节中的最小化手续, 我们可以有条理地变化自旋轨道  $\{\chi_a\}$ , 但要加上正交性的限制条件:

$$\langle\chi_a|\chi_b\rangle = \delta_{ab} \quad (3.4)$$

直到能量  $E_0$  最小为止. 如此之后 (这是形式上的操作), 就可得到一个刻画最优自旋轨道的方程, 也即使能量  $E_0$  最小的方程. 这个对应这最优 (Hartree-Fock) 自旋轨道的方程就叫做 Hartree-Fock 积分微分方程:

$$\begin{aligned} h(1)\chi_a(1) + \sum_{b \neq a} \left[ \int d\mathbf{x}_2 |\chi_b(2)|^2 r_{12}^{-1} \right] \chi_a(1) - \sum_{b \neq a} \left[ \int d\mathbf{x}_2 |\chi_b^*(2)|^2 r_{12}^{-1} \right] \chi_b(1) \\ = \varepsilon_a \chi_a(1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中

$$h(1) = -\frac{1}{2} \nabla_1^2 - \sum_A \frac{Z_A}{r_{1A}} \quad (3.6)$$

是单电子的动能和核吸引势能, 这里的电子编号选为 1 号. 该自旋轨道  $\chi_a$  的能量就是  $\varepsilon_a$ .

### 3.1.1 库伦算符和交换算符

式 (3.4) 中的两项涉及对  $b$  指标的求和, 这两项在单行列式理论中就代表电子-电子相互作用. 若去掉这两项:

$$h(1)\chi_a(1) = \varepsilon_a \chi_a(1) \quad (3.7)$$

上式就是单个电子在核势场中的自旋态对应的单电子 Schrödinger 方程. 式 (3.4) 中的第一个双电子项叫作**库伦项**, 这一项在单纯的 Hartree 理论中也存在, 所谓 Hartree 理论是指使用 Hartree 积波函数而非反对称 Hartree 积波函数 (即 Slater 行列式) 的理论. 第二个双电子项叫作**交换项**, 这一项是由于行列式波函数的反对称性质而产生的.

对库伦项有一个非常简单的解释. 在精确的理论中库伦作用由双电子算符  $r_{12}^{-1}$  表示. 在 Hartree 或 Hartree-Fock 理论中, 正如式 (3.4) 所示,  $\chi_a$  中的电子 1 辉感受到单电子库伦势:

$$v_a^{\text{coul}}(1) = \sum_{b \neq a} \int d\mathbf{x}_2 |\chi_b(2)|^2 r_{12}^{-1} \quad (3.8)$$



下面讨论这个势能. 设想电子 2 占据着  $\chi_b$ , Hartree-Fock 理论中, 电子 1 感受到的由电子 2 在空间某瞬时位置所产生的**双电子势**  $r_{12}^{-1}$  被替换为**单电子势**, 该单电子势由  $r_{12}^{-1}$  对空间和自旋坐标平均得到, 而且还要考虑电子 2 占据空间体积元  $d\mathbf{x}_2$  的概率权重  $d\mathbf{x}_2 |\chi_b(2)|^2$ . 对所有的  $b \neq a$  指标求和, 就得到其他自旋轨道上的  $N-1$  个电子作用在  $\chi_a$  上电子的总平均势能. 有了以上这种想法, 为方便可以定义**库伦算符**:

$$\mathcal{J}_b(1) = \int d\mathbf{x}_2 |\chi_b(2)| r_{12}^{-1} \quad (3.9)$$

这式代表  $\chi_b$  上的电子在  $\mathbf{x}_1$  处所山城的平均局域势能.

(3.4) 中的交换项来自单行列式的反对称性质, 它的形式比较特殊, 而且没有如库伦项那样简单的经典解释. 但仍可将 Hartree-Fock 方程 (3.4) 写成本征值方程的形式:

$$\left[ h(1) + \sum_{b \neq a} \mathcal{J}_b(1) - \sum_{b \neq a} \mathcal{K}_b(1) \right] \chi_b(1) = \epsilon_a \chi_a(1) \quad (3.10)$$

其中引入了**交换算符**  $\mathcal{K}_b(1)$ , 它作用在一自旋轨道  $\chi_a(1)$  上时的效果定义如下:

$$\mathcal{K}_b(1) \chi_a(1) = \left[ d\mathbf{x}_2 \chi_b^*(2) r_{12}^{-1} \chi_a(2) \right] \chi_b(1) \quad (3.11)$$

注意它与之前对库伦算符的定义做比较:

$$\mathcal{J}_b(1) \chi_a(1) = \left[ \int d\mathbf{x}_2 \chi_b^*(2) r_{12}^{-1} \chi_b(2) \right] \chi_a(1) \quad (3.12)$$

当  $\mathcal{K}_b(1)$  作用在  $\chi_a(1)$  时会涉及到坐标交换: 与 (3.11) 相比, (3.10) 中  $r_{12}^{-1}$  右边的电子 1 和 2 的坐标交换了顺序. 不同于**定域的**库伦算符, 人们一般说交换算符是**非定域算符**, 因为在空间中任一点  $\mathbf{x}_1$  上, 并不存在一个简单的势能  $\mathcal{K}_b(\mathbf{x}_1)$ . 将  $\mathcal{K}_b(\mathbf{x}_1)$  作用于  $\chi_a(\mathbf{x}_1)$  上所产生的结果依赖于  $\chi$  在全空间的值<sup>1</sup>, 并非只依赖于  $\chi_a$  在  $\mathbf{x}_1$  一点的值, 这点在 (3.10) 的表达式中很明显. 如此的后果就是, 举个例子, 我们无法画出交换势的等高线图, 但库伦势就可以. 对易在  $\chi_a$  上的电子而言, 库伦算符和交换算符  $\mathcal{J}_b, \mathcal{K}_b$  的期望值就是前一章提过的库伦和交换积分:

$$\langle \chi_a(1) | \mathcal{J}_b(1) | \chi_a(1) \rangle = \int d\mathbf{x}_2 \chi_a^*(1) \chi_a(1) r_{12}^{-1} \chi_b^*(2) \chi_b(2) = [aa|bb] \quad (3.13)$$

$$\langle \chi_a(1) | \mathcal{K}_b(1) | \chi_a(1) \rangle = \int d\mathbf{x}_2 \chi_a^*(1) \chi_b(1) r_{12}^{-1} \chi_b^*(2) \chi_a(2) = [ab|ba] \quad (3.14)$$

### 3.1.2 Fock 算符

目前为止所得到 Hartree-Fock 方程写作:

$$\left[ h(1) + \sum_{b \neq a} \mathcal{J}_b(1) - \sum_{b \neq a} \mathcal{K}_b(1) \right] \chi_b(1) = \epsilon_a \chi_a(1) \quad (3.15)$$

它有本征值方程的形式, 但是方括号中的算符作用到不同的自旋轨道  $\chi_a$  上时其, 算符本身也会改变 (因为求和指标限制  $b \neq a$ ). 然而通过考察式 (3.10)(3.11), 很明显有下式:

$$[\mathcal{J}_a(1) - \mathcal{K}_a(1)] \chi_a(1) = 0 \quad (3.16)$$

<sup>1</sup> 注意到式 (3.10) 中的积分也涉及  $\chi_a$  即可理解这一点.

因而可以将这一项加到式 (3.14) 中, 同时移去求和指标的限制, 如此可以定义一个算符——Fock 算符:

$$f(1) = h(1) + \sum_b \mathcal{J}_b(1) - \mathcal{K}_b(1) \quad (3.17)$$

那么 Hartree-Fock 方程就变为:

$$f|\chi_a\rangle = \varepsilon_a |\chi_a\rangle \quad (3.18)$$

这就是 Hartree-Fock 方程的常见形式. Fock 算符  $f(1)$  就是芯哈密顿算符  $h(1)$  加上如下的有效单电子势算符 (称作 Hartree-Fock 势):

$$v^{\text{HF}}(1) = \sum_b \mathcal{J}_b(1) - \mathcal{K}_b(1) \quad (3.19)$$

也就是说

$$f(1) = h(1) + v^{\text{HF}}(1) \quad (3.20)$$

有时为方便也可将交换势用算符  $\mathcal{P}_{12}$  来表达, 后者向右作用, 交换电子 1 和 2 的顺序<sup>ii</sup>:

$$\mathcal{K}_b(1)\chi_a(1) = \left[ \int d\mathbf{x}_2 \chi_b^*(2) r_{12}^{-1} \chi_a(2) \right] \chi_b(1) \quad (3.21)$$

$$= \left[ \int d\mathbf{x}_2 \chi_b^*(2) r_{12}^{-1} \chi_b(2) \right] \chi_a(1) \quad (3.22)$$

由此, Fock 算符可用  $\mathcal{P}_{12}$  重新写成:

$$f(1) = h(1) + v^{\text{HF}}(1) \quad (3.23)$$

$$= h(1) + \sum_b \int d\mathbf{x}_2 \chi_b^*(2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \chi_b(2) \quad (3.24)$$

Hartree-Fock 方程

$$f|\chi_a\rangle = \varepsilon_a |\chi_a\rangle \quad (3.25)$$

这个本征值方程的本征函数是自旋轨道, 对应本征值就是该轨道的能量. 这个积分微分方程的精确解就对应“精确”的 Hartree-Fock 自旋轨道. 实际操作中, 仅对原子这个积分微分方程才能精确求解. 一般情况下, 人们会引入一组基函数来展开自旋轨道, 并求解一组对应的矩阵方程, 后面会具体讲述. 只有当基组达到完备时, 即当达到 Hartree-Fock 极限时, 由这种办法所得的自旋轨道才是精确的 Hartree-Fock 自旋轨道.

虽然 (3.22) 可以写作线性的本征值方程, 最好还是将视作一个伪本征值方程的, 因为方程中的 Fock 算符 (中的库伦和交换算符) 对这个伪本征值方程本身的解  $\{\chi_a\}$  有依赖. 因此 Hartree-Fock 单重实际上是非线性方程, 需要用迭代的办法求解.

**练习 3.1** 请证明 Fock 算符的一般矩阵元形式如下:

$$\langle \chi_i | f | \chi_j \rangle = \langle i | h | j \rangle + \sum_b [ij|bb] - [ib|bj] = \langle i | h | j \rangle + \sum_b \langle ib || jb \rangle$$

<sup>ii</sup> 实际上是交换它们所在的轨道

## 3.2 H-F 方程的推导

本节来推导 Hartree-Fock 方程的一般自旋轨道形式, 也即, 将单 Slater 行列式的能量极小化以得到式 (3.17). 推导并未对自旋轨道作任何预设. 以后我们再专门研究限制性和非限制性自旋轨道并引入基组, 以得到可用计算机方便求解的代数方程 (矩阵方程). 同时, 我们仅关注一般性的该积分微分方程的推导 (即 Hartree-Fock) 及这些方程及其解的内涵. 推导过程中哪个我们使用了泛函变分这个一般且使用的技巧一.

### 3.2.1 泛函变分

给定任意尝试函数  $\tilde{\Phi}$ , 哈密顿算符  $\mathcal{H}$  的期望值  $E[\tilde{\Phi}]$  是如下的一个数:

$$E[\tilde{\Phi}] = \langle \tilde{\Phi} | \mathcal{H} | \tilde{\Phi} \rangle \quad (3.26)$$

我们说  $E[\tilde{\Phi}]$  是  $\tilde{\Phi}$  的一个泛函, 因为它的值依赖于一个函数 (即  $\tilde{\Phi}$ ) 的形式, 而非依赖于单个自变量. 设想我们对  $\tilde{\Phi}$  作一个任意小的变化, 可通过改变  $\tilde{\Phi}$  所含的参数实现这一点. 也就是:

$$\tilde{\Phi} \rightarrow \tilde{\Phi} + \delta\tilde{\Phi} \quad (3.27)$$

那么能量变为:

$$E[\tilde{\Phi} + \delta\tilde{\Phi}] = \langle \tilde{\Phi} + \delta\tilde{\Phi} | \mathcal{H} | \tilde{\Phi} + \delta\tilde{\Phi} \rangle \quad (3.28)$$

$$= E[\tilde{\Phi}] + \{ \langle \delta\tilde{\Phi} | \mathcal{H} | \tilde{\Phi} \rangle + \langle \tilde{\Phi} | \mathcal{H} | \delta\tilde{\Phi} \rangle \} + \dots \quad (3.29)$$

$$= E[\tilde{\Phi}] + \delta E + \dots \quad (3.30)$$

其中  $\delta E$  叫作  $E$  的一阶变分, 它包含所有线性项, 也即所有  $\delta\tilde{\Phi}$  的一阶项. 读者也许注意到: 这里我们以微分算符的方式来处理  $\delta$ , 也即,  $\delta \langle \tilde{\Phi} | \mathcal{H} | \tilde{\Phi} \rangle = \langle \delta\tilde{\Phi} | \mathcal{H} | \tilde{\Phi} \rangle + \langle \tilde{\Phi} | \mathcal{H} | \delta\tilde{\Phi} \rangle$ . 在变分法中, 我们的目的就是寻找合适的  $\tilde{\Phi}$  以使  $E[\tilde{\Phi}]$  极小. 换句话说, 我们期望找到一个  $\tilde{\Phi}$ , 使得  $E[\tilde{\Phi}]$  的一阶变分为零:

$$\delta E = 0 \quad (3.31)$$

这个条件保证了  $E$  对于  $\tilde{\Phi}$  的任何变分都处于驻态 (stationary). 通常情况下, 驻点 (stationary point) 往往就是最小值.

下面我们用变分的技巧重新推导 1.3.2 节中的线性变分问题对应的矩阵本征方程, 以期对变分技巧作个展示. 个定一个线性变分尝试波函数:

$$|\tilde{\Phi}\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |\Psi_i\rangle \quad (3.32)$$

我们希望对如下能量极小化:

$$E = \langle \tilde{\Phi} | \mathcal{H} | \tilde{\Phi} \rangle = \sum_{ij} c_i^* c_j \langle \Psi_i | \mathcal{H} | \Psi_j \rangle \quad (3.33)$$

并且保持尝试波函数为归一化的:

$$\langle \tilde{\Phi} | \tilde{\Phi} \rangle - 1 = \sum_{ij} c_i^* c_j \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle - 1 = 0 \quad (3.34)$$

利用第一章中的 Lagrange 不定乘法, 我们可以将如下的泛函对  $c_i$  极小化:

$$\mathcal{L} = \langle \tilde{\Phi} | \mathcal{H} \tilde{\Phi} \rangle - E(\langle \tilde{\Phi} | \tilde{\Phi} \rangle - 1) \quad (3.35)$$

$$= \sum_{ij} c_i^* c_j \langle \Psi_i | \mathcal{H} | \Psi_j \rangle - E \left( \sum_{ij} c_i^* c_j \langle \Psi | \Psi \rangle - 1 \right) \quad (3.36)$$

其中  $E$  是 Lagrange 乘子. 下面我们令  $\mathcal{L}$  的一阶变分为零:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{ij} \delta c_i^* c_j \langle \Psi_i | \mathcal{H} | \Psi_j \rangle - E \sum_{ij} \delta c_i^* c_j \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle \quad (3.37)$$

$$+ \sum_{ij} c_i^* \delta c_j \langle \Psi_i | \mathcal{H} | \Psi_j \rangle - E \sum_{ij} \delta c_i^* \delta c_j \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle \quad (3.38)$$

由于  $E$  是实的 (因此  $\mathcal{L}$  也是实的), 合并项并交换指标后, 我们得到

$$\sum_i \delta c_i^* \left[ \sum_j H_{ij} c_j - E S_{ij} c_j \right] + \text{复共轭} = 0 \quad (3.39)$$

其中  $H_{ij} = \langle \Psi_i | \mathcal{H} | \Psi_j \rangle$ . 用于线性展开的基函数  $|\Psi_i\rangle$  并不需要正交, 但是这里特别写出它们的重叠积分:

$$\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = S_{ij} \quad (3.40)$$

由于  $\delta c_i^*$  是任意的 ( $c_i^*, c_i$  是两个独立变量<sup>iii</sup>), 方括号中的量必须为零:

$$\sum_j H_{ij} c_j = E S_{ij} c_j \quad (3.41)$$

$$\mathbf{Hc} = E \mathbf{Sc} \quad (3.42)$$

所以此处得到的结果本质上与之前在 1.3.2 节所得的结果相同 (若  $\mathbf{S} = \mathbf{1}$  且系数为实的). 用泛函变分技巧所得的结果也可用对系数微分的办法得到. 但泛函变分是更具普遍性的技巧, 下面用它来导出 Hartree-Fock 方程.

### 3.2.2 单行列式能量最小化

给定一个单行列式  $|\Psi_0\rangle = |\chi_1 \chi_2 \cdots \chi_a \chi_b \cdots \chi_N\rangle$ , 能量  $E_0 \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle$  是自旋轨道  $\{\chi_a\}$  的泛函. 为导出 Hartree-Fock 方程需要对  $E_0[\{\chi_a\}]$  关于自旋轨道进行极小化, 而且要满足自旋轨道正交归一的约束:

$$\int d\mathbf{x} \chi_a^* \chi_b = [a|b] = \delta_{ab} \quad (3.43)$$

这就是说, 约束形式如下:

$$[a|b] - \delta_{ab} = 0 \quad (3.44)$$

<sup>iii</sup> 此处的独立, 还是指线性独立, 并非指两个量之间没有函数关系. 实际上  $\bar{z}$  到  $z$  是一一对应的, 但是在求偏微分时它们是线性独立的. 此外这个说法也可按复数乘法的几何意义来理解.

下面考虑  $\mathcal{L}[\{\chi_a\}]$  作为自旋轨道的泛函：

$$\mathcal{L}[\{\chi_a\}] = E_0[\{\chi_a\}] - \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \epsilon_{ab} ([a|b] - \delta_{ab}) \quad (3.45)$$

其中  $E_0$  是单行列式  $|\Psi_0\rangle$  的期望值：

$$E_0[\{\chi_a\}] = \sum_{a=1}^N [a|h|a] + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N [aa|bb] - [ab|ba] \quad (3.46)$$

并且  $\epsilon_{ab}$  是一组 Lagrange 乘子。由于  $\mathcal{L}$  是实的而且  $[a|b] = [b|a]^*$ ，所以 Lagrange 乘子必须是一个厄米矩阵的元素：

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{ab}^* \quad (3.47)$$

### 练习 3.2 证明式 (3.40).

在以上约束下最小化  $E_0$  等价于最小化  $\mathcal{L}$ 。下面对自旋轨道变化一个无穷小量：

$$\chi_a \rightarrow \chi_a + \delta\chi_a \quad (3.48)$$

并令  $\mathcal{L}$  的一阶变分为零：

$$\delta\mathcal{L} = \delta E_0 - \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \epsilon_{ab} \delta[a|b] = 0 \quad (3.49)$$

该式可从 (3.38) 直接导出，因为常数  $(\delta_{ab})$  的变分为零。现在有

$$\delta[a|b] = [\delta\chi_a|\chi_b] + [\chi_a|\delta\chi_b] \quad (3.50)$$

并且

$$\begin{aligned} \delta E_0 &= \sum_{a=1}^N [\delta\chi_a|h|\chi_a] + [\chi_a|h|\delta\chi_a] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N [\delta\chi_a\chi_a|\chi_b\chi_b] + [\chi_a\delta\chi_a|\chi_b\chi_b] + [\chi_a\chi_a\delta\chi_b\chi_b] + [\chi_a\chi_a\chi_b\delta\chi_b] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N [\delta\chi_a\chi_b|\chi_b\chi_a] + [\chi_a\delta\chi_b|\chi_b\chi_a] + [\chi_a\chi_b\delta\chi_b\chi_a] + [\chi_a\chi_b\chi_b\delta\chi_a] \end{aligned} \quad (3.51)$$

### 练习 3.3 整理 (3.44)，以证明

$$\delta E_0 = \sum_{a=1}^N [\delta\chi_a|h|\chi_a] + \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N [\delta\chi_a\chi_a|\chi_b\chi_b] - [\delta\chi_a\chi_b|\chi_b\chi_a] + \text{复共轭}$$

而且

$$\begin{aligned}
 \sum_{ab} \epsilon_{ba} ([\delta\chi_a|\chi_b] + [\chi_a|\delta\chi_b]) &= \sum_{ab} \epsilon_{ba} [\delta\chi_a|\chi_b] + \sum_{ab} \epsilon_{ab} [\chi_b|\delta\chi_a] \\
 &= \sum_{ab} \epsilon_{ba} [\delta\chi_a|\chi_b] + \sum_{ab} \epsilon_{ba}^* [\chi_b|\delta\chi_a]^* \\
 &= \sum_{ab} \epsilon_{ba} [\delta\chi_a|\chi_b] + \text{复共轭}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

由上面的练习及式 (3.45) 可知,  $\mathcal{L}$  的一阶变分 (3.42) 成为

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \sum_{a=1}^N [\delta\chi_a|h|\chi_a] + \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N [\delta\chi_a\chi_a|\chi_b\chi_b] - [\delta\chi_a\chi_b|\chi_b\chi_a] \\
 &\quad - \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \epsilon_{ab} [\delta\chi_a|\chi_b] + \text{复共轭} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

利用库伦和交换算符的定义 (3.10)(3.11) 可将上式简写为

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L} &= \sum_{a=1}^N \int d\mathbf{x}_1 \delta\chi_a^*(1) \left[ h(1)\chi_a(1) + \sum_{b=1}^N (\mathcal{J}_b(1) - \mathcal{K}_b(1))\chi_a(1) - \sum_{b=1}^N \epsilon_{ba}\chi_b(1) \right] \\
 &\quad + \text{复共轭} = 0
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

由于  $\delta\chi_a^*(1)$  是任意的, 那么上面方括号中的量对所有指标  $a$  都为零. 也就是

$$\left[ h(1)\chi_a(1) + \sum_{b=1}^N (\mathcal{J}_b(1) - \mathcal{K}_b(1))\chi_a(1) - \sum_{b=1}^N \epsilon_{ba}\chi_b(1) \right] = 0 \tag{3.55}$$

上面方括号中的式子就是我们所定义的 Fock 算符  $f(1)$ , 因此这个关于自旋轨道的方程的形式如下:

$$f|\chi_a\rangle = \sum_{b=1}^N \epsilon_{ba} |\chi_b\rangle \tag{3.56}$$

这个结果第一眼看来可能有些奇怪, 因为它不是如式 (3.17) 那样标准的本征值形式. 原因就是任意一个由自旋轨道  $\{\chi_a\}$  构成的单行列式波函数  $|\Psi_0\rangle$  在自旋轨道本身上仍然留有一定的任意性: 可以混合这些自旋轨道而不改变期望值  $E_0 = \langle\Psi_0|\mathcal{H}|\Psi_0\rangle$ . 在导出 Hartree-Fock 方程的正则形式前, 我们需要考虑自旋轨道之间的酉变换 (么正变换, 以下统称酉变换).

### 3.2.3 正则 H-F 方程

现考虑一组新的自旋轨道  $\{\chi'_a\}$ , 它是通过如下的酉变换从旧的自旋轨道  $\{\chi_a\}$  (即 (3.49) 中的那一组轨道) 所得:

$$\chi'_a = \sum_b \chi_b U_{ba} \tag{3.57}$$

所谓酉变换, 就是满足如下关系的变换:

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1} \quad (3.58)$$

它能保持 (被变换基的) 正交归一性. 也就是说, 若从一组正交归一的自旋轨道  $\{\chi_a\}$  出发, 经该变换得到一组新的自旋轨道  $\{\chi'_a\}$ , 则后者也是正交归一的. 下面定义一个方阵  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \chi_a(1) & \chi_2(1) & \cdots & \chi_a(1) & \cdots & \chi_N(1) \\ \chi_a(2) & \chi_2(2) & \cdots & \chi_a(2) & \cdots & \chi_N(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_a(N) & \chi_2(N) & \cdots & \chi_a(N) & \cdots & \chi_N(N) \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

以使波函数  $|\Psi_0\rangle$  就是该矩阵的归一化行列式:

$$|\Psi_0\rangle = (N!)^{-1/2} \det(\mathbf{A}) \quad (3.60)$$

利用轨道变换的定义 (3.50) 以及一般的操作, 可以看见, 由  $\mathbf{A}$  经变换所得的包含变换后的自旋轨道的  $\mathbf{A}'$  如下:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \chi_a(1) & \chi_2(1) & \cdots & \chi_a(1) & \cdots & \chi_N(1) \\ \chi_a(2) & \chi_2(2) & \cdots & \chi_a(2) & \cdots & \chi_N(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_a(N) & \chi_2(N) & \cdots & \chi_a(N) & \cdots & \chi_N(N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1N} \\ U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{N1} & U_{N2} & \cdots & U_{NN} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

$$= \begin{pmatrix} \chi'_a(1) & \chi'_2(1) & \cdots & \chi'_a(1) & \cdots & \chi'_N(1) \\ \chi'_a(2) & \chi'_2(2) & \cdots & \chi'_a(2) & \cdots & \chi'_N(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi'_a(N) & \chi'_2(N) & \cdots & \chi'_a(N) & \cdots & \chi'_N(N) \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

而且由于

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \quad (3.63)$$

变换后的自旋轨道构成的行列式与旧轨道的行列式有如下关系:

$$\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{U})\det(\mathbf{A}) \quad (3.64)$$

或者写成等价形式:

$$|\Psi'_0\rangle = \det(\mathbf{U})|\Psi_0\rangle \quad (3.65)$$

现在, 由于

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{1} \quad (3.66)$$

我们有

$$\det(\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U}) = \det(\mathbf{U}^\dagger) \det(\mathbf{U}) = (\det(\mathbf{U}))^* \det(\mathbf{U}) = |\det(\mathbf{U})|^2 = \det(\mathbf{1}) = 1 \quad (3.67)$$

所以

$$\det(\mathbf{U}) = e^{i\phi} \quad (3.68)$$

所以变换后的行列式  $|\Phi'_0\rangle$  (3.57) 与原来的行列式只差一个相因子. 若  $\mathbf{U}$  是实矩阵, 则这个相因子的值只能取  $\pm 1$ . 由于所有的可观测量性质仅依赖于  $|\Psi|^2$ , 所以在任何地方, 由  $\{\chi_a\}$  组成的原式波函数和由  $\{\chi'_a\}$  组成的变换后的波函数都是等价的. 在单行列式波函数下, 所有期望值在自旋轨道的任意酉变换下都不变. 因此使总能量取驻值的自旋轨道集合并不是唯一的, 而且某一组自旋轨道并不比其他轨道更有物理意义. 举个例子, 定义自旋轨道并不比离域自旋轨道更“物理”.

我们利用单行列式在自旋轨道酉变换下不变的性质, 可以简化 (3.49), 将其改写为关于一组特定轨道的本征值方程. 但首先需确定以上酉变换对 Fock 算符和 Lagrange 乘子的作用效果. Fock 算符中依赖于自旋轨道的部分是库伦和交换算符. 经过变换后的库伦算符之和为:

$$\begin{aligned} \sum_a \mathcal{J}'_a(1) &= \sum_a \int d\mathbf{x}_1 \chi'_a{}^*(2) r_{12}^{-1} \chi'_a(2) \\ &= \sum_{bc} \left[ \sum_a U_{ba}^* U_{ca} \right] \int d\mathbf{x}_2 \chi_b^* r_{12}^{-1} \chi_c(2) \end{aligned} \quad (3.69)$$

只要注意到

$$\sum_a U_{ba}^* U_{ca} = (\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger)_{cb} = \delta_{cb} \quad (3.70)$$

就可以得到:

$$\sum_a \mathcal{J}'_a(1) = \sum_a \int d\mathbf{x}_1 \chi_b^*(2) r_{12}^{-1} \chi_b(2) = \sum_b \mathcal{J}_b(1) \quad (3.71)$$

因此库伦算符在自旋轨道的酉变换下不变. 以相同的方式易证交换算符之和在自旋轨道的任意酉变换下不变, 因而 Fock 算符也不变:

$$f'(1) = f(1) \quad (3.72)$$

现在来确定酉变换对 Lagrange 乘子的作用. 将 (3.49) 左乘  $\langle \chi_c |$  就可证明 Lagrange 长子是 Fock 算符的矩阵元:

$$\langle \chi_c | f | \chi_a \rangle = \sum_{b=1}^N \varepsilon_{ba} \langle \chi_c | \chi_b \rangle = \varepsilon_{ca} \quad (3.73)$$

因此我们有

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ab} &= \int d\mathbf{x}_1 \chi_a'^*(1) f(1) \chi'_b(1) \\ &= \sum_{cd} U_{ca}^* U_{db} \int d\mathbf{x}_1 \chi_c^*(1) f(1) \chi_d(1) \\ &= \sum_{cd} U_{ca}^* \varepsilon_{cd} U_{db} \end{aligned} \quad (3.74)$$

或者写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{U}^\dagger \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{U} \quad (3.75)$$



由式 (3.40) 可知  $\varepsilon$  是一厄米矩阵. 因此总能找到一个合适的酉矩阵  $\mathbf{U}$  使得变换 (3.67) 将  $\varepsilon$  对角化. 此处我们不关心如何找到这个矩阵, 只需要知道它存在且唯一. 那么一定由一组自旋轨道  $\{\chi'_a\}$  使得 Lagrange 乘子矩阵为对角化的:

$$f|\chi'_a\rangle = \varepsilon'_a |\chi'_a\rangle \quad (3.76)$$

可以通过解上面这个本征值方程得到这组唯一的自旋轨道  $\{\chi'_a\}$ , 这组解叫作**正则自旋轨道**. 到此, 我们移去撇号, 直接将 Hartree-Fock 方程写为

$$f|\chi_a\rangle = \varepsilon_a |\chi_a\rangle \quad (3.77)$$

正则自旋轨道是该方程的解, 它们一般是离域化的并且构成该分子点群下的不可约表示的基, 也即, 它们会有对应于该分子对称性的特定对称性质, 或者等价地, 对应于 Fock 算符的对称性. 一旦得到这组正则自旋轨道, 我们就能对其进行酉变换得到无数组等价的轨道. 实际上, 有许多准则可用来寻找酉变换以使轨道经变换后变为定域的、更符合对化学键的直觉的轨道.

### 3.3 H-F 方程解的阐释

为求解 Hartree-Fock 方程, 需要引入基组并求解对应的矩阵方程. 但该本征值方程及其解也有不依赖于基组的一些性质, 此时正好来讨论它们.

#### 3.3.1 轨道能量与 Koopman 定理

对于  $N$ -电子体系, 将行列式  $|\chi_1\chi_2\cdots\chi_a\chi_b\cdots\chi_N\rangle$  的能量极小化后就得到一组关于  $N$  个被站自旋轨道  $\{\chi_a\}$  的本征值方程  $f|\chi_a\rangle = \varepsilon_a |\chi_a\rangle$ . Fock 算符对这些被占轨道有泛函的依赖, 但若自旋轨道已知, 那么 Fock 算符就变为一个正常的厄米算符, 有无穷个本征函数:

$$f|\chi_j\rangle = \varepsilon_k |\chi_j\rangle \quad j = 1, 2, \dots, \infty \quad (3.78)$$

**练习 3.4** 使用练习 3.1 中的结果证明  $f_{ij} = \langle\chi_i|f|\chi_j\rangle$  是厄米算符的矩阵元, 由此证明 Fock 算符是一个厄米算符.

(3.70) 的每个解  $|\chi_j\rangle$  都有一个自旋轨道能量  $\varepsilon_j$ .  $N$  个能量最低的自旋轨道就是  $|\Psi_0\rangle$  中的占据自旋轨道, 我们用指标  $a, b, \dots$  来标价它们. 余下的无穷个自旋轨道的能量更高, 我们称其为**虚轨道**或未占轨道, 并用指标  $r, s, \dots$  来记. 这里的主要目的是得到轨道能量  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  等的能量, 并看看能为这些轨道能量赋予什么物理意义.

用  $\langle\chi_i|$  左乘 (3.70) 就可证明 Fock 算符在这组自旋轨道下的的矩阵表示是对角的, 其对角元就是轨道能量:

$$\langle\chi_i|f|\chi_j\rangle = \varepsilon_j \langle\chi_i|\chi_j\rangle = \varepsilon_j \delta_{ij} \quad (3.79)$$

用式 (3.16) 的 Fock 算符表达式可知, 轨道能量可以写作:

$$\varepsilon_i = \langle\chi_i|h|\chi_i\rangle = \left\langle\chi_i\left|h + \sum_b (\mathcal{J}_b - \mathcal{K}_b)\right|\chi_i\right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \chi_i | h | \chi_i \rangle + \sum_b \langle \chi_i | \mathcal{J}_b | \chi_i \rangle - \langle \chi_i | \mathcal{K}_b | \chi_i \rangle \\
&= \langle i | h | i \rangle + \sum_b \langle ib | ib \rangle - \langle ib | bi \rangle \\
&= \langle i | h | i \rangle + \sum_b \langle ib | ib \rangle
\end{aligned} \tag{3.80}$$

此处我们根据交换、库伦算符的定义, 使用了如下等式:

$$\langle \chi_i | \mathcal{J}_k | \chi_j \rangle = \langle ik | jk \rangle = [ij | kk] \tag{3.81}$$

$$\langle \chi_i | \mathcal{K}_k | \chi_j \rangle = \langle ik | kj \rangle = [ij | kj] \tag{3.82}$$

具体地, 根据以上式子我们有

$$\varepsilon_a = \langle a | h | a \rangle + \sum_{b=1}^N \langle ab | ab \rangle \tag{3.83}$$

$$\varepsilon_r = \langle r | h | r \rangle + \sum_{b=1}^N \langle rb | rb \rangle \tag{3.84}$$

现在, 由于

$$\langle aa | aa \rangle = 0 \tag{3.85}$$

我们可将上面两个式子改写为:

$$\varepsilon_a = \langle a | h | a \rangle + \sum_{b \neq a} \langle ab | ab \rangle - \langle ab | ba \rangle \tag{3.86}$$

$$\varepsilon_r = \langle r | h | r \rangle + \sum_{b=1}^N \langle rb | rb \rangle - \langle rb | br \rangle \tag{3.87}$$

闲杂来看这两个式子. 轨道能量  $\varepsilon_a$  代表自旋轨道  $|\chi_a\rangle$  上电子的能量. 由 (3.78) 可知这个能量是动能加核吸引势能 ( $\langle a | h | a \rangle$ ) 再加上与余下的  $N-1$  个自旋轨道  $|\chi_b\rangle$  上的  $N-1$  个电子之间的库伦 ( $\langle ab | ab \rangle$ ) 和交换 ( $-\langle ab | ba \rangle$ ) 作用, 此处  $b \neq a$ . 正如之前所看到的, 只有当  $|\chi_a\rangle, |\chi_b\rangle$  上的两个电子自旋平行时积分  $\langle ab | ba \rangle$  才不为零, 所以在一般的自旋轨道语言下, 我们并不特别指出电子的自旋, 所以对所有的电子-电子相互作用我们都写出这项  $\langle ab | ba \rangle$ , 虽然其中有一些会为零.

$\varepsilon_a$  的结果也许是可预料的. 但式 (3.79) 中的自旋轨道能量比较特殊. 它包括  $|\chi_r\rangle$  中电子的动能和核吸引势能  $\langle r | h | r \rangle$ , 这我们是知道的, 它还包括与 Hartree-Fock 基态中全部  $N$  个电子的库伦和交换作用  $\langle rb | rb \rangle, -\langle rb | br \rangle$ , 也就是与自旋轨道  $\{|\chi_b\rangle | b = 1, 2, \dots, N\}$  中电子的作用. 这就好象将一个电子额外加到  $|\Psi_0\rangle$  得到一个  $(N+1)$ -电子态,  $\varepsilon_r$  表示这个额外电子的能量. 事实正是如此. 之后讨论 Koopmans 定理的时候会在回到这里. 现下来我们讨论占据轨道能量  $\varepsilon_a$  与总能量  $E_0$  的关系.

若我们将基态  $|\Psi_0\rangle$  中的  $N$  个电子的能量  $\varepsilon_a$  简单相加, 会得到

$$\sum_a^N \varepsilon_a = \sum_a^N \langle a | h | a \rangle + \sum_a^N \sum_b^N \langle ab | ab \rangle \tag{3.88}$$

我们已经知道 (例如式 (2.112)), 正确的能量期望值  $E_0 = \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle$  为:

$$E_0 = \sum_a^N \langle a | h | a \rangle + \frac{1}{2} \sum_a^N \sum_b^N \langle ab | ab \rangle \quad (3.89)$$

很明显

$$E_0 \neq \sum_a^N \varepsilon_a \quad (3.90)$$

$|\Psi_0\rangle$  的总能不是所有轨道能量之和. 原因如下. 能量  $\varepsilon_a$  中包括  $\chi_a$  上的电子与其余占据轨道 (例如  $\chi_b$ ) 上的电子之间的库伦和交换作用. 但  $\varepsilon_b$  也包括  $\chi_b$  电子与其余自旋轨道 (如  $\chi_a$ ) 上的电子之间的库伦和交换作用. 因此当对  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  作加法时,  $\chi_a, \chi_b$  上的两个电子之间的相互作用被计入了两次. 这就是总能  $E_0$  的正确表达式 (3.81) 想对与轨道能量之和 (3.80) 多出因子  $\frac{1}{2}$  的原因.

若总能并非轨道能量之和, 那么我们可以为轨道能量赋予何种物理意义? 从  $|\Psi_0\rangle = |^N\Psi_0\rangle = |\chi_a\chi_2\cdots\chi_c\cdots\chi_N\rangle$  中挪去或加上一个电子这个过程可为我们提供答案. 设想要从  $c$  自旋轨道中挪去电子以生成一个  $(N-1)$ -电子的单行列式态  $|^{N-1}\Psi_c\rangle$ , 该波函数中的  $N-1$  个自旋轨道与  $|^N\Psi_0\rangle$  中的完全相同. 在二次量子化语言下, 这就是将  $\chi_c$  中的电子湮灭, 如果不关心正负号 (within a sign), 我们可以写出下式

$$|^{N-1}\Psi_c\rangle = a_c |^N\Psi_0\rangle \quad (3.91)$$

这个过程中  $|^N\Psi_0\rangle$  的电离能为

$$IP = {}^{N-1}E_c - {}^{N-1}E_c \quad (3.92)$$

式中  ${}^{N-1}E_c, {}^NE_0$  分别是两个对应的单行列式的能量期望:

$${}^NE_0 = \langle {}^N\Psi_0 | \mathcal{H} | {}^N\Psi_0 \rangle \quad (3.93)$$

$${}^{N-1}E_c = \langle {}^{N-1}\Psi_c | \mathcal{H} | {}^{N-1}\Psi_c \rangle \quad (3.94)$$

取决于要从哪个轨道  $\chi_c$  中挪去电子,  $|^{N-1}\Psi_c\rangle$  可能是或不是被电离物质的基态. 因为  $|^{N-1}\Psi_c\rangle$  与  $|^N\Psi_0\rangle$  并非相同状态, 所以一般它的最优自旋轨道与  $|^N\Psi_0\rangle$  中的并不一样, 但是我们可以计算两个态之间的能量差. 有上一章介绍的规则, 单行列式的能量为

$$E = \sum_i^{\text{occ}} \langle i | h | i \rangle + \frac{1}{2} \sum_i^{\text{occ}} \sum_j^{\text{occ}} \langle ij | ij \rangle \quad (3.95)$$

其中求和遍及行列式中所有被占自旋轨道. 那么

$${}^NE_0 = \sum_a \langle a | h | a \rangle + \frac{1}{2} \sum_a \sum_b \langle ab || ab \rangle \quad (3.96)$$

式中的指标  $a, b, \dots$  代表  ${}^N\Psi_0$  中的被占自旋轨道. 按照这种写法, 我们有

$${}^{N-1}E_c = \sum_{a \neq c} \langle a | h | a \rangle + \frac{1}{2} \sum_{a \neq c} \sum_{b \neq c} \langle ab || ab \rangle \quad (3.97)$$

电离能就是这两个式子的差:

$$\begin{aligned}
 \text{IP} &= {}^{N-1}E_c - {}^N E_0 \\
 &= -\langle c|h|c \rangle - \frac{1}{2} \sum_{a[b \equiv c]} \langle ab||ab \rangle - \frac{1}{2} \sum_{b[a \equiv c]} \langle ab||ab \rangle \\
 &= -\langle c|h|c \rangle - \frac{1}{2} \sum_a \langle ab||ab \rangle - \frac{1}{2} \sum_b \langle ab||ab \rangle \\
 &= -\langle c|h|c \rangle - \frac{1}{2} \sum_b \langle cb||cb \rangle
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

将此结果与 (3.75) 中占据自旋轨道能量的定义做比较可以发现, 从  $\chi_c$  上挪去一个电子的电离能就是轨道能量  $\epsilon_c$  的负值

$$\text{IP} = {}^{N-1}E_c - {}^N E_0 = -\epsilon_c \tag{3.99}$$

因此单 Slater 行列式近似下, 占据自旋轨道的能量就代表从该自旋轨道挪走一个电子所需的能量. 轨道能量  $\epsilon_a$  一般是负的, 电离能一般是正的.

**练习 3.5** 从  $\chi_c, \chi_d$  分别挪走一个电子会生成  $(N-2)$ -电子的单行列式  $|^{N-2}\Psi_{cd}\rangle$ , 请证明所需能量为  $-\epsilon_c - \epsilon_d + \langle cd|cd \rangle - \langle cd|dc \rangle$ .

现在来考虑项虚自旋轨道  $\chi_r$  中加一个电子的生成  $(N+1)$ -电子单行列式  $|^{N+1}\Psi^r\rangle = |\chi_r \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_N\rangle$  的过程, 其中所剩的自旋轨道仍与  ${}^N\Psi_0$  的相同. 用二次量子化的说法, 是要在  $\chi_r$  上产生一个电子:

$$|^{N+1}\Psi^r\rangle = a_r^\dagger |{}^N\Psi_0\rangle \tag{3.100}$$

这个过程下  $|{}^N\Psi_0\rangle$  的电子亲和能就是

$$\text{EA} = {}^N E_0 - {}^{N+1} E^r \tag{3.101}$$

式中  ${}^{N+1} E^r$  是单行列式  ${}^{N+1}\Psi^r$  的能量:

$${}^{N+1} E^r = \langle {}^{N+1}\Psi^r | \mathcal{H} | {}^{N+1}\Psi^r \rangle \tag{3.102}$$

与处理电离时的情况一样, 此  $(N-1)$ -电子的单行列式的最优自旋轨道一般不与  $|{}^N\Psi_0\rangle$  中的相同. 但是在自旋轨道相同的假设下, 我们可以方便地计算电子亲和能.

**练习 3.6** 使用 (3.87) 导出  ${}^{N+1} E^r$  的表达式, 与  ${}^N E_0$  ((3.88)) 相减以证明

$${}^N E_0 - {}^{N+1} E^r = -\langle r|h|r \rangle - \sum_b \langle rb||rb \rangle. \tag{3.103}$$

有了上面练习题中的结果及式 (3.76), 我们可以看到在虚自旋轨道  $\chi_r$  上加一个电子的电子亲和能就是该自旋轨道对应能量的负值

$$EA = {}^N E_0 - {}^{N+1} E^r = -\varepsilon_r \quad (3.104)$$

这个结果与之前的讨论一致:  $\varepsilon_r$  包含与  $|{}^N \Psi_0\rangle$  中全部  $N$  个电子的相互作用, 因此对应于第  $(N+1)$  个电子. 若  $\varepsilon_r$  为负 (即  $|{}^{N+1} \Psi^r\rangle$  比  $|{}^N \Psi_0\rangle$  稳定), 则电子亲和能为正.

以上结果首先有 Koopman 导出. 现在是时候给出 Koopmans 定理的具体陈述了.

**Koopmans 定理** 给定一个  $N$ -电子 Hartree-Fock 单行列式  $|{}^N \Psi_0\rangle$ , 其中占据和虚自旋轨道能量分别为  $\varepsilon_a, \varepsilon_r$ , 则从  $\chi_a$  中挪去一个电子, 保持其余轨道不变, 会产生一个  $(N-1)$ -电子单行列式  $|{}^{N-1} \Psi_a\rangle$ , 这个过程对应的电离能是  $-\varepsilon_a$ . 在虚轨道  $\chi_r$  上增加一个电子, 保持自旋轨道不变, 生成一个  $(N+1)$  电子单行列式  $|{}^{N+1} \Psi^r\rangle$ , 此过程的电子亲和能为  $-\varepsilon_r$ .

Koopmans 定理给出一种计算近似的电离能和电子亲和能的办法. 这种“冻结轨道”近似是假设  $(N \pm 1)$ -电子态 (就是正/负离子, 如果  $|{}^N \Psi_0\rangle$  为中性物种) 中的自旋轨道与  $N$ -电子态中的一样. 这个近似忽略了  $(N \pm 1)$ -电子态中自旋轨道的弛豫, 就是说,  $|{}^N \Psi_0\rangle$  中的自旋轨道并非  $|{}^{N-1} \Psi_a\rangle / |{}^{N+1} \Psi^r\rangle$  的最优自旋轨道. 如果分别再用另外的 Hartree-Fock 计算优化这两个态, 则  ${}^{N-1} E_a, {}^{N+1} E^r$  的能量要减少. 因此 Koopmans 定理忽略了弛豫会使算出的电离能和电子亲和能过正. 当然除此之外, 对波函数作单行列式金色也会产生误差, 即**相关效应**, 通过 Hartree-Fock 之外的办法可以计算, 可对 Koopmans 定理的结果作进一步修正. 实际上, 当系统内电子数目越大时, 相关能也会越大. 因此相关效应会抹掉电离能的一部分弛豫误差, 而在电子亲和能的弛豫误差上再增加误差. 一般来说, Koopmans 点滴能是实验电离能值合理的一阶近似, 本章后面会讨论大量的此类计算. 可惜 Koopmans 电子亲和能会较差. 很多中性分子增加一个电子可形成稳定的负离子. 单中性分子的 Hartree-Fock 计算常给出正的虚轨道能量. 电子亲和能是非常难以计算的量, 要比电离能难算得多, 除此外, 本书中我们不会再提到电子亲和能.

### 3.3.2 Brillouin 定理

Hartree-Fock 方程 (3.70) 会生成一组自旋轨道  $\{\chi_i\}$ . 由其中能量最低的  $N$  个自旋轨道构成的单行列式  $|\Psi_0\rangle$  就是基态的 Hartree-Fock 近似. 正如上一章讨论的, 由集合  $\{\chi_i\}$  可以构造相当多的行列式. 知道了 Fock 算符的形式, 现在是恰好可来证明一个管子这些行列式的子集的定理. 该子集就是所有单激发行列式  $|\Psi_a^r\rangle$ ——将  $|\Psi_0\rangle$  中  $\chi_a$  换为  $\chi_r$  即得 (2.7). 在精确基态的多行列式表示中, 我们可能会预想, 这些单行列式将给出领头阶修正:

$$|\Phi_0\rangle = c_0 |\Psi_0\rangle + \sum_{ra} |\Psi_a^r\rangle \quad (3.105)$$

若在修正中仅考虑单激发行列式, 那么  $c_a^r$  可以由变分原理得到——将  $\{\Psi_0, \{\Psi_a^r\}\}$  基下的哈密顿矩阵对角化即可. 现在我们来研究包含单激发态的矩阵本征值问题:

$$\begin{pmatrix} \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle & \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_a^r \rangle \\ \langle \Psi_a^r | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle & \langle \Psi_a^r | \mathcal{H} | \Psi_a^r \rangle \end{pmatrix} = \mathcal{E}_0 \begin{pmatrix} c_0 \\ c_a^r \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

两个态的混合体现在非对角元  $\langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_a^r \rangle$  上. 这个矩阵元可以用我们介绍过的行列式间矩阵元计算规则求出, 结果可以从 2.52.6 中直接读出:

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_a^r \rangle = \langle a | h | r \rangle + \sum_b \langle ab || rb \rangle \quad (3.107)$$

方程右边可以进一步简化：在练习 3.1 中，Fock 算符的矩阵元就是

$$\langle \chi_i | f \chi_j \rangle = \langle i | h | j \rangle + \sum_b \langle ib | ib \rangle \quad (3.108)$$

因此

$$\langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_a^r \rangle = \langle \chi_a | f \chi_r \rangle \quad (3.109)$$

那么单激发行列式和  $|\Psi_0\rangle$  的混合矩阵元就等于 Fock 矩阵的非对角元。根据定义，求解 Hartree-Fock 本征值问题时要求非对角元  $\langle \chi_i | f | \chi_j \rangle \neq 0 (i \neq j)$ 。那么就能说求解 Hartree-Fock 本征值方程等价于确保  $|\Psi_0\rangle$  不和任何单激发行列式发生混合。(3.97) 中(能量)最低的解为

$$\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & \langle \Psi_a^r | \mathcal{H} | \Psi_a^r \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.110)$$

在这种意义下，Hartree-Fock 基态可以说是“稳定”的，因为即使将单激发行列式混入，结果也不能进一步改进。现在我们期望双激发行列式  $\langle \Psi_{ab}^{rs} \rangle$  会对  $|\Psi_0\rangle$  有领头且最重要的修正。这不是说精确基态  $|\Phi_0\rangle$  中没有单激发行列式  $|\Psi_a^r\rangle$  成分，因为它们能通过与双激发行列式的混合间接进入  $|\Psi_0\rangle$ ，观察矩阵元  $\langle \Psi_a^r | \mathcal{H} | \Psi_{ab}^{rs} \rangle, \langle \Psi_{ab}^{rs} | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle$  就能知道这一点。以上推出的重要结果就称为 Brillouin 定理。

**Brillouin 定理** 单激发行列式  $|\Psi_a^r\rangle$  不会直接与参考态即 Hartree-Fock 行列式发生作用，也即  $\langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_a^r \rangle = 0$ 。之后几章会大量使用该定理。

### 3.3.3 H-F 哈密顿量

目前为止，我们对 Hartree-Fock 近似的理解就是哈密顿为精确的，而波函数用单 Slater 行列式来近似。此处为了第六章微扰论中的需要，提前以另外一种等价但不同的视角研究 Hartree-Fock 理论，此时我们主要关注的是 Hamiltonian。

精确的电子薛定谔方程

$$\mathcal{H} |\Phi_0\rangle = \mathcal{E}_0 |\Phi_0\rangle \quad (3.111)$$

难以求解，但可以用变分原理来寻找  $|\Phi_0\rangle$  的近似  $|\Psi_0\rangle$ 。那么现在提一个问题：是否存在某些近似的  $N$ -电子 Hamiltonian，和本征方程是我们之前精确求解过的？或者说，是否存在某近似的 Hamiltonian，使  $|\Psi_0\rangle$  就是其精确本征函数？答案是存在。**Hartree-Fock Hamiltonian** 定义如下：

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i^N f(i) \quad (3.112)$$

其中  $f(i)$  是电子  $i$  的 Fock 算符。

**练习 3.7** 利用 (2.115) 中 Slater 行列式的定义，并考虑到  $\mathcal{H}_0$  与任何置换电子指标的算符都对易，证明  $|\Psi_0\rangle$  是  $\mathcal{H}_0$  的本征函数，本征值为  $\sum_a \epsilon_a$ 。为什么  $\mathcal{H}_0$  与置换算符对易？

上面的练习中证明了  $|\Psi_0\rangle$  是一 Hartree-Fock Hamiltonian 的本征函数, 对应本征值不是 Hartree-Fock 能量  $E_0$ , 而是轨道能之和  $\sum_a \epsilon_a$ . 实际我们可以证明由 Fock 算符的本征函数  $\{\chi_i\}$  组成的任意行列式都是  $\mathcal{H}_0$  的本征函数, 本征值等于行列式中自旋轨道能量之和, 第六章仔细讨论的微扰论框架下, 我们已经得到未受扰 Hamiltonian 的一组完备本征函数, 它可作为如下精确能量微扰展开的基:

$$\mathcal{E}_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)} \quad (3.113)$$

零阶未受扰能量就是

$$E_0^{(0)} = \sum_a \epsilon_a \quad (3.114)$$

若

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V} \quad (3.115)$$

那么微扰  $\mathcal{V}$  就是

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{H} - \mathcal{H}_0 \\ &= \sum_{i=1}^N h(i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N r_{ij}^{-1} - \sum_{i=1}^N f(i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N r_{ij}^{-1} - \sum_{i=1}^N v^{\text{HF}}(i) \end{aligned} \quad (3.116)$$

即精确的电子-电子相互作用和 Hartree-Fock 库伦、交换势之间的差. 现在就能按下式计算 Hartree-Fock 能量

$$E_0 = \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \mathcal{H}_0 | \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0 | \mathcal{V} | \Psi_0 \rangle \quad (3.117)$$

$$= \sum_a \epsilon_a + \langle \Psi_0 | \mathcal{V} | \Psi_0 \rangle = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} \quad (3.118)$$

其中  $\langle \Psi_0 | \mathcal{V} | \Psi_0 \rangle$  我们成为精确能量展开式 (3.104) 中的一阶能量. 第六章的重心是计算  $E_0^{(2)}$  及更高阶能量.

---

**练习 3.8** 使用式 (3.108) 中  $\mathcal{V}$  的表达式、Hartree-Fock 势  $v^{\text{HF}}(i)$  的表达式 (3.18) 及矩阵元计算规则, 直接证明  $\langle \Psi_0 | \mathcal{V} | \Psi_0 \rangle = -\frac{1}{2} \sum_a \sum_b \langle ab || ab \rangle$ . 这意味着  $E_0^{(0)}$  减去了  $E_0^{(0)} = \sum_a \epsilon_a$  中被计入两次的电子-电子排斥, 因而给出正确的 Hartree-Fock 能量  $E_0$ .

---

### 3.4 限制性闭壳层 H-F: Roothaan 方程

本章目前为止都是在形式上用一组自旋轨道  $\{\chi_i\}$  来讨论 Hartree-Fock 方程. 现在是考虑 Hartree-Fock 波函数的真正计算的时候了. 我们需将自旋轨道具体写出来. 上一章我们简要

讨论了两类自旋轨道, 限制性自旋轨道:  $\alpha$ (自旋朝上) 和  $\beta$ (自旋朝下) 自旋函数所对应的空间轨道必须相同, 非限制性自旋轨道:  $\alpha$  和  $\beta$  自旋所对应的空间轨道可以不同. 本章靠后部会讨论非限制性 Hartree-Fock 和非限制性 Hartree-Fock 计算. 本节所关心的是计算限制性 Hartree-Fock 波函数的手续. 我们仅考虑闭壳层的计算. 因此分子必须有偶数的  $N$  个电子, 所有电子都配对, 那么就有  $n = N/2$  个空间轨道分别被两个电子占据. 本质上这就是将讨论限制在闭壳层基态<sup>3</sup>上. 要描述开壳层基态, 就要用到本章上一节讨论的非限制性形式. 要描述开壳层激发态, 也要用到非限制性 Hartree-Fock 理论. 非限制开壳层形式要比限制性闭壳层或非限制性开壳层更为繁琐. 本书也不打算讨论限制性开壳层 Hartree-Fock 计算. Hurley 的书中对这类计算有非常精彩的介绍, 此书列入了章末的深入阅读列表内.

### 3.4.1 闭壳层 H-F: 限制性自旋轨道

限制性自旋轨道形式如下

$$\chi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \psi_j(\mathbf{r})\alpha(\omega) \\ \psi_j(\mathbf{r})\beta(\omega) \end{cases} \quad (3.119)$$

闭壳层限制性基态就是

$$|\Psi_0\rangle = |\chi_1\chi_2\cdots\chi_n\chi_{N-1}\chi_N\rangle = |\psi_1\bar{\psi}_1\cdots\psi_n\bar{\psi}_n\cdots\psi_{N/2}\bar{\psi}_{N/2}\rangle \quad (3.120)$$

现在要将一般的自旋轨道 Hartree-Fock 方程  $f(1)\chi_i(1) = \varepsilon_i\chi_i(1)$  转为空间本征值方程, 其中每个被占的空间分子轨道  $\{\psi_a|a=1,2,\dots,N/2\}$  都被两个电子占据. 将自旋轨道转为空间轨道的手续已在 2.3.5 节讲过: 需将自旋函数积分掉. 先将这个技术用于 Hartree-Fock 方程

$$f(\mathbf{x}_1)\chi_i(\mathbf{x}_1) = \varepsilon_i\chi_i(\mathbf{x}_1) \quad (3.121)$$

自旋轨道  $\chi_i(\mathbf{x}_1)$  的自旋部分为  $\alpha$  或  $\beta$ . 这里假设为  $\alpha$ ,  $\beta$  的结果也一样,

$$f(\mathbf{x}_1)\psi_j(\mathbf{r}_1)\alpha(\omega_1) = \varepsilon_i\psi_j(\mathbf{r}_1)\alpha(\omega_1) \quad (3.122)$$

式中  $\varepsilon_j$  为空间轨道  $\psi_j$  的能量, 与自旋轨道  $\chi_i$  的能量  $\varepsilon_i$  相同. 左乘  $\alpha^*(\omega_1)$  并对自旋积分可得

$$\left[ \int d\omega_1 \alpha^*(\omega_1) f(\mathbf{x}_1) \alpha(\omega_1) \right] \psi_j(\mathbf{r}_1) = \varepsilon_i \psi_j(\mathbf{r}_1) \quad (3.123)$$

下一步需算出 (3.114) 左侧的式子. 将自旋轨道的 Fock 算符写为

$$f(\mathbf{x}_1) = h(\mathbf{r}_1) + \sum_c^N \int d\mathbf{x}_2 \chi_c^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \chi_c(\mathbf{x}_2) \quad (3.124)$$

那么 (3.114) 成为

$$\left[ \int d\omega_1 \alpha^*(\omega_1) f(\mathbf{x}_1) \alpha(\omega_1) \right] \psi_j(\mathbf{r}_1) = \left[ \int d\omega_1 \alpha^*(\omega_1) h(\mathbf{r}_1) \alpha(\omega_1) \right] \psi_j(\mathbf{r}_1) \quad (3.125)$$

$$+ \left[ \sum_c \int d\omega_1 d\mathbf{x}_2 \alpha^*(\omega_1) \chi_c^*(\mathbf{x}_2) r_{12}^{-1} (1 - \mathcal{P}_{12}) \chi_c(\mathbf{x}_2) \alpha(\omega_1) \right] \psi_j(\mathbf{r}_1) \quad (3.126)$$



$$= \varepsilon_j \psi_j(\mathbf{r}_1) \quad (3.127)$$

若用  $f(\mathbf{r}_1)$  来记闭壳层 Fock 算符:

$$f(\mathbf{r}_1) = \int d\omega_1 \alpha^*(\omega_1) f(\mathbf{x}_1) \alpha(\omega_1) \quad (3.128)$$

那么

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) &= h(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) + \sum_c \int d\omega_1 d\mathbf{x}_2 \alpha^*(\omega_1) \chi_c^*(\mathbf{x}_1) r_{12}^{-1} \chi_c(\mathbf{x}_2) \alpha(\omega_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) \\ &\quad - \sum_c \int d\omega_1 d\mathbf{x}_2 \alpha^*(\omega_1) \chi_c^*(\mathbf{x}_1) r_{12}^{-1} \chi_c(\mathbf{x}_1) \alpha(\omega_2) \psi_j(\mathbf{r}_2) \\ &= \varepsilon_j \psi_j(\mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (3.118)$$

式中含  $h(\mathbf{r}_1)$  的那项中  $d\omega_1$  的积分已经预先积完, 此外用  $\mathcal{P}_{12}$  来生成交换项. 现若是闭壳层, 则对占据自旋轨道的求和中, 对  $\alpha$  自旋轨道的求和与对  $\beta$  自旋轨道的求和是等量的:

$$\sum_c^N \rightarrow \sum_c^{N/2} + \sum_c^{N/2} \quad (3.129)$$

因此

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) &= h(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) \\ &\quad + \sum_c^{N/2} \int d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{r}_2 \alpha^*(\omega_1) \psi_c^*(\mathbf{r}_2) \alpha^*(\omega_2) r_{12}^{-1} \psi_c(\mathbf{r}_2) \alpha(\omega_2) \alpha(\omega_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) \\ &\quad + \sum_c^{N/2} \int d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{r}_2 \alpha^*(\omega_1) \psi_c^*(\mathbf{r}_2) \beta^*(\omega_2) r_{12}^{-1} \psi_c(\mathbf{r}_2) \beta(\omega_2) \alpha(\omega_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) \\ &\quad - \sum_c^{N/2} \int d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{r}_2 \alpha^*(\omega_1) \psi_c^*(\mathbf{r}_2) \alpha^*(\omega_2) r_{12}^{-1} \psi_c(\mathbf{r}_1) \alpha(\omega_1) \alpha(\omega_2) \psi_j(\mathbf{r}_2) \\ &\quad - \sum_c^{N/2} \int d\omega_1 d\omega_2 d\mathbf{r}_2 \alpha^*(\omega_1) \psi_c^*(\mathbf{r}_2) \beta^*(\omega_2) r_{12}^{-1} \psi_c(\mathbf{r}_2) \beta(\omega_2) \alpha(\omega_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) \\ &= \varepsilon_j \psi_j(\mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (3.130)$$

现在可以进行对  $d\omega_1$  和  $d\omega_2$  的积分. (3.120) 中最后一项根据自旋正交性为零. 这反映自旋平行电子之间没有交换作用的事实. 两个库伦项是相等的, 那么可得

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) &= h(\mathbf{r}_1) \psi_j(\mathbf{r}_1) + \left[ 2 \sum_c^{N/2} \int d\mathbf{r}_2 \psi_c^*(\mathbf{r}_2) r_{12}^{-1} \psi_c(\mathbf{r}_2) \right] \psi_j(\mathbf{r}_1) \\ &\quad - \left[ 2 \sum_c^{N/2} \int d\mathbf{r}_2 \psi_c^*(\mathbf{r}_2) r_{12}^{-1} \psi_j(\mathbf{r}_2) \right] \psi_c(\mathbf{r}_1) \\ &= \varepsilon_j \psi_j(\mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (3.131)$$

因此闭壳层 Fock 算符的形式为

$$f(\mathbf{r}_1) = h(\mathbf{r}_1) + \sum_a^{N/2} \int d\mathbf{r}_2 \psi_a^*(\mathbf{r}_2) (2 - \mathcal{P}_{12}) \psi_a(\mathbf{r}_2) \quad (3.132)$$

或写成等价形式

$$f(1) = h(1) + \sum_a^{N/2} 2J_a(1) - K_a(1) \quad (3.133)$$

其中闭壳层的考虑和交换算符定义如下

$$J_a(1) = \int d\mathbf{r}_2 \psi_a^*(2) r_{12}^{-1} \psi_a(2) \quad (3.134)$$

$$K_a(1) = \left[ \int d\mathbf{r}_1 \psi_a^*(2) r_{12}^{-1} \psi_i(2) \right] \psi_a(1) \quad (3.135)$$

这些分量与自旋轨道版本的非常类似, 除了库伦算符中多一个因子 2. (3.122) 中的求和当然对  $N/2$  个占据轨道  $\{\psi_a\}$  进行. 闭壳层空间 Hartree-Fock 方程就是

$$f(1)\psi_j(1) = \varepsilon_j\psi_j(1) \quad (3.136)$$

闭壳层 Hartree-Fock 能量在 2.3.5 节中已导出, 在那里是作为从自旋轨道到空间轨道转换的一个例子. 对闭壳层行列式  $|\Psi_0\rangle = |\psi_1\bar{\psi}_1 \cdots \psi_a\bar{\psi}_a \cdots \psi_{N/2}\bar{\psi}_{N/2}\rangle$ , 该能量就是

$$E_0 = \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle = 2 \sum_a (a|h|a) + \sum_a \sum_b 2(aa|bb) - (ab|ba) \quad (3.137)$$

$$= 2 \sum_a h_{aa} + \sum_a \sum_b 2J_{ab} - K_{ab} \quad (3.138)$$

还未完成的就是将式 (3.72) 中的轨道能量表达式转换为闭壳层空间轨道形式.

### 练习 3.9 将轨道能量的自旋轨道表达式

$$\varepsilon_i = \langle \chi_i | h | \chi_i \rangle + \sum_b^N \langle \chi_i \chi_b | \chi_i \chi_b \rangle$$

转化为闭壳层表达式:

$$\varepsilon_i = (\psi_i | h | \psi_i) + \sum_b^{N/2} 2(ii|bb) - (ib|bi) = h_{ii} + \sum_b^{N/2} 2J_{ib} - K_{ib}$$

加上上面这个练习的结果, 就有了大多数我们所关心的量的闭壳层表达式. 现在用极小基  $H_2$  模型来检验这些式子.

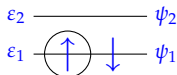


可以通过观察直接写出总能. 两个电子中每个都对对应能加上核吸引势能  $h_{11} = (\psi_1 | h | \psi_1)$ , 此外还有两电子间的库伦排斥  $J_{11} = (\psi_1 \psi_1 | \psi_1 \psi_1)$ . 这里没有交换作用, 因为两电子的自旋反平行. 那么 Hartree-Fock 能量就是

$$E_0 = 2h_{11} + J_{11} \quad (3.139)$$

这与 (3.127) 相符, 因为  $J_{ii} = K_{ii}$ .

可按同样的方式计算轨道能量



要计算  $\epsilon_c$ , 将圆圈内的电子的作用加起来即得. 有动能和核吸引势能  $h_{11}$ , 以及库伦作用  $J_{11}$ , 那么

$$\epsilon_1 = h_{11} + J_{11} \quad (3.140)$$

方法适用于任何占据轨道的能量. 对于虚轨道, 如之前所看到的, 轨道能量对应于额外的第  $(N+1)$  个电子的作用, 这与 Koopmans 定理相符. 在这里的极小基模型中, 需保持  $|\Psi_0\rangle$  中的两个电子不动, 然后计算虚轨道上一个外来电子的能量, 如图所示



圈内电子有动能加核吸引势能  $h_{11}$ , 并与其他两个电子分别有库伦作用  $J_{12}$ , 再加上与同自旋电子的一个交换作用  $-K_{12}$ . 因此

$$\epsilon_2 = h_{22} + 2J_{12} - K_{12} \quad (3.142)$$

以上两个结果与练习 3.9 中闭壳层轨道能量的一般表达式相符.

### 3.4.2 基的引入: Roothaan 方程

因为我们已经消掉了自旋, 那么分子轨道计算就等价于求解如下的积分微分方程

$$f(\mathbf{r}_r)\psi_i(\mathbf{r}_1) = \epsilon_i\psi_i(\mathbf{r}_1) \quad (3.143)$$

也许你会尝试数值求解该方程, 数值解在原子的计算中是十分普遍. 但目前确实没有可行的办法得到分子的数值解. Roothaan<sup>4</sup> 的贡献就是证明了通过引入一组已知的空间基函数, 该微分方程可以转化为一组代数方程并可用标注的矩阵技术来求解.

那么我们就引入一组  $K$  个已知的基函数  $\{\phi_\mu(\mathbf{r})|\mu = 1, 2, \dots, K\}$  并将未知的分子轨道线性展开:

$$\psi_i = \sum_{\mu=1}^K C_{\mu i} \phi_\mu \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (3.144)$$

若集合  $\{\phi_\mu\}$  完备, 那么该展开就是精确的, 而且任意一组完备集  $\{\phi_\mu\}$  都可用于展开. 但是事与愿违, 由于实际计算中的原因, 我们只能使用有限  $K$  个基函数. 正因如此, 选择一个尽可能精确地展开分子轨道的基组就非常重要, 尤其是对于  $|\Psi_0\rangle$  中被占分子轨道  $\{\psi_a\}$  (由它们来确定基态能量  $E_0$ ) 的展开. 本章后一阶会讨论基组选择的问题并讲述一点选择基组的艺术. 就我们当下的目的来看, 只需预设  $\{\phi_\mu\}$  是一组已知的函数就行. 当基组越来越完备时, 展开式 (3.133) 就可以越来越准确地表示“精确”的分子轨道, 也就是 (近似) 的分子轨道 收敛到了

式 (3.132) 中的 (精确) 分子轨道——Fock 算符的真实本征函数. 对任意的有限基组, 我们所得的分子轨道都是截断的展开 (3.133), 它仅仅精确到由  $\{\phi_\mu\}$  所张的空间 (即在仅这个子空间内是精确的).

由 (3.133) 可知, 计算 Hartree-Fock 分子轨道的问题约化为计算一组展开系数  $\{C_{\mu i}\}$  的问题. 我们可将线性展开 (3.133) 带入 Hartree-Fock 方程 (3.132) 得到一个矩阵方程. 若使用指标  $\nu$ , 则方程为

$$f(1) \sum_{\nu} C_{\nu i} \phi_{\nu}(1) = \varepsilon_i \sum_{\nu} C_{\nu i} \phi_{\nu}(1) \quad (3.145)$$

左乘  $\phi_{\mu}^*(1)$  并积分, 就将这个积分微分方程转化为矩阵方程

$$\sum_{\nu} C_{\nu i} \int d\mathbf{r}_1 \phi_{\mu}^*(1) f(1) \phi_{\nu}(1) = \varepsilon_i \sum_{\nu} C_{\nu i} \phi_{\mu}^*(1) \phi_{\nu}(1) \quad (3.146)$$

现在定义两个矩阵:

1. **重叠矩阵 S** 的矩阵元为

$$S_{\mu\nu} = \int d\mathbf{r}_1 \phi_{\mu}^*(1) \phi_{\nu}(1) \quad (3.147)$$

该矩阵为  $K \times K$  厄米矩阵 (虽然通常是实对称阵). 虽然假设基函数  $\{\phi_{\mu}\}$  为归一化且相互线性独立, 但它们一般不相互正交, 因此就互有重叠, 重叠大小为  $0 \leq |S_{\mu\nu}| \leq 1$ , 即 **S** 的对角元为 1 非对角元的绝对值都小于 1. 非对角元的符号取决于两个基函数的相对符号、相对取向及在空间上的分离程度. 若两个非对角元趋近于 1 (按绝对值), 即趋近于完全重叠, 那么两个基函数就趋近线性相关. 由于重叠矩阵为厄米的, 它可被一个酉矩阵对角化, 之后我们会来做这件事. 重叠矩阵的本征值可以证明一定是正数, 因此重叠矩阵是正定矩阵. 基组中的线性相关与重叠矩阵中趋于零的本征值相联系. 重叠矩阵有时也叫作度规矩阵 (metric matrix).

1. **Fock 矩阵 F** 的矩阵元为

$$F_{\mu\nu} = \int d\mathbf{r}_1 \phi_{\mu}^*(1) f(1) \phi_{\nu}(1) \quad (3.148)$$

它也是  $K \times K$  的和米矩阵 (虽然常为实对称阵). Fock 算符  $f(1)$  是单电子算符, 任意一组单电子函数即定义该算符的一种矩阵表示. 之前已讨论过 Fock 算符在自旋轨道下的矩阵元. Fock 矩阵 **F** 就是 Fock 算符在一组基函数  $\{\phi_{\mu}\}$  下的矩阵表示.

有了 **F, S** 的定义, 就可将积分形式的 Hartree-Fock 方程 (3.135) 写为

$$\sum_{\nu} F_{\mu\nu} C_{\nu i} = \varepsilon_i \sum_{\nu} S_{\mu\nu} C_{\nu i} \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (3.149)$$

这组方程就是 **Roothaan 方程**, 可以写成更紧凑的单个矩阵方程:

$$\mathbf{FC} = \mathbf{SC}\varepsilon \quad (3.150)$$

式中 **C** 是展开系数  $C_{\mu i}$  构成的  $K \times K$  方阵:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1K} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{K1} & C_{K2} & \cdots & C_{KK} \end{pmatrix} \quad (3.151)$$

$\epsilon$  是轨道能量  $\epsilon_i$  构成的对角阵:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & \\ & \epsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \epsilon_K \end{pmatrix} \quad (3.152)$$

需注意 (3.133) 到 (3.140) 中, 由  $\mathbf{C}$  的列来描述分子轨道, 也即描述  $\psi_1$  的系数是  $\mathbf{C}$  的第一列, 描述  $\psi_2$  的系数是  $\mathbf{C}$  的第二列, 等等.

**练习 3.10** 请证明  $\mathbf{C}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{C} = \mathbf{1}$ . 提示: 分子轨道  $\{\psi_i\}$  是正交的.

到此确定 Hartree-Fock 分子轨道  $\{\psi_i\}$  和轨道能量  $\epsilon_i$  的问题就与求解矩阵方程  $\mathbf{F}\mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{C}\epsilon$  关联在一起. 要想更进一步, 需将 Fock 矩阵的显式表达式写出来. 但我们必须先来介绍密度矩阵的概念.

### 3.4.3 电荷密度

若某电子由空间波函数  $\psi_a(\mathbf{r})$  描述, 那么在点  $\mathbf{r}$  附近以小体积元  $d\mathbf{r}$  内找到该电子的概率就是  $|\psi_a(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$ . 这个概率分布函数 (电荷密度) 就是  $|\psi_a(\mathbf{r})|^2$ . 若由一个闭壳层分子, 由一单行列式所描述, 每个被占分子轨道上都有两个电子, 那么总的电荷密度就是

$$\rho(\mathbf{r}) = 2 \sum_a^{N/2} |\psi_a(\mathbf{r})|^2 \quad (3.153)$$

因此  $\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r}$  就是找到一个电子在  $\mathbf{r}$  出的  $d\mathbf{r}$  内的概率. 对电荷密度积分就得总电子数:

$$\int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = 2 \sum_a^{N/2} \int d\mathbf{r} |\psi_a(\mathbf{r})|^2 = 2 \sum_a^{N/2} 1 = N \quad (3.154)$$

对于单行列式, 这些方程就说明总电荷密度就是各个电子的电荷密度之和.

**练习 3.11** 使用密度算符  $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r})$ 、第二章中求矩阵元的规则, 以及自旋轨道到空间轨道的转换规则, 由  $\rho(\mathbf{r}) = \langle \Psi_0 | \hat{\rho}(\mathbf{r}) | \Psi_0 \rangle$  推得 (3.142).

**练习 3.12** 用式 (3.122) 的闭壳层 Fock 算符表达式证明

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_1) &= h(\mathbf{r}_1) + v^{\text{HF}}(\mathbf{r}_1) \\ &= h(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\sigma} P_{\lambda\sigma} \left[ \int d\mathbf{r}_2 \phi_\sigma^*(\mathbf{r}_2) (2 - \mathcal{P}_{12}) r_{12}^{-1} \phi_\lambda(\mathbf{r}_2) \right] \end{aligned} \quad (3.155)$$

上面练习的结果用密度矩阵表示了 Fock 算符. 可用此表达式从直觉上说明 Hartree-Fock 手续怎样进行. 我们先猜一个密度矩阵  $\mathbf{P}$ , 也即猜一个描述电子位置的电荷密度  $\rho(\mathbf{r})$ .

之后会有一些内容介绍如何猜, 然后使用猜测的电荷密度根据 (3.146) 计算电子的有效单电子势  $v^{\text{HF}}(\mathbf{r}_1)$ . 由此就得到有效单电子 Hamiltonian (Fock 算符), 然后就可求解单电子的类 Schrödinger 方程以确定有效势中的单电子态  $\{\psi_i\}$ . 由 (3.142) 可用新的单电子态 (即分子轨道  $\{\psi_i\}$ ) 确定对密度的更优近似. 有了新的电荷密度就能计算新的 Hartree-Fock 势然后重复以上手续直到 Hartree-Fock 势不再改变 (有效静电场也随之不再改变), 也即, 直到 (通过求解类 Schrödinger 方程) 产生电荷密度的场与前一次的场 (及 Hartree-Fock 本征值方程) 相洽 (相同) (使用 (3.146)). 这就是 Hartree-Fock 方程常叫作**自洽场**方程的缘故. 这也是看待求解 Roothaan 方程所涉及物理的一种视角. 回到真实的代数手续中, 需将 Fock 矩阵的  $\mathbf{F}$  的显式表达式给出.

### 3.4.4 Fock 矩阵的表达式

Fock 矩阵  $\mathbf{F}$  是 Fock 算符

$$f(1) = h(1) + \sum_a^{N/2} 2J_a(1) - K_a(1) \quad (3.156)$$

在基  $\{\phi_\mu\}$  下的矩阵表示

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \int d\mathbf{r}_1 \phi_\mu^*(1) f(1) \phi_\nu(1) \\ &= \int d\mathbf{r}_1 \phi_\mu^*(1) h(1) \phi_\nu(1) + \sum_a^{N/2} \int d\mathbf{r}_1 \phi_\mu^*(1) [2J_a(1) - K_a(1)] \phi_\nu(1) \\ &= H_{\mu\nu}^{\text{core}} + \sum_a^{N/2} 2(\mu\nu|aa) - (\mu a|a\nu) \end{aligned} \quad (3.157)$$

式中定义了**核 Hamiltonian** 矩阵

$$H_{\mu\nu}^{\text{core}} = \int d\mathbf{r}_1 \phi_\mu^*(1) h(1) \phi_\nu(1) \quad (3.158)$$

核 Hamiltonian 矩阵中的元素是含单电子算符  $h(1)$  的积分, 由它描述一个电子的动能及核吸引势能:

$$h(1) = -\frac{1}{2} \nabla_1^2 - \sum_A \frac{Z_A}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_A|} \quad (3.159)$$

计算核 Hamiltonian 矩阵元涉及到求动能积分:

$$T_{\mu\nu} = \int d\mathbf{r}_1 \phi_\mu^*(1) \left[ -\frac{1}{2} \nabla_1^2 \right] \phi_\nu(1) \quad (3.160)$$

以及核吸引积分:

$$V_{\mu\nu}^{\text{nucl}} = \int d\mathbf{r}_1 \phi_\mu^*(1) \left[ -\sum_A \frac{Z_A}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_A|} \right] \phi_\nu(1) \quad (3.161)$$

那么

$$H_{\mu\nu}^{\text{core}} = T_{\mu\nu} + V_{\mu\nu}^{\text{nucl}} \quad (3.162)$$

在具体的基组  $\{\phi_\mu\}$  下,  $\mathbf{T}, \mathbf{V}^{\text{nuc}}$  中的积分会具体地计算出来, 有一构成核 Hamiltonian 矩阵. 核 Hamiltonian 矩阵与 Fock 矩阵不同, 在迭代计算的过程中只需被计算一次, 然后保持不变. 动能核吸引积分的计算会在附录 A 讲述.

回到 (3.148) 的 Fock 矩阵表达式, 现要将分子轨道展开 (3.133) 插入到双电子项中, 得到

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= H_{\mu\nu}^{\text{core}} + \sum_a \sum_{\lambda\sigma}^{N/2} C_{\lambda a} C_{\sigma a}^* [2(\mu\nu|\sigma\lambda) - (\mu\lambda|\sigma\nu)] \\ &= H_{\mu\nu}^{\text{core}} + \sum_{\lambda\sigma} P_{\lambda\sigma} [(\mu\nu|\sigma\lambda) - \frac{1}{2}(\mu\lambda|\sigma\nu)] \\ &= H_{\mu\nu}^{\text{core}} + G_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.163)$$

式中  $G_{\mu\nu}$  是 Fock 矩阵的双电子部分. 这就是 FOck 矩阵的最终表达式. 它包含单电子部分  $\mathbf{H}^{\text{core}}$ , 这部分在给定基组下保持不变, 还包括双电子部分  $\mathbf{G}$ , 它依赖密度矩阵  $\mathbf{P}$  及一组双电子积分:

$$(\mu\nu|\lambda\sigma) = \int d\mathbf{r}_2 \phi_\mu^*(1) \phi_\nu(1) r_{12}^{-1} \phi_\lambda^*(2) \phi_\sigma(2) \quad (3.164)$$

由于双电子积分数目较多, 所以 Hartree-Fock 计算中的主要困难就是操作、计算这些双电子积分.

**练习 3.13** 若基函数为实的, 请用双电子积分的对称性  $[(\mu\nu|\lambda\sigma) = (\nu\mu|\lambda\sigma) = (\lambda\sigma|\mu\nu)]$  证明含  $K = 100$  个基函数的基组有  $12753775 = O(K^4/8)$  个互不相同的双电子积分.

由于 Fock 矩阵依赖密度矩阵

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{P}) \quad (3.165)$$

或者等价地, 依赖于展开系数

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{C}) \quad (3.166)$$

因此 Roothaan 方程是非线性的, 即

$$\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{C}\epsilon \quad (3.167)$$

所以需要迭代求解. 考虑如何进行迭代之前, 现讨论如下矩阵方程的在每步迭代中的解

$$\mathbf{F}\mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{C}\epsilon \quad (3.168)$$

若  $\mathbf{S}$  是单位阵 (即若基组是正交归一的) 那么就有

$$\mathbf{F}\mathbf{C} = \mathbf{C}\epsilon \quad (3.169)$$

Roothaan 方程就成为通常本征值方程的形式, 然后将  $\mathbf{F}$  对角化即可求出本征矢  $\mathbf{C}$  和本征值  $\epsilon$ . 由于当下的基组不正交, 需对本征值问题  $\mathbf{F}\mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{C}\epsilon$  进行重构.

### 3.4.5 基的正交归一化

分子的计算中所使用的基组是非正交归一基。基函数确实是归一的，但它们之间不正交。这就产生了 Roothaan 方程中的重叠矩阵。为将 Roothaan 写为通常的矩阵本征值问题，需要正交化基函数。

若有一组函数  $\{\phi_\mu\}$  非正交，也即

$$\int d\mathbf{r} \phi_\mu^*(\mathbf{r}) \phi_\nu(\mathbf{r}) = S_{\mu\nu} \quad (3.170)$$

则总能够找到一个变换矩阵（非酉矩阵）使得变换后的函数集合  $\{\phi'_\mu\}$

$$\phi'_\mu = \sum_\nu X_{\nu\mu} \phi_\nu \quad (3.171)$$

构成一个正交归一集：

$$\int d\mathbf{r} \phi_\mu'^*(\mathbf{r}) \phi'_\nu(\mathbf{r}) = \delta_{\mu\nu} \quad (3.172)$$

为得到  $\mathbf{X}$  的具体性质，我们将变换 (3.162) 代入 (3.163) 得到

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} \phi_\mu'^*(\mathbf{r}) \phi'_\nu(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r} \left[ \sum_\lambda X_{\lambda\mu}^* \phi_\lambda^*(\mathbf{r}) \right] \left[ \sum_\sigma X_{\sigma\nu} \phi_\sigma(\mathbf{r}) \right] \\ &= \sum_\lambda \sum_\sigma X_{\lambda\mu}^* \int d\mathbf{r} \phi_\lambda^*(\mathbf{r}) \phi_\sigma(\mathbf{r}) X_{\sigma\nu} \\ &= \sum_\lambda \sum_\sigma X_{\lambda\mu}^* S_{\lambda\sigma} X_{\sigma\nu} = \delta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.173)$$

最后的等式可写为矩阵方程

$$\mathbf{X}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{X} = \mathbf{1} \quad (3.174)$$

如果变换后的轨道构成正交归一集，上式就是  $\mathbf{X}$  必须满足的关系。我们之后会知道， $\mathbf{X}$  必须是非奇异的，也即它必须有拟矩阵  $\mathbf{X}^{-1}$ 。当前我们先来看如何得到两个不同的变换矩阵  $\mathbf{X}$ 。由于  $\mathbf{S}$  是厄米的，所以可用酉矩阵  $\mathbf{U}$  将其对角化：

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{U} = \mathbf{s} \quad (3.175)$$

其中  $\mathbf{s}$  是  $\mathbf{S}$  本征值构成的对角阵。

**练习 3.14** 使用定义  $S_{\mu\nu} = \int d\mathbf{r} \phi_\mu^* \phi_\nu$  证明  $\mathbf{S}$  的本征值全为正数。提示：考虑  $\sum_\nu S_{\mu\nu} c_\nu^i = s_i c_\mu^i$ ，乘以  $c_\mu^{i*}$  并求和，这里  $\mathbf{c}^i$  是  $\mathbf{U}$  的第  $i$  行。

一般用到的基组  $\{\phi_\mu\}$  正交化方案有两种。一种是**对称正交化**， $\mathbf{X}$  就是  $\mathbf{S}$  的负平方根：

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}^{-1/2} = \mathbf{U} \mathbf{s}^{-1/2} \mathbf{U}^\dagger \quad (3.176)$$



回忆第一章对矩阵函数的讨论, 我们可以如此构建  $\mathbf{S}^{-1/2}$ : 将  $\mathbf{S}$  对角化为  $\mathbf{s}$ , 取每个本征值的负平方根, 构成一个对角阵  $\mathbf{s}^{-1/2}$ , 然后用 (3.167) 中的变换“逆对角化”. 若  $\mathbf{S}$  厄米, 则  $\mathbf{S}^{-1/2}$  也厄米. 将 (3.167) 带入 (3.165)

$$\mathbf{S}^{-1/2}\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1/2} = \mathbf{S}^{-1/2}\mathbf{S}^{1/2} = \mathbf{S}^0 = \mathbf{1} \quad (3.177)$$

可以看到  $\mathbf{X} = \mathbf{S}^{-1/2}$  确实为一个正交化变换矩阵. 由于  $\mathbf{S}$  的本征值都为正 (练习 3.5), 所以 (3.167) 中开平方的操作没有问题. 但是若基组中出现线性相关或这近线性相关, 则某些本征值将接近零, (3.167) 中某些除数会接近零. 因此对称正交化会因近线性相关发生数值精度上的问题.

第二种正交化基组的方案叫作**正则正交化**. 它使用的变换矩阵如下

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{s}^{-1/2} \quad (3.178)$$

这就是说, 酉矩阵  $\mathbf{U}$  中的行要除以对应本征值的平方根:

$$X_{ij} = U_{ij}/s_i^{1/2} \quad (3.179)$$

将  $\mathbf{X}$  的定义 (3.165) 带入, 可得

$$\mathbf{X}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{X} = (\mathbf{U}\mathbf{s}^{-1/2})^\dagger\mathbf{S}\mathbf{U}\mathbf{s}^{-1/2} = \mathbf{s}^{-1/2}\mathbf{U}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{U}\mathbf{s}^{-1/2} = \mathbf{s}^{-1/2}\mathbf{s}\mathbf{s}^{-1/2} = \mathbf{1} \quad (3.180)$$

这就证明  $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{s}^{-1/2}$  也是一正交化变换矩阵. 从 (3.170) 可以看到, 若基组中存在 (近) 线性相关 (即某些本征值  $s_i$  接近零), 则正交化手续会引发困难. 但用正则正交化即可规避这种难处. 在矩阵本征值问题 (3.166) 中, 可以将对角阵  $\mathbf{s}$  中的本征值按任意顺序排列, 只要将  $\mathbf{U}$  中的列也以相同方式放置即可. 设想按该顺序排列本征值:  $s_1 > s_2 > s_3 > \dots$ . 若观察发现最后的  $m$  个值太小, 将发数值问题, 那么将如下的截断矩阵  $\tilde{\mathbf{X}}$  作为变换矩阵:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} U_{1,1}/s_1^{1/2} & U_{1,2}/s_2^{1/2} & \cdots & U_{1,K-m}/s_{K-m}^{1/2} \\ U_{2,1}/s_1^{1/2} & U_{2,2}/s_2^{1/2} & \cdots & U_{2,K-m}/s_{K-m}^{1/2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{K,1}/s_1^{1/2} & U_{K,2}/s_2^{1/2} & \cdots & U_{K,K-m}/s_{K-m}^{1/2} \end{pmatrix} \quad (3.181)$$

其中我们去掉了  $\mathbf{X}$  的后  $m$  列, 得到  $K \times (K-m)$  矩阵  $\tilde{\mathbf{X}}$ . 用这个截断的变换矩阵, 变换后仅能得到  $K-m$  个正交归一基函数:

$$\phi'_\mu = \sum_{\nu=1}^K \tilde{X}_{\nu\mu} \phi_\nu \quad \mu = 1, 2, \dots, K-m \quad (3.182)$$

若我们去掉的本征值真的为零, 则以上函数所张的空间与原先函数所张的空间完全相同. 实际中碰到线性相关问题时本征值的大小通常是  $s_i \leq 10^{-4}$  (这个区间当然依赖于计算时的机器精度). 去掉的列及本征值就意味着“扔掉”了一部分基组, 但也仅是很小一部分而已.

处理非正交基组的手段之一是函数  $\phi_\mu$  正交化, 得到变换后的基函数  $\phi'_\mu$  并在之后一直使用变换后的函数. 这种办法消掉了 Roothaan 方程中的重叠矩阵  $\mathbf{S}$ . 后面求解时只需对角化 Fock 矩阵. 但这意味着必须用新轨道计算所有的双电子积分, 或者将旧双电子积分  $(\mu\nu|\lambda\sigma)$  变换为新的  $(\mu'\nu'|\lambda'\sigma')$ . 实际是哪个这非常耗时. 我们可用更高效的办法处理该问题. 考虑新的系数矩阵  $\mathbf{C}'$ , 它与旧系数矩阵的关系为

$$\mathbf{C}' = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{C} \quad \mathbf{C} = \mathbf{X}\mathbf{C}' \quad (3.183)$$

此处假设  $\mathbf{X}$  有逆矩阵. 消掉线性相关后这肯定成立. 将  $\mathbf{C} = \mathbf{X}\mathbf{C}'$  带入 Roothaan 方程得到

$$\mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{C}' = \mathbf{S}\mathbf{X}\mathbf{C}'\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.184)$$

左乘  $\mathbf{X}^\dagger$  得

$$(\mathbf{X}^\dagger\mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{C}') = (\mathbf{X}^\dagger\mathbf{S}\mathbf{X})\mathbf{C}'\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.185)$$

若定义新矩阵  $\mathbf{F}'$  为

$$\mathbf{F}' = \mathbf{X}^\dagger\mathbf{F}\mathbf{X} \quad (3.186)$$

并用 (3.165), 那么

$$\mathbf{F}'\mathbf{C}' = \mathbf{C}'\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.187)$$

这就是变换后的 Roothaan 方程, 可将  $\mathbf{F}'$  对角化以解得  $\mathbf{C}'$ . 有了  $\mathbf{C}'$ ,  $\mathbf{C}$  就能从 (3.174) 得到. 因此给定  $\mathbf{F}$ , 可用 (3.177)(3.178)(174) 求解 Roothaan 方程  $\mathbf{F}\mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ . 中间的带撇矩阵就是正交基下的 Fock 矩阵和展开系数:

$$\psi_i = \sum_{\mu=1}^K C'_{\mu i} \phi'_\mu \quad (3.188)$$

$$F'_{\mu\nu} = \int d\mathbf{r}_1 \phi'_\mu^*(1) f(1) \phi'_\nu(1) \quad (3.189)$$

**练习 3.15** 用 (3.179)(3.180)(3.162) 导出 (3.174)(3.177).

### 3.4.6 SCF (自洽场) 手续

有了前面几节的背景知识, 现在是时候介绍如何得到分子限制性波函数 (即  $|\Psi_0\rangle$ ) 的真实计算手续了. 有些作者认为 Hartree-Fock 解这个术语只能在 Hartree-Fock 极限下使用, 此时基组是完备的, 他们用自洽场解来称呼在有限基组 (基组可能很小) 下的解. 但我们会交叉地使用 Hartree-Fock 和自洽场 (SCF) 这两个术语, 如有需要, 才会特别指出是否在 Hartree-Fock 极限下. SCF 手续如下:

1. 确定一个分子 (一组核坐标  $\{\mathbf{R}_A\}$ , 原子序数  $Z_A$ , 电子数  $N$ ) 和基组  $\{\phi_A\}$ .
2. 计算所需的分子积分,  $S_{\mu\nu}, H_{\mu\nu}^{\text{core}}, (\mu\nu|\lambda\sigma)$ .
3. 对角化重叠矩阵  $\mathbf{S}$ , 用 (3.167) 或 (3.169) 得到变换矩阵  $\mathbf{X}$ .
4. 猜测一个密度矩阵  $\mathbf{P}$ .
5. 用密度矩阵  $\mathbf{P}$  计算 (3.154) 中的矩阵  $\mathbf{G}$  和双电子积分  $(\mu\nu|\lambda\sigma)$ .
6.  $\mathbf{G}$  加核 Hamiltonian 矩阵得到 Fock 矩阵  $\mathbf{F} = \mathbf{H}^{\text{core}} + \mathbf{G}$ .

7. 计算变换后的 Fock 矩阵  $\mathbf{F}' = \mathbf{X}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{X}$ .
8. 对角化  $\mathbf{F}'$  得到  $\mathbf{C}', \epsilon$ .
9. 根据 (3.14) 用  $\mathbf{C}$  构建新密度矩阵  $\mathbf{P}$ .
10. 确定该过程是否收敛, 即确定 (10) 中密度矩阵是否与前一个密度矩阵在某种判据下相同. 若未收敛, 回到 (5) 用新密度矩阵计算.
11. 若收敛, 则用得到的解表示出  $\mathbf{C}, \mathbf{P}, \mathbf{F}$  等, 即计算期望值和其他想求的量.

之后会讲述期望值 (如能量、偶极矩等) 及其他有用的量 (如布局分析) 的计算 (3.4.7 节). 但我们先来考察以上十二步中的一些实际问题.

在 Born-Oppenheimer 近似中, 以上步骤所做的就是确定处在  $M$  个点电荷 ( $M$  个带电荷为  $Z_A$  的核) 中的  $N$  个电子的波函数  $|\Psi_0\rangle$  (也就确定了能量  $E_0$ ). 有了电子能量, 再加上经典的核-核排斥能即得到以核坐标  $\{\mathbf{R}_A\}$  为变量的总能函数. 在不同的核坐标下重复计算步骤, 就能研究核运动的核势能面. 一类常见的计算是在能量最低的核坐标  $\{\mathbf{R}_A\}$  下进行, 这就是分子平衡构型下的计算. 以上手续对任何一组点电荷都有效. 具体地, 比如“超分子”(supermolecule) 计算就是用大于一个分子集体的核电荷坐标, 这常见于研究分子间力的情形.

选定一组核坐标后, 限制性闭壳层行列式波函数就由一组基函数  $\{\phi_\mu\}$  所完全确定. 因此这就是所谓从**头算**的一例, 这种计算中对积分与电子 Hamiltonian 不作近似, 结果完全由基组与核坐标确定. 选择基组更像一种艺术而非科学. 很明显, 计算机设备、预算等会将限制我们的选择——通常是有限个基函数组成的较小基组. 因此选择基组必须要审慎. 当前通用的只有 Slater 核 Gaussian 型函数. 若对每个原子用的函数组较小, 那么 Slater 型函数会给出很好的能量. 当每个原子配备的函数个数增大时, Slater 函数的明显优势会被抹平. 除了基组所张函数空间大小外, 实际过程中还要考虑计算分子积分的时间. 多数多原子计算会用 Gaussian 轨道, 因为用这种函数计算积分的速度可以显式地知道, 本书会着重于 Gaussian 基函数. 基函数在本章 3.6 节讨论, 3.5.1 节讨论 1s STO-3G 基, 在将其用于  $\text{H}_2$  和  $\text{HeH}^+$  的模型计算前.

选定基组后, 就要计算并储存很多不同类型的积分. 附录 A 中介绍了 Gaussian 基函数的分子积分计算, 此处我们仅提及一小部分相关知识. 后面一点会讲述计算核 Hamiltonian 及单电子期望值所用的重叠积分与单电子积分, 这部分与双电子积分比起来相对简单, 主要是由于单电子积分数目较少. 大一些的计算中主要困难是计算核操作巨量双电子积分. 若有  $K$  个基函数, 就有约  $K^4/8$  个互不相同的双电子积分. 中性分子的小基组计算中双电子积分很容易超过几百万个. 不过问题还不是很严重, 因为大分子中当基函数间的距离比较大时, 很多积分基本上为零. 分子对称性又会使一大批积分为零. 但是双电子积分还是太多, 没办法都存入计算机内存. 常见的做法是将非零积分按随机顺序存入外部磁盘或磁带, 每个积分都附带一个标签以表明指标  $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ .

后一节中会介绍两种正交化基组 (或者说求  $\mathbf{X}$ ) 的方式, 如此就可利用对角化的办法求解 Roothaan 方程. 若取  $\mathbf{X} = \mathbf{S}^{1/2}$ , 则概念简单, 仅在非一般的情况下 (基组中的线性相关情况严重) 才会用到正则正交化. 正则正交化中会去掉  $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{s}^{1/2}$  中的一些列, 如此就得到一长方阵. 若  $\mathbf{X}$  中有  $m$  列被去掉, 那么相当于使用  $K - m$  大小的基组, 因此会得到  $K - m$  个分子轨道  $\psi_i$ , 也即  $\mathbf{F}'$  为  $(K - m) \times (K - m)$  矩阵,  $\mathbf{C}'$  是  $K \times (K - m)$  矩阵, 其列在原始的  $K$  个基函数下描述  $K - m$  个分子轨道.

对密度矩阵  $\mathbf{P}$  最简单的可能猜测是零矩阵. 这相当于将  $\mathbf{F}$  近似为  $\mathbf{H}^{\text{core}}$ , 并在首次迭代中忽略所有电子-电子相互作用. 用这种方式可以非常方便地开始迭代手续. 它对应的是将收敛

分子轨道用核势场中单电子的轨道来近似。但是  $N$ -电子分子的分子轨道可能与对应单电子分子的轨道非常不同, 用核 Hamiltonian 作为 Fock 矩阵的初猜时 SCF 手续经常不收敛。半经验的扩展 Hückel 计算会产生一个“有效” $\mathbf{F}$ , 常用它来作为波函数的初猜, 这种猜测的效果比用核 Hamiltonian 要好。此外还有很多其他方式可以生成初猜。

实际迭代手续中最耗时的部分是把双电子积分与密度矩阵填入矩阵  $\mathbf{G}$  中 (第 (5) 步)。若积分被随机存入外部存储器, 且每个都带有指示标签, 那么之后当积分读入主储存时, 可用标签也就是指标  $\mu, \nu, \lambda, \sigma$  来指认积分, 以确定用密度矩阵中哪个元素来乘, 确定  $\mathbf{G}$  矩阵中哪个元素需被加入, 根据 (3.154) 中  $\mathbf{G}$  矩阵的表达式。

多数计算中, 如果使用比较高效的对角化手续, 步骤 (6)(10) 的矩阵操作不会太费时 (相较于构建  $\mathbf{G}$  矩阵)。

由于 Roothaan 方程是非线性方程, 此处列出的简单迭代手续往往不会收敛。若初猜质量较差, 可能出现振荡或发散。若是振荡, 将前后密度矩阵作平均可能有效。若没收敛, 可能指示因为收敛较慢。有了两个及以上相邻的密度矩阵, 可以设计许多外推手续。收敛问题不是一个平凡问题, 它是很多计算中的主要问题。此书所述的迭代手续也许是可尝试的最简单手续, 它确实有些过于简单。现在已有许国其他的技术来确保或加速 SCF 解的收敛。

当然, 我们需要一个是否收敛的判据, 比较常用的办法就是简单地观察每一步的总电子能量, 要求两个相邻步骤的值只差一个小量  $\delta$ 。  $\delta = 10^{-6}$  Hartrees 在多数目的下就够用了。马上我们会证明, 每次迭代中计算能量几乎不需要花费时间。另外一种判据是, 要求密度矩阵的矩阵元前后的标准偏差, 即下式

$$\left[ K^{-2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} [P(i)_{\mu\nu} - P_{\mu\nu}^{(i-1)}] \right]$$

小于  $\delta$ 。将密度矩阵的误差设为  $\delta = 10^{-4}$  一般会使能量误差小于  $10^{-6}$  Hartrees。

我们只介绍了 SCF 手续的一小部分知识。很多研究组的研究及大量多年编程已经构建了可用于从头 SCF 手续的大型计算机程序, 当前已经可以使用。

### 3.4.7 期望值与布局分析

得到了密度矩阵、Fock 矩阵等的收敛值, 就有大量手段可使用波函数  $|\Psi_0\rangle$  或分析计算结果。这里只介绍其中较常用的一些量。

$\mathbf{F}'$  的本征值是轨道能量  $\varepsilon_i$ 。正如讲授 Koopmans 定理时讨论的, 借助占据轨道能量  $\varepsilon_a$  可以预测电离能, 用虚轨道能量  $\varepsilon_r$  可以预测电子亲和能。  $-\varepsilon_a$  往往是实验测得电离能的合理近似, 但是  $-\varepsilon_r$  一般没什么用处, 即使对电子亲和能的定性理解也没有帮助。

总电子能量就是期望值  $E_0 = \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle$ , 我们之前多次提过, 这个量可以重新写作

$$E_0 = 2 \sum_a^{N/2} h_{aa} + \sum_a^{N/2} \sum_b^{N/2} 2J_{ab} - K_{ab} \quad (3.190)$$

利用 (3.147) 中 Fock 算符的定义, 我们有

$$\varepsilon_a = f_{aa} = h_{aa} + \sum_b^{N/2} 2J_{ab} - K_{ab} \quad (3.191)$$

因此总能成为

$$E_0 = \sum_a^{N/2} (h_{aa} + f_{aa}) = \sum_a^{N/2} (h_{aa} + \varepsilon_a) \quad (3.192)$$

这个结果方便我们计算：若将分子轨道的基函数展开 (3.133) 带入上式，就得到能量公式，在迭代的任一阶段都可以快速计算出该值：

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} P_{\nu\mu} (H_{\mu\nu}^{\text{core}} + F_{\mu\nu}) \quad (3.193)$$

**练习 3.16** 由 (3.183) 导出 (3.184).

若按 (3.184) 计算  $E_0$  时所用密度矩阵  $\mathbf{P}$  与构建  $\mathbf{F}$  时所用的相同，那么  $E_0$  在迭代的任一截断都是真实能量的上界，而且一般在开始到收敛结果之间单调收敛。  $E_0$  再加上核-核排斥势就得到总能  $E_{\text{tot}}$

$$E_{\text{tot}} = E_0 + \sum_A \sum_{B>A} \frac{Z_A Z_B}{R_{AB}} \quad (3.194)$$

这就是一般所关心的量，尤其是在确定结构时，因为预测的平衡构型会取  $E_{\text{tot}}$  最小时的构型。

多数可从分子波函数中提取的分子性质，如偶极矩、四级矩、核位置的场导数、顺磁性等等，会由单电子算符之和描述，其一般形式如下：

$$\mathcal{O}_1 = \sum_{i=1}^N h(i) \quad (3.195)$$

式中  $h(1)$  不一定是核 Hamiltonian，可以是任意只依赖单个电子坐标的算符。根据矩阵元规则，这种算符的期望值总可写成

$$\langle \mathcal{O}_1 \rangle = \langle \Psi_0 | \mathcal{O}_1 | \Psi_0 \rangle = \sum_a^{N/2} (\psi_a | h | \psi_a) = \sum_{\mu\nu} P_{\mu\nu} (v | h | \mu) \quad (3.196)$$

那么欲求单电子期望值，除了算密度矩阵外，仅需额外算一组单电子积分。我们会用偶极矩作例讲述这种计算。

一组  $r_i$  处电荷  $q_i$  的偶极矩在经典定义下为

$$\vec{\mu} = \sum_i q \mathbf{r}_i \quad (3.197)$$

分子偶极矩在按量子力学计算时的相应定义为

$$\vec{\mu} = \left\langle \Psi_0 \left| - \sum_{i=1}^N \right| \Psi_0 \right\rangle + \sum_A Z_A \mathbf{R}_A \quad (3.198)$$

式中第一项是电子对偶极矩的贡献 (按量子力学)，电子电荷为  $-1$ ，第二项是核的贡献 (按经典做法)。电子偶极算符是  $-\sum_{i=1}^N$ ，是一组单电子算符之和。因此利用 (3.187) 可有

$$\vec{\mu} = - \sum_{\mu} \sum_{\nu} P_{\mu\nu} (v | \mathbf{r} | \mu) + \sum_A Z_A \mathbf{R}_A \quad (3.199)$$

这是一个矢量方程, 其分量 (此处以  $x$  为例) 为

$$\mu_x = - \sum_{\mu} \sum_{\nu} P_{\mu\nu} (v|x|\mu) + \sum_A Z_A X_A \quad (3.200)$$

要计算偶极矩, 除了需要  $\mathbf{P}$  外, 额外仅需计算偶极积分

$$(v|x|\mu) = \int d\mathbf{r}_1 \phi_{\mu}^*(\mathbf{r}_1) x_1 \phi_{\mu}(\mathbf{r}_1) \quad (3.201)$$

及  $x, z$  分量的对应值.

电荷密度

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} P_{\mu\nu} \phi_{\mu}(\mathbf{r}) \phi_{\nu}^*(\mathbf{r}) \quad (3.202)$$

表示在空间中一区域内找到一个电子的概率, 一般用画在分子截面上的等高线图来表示. 在分子内, 说某个原子带了多少电子没有意义, 但有时进行这种布局分析<sup>iv</sup>也会有用. 由于

$$N = 2 \sum_a^{N/2} \int d\mathbf{r} |\psi_a(\mathbf{r})|^2 \quad (3.203)$$

实际上这是将所有电子按每两个电子配一个轨道分配在了分子轨道上, 若将  $\psi_a$  的基函数展开带入 (3.194) 则有

$$N = \sum_{\mu} \sum_{\nu} P_{\mu\nu} S_{\nu\mu} = \sum_{\mu} (\mathbf{P}\mathbf{S})_{\mu\mu} = \text{tr } \mathbf{P}\mathbf{S} \quad (3.204)$$

如此, 可将  $(\mathbf{P}\mathbf{S})_{\mu\mu}$  解释为  $\phi_{\mu}$  所附带的电子. 这种方式叫作 **Mulliken 布局分析**. 设基函数放置在原子中心, 那么某分子中的原子所附带的电子数就是以该原子为中心的全部基函数中电子数目之和. 所以该原子的静电荷就为

$$q_A = Z_A - \sum_{\mu \in A} (\mathbf{P}\mathbf{S})_{\mu\mu} \quad (3.205)$$

式中  $Z_A$  是原子核  $A$  的电荷. 求和指标提示我们求和只对  $A$  中心的基函数求和.

定义 (3.195) 绝非唯一. 由于  $\text{tr } \mathbf{A}\mathbf{B} = \text{tr } \mathbf{B}\mathbf{A}$ , 有

$$N = \sum_{\mu} (\mathbf{S}^{\alpha} \mathbf{P}\mathbf{S}^{1-\alpha})_{\mu\mu} \quad (3.206)$$

其中  $\alpha$  任意. 若  $\alpha = 1/2$  则有

$$N = \sum_{\mu} (\mathbf{S}^{1/2} \mathbf{P}\mathbf{S}^{1/2})_{\mu\mu} = \sum_{\mu} \mathbf{P}'_{\mu\mu} \quad (3.207)$$

并可以知道式中的  $\mathbf{P}'$  就是对称正交化基组下的密度矩阵:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} P'_{\mu\nu} \phi'_{\mu}(\mathbf{r}) \phi'_{\nu}^*(\mathbf{r}) \quad (3.208)$$

<sup>iv</sup> 说是布局分析, 不如译为布局分解较好, 不过大家习惯了第一种叫法, 此处就沿用了. 英文为 population analyses.

$$\phi_{\mu}(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} (\mathbf{S})_{\nu\mu}^{-1/2} \phi_{\nu}(\mathbf{r}) \quad (3.209)$$

$\mathbf{P}'$  的对角元一般用于 **Löwdin 布局分析**:

$$q_A = Z_A - \sum_{\mu \in A} (\mathbf{S}^{1/2} \mathbf{P} \mathbf{S}^{1/2})_{\mu\mu} \quad (3.210)$$

**练习 3.17** 导出式 (3.198) 的右边, 也即, 证明  $\alpha = 1/2$  等价于按  $\mathbf{P}'$  的对角元做布局分析.

布局分析没有唯一的方案, 但是比较同类型基组下的不同分子时它们都很有用. 使用基组时需要做好“平衡”, 我们举个例子来解释: 在  $\text{H}_2\text{O}$  中, 若将基函数的完全集全放在 O 原子上, 那么做布局分析时, 水中的氢原子所带电荷就是 +1, 所有电子都附在了氧原子上. 这个简单的例子清楚地说明, 对布局分析赋予任何物理意义时要相当谨慎.

### 3.5 模型算例: $\text{H}_2$ 与 $\text{HeH}^+$

前面讨论了多电子问题解中的大量形式上的数学手续, 之后对此的讨论仍会出现. 我们所呈现的这些概念和想法对于初学者来说可能有些难以接受. 此处为读者考虑, 避免冗长的形式理论, 给出一些具体应用以帮助读者. 我们深知, 即使是在开始显得非常奥涩的形式理论, 若能辅以运用——将其运用到某简单却不失真实的模型系统上, 也可被洞悉无遗. 本节就将闭壳层 Hartree-Fock 手续运用到模型体系  $\text{H}_2$  和  $\text{HeH}^+$ .

双电子分子  $\text{H}_2, \text{HeH}^+$  是可当作同核/异核双原子分子的原型. 我们将在**极小基**近似下考察这两者, 这个极小基  $\{\phi_{\mu}\}$  仅包含两个基函数 (每个核上放置一个基函数). 这两个模型的限制仅在于基组 (当然我们通常假设是非相对论、Born-Oppenheimer 电子 Hamiltonian.). 更大的基组所得结果会更精确. 两个体系都是简单的双电子系统, 所以已有相当精确的结果 (对应无限基组), 我们会将近似计算结果和精确结果作比较. 讲述这些计算之前, 先来介绍所用的基组.

#### 3.5.1 1s 极小基: STO-3G

3.6 节会讲述一般多原子分子的基组, 包括  $s, p, d$  型基函数. 此处我们会讲述 1s 型基函数 (即我们的简单算例  $\text{H}_2, \text{HeH}^+$  中所用的), 借此引入选择基组时的一些基本想法. 更优的计算中基组  $\{\phi_{\mu}\}$  会用多个 1s 函数及/或  $2p, 3d$  等等. 这里借 1s 函数所介绍的概念可直接推广到更一般的情形.

从严格的数学意义上说, 基函数  $\phi_{\mu}$  可以是很多种类的函数. 可行的选择非常多, 但是普遍应用的只有两类. 归一化 1s **Slater 型函数**, 若中心落在  $\mathbf{R}_A$ , 则其形式为

$$\phi_{1s}^{\text{SF}}(\zeta, \mathbf{r} - \mathbf{R}_A) = (\zeta^3/\pi)^{1/2} e^{-\zeta|\mathbf{r} - \mathbf{R}_A|} \quad (3.211)$$

其中  $\zeta$  是 **Slater 轨道指数 (Slater orbital exponent)**. 归一化 1s **高斯函数**, 若中心处于  $\mathbf{R}_A$ , 则有形式

$$\phi_{1s}^{\text{GF}}(\alpha, \mathbf{r} - \mathbf{R}_A) = (2\alpha/\pi)^{3/4} e^{-\alpha|\mathbf{r} - \mathbf{R}_A|^2} \quad (3.212)$$

式中  $\alpha$  是**高斯轨道指数**. 更高的  $2p, 3d$  等等 Slater 和高斯函数是 (3.202)(3.203) 的推广, 指数部分的  $\mathbf{r} - \mathbf{R}_A(x - X_A)$  等) 换成多项式, 而保持速降的指数 ( $e^{-\zeta r}$ ) 或 Gaussian 型 ( $e^{-ar^2}$ ) 不变. 轨道指数是大于零的正数, 它确定基函数的弥散程度或“尺寸”. 大轨道指数对应小的紧缩函数, 小轨道指数对应大的弥散函数. 连累函数  $e^{-\zeta r}, e^{-ar^2}$  的主要区别在于  $r = 0$  和  $r$  很大时的行为.  $r = 0$  处, Slater 函数有一个非零斜率, 高斯函数此处斜率为零:

$$[d/dr e^{-\zeta r}]_{r=0} \neq 0 \quad (3.213)$$

$$[d/dr e^{-ar^2}]_{r=0} = 0 \quad (3.214)$$

$$(3.215)$$

当  $r$  值较大时, 高斯函数  $e^{-ar^2}$  比 Slater 函数  $e^{-\zeta r}$  衰减得更快.

计算电子波函数时人们更乐意选用 Slater 函数. Slater 函数在描述分子轨道  $\psi_i$  的定性行为时要比高斯函数更准确, 展开轨道  $\psi_i$  若选用 Slater 型, 可用比高斯函数更少的函数数目得到差不多的结果. 举个例子, 可以证明分子轨道在远距离处的行为类似  $\psi_i \sim e^{-a_i r}$ , 这正是 Slater 形式而非高斯形式. 特别的, 氢原子的  $1s$  轨道是 Slater 函数  $(\pi)^{-1/2} e^{-r}$ .

那么为什么还需要高斯函数呢? 只有一个原因, 在 SCF 计算中, 所需的双电子积分  $(\mu\nu|\lambda\sigma)$  数目达到了  $K^4/8$  的量级. 这些积分都具有如下形式

$$(\mu_A \nu_B | \lambda_C \sigma_D) = \int d\mathbf{r}_2 \phi_\mu^{A*}(\mathbf{r}_1) \phi_\nu^B(\mathbf{r}_1) r_{12}^{-1} \phi_\lambda^{C*}(\mathbf{r}_2) \phi_\sigma^D(\mathbf{r}_2) \quad (3.216)$$

此处  $\phi_\mu^A$  是核  $A$  的基函数, 就是说其中心落在  $\mathbf{R}_A$ . 这种积分的一般形式包含四个中心  $\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{R}_C, \mathbf{R}_D$ . 在 Slater 基函数中计算这类四中心积分非常困难且耗时. 若用高斯型基函数, 则简单得多. 原因是两个中心不同的  $1s$  高斯函数相乘, 除过一个常数外, 相当于在另外一个中心上的  $1s$  高斯函数:

$$\phi_{1s}^{GF}(\alpha, \mathbf{r} - \mathbf{R}_A) \phi_{1s}^{GF}(\beta, \mathbf{r} - \mathbf{R}_B) = K_{AB} \phi_{1s}^{GF}(p, \mathbf{r} - \mathbf{R}_P) \quad (3.217)$$

式中常数  $K_{AB}$  是

$$K_{AB} = (2\alpha\beta/[(\alpha + \beta)\pi])^{3/4} \exp[-\alpha\beta/(\alpha + \beta)|\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B|^2] \quad (3.218)$$

而中心落在  $\mathbf{R}_P$  处的这个新高斯函数的指数为

$$p = \alpha + \beta \quad (3.219)$$

这个新中心落在旧中心  $A, B$  的连线上:

$$\mathbf{R}_P = (\alpha\mathbf{R}_A + \beta\mathbf{R}_B)/(\alpha + \beta) \quad (3.220)$$

### 练习 3.18 推导式 (3.207).

按 (3.207) 的结果, (3.206) 中的四中心积分 (对于  $1s$  高斯型) 马上可以化为双中心积分:

$$(\mu_A \nu_B | \lambda_C \sigma_D) = K_{AB} K_{CD} \int d\mathbf{r}_2 \phi_{1s}^{GF}(p, \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_P) r_{12}^{-1} \phi_{1s}^{GF}(q, \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_Q) \quad (3.221)$$



这种积分可按附录 A 中所介绍的快速积出。

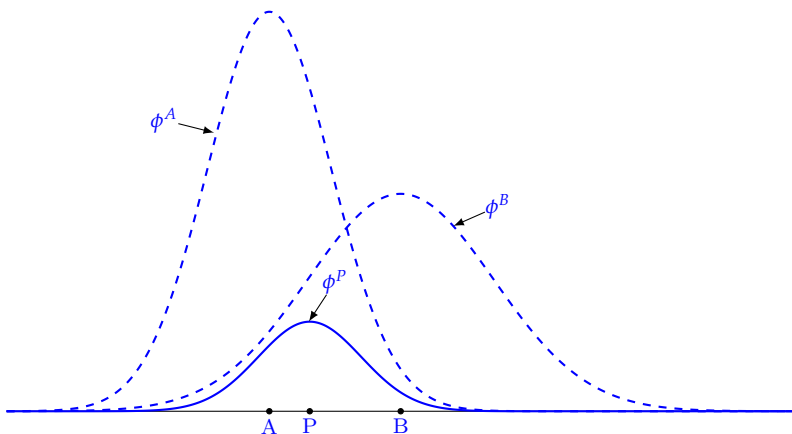


图 3.1: 两个 1s 高斯型的乘积是另外一个新 1s 高斯型。

这将我们置入两难境地。双电子积分用高斯函数可以快速地计算，但是高斯函数并非最优的基函数，它的函数行为与分子轨道表现出的不同。我们倾向于使用更好的基函数。有办法可避开这个问题：用原初高斯函数的固定线性组合作为基函数。这种线性组合称作**收缩**，由此产生**收缩高斯函数 (contracted Gaussian Functions, CGF)**

$$\phi_{\mu}^{\text{CGF}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_A) = \sum_{p=1}^L d_{p\mu} \phi_p^{\text{GF}}(\alpha_{p\mu}, \mathbf{r} - \mathbf{R}_A) \quad (3.222)$$

式中  $L$  称作收缩长度， $d_{p\mu}$  称作收缩系数。基函数  $\phi_{\mu}^{\text{CGF}}$  中第  $p$  个归一化原初高斯型  $\phi_p^{\text{GF}}$  对高斯轨道指数  $\alpha_{p\mu}$  (收缩指数) 有函数依赖。恰当选择收缩长度、收缩系数及收缩指数可令收缩高斯函数具有任意函数形式 (要与原初高斯函数相匹配)。若原初函数都是处于同一中心的 1s 高斯型，能那么  $\phi_{\mu}^{\text{CGF}}$  只能有 s-对称性。虽然我们不研究这种情况，但若原初高斯函数的中心可以不相同，那么展开式 (3.122) 原则上可以描述任意形式的基函数。收缩高斯函数背后的想法就是，预先选好收缩长度、收缩形式和收缩指数以令 (3.212) 右边构成一组比较合适的基函数  $\phi_{\mu}^{\text{CGF}}$ ，然后将这些固定的函数用于分子波函数计算。也就是，收缩系数等等在 SCF 计算过程中不发生变化。双电子积分  $(\mu\nu|\lambda\sigma)$  在收缩函数基组  $\{\phi_{\mu}^{\text{CGF}}\}$  下，按照 (3.212)，成为一组可快速计算的由原初高斯函数构成的双电子积分之和。

恰当选择收缩参数后，我们就能使用近似的原子 Hartree-Fock 函数 (如近似的 Slater 型函数等)，而仍可用原初高斯函数计算积分。一种常用的手续是，用  $L=1, 2, 3, \dots$  个原初高斯函数拟合按 Slater 型函数拟合。这就是 STO-LG 手续 (这种手续一般记作 STO-NG，但由于  $N$  在本书代表电子数目，我们就选了另外的符号)。特别的，多原子计算中常用 STO-3G 基组，而非用 Slater 函数来计算积分。我们会用 STO-3G 基组来计算模型体系  $\text{H}_2, \text{HeH}^+$ 。现在需要考虑收缩式 (3.212) 的具体形式以令其可以近似 Slater 型函数。

首先考虑拟合 Slater 指数  $\zeta = 1.0$  的这种 Slater 函数。之后会回头研究不同的指数。现仅考虑收缩长度不超过三的情况，那么有三种拟合

$$\phi_{1s}^{\text{CGF}}(\zeta, \text{STO} - 1\text{G}) = \phi_{1s}^{\text{GF}}(\alpha_{11}) \quad (3.223)$$

$$\phi_{1s}^{\text{CGF}}(\zeta=, \text{STO}-2\text{G}) = d_{12}\phi_{1s}^{\text{GF}}(\alpha_{12}) + d_{22}\phi_{1s}^{\text{GF}}(\alpha_{22}) \quad (3.224)$$

$$\phi_{1s}^{\text{CGF}}(\zeta=, \text{STO}-3\text{G}) = d_{13}\phi_{1s}^{\text{GF}}(\alpha_{13}) + d_{23}\phi_{1s}^{\text{GF}}(\alpha_{23}) + d_{33}\phi_{1s}^{\text{GF}}(\alpha_{33}) \quad (3.225)$$

式中  $\phi_{1s}^{\text{CGF}}(\zeta=, \text{STO}-\text{LG})$  是尽可能逼近 Slater 型函数 ( $\zeta=1$ ) 的基函数. 那么就要确定 (3.213) 到 (3.215) 中的系数  $d_{p\mu}$  和指数  $\alpha_{p\mu}$  以求得最佳拟合. 一种拟合标准是用最小平方的做法将收缩高斯函数按 Slater 函数拟合, 也即要令如下积分最小

$$I = \int d\mathbf{r} [\phi_{1s}^{\text{SF}}(\zeta=1.0, \mathbf{r}) - \phi_{1s}^{\text{CGF}}(\zeta=, \text{STO}-\text{LG}, \mathbf{r})]^2 \quad (3.226)$$

等价地, 由于式中两个函数皆已归一化, 就是要使两函数间重叠积分最大, 即要令下式最大

$$S = \int d\mathbf{r} \phi_{1s}^{\text{SF}}(\zeta=1.0, \mathbf{r}) \phi_{1s}^{\text{CGF}}(\zeta=, \text{STO}-\text{LG}, \mathbf{r}) \quad (3.227)$$

STO-1G 的情况中没有收缩系数, 因此只需找到一个原初高斯指数  $\alpha$  以令重叠

$$S = (\pi)^{-1/2} (2\alpha/\pi)^{3/4} \int d\mathbf{r} e^{-r} e^{-\alpha r^2} \quad (3.228)$$

最大

**表 3.1:** 1s Slater 函数 ( $\zeta=1.0$ ) 与 1s 高斯函数的重叠

$S = \int d\mathbf{r} \phi_{1s}^{\text{SF}}(\zeta=1.0) \phi_{1s}^{\text{CGF}}(\alpha)$	
$\alpha$	S
0.1	0.8641
0.2	0.9673
0.3	0.9722
0.4	0.9606
0.5	0.9355
$\alpha_{\text{optimum}} = 0.270950$	

重叠列于 3.1 中. 最佳的拟合是  $\alpha = 0.270950$ , 如 3.2a 所示. 对应的径向分布函数  $(4\pi r^2)|\phi_{1s}(r)|^2$  绘在??中以利比较. 主导到靠近原点时的行为差异, 且高斯函数在大  $r$  处衰减更快. (3.217) 中的重叠  $S$  在 STO-G、STO-3G 下可也最大化, 实际操作后可以发现

$$\phi_{1s}^{\text{CGF}}(\zeta=1.0, \text{STO}-1\text{G}) = \phi_{1s}^{\text{GF}}(0.270950) \quad (3.229)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1s}^{\text{CGF}}(\zeta=1.0, \text{STO}-2\text{G}) \\ = 0.678914\phi_{1s}^{\text{GF}}(0.151623) + 0.430129\phi_{1s}^{\text{GF}}(0.851819) \end{aligned} \quad (3.230)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1s}^{\text{CGF}}(\zeta=1.0, \text{STO}-3\text{G}) = 0.444635\phi_{1s}^{\text{GF}}(0.109818) + 0.535328\phi_{1s}^{\text{GF}}(0.405771) \\ + 0.154329\phi_{1s}^{\text{GF}}(2.22766) \end{aligned} \quad (3.231)$$

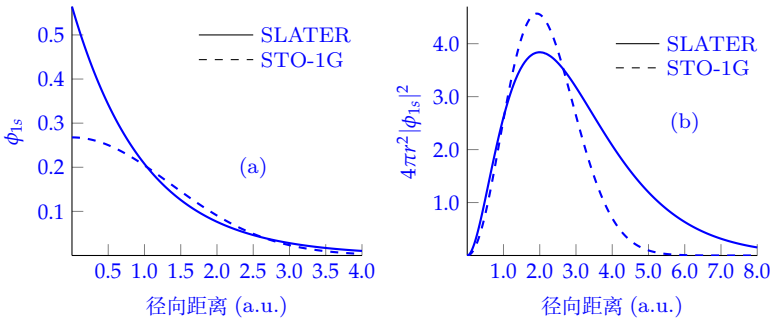


图 3.2: Slater 函数和高斯函数的比较: a) 1s Slater 函数 ( $\zeta = 1.0$ ) 用单个 STO-1G 的高斯函数按最小二乘拟合 ( $\alpha = 0.270950$ ); b) 对应径向分布函数 ( $4\pi r^2 |\phi_{1s}(r)|^2$ ) 的比较.

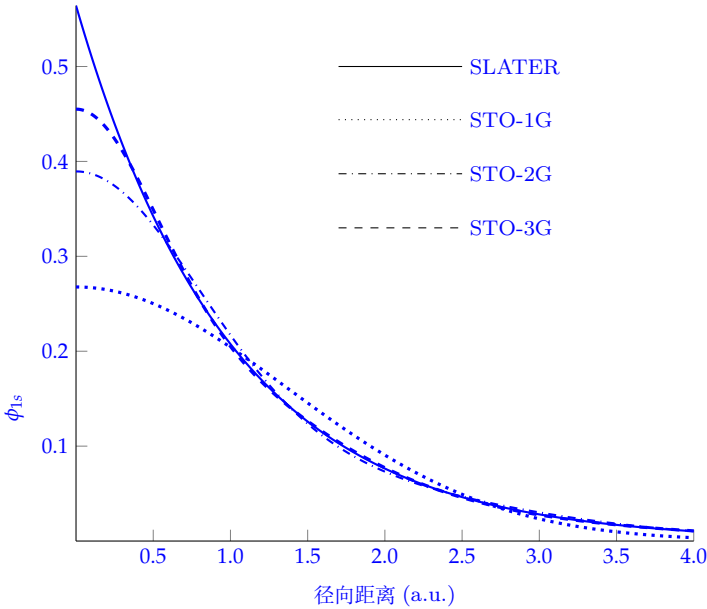


图 3.3: 1s Slater 函数 ( $\zeta = 1.0$ ) 按最小二乘拟合时 STO-1G、STO-2G、STO-3G 的质量比较.

3.3 展示了拟合到 1s Slater 函数 ( $\zeta = 1.0$ ) 时, 增加收缩式中的高斯型, 拟合质量会提升 (即由 STO-1G 到 STO-2G 到 STO-3G 质量的提升.)

**练习 3.19** 计算以上三个 STO-LG 收缩函数  $\phi(\mathbf{r})$  的在原点处的值, 并与 Slater 函数 ( $\zeta = 1.0$ ) 的  $(\pi)^{-1/2}$  比较.

式 (3.219) 到 (3.221) 中将 STO-LG 拟合到 Slater 函数时 Slater 指数为  $\zeta = 1.0$ . 那么其他轨道指数下该如何得到对 Slater 函数的拟合? 轨道指数是一个比例因子, 它在  $r$  方向上缩放函数, 即它压缩或使函数膨胀, 而不改变函数的形式. 由于比例因子按如下方式乘在  $r$  上:

$$e^{-[\zeta r]} \leftrightarrow e^{-[\sqrt{\alpha}r]^2} \quad (3.232)$$

正确的比例就是

$$\zeta'/\zeta = [\alpha'/\alpha]^{1/2} \quad (3.233)$$

拟合到轨道指数为  $\zeta$  的 Slater 函数时, 正确的收缩指数  $\alpha$  就成为

$$\alpha = \alpha(\zeta = 1.0) \times \zeta^2 \quad (3.234)$$

若 Slater 指数加倍, 那么收缩系数就乘以因子 4. 这种缩放手续是很一般化的, 一种特定类型的基函数  $\phi_\mu^{\text{CGF}}$  只需要确定一次收缩系数. 若需要  $\phi_\mu^{\text{CGF}}$  有其他比例因子, 只需将收缩指数乘以恰当的因数即可. 一般中心落在某特定原子上的 STO-3G 基组都会附带一组标准的 Slater 轨道指数  $\zeta$ . 比如, 氢原子的 1s 基函数标准指数是  $\zeta = 1.4$ . 这比氢原子本身的指数  $\zeta = 1.0$  要大, 原因是在平均的分子环境中, 氢 1s 轨道要比在独立原子中来得“更小”或更“紧”. 利用比例关系 (3.224), 氢的标准 STO-3G 基函数就成为

$$\begin{aligned} \phi_{1s}^{\text{CGF}}(\zeta = 1.24, \text{STO} - 3\text{G}) &= 0.444635\phi_{1s}^{\text{GF}}(0.168856) + 0.535328\phi_{1s}^{\text{GF}}(0.623913) \\ &+ 0.154329\phi_{1s}^{\text{GF}}(3.42525) \end{aligned} \quad (3.235)$$

这就是后面计算中用到的 H 的基函数

### 3.5.2 STO-3G 下的 $H_2$

2.2.5 解中曾介绍了极小基  $H_2$  模型, 它只有一个占据分子轨道一个虚分子轨道. 有了上一小节对 STO-3G 基组的描述, 现在就可以来介绍  $H_2$  的从头 Hartree-Fock 计算. 这个模型很简单, 但是由此出发可以直接扩展到更大的基组, 此处我们要介绍的 Hartree-Fock 理论基本上与基组实际大小无关. 但美玉微瑕, 这个模型过于简单, 无法体现 SCF 手续的特性. 下一小节当进行  $HeH^+$  的极小基计算时, 可以一窥这方面 (SCF 手续) 的 Hartree-Fock 理论.

本小节我们进行基态  $H_2$  的限制性闭壳层计算. 我们将会知道, 这种计算在大键长时有一个很基本的缺陷. 本章后面介绍非限制性开壳层计算时, 会再次使用极小基  $H_2$  模型以部分修正这种缺陷. 此处所得的一些结果在后面章节用极小基  $H_2$  介绍 Hartree-Fock 近似之外的手续时也会再次提到.

根据 3.4.6 节所列的 SCF 计算步骤, 首先要确定核标架的几何构型. 这里使用??中所绘的坐标系, 核间距  $R = |\mathbf{R}_{12}|$  定位实验值 1.4 原子单位 (Bohr). 基组是标准的 STO-3G 基, 包含两个函数  $\phi_1, \phi_2$ , 每个都由三个原初高斯型收缩而成, 并已用最小平方按 Slater 函数 ( $\zeta = 1.24$ ) 拟合, 式 (3.225) 已说过. 那么就是

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{r}) &= (\zeta^3/\pi)^{1/2} e^{-\zeta|\mathbf{r}-\mathbf{R}_1|} \\ \phi_2(\mathbf{r}) &= (\zeta^3/\pi)^{1/2} e^{-\zeta|\mathbf{r}-\mathbf{R}_2|} \\ \zeta &= 1.24 \end{aligned} \quad (3.236)$$

但要特别记住, 每个基函数都有 (3.225) 那种确定的形式, 虽然函数是在近似 Slater 函数, 但是一旦选好了基函数, 除了 Hartree-Fock 的近似外, 不存在其他近似. SCF 手续的下一步要计算基组  $\{\phi_\mu\}$  形成的积分, 即  $S_{\mu\nu}, H_{\mu\nu}^{\text{core}}$  和双电子积分  $(\mu\nu|\lambda\sigma)$ . 以上所有积分都可用附录 A 中所推的公式计算. 考虑重叠积分

$$S_{\mu\nu} = \int d\mathbf{r} \phi_\mu^{\text{CGF}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_A) \phi_\nu^{\text{CGF}}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_B) \quad (3.237)$$

将一般的收缩式 (3.212) 带入, 该积分就化为对原初高斯型重叠积分的求和. 就是

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= \int d\mathbf{r} \sum_{p=1}^L d_{p\mu}^* \phi_p^{\text{GF}*}(\alpha_{p\mu}, \mathbf{r} - \mathbf{R}_A) \sum_{q=1}^L d_{q\nu} \phi_q^{\text{GF}}(\alpha_{q\nu}, \mathbf{r} - \mathbf{R}_B) \\ &= \sum_{p=1}^L \sum_{q=1}^L d_{p\mu}^* d_{q\nu} \int d\mathbf{r} \phi_p^{\text{GF}*}(\alpha_{p\mu}, \mathbf{r} - \mathbf{R}_A) \phi_q^{\text{GF}}(\alpha_{q\nu}, \mathbf{r} - \mathbf{R}_B) \\ &= \sum_{p=1}^L \sum_{q=1}^L d_{p\mu}^* d_{q\nu} S_{pq} \end{aligned} \quad (3.238)$$

同样, 若其他类型的积分涉及原初高斯型, 用附录 A 中的办法计算后, 对积分求和就得到待求的特定收缩函数的积分 (特定收缩函数如如 (3.225)). 可以发现极小基中的  $\phi_1, \phi_2$  的重叠  $S_{12}$  在  $R = 1.4 \text{ a.u.}$  为 0.6593. 那么重叠矩阵就为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.6593 \\ 0.6593 & 1.0 \end{pmatrix} \quad (3.239)$$

大键长下  $S_{12}$  会衰减至零.  $\mathbf{R} = 0$  时  $S_{12}$  当然是 1.0.

**练习 3.20** 用 STO-1G 的定义式 (3.219) 和比例关系 (3.224) 证明, 当轨道指数  $\zeta = 1.24$  距离  $R = 1.4 \text{ a.u.}$  时, 与 (3.229) 的结果相对, STO-1G 下的重叠积分值为  $S_{12} = 0.6648$ . 利用附录 A 中重叠积分的公式. 注意归一化.

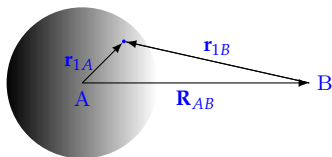
芯-Hamiltonian 的矩阵元  $H_{\mu\nu}^{\text{core}}$  是  $T_{\mu\nu}$  与  $V_{\mu\nu}^1, V_{\mu\nu}^2$  之和, 前描述动能,  $V_{\mu\nu}^1, V_{\mu\nu}^2$  分别描述第一个、第二个核的库伦吸引. 从附录 A 中知道这些积分的算出的结果为

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.7600 & 0.2365 \\ 0.2365 & 0.7600 \end{pmatrix} \mathbf{V}^1 = \begin{pmatrix} -1.2266 & -0.5974 \\ -0.5974 & -0.6538 \end{pmatrix} \mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} -0.6538 & -0.5974 \\ -0.5974 & -1.2266 \end{pmatrix} \quad (3.240)$$

若基函数是氢原子的解  $(\pi)^{1/2} e^{-r}$ , 则  $T_{11}$  的值是 0.5, 相当于氢原子中电子的动能,  $V_{11}^1 = V_{22}^2$  值为 -1.0, 相当于氢原子中电子的势能. 现在的结果是大指数  $\zeta = 1.24$  的结果, 它使现下的轨道比氢原子中的更“小”. 因此电子更靠近核, 势能就更负 (-1.2266), 而且电子“运动得更快以避免坍入原子核”, 如此动能就更大 0.7600. 这个基下氢原子的能量是  $T_{11} + V_{11}^1 = 0.7600 - 1.2266 = -0.4666 \text{ a.u.}$ . 相较之下精确值为 -0.5 a.u.. 若  $\phi_1$  中的电子用某种方式局域在了核 1 的位置上, 那么核 2 对它的吸引是  $-1/1.4 = -0.7143$ . 这种吸引的实际值如?? 所示, 是  $V_{11}^2 = -0.6538$  (在  $R = 1.4 \text{ a.u.}$  下). 当核间距  $R$  增大,  $V_{11}^2$  会渐近地收敛于  $-R^{-1}$ .  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{V}^{\text{nucl}}$  的非对角元没有对应的简单经典诠释, 它们反映了成键现象中基本的量子效应. 当核间距  $R$  很大时, 非对角元趋于零.

芯-Hamiltonian 矩阵是以上三个矩阵之和

$$\mathbf{H}^{\text{core}} = \mathbf{T} + \mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} -1.1204 & -0.9584 \\ -0.9584 & -1.1204 \end{pmatrix} \quad (3.241)$$



$$\langle V^B \rangle = \langle \mathbf{r}_{1B}^{-1} \rangle \longrightarrow \mathbf{R}_{AB}^{-1}$$

图 3.4: 邻近核对电子的吸引.

这就是单个电子在核势场中的 Hamiltonian 矩阵, 在  $\text{H}_2^+$  的情形下. 解矩阵本征值方程

$$\mathbf{H}^{\text{core}} \mathbf{C} = \mathbf{S} \mathbf{C} \epsilon \quad (3.242)$$

就能得到  $\text{H}_2^+$  的分子轨道核轨道能量. 对于其他分子例如  $\text{H}_2\text{O}$ , 如上方程会得到  $\text{H}_2\text{O}^{9+}$  的分子轨道核轨道能量, 我们不关心这样的情况.

在极小基模型中的  $2^4 = 16$  个双电子积分  $(\mu\nu|\lambda\sigma)$  中, 只有四个不一样的值

$$\begin{aligned} (\phi_1\phi_1|\phi_1\phi_1) &= (\phi_2\phi_2|\phi_2\phi_2) = 0.7746 \text{ a.u.} \\ (\phi_1\phi_1|\phi_2\phi_2) &= 0.5679 \text{ a.u.} \\ (\phi_2\phi_1|\phi_1\phi_1) &= (\phi_2\phi_2|\phi_2\phi_1) \text{ a.u.} \\ (\phi_2\phi_1|\phi_2\phi_1) &= 0.2970 \text{ a.u.} \end{aligned} \quad (3.243)$$

以上式经过指标的简单置换就得到其他积分, 如  $(\mu\nu|\lambda\sigma) = (\mu\nu|\sigma\lambda) = (\lambda\sigma|\mu\nu)$ . 单中心积分如  $(\phi_1\phi_1|\phi_1\phi_1), (\phi_2\phi_2|\phi_2\phi_2)$  就是同在  $1s$  轨道上的两电子间的平均排斥. 双电子积分  $(\phi_1\phi_1|\phi_2\phi_2)$  是中心 1 上的轨道核中心 2 上的轨道间的电子排斥. 其值为 .5679 a.u. (在  $R = 1.4 \text{ a.u.}$  下), 当核间距  $R$  增大时它会趋于  $1/R$ . 其他两个积分没有经典诠释. 在大键长下这两个积分趋于零因为  $S_{12}$  趋于零. 得到所有的基本积分后, 下一步既可以求解 Roothaan 方程: 按之前所述的手续, 就是初猜密度矩阵, 构建 Fock 矩阵, 将 Fock 矩阵变换到正交轨道基下, 对角化变换后的 Fock 矩阵等等. 不过此处的极小基  $\text{H}_2$  模型过于简单, 因此 Roothaan 方程的解可以简单地通过对称性确定. 正则分子轨道构成分子点群的一个表示. 也就是说, 对易同核双原子分子, 轨道可以标为  $\sigma_g, \sigma_u, \pi_g, \pi_u$  等等. 在极小基下只有两个分子轨道. 能量低的哪个就是占据分子轨道, 是具有  $\sigma_g$  对称的成键轨道

$$\psi_1 = [2(1 + S_{12})]^{-1/2} (\phi_1 + \phi_2) \quad (3.244)$$

需分子轨道就是对应的反键轨道, 对称性为  $\sigma_u$ :

$$\psi_1 = [2(1 - S_{12})]^{-1/2} (\phi_1 - \phi_2) \quad (3.245)$$

该问题的最终系数矩阵成为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [2(1 + S_{12})] & [2(1 - S_{12})] \\ [2(1 + S_{12})] & -[2(1 - S_{12})] \end{pmatrix} \quad (3.246)$$

最终密度矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} (1 + S_{12})^{-1} & (1 + S_{12}) \\ (1 + S_{12}) & (1 + S_{12}) \end{pmatrix} = (1 + S_{12}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.247)$$

若 SCF 手续中初猜的密度矩阵与上式不同, 那么就要进行迭代, 该手续会收敛到这个由对称性确定的解上.

**练习 3.21** 在  $\psi_1, \psi_2$  的基函数展开下归一化  $\psi_1, \psi_2$ , 由此导出系数  $[2(1 + S_{12})]^{-1/2}$  及  $[2(1 - S_{12})]^{-1/2}$ .

**练习 3.22** 极小基  $\text{H}_2^+$  的系数同样可由对称性决定, 办法与极小基  $\text{H}_2$  一样. 用以上所得系数求解式 (3.234), 得到极小基  $\text{H}_2^+$  在  $R = 1.4 \text{ a.u.}$  的轨道能量, 验证它们是

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= (H_{11}^{\text{core}} + H_{12}^{\text{core}})(1 + S_{12}) = -1.2528 \text{ a.u.} \\ \epsilon_2 &= (H_{11}^{\text{core}} - H_{12}^{\text{core}})(1 - S_{12}) = -0.4756 \text{ a.u.} \end{aligned}$$

**练习 3.23** 用密度矩阵的一般定义 (3.145) 导出 (3.239). 并指出  $\text{H}_2^+$  对应的密度矩阵是什么?

**练习 3.24** 用 Fock 矩阵的一般定义 (3.154) 证明它在极小基  $\text{H}_2$  下矩阵元的收敛值为

$$\begin{aligned} F_{11} = F_{22} &= H_{11}^{\text{core}} + (1 + S_{12})^{-1} \left[ \frac{1}{2} (\phi_1 \phi_1 | \phi_1 \phi_1) + (\phi_1 \phi_1 | \phi_2 \phi_2) \right. \\ &\quad \left. + (\phi_1 \phi_1 | \phi_1 \phi_2) - \frac{1}{2} (\phi_1 \phi_2 | \phi_1 \phi_2) \right] = -0.3655 \text{ a.u.} \\ F_{12} = F_{21} &= H_{12}^{\text{core}} + (1 + S_{12})^{-1} \left[ -\frac{1}{2} (\phi_1 \phi_1 | \phi_1 \phi_1) + (\phi_1 \phi_1 | \phi_1 \phi_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (\phi_1 \phi_2 | \phi_1 \phi_2) \right] = -0.5939 \text{ a.u.} \end{aligned}$$

**练习 3.25** 用练习 (3.23) 的结果证明极小基  $\text{H}_2$  的轨道能量, 也就是 Roothaan 方程  $\mathbf{FC} = \mathbf{SC}\epsilon$  的解, 是

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= (F_{11} + F_{12}) / (1 + S_{12}) = -0.5782 \text{ a.u.} \\ \epsilon_2 &= (F_{11} - F_{12}) / (1 + S_{12}) = +0.6703 \text{ a.u.} \end{aligned}$$

**练习 3.26** 用总电子能量的一般式 (3.184) 证明极小基  $\text{H}_2$  的电子能量为

$$E_0 = (F_{11} + H_{11}^{\text{core}} + F_{12} + H_{12}^{\text{core}}) / (1 + S_{12}) = -1.8310 \text{ a.u.}$$

包含核排斥的总能为

$$E_{\text{tot}} = -1.1167 \text{ a.u.}$$

上面三个练习中极小基  $\text{H}_2$  的结果全部是由基组  $\{\phi_\mu\}$  的积分和矩阵表示的, 而不是用 (Hartree-Fock) 方程的解  $\{\psi_i\}$  来表示, 这就是实际计算中所用的方式, 分子轨道  $\{\psi_i\}$  直到计算完成后才能得到. 为了讨论 SCF 的结果, 而且后面处理相关效应时也会用到这里的 SCF 结果, 我们将上面以  $|\phi_\mu\rangle$  表示的基本积分换用  $\{\psi_i\}$  表示. 我们知道两组函数间的关系:

$$\psi = \sum_{\mu=1}^K C_{\mu i} \phi_\mu \quad (3.248)$$

那么变换按下式进行

$$h_{ij} = (\psi_i | h | \psi_j) = \sum_{\mu} C_{\mu i}^* C_{\mu j} H_{\mu\nu}^{\text{core}} \quad (3.249)$$

$$(\psi_i \psi_j | \psi_k \psi_l) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\lambda} \sum_{\sigma} C_{\mu i}^* C_{\nu j} C_{\lambda k}^* C_{\sigma l} (\mu\nu | \lambda\sigma) \quad (3.250)$$

(3.241) 中的双指标变换相对容易, 所要做的无非是  $K \times K$  矩阵的乘法. 但是双电子积分的四指标变换非常耗时. 做这种变换时, 即使是优化的算法也要用  $O(K^5)$  次乘法. 其难度比整个 SCF 手续中的任意一步都多至少  $K$  阶. 若不需要变换双电子积分, 那么就无需以上计算. 另一方面, 多数超过 Hartree-Fock 的办法及本书所考虑的所有方法, 都需要分子轨道的积分. 在极小基  $\text{H}_2$  模型中, 这种变换当然不难. 芯-Hamiltonian 经变换后的非零矩阵元和双电子积分矩阵如下

$$\begin{aligned} h_{11} &= (\psi_1 | h | \psi_1) = -1.2528 \text{ a.u.} & h_{22} &= (\psi_2 | h | \psi_2) = -0.4756 \text{ a.u.} \\ J_{11} &= (\psi_1 \psi_1 | \psi_1 \psi_1) = 0.6746 \text{ a.u.} & J_{22} &= (\psi_2 \psi_2 | \psi_2 \psi_2) = 0.6975 \text{ a.u.} \\ J_{12} &= (\psi_1 \psi_1 | \psi_2 \psi_2) = 0.6636 \text{ a.u.} & K_{12} &= (\psi_1 \psi_2 | \psi_2 \psi_1) = 0.1813 \text{ a.u.} \end{aligned}$$

如前面所述,  $h_{11}$  是  $\psi_1$  上一个电子的动能加上核吸引势能,  $h_{22}$  是  $\psi_2$  上电子的,  $J_{11}$  是  $\psi_1$  是哪个两个电子间的库伦排斥,  $J_{22}$  是  $\psi_2$  上的两电子间的库伦排斥,  $J_{12}$  是  $\psi_1, \psi_2$  上电子间的,  $-K_{12}$  是  $\psi_1$  上一个电子与  $\psi_2$  上同自旋电子间的交换作用.

变换后的 Fock 矩阵,  $f_{ij} = (\psi_i | f | \psi_j)$  根据定义是对角阵, 对角元等于轨道能量. 闭壳层轨道能量在练习 3.9 中一句推导过, 为

$$\varepsilon_i = h_{ii} + \sum_b 2J_{ib} - K_{ib} \quad (3.251)$$

在此处的极小基模型中, 它们是

$$\varepsilon_1 = h_{11} + J_{11} = -0.5782 \text{ a.u.} \quad (3.252)$$

$$\varepsilon_1 = h_{22} + 2J_{12} - K_{12} = +0.6703 \text{ a.u.} \quad (3.253)$$

注意到  $\varepsilon_2 \neq h_{22} + J_{22}$ , 因为它是一个虚轨道, 描述的是  $(N+1)$ -电子体系中电子的能量, 这已经在 Koopmans 定理那里提过了. 附录 D 中列出了不同键长下轨道能量以及双电子积分  $J_{11}$  等等的值. 利用这些数值可以 (本章及之后) 研究一批多电子量作为键长的函数的行为.

基态的总电子能量为

$$E_0 = 2h_{11} + J_{11} = -1.8310 \text{ a.u.} \quad (3.254)$$



包含核排斥的总能为

$$E_{\text{tot}} = E_0 + 1/R = -1.1167 \text{ a.u.} \quad (3.255)$$

由于在这个基下氢原子的能量为  $-0.4666 \text{ a.u.}$ ，那么预测的  $\text{H}_2$  解离能就是  $2(-0.4666) + 1.1167 = 0.1835 \text{ a.u.} \equiv 4.99 \text{ eV}$ 。作为比较，解离能实验值为  $4.75 \text{ eV}$ ，符合得很好，虽然计算所得的  $\text{H}_2$  能量比精确值高得多，但是计算所得氢原子的能量也不精确，如此有一个抵消。

上面得到的解离能与实验符合得很好，但要完整地回答解离问题，还需要研究整个势能面。在不同核间距下重复以上计算就得到 3.5 中所绘的势能面，图中也绘出了由 Kolos 和 Wolniewicz<sup>3</sup> 得到的十分精确的结果。极小基限制性 Hartree-Fock 计算没有给出  $R$  趋于无穷时的极限。初想这个结果好像比较奇怪，这种完全错误的行为不是  $\text{H}_2$  特有的。

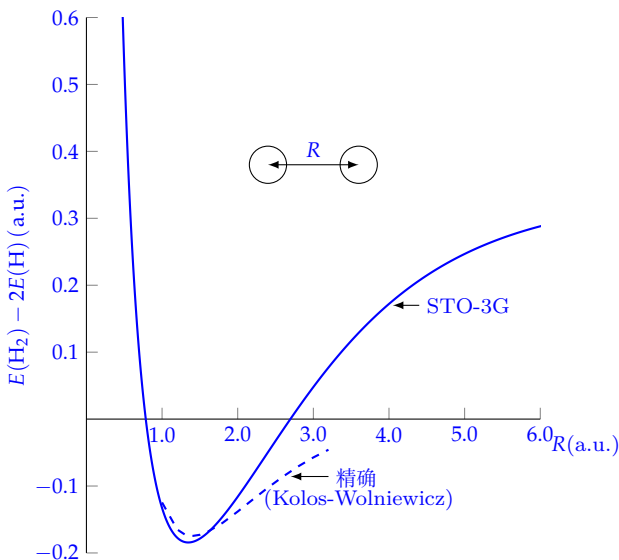


图 3.5:  $\text{H}_2$  的 STO-3G 限制性 Hartree-Fock 势能曲线与 Kolos 和 Wolniewicz 的精确结果对比。

若将键拉长，导致正确的解离产物必须用开壳层波函数来描述的话，这里的限制性闭壳层计算给出的极限肯定是错误的。对于  $\text{H}_2$ ，解离产物是两个定域的氢原子，也即，一个电子局域在一个质子附近，另外一个电子局域在另一个像个很远的质子附近。但是在限制性计算中，两个电子被强制放在一个空间分子轨道  $\psi_1$  上。这个分子轨道由对称性决定，形式为 (3.236)。因此，无论键长如何，两个电子都确实被同一个空间波函数描述，在三维空间中的概率分布也相同。这种描述对两个隔开的氢原子是不合适的。限制性闭壳层 Hartree-Fock 计算强制电子成对占据分子轨道，因此无法正确描述解离，除非解离产物都是闭壳层的。

我们可用练习 3.25 和练习 3.27 中的结果分析地研究解离行为。当  $R \rightarrow \infty$  时，?? 中的双中心核吸引趋于零， $H_{11}^{\text{core}} \rightarrow T_{11} + V_{11}^1$ ，这就是当前基下氢原子的能量 ( $-0.4666$ )。除单中心电子电子排斥积分 ( $\phi_1\phi_1|\phi_1\phi_1$ ) 外，其他积分在  $R \rightarrow \infty$  时都趋于零。因此就有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E_{\text{tot}}(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} 2H_{11}^{\text{core}} + \frac{1}{2}(\phi_1\phi_1|\phi_1\phi_1)$$

$$\begin{aligned}
&= 2E(H) + \frac{1}{2}(\phi_1\phi_1|\phi_1\phi_1) \\
&= -0.9332 + 0.3873 \\
&= -0.5459 \text{ a.u.}
\end{aligned}$$

这个极限值不等于当前基下氢原子能量的两倍 ( $2E(H)$ ), 还多出一伪???项  $\frac{1}{2}(\phi_1\phi_1|\phi_1\phi_1)$ . 这个杂项出现的原因是两个电子占据了同一空间轨道, 在无穷远距离下它们仍有排斥. 或者说, 此时解离产物不仅是  $2H$ , 还错误地包含了  $H^+, H^-$ .  $H^-$  的能量中含有电子-电子排斥积分  $(\phi_1\phi_1|\phi_1\phi_1)$  的贡献. 另一种看这个问题的方式是, 分子轨道波函数等价于离子项和共价项等权重的价键波函数. 由于这里的波函数由对称性确定, 那么离子项即使在解离时也仍存在. 之后讨论非限制性 Hartree-Fock 计算时会继续探讨解离问题.

当解离为开壳层产物时, 限制性闭壳层 Hartree-Fock 计算表象很差, 但这无损于其在平衡点附近的用处. 计算所得的平衡构型就是  $E_{\text{tot}}$  关于的核坐标最小时的构型. ??列出了实验核间距 1.4 a.u. 领域内的总能量值. 计算得到最小能量是在 1.346 a.u. 处. 误差为 4%, 我们可以预估, 计算其他分子时所得的平衡构型误差也在类似的量级上.

讨论焦点离开极小基  $H_2$  前 (至少是暂时离开), 我们要用这个模型来解释指数优化 (exponent optimization). 之前所用的标准指数为  $\zeta = 1.24$ . 轨道指数是波函数中的非线性参数. 用变分原理可知, 这个形式下的最优函数就是关于波函数中所有参数能最小的那个. 但轨道指数是非线性参数, 没有很容易的计算方式来确定其最优值. 一般不会费时对不同的轨道指数进行大量计算来找到最优值, 而是预先选取合理的“标准”值, 就如氢的 1s 轨道下 STO-3G 的值设为 1.24. 若要求更好的精确度, 可以增加基组的尺寸. 然而有时也需要或想要对指数进行犹若, 如果没有其他合适理由来确定“合理”值到底是多少. ??列出了不同 1s Slater 轨道指数  $\zeta$  下的极小基  $H_2(R = 1.4)$  总能量.  $R = 1.4 \text{ a.u.}$  时最优指数为 1.14. 最优值会随键长改变, 而且对其他分子中的氢原子其值也会不同. 但是我们可以发现, 一大批分子中这个最优值都大于 1.0 (单个氢原子的精确值), 标准的 STO-3G 基组中我们选取 1.24 作为一批小分子中最优值的代表.  $H_2$  中最优值为 1.19 证明请分子某种程度上比两个氢原子之和更“小”. 这在化学成键中很普遍——成键电子会吸引两个核 (独立原子情况下是吸引一个核), 致使电子云收缩.

### 3.5.3 STO-3G 下的 $HeH^+$ : SCF 计算

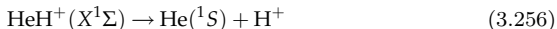
## 3.6 多原子基组

双电子分子  $H_2$  和  $HeH^+$  分别是同核/异核双原子分子的原型. 我们刚才已经完成了极小基 STO-3G  $H_2$  的计算, 现在对极小基  $HeH^+$  也做同样的计算. 这些描述双电子体系的极小基模型唯一的限制就是基组. 用大基组就可以得到更精确的结果, 但此处小基组就足以说明我们的问题了. 扩展到大基组的非常直接的.

虽然极小基很小, 但能够得到在这些基函数所张的单电子空间内的精确结果. 特别的, 使用极小基可以研究任意多中方法并将其结果与“真实”结果作比较. 后面各章我们会用与此处相同的极小基 STO  $H_2, HeH^+$  模型来说明组态相互计算、微扰论计算等等方法. 那里所得的结果会与相同基组下的精确结果研究本章的 Hartree-Fock 计算做比较.

极小基  $H_2$  的一个缺点是它只有两个基函数, 分子轨道由对称性缺点, 没办法展示出 SCF 手续的迭代特性. 因为  $HeH^+$  是异核分子, 它的对称性少于  $H_2$  的, 而且这个极小基模型的分子轨道无法由对称性决定. 由此, 对  $HeH^+$  做限制性 Hartree-Fock 计算就能完全展示求解 Roothaan 方程所涉及的原理.

带一个电荷的氦分子离子在质谱研究中已经被熟知很多年了。在天体物理问题中,人们也注意到该离子,因为它是质子散射 He 中 HT 经  $\beta$  衰变的产物,此外还有与其简单性相关的各种原因。但是在实验上好像并没有很多对该离子不同电子态结构的研究。Wolniewicz 做过非常精确的计算,计算表面它的基态的平衡键长为 1.4632 a.u., 电子键能为 0.0749 a.u. (2.309 eV)。在基态下解离会生成氦原子和质子:



而不是  $\text{He}^+ + \text{H}$ 。因为 He 的电离能 (24.6 eV) 比质子的电子亲和能 (13.6 eV) 大。或者说,  $\text{He}^+$  的电子亲和能比  $\text{H}^+$  的电子亲和能大。所涉不同物种的精确能量列在??中。由于解离产物是闭壳层的,我们可以预期,限制性 Hartree-Fock 计算在大键长下的行为应当正确,不会发生  $\text{H}_2$  中那种情况。

要进行 SCF 计算,首先要选定核构型。我们记氦核为核 1, 其位置矢量为  $\mathbf{R}_1$ , 氢核为核 2, 其位置矢量为  $\mathbf{R}_2$ , 那么  $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| = R_{12}$  就是核间距。我们使用精确核间距  $R = 1.4632 \text{ a.u.}$ 。然后要确定基组, 此处使用极小基 STO-3G。每个核上有一个 1s 轨道:

$$\phi_1 \simeq (\zeta_1^3/\pi)^{1/2} e^{-\zeta_1|\mathbf{r}-\mathbf{R}_1|} \quad (3.257)$$

$$\phi_2 \simeq (\zeta_2^3/\pi)^{1/2} e^{-\zeta_2|\mathbf{r}-\mathbf{R}_1|} \quad (3.258)$$

基函数由三个原初高斯型收缩二乘, 收缩系数 (3.221), 收缩指数是 (3.221) 中的按比例乘以  $\zeta_1$  或  $\zeta_2$  的平方。现在只要确定 He 的 Slater 指数  $\zeta_1$  和 H 的 Slater 指数  $\zeta_2$ 。分子环境中的 H 有标准 STO-3G 指数  $\zeta_2 = 1.24$ , 这就是在极小基  $\text{H}_2$  中使用的值。而 He 没有这样的标准 STO-3G 指数。分子计算中选择指数时场会用同一基组计算单个原子的能量, 指数选为对应能量最小的那个。这种指数有时叫作“最优原子”指数。对氢来说最优原子指数为 1.0。拓对 He 做限制性 Hartree-Fock 计算, 使用只含一个 Slater 轨道  $(\zeta^3/\pi)^{1/2} e^{-\zeta r}$  的基组, 可以得到最优原子指数为  $27/16 = 1.6875$ 。这个值 (27/16) 的推导是变分原理的经典教科书例子。由于  $\text{HeH}^+$  有一个净的正电荷, 我们预想电子云相比在独立原子 He, H 中会有明显收缩。为了说明问题我们会对 H 用标准的 STO-3G 值  $\zeta_2 = 1.24$ , 对 He 用  $\zeta_1 = 1.6875 \times 1.24 = 2.095$ , 这个值和氢的值一样, 都比最优原子值大 1.24 倍。如前所述, 3.6 或 (3.249)(3.250) 中每个 STO-3G 函数都是三个原初高斯型之和。

计算的下一步, 或者说多数从**头算**的下一步就是计算所需的基函数积分。附录 A 中说明了 1s 高斯函数的积分如何计算并给出值涉及 1s 高斯函数的直接积分公式。附录 B 给出了一个 FORTRAN 程序以及  $\text{HeH}^+$  情形的输出, 这个程序展示了求解 Roothaan 方程的完整步骤, 它可在极小基下用高斯函数对所有双电子的双原子分子进行计算。

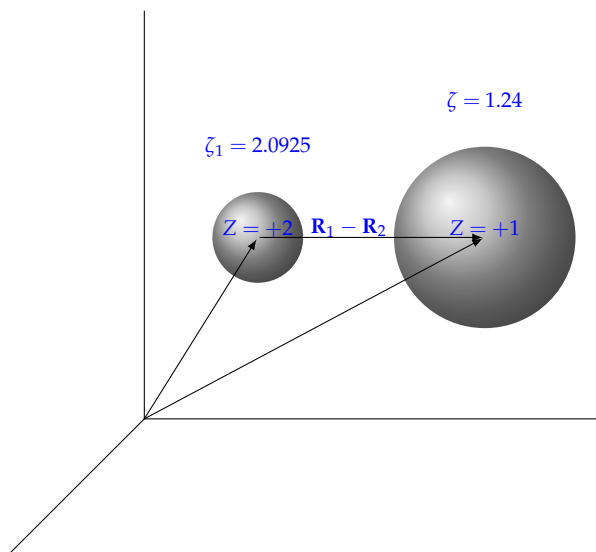


图 3.6: 极小基 STO-3G HeH<sup>+</sup> 计算时所用的坐标系和基函数.

此处仅给出结果, 必要时读者可以参考附录 B 中的程序输出. 由附录 A 可知两个基函数的重叠随核间距指数减少. 核间距为  $R = 1.4632 \text{ a.u.}$  时, 重叠的值为  $S_{12} = S_{21} = 0.4508$ . 这个重叠要小于  $\text{H}_2$  中的, 因为 He 的轨道比 H 的相应轨道更小、更定域. 由此, 重叠矩阵为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.4508 \\ 0.4508 & 1.0 \end{pmatrix} \quad (3.259)$$

动能矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2.1643 & 0.1670 \\ 0.1670 & 0.7600 \end{pmatrix} \quad (3.260)$$

$T_{22}$  的值与  $\text{H}_2$  中的值一样, 因为所用指数相同.  $T_{11}$  的值代表的是 He1s 轨道中一个电子的动能, 比 H 的要大, 这反映了 He 轨道的大指数, 大指数反之又说明 He 的核电荷比 H 大. 电子距核的平均距离越小动能就越大.

核 1(氦核) 的吸引势能矩阵为

$$\mathbf{V}^1 = \begin{pmatrix} -4.1398 & -1.1029 \\ -1.1029 & -1.2652 \end{pmatrix} \quad (3.261)$$

$\phi_1$  所在核对  $\phi_1$  上电子的单中心吸引 (-4.1398) 很自然比另外一个距离较远的轨道  $\phi_2$  上电子所受的 (-1.2652) 更强. 后者这个双中心积分在大核间距下趋近  $-2/R$ . 非对角元, 即氦核对由乘积分布  $\phi_1(1)\phi_2(1)$  所描述的电子的吸引完全是导致成键的量子力学项.

核 2(氢核) 的核吸引矩阵与上面类似, 但数量上更小, 因为质子的核电荷比氦核少:

$$\mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} -0.6772 & -0.4113 \\ -0.4116 & 1.2266 \end{pmatrix} \quad (3.262)$$

$V_{22}^2$  与  $H_2$  中的相同. 函数  $\phi_1$  的指数更大, 因此相对更定域在 He 附近,  $V_{11}^2$  很接近它的渐近值  $-1/R = -0.6834$ .

得到动能及核吸引积分后就能构建芯-Hamiltonian 矩阵:

$$\mathbf{H}^{\text{core}} = \mathbf{T} + \mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} -2.6527 & -1.3472 \\ -1.3472 & -1.7318 \end{pmatrix} \quad (3.263)$$

正如我们之前所说, 这就是单个电子在核势场中的正确 Hamiltonian 矩阵. 芯-Hamiltonian 的类-Roothaan 方程为

$$\mathbf{H}^{\text{core}} \mathbf{C} = \mathbf{S} \mathbf{C} \epsilon \quad (3.264)$$

由该式可得到单个电子在  $\text{HeH}^{++}$  势场中的分子轨道及轨道能量 (在当前例子下就是总电子能量). 而电子-电子排斥效应对分子轨道和能量的影响 (在单行列式框架下) 就体现在矩阵  $\mathbf{G}$  上,  $\mathbf{G}$  加  $\mathbf{H}^{\text{core}}$  就得到  $\mathbf{F}$ .

最后剩余的积分就是双电子排斥积分. 在  $2^4 = 16$  个可能的积分 ( $\mu\nu|\lambda\sigma$ ) 中只有六个相异值:

$$\begin{aligned} (\phi_1\phi_1|\phi_1\phi_1) &= 1.3072 \text{ a.u.} & (\phi_2\phi_2|\phi_1\phi_1) &= 0.6057 \text{ a.u.} \\ (\phi_2\phi_1|\phi_1\phi_1) &= 0.4373 \text{ a.u.} & (\phi_2\phi_2|\phi_2\phi_1) &= 0.3118 \text{ a.u.} \\ (\phi_2\phi_1|\phi_2\phi_1) &= 0.1773 \text{ a.u.} & (\phi_2\phi_2|\phi_2\phi_2) &= 0.7746 \text{ a.u.} \end{aligned}$$

单中心积分  $(\phi_1\phi_1|\phi_1\phi_1)$  和  $(\phi_2\phi_2|\phi_2\phi_2)$  就是  $\phi_1$  (或  $\phi_2$ ) 内一个电子与同轨道内另外一个电子之间的排斥. 较小的函数  $\phi_1$  内两个电子的平均距离比较大且更弥散的函数  $\phi_2$  中的平均距离更大, 因此  $(\phi_1\phi_1|\phi_1\phi_1)$  大于  $(\phi_2\phi_2|\phi_2\phi_2)$ . 双中心积分  $(\phi_2\phi_2|\phi_1\phi_1)$  是  $\phi_1$  内电子与  $\phi_2$  内电子间的排斥. 当核间距增大时它的渐近值为  $1/R$ . 其他三个积分没有简单的经典诠释.

到此我们就有了  $\text{HeH}^+$  SCF 计算所需的全部积分. 但在开始迭代前, 需导出使基函数正交化所需的变换矩阵:

$$\phi'_\mu = \sum_\nu X_{\mu\nu} \phi_\nu \quad (3.265)$$

可导出正交化函数集合  $\phi'_\mu$  的矩阵  $\mathbf{X}$  有很多. 第一章讨论的 Schmidt 方案中, 使用了如下矩阵

$$\mathbf{X}_{\text{Schmidt}} = \begin{pmatrix} 1 & -S_{12}/(1-S_{12}^2)^{1/2} \\ 0 & 1/(1-S_{12}^2)^{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.5050 \\ 0.0 & 1.1203 \end{pmatrix} \quad (3.266)$$

### 练习 3.27 证明以上变换确实可将基函数正交化.

其他两种方案之前也已提过, 这两种方案需要对角化重叠矩阵. 对角化  $2 \times 2$  矩阵可用 1.1.6 节中的方法. 对于此处的重叠矩阵, 本征值就是  $s_1 = 1 + S_{12}$ ,  $s_2 = 1 - S_{12} = 0.5492$ . 进行对角化的酉矩阵为

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} [2]^{-1/2} & [2]^{-1/2} \\ [2]^{-1/2} & -[2]^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (3.267)$$

要导出对称化/正则正交变换矩阵就需要如下矩阵

$$\mathbf{s}^{-1/2} = \begin{pmatrix} s_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & s_2^{-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8302 & 0.0 \\ 0.0 & 1.3493 \end{pmatrix} \quad (3.268)$$

对称正交化中我们使用如下变换矩阵

$$\mathbf{X}_{\text{symmetric}} = \mathbf{S}^{-1/2} = \mathbf{U} \mathbf{s}^{-1/2} \mathbf{U}^\dagger = \begin{pmatrix} 1.0898 & -0.2596 \\ -0.2596 & 1.0898 \end{pmatrix} \quad (3.269)$$

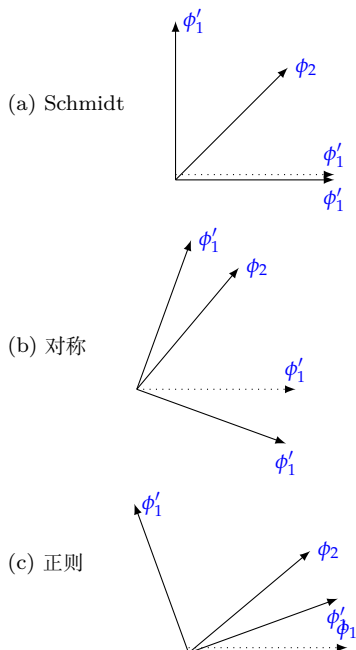


图 3.7: 三种正交化方案: a) Schmidt; b) 对称; c) 正则

而正则正交化的变换矩阵为

$$\mathbf{X}_{\text{canonical}} = \mathbf{U} \mathbf{s}^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0.5871 & 0.9541 \\ 0.5871 & -0.9541 \end{pmatrix} \quad (3.270)$$

这三种正交化方案之间的贡献绘在 3.7 中. 原基函数之间的角度按  $\cos \theta = S_{12}$  定义. Schmidt 正交化保持第一个基函数不动, 令第二个与其正交. 对称正交化所产生的两个新函数与原函数最为靠近. 它的做法是将矢量之间的角度打开到  $90^\circ$ . 正则正交化会产生一个平分原函数角度的新矢量, 然后使第二个矢量与其正交. 我们使用正则正交化, 那么变换后的基函数为

$$\phi'_1 = 0.5871\phi_1 + 0.5871\phi_2 \quad (3.271)$$

$$\phi'_2 = 0.9541\phi_1 - 0.9541\phi_2 \quad (3.272)$$

到此 SCF 迭代手续的准备工作已经完毕. 我们现初猜一个密度矩阵. 使用零矩阵比较方便. 这等于忽视所有电子-电子相互作用 ( $\mathbf{G}$  为零矩阵), 并使芯-Hamiltonian 作为 Fock 矩阵的初猜:

$$\mathbf{F} \simeq \mathbf{H}^{\text{core}} = \begin{pmatrix} -2.6527 & -1.3472 \\ -1.3472 & -1.7318 \end{pmatrix} \quad (3.273)$$

这种初猜最易想到, 但是在复杂情况下表现会很差. 下一步是将 Fock 矩阵变换到正则正交归一基组下:

$$\mathbf{F}^\dagger = \mathbf{X}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2.4397 & -0.5158 \\ -0.5158 & -1.5387 \end{pmatrix} \quad (3.274)$$

将此矩阵对角化, 即求解

$$\mathbf{F}' \mathbf{C}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.275)$$

得到系数酉矩阵

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0.9104 & 0.4136 \\ 0.4136 & -0.9104 \end{pmatrix} \quad (3.276)$$

以及两个本征值

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -2.6741 & 0.0 \\ 0.0 & -1.3043 \end{pmatrix} \quad (3.277)$$

原基函数下的系数矩阵为

$$\mathbf{C} = \mathbf{X} \mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0.9291 & -0.6256 \\ 0.1398 & 1.1115 \end{pmatrix} \quad (3.278)$$

式 (3.270)(3.269) 给出了  $\text{HeH}^{++}$  的轨道和轨道能量, 我们将其作为  $\text{HeH}^+$  的轨道和轨道能的初猜. 注意最低分子轨道  $\psi_1$  主要由  $\phi_1$  组成 (系数为 0.9291), 而仅混入了一点点  $\phi_2$  (系数 0.1398). 忽视电子-电子排斥后, 电子倾向于聚集在 He 附近因为它由更高的核电荷. 而加入电子-电子排斥的效应后, 随着一步步迭代, 这种现象会被逐渐缓和掉, 电子被“抹开”, 以减小电子-电子排斥.

由 (3.270) 可以构建密度矩阵的第一个实际猜测

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1.7266 & 0.2599 \\ 0.2599 & 0.0391 \end{pmatrix} \quad (3.279)$$

$\mathbf{P}$  的对角元说明大部分电子密度聚集在 He 附近而非 H 附近. 对此更恰当的理解可通过布局分析得到. (3.271) 中的密度矩阵阵非  $\text{HeH}^{++}$  的 (差一个因子 2), 而是核势场中两个无相互作用电子的密度矩阵.

由  $\mathbf{P}$  可构建对  $\mathbf{G}$  的猜测:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1.2626 & 0.3740 \\ 0.3740 & 0.9890 \end{pmatrix} \quad (3.280)$$

以及新的 Fock 矩阵

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^{\text{core}} + \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1.3904 & -0.9732 \\ -0.9732 & -0.7429 \end{pmatrix} \quad (3.281)$$

由于电子-电子相互作用是正值, 即 (3.272)  $\mathbf{G}$  中的元素为正数, 所以这个新 Fock 矩阵中的元素比原来的芯-Hamiltonian 猜测 (3.265) 中的要正得多. 有了新 Fock 矩阵就可以求解对应本征值问题, 然后就能得到对  $\mathbf{C}, \mathbf{P}$  的新猜测并重复以上整个过程直到自洽. 附录 B 中有一个实现该过程的程序, 还有当前例子——STO-3G HeH<sup>+</sup> 的程序输出. 岳父输出文件时应配以接下来的描述.

??中列出了不同迭代次数下密度矩阵的元素及对应电子能量. 随着迭代进行, 电荷在 H 附近积累, 在 He 附近减少. 要得到每次迭代后能量的变分值, 需使用如下公式

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} P_{\nu\mu} (H_{\mu\nu}^{\text{core}} + F_{\mu\nu}) \quad (3.282)$$

而且其中的密度矩阵  $\mathbf{P}$  必须和构建  $\mathbf{F}$  时所用的一样. 如此, 一旦构建了新的  $\mathbf{F}$ , 就能立马算出能量, 而无需等到构建下一个新的  $\mathbf{P}$ . ??中能量从高至低单调收敛. 由于能量是个变分量, 所以能量的相对误差要小于波函数和密度矩阵的.

最终的波函数和能量为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.8018 & -0.7823 \\ 0.3368 & 1.0684 \end{pmatrix} \quad (3.283)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -1.5975 & 0.0 \\ 0.0 & -0.0617 \end{pmatrix} \quad (3.284)$$

最低的轨道——被占轨道  $\psi_1$  是成键轨道, 由两个系数同号也能看出. 它主要还是由 He 波函数  $\phi_1$  组成. 虚轨道  $\psi_2$  是反键轨道, 它的两个系数符号相反. 它含 H 波函数  $\phi_2$  的成分更多, 这也是它和  $\psi_1$  正交所要求的. 利用 Koopmans 定理可以预测电离能和电子亲和能. 预测到的电离能很大 (1.5975 a.u. = 43.5 eV), 这在阴离子物种中很自然. 预测的电子亲和能则是正的 (0.0617 a.u. = 1.7 eV), 这个预测值意味着 HeH<sup>+</sup> 会结合一个电子. 这不是说 HeH 就是稳定分子, 因为 HeH<sup>+</sup> 的解离产物 (即 He + H<sup>+</sup>) 结合电子的能力更强 (H<sup>+</sup> 的电子亲和能比 HeH<sup>+</sup> 的电子亲和能加上解离能还要大).

从  $\mathbf{PS}$  的对角元可以进行 Mulliken 布居分析. 分析后知  $\phi_1$  上附带 1.53 个电子,  $\phi_2$  带 0.47 个电子. He 的静电荷为 +0.47, H 为 +0.53. 由这个预测结果就知道, 总的形式电荷 +1 基本平分在两个原子上. 借助带撇的相应矩阵 (也就是正交归一基  $\{\phi'_\mu\}$  下的矩阵) 可以进行 Löwdin 布居分析. 氢轨道上附带的电子为

$$P'_{\mu\mu} = (\mathbf{S}^{1/2} \mathbf{P} \mathbf{S}^{1/2})_{22} = 2(\mathbf{S}^{1/2} \mathbf{C})_{12}^2 = 0.5273 \quad (3.285)$$

这种办法计算出的电荷分离情况与之前类似, He, H 分别带有 +0.53, +0.47 的静电荷. 注意数值与之前相反.

HeH<sup>+</sup> 的总能为电子能量加上核排斥势  $2/R$ , 数值为 -2.860662 a.u.. 由我们的基本积分也可以确定 H, He<sup>+</sup>, He 的能量. 在当前基下, H 原子的能量与 H<sub>2</sub> 计算中国的能量相同:  $T_{22} + V_{22}^2 = -0.4666$  a.u.. 单电子原子 He<sup>+</sup> 在此基下的能量也类似  $T_{11} + V_{11}^1 = -1.9755$  a.u.. He 原子在  $\phi_1$  上由两个电子, 它的总能除了包含动能、核吸引势外, 还有两个电子之间的排斥. 因此 He 的能量为  $2(T_{11} + V_{11}^1) + (\phi_1 \phi_1 | \phi_1 \phi_1)$ . 这些能量列在??中以便与??中的精确结果比较.



### 3.6.1 收缩型高斯函数

### 3.6.2 极小基: STO-3G

### 3.6.3 双 Zeta 基组: 4-31G

### 3.6.4 极化基组: 6-31G\*与 6-31G\*\*

## 3.7 一些闭壳层算例

### 3.7.1 总能

### 3.7.2 离子化势能

### 3.7.3 平衡几何构型

### 3.7.4 布局分析与偶极矩

## 3.8 非限制性开壳层 H-F: Pople-Nesbet 方程

### 3.8.1 开壳层 H-F:非限制性自旋轨道

### 3.8.2 基的引入: Pople-Nesbet 方程

### 3.8.3 非限制性密度矩阵

### 3.8.4 Fock 矩阵的表达式

### 3.8.5 非限制 SCF 方程的解

### 3.8.6 一些非限制性的算例

### 3.8.7 解离问题及其非限制性解

## 注释

<sup>1</sup> J. S. Binkley, R. A. Whiteside, R. Krishnan, R. Seeger, H. B. Schlegel, D. J. Defrees, and J. A. Pople, Gaussian 80, program #406, Quantum Chemistry Exchange, Indiana University. More recent versions, such as Gaussian 88, are available via Professor John Pople of Carnegie-Mellon University.

<sup>2</sup> Hartree-Fock 理论在一些特殊情形下会涉及多行列式波函数, 比如使用限制性开壳层波函数时. 因为我们仅考虑非限制性开壳层波函数, 所以这里的 Hartree-Fock 波函数都是单行列式.

<sup>3</sup> 原则上, 本节所讨论的手续同样可以用与计算闭壳层激发态上, 但是如果激发态的对称性和基态的相同, 那么一般并没有办法保证这样的计算不收敛到基态  $|\Psi_0\rangle$  上.

<sup>4</sup>

<sup>5</sup>W. Kolos and Wolniewics, Improved theoretical ground-state energy of the hydrogen molecule, J. Chem. Phys. **49**: 404(1968).

## Chapter 4

### 组态相互作用

#### 4.1 多组态波函数及 Full CI 矩阵的结构

##### 4.1.1 中间归一化及相关能的表达式

#### 4.2 双激发 CI

#### 4.3 计算示例

#### 4.4 自然轨道与单粒子约化密度矩阵

#### 4.5 多组态自洽场与广义价键法

#### 4.6 截断 CI 与尺寸一致性问题



## Chapter 5

### 对理论与耦合对理论

第四章我们以及看到组态相互作用 (CI) 中, 若仅使用双激发态计算 (DCI), 则  $N$  个无相互作用  $H_2$  分子的相关能正比于  $N^{-1/2}$  (当  $N$  大时). 由于宏观系统的能量是热力学广度性质, 它必须正比于粒子数目. 因此 DCI 无法良好地处理大体系. 举个例子, 若用 DCI 计算晶体中每个原子所占的相关能, 结果会是零! 很明显, 要描述无限体系的相关效应时, 必须使用能使能量正比于粒子数的方法. 即使对有限体系, 使用近似方法时我们也希望能给出在不同大小分子下可比较的结果. 举个例子, 研究分子解离时, 要对整个分子以及解离碎片使用 (某种意义上的) 同等质量的方法. 一种近似方法, 若能用其计算所得的能量在体系增大时按粒子数目线性变化, 那么我就说该近似是**大小一致的 (size consistent)**. 之前的特例—— $N$  个闭壳层无相互作用的“单体”组成的超分子中, 若用大小一致的办法, 则超分子的能量就等于  $N$  乘以单体的能量.

虽然大小一致性看似是个普通的要求, 但除了 full CI 外的所有 CI 方法——前者当然是精确的——都不满足这个性质. 本征我们要考虑对理论及对耦合理论, 它们有大小一致性, 下一张要讨论的一种微扰论形式也具有这个性质. 对理论和微扰论具有大小一致性, 但代价就是, 于 DCI 不同, 前两个方法不是变分的, 因此由它们所得的总能可以比真实能量低. 比如, 对理论在特定情形下会给出 120% 的相关能.

5.1 解中我们讲述独立电子对近似 (the independent electron pair approximation, IEPA). 我们用一种方式快速建立计算框架, 但是这种方式可能会让读者错误地认为 IEPA 是 DCI 的近似. 展示了对计算中的细节后, 我们回到该方法的物理基础上并证明实际上 IEPA 和 DCI 是 **full CI** 的不同近似. 5.1.1 节中我们说明 IEPA 的缺点, 这些缺点在 DCI 和微扰论中都不存在: IEPA 在简并分子轨道的西变换下不是不变的. 5.1.2 解中我们列出一些数值结果, 以说明 IEPA 用在小分子上比较精确, 而在大分子上有严重缺陷.

5.2 节中考虑如何超越 IEPA: 加入不同电子对间的耦合. 我们讨论耦合对多电子理论 (CPMET), 它有时也叫作耦合簇近似 (coupled cluster approximation, CCA). 接下来介绍一系列对这个复杂方法的简化, 特别地我们考虑耦合电子对近似 (coupled electron pair approximation, CEPA). 最后, 5.2.4 节我们介绍一阶耦合对理论的数值运用.

由于耦合对理论十分重要但又比较复杂, 我们在 5.3 节 (作为教学工具) 用这些方法计算一个  $N$ -电子体系的能量, 该体系哈密顿仅包含单粒子作用. 这个问题很容易用基础的方法精确求解. 但是, 通过观察“高射炮”在这种简单问题中工作的方式, 我们可以洞察这些近似方法的本质. 特别的, 由此可以清晰地知道各不同多电子理论之间的关系. 作为多电子方法应用到但电子哈密顿体系中的一个具体粒子, 我们在 5.3.2 节考虑  $H^{\text{ucelk}}$  框架下环多烯的共振能. 这里的主要目的不是要运用  $H^{\text{ucelk}}$  理论或是多电子方法得到共振能. 而是要利用共振能和相关能的类似性以提供一个可以解析地研究的模型, 通过它我们能够说明不同多电子方

法一些计算上的东西.

## 5.1 独立电子对近似 (The Independent Electron Pair Approximation, IEPA)

前面一章我们研究知道, 用中间归一化 full CI 波函数 (由 Hartree-Fock 行列式的全部自旋轨道激发构成) 可以得到相关能:

$$E_{\text{corr}} = \sum_{a<b} \sum_{r<s} c_{ab}^{rs} \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_{ab}^{rs} \rangle = \frac{1}{4} \sum_{ab} \sum_{rs} \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_{ab}^{rs} \rangle \quad (5.1)$$

式中  $c_{ab}^{rs}$  是 full CI 波函数中用变分确定的双激发行列式系数. 想起单激发的系数由于 Brillouin 定理不起作用, 而三激发及更高激发也不会出现在之多含双粒子作用的 Hamiltonian 中. 这个表达式说明我们可将总相关能写作每个占据自旋轨道贡献的求和:

$$E_{\text{corr}} = \sum_{a<b} e_{ab} \quad (5.2)$$

### 5.1.1 酉变换下的不变性: 例子

### 5.1.2 一些算例

## 5.2 耦合对理论

### 5.2.1 耦合簇近似 (The Coupled Cluster Approximation, CCA)

### 5.2.2 波函数的簇展开

### 5.2.3 线性 CCA(耦合簇近似) 与耦合电子对近似 (CEPA)

### 5.2.4 一些算例

## 5.3 采用单粒子哈密顿量的多电子理论

### 5.3.1 CI、IEPA、CCA 和 CEPA 得到的弛豫能

### 5.3.2 Hückel 理论中多烯的共振能

## Chapter 6

### 多体微扰理论

#### 6.1 Reyleigh-Schrödinger 微扰理论

本节推导标准的 Reyleigh-Schrödinger 微扰论的表达式. 这些式子都是一般性的, 既能用于单粒子系统也能用于 N-粒子系统. 现设想要求解如下本征值问题:

$$\mathcal{H}|\Phi_i\rangle = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{V})|\Phi_i\rangle = \mathcal{E}_i|\Phi_i\rangle \quad (6.1)$$

而且已经知道  $\mathcal{H}_0$  的本征函数和本征值:

$$\mathcal{H}_0|\Psi_i^{(0)}\rangle = E_i^{(0)}|\Psi_i^{(0)}\rangle \quad \text{或} \quad \mathcal{H}_0|i\rangle = E_i^{(0)}|i\rangle \quad (6.2)$$

其中为简洁用  $|i\rangle$  代表  $|\Psi_i\rangle$ . 若微扰  $\mathcal{V}$  在某种程度上很小, 那么可以期望的是,  $|\Phi_i\rangle, \mathcal{E}_i$  会很接近  $|i\rangle, E_i^{(0)}$ . 现在想找出一种方法, 能使  $\mathcal{H}_0$  的本征函数和本征值系统地逼近总哈密顿量  $\mathcal{H}$  的本征函数和本征值. 为此, 我们引入一个阶参数, 之后再令其等于 1, 有:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda\mathcal{V} \quad (6.3)$$

现将精确的本征函数与本征值展开成  $\lambda$  的 Taylor 级数,

$$\mathcal{E} = E_i^{(0)} + \lambda E_i^{(1)} + \lambda^2 E_i^{(2)} + \dots \quad (6.4a)$$

$$|\Phi_i\rangle = |i\rangle + \lambda|\Psi_i^{(1)}\rangle + \lambda^2|\Psi_i^{(2)}\rangle + \dots \quad (6.4b)$$

称  $E_i^{(n)}$  为  $n$  阶能量. 现在的问题是如何将精确量用零阶能量以及微扰算符  $\mathcal{V}$  在未微扰波函数间的矩阵元  $\langle i|\mathcal{V}|j\rangle$  表达出来.

现在设  $\mathcal{H}$  的波函数已归一化:  $\langle i|i\rangle = 1$ , 且在  $|\Phi_i\rangle$  上乘上一个因子以使其满足等式  $\langle i|\Phi_i\rangle = 1$ . 这种处理叫作“中间归一化”, 并且, 除非  $|i\rangle$  与  $|\Phi_i\rangle$  正交, 否则总可以进行中间归一化. 将 (6.4b) 左乘  $\langle i|$ , 得到

$$\langle i|\Phi_i\rangle = \langle i|i\rangle + \lambda\langle i|\Psi_i^{(1)}\rangle + \lambda^2\langle i|\Psi_i^{(2)}\rangle + \dots = 1 \quad (6.5)$$

上面的方程对于所有的  $\lambda$  都成立 ( $\lambda$  不等于 1 时也成立), 那么就有

$$\langle i|\Psi_i^{(n)}\rangle = 0, n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.6)$$

将 (6.4a, 6.4b) 带入 6.1, 得到:

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{V})(|i\rangle + \lambda |\Psi_i^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\Psi_i^{(2)}\rangle + \cdots) \\ = (E_i^{(0)} + \lambda E_i^{(1)} + \lambda^2 E_i^{(2)} + \lambda^2 E_i^{(2)} + \cdots) \end{aligned}$$

因为  $\lambda^n$  的系数对应相等, 我们有

$$\mathcal{H}_0 |i\rangle = E_i^{(0)} |i\rangle \quad n=0 \quad (6.7a)$$

$$\mathcal{H}_0 |\Psi_i^{(1)}\rangle + \mathcal{V} |i\rangle = E_i^{(0)} |\Psi_i^{(1)}\rangle + E_i^{(1)} |i\rangle \quad n=1 \quad (6.7b)$$

$$\mathcal{H}_0 |\Psi_i^{(2)}\rangle + \mathcal{V} |\Psi_i^{(1)}\rangle = E_i^{(0)} |\Psi_i^{(2)}\rangle + E_i^{(1)} |\Psi_i^{(1)}\rangle + E_i^{(2)} |i\rangle \quad n=2 \quad (6.7c)$$

$$\mathcal{H}_0 |\Psi_i^{(3)}\rangle + \mathcal{V} |\Psi_i^{(2)}\rangle = E_i^{(0)} |\Psi_i^{(3)}\rangle + E_i^{(1)} |\Psi_i^{(2)}\rangle + E_i^{(2)} |\Psi_i^{(1)}\rangle + E_i^{(3)} |i\rangle \quad n=3 \quad (6.7d)$$

等等. 每个式子左乘  $|i\rangle$ , 由正交关系??可得如下各阶能量:

$$E_i^{(0)} = \langle i | \mathcal{H} | i \rangle \quad (6.8a)$$

$$E_i^{(1)} = \langle i | \mathcal{V} | i \rangle \quad (6.8b)$$

$$E_i^{(2)} = \langle i | \mathcal{H} | \Psi_i^{(1)} \rangle \quad (6.8c)$$

$$E_i^{(3)} = \langle i | \mathcal{H} | \Psi_i^{(2)} \rangle \quad (6.8d)$$

剩下的事情就是从 (6.7) 解出  $|\Psi_i^{(n)}\rangle$ , 然后用 (6.8) 确定  $n$  阶能量.

先来看 (6.7b), 由它来解出一阶波函数  $|\Psi_i^{(1)}\rangle$ . 此式可重写为

$$(E_i^{(0)} - \mathcal{H}_0) |\Psi_i^{(1)}\rangle = (\mathcal{V} - \langle i | \mathcal{V} | i \rangle) |i\rangle \quad (6.9)$$

上式不再是一个本征方程, 而成为了一个非齐次微分方程 (更广义地, 成为了积分微分方程). 解该方程的一种办法是将  $|\Psi_i^{(1)}\rangle$  用  $\mathcal{H}$  的本征函数展开 (因为  $\mathcal{H}_0$  的本征函数是完备的):

$$|\Psi_i^{(1)}\rangle = \sum_n c_n^{(1)} |n\rangle$$

又因  $\mathcal{H}_0$  的本征函数是正交的, 将上式左乘  $\langle n |$  得到

$$\langle n | \Psi_i^{(1)} \rangle = c_n^{(1)}$$

由 (6.6) 可知,  $c_i^{(1)} = 0$ , 所以有

$$|\Psi_i^{(1)}\rangle = \sum_n' |n\rangle \langle n | \Psi_i^{(1)} \rangle \quad (6.10)$$

求和号上的一撇代表不包括  $n=i$  的项. (6.9) 左乘  $\langle n |$ , 并注意到零阶波函数的正交性, 就可以得到:

$$(E_i^{(0)} - E_n^{(0)}) \langle n | \Psi_i^{(1)} \rangle = \langle n | \mathcal{V} | i \rangle \quad (6.11)$$

为得到二阶能量, 将 (6.10) 带入 (6.8c) 可以得到:

$$E_i^{(2)} = \langle i | \mathcal{V} | \Psi_i^{(1)} \rangle = \sum_n' \langle i | \mathcal{V} | n \rangle \langle n | \Psi_i^{(1)} \rangle$$

使用 (6.11) 可以求出  $\langle n | \Psi_i^{(1)} \rangle$ , 所以最终有

$$E_i^{(2)} = \sum_n' \frac{\langle i | \mathcal{V} | n \rangle \langle n | \mathcal{V} | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_n^{(0)}} \quad (6.12)$$

这就是二阶能量的表达式.

若想到三阶能量  $E_i^{(3)}$ , 可以使用相同的手续. 首先将二阶波函数展开为

$$| \Psi_i^{(2)} \rangle = \sum_n' | n \rangle \langle n | \Psi_i^{(2)} \rangle \quad (6.13)$$

然后乘  $\langle n |$  去乘 (6.7c), 得到

$$(E_i^{(0)} - E_n^{(0)}) \langle n | \Psi_i^{(2)} \rangle = \langle n | \mathcal{V} | \Psi_i^{(1)} \rangle - E_i^{(1)} \langle n | \Psi_i^{(1)} \rangle \quad (6.14)$$

将 (6.8d)(6.13)(6.14) 组合可得

$$\begin{aligned} E_i^{(3)} &= \langle i | \mathcal{V} | \Psi_i^{(2)} \rangle \\ &= \sum_n' \langle i | \mathcal{V} | n \rangle \langle n | \Psi_i^{(2)} \rangle \\ &= \sum_n' \frac{\langle i | \mathcal{V} | n \rangle \langle n | \mathcal{V} | \Psi_i^{(1)} \rangle}{E_i^{(0)} - E_n^{(0)}} - E_i^{(1)} \sum_n' \frac{\langle i | \mathcal{V} | n \rangle \langle n | \Psi_i^{(1)} \rangle}{E_i^{(0)} - E_n^{(0)}} \end{aligned}$$

最后再将 (6.10)(6.11) 插入, 就得到

$$\begin{aligned} E_i^{(3)} &= \sum_{mn}' \frac{\langle i | \mathcal{V} | n \rangle \langle n | \mathcal{V} | m \rangle \langle m | \mathcal{V} | i \rangle}{(E_i^{(0)} - E_n^{(0)})(E_i^{(0)} - E_m^{(0)})} - E_i^{(1)} \sum_n' \frac{|\langle i | \mathcal{V} | n \rangle|^2}{(E_i^{(0)} - E_n^{(0)})^2} \\ &= A_i^{(3)} + B_i^{(3)} \end{aligned} \quad (6.15)$$

这就是三阶能量.

此处给出这种办法的一个应用. 考虑一个体系, 该体系仅右边两个状态  $|I\rangle, |II\rangle$ , 都是哈密顿量  $\mathcal{H}$  的本征函数:

$$\mathcal{H} |I\rangle = \mathcal{E}_1 |I\rangle \quad \mathcal{H} |II\rangle = \mathcal{E}_2 |II\rangle$$

假设

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}$$

而且知道  $\mathcal{H}_0$  的本征函数:

$$\mathcal{H}_0 |1\rangle = E_1^{(0)} |1\rangle \quad \mathcal{H}_0 |2\rangle = E_2^{(0)} |2\rangle$$



现在想得到精确的基态能量  $\mathcal{E}_1$ . 假设零阶态非简并, 而且  $E_1^{(0)}$  是较低的能量 (即  $E_1^{(0)} < E_2^{(0)}$ ). 我们先用精确的办法得出解, 然后再用微扰理论求解, 最后比较这两个结果. 为求解方程

$$\mathcal{H}|\Phi\rangle = \mathcal{E}|\Phi\rangle \quad (6.16)$$

写出如下展开

$$|\Phi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle \quad (6.17)$$

由此得到

$$\begin{bmatrix} E_1^{(0)} + \langle 1|\mathcal{V}|1\rangle & \langle 1|\mathcal{V}|2\rangle \\ \langle 2|\mathcal{V}|1\rangle & E_2^{(0)} + \langle 2|\mathcal{V}|2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathcal{E} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

为简化记号, 令  $\langle 1|\mathcal{V}|1\rangle = V_{11}$ ,  $\langle 1|\mathcal{V}|2\rangle = V_{12}$ ,  $\langle 2|\mathcal{V}|1\rangle = V_{21}$ ,  $\langle 2|\mathcal{V}|2\rangle = V_{22}$ . 此矩阵较小的那个本征值为:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \left\{ E_1^{(0)} + V_{11} + E_2^{(0)} + V_{22} - \left[ (E_1^{(0)} - E_2^{(0)} + V_{11} - V_{22})^2 + 4V_{12}V_{21} \right]^{1/2} \right\} \quad (6.19a)$$

现将  $\mathcal{E}_1$  按微扰矩阵元展成 Taylor 级数. 为此, 将每个微扰矩阵元都乘以系数  $\lambda$ :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \left\{ E_1^{(0)} + \lambda V_{11} + E_2^{(0)} + \lambda V_{22} - \left[ (E_1^{(0)} - E_2^{(0)} + \lambda(V_{11} - V_{22}))^2 + 4\lambda^2 V_{12}V_{21} \right]^{1/2} \right\} \quad (6.19b)$$

然后将  $\mathcal{E}_1$  展成  $\lambda$  的 Taylor 级数.

此处需要两个等式:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \quad (6.20)$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (6.21)$$

先将  $\mathcal{E}_1$  写成:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 = & \frac{1}{2} \left\{ E_1^{(0)} + \lambda V_{11} + E_2^{(0)} + \lambda V_{22} + (E_1^{(0)} - E_2^{(0)} + \lambda(V_{11} - V_{22})) \right. \\ & \left. \times \left[ 1 + \frac{4\lambda^2 V_{12}V_{21}}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)} + \lambda(V_{11} - V_{22}))^2} \right]^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

请注意, 我们从平方根中提出了因子  $(E_1^{(0)} - E_2^{(2)} + \lambda(V_{11} - V_{22}))$ , 此处假设它是负的, 因为  $E_1^{(0)} < E_2^{(0)}$ , 而且扰动 (即  $\mathcal{V}$ ) 是小的.

首先展开平方根 (略), 然后展开  $(E_1^{(0)} - E_2^{(0)} + \lambda(V_{11} - V_{22}))^{-1}$  如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)} + \lambda(V_{11} - V_{22}))} &= \frac{1}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda(V_{11} - V_{22})}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}} \\ &= \frac{1}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} - \frac{\lambda(V_{11} - V_{22})}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2} + \dots \end{aligned}$$

可以证明

$$\mathcal{E}_1 = E_1^{(1)} + \lambda E_1^{(1)} + \lambda^2 E_1^{(2)} + \lambda^3 E_1^{(3)} + E \lambda^4 E_1^{(4)} + \dots \quad (6.22)$$

其中

$$E_1^{(1)} = V_{11} \quad (6.23a)$$

$$E_1^{(2)} = \frac{V_{12} V_{21}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \quad (6.23b)$$

$$E_1^{(3)} = \frac{V_{12} V_{22} V_{21}}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2} - \frac{V_{12} V_{21} V_{11}}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2} \quad (6.23c)$$

$$E_1^{(4)} = \frac{V_{12} V_{21} V_{11}^2}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3} - \frac{2V_{12} V_{22} V_{21} V_{11}}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3} + \frac{V_{12} V_{22}^2 V_{21}}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3} + \frac{(V_{12} V_{21})^2}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3} \quad (6.23d)$$

最终我们能看到, 由 RS 微扰理论出发所得的一、二、三阶能量的公式 [(6.8b)(6.12)(6.15)] 与上式中的  $E_1^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3$ ) 相等. 为理解这一点, 只需注意到两态问题中中仅有一个中间态  $|n\rangle = |2\rangle$ . 由于微扰理论的公式是由 Taylor 展开所得, 出现这样的对应也是可期的。

## 6.2 RS 微扰论的图表示

上节末尾我们已经看到, 即使是最简单的两态问题, 其高阶能量公式也相当复杂. 本章的主要目标就是将 Hartree-Fock 基态作为零阶态来得到相关能的微扰展开公式. 在这种情况下, 高阶能量的表达式愈将复杂. 因此若能找到某种相对简单的方法, 将高阶展开中的各项归类并表示出来, 那将再好不过. 本节来介绍一种图形化方法, 用图形表示微扰展开. 我们并不会严格地推导图形微扰论, 而是从一个简单的例子开始, 推测出微扰展开和一组含义明确的图形之间的对应关系. 然后我们再“猜出”将图形转化为数学式子的规则, 并展示其正确性. 接下来会推广之前的图形及规则, 并在每一步都检查有图形所得的式子和直接推导所得式子之间的一致性. 用这种办法是望读者能习惯并认可这些图形.

微扰展开的图形表示首先出现在量子电动力学中. 是 Feynman 首创了这种办法, 并在他的 Nobel 讲座上介绍了其想法的演变发展. 此处引用他的几句话“我其余的工作就是发展了计算技巧, 用图形来帮助人们更快地分析微扰论. 这个工具最初基本上是猜出来的.”“即使是从物理学家的层面来讲, 我也并未证明这些规则和方程可以通过传统的电动力学得到, 但是从平时的“胡搞”中我已经知道, 所有这些东西和传统的电动力学毫无二致”

### 6.2.1 两态系统的图微扰论

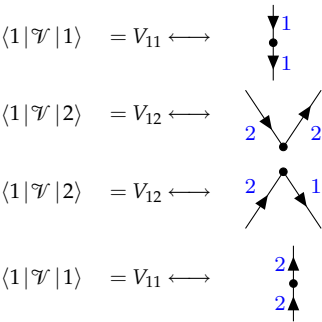
上节考察了两态问题, 并得到了基态本征值表达式, 此处介绍该表达式中各项所对应的图形表示. 首先, 用一个点来表示微扰  $\mathcal{V}$ :

$$\mathcal{V} \longleftrightarrow \bullet$$

两个零阶态  $|1\rangle, |2\rangle$  由向上和向下的箭头表示:

$$\begin{array}{l} |1\rangle \longleftrightarrow \downarrow \\ |2\rangle \longleftrightarrow \uparrow \end{array}$$

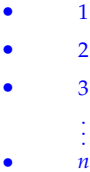
箭头向下的线叫作“空穴”线，箭头向上的线叫粒子线。这些术语暂时不重要，此处只是提早介绍一下。由这些定义，可以得到画出一些简单的图形来代表  $\mathcal{V}$  的矩阵元：



总之，每个点上都有一线段进入，有一线段穿出。对应的矩阵元就是  $\langle \text{穿入线的标签} | \mathcal{V} | \text{穿出线的标签} \rangle$ 。

回忆  $n$  阶能量表达式中的各项： $n = 1, 2, 3, 4$  分子都是  $n$  个  $\mathcal{V}$  矩阵元的乘积。每个矩阵元都可由一个点一级传入和穿出的线来表示，也许将  $n$  个点用某种方式相互连接起来组成的图，可以用来表示矩阵元的乘积。现在给出这种图的结构 的严格描述：

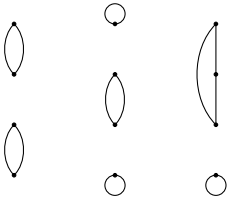
1. 按如下顺序画出  $n$  个点



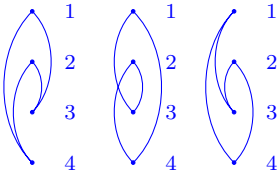
2. 将所有点用一根连续的线连起来，保证每个点都被线穿过。

3. 列出所有不同的连接方式，如果在两个图中，对应的点与其周围的点的连接方式都相同，那么这两个图等价。

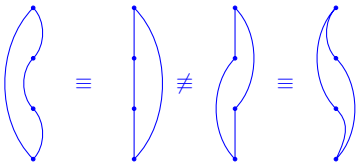
第二个规则强制我们的图只能是完全连接的，或者叫**连通的** (linked)，也就是说，它们连成一个整体。如下的不连通图：



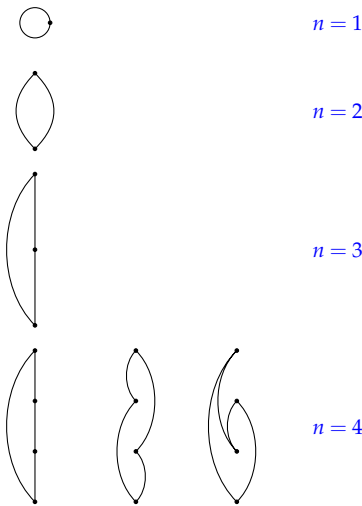
是不允许出现的. 第三个规则是说, 如果几个图 (如下例)



以同一种方式连接, 那么它们就等价: 1 和 3、4 相连, 2 和 3、4 相连, 3 与 1 和 2 相连, 4 与 1 和 2 相连. 为快速判断图之间是否等价, 可以将连线想象成粘在点上的橡皮筋, 我们可以任意拉扯伸缩这些皮筋. 如果两个图不等价, 那么无论怎么对橡皮筋进行拉扯, 都不可能使两个图看起来一样. 因此:

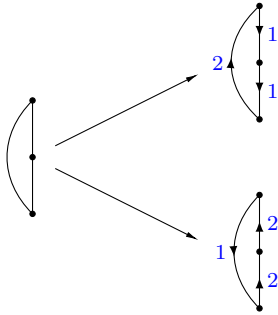


利用这些规则, 可以画出如下的图 (至四阶):



读者通过尝试应当可以使自己确信, 以上就是所有可能的相异图 (直到四阶). 现在给连线加上箭头, 注意要保证每个点都有线穿入和穿出. 若以 1 来标记向下的线, 2 来标记向上的线, 则

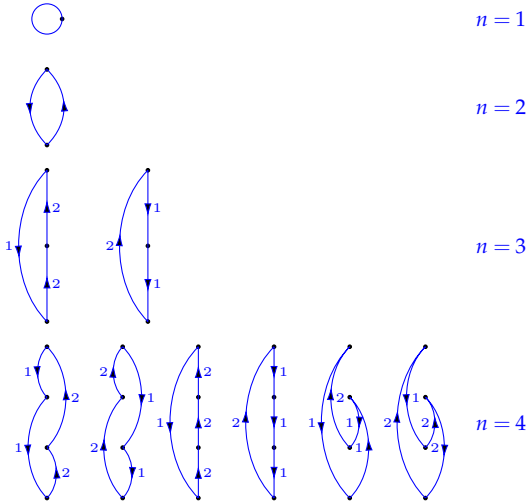
有两种标法:



当  $n = 1$  时, 会有一个小问题, 图上的箭头在某部分是向上的, 在另一部分是向下的



我们可以将圆圈定义为空穴线来规避这个问题. 按照以上的办法, 我们总共可以画出如下这么多的图:



现假设所有  $n$  个点的图和所有  $n$  阶能量项之间存在一一映射, 此处我们给出由图到能量项的表达式的转换规则. 存在这种对应关系是很奇妙的一件事. 转换规则如下:

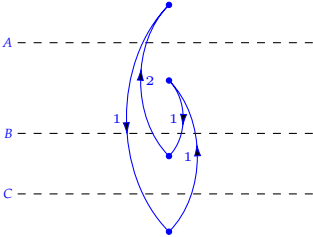
1. 每个点为分母贡献一个因子  $\langle \text{穿入线的标号} | \mathcal{V} | \text{穿出线的标号} \rangle$ .
2. 每一对相邻点贡献一个分母上的因子

$$\sum E_{\text{空穴}} - \sum E_{\text{粒子}}^{(0)}$$

其中求和遍及所有与两个点之间的一条水平线相交的空穴线和粒子线.

3. 表达式的正负号为  $(-)^{h+l}$ ,  $h$  是空穴线的数目,  $l$  是闭合圆圈的数目. 本节的图中  $l$  总是 1, 这里给出更一般的规则以利后用.

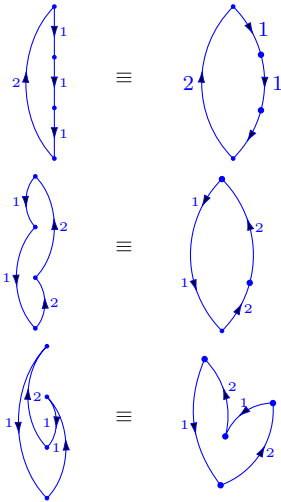
这个规则很容易运用. 考虑四阶图



最上面的两个点每个为分母贡献一个因子  $\langle 2|\mathcal{V}|1\rangle = V_{21}$ , 剩余的点每个贡献  $\langle 1|\mathcal{V}|2\rangle = V_{12}$ . 虚线 A,C 每个都为分母贡献一因子  $E_1^{(0)} - E_2^{(0)}$ , 虚线 B 贡献一个因子  $(2E_1^{(0)} - 2E_2^{(0)})$ . 此外, 该图有 2 个空穴线 ( $h=2$ )1 个闭合圈 ( $l=1$ ), 所以要将式子乘以  $(-1)^3$ . 所以最终有


$$= (-)^3 \frac{(V_{12}V_{21})^2}{\left(E_1^{(0)} - E_2^{(0)}\right)\left(2E_1^{(0)} - 2E_2^{(0)}\right)} = \frac{(V_{12}V_{21})^2}{2\left(E_1^{(0)} - E_2^{(0)}\right)^2}$$

值得注意, 在我们的在转化规则下, 如下的每一对图都给出相同结果



这事实告诉我们, 画图时不必将各点严格按照竖线排列. 实际上, 在不改变各点竖直顺序的前提下, 我们可以对图进行任意扭动.

表 6.1 中按照之前的规则计算出了所有的二、三、四阶图对应的代数式. 按习惯, 一阶泡泡图定为


$$= V_{11}$$

检视表 6.1 可以发现, 按照我们的规则把图换成算式, 然后将各阶图对应的算式加起来, 就得到该阶的能量修正, 其结果和上一节所得的完全相同.

---

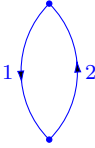
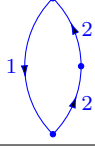
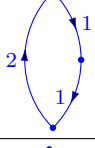
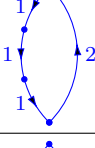
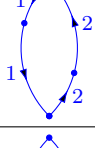
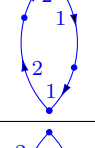
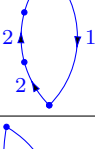
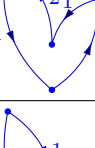
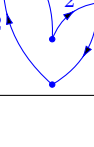
**练习 6.1** 写出虚线仅会穿过一条空穴线和一条粒子线的五阶图, 求出对应的算式并证明这些图之和对应着

$$\frac{V_{12}V_{21}(V_{22}-V_{11})^3}{(E_1^{(0)}-E_2^{(0)})^4}$$

提示: 这样的图共有八个. 你可以把三个点加在二阶图上来生成所有可能的五阶图.

---

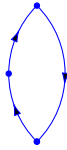
表 6.1: 图到公式的转换

	$(-)^{1+1} \frac{\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 1\rangle}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} = \frac{V_{12}V_{21}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}$
	$(-)^{1+1} \frac{\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 1\rangle}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2} = \frac{V_{12}V_{22}V_{21}}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2}$
	$(-)^{2+1} \frac{\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 1\rangle\langle 1 \mathcal{V} 1\rangle}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2} = \frac{V_{12}V_{21}V_{11}}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2}$
	$(-)^{3+1} \frac{\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 1\rangle\langle 1 \mathcal{V} 1\rangle\langle 1 \mathcal{V} 1\rangle}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3} = \frac{V_{12}V_{21}V_{11}^2}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3}$
	$(-)^{2+1} \frac{\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 1\rangle\langle 1 \mathcal{V} 1\rangle}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3} = \frac{V_{12}V_{22}V_{21}V_{11}}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3}$
	$(-)^{2+1} \frac{\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 1\rangle\langle 1 \mathcal{V} 1\rangle}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3} = \frac{V_{12}V_{22}V_{21}V_{11}}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3}$
	$(-)^{1+1} \frac{\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 2\rangle\langle 1 \mathcal{V} 1\rangle}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3} = \frac{V_{12}V_{22}^2V_{21}}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3}$
	$(-)^{2+1} \frac{\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 1\rangle\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 1\rangle}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2(2E_1^{(0)} - 2E_2^{(0)})} = \frac{(V_{12}V_{21})^2}{2(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3}$
	$(-)^{2+1} \frac{\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 1\rangle\langle 1 \mathcal{V} 2\rangle\langle 2 \mathcal{V} 1\rangle}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2(2E_1^{(0)} - 2E_2^{(0)})} = \frac{(V_{12}V_{21})^2}{2(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3}$

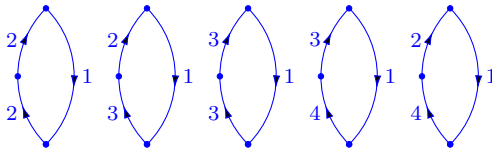


6.2.2  $N$  个态的图微扰论

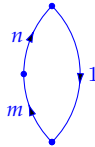
本节将之前所发展的 RS 微扰论的图表示应用到  $N$ -态系统上. 考虑如何找到这样一个系统最低本征值的微扰展开. 现下我们仍然只有一个空穴态  $|1\rangle$ , 但有  $N - 1$  个粒子态  $|n\rangle, n = 2, 3, \dots, N$ . 我们仍然按照之前的办法来画图, 但要注意现在粒子线的标签可以是任意的  $n$ . 举个例子, 下图



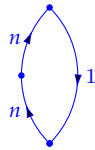
可以按不同的方式来标记:



等等. 一般地我们可以写出



其中的标号  $m, n$  可以独立地取 2 到  $N$  的任何值. 其中一类图如下



我们称这样的图为**对角的**. 为得到这些推广了的图的数学表达式, 我们需要在之前的规则上增加一条:

4 求和时要对所有粒子标签求和.

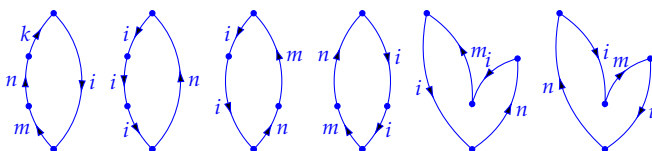
这里来看一个示例. 计算二阶和三阶能量

$$1 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} n = \sum_{n \neq 1} \frac{V_{1n} V_{n1}}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}} = \sum_n' \frac{V_{1n} V_{n1}}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}} \quad (6.24a)$$

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow n \\ \bullet \\ \downarrow m \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow 1 \\ \bullet \\ \downarrow 1 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ n \end{array} = \sum_{n \neq 1} \frac{V_{1n} V_{n1}}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}} = \sum_n' \frac{V_{1n} V_{n1}}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}} \quad (6.24b)$$

这两个表达式与之前所得到的二阶、三阶能量的表达式 (6.12)(6.15) 在  $i=1$  的情况完全相同。如果现在要得到某个态  $i$  的微扰表达式，而且  $i$  不一定是最低能态，我们要如何处理？图的形状怎么样呢？我们很容易能够验证，如果将空穴线标为  $i$ ，粒子线标为  $m, n, k$ ，其取值为  $1, 2, \dots, i-1$  和  $i+1, \dots, N$ ，那么答案就与之前的相同。那么现在我们对 RS 微扰论就有了一个完整的图表示框架，可以将其应该用于任意的微扰和任意的零阶态上。

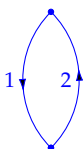
**练习 6.2** 使用图技术得到一个  $N$ -态系统中特定态的四阶微扰能（比如态  $i$ ）。也就是，计算如下图的表达式：



其中指标  $m, n, k$  的值不取  $i$ 。用 6.1 节介绍的方法得出四阶能量的代数表达式并与图形方法所得的结果比较。

### 6.2.3 对图求和

图微扰论中的一个重要技术就是对某些特定类的图进行无穷阶求和。为说明这个技术我们考虑两态系统。对二阶有贡献的唯一图就是



在此图上加点可以生成一系列的图，现在考虑这些图的求和：

$$\Delta = \left[ \begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow 1 \\ \bullet \\ \downarrow 2 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 2 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow 1 \\ \bullet \\ \downarrow 2 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 2 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow 1 \\ \bullet \\ \downarrow 2 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 2 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow 1 \\ \bullet \\ \downarrow 2 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 2 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow 1 \\ \bullet \\ \downarrow 2 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 2 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow 1 \\ \bullet \\ \downarrow 2 \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ 2 \end{array} \right] + \dots \quad (6.25)$$

利用 6.1 和练习 6.1 中的五阶图表达式，我们可以得到

$$\Delta = \left[ \frac{V_{12} V_{21}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \right] + \left[ \frac{V_{12} V_{21} (V_{22} - V_{11})}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2} \right] + \left[ \frac{V_{12} V_{21} (V_{22} - V_{11})^2}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^3} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{V_{12}V_{21}(V_{22} - V_{11})^3}{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^4} \right] + \dots \\
\Delta = & \frac{V_{12}V_{21}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \left[ 1 + \left( \frac{V_{22} - V_{11}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \right) + \left( \frac{V_{22} - V_{11}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left( \frac{V_{22} - V_{11}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \right) + \dots \right] \quad (6.26)
\end{aligned}$$

注意到方括号中的式子是一几何级数. 使用公式

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

则级数 (6.26) 求和后就成为

$$\Delta = \frac{V_{12}V_{21}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \left[ \frac{1}{1 - \frac{V_{22} - V_{11}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}} \right] = \frac{V_{12}V_{21}}{(E_1^{(0)} + V_{11}) - (E_2^{(0)} + V_{22})} \quad (6.27)$$

对这组图求和到无穷阶得到的表达式类似于二阶微扰的结果, 但不同指出在于它有**能量移动分母 (shifted energy denominator)**. 这个结果可以重述如下: 对一个呈几何级数的图求和至无穷阶, 所得的结果是某个微扰论的有限阶结果, 这个微扰论的哈密顿量的微扰和未受扰部分的划分方式与图所对应的划分方式不同. 特别地在两态问题中, 我们原始的哈密顿量划分方式为

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_0 &= \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix} \\
\mathbf{V} &= \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

若将哈密顿量重新划分为:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}'_0 &= \begin{pmatrix} E_1^{(0)} + V_{11} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} + V_{22} \end{pmatrix} \\
\mathbf{V} &= \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ V_{21} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

则原始划分下图的集合级数求和结果就是第二种划分下的二阶微扰能.

下面将此结果推广到  $N$ -态系统中. 在二阶图上加点可以禅城如下的图:

$$\Delta = \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A loop with two vertices, labeled 1 and n.} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A loop with two vertices, labeled 1 and n, with an additional vertex in the middle.} \end{array} \right] + \dots \quad (6.28)$$

注意以这种方式生成的这类图全部是对角的. 对这类图求和给出

$$\Delta = \sum_n \frac{V_{1n} V_{n1}}{(E_1^{(0)} + V_{11}) - (E_n^{(0)} + V_{nn})} \quad (6.29)$$

其中求和号上的一撇意思是求和时去掉  $n = 1$  这项. 再次注意到上面所得的结果就是具有能量移动分母的二阶 (微扰能量) 表达式. 我们之后会知道, 几何级数求和技术可用以获得 Hartree-Fock 能量的微扰修正.

### 6.3 轨道微扰论: 单粒子微扰

目前为止所介绍的理论可以用于任意量子力学体系. 本节我们考虑一个重要的具体例子——其中未受扰哈密顿量是一组单粒子哈密顿量之和:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i h_0(i) \quad (6.30)$$

实际上 Hartree-Fock 哈密顿量的形式就是如此. 我们希望用微扰理论来改进这种对多电子体系的单粒子处理方式. 为简明计, 一开始我们仅考虑微扰部分为单粒子作用之和的情形:

$$\mathcal{V} = \sum_i v(i) \quad (6.31)$$

下节再将所得结果推广到包含双粒子相互作用的情形. 微扰是一组单粒子相互作用之和的实际粒子就是处在外电场  $\vec{F}$  中的分子. 在这种情况下微扰为  $\vec{F} \cdot \sum_i \mathbf{r}(i)$ , 其中  $\mathbf{r}(i)$  是第  $i$  个电子的位置矢量.

设想已经得到一组自旋轨道和轨道能量作为  $h_0$  的本征函数和本征值,

$$h_0 \chi_i^{(0)} = \varepsilon_i^{(0)} \chi_i^{(0)} \quad (6.32)$$

哈密顿量为  $\mathcal{H}_0$  的  $N$ -电子系统的基态波函数  $|\Psi_0\rangle$  是由其中能量最低的  $N$  个自旋轨道组成的行列式:

$$|\Psi_0\rangle = \left| \chi_1^p(0) \cdots \chi_a^{(0)} \cdots \chi_n^{(0)} \right\rangle \quad (6.33)$$

我们用指标  $a, b, c, \dots$  来记占据 (空穴 hole) 自旋轨道, 用  $r, s, t, \dots$  来记未占 (粒子 particle) 自旋轨道. 波函数 (6.33) 是  $\mathcal{H}_0$  的本征函数, 本征值就是占据自旋轨道能量之和:

$$\mathcal{H}_0 |\Psi_0\rangle = \left( \sum_a \varepsilon_a^{(0)} \right) |\Psi_0\rangle$$

若存在微扰  $\mathcal{V}$ , 那么  $|\Psi_0\rangle$  就是精确波函数  $|\Phi_0\rangle$  的一个近似. 在这种近似下, 受微扰的  $N$ -电子体系的基态就是:

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \mathcal{H}_0 + \mathcal{V} | \Psi_0 \rangle \\ &= \sum_a \varepsilon_a^{(0)} + \sum_a \langle a | v | a \rangle = \sum_a \varepsilon_a^{(0)} + \sum_a v_{aa} \end{aligned} \quad (6.34)$$

在这种微扰是单粒子作用之和的特殊情形下, 系统的总 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V} = \sum_i (h_0(i) + v(i)) = \sum_i h(i) \quad (6.35)$$

也是一些单粒子作用之和. 因此可以找到一组精确的自旋轨道及其能量:

$$h\chi_i = (h_0 + v)\chi_i = \varepsilon_i\chi_i \quad (6.36)$$

并借其中能量最低的  $N$  个精确自旋轨道构建该体系的精确基态波函数:

$$|\Phi_0\rangle = |\chi_1 \cdots \chi_a \cdots \chi_N\rangle \quad (6.37)$$

该波函数即  $\mathcal{H}$  的本征函数, 对应本征值等于占据轨道能量之和:

$$\mathcal{H}|\Phi_0\rangle = \left(\sum_a \varepsilon_a\right)|\Phi_0\rangle = \mathcal{E}_0|\Phi_0\rangle$$

那么体系当微扰存在时的精确能量就是

$$\mathcal{E}_0 = \sum_a \varepsilon_a \quad (6.38)$$

设想我们将精确能量进行微扰展开:

$$\mathcal{E}_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)} + \cdots$$

由于精确能量可写为占据轨道能量  $\varepsilon_a$  之和, 我们简单地将每个  $\varepsilon_a$  进行微扰展开, 然后将结果对所有占据自旋轨道求和. 由于 6.1 节中的一般性理论可以用于单粒子零阶 Hamiltonian (即  $h_0$ ) 和单粒子微扰, 我们立马得到:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \varepsilon_a^{(0)} + \langle a|v|a\rangle + \sum_i' \frac{\langle a|v|i\rangle\langle i|v|a\rangle}{\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_i^{(0)}} + \cdots \\ &= \varepsilon_a^{(0)} + v_{aa} + \sum_i' \frac{v_{ai}v_{ia}}{\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_i^{(0)}} + \cdots \end{aligned} \quad (6.39)$$

对  $i$  的求和可分为两部分, 一部分是对所有粒子轨道求和, 零一部分对除  $a$  外的所有空穴轨道求和:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a^{(0)} + v_{aa} + \sum_r \frac{v_{ar}v_{ra}}{\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_r^{(0)}} + v_{aa} + \sum_{b \neq a} \frac{v_{ab}v_{ba}}{\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_b^{(0)}} + \cdots \quad (6.40)$$

当下我们要得到精确能量的微扰展开, 那么将 (6.40) 带入 (6.38) 可得

$$\mathcal{E}_0 = \sum_a \varepsilon_a = \sum_a v_{aa} + \sum_{ar} \frac{v_{ar}v_{ra}}{\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_r^{(0)}} + \sum_{\substack{ab \\ a \neq b}} \frac{v_{ab}v_{ba}}{\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_b^{(0)}} + \cdots \quad (6.41)$$

式中此项

$$X = \sum_{\substack{ab \\ a \neq b}} \frac{v_{ab}v_{ba}}{\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_b^{(0)}}$$

值为零. 为说明这点, 我们交换傀标  $a, b$ , 得到

$$X = \sum_{\substack{ab \\ a \neq b}} \frac{v_{ba}v_{ab}}{\epsilon_b^{(0)} - \epsilon_a^{(0)}} = - \sum_{\substack{ab \\ a \neq b}} \frac{v_{ab}v_{ba}}{\epsilon_a^{(0)} - \epsilon_b^{(0)}} = -X$$

因此  $X = 0$ . 那么可以写出直到第二阶的式子:

$$\mathcal{E}_0 = \sum_a \epsilon_a^{(0)} + \sum_a v_{aa} + \sum_{ar} \frac{v_{ar}v_{ra}}{\epsilon_a^{(0)} - \epsilon_r^{(0)}} \quad (6.42)$$

因此

$$E_0^{(0)} = \sum_a \epsilon_a^{(0)} \quad (6.43a)$$

$$E_0^{(1)} = \sum_a v_{aa} \quad (6.43b)$$

$$E_0^{(2)} = \sum_{ar} \frac{v_{ar}v_{ra}}{\epsilon_a^{(0)} - \epsilon_r^{(0)}} \quad (6.43c)$$

可以看见  $|\Psi_0\rangle$  的能量 (见 (6.34)) 等于零阶与一阶能量之和 (即  $E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)}$ ).

式 (6.43) 中的求和遍及所有占据 (空穴) 和非占据 (粒子) 自旋轨道. 由于矩阵元  $v_{ij} = \langle i|v|j\rangle$  仅当自旋轨道  $i, j$  自旋相同时非零, 所以对于闭壳层体系我们可以将该式重新写为对空间轨道的求和再乘以 2:

$$E_0^{(0)} = 2 \sum_a^{N/2} \epsilon_a^{(0)} \quad (6.44a)$$

$$E_0^{(1)} = 2 \sum_a^{N/2} v_{aa} \quad (6.44b)$$

$$E_0^{(2)} = 2 \sum_{ar}^{N/2} \frac{v_{ar}v_{ra}}{\epsilon_a^{(0)} - \epsilon_r^{(0)}} \quad (6.44c)$$

求和上限  $N/2$  是一个简写记号, 代表求和对于空间轨道而非自旋轨道进行.

### 练习 6.3 请导出

$$E_0^{(2)} = \sum_{ar} \frac{v_{ar}v_{ra}}{\epsilon_a^{(0)} - \epsilon_r^{(0)}}$$

你可以从二阶能量的一般表达式 (式 (6.12)) 开始, 将其用在  $N$ -电子体系中:

$$E_0^{(2)} = \sum_n' \frac{|\langle \Psi_0 | \sum_i v(i) | n \rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}}$$

此处求和遍及除基态外的所有态.

提示: 态  $|n\rangle$  肯定是如下类型的单激发:

$$|\Psi_a^r\rangle = |\chi_a^{(0)} \cdots \chi_{a-1}^{(0)} \chi_r^{(0)} \chi_{a+1}^{(0)} \chi_N^{(0)}\rangle.$$

**练习 6.4** 用式 (6.15) 中的一般表达式计算三阶能量  $E_3^{(0)}$ .

a. 证明

$$B_0^{(3)} = -E_0^{(1)} \sum_n' \frac{\langle \Psi_0 | \mathcal{V} | n \rangle^2}{(E_0^{(0)} - E_n^{(0)})^2} = - \sum_{abr} \frac{v_{aa} v_{rb} v_{br}}{(\epsilon_b^{(0)} - \epsilon_r^{(0)})}$$

b. 证明

$$A_0^{(3)} = \sum_{nm}' \frac{\langle \Psi_0 | \mathcal{V} | n \rangle \langle n | \mathcal{V} | m \rangle \langle m | \mathcal{V} | \Psi_0 \rangle}{(E_0^{(0)} - E_n^{(0)})(E_0^{(0)} - E_m^{(0)})} = \sum_{abrs} \frac{v_{ar} v_{sb} \langle \Psi_a^r | \mathcal{V} | \Psi_b^s \rangle}{(\epsilon_0^{(0)} - \epsilon_n^{(0)})(\epsilon_0^{(0)} - \epsilon_m^{(0)})}$$

c. 证明

$$\begin{aligned} \langle \Psi_a^r | \mathcal{V} | \Psi_b^s \rangle &= v_{rs} && \text{若 } a = b, r \neq s \\ &= -v_{ba} && \text{若 } a \neq b, r = s \\ &= \sum_c v_{cc} - v_{aa} + v_{rr} && \text{若 } a = b, r = s \end{aligned}$$

d. 最后将以上两项合在一起得到

$$E_0^{(3)} = A_0^{(3)} + B_0^{(3)} = \sum_{abrs} \frac{v_{ar} v_{sb} \langle \Psi_a^r | \mathcal{V} | \Psi_b^s \rangle}{(\epsilon_0^{(0)} - \epsilon_n^{(0)})(\epsilon_0^{(0)} - \epsilon_m^{(0)})} - \sum_{abr} \frac{v_{aa} v_{rb} v_{br}}{(\epsilon_b^{(0)} - \epsilon_r^{(0)})}$$

e. 证明对于闭壳层体系

$$E_0^{(3)} = 2 \sum_{ars}^{N/2} \frac{v_{ar} v_{rs} v_{sa}}{(\epsilon_a^{(0)} - \epsilon_r^{(0)})(\epsilon_a^{(0)} - \epsilon_s^{(0)})} - 2 \sum_{abr}^{N/2} \frac{v_{ra} v_{ab} v_{br}}{(\epsilon_a^{(0)} - \epsilon_r^{(0)})(\epsilon_b^{(0)} - \epsilon_r^{(0)})}.$$

在 5.3.2 节, 我们已用不同的多体方法在 Hückel 理论的框架下计算了  $N$  个碳原子组成的环多烯的共振能 ( $N = 2n = 4\nu + 2, \nu = 1, 2, \dots$ ). 为说明给出介绍的方法我们用微扰论重新处理这个问题. 回忆共振能的定义——精确总能量 (对角化 Hückel 矩阵并将所有占据轨道能量相加即得) 与  $N/2 = n$  个局域烯烃单元的能量之差. 第  $i$  个单元的占据 (空穴) 和非占据 (粒子) 轨道分别记为  $|i\rangle, |i^*\rangle$  (见式 (5.137)). 总的 Hamiltonian 可划分为:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V} = \sum_i h_0(i) + \sum_i v(i) \quad (6.45)$$

那么烯烃轨道就是  $h_0$  的本征函数:

$$h_0 |i\rangle = (\alpha + \beta) |i\rangle = \epsilon_i^{(0)} |i\rangle \quad (6.46a)$$

$$h_0 |i^*\rangle = (\alpha - \beta) |i^*\rangle = \epsilon_{i^*}^{(0)} |i^*\rangle \quad (6.46b)$$

为之后参考我们先指出  $\epsilon_i^{(0)} - \epsilon_{j^*}^{(0)} = 2\beta$  无论  $i, j$  如何都成立. 微扰项的非零矩阵元为

$$\langle i | v | (i \pm 1)^* \rangle = \pm \beta / 2 \quad (6.47a)$$

$$\langle i | v | (i \pm 1) \rangle = \beta / 2 \quad (6.47b)$$

$$\langle i^* | v | (i \pm 1)^* \rangle = -\beta/2 \quad (6.47c)$$

$$(6.47d)$$

由于此处多烯是环状的, 第零个烯烃单元就与第  $n$  个单元一样, 第  $(n+1)$  个实际就是第一个. 在该模型中, 本分子的精确共振能为  $2\beta$ , 此外有如下精确共振能的渐近公式:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_R = (4/\pi - 1)N\beta = 0.2732N\beta \quad (6.48)$$

有了微扰项  $v$  的矩阵元 (6.47) 和零阶轨道能量 (6.46) 我们就能计算微扰能量. 先从二阶能量开始. 我们处理的为闭壳层体系, 相应的式子就是 (6.44c):

$$E_0^{(2)} = 2 \sum_{ar} \frac{v_{ar} v_{ra}}{\epsilon_a^{(0)} - \epsilon_r^{(0)}} = 2 \sum_{ar} \frac{\langle a | v | r \rangle \langle r | v | a \rangle}{\epsilon_a^{(0)} - \epsilon_r^{(0)}} \quad (6.49)$$

指标  $a$  取遍全部  $n$  个占据烯烃轨道  $|i\rangle$ , 指标  $r$  取遍总共  $n$  个未占轨道  $|j^*\rangle$ , 因此我们有

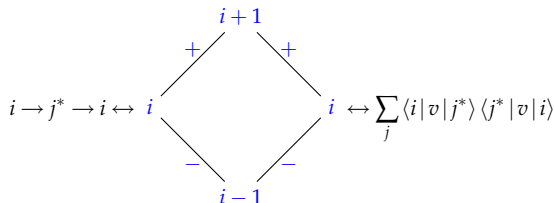
$$E_0^{(2)} = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle i | v | j^* \rangle \langle j^* | v | i \rangle}{\epsilon^{(0)} - \epsilon_{j^*}^{(0)}} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle i | v | j^* \rangle \langle j^* | v | i \rangle \quad (6.50)$$

式中我们用到了轨道能之间的差为  $2\beta$ . 将  $i$  固定, 很容易计算对  $j$  的求和, 因为只有当  $j = i \pm 1$  时矩阵元才不为零 (见式 (6.47a)). 因此

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n \langle i | v | (i+1)^* \rangle \langle (i+1)^* | v | i \rangle + \langle i | v | (i-1)^* \rangle \langle (i-1)^* | v | i \rangle \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n [(\beta/2)^2 + (-\beta/2)^2] = \frac{n\beta}{2} = \frac{N\beta}{4} = 0.25N\beta \end{aligned} \quad (6.51)$$

对于苯来说, 共振能就是  $1.5\beta$ , 是精确值的 0.75 倍 (即 75%). 对于越大的体系, 这个结果的质量就越好. 比较 (6.48) 和 (6.51) 可以看见,  $N$  很大的时候, 二阶能量接近精确结果的 91.5%.

现在用一种略微不同的角度来考虑以上的推导, 这能帮助我们组织更高阶的计算. 在 (6.50) 中固定  $i$ , 计算对  $j$  的求和, 注意到轨道  $i$  仅与  $(i \pm 1)^*$  相互作用. 可用图形表示这一点:



图中正负号代表两轨道之间的矩阵元  $\pm\beta/2$  的正负. 对  $j$  的求和计算如下. 从左侧的  $i$  走到右侧的  $i$  中所有路径都配上一个数字, 该数字就是经过路径所遇到的所有矩阵元之乘积, 然后将所有路径的数字都加起来就完成了. 下面具体说明, 路径  $i \rightarrow (i+1)^* \rightarrow i$  对应的值为  $(+\beta/2)(+\beta/2) = \beta^2/4$ , 而路径  $i \rightarrow (i-1)^* \rightarrow i$  对应的值为  $(-\beta/2)(-\beta/2) = \beta^2/4$ , 那么对每一个  $i$  来说, 对  $j$  的求和就是  $\beta^2/2$ , 这与之前的结果相同.



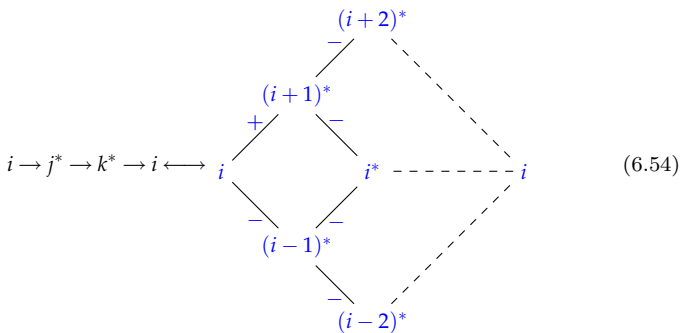
现在来计算三阶能量. 适用于闭壳层体系的表达式在练习 6.4(e) 中给出:

$$E_0^{(3)} = 2 \sum_{ars} \frac{v_{ar} v_{rs} v_{sa}}{(\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_r^{(0)})(\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_s^{(0)})} - 2 \sum_{abr} \frac{v_{ra} v_{ab} v_{br}}{(\varepsilon_a^{(0)} - \varepsilon_r^{(0)})(\varepsilon_b^{(0)} - \varepsilon_r^{(0)})} \quad (6.52)$$

按照计算  $E_0^{(0)}$  时的办法, 该表达式的第一项成为

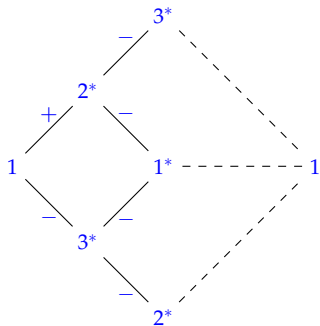
$$\frac{2}{(2\beta)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle i | v | j^* \rangle \langle j^* | v | k^* \rangle \langle k^* | v | i \rangle \quad (6.53)$$

为计算对  $j, k$  的求和, 我们使用上面介绍的图形表示:



此处要注意, 由于  $i$  不与  $i^*, (i+2)^*, (i-2)^*$  相互作用, 这些求和的值必须为零. 类似的说法对 (6.52) 中第二项也成立, 所以我们可以知道三阶共振能为零.

我们走得可能有些急. 实际上, 以上的结果对苯之外的所有情况都成立. 由于研究对象是周环的, 此时  $(i \pm 2)^*$  与  $(i \mp 1)^*$  是一样的. 因此在某个  $i$  下 (比如设为  $= 1i$ ),  $j, k$  求和的图表示为



那么就有两条路径: 1)  $1 \rightarrow 2^* \rightarrow 3^* \rightarrow 1$ , 对应值为  $(\beta/2)(-\beta/2)(-\beta/2) = \beta^3/8$ , 2)  $1 \rightarrow 3^* \rightarrow 2^* \rightarrow 1$ , 对应值为  $(-\beta/2)(-\beta/2)(\beta/2) = \beta^3/8$ . 用 (6.53) 中的结果, 我们可知对  $E_3^{(0)}$  中第一项有

$$\frac{2}{(2\beta)^2} \sum_{i=1}^3 [(\beta^3/8) + (\beta^3/8)] = \frac{3\beta}{8}$$

一完全相同的方式我们能够证明 (6.52) 中第二项等于  $3\beta/8$ , 所以总的三阶能量就成为

$$E_0^{(3)}(\text{苯}) = \frac{3\beta}{4} \quad (6.55)$$

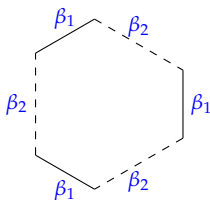
因此苯的共振能算到三阶就是  $2.25\beta$  (即确切值的 113%). 练习 6.7 中用图技术给出了四阶能量

$$E_0^{(4)} = \frac{N\beta}{64} \quad (6.56)$$

那么苯共振能算到四阶就是  $2.34\beta$  (确切值的 117%). 这里的微扰展开看起来不收敛. 事实上它确实会收敛. 不过过程很慢而且是振荡式的. 练习 6.6 进一步研究了这一点. 这里指出一个有趣的事实, 微扰展开在大体系下表现更佳.  $N$  很大时, 至四阶的共振能为  $0.2656\beta((\frac{1}{4} + \frac{1}{64})N\beta)$ , 确切的渐近值为  $0.2732N\beta$  (前者占确切值的 97%).

**练习 6.5** 证明 (6.52) 中第二项在苯中等于  $\frac{3}{8}\beta$ .

**练习 6.6** 考虑一个环状多烯, 有  $N = 4\nu + 2, \nu = 1, 2, \dots$  个碳. 这里并不假设所有的键都等同, 它们的长度不一. 在 Hückel 理论的范畴内, 这意味着这邻接的两个碳之间共振积分并不都等于  $\beta$ , 而是可以取  $\beta_1, \beta_2$ . 举个例子, 对于苯我们有



可以证明这种类型的环烯的确切能量为

$$\mathcal{E}_0 = N\alpha - 2 \sum_{j=-\nu}^{\nu} \left( \beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 \cos \frac{2j\pi}{2\nu+1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(请参见, 如 L. Salem, *Molecular Orbital Theory of Conjugated Systems*, Benjamin, New York, 1966, pp. 498-500). 注意到当  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  时, 由于  $2\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)$  且  $\beta$  是负数, 我们就回归到

$$\mathcal{E}_0 = N\alpha + 4\beta \sum_{j=-\nu}^{\nu} \cos \frac{j\pi}{2\nu+1}$$

这就是 5.3.2 节中的结果. 又注意到  $\beta_1 = \beta$  但  $\beta_2 = 0$  时, 我们有

$$E_0 = N\alpha + N\beta$$

这就是定域烯烃描述下的多烯总能量. 此练习的目的是将确切能量用  $\beta_2/\beta_1$  的幂展开来得到共振能的微扰展开.

a. 证明苯 ( $\nu = 1$ ) 的确切基态能量在这种长短键交替的模型中为

$$\mathcal{E}_0 = 6\alpha + 2(\beta_1 + \beta_2) - 4(\beta_2^2 + \beta_2^2 - \beta_1\beta_2)^{1/2}$$

可以现用一般的表达式写出 Hückel 矩阵, 对角化之后将占据轨道能量相加. 注意当  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  时我们就回归到以前的结果 ( $6\alpha + 8\beta$ ).

b. 设  $\beta_1 = \beta, \beta_2/\beta_1 = x$ , 证明苯的共振能可写作

$$E_R = 4\beta(\frac{1}{2}x - 1 + (1 + x^2 - x)^{1/2})$$

注意当  $x = 0$  时  $E_R = 0$ , 当  $x = 1$  时  $E_R = 2\beta$ , 这结果为精确的.

c. 利用式子

$$(1+y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 + \cdots \quad |y| < 1$$

将  $E_R$  展到  $x$  的四阶项, 由此证明

$$E_R = \beta(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{32}x^4 + \cdots)$$

验证  $n$  阶微扰项 (即  $E_0^{(n)}$ ) 中  $x^n$  的系数如下:

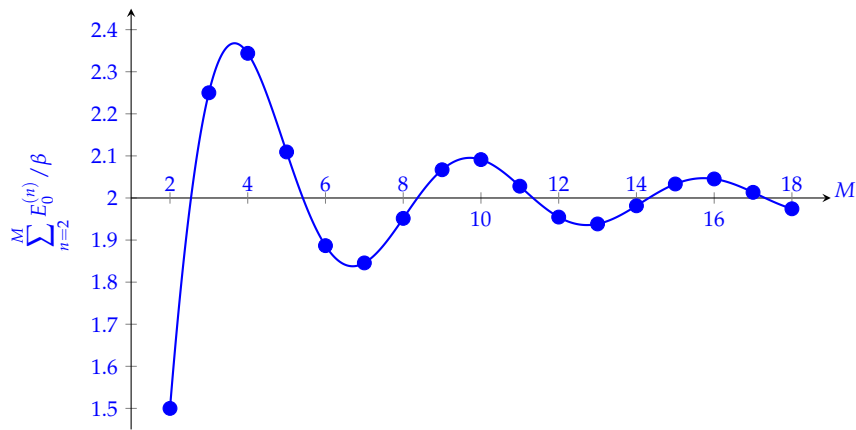
$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= \frac{3}{2}\beta \\ E_0^{(3)} &= \frac{3}{4}\beta \\ E_0^{(4)} &= \frac{3}{32}\beta \end{aligned}$$

注意  $E_0^{(2)}, E_0^{(3)}$  的结果与之前算出的值相符. 这种推导可以解释为什么苯的共振能微扰展开收敛行为较差. 一般地当  $x$  较小时微扰展开很快收敛, 但苯中  $x = 1$ .

下面绘出了到  $M$  阶的共振能对  $M$  的函数. 可以看到它振荡收敛到确切值  $2\beta$ . 以上这种计算  $E_0^{(n)}$  的方法当  $n = 2, 3, 4$  变得很大时就会非常繁琐. 以下的结果是如此计算的: 现证明  $E_0^{(n)} = 4\beta C_n^{-1/2}(\frac{1}{2})$ , 其中  $C_n^{-1/2}$  是  $-\frac{1}{2}$  阶  $n$  次 Gegenbauer 多项式<sup>i</sup>, 然后使用该多项式的递推关系可以证明

$$(n+1)E_0^{(n+1)} = (n - \frac{1}{2})E_0^{(n)} - (n-2)E_0^{(n-1)}.$$

<sup>i</sup>可以参考小谷正雄, 桥本英典 (日) 所著《特殊函数》, p.36. 书中指出 Gegenbauer (盖根鲍尔) 多项式是 Jacobi 多项式的特殊情形, 继续特殊化还可得到 Legendre 多项式和 Tschebyscheff 多项式. 王竹溪《特殊函数》中详细讨论了 Jacobi 多项式及其退化型, 当然也就包括盖根鲍尔多项式 (啊! Hypergeometric Function, My Love!). 另外一处参考就是两位著名物理学家郝柏林和陈式刚教授的论文: 郝柏林, 刘德森, 陈式刚. 长共轭键链的  $\pi$  电子能谱. 物理学报, 1961, 17(7): 303.



6.4 轨道微扰论的图表示

6.5 相关能的微扰展开

6.6 RS 微扰展开的  $N$  依赖性

6.7 相关能微扰展开的图表示

6.7.1 Hugenholtz 图

6.7.2 Goldstone 图

6.7.3 对图求和

6.7.4 什么是 Linked-Cluster 定理?

6.7.5 一些示例性的计算



## Chapter 7

### 单粒子多体 Green 函数

格林函数技术是多体理论中最强大的工具之一。本章就来讨论单粒子多体格林函数 (many body Green's function, MBGF), 它包含了  $N$ -电子体系的电子亲合度 (electron affinity, EA's) 和离子化势 (ionization potential, IP's) 的信息。在本章中我们会看见, 由 MBGF 理论, 我们能将在 Hatree-Fock 近似下通过 Koopman's 定理得出的 EA 和 IP 进行系统地改进提升。之前讨论微扰论时甚至可以借助图形技巧和二次量子化, 但格林函数与之前所讨论过的所有方法都不同 (它更加繁难)。因此, 想对格林函数作一简介, 就必须把要介绍的内容限制在更加基本的范围内。我们不讨论格林函数理论的含时部分, 因此也就无法提及格林含时的物理解释——传播子, 这是相当可惜的。此外, 我们也不讨论双粒子 MBGF, 它可以描述  $N$ -电子体系的激发谱。此后所有的 MBGF 都代表单粒子 MBGF。最后一个, 我们也不会讨论 MBGF 除了描述电离和电子捕获之外的能力, MBGF 除了这两个外还包含  $N$ -电子系统的单粒子密度矩阵和基态能量的信息。即便如此, 我们仍希望本章对格林函数的介绍能使读者对格林函数由一个初步认识, 以为之后更加高级的处理打好基础。

本章开始的第一节会介绍格林函数的源起: 它很自然地出现在求解非齐次微分方程的步骤中。接下来讨论格林函数的性质及在单粒子体系量子力学中的应用。7.2 节中讨论 Hartree-Fock 近似下的多粒子系统, 并介绍 Hartree-Fock 格林函数 (Hartree-Fock Green's function, HFGE)。7.2.1 节讨论如何不借助 Hartree-Fock 近似而仍保留单粒子的物理图像。我们会引入一个依赖于能量的势能——自能 (self-energy), 并介绍改进 Koopmans 定理所得的电离势 (IP) 和电子亲和能 (EA) 的办法。7.3 节将这个办法运用到极小基  $H_2$  和  $HeH^+$  上。7.4 节将之前所得的一些东西推广一下, 并研究微扰论和格林函数在计算多电子体系的 EA 和 IP 时的异同。7.5 节是一些示例性的计算。

#### 7.1 单粒子体系的 Green 函数

假设我们想求解如下矩阵方程中的  $\mathbf{a}$

$$(E\mathbf{1} - \mathbf{H}_0)\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (7.1)$$

其中  $E$  是一参数,  $\mathbf{H}_0$  是  $N \times N$  厄米矩阵,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  都是列矩阵。最直接的办法就是求  $E\mathbf{1} - \mathbf{H}_0$  的逆矩阵 (记为  $\mathbf{G}_0(E)$ ),

$$\mathbf{G}_0(E) = (E\mathbf{1} - \mathbf{H}_0)^{-1} \quad (7.2)$$

那么马上有

$$\mathbf{a} = (E\mathbf{1} - \mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{G}_0(E)\mathbf{b} \quad (7.3a)$$

或写成分量形式

$$a_i = \sum_j (\mathbf{G}_0(E))_{ij} b_j \quad (7.3b)$$

只要求得了逆矩阵  $\mathbf{G}_0(E)$ , 就可按照 (7.3) 式的矩阵乘法来求解 (7.1), 不论  $\mathbf{b}$  是什么. 回忆练习 1.12c, 那里我们证明过  $\mathbf{G}_0(E)$  可用  $\mathbf{H}_0$  的本征矢和本征值:

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{c}^\alpha = E_\alpha^{(0)} \mathbf{c}^\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (7.4)$$

表出:

$$(\mathbf{G}_0(E))_{ij} = \sum_\alpha \frac{c_i^\alpha c_j^{\alpha*}}{E - E_\alpha^{(0)}} \quad (7.5)$$

注意当参数  $E$  等于  $\mathbf{H}_0$  的本征值时,  $\mathbf{G}_0(E)$  的每个元素都会“爆炸”, 或者用更技术一点的称呼,  $\mathbf{H}_0$  的本征值是它们的**极点**. 我们管  $\mathbf{G}_0(E)$  叫  $\mathbf{H}_0$  的格林矩阵. 我们马上就会知道, 微分方程的格林函数就是这个矩阵的连续版本.

**练习 7.1** 考虑如下矩阵

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}$$

证明其对应的格林矩阵

$$\mathbf{G}(E) = (E\mathbf{1} - \mathbf{H}_0 - \mathbf{V})^{-1}$$

满足如下方程

$$\mathbf{G}(E) = \mathbf{G}_0(E) + \mathbf{G}_0(E)\mathbf{V}\mathbf{G}(E)$$

设要求解如下非齐次微分方程的解  $a(x)$ :

$$(E - \mathcal{H}_0)a(x) = b(x) \quad (7.6)$$

$E$  是参数,  $\mathcal{H}_0$  是微分算子, 且是厄米的. 注意这个方程和之前提到的 Rayleigh-Schrödinger 微扰论中求一阶波函数的方程 (见式 (6.9)) 相同. 若已知  $\mathcal{H}_0$  的本征值和本征函数:

$$\mathcal{H}_0 \psi_\alpha(x) = E_\alpha^{(0)} \psi_\alpha(x) \quad (7.7)$$

则可将  $a(x), b(x)$  按本征函数展开

$$a(x) = \sum_\alpha a_\alpha \psi_\alpha(x) \quad (7.8)$$

$$b(x) = \sum_\alpha b_\alpha \psi_\alpha(x) \quad (7.9)$$

$$(7.10)$$

系数  $\{a_\alpha\}$  待定. 由于  $b(x)$  在原式中已给出, 而且集合  $\{\psi_\alpha(x)\}$  是正交归一的, 我们可以方便地得到  $b_\alpha$ : 用  $\psi_\alpha^*$  遍乘式 (7.9) 后对  $x$  积分:

$$b_\alpha = \int dx' \psi_\alpha^*(x') b(x') \quad (7.11)$$

将 (7.8)(7.9) 中的展开带入式 (7.7), 可得

$$\sum_\alpha (E - \mathcal{H}_0) \psi_\alpha(x) = \sum_\alpha a_\alpha (E - E_\alpha^{(0)}) \psi_\alpha(x) = \sum_\alpha b_\alpha \psi_\alpha(x)$$

将上式两边乘以  $\psi_\alpha^*$  并积分, 得到

$$a_\alpha (E - E_\alpha^{(0)}) = b_\alpha$$

最后, 将上式带入式 (7.8), 可得

$$a(x) = \sum_\alpha \frac{b_\alpha}{E - E_\alpha^{(0)}} \psi_\alpha(x) \quad (7.12)$$

到此我们就解决了这个问题. 将这个解重新写一下: 将式 (7.10) 中  $b_\alpha$  的表达式带入, 改换求和与积分的次序, 有

$$a(x) = \int dx' \left[ \sum_\alpha \frac{\psi_\alpha(x) \psi_\alpha^*(x')}{E - E_\alpha^{(0)}} \right] b(x') \quad (7.13)$$

将括号中的量定义为格林函数:

$$G_0(x, x', E) = \sum_\alpha \frac{\psi_\alpha(x) \psi_\alpha^*(x')}{E - E_\alpha^{(0)}} \quad (7.14)$$

式 (7.12) 就能写成:

$$a(x) = \int dx' G_0'(x, x', E) b(x') \quad (7.15)$$

那么, 如果可以求出  $G_0(x, x', E)$ , 则求解非齐次微分方程 (式 (7.6)) 的问题 (包含一个任意的函数  $b(x)$ ) 就约化为一个积分问题 (式 (7.14)). 注意, 这与本节开始所讨论的矩阵问题很相像 (比较式 (7.14) 与式 (7.3b), 以及式 (7.13) 与式 (7.5)). 与前面一样,  $G_0(x, x', E)$  在  $E$  等于  $\mathcal{H}_0$  的本征值处有极点.

接下来寻找  $G_0(x, x', E)$  所遵守的微分方程. 注意到, 若令  $b(x)$  为 Dirac  $\delta$  函数:

$$b(x) = \delta(x - x')$$

则式 (7.14) 给出

$$a(x) = \int dx'' G(x, x'', E) \delta(x - x'') = G_0(x, x', E)$$

也就是说, 所找寻的微分方程为

$$(E - \mathcal{H}_0) G_0(x, x', E) = \delta(x - x') \quad (7.16)$$

上式的矩阵版本就是

$$(E\mathbf{1} - \mathbf{H}_0)(E\mathbf{1} - \mathbf{H}_0)^{-1} = \mathbf{1}$$



**练习 7.2** 考虑如下微分方程:

$$\frac{d^2}{dx^2}a(x) = b(x) \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

用恰当的格林函数求出  $a(x)$ .

a. 请用图形的办法使自己确信,  $d^2/dx^2|x|$  ( $|x|$  为  $x$  的绝对值), 正比与 Dirac  $\delta$  函数, 也就是说, 证明  $d^2/dx^2|x|$  在  $x=0$  时为无穷, 除此外都为 0.

b. 两边对  $x$  积分, 求出比例常数, 证明

$$\frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta(x)$$

c. 由上一条可以知道

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{2}|x-x'|\right) = \delta(x-x')$$

那么算子  $d^2/dx^2$  对应的格林函数就是  $\frac{1}{2}|x-x'|$ . 由式 (7.14) 有

$$a(x) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} dx' |x-x'| b(x')$$

请验证 (只需进行微分就行), 不看 (b) 中的结果, 上式就是待求的非齐次微分方程的解.

设想有这样一算子:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}(x)$$

而且知道  $\mathcal{H}_0$  对应的格林函数. 为求出  $\mathcal{H}$  对应的格林函数:

$$(E - \mathcal{H}_0 - \mathcal{V}(x))G(x, x', E) = \delta(x - x') \quad (7.17)$$

将上式写为与式 (7.6) 相同的形式:

$$(E - \mathcal{H}_0)G(x, x', E) = \delta(x - x') + \mathcal{V}(x)G(x, x', E)$$

那么, 上式的解可立即由式 (7.14) 给出:

$$G(x, x', E) = \int dx'' G_0(x, x'', E) [\delta(x'' - x') + \mathcal{V}(x)G(x, x', E)]$$

或先把对  $\delta$  函数部分的积分求出:

$$G(x, x', E) = G_0(x, x', E) + \int dx'' [G_0(x, x'', E) \mathcal{V}(x)G(x, x', E)] \quad (7.17a)$$

由于积分号下的  $G(x, x', E)$  未知, 上式就叫做关于  $G$  的积分方程. 注意这就是练习 7.1 中所得关于矩阵的结果

$$\mathbf{G}(E) = \mathbf{G}_0(E) + \mathbf{G}_0(E) \mathbf{V} \mathbf{G}(E) \quad (7.17b)$$

的连续版本. 实际上, 式 (7.17b) 就是式 (7.17a) 在某个完备的正交归一集下的矩阵表示. 如果能求出积分方程 (7.17a) 得到  $G$ , 则可以得到  $\mathcal{H}_0 + \mathcal{V}$  的本征值: 只要求出  $G$  爆炸时所对应的  $E$  即可.

最后, 用抽象的算符记号重新推导一下式 (7.17a)(7.17b). 令

$$\begin{aligned} g_0(E) &= (E - \mathcal{H}_0)^{-1} \\ g(E) &= (E - \mathcal{H}_0 - \mathcal{V})^{-1} \end{aligned}$$

那么

$$(g(E))^{-1} = E - \mathcal{H}_0 - \mathcal{V} = (g_0(E))^{-1} - \mathcal{V} \quad (7.19)$$

左边乘以  $g_0(E)$  右边乘以  $g(E)$  并整理, 就得到

$$g(E) = g_0(E) + g_0(E)\mathcal{V}g(E) \quad (7.20)$$

现在对上面所介绍的框架作一个简单的应用. 考虑一个一维运动的粒子, 所受外势为处在零点的吸引的 Dirac  $\delta$  势:

$$\mathcal{V} = -\delta(x) \quad (7.21)$$

现计算自由粒子的格林函数  $G_0(x, x', E)$  并求解积分方程 (7.17a) 求出  $G(x, x', E)$ , 然后求出  $G(x, x', E)$  爆炸时的  $E$ , 如此得到束缚态的本征值. 由于  $\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2}d^2/dx^2$ , 式 (7.15) 成为

$$\left(E + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}\right) G_0(x, x', E) = \delta(x - x') \quad (7.22)$$

上式可以如此求解: 现进对该式进行 Fourier 变换, 然后通过围道积分求出反变换<sup>1</sup>. 结果是

$$G_0(x, x', E) = \frac{1}{i(2E)^{1/2}} \exp(i(2E)^{1/2}|x - x'|) \quad (7.23)$$

其中  $|x|$  是  $x$  的绝对值.

**练习 7.3** 证明式 (7.22) 给出的结果确实满足式 (7.21). 为此读者可能要用到练习 (7.2b) 中所得的关系式以及需验证  $(d/dx|x|)^2 = 1, \forall x$ .

将式 (7.20) 代入式 (7.17a), 可得

$$\begin{aligned} G(x, x', E) &= G_0(x, x', E) - \int dx'' G_0(x, x'', E) \delta(x'') G(x'', x', E) \\ &= G_0(x, x', E) - G_0(x, 0, E) G(0, x', E) \end{aligned} \quad (7.24)$$

注意这个积分方程变成了一个代数方程. 为求得该方程需要知道式右边的  $G(0, x', E)$ . 那么就令  $x = 0$ , 得到

$$G(0, x', E) = G_0(0, x', E) - G_0(0, 0, E) G(0, x', E) \quad (7.25)$$

从中求出  $G(0, x', E)$ , 将结果带回式 (7.23), 可得

$$G(x, x', E) = G_0(x, x', E) - \frac{G_0(x, 0, E)G_0(0, x', E)}{1 + G_0(0, 0, E)} \quad (7.26)$$

利用式 (7.22) 中求得的  $G_0$ , 可得

$$G(x, x', E) = \frac{1}{i(2E)^{1/2}} \left( \exp(i(2E)^{1/2}|x - x'|) - \frac{\exp(i(2E)^{1/2}|x| + |x';|)}{1 + i(2E)^{1/2}} \right) \quad (7.27)$$

最后需要指明, 上式中非零的  $E$  想使  $G$  爆炸, 只有当  $i(2E)^{1/2} = -1$  时才能实现, 那么  $E = -1/2$  就是唯一的一个束缚态的能量. 这个结果实际上是一个一般定理的特例: 一维下, 任何吸引势能只有一个束缚态.

**练习 7.4** 将式 (7.13) 用于  $G(x, x', E)$  可得

$$\phi_n(x)\phi_n^*(x) = \lim_{E \rightarrow E_n} (E - E_n)G(x, x', E)$$

此处  $\phi_n(x)$  是  $\mathcal{H}$  的归一化本征函数, 对应能量为  $E_n$ . 在  $\delta$  势阱下, 证明  $\phi(x) = \exp(-|x|)$ .

**练习 7.5** 验证  $\phi(x) = \exp(-|x|)$  确实式如下哈密顿量的本征函数:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \delta(x) \quad (7.28)$$

计算  $\mathcal{H}\phi$  可只知其本征值为  $-\frac{1}{2}$ .

**练习 7.6** 考虑将格林函数应用到含时量子力学中. 含时 Schrödinger 方程是

$$i \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \mathcal{H} \phi(x, t)$$

a.  $G(x, x', t)$  是如下 Schrödinger 方程的解:

$$i \frac{\partial G(x, x', t)}{\partial t} = \mathcal{H} G(x, x', t)$$

此处  $\mathcal{H}$  只对  $x$  进行操作.  $t = 0$  时的初始条件为

$$G(x, x', 0) = \delta(x - x')$$

请证明, 对于任意  $\psi(x)$ , 下式

$$\phi(x) = \int dx' G(x, x', t) \psi(x')$$

满足含时 Schrödinger 方程, 而且  $\phi(x, 0) = \psi(x)$ . 那么给定任意初始波函数  $\psi(x)$ , 就可以用此方程求出之后时间的波函数. 按这种办法,  $G(x, x', t)$  的作用就是将初始波函数沿着时间“传播”到了之后的时刻, 所以又把它叫作传播子.

b. 为了本章所讨论的理论产生联系, 请证明

$$\begin{aligned} G(x, x', E) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-i) \int_0^{\infty} dt e^{iEt} e^{-\varepsilon t} G(x, x', t) \\ &= -i \int_0^{\infty} dt e^{iEt} G(x, x', t) \end{aligned}$$

是如下方程的解:

$$(E - \mathcal{H})G(x, x', t) = \delta(x - x')$$

参数  $\varepsilon (\varepsilon > 0)$  是一个收敛因子, 在计算的最后会设为 0. 提示: 首先将  $G(x, x', t)$  的微分方程两边乘以  $-ie^{iE-\varepsilon}t$ , 对  $t$  积分, 得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dt e^{iE-\varepsilon}t \frac{\partial G(x, x', t)}{\partial t} = \mathcal{H}G(x, x', E)$$

然后对左边进行分步积分得到:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ e^{(iE-\varepsilon)t} G(x, x', t) \right]_0^{\infty} - (iE - \varepsilon) \int_0^{\infty} dt e^{(iE-\varepsilon)t} G(x, x', t) = \mathcal{H}G(x, x', E)$$

c. 用抽象算子记号重新做一遍这个题目. 算符可以像数字一样操作. 首先, 证明  $g(t) = e^{-i\mathcal{H}t}$  满足微分方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \mathcal{H}g(t)$$

然后证明

$$\begin{aligned} g(E) &= -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dt e^{iEt} e^{-\varepsilon t} g(t) \\ &= \frac{1}{E - \mathcal{H}} = (E - \mathcal{H})^{-1} \end{aligned}$$

## 7.2 单粒子多体 Green 函数

我们以及看到, 在单粒子量子力学中, 格林函数的极点就是哈密顿量的本征值. 为将格林函数推广到多粒子系统中, 先考虑独立粒子图像, 比如 Hartree-Fock:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i f(i)$$

在  $N$ -粒子体系的 Hartree-Fock 近似下, 可以得到一组自旋轨道和对应轨道能量, 方式就是解如下的本征值问题

$$f\chi_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_i \chi_i(\mathbf{x}) \quad (7.29)$$

由于  $\chi_i$  和  $\varepsilon_i$  都是单粒子量, 那么与式 (7.13) 的办法类似, 可以很自然地定义 Hartree-Fock 格林函数:

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) = \sum_i \frac{\chi_i(\mathbf{x}) \chi_i^*(\mathbf{x}')}{E - \varepsilon_i} \quad (7.30)$$

此处求和遍及所有占据和未占的自旋轨道,

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) = \sum_a \frac{\chi_a(\mathbf{x})\chi_a^*(\mathbf{x}')}{E - \varepsilon_a} + G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) = \sum_r \frac{\chi_r(\mathbf{x})\chi_r^*(\mathbf{x}')}{E - \varepsilon_r} \quad (7.31)$$

以 HF 自旋轨道作基, HFGF 的矩阵表示写作:

$$(\mathbf{G}_0(E))_{ij} = \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \chi_i^*(\mathbf{x}) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', E) \chi_j(\mathbf{x}') = \frac{\delta_{ij}}{E - \varepsilon_i} \quad (7.32)$$

因此有

$$\mathbf{G}_0(E) = (E\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \quad (7.33)$$

其中  $\boldsymbol{\varepsilon}$  是一对角矩阵, 其矩阵元就是 HF 轨道的能量. 从现在起当我们说道 MBGF 时, 特指以  $N$ -粒子体系的 HF 轨道为基时 MBGF 的矩阵表示. 当  $(E\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon})$  不存在 (即值为无穷) 时,  $\mathbf{G}_0(E)$  在  $E$  的值处有极点. 只有当行列式为零时一个矩阵的逆才不存在, 因而当

$$\det(E\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$$

时,  $\mathbf{G}_0(E)$  在  $E$  处有极点.

由于  $\boldsymbol{\varepsilon}$  时对角矩阵, 我们有

$$\det(E\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \prod_i (E - \varepsilon_i) = 0 \quad (7.34)$$

那么 HFGF 在 Hartree-Fock 轨道能量处有极点. 这个结果在式 (7.30) 中很明显.

回忆 Koopmans 定理, 该定理称轨道能量与  $N$ -粒子系统的电离势和电子亲和势相关. 特别地, 若  $|\Psi_0\rangle$  是  $N$ -粒子系统的 Hartree-Fock 波函数, 且  $|\Psi_0\rangle$  是  $N-1$ -电子体系的近似波函数, 直接从自旋轨道  $c$  中挪去一个电子就得到该近似波函数. 那么

$$-IP = \varepsilon_c = \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle - \langle \Psi_c | \mathcal{H} | \Psi_c \rangle \quad (7.35)$$

类似地,

$$-EA = \varepsilon_r = \langle \Psi^r | \mathcal{H} | \Psi^r \rangle - \langle \Psi_0 | \mathcal{H} | \Psi_0 \rangle \quad (7.36)$$

其中  $|\Psi^r\rangle$  就是将一个电子放入  $r$  自旋轨道中所得的  $(N+1)$ -粒子系统近似波函数. 如我们在第三章讨论的, 轨道能量并不对应精确的 IP 和 EA, 原因有两个. 第一,  $|\Psi_c\rangle, |\Psi^r\rangle$  不是  $(N-1)$ 、 $(N+1)$ -粒子系统的精确 HF 波函数, 因为它们包含  $N$ -粒子系统的自旋轨道. 一般而言,  $N-1, N, N+1$  系统的 HF 轨道互不相同. 因此  $(N-1)$ -粒子系统 (从  $N$ -粒子系统的  $c$  自旋轨道中挪去一个电子所得) 的 HF 能量是:

$${}^{N-1}E_0(c) = \langle \Psi_c | \mathcal{H} | \Psi_c \rangle + {}^{N-1}E_R(c) \quad (7.37)$$

式中  ${}^{N-1}E_R(c)$  这项叫作弛豫能 (relaxation energy). 第二, 必须考虑  $N$  和  $N \pm 1$  系统的相关能:

$${}^N\mathcal{E}_0 = {}^N_0 + {}^N E_{\text{corr}} \quad (7.34a)$$

对于  $N-1$ -粒子系统 ( $c$  自旋轨道中的电子被挪去):

$${}^{N-1}\mathcal{E}_0(c) = {}^{N-1}E_0(c) + {}^{N-1}E_{\text{corr}}(c) \quad (7.34b)$$

因此, 精确的电离势可以写作:

$$\begin{aligned} -\text{IP} &= {}^N\mathcal{E}_0 - {}^{N-1}\mathcal{E}_0(c) \\ &= \varepsilon_c - {}^{N-1}E_R(c) + ({}^N E_{\text{corr}} - {}^{N-1}\mathcal{E}_0(c)) \end{aligned} \quad (7.37)$$

其中我们使用了式 (7.32a)(7.33)(7.34a,b). 因此欲得到精确的 IP, 则 Koopmans 定理的结果必须用  $(N-1)$ -粒子系统的弛豫能以及  $N$  和  $(N-1)$  粒子系统之间的相关能之差来修正. 电子亲和能也如此.

### 7.2.1 自能

我们已经知道  $\text{HFGF}(\mathbf{G}_0(E))$  的极点就是  $E$  的值, 对应  $N$  和  $(N \pm 1)$ -粒子系统的近似能量差 (即按轨道能量). 不难猜测,  $\text{HFGF}$  是精确  $\text{MBGF } \mathbf{G}(E)$  的近似, 后者的极点对应  $N$  和  $(N \pm 1)$ -粒子系统间的精确能量差. 注意 7.1 节中的“单体”格林函数的极点对应 Hamiltonian 的本征值, 而“多体”格林函数的极点对应本征值间的差值. 若已得到  $\mathbf{G}(E)$ , 或退一步讲, 得到了比  $\mathbf{G}_0(E)$  更好的一个近似, 接下来就能得出比 Koopmans 定理中的 IP 和 EA 更准确的值, 与此同时保留 HF 理论的单粒子图像. 初看读者可能会觉得无法构建这样的精确单粒子理论, 因为 Hamiltonian 中包含双粒子作用. F. Dyson 越过了这个难题: 为此他引入一个依赖能量的有效势, 称作自能. 进一步, 他证明精确的  $\mathbf{G}(E)$  满足如下积分方程 (称作 Dyson 方程):

$$\mathbf{G}(E) = \mathbf{G}_0(E) + \mathbf{G}_0(E)\boldsymbol{\Sigma}(E)\mathbf{G}(E) \quad (7.38)$$

其中  $\boldsymbol{\Sigma}(E)$  是 HF 自旋轨道基下精确自能的矩阵表示. 最后, 将  $\boldsymbol{\Sigma}(E)$  进行逐项微扰展开

$$\boldsymbol{\Sigma}(E) = \boldsymbol{\Sigma}^{(2)}(E) + \boldsymbol{\Sigma}^{(3)}(E) + \cdots \quad (7.39)$$

特别地, 二阶自能  $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}(E)$  的矩阵元为

$$\Sigma_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{ars} \frac{\langle rs \| ia \rangle \langle ja \| rs \rangle}{E + \varepsilon_a - \varepsilon_r - \varepsilon_s} + \frac{1}{2} \sum_{abr} \frac{\langle ab \| ir \rangle \langle jr \| ab \rangle}{E + \varepsilon_r - \varepsilon_a - \varepsilon_b} \quad (7.40)$$

本章余下部分会让读者对这个不寻常的形式找到一些感觉. 将 Dyson 方程 (7.36) 同式 (7.17)(7.19) 比较, 就能知道为什么  $\Sigma(E)$  叫作依赖能量的势. 应当强调, 以上的形式是精确的, 也即, 若用精确的  $\text{mathbf{Sigma}}(E)$  来求解 Dyson 方程得到  $\mathbf{G}(E)$ , 那么  $\mathbf{G}(E)$  的极点就是  $N$ -粒子系统的精确 IP 和 EA. 当然, 我们肯定要做近似, 在 GF 理论中, 需对自能作近似. 若  $\boldsymbol{\Sigma}(E) = 0$ , 那么  $\mathbf{G}(E) = \mathbf{G}_0(E)$ . 如式 (7.37) 所示,  $\boldsymbol{\Sigma}(E)$  的最终结修正是二阶微扰. 这在多体微扰论中我们也曾见过: HF 能量的第一个修正也是二阶的. 事实上, 比较  $E^{(0)}$  (式 (6.72)) 和  $\Sigma_{ij}^{(2)}$  (式 (7.38)) 的表达式, 可以看到一些共同点: 分子上都有两个反对称矩阵元; 分母只有一个因子, 其中含有某些轨道的能量. 7.5 节我们会研究 GF 理论 (使用  $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}(E)$ ) 和二阶微扰论在电离能计算中的关系.

### 7.2.2 Dyson 方程的解

## 7.3 将此框架应用于 $\text{H}_2$ 和 $\text{HeH}^+$

## 7.4 微扰理论和 Green 函数法

## 7.5 一些算例

### 注释

<sup>1</sup> 可以参考的一本书是, D. Rapp. Quantum Mechanics, Holt-Reinhart-Winston, New York, 1971, p. 463.