

CÁLCULO NUMÉRICO  
Versão Octave “format long”

*Allan de Sousa Soares*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Equações Com Uma Variável</b>	
	<b>Localização de Zeros</b>	<b>7</b>
1.1	Introdução . . . . .	7
1.2	Método de Localização de Zeros . . . . .	8
1.3	No Computador . . . . .	10
1.4	Exercícios . . . . .	12
1.5	Respostas dos Exercícios . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Equações Com Uma Variável</b>	
	<b>Método da Bissecção</b>	<b>15</b>
2.1	Método da Bissecção . . . . .	15
2.2	No Computador . . . . .	17
2.3	Exercícios . . . . .	18
2.4	Respostas dos Exercícios . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Equações Com Uma Variável</b>	
	<b>Método do Ponto Fixo</b>	<b>20</b>
3.1	Introdução . . . . .	20
3.2	Algoritmo Para o Método da Iteração de Ponto Fixo . . . . .	21
3.3	Convergência do Método do Ponto Fixo . . . . .	23
3.4	No Computador . . . . .	25
3.5	Exercícios . . . . .	25
3.6	Respostas dos Exercícios . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Equações Com Uma Variável</b>	
	<b>Método de Newton</b>	<b>28</b>
4.1	Introdução . . . . .	28
4.2	No Computador . . . . .	33
4.3	Exercícios . . . . .	34
4.4	Respostas dos Exercícios . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Equações Com Uma Variável</b>	
	<b>Método da Secante</b>	<b>37</b>
5.1	Método da Secante . . . . .	37
5.2	No Computador . . . . .	40
5.3	Exercícios . . . . .	40

5.4	Respostas dos Exercícios . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Equações Com Uma Variável</b>	
	<b>Zeros de um Polinômio</b>	<b>42</b>
6.1	Zeros de um Polinômio . . . . .	42
6.2	No Computador . . . . .	45
6.3	Multiplicidade de um Zero . . . . .	46
6.4	Exercícios . . . . .	47
6.5	Respostas dos Exercícios . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Interpolação Polinomial</b>	
	<b>Polinômio de Lagrange</b>	<b>48</b>
7.1	Introdução . . . . .	48
7.2	Polinômio Interpolador de Lagrange . . . . .	49
7.3	No Computador . . . . .	53
7.4	Exercícios . . . . .	54
7.5	Respostas dos Exercícios . . . . .	55
<b>8</b>	<b>Interpolação Polinomial</b>	
	<b>Diferenças Divididas Finitas</b>	<b>56</b>
8.1	Diferenças Divididas Finitas . . . . .	56
8.2	Fórmula do Polinômio Interpolador . . . . .	57
8.3	No Computador . . . . .	58
8.4	Exercícios . . . . .	59
8.5	Respostas dos Exercícios . . . . .	60
<b>9</b>	<b>Teoria da Aproximação</b>	
	<b>Aproximação Discreta dos Mínimos Quadrados</b>	<b>61</b>
9.1	Introdução . . . . .	61
9.2	Mínimos Quadrados . . . . .	61
9.3	No Computador . . . . .	65
9.4	Exercícios . . . . .	68
9.5	Respostas dos Exercícios . . . . .	68
<b>10</b>	<b>Integração</b>	
	<b>Regra do Trapézio</b>	<b>69</b>
10.1	Introdução . . . . .	69
10.2	Regra dos Trapézios . . . . .	69
10.3	Generalizando $n + 1$ pontos . . . . .	70
10.4	No Computador . . . . .	74
10.5	Exercícios . . . . .	75
10.6	Respostas dos Exercícios . . . . .	75
<b>11</b>	<b>Integração</b>	
	<b>Regra de Simpson</b>	<b>76</b>
11.1	Regra de Simpson . . . . .	76

11.2	Generalizando $n + 1$ pontos . . . . .	76
11.3	No Computador . . . . .	78
11.4	Exercícios . . . . .	79
11.5	Respostas dos Exercícios . . . . .	79
<b>12</b>	<b>Integração</b>	
	<b>Quadratura Gaussiana</b>	<b>80</b>
12.1	Introdução . . . . .	80
12.2	No Computador . . . . .	82
12.3	Exercícios . . . . .	82
12.4	Respostas dos Exercícios . . . . .	83
<b>13</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias</b>	
	<b>Método de Euler</b>	<b>84</b>
13.1	Problema de Valor Inicial . . . . .	84
13.2	Método de Euler . . . . .	85
13.3	No Computador . . . . .	88
13.4	Exercícios . . . . .	89
13.5	Respostas dos Exercícios . . . . .	89
<b>14</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias</b>	
	<b>Métodos de Runge-Kutta</b>	<b>91</b>
14.1	Métodos de Runge-Kutta . . . . .	91
14.2	No Computador . . . . .	93
14.3	Exercícios . . . . .	94
14.4	Respostas dos Exercícios . . . . .	95
<b>15</b>	<b>Sistemas Lineares</b>	
	<b>Método Direto de Gauss</b>	<b>97</b>
15.1	Introdução . . . . .	97
15.2	Método De Gauss . . . . .	98
15.3	No Computador . . . . .	99
15.4	Exercícios . . . . .	101
15.5	Respostas dos Exercícios . . . . .	101
<b>16</b>	<b>Sistemas Lineares</b>	
	<b>Método Direto da Decomposição LU</b>	<b>102</b>
16.1	Decomposição LU . . . . .	102
16.2	No Computador . . . . .	103
16.3	Exercícios . . . . .	105
16.4	Respostas dos Exercícios . . . . .	105
<b>17</b>	<b>Sistemas Lineares</b>	
	<b>Método Iterativo de Jacobi</b>	<b>106</b>
17.1	Introdução . . . . .	106
17.2	Método Iterativo de Jacobi . . . . .	106

17.3	No Computador . . . . .	109
17.4	Exercícios . . . . .	110
17.5	Respostas dos Exercícios . . . . .	110
<b>18</b>	<b>Sistemas Lineares</b>	
	<b>Método Iterativo de Gauss-Seidel</b>	<b>111</b>
18.1	Método Iterativo de Gauss-Seidel . . . . .	111
18.2	No Computador . . . . .	112
18.3	Exercícios . . . . .	113
18.4	Respostas dos Exercícios . . . . .	113
<b>19</b>	<b>Sistemas Lineares</b>	
	<b>Número Condicional</b>	<b>115</b>
19.1	Número Condicional . . . . .	115
19.2	No Computador . . . . .	119
19.3	Exercícios . . . . .	120
19.4	Respostas dos Exercícios . . . . .	120

# Organização Deste Material

A organização do conteúdo deste material foi cuidadosamente pensada a promover um aprendizado significativo a cerca dos assuntos abordados. Aqui seguem algumas dicas de como se usá-lo:

1. **Teoremas** e **Definições** são, em geral seguidos de **Exemplos**. Recomenda-se que o leitor entenda bem tais resultados explicitando-os na resolução de um problema assim como será apresentado neste material. Se possível, “imite” até conseguir um texto próprio.
2. Boa parte dos **Teoremas** encontram-se demonstrados ao longo do texto. É de fundamental importância tentar entender cada uma delas. Contudo, demonstrações em alguns casos (ou em muitos) são complicadas e usam de artifícios mirabolantes. Não se preocupe em entender na sua totalidade, tente observar os artifícios usados nas partes mais importantes. *“O cérebro que se abre para uma demonstração é um cérebro melhorado.”*
3. Leia atentamente a solução dos exemplos, vejam como se emprega o jargão da matéria. Notem que a solução não é simplesmente apresentar um cálculo, mas sim apresentar sua explicação passo-a-passo. *Seu professor fica emocionado quando você discorre textualmente em uma questão de matemática. “Colega, olha só como meu aluno resolveu esta questão. Ele escreveu uma bela resposta.”*
4. Nos tópicos **Revisando** relembro alguns conceitos muito provavelmente já vistos pelo leitor bem como alguns outros fora do escopo da matéria mas que aparecem vez ou outra no texto.
5. Nos tópicos **Palavras dos Mestres** costumo “esticar” a explicação de alguns pontos que julgo importantes para o leitor.
6. Ao longo do texto são expostos alguns **Algoritmos** e posteriormente **Programas** tendo em vista o foco computacional da matéria para cursos da área de exatas. *Aprender a matéria sem a preocupação de implementar somente para os professores de matemática hehehe. Meu caso! Ainda assim, busco entender as coisas usando a máquina e suas facilidades.*
7. A maioria dos cálculos desta apostila foi realizada por meio do software Octave usando o comando “format long” que exibe valores em tela com 16 dígitos. Contudo, não é obrigatório que o aluno use este mesmo software para os cálculos. Uma calculadora comum com 8 – 11 casas decimais encontra praticamente os mesmos valores. Podem acontecer pequenas diferenças devido a erros de arredondamento, porém, na imensa maioria dos exemplos, não são significativas. Pode acontecer de se calcular uma iteração a mais usando um instrumento de cálculos menos preciso.

# Plano de Aula

## Aula 1

**Instituição:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

**Professor:** Allan de Sousa Soares

**Disciplina:** Cálculo Numérico

**Conteúdo Pragmático:** Equações Com Uma Variável

**Tema da Aula:** Localização de Zeros

**Duração:** 100 min

**Objetivos:**

- Entender a relação entre continuidade e mudança de sinal de uma função;
- Construir um algoritmo para o método de localização de zeros;
- Aplicar o algoritmo do método de localização de zeros.

**Metodologia:**

- Aula expositiva participada.

**Recursos Didáticos Utilizados:**

- Apostila;
- Pincel e quadro branco;
- Datashow;
- Softwares Octave e GeoGebra.

**Avaliação:**

- Observação;
- Resolução de exercícios.

**Referência Principal:**

[1] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D.: Análise Numérica. 10<sup>a</sup> ed. Editora CENGAGE Learning, 2015.

**Bibliografia**

[2] BARROSO, L. C. et al. Cálculo Numérico (Com Aplicações). 2 ed. São Paulo: Harbra, 1987.

[3] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

# Capítulo 1

## Equações Com Uma Variável

### Localização de Zeros

#### 1.1 Introdução

Um dos problemas mais importantes em matemática é o de se obter os zeros de uma função real. Em outras palavras, dada uma função  $f(x)$ , gostaríamos de encontrar  $p$  tal que  $f(p) = 0$ . Por exemplo, a função  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  tem dois zeros reais,  $p_1 = 2$  e  $p_2 = 3$ .

**Definição 1.** Dizemos que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em um ponto  $c$ , se para toda sequência  $(x_n)$  em  $I$ , tivermos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c).$$

**Revisando 1.** A grosso modo, dizemos que  $f(x)$  é contínua se, ao traçarmos seu gráfico com um lápis não o levantarmos do papel. A função  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = x^2$  é contínua. Por outro lado, a função  $g : [-1, 0) \cup (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = \frac{1}{x}$  é descontínua uma vez que em  $x = 0$  precisamos dar um salto para traçarmos o outro lado (veja a Figura 1.1). Em [8], pg. 129 o Teorema 7 apresenta as principais funções contínuas (polinômios, exponenciais, senos, cossenos etc). *Revise!*

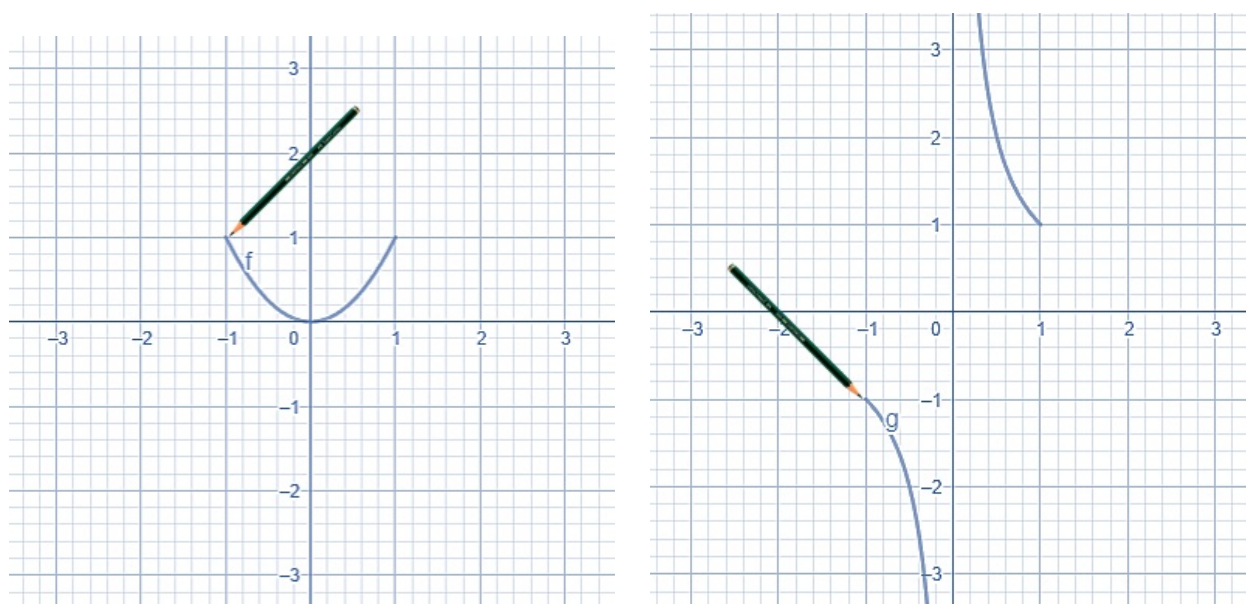


Figura 1.1: Função Contínua e Função Descontínua.



Considerando funções contínuas em um intervalo fechado  $[a, b]$ , o Teorema 1, dado seguir, estabelece condições que asseguram a existência de ao menos um zero pertencente ao intervalo aberto  $(a, b)$ .

**Teorema 1.** Se  $f(x)$  é uma função contínua definida no intervalo  $[a, b]$  tal que  $f(a)f(b) < 0$ , então  $f(x)$  possui pelo menos um zero em  $(a, b)$ .

*Demonstração.* Aplicação direta do Teorema do Valor Intermediário ([8], pg. 131):

**Revisando 2.** O enunciado do Teorema do Valor Intermediário é dado a seguir:

**Teorema 2.** Suponha que  $f$  seja contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  e seja  $N$  um número qualquer entre  $f(a)$  e  $f(b)$  em que  $f(a) \neq f(b)$ . Então existe um número  $c$  em  $(a, b)$  tal que  $f(c) = N$ .

Note que:

- (i)  $f(x)$  é contínua em  $[a, b]$ ;
- (ii) Se  $f(a)f(b) < 0$ , então  $f(a) \neq f(b)$ ;
- (iii)  $N = 0$  está entre  $f(a)$  e  $f(b)$ .

Temos, portanto, todas as hipóteses do Teorema do Valor Intermediário satisfeitas. Logo, existe  $c$  (no nosso caso  $p$ ) em  $(a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ . □

**Exemplo 1.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^5 - 4x + 1$  é tal que  $f(-1) = 4$  e  $f(1) = -2$ . Por se tratar de uma função polinomial esta é contínua (*Se lembra que falei para dar uma revisada nas principais funções contínuas? Consulte o Teorema 7 em [8], pg. 129*). Além disso,  $f(-1)f(1) < 0$ . Portanto, o Teorema 1 assegura que existe ao menos um zero no intervalo  $(-1, 1)$ . Para visualizarmos melhor a situação, utilizamos o GeoGebra (use o software que preferir) para esboçar do gráfico de  $f$  conforme expresso na Figura 1.2:

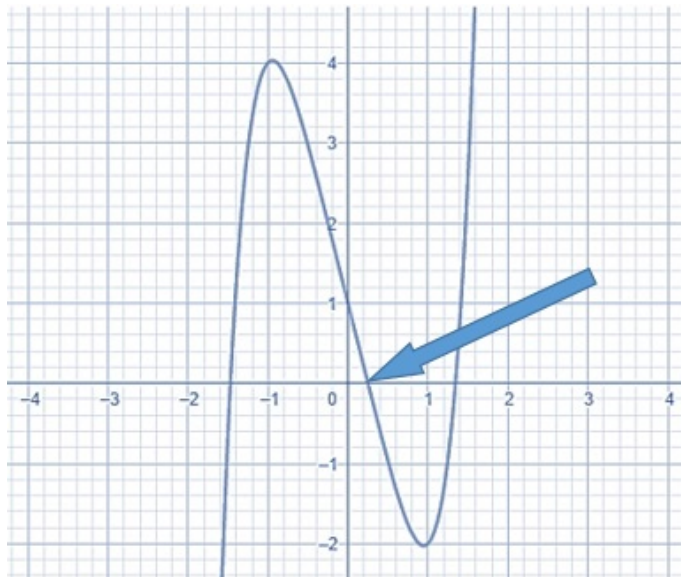


Figura 1.2: Gráfico de  $f(x) = x^5 - 4x + 1$ .

Note que há mais de um zero! *Leia Teoremas e Definições com muito cuidado.* Em caso de dúvida na utilização do GeoGebra consulte o professor.

## 1.2 Método de Localização de Zeros

Veremos agora um método para isolar zeros de uma função em intervalos. Estamos interessados em obter intervalos contendo apenas um único zero.

Considere o gráfico da função  $f(x)$  a seguir (Figura 1.3):

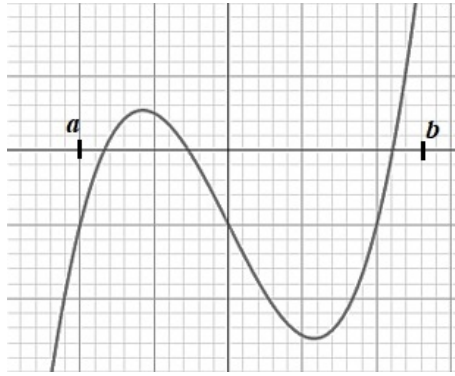


Figura 1.3: Função Com Três Zeros Observáveis.

Veja que  $f(x)$  possui três zeros em  $[a, b]$ . Gostaríamos de encontrar uma partição deste intervalo, digamos  $\mathbb{P} = \{p_1 = a, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}, p_n = b\}$ , em que  $p_j = p_{j-1} + \gamma$  para  $\gamma$  escolhido arbitrariamente, de tal modo que cada zero de  $f(x)$  seja isolado em um intervalo  $(p_{j-1}, p_j)$ . Assim, temos expressa, na Figura 1.4 uma partição de  $[a, b]$  que atende às nossas exigências.

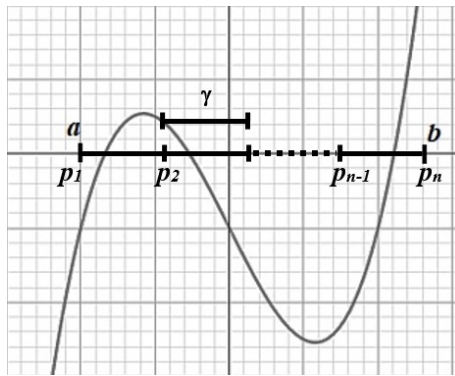


Figura 1.4: Particionamento do Intervalo  $[a, b]$ .

O Algoritmo 1, dado a seguir, nos fornecerá passos para particionarmos um intervalo  $[a, b]$  de uma função contínua  $f(x)$ . Caso haja ao menos um zero em um subintervalo presente na partição o programa indicará este intervalo.

**Algoritmo 1.** Localização de Zeros: Para determinar intervalos contendo zeros de uma função contínua  $f$ .

**ENTRADAS:** extremidades  $a, b$ ; número de subintervalos da partição  $n$ .

**SAÍDA:** possível saída de intervalos contendo zeros ou até mesmo zeros de  $f$

**Passo 1:** Faça  $\gamma = \frac{b-a}{n}$ ;

**Passo 2:** Enquanto  $a \leq b$ , execute os Passos 3 a 5;

**Passo 3:** Se  $f a = 0$ , então

SAÍDA ( $a$ ); (“ $a$  é um zero de  $f$ .”)

**Passo 4:** Faça  $f c = f(a + \gamma)$ ;

Faça  $a = a + \gamma$ ;

**Passo 5:** Se  $f a * f c < 0$ , então

SAÍDA ( $a$ ); (“Existe um zero entre  $a$  e  $a + \gamma$ .”)

**Exemplo 2.** Considere a função  $f(x) = 16x^3 - 22x - 5$  no intervalo  $[-2, 2]$ . Tomando uma partição com  $\gamma = \frac{1}{2}$ , podemos construir a seguinte tabela

$\mathbb{P}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(\mathbb{P})$	-	-	+	+	-	-	-	+	+

Logo,  $f(x)$  possui, pelo Teorema 1, zeros nos subintervalos  $[-\frac{3}{2}, -1]$ ,  $[-\frac{1}{2}, 0]$  e  $[1, \frac{3}{2}]$ . O gráfico apresentado na Figura 1.5 nos ajudará a visualizar melhor a situação.

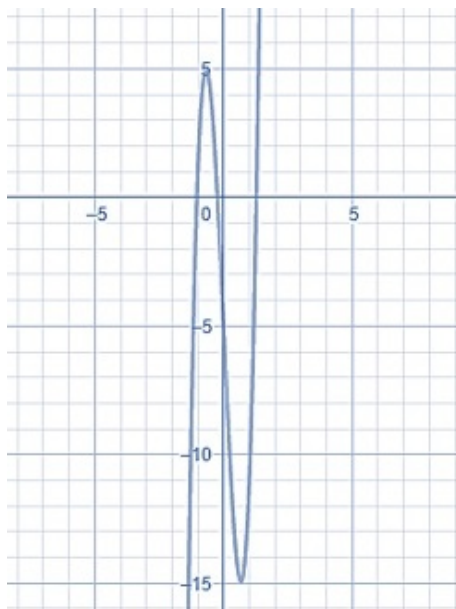


Figura 1.5: Gráfico de  $f(x) = x^3 - 22x - 5$ .

**Palavras dos Mestres 1.** Note que, no Exemplo 2 obtivemos três intervalos contendo zeros de  $f$ . Como saber se isolamos todos os zeros? No exemplo em questão o sabemos por conta de conhecermos uma certa proposição sobre os polinômios: “*Todo polinômio não constante de grau  $n$  possui exatamente  $n$  raízes complexas (ou reais), não necessariamente todas distintas*” (Teorema 10). Como  $f$  é um polinômio de grau 3, temos que este deve ter exatamente 3 raízes reais ou complexas. Sendo assim, todos os zeros de  $f$  foram isolados. Contudo, em linhas gerais, nem sempre é possível saber se isolamos ou não todos os zeros de uma função qualquer. A simples mudança de sinal de uma função contínua  $f$  nos extremos de um intervalo não garante que haja apenas um único zero neste intervalo. Experimente outros valores de  $\gamma$  maiores que  $\frac{1}{2}$  no Exemplo 2. Além disso, se considerarmos, por exemplo, o polinômio  $g(x) = x^3 - 1$  perceberemos que este mudará de sinal apenas uma vez em  $\mathbb{R}$  mesmo tendo três raízes, uma real,  $x = 1$  e duas complexas,  $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$  e  $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ . O uso de softwares de esboço gráfico podem ser uma mão na roda para estimarmos um intervalo contendo um zero de uma função  $f$  ou até mesmo estimarmos um zero de  $f$ . *A ideia aqui é saber as minas que tem ouro antes de ir minerá-las!*

## 1.3 No Computador

Apresentaremos a seguir a implementação do Método de Localização de Zeros em Linguagem Octave. A implementação se baseia no Algoritmo 1 descrito anteriormente.

**Programa 1.** Localização de Zeros

```
function[ ] = mlz(f,a,b,n)
    gamma = (b - a)/n;
    while a <= b
        fa = f(a);
        if fa == 0
            printf(" %d é um zero de f \n", a)
        endif
        fc = f(a + gamma);
        a = a + gamma;
        if fa * fc < 0
            printf("Existe ao menos um zero entre %d e %d \n", a - gamma,a);
        endif
    endwhile
endfunction
```

Vejamos como fica a solução do Exemplo 2 usando o Programa 1. Neste caso, executaremos a função fazendo-a ser incorporada às funções disponíveis e então lançamos mão do seguinte comando:

$$mlz(f = @(x)16 * x^3 - 22 * x - 5, -2, 2, 8)$$

Vejamos as telas do Editor e da Janela de Comandos:

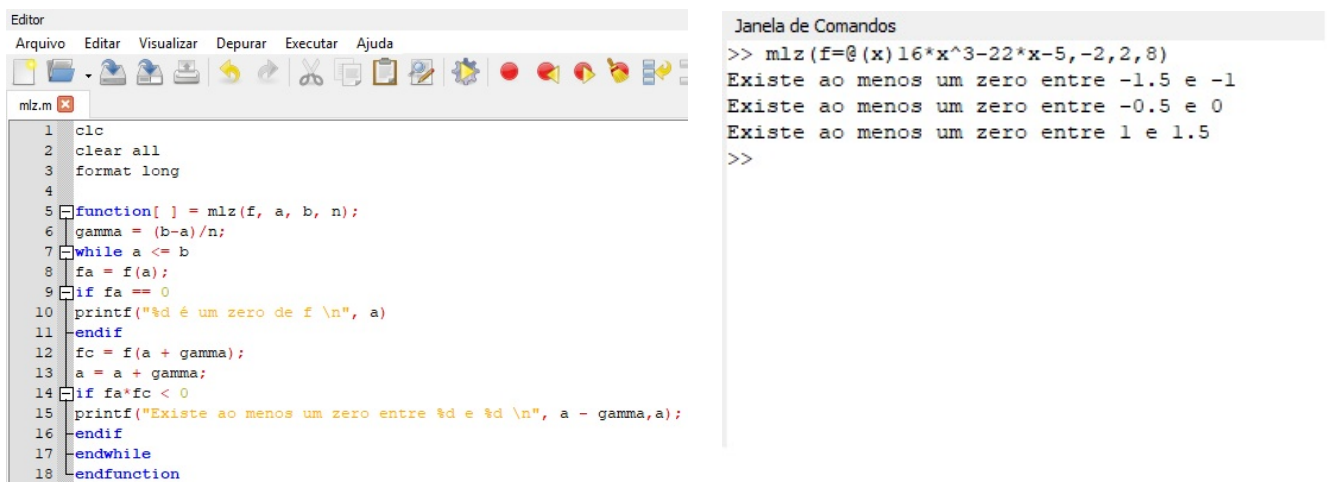


Figura 1.6: Editor e Janela de Comandos.

**Observação 1.** Os comandos “`clc`”, “`clear all`” servem para apagar a tela e apagar variáveis armazenadas na memória. É interessante colocá-los antes de todos os programas para evitar confusões com uma tela cheia e variáveis antigas armazenadas.

Aprimore o Programa 1 para exibir uma mensagem caso a função  $f$  inserida não possua nenhum zero no intervalo  $[a, b]$ . Em caso de dúvida, consulte o professor.

**Palavras dos Mestres 2.** Softwares gráficos podem nos fornecer uma estimativa visual dos zeros reais de uma função. Contudo, nos será exigido o conhecimento do zero com certa precisão (número de algarismo significativos). Neste caso, ao olharmos para o gráfico de uma função teremos uma ideia do zero, mas dificilmente esta será uma boa aproximação de tal. Se uma função tem um zero dado por  $x = 22.34122112$  e, visualmente, nossos olhos apontam para  $x \approx 22.3$  ou algo “próximo” já é um bom começo, mas ainda muito longe do valor exato. Em muitas situações precisaremos refinar o resultado para obtermos uma resposta mais precisa. Um exemplo que costumo sempre lembrar ao tratarmos de aproximações grosseiras é o seguinte: imagine que um valor “aproximado a olho nú” será usado em um cálculo posterior: Por exemplo, ao calcularmos  $2^{22}$ ,  $2^{22.3}$  e  $2^{22.34}$  como uma tentativa de obtermos  $2^{22.34122112}$  (suponha este sendo o valor exato) temos:

(i)  $2^{22} = 4194304$

Erro de entrada  $(1 - \frac{22}{22.34122112}) \times 100\% = 1.527316336771478\%$

Erro de saída  $(1 - \frac{4194304}{5313463.442179964}) \times 100\% = 21.06271087320786\%$

(ii)  $2^{22.3} = 5163793.937470239$

Erro de entrada  $(1 - \frac{22.3}{22.34122112}) \times 100\% = 0.184507014091084\%$

Erro de saída  $(1 - \frac{5163793.937470239}{5313463.442179964}) \times 100\% = 2.816797486957401\%$

(iii)  $2^{22.34} = 5308967.945115920$

Erro de entrada  $(1 - \frac{22.34}{22.34122112}) \times 100\% = 5.465771067036940e - 03\%$

Erro de saída  $(1 - \frac{5308967.945115920}{5313463.442179964}) \times 100\% = 8.460577762438026e - 02\%$

(iv)  $2^{22.3412112} = 5313463.442179964$

Note, em (i), que um erro de aproximadamente 1.52% na entrada resultou em um erro de aproximadamente 21.06% na saída, isto é, o erro aumentou praticamente 10 vezes...

Note, em (ii), que um erro de aproximadamente 0.18% na entrada resultou em um erro de aproximadamente 2.82% na saída, isto é, o erro aumentou praticamente 10 vezes...

As coisas, aparentemente, só começam melhorar a partir do momento em que consideramos duas casas ou mais a partir do ponto.

Em cálculo numérico, tão importante quanto o processo é o cuidado com a precisão da resposta. Portanto, evite arredondar cálculos em passos intermediários. Arredonde somente as respostas finais tendo em vista a precisão dos instrumentos de medida utilizados (conforme Observação ??).

Utilizamos acima a fórmula do erro ( $E_R$ ) relativo:

$$E_R = \left(1 - \frac{\text{valor estimado}}{\text{valor exato}}\right) \times 100\%$$

## 1.4 Exercícios

**Exercício 1.** Considere as funções definidas nos intervalos indicados. Determine, se existir, subintervalos contendo algum zero:

a)  $f(x) = x^3 - 7x + 6$ ,  $[-4, 3]$ ,  $\gamma = 0.7$

b)  $f(x) = x^5 + 8x^2 - 8$ ,  $[-1, 1]$ ,  $\gamma = 0.4$

c)  $f(x) = e^x - 3x^2 + 2$ ,  $[-2, 2]$ ,  $\gamma = 0.5$

d)  $f(x) = x^4 + 1$ ,  $[-5, 5]$ ,  $\gamma = 0.5$

**Exercício 2.** Considerando a função  $f(x) = 1000x^3 - 600x^2 + 110x - 6$ , no intervalo,  $[-0.25, 0.75]$  encontre,

a) usando  $\gamma = 0.5$ , subintervalo(s) contendo algum zero.

b) usando  $\gamma = 0.2$ , subintervalo(s) contendo algum zero.

c) usando  $\gamma = 0.1$ , subintervalo(s) contendo algum zero.

d) o que você pode notar à medida que se diminuía  $\gamma$ , isto é a medida que cada partição do intervalo  $[-0.25, 0.75]$  era refinada?

**Exercício 3.** Note que a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  é tal que  $f(-1) \cdot f(1) < 0$ . Podemos afirmar que  $f(x)$  possui ao menos um zero no intervalo  $[-1, 1]$ ?

**Exercício 4.** É possível que uma função contínua  $f(x)$ , definida em um intervalo  $[a, b]$ , tenha algum zero em  $[a, b]$ , no caso em que  $f(a) \cdot f(b) > 0$ ?

## 1.5 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 1.** a)  $[-3.3, 2.6]$ ,  $[0.9, 1.6]$ ,  $[1.6, 2.3]$ , b)  $[0.6, 1]$ , c)  $[-1, -0.5]$ ,  $[1, 1.5]$ , d) não há zeros nesta partição.

**Resposta do Exercício 2.** a)  $[0.25, 0.75]$ , b)  $[-0.05, 0.15]$ , c)  $[0.25, 0.35]$ ,  $[-0.05, 0.05]$ , d) Se diminuirmos  $\gamma$  mais ainda, pode ser que encontremos mais um zero de  $f(x)$  em algum subintervalo do intervalo  $[-0.25, 0.75]$ . O fato de refinarmos uma partição não é garantia de que obteremos um subintervalo contendo ao menos um zero (real), ou aumentemos o número de subintervalos nos quais tenhamos ao menos zero (real). Isso pode ser visto se tentarmos refinar a partição dada no item d) do exercício anterior, uma vez que esta função  $f(x) = x^4 + 1$  não possui zero real algum (verifique!). Um outro caso em que o refinamento de nada adianta, é aquele em que estamos procurando zeros de uma função num dado intervalo onde esta não possui zeros, como por exemplo, se tentarmos refinar uma partição qualquer do intervalo  $[-1, 1]$  considerando  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ . Não obteremos subintervalo algum contendo zeros, uma vez que os zeros de  $f(x)$  são 2 e 3 (função polinomial de grau 2).

**Resposta do Exercício 3.** Resposta: Não, muito embora somos tentados a usar o Teorema 1, o que não pode ser feito, uma vez que a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  não é contínua em  $x = 0 \in [-1, 1]$ .

**Resposta do Exercício 4.** Sim, basta considerar a função  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  no intervalo  $[0, 4]$ . Ela é tal que  $f(0) \cdot f(4) = 6 \cdot 2 = 12 > 0$ . Contudo esta função tem dois zeros reais,  $p_1 = 2$  e  $p_2 = 3$ , ambos pertencentes ao intervalo  $[0, 4]$ .

# Plano de Aula

## Aula 2

**Instituição:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

**Professor:** Allan de Sousa Soares

**Disciplina:** Cálculo Numérico

**Conteúdo Pragmático:** Equações Com Uma Variável

**Tema da Aula:** Método da Bisseção

**Duração:** 100 min

**Objetivos:**

- Apresentar o método da bisseção;
- Construir um algoritmo para o método da bisseção;
- Aplicar o algoritmo para o método da bisseção.

**Metodologia:**

- Aula expositiva participada.

**Recursos Didáticos Utilizados:**

- Apostila;
- Pincel e quadro branco;
- Datashow;
- Softwares Octave.

**Avaliação:**

- Observação;
- Resolução de exercícios.

**Referência Principal:**

[1] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D.: Análise Numérica. 10<sup>a</sup> ed. Editora CENGAGE Learning, 2015.

**Bibliografia**

[2] BARROSO, L. C. et al. Cálculo Numérico (Com Aplicações).2 ed. São Paulo: Harbra, 1987.

[3] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

# Capítulo 2

## Equações Com Uma Variável

### Método da Bisseção

#### 2.1 Método da Bisseção

Suponha que  $f$  seja contínua no intervalo  $[a, b]$ , com  $f(a)$  e  $f(b)$  possuindo sinais opostos. Decorre do Teorema 1 que existe  $p \in (a, b)$  para o qual  $f(p) = 0$ . O procedimento a seguir funciona nos casos em que se tem mais de uma raiz no intervalo  $(a, b)$ , porém assumiremos, por simplificação, que a raiz nesse intervalo é única. Este método consiste em diminuirmos o intervalo  $[a, b]$  em outros iguais à metade do anterior e, em cada passo, localizar qual dos meio-intervalos contém  $p$ .

Para iniciar, considera-se  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$  e toma-se  $p_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$  (ponto médio de  $[a, b]$ ). Se  $f(p_1) = 0$ , então  $p = p_1$ , e temos encontrado a solução. Se  $f(p_1) \neq 0$ , então  $f(p_1)$  tem mesmo sinal que  $f(a_1)$  ou  $f(b_1)$ . Se  $f(a_1) \cdot f(p_1) > 0$  então  $p \in (p_1, b_1)$  e fazemos  $a_2 = p_1$ ,  $b_2 = b_1$ . Se  $f(a_1) \cdot f(p_1) < 0$ ,  $p \in (a_1, p_1)$ , e fazemos  $a_2 = a_1$ ,  $b_2 = p_1$ . Reaplicamos o processo em  $[a_2, b_2]$ ,  $\dots$ ,  $[a_n, b_n]$ ,  $\dots$  até obtermos  $f(p) = 0$  ou  $|a_n - b_n| < \delta$ , em que  $\delta$  é a precisão desejada.

**Algoritmo 2.** Bisseção: Para determinar uma solução de  $f(x) = 0$ , dada a função  $f$  contínua no intervalo  $[a, b]$ , onde  $f(a)$  e  $f(b)$  tem sinais opostos.

**ENTRADAS:** extremidades  $a$ ,  $b$ ; tolerância  $TOL$ ; número máximo de interações  $N$ .

**SAÍDA:** solução aproximada  $p$  ou mensagem de erro

**Passo 1:** Faça  $i = 1$ ;

$$fa = f(a);$$

**Passo 2:** Enquanto  $i \leq N$ , execute os Passos 3 a 6;

**Passo 3:** Faça  $p = a + (b - a)/2$ ; (*Cálculo de  $p_i$* )

$$fp = f(p).$$

**Passo 4:** Se  $fp = 0$  ou  $(b - a)/2 < TOL$ , então

SAÍDA ( $p$ ); (*“Procedimento concluído com sucesso.”*)

PARE.

**Passo 5:** Faça  $i = i + 1$ .

**Passo 6:** Se  $fa \cdot fp > 0$ , então faça  $a = p$ ; (*Cálculo de  $a_i$  e  $b_i$* .)

$$fa = fp$$

senão faça  $b = p$ . ( *$fa$  não muda.*)

**Passo 7:** SAÍDA (*“O método falhou após  $N$  iterações”; (O procedimento não foi bem sucedido.”)*)

PARE



**Exemplo 3.** Utilizemos o método da Bissecção para encontrar a solução contida no intervalo  $[0, 1]$ , com precisão de  $10^{-2}$  (isto é,  $\delta < 10^{-2}$ ) para  $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ .

Solução: Aplicamos, na tabela a seguir, o processo descrito no Algoritmo 2:

$n$	$a_n$	$p_n$	$b_n$	$\delta_n$	$f(p_n)$
1	0(-)	0.5(-)	1(+)	0.5	-0.625
2	0.5(-)	0.75(+)	1(+)	0.25	0.984375
3	0.5(-)	0.625(+)	0.75(+)	0.125	0.259765625
4	0.5(-)	0.5625(-)	0.625(+)	0.0625	-0.161865234
5	0.5625(-)	0.59375(+)	0.625(+)	0.03125	0.054046631
6	0.5625(-)	0.578125(-)	0.59375(+)	0.015625	-0.052623749
7	0.578125	0.5859375	0.59375	0.0078125	0.001031399

Logo, a solução é  $p_7 = 0.5859375$  com  $\delta_7 = 0.0078125$ .

**Teorema 3.** Suponha que  $f \in C[a, b]^1$  e  $f(a).f(b) < 0$ . O método da bissecção gera uma sequência  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  aproximando um zero  $p$  de  $f$  com

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

*Demonstração.* Por hipótese, para  $n \geq 1$ , temos:

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}} \text{ e } p \in (a, b).$$

Além disso,  $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$  para todo  $n \geq 1$ . Temos que  $p \in [a_n, p_n]$  ou  $p \in [p_n, b_n]$  (intervalos de igual comprimento), donde segue que  $|p_n - p| \leq \frac{1}{2}|a_n - b_n|$ . Assim,

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2}|a_n - b_n| = \frac{1}{2} \frac{b - a}{2^{n-1}} = \frac{b - a}{2^n}.$$

Sendo  $\frac{b-a}{2^n}$  uma sequência convergente para zero, temos que  $p_n$  converge para  $p$ . □

**Observação 2.** Ao utilizamos o método da Bissecção podemos usar a relação a seguir para determinarmos o número de iterações ( $N$ ) necessárias para se obter uma solução, no intervalo  $[a, b]$ , de uma equação da forma  $f(x) = 0$ , com uma precisão de  $10^{-n}$ :

$$N > \frac{n + \log_{10}(b - a)}{\log_{10}(2)}.$$

**Exemplo 4.** Use a estimativa obtida na Observação 2 para estimar o número iterações necessárias para se obter o zero de  $f(x) = 2^x - x^2$  pertencente ao intervalo  $[-1, 0]$  com uma precisão de  $10^{-2}$ .

Solução: Temos que  $a = -1$ ,  $b = 0$  e  $n = -2$ , donde segue que:

$$N > \frac{2 + \log_{10}(0 - (-1))}{\log_{10}(2)} = \frac{2 + \log(1)}{\log_{10}(2)} = \frac{2}{\log_{10}(2)} = 6.643856189774724.$$

Assim, precisamos de pelo menos 7 iterações para obtermos a precisão desejada.

---

<sup>1</sup>A notação  $f \in C[a, b]$  significa dizer que  $f$  pertence ao conjunto das funções contínuas no intervalo  $[a, b]$ .

## 2.2 No Computador

Apresentaremos a seguir a implementação do Método de Bissecção em Linguagem Octave. A implementação se baseia no Algoritmo 2 descrito anteriormente.

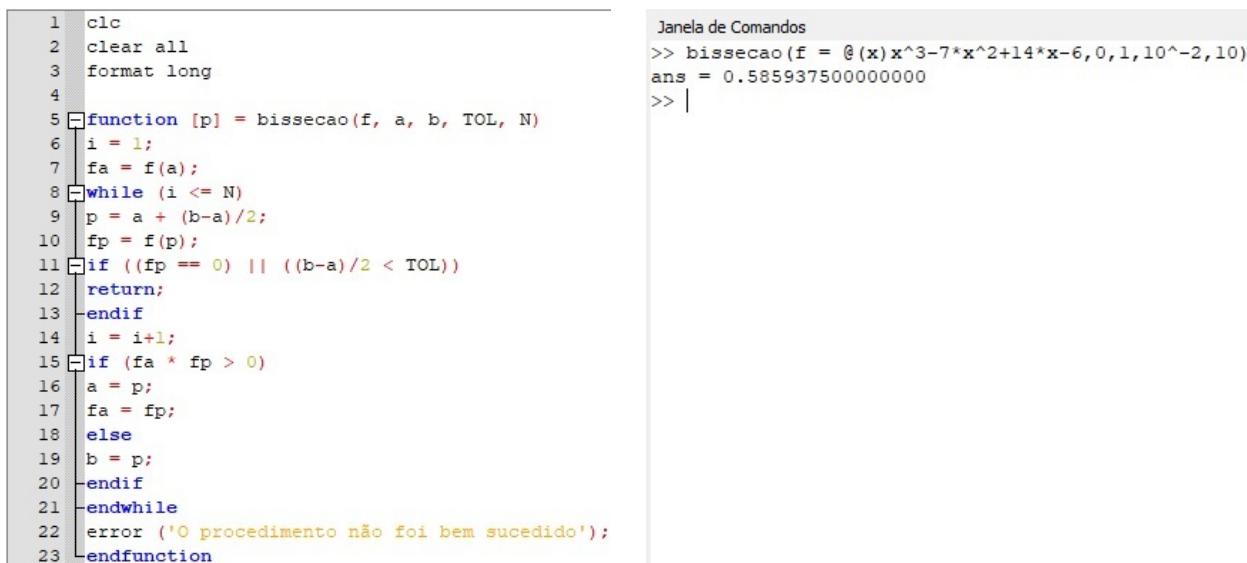
### Programa 2. Bissecção

```
function[p] = bissecao(f,a,b,TOL,N)
i = 1;
fa = f(a);
while (i <= N)
    p = a + (b - a)/2;
    fp = f(p);
    if((fp == 0)||((b - a)/2 < TOL))
        return;
    endif
    i = i + 1;
    if(fa * fp > 0)
        a = p;
        fa = fp;
    else
        b = p;
    endif
endwhile
printf("error: O procedimento não foi bem sucedido");
endfunction
```

Vejamos como fica a solução em Octave do Exemplo 3. Neste caso, executaremos a função fazendo-a ser incorporada às funções disponíveis e então lançamos mão do seguinte comando:

$$\text{bissecao}(f = @(x)x^3 - 7 * x^2 + 14 * x - 6, 0, 1, 10^{-2}, 10)$$

Seguem os prints das telas do Editor e da Janela de Comandos:



The image shows a screenshot of the Octave environment. On the left is the Editor window, displaying the code for the `bissecao` function. The code is as follows:

```
1 clc
2 clear all
3 format long
4
5 function [p] = bissecao(f, a, b, TOL, N)
6     i = 1;
7     fa = f(a);
8     while (i <= N)
9         p = a + (b-a)/2;
10        fp = f(p);
11        if ((fp == 0) || ((b-a)/2 < TOL))
12            return;
13        endif
14        i = i+1;
15        if (fa * fp > 0)
16            a = p;
17            fa = fp;
18        else
19            b = p;
20        endif
21    endwhile
22    error('O procedimento não foi bem sucedido');
23 endfunction
```

On the right is the Command Window, titled "Janela de Comandos". It shows the execution of the `bissecao` function with the following command and output:

```
>> bissecao(f = @(x)x^3-7*x^2+14*x-6,0,1,10^-2,10)
ans = 0.585937500000000
>> |
```

Figura 2.1: Editor e Janela de Comandos.

## 2.3 Exercícios

**Exercício 5.** Utilize o método da Bissecção para encontrar a solução, com precisão de  $10^{-2}$ , para  $x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$  no intervalo  $[-1, 1]$ .

**Exercício 6.** Utilize o método da Bissecção para encontrar uma solução com precisão de  $10^{-3}$  para  $x = tg(x)$  no intervalo  $[4, 4.5]$ .

**Exercício 7.** No cálculo de  $\sqrt[3]{25}$ , com precisão de  $10^{-4}$ , por meio da aplicação do método da Bissecção, obtemos  $p_n = 2.92401$ . Você tem idéia de qual é a equação  $f(x) = 0$  pode ser utilizada neste caso? Qual o valor de  $n$ ?

**Exercício 8.** O método da Bissecção pode ser aplicado para se encontrar uma solução para a equação  $x^4 - 2x + 1 = 0$ , no intervalo  $[-2, 2]$ , com precisão  $\delta$  dada? Existe alguma solução  $p \in (-2, 2)$  tal que  $f(p) = 0$ ? Caso tenha alguma solução em  $(-2, 2)$ , mas não seja possível aplicar o método da Bissecção ao intervalo fechado  $[-2, 2]$ , você conseguiria ajustar algum dado fornecido para que este método seja aplicável?

**Exercício 9.** Use a estimativa obtida na Observação 2 para estimar o número iterações necessárias para se obter o zero de  $f(x) = \frac{\cos(x)-x}{e^x}$  pertencente ao intervalo  $[0, 2]$  com uma precisão de  $10^{-4}$ .

**Exercício 10.** Apresente uma justificativa para a estimativa do número de iterações do método da bissecção descrita na Observação 2.

## 2.4 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 5.**  $p_8 = -0.695312500000000$ .

**Resposta do Exercício 6.**  $p_9 = 4.493164062500000$  considerando a equação  $tg(x) - x = 0$ .

**Resposta do Exercício 7.**  $n = 14$ ,  $f(x) = x^3 - 25$

**Resposta do Exercício 8.** Em caso de dúvida, consulte o professor. Uma dica seria aplicar o método de localização de zeros ao intervalo  $[-2, 2]$  refinando-o.

**Resposta do Exercício 9.** São necessárias pelo menos 15 iterações.

**Resposta do Exercício 10.** Basta isolar  $N$  na inequação estrita (mais à direita)  $|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^N} < 10^{-n}$ . Em caso de dúvida, consulte o professor.

# Plano de Aula

## Aula 3

**Instituição:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

**Professor:** Allan de Sousa Soares

**Disciplina:** Cálculo Numérico

**Conteúdo Pragmático:** Equações Com Uma Variável

**Tema da Aula:** Método do Ponto Fixo

**Duração:** 100 min

**Objetivos:**

- Apresentar a definição de ponto fixo de uma função;
- Entender relação existente entre os zeros de uma função  $f$  e os pontos fixos de uma função associada  $g$ ;
- Construir um algoritmo para o método da iteração de ponto fixo;
- Entender as condições para a convergência do método da iteração de ponto fixo;
- Entender como se processa a velocidade de convergência nos casos em que esta é assegurada;
- Aplicar o método da iteração de ponto fixo.

**Metodologia:**

- Aula expositiva participada.

**Recursos Didáticos Utilizados:**

- Apostila;
- Pincel e quadro branco;
- Datashow;
- Softwares Octave e GeoGebra.

**Avaliação:**

- Observação;
- Resolução de exercícios.

**Referência Principal:**

[1] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D.: Análise Numérica. 10<sup>a</sup> ed. Editora CENGAGE Learning, 2015.

**Bibliografia**

[2] BARROSO, L. C. et al. Cálculo Numérico (Com Aplicações). 2 ed. São Paulo: Harbra, 1987.

[3] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

# Capítulo 3

## Equações Com Uma Variável

### Método do Ponto Fixo

#### 3.1 Introdução

O método apresentado neste capítulo poderá nos fornecer boas respostas ao problema de se determinar soluções de equações em uma variável. Ele consiste em se obter uma certa função (função de ponto fixo) associada à equação que desejamos obter o zero.

**Definição 2.** Um número  $p$  é um ponto fixo para uma função  $g$  se  $g(p) = p$ .

**Exemplo 5.** Os pontos fixos da função  $g(x) = x^2 - 2$ , para  $-2 \leq x \leq 3$  são  $x = -1$  e  $x = 2$ , uma vez que  $g(-1) = -1$  e  $g(2) = 2$ .

**Observação 3.** Dizer que uma função  $g$  tem um ponto fixo em  $p$  é o mesmo que dizer que o gráfico de  $f$  intersecta o gráfico da função identidade  $I(x) = x$ . Considerando a função  $g(x) = x^2 - 2$ , para  $-2 \leq x \leq 3$  dada no Exemplo 5, temos a seguinte interpretação gráfica:

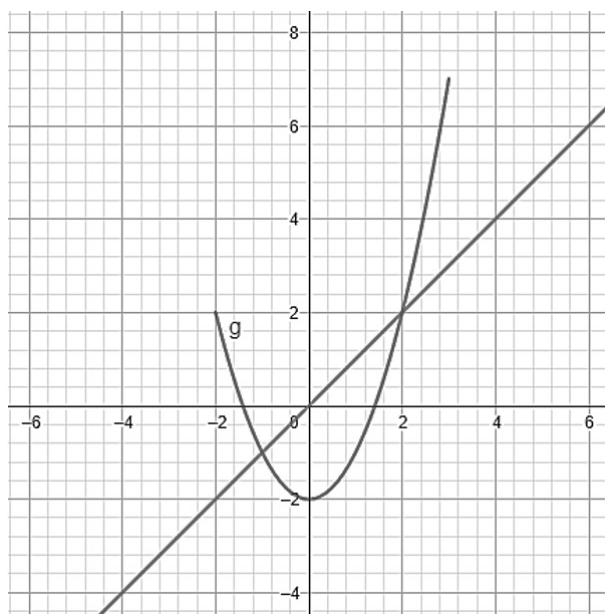


Figura 3.1: Interpretação Geométrica Para o Ponto Fixo de Uma Função.

**Teorema 4.** a) Se  $g$  é contínua em  $[a, b]$  e  $g(x) \in [a, b]$ , para todo  $x \in [a, b]$ , então  $g$  tem um ponto fixo em  $[a, b]$ .  
b) Se, adicionalmente,  $g$  é diferenciável em  $(a, b)$  e existe uma constante positiva  $k < 1$  tal que  $|g'(x)| \leq k$ , para todo  $x \in (a, b)$ , então o ponto fixo, em  $[a, b]$ , é único.

*Demonstração.* a) Se  $g(a) = a$  ou  $g(b) = b$  acabou. Do contrário,  $g(a) > a$  e  $g(b) < b$ . Note que a função  $h(x) = g(x) - x$  é contínua em  $[a, b]$  com  $h(a) = g(a) - a > 0$ ,  $h(b) = g(b) - b < 0$ . Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário existe  $p \in (a, b)$  tal que  $h(p) = 0$ , isto é,

$$g(p) - p = 0 \Rightarrow g(p) = p.$$

b) Suponha que  $|g'(x)| \leq k < 1$  e  $p, q$  pontos fixos em  $[a, b]$ . Se  $p \neq q$ , o Teorema do Valor Médio assegura que existe  $\xi$  entre  $p$  e  $q$  tal que  $g'(\xi) = \frac{g(p) - g(q)}{p - q}$ . Logo,

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)| |p - q| \leq k |p - q| < |p - q|,$$

o que é uma contradição. Assim,  $p = q$ . □

**Exemplo 6.** Seja  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{3}$  em  $[-1, 1]$ . Tracemos o gráfico de  $g$ .

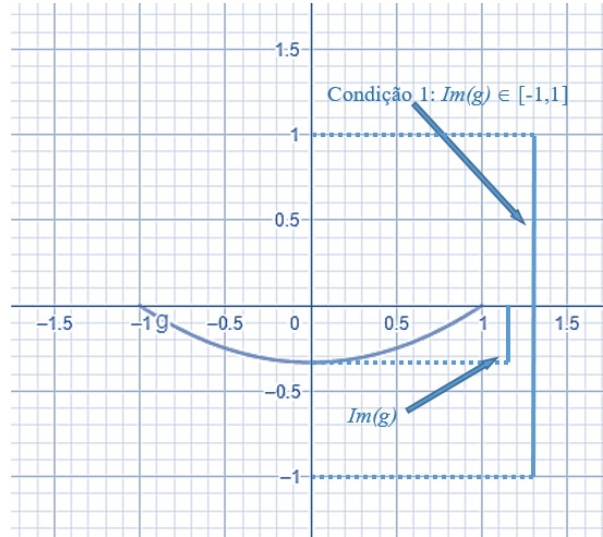


Figura 3.2: Gráfico de  $g(x)$ .

Percebe-se que  $g(x) \in [-1, 1]$ . Além disso,  $g$  é contínua em  $[-1, 1]$  e  $|g'(x)| = |\frac{2x}{3}| \leq \frac{2}{3} < 1$  para todo  $x \in (-1, 1)$ . Logo, o Teorema 4 assegura que  $g$  possui um único ponto fixo em  $[-1, 1]$ .

### 3.2 Algoritmo Para o Método da Iteração de Ponto Fixo

Para obter o valor aproximado do ponto fixo de uma função  $g$ , escolhemos uma aproximação inicial  $p_0$  e geramos a sequência  $(p_n)$  fazendo  $p_n = g(p_{n-1})$  para cada  $n \geq 1$ . Se a sequência converge para  $p$  e  $g$  é contínua, então

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_{n-1}) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}) = g(p),$$

e obtemos a solução para  $x = g(x)$ .

**Algoritmo 3.** Iteração de Ponto Fixo: Para determinar uma solução de  $g(p) = p$ , dada uma aproximação inicial  $p_0$

**ENTRADAS:** aproximação inicial  $p_0$ ; tolerância  $TOL$ ; número máximo de iterações  $N$ .

**SAÍDA:** solução aproximada  $p$  ou mensagem de erro

**Passo 1:** Faça  $i = 1$ ;

**Passo 2:** Enquanto  $i \leq N$ , execute os Passos 3 a 6;

**Passo 3:** Faça  $p = g(p_0)$ ; (*Cálculo de  $p_i$* )

**Passo 4:** Se  $|p - p_0| < TOL$ , então

SAÍDA ( $p$ ); (*Procedimento concluído com sucesso.*)

PARE.

**Passo 5:** Faça  $i = i + 1$ .

**Passo 6:** Faça  $p_0 = p$ ; (*Atualiza  $p_0$ .*)

**Passo 7:** SAÍDA (“O método falhou após  $N$  iterações); (*O procedimento não foi bem sucedido.*)

PARE

Dada uma função  $f(x)$  a qual buscamos algum zero por meio do Método da Iteração de Ponto Fixo, devemos obter a função auxiliar  $g(x) = x$ . Ela é normalmente obtida fazendo-se  $f(x) = 0$  e por meio de manipulação algébrica desta última equação chegaremos a  $g(x) = x$ , tal que  $g(x)$  satisfaça as hipóteses descritas no Teorema 4.

**Exemplo 7.** Seja  $f(x) = x^3 - 31x + 1$ , no intervalo  $[0, 2]$ . Utilizemos o Método da Iteração Linear, para encontrar uma solução  $p$  para  $f(x)$  com precisão de  $10^{-3}$  e chute inicial  $p_0 = 1$ .

Solução: Uma possível escolha para a função  $g(x)$  pode ser obtida da seguinte forma:

$$x^3 - 31x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 30x + 1 = 0 \Leftrightarrow 30x = x^3 - x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{x^3 - x + 1}{30}.$$

Logo,  $g(x) = \frac{x^3 - x + 1}{30}$ . Aplicando as iterações, temos:

$n$	$g(p_n)$	$\delta_n$
1	$3.33333333333333e - 02$	$0.966666666666667$
2	$3.222345679012346e - 02$	$1.109876543209876e - 03$
3	$3.226033341579519e - 02$	$3.687662567172789e - 05$

Logo, a solução é  $p_3 = 3.226033341579519e - 02$ .

**Exemplo 8.** A equação  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  tem uma única raiz no intervalo  $[1, 2]$ . Por meio de manipulação algébrica, podemos obter várias equações para a forma de ponto fixo  $x = g(x)$  conforme apresentamos a seguir (o leitor deve verificar):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10; & \text{b) } x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}; & \text{c) } x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}; \\ \text{d) } x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}; & \text{e) } x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}. \end{array}$$

Surge então uma pergunta: Será que existe uma melhor escolha para a função auxiliar  $g(x)$ ? Se sim, qual das funções

obtidas deve ser escolhida? A tabela a seguir nos responde esta pergunta.

$n$	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
3	-469.7200120016932	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374023294	1.364957015402487	1.365230013916147
4	102754555.1873851		1.375170252816038	1.365264748113442	1.365230013414097
15			1.365223680225282	1.365230013414092	
30			1.365230013689632		

### 3.3 Convergência do Método do Ponto Fixo

Apresentaremos a seguir condições que asseguram a convergência do método do ponto fixo. Para tanto, faremos uso de um importante teorema do Cálculo Diferencial, o Teorema do Valor Médio (TVM).

**Revisando 3.** O Teorema do Valor Médio estabelece que:

Seja  $f$  uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1.  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ .
2.  $f$  é diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ .

Então existe um número  $c$  em  $(a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para mais detalhes, consultar [8], pg. 291.

**Teorema 5.** Seja  $g$  uma função contínua em  $[a, b]$  e  $g(x) \in [a, b]$  para todo  $x \in [a, b]$ . Suponha, adicionalmente, que  $g'$  exista em  $(a, b)$  e que uma constante  $0 < k < 1$  exista, com  $|g'(x)| < k$ , para todo  $x \in (a, b)$ . Então, para qualquer número  $p_0 \in [a, b]$ , a sequência definida por  $p_n = g(p_{n-1})$ , para  $n \geq 1$  converge para o ponto fixo único  $p \in [a, b]$ .

*Demonstração.* Decorre do Teorema 4 que existe um único  $p$  em  $[a, b]$  tal que  $g(p) = p$ . Uma vez que  $g$  leva  $[a, b]$  nele mesmo, a sequência  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  é tal que  $p_n \in [a, b]$  para todo  $n \geq 0$ . Usando o Teorema do Valor Médio e o fato que  $|g'(x)| \leq k$ , temos, para cada  $n$ ,

$$|p_n - p| = |g(p_n) - g(p)| = |g'(\xi_n)| |p_{n-1} - p| \leq k |p_{n-1} - p|,$$

com  $\xi_n \in (a, b)$ . Procedendo indutivamente, temos:

$$|p_n - p| \leq k |p_{n-1} - p| \leq k^2 |p_{n-2} - p| \leq \cdots \leq k^n |p_0 - p|.$$

Como  $0 < k < 1$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n |p_0 - p| = 0$ . Por fim, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |p_0 - p| = 0.$$

Logo,  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge para  $p$ . □

**Exemplo 9.** Analisando mais cuidadosamente o Exemplo 7, temos que a função  $g(x) = \frac{x^3 - x + 1}{30}$  é tal que

i)  $f([0, 2]) \subset [0, 2]$ . Consegue ver isto? Senão, veja a Observação 4.

ii) A parcela  $3x^2 - 1$ , aplicada ao intervalo  $[0, 2]$  tem imagem dada por  $[-1, 11]$  e portanto,  $|g'(x)| \leq \frac{11}{30} < 1$ .

Decorre dos itens i) e ii) que a sequência obtida no Exemplo 7 é de fato convergente.



**Observação 4.** Em geral, obter limitantes para uma função em certo intervalo é algo bastante trabalhoso quando esta é um polinômio de grau superior a 2 ou até mesmo outras funções não polinomiais. O que fazer neste caso? No Exemplo 7 poderíamos ter usado o Cálculo Diferencial para obtermos um esboço do gráfico de  $f$ . Porém, essa ferramenta não se mostra muito útil para polinômios de graus superiores a 2. Neste caso, como só queremos estudar os limitantes podemos recorrer a um software de esboço gráfico para verificarmos as condições i) e ii) (não se esqueça da continuidade e da diferenciabilidade de  $g$ ). A Figura 3.3 (usando o GeoGebra) ilustra bem a situação:

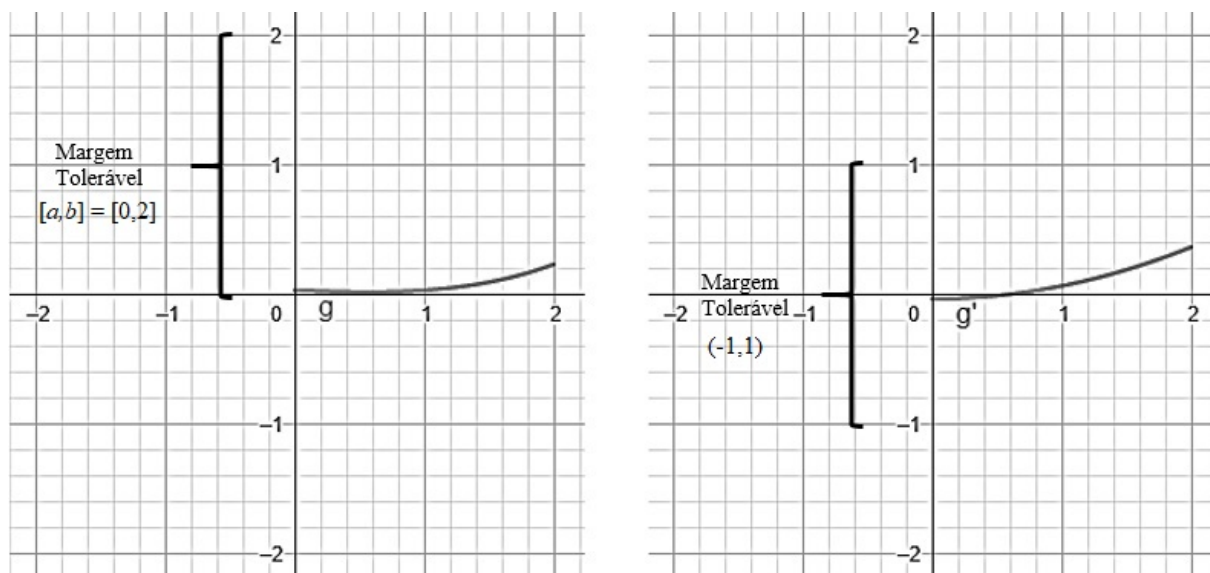


Figura 3.3: Esboços gráficos de  $g$  e  $g'$ .

*Moleza ou não? Caso tenha dúvidas, consulte o professor.*

**Teorema 6.** Se  $g$  satisfizer as hipóteses do Teorema 5, então limitantes para o erro envolvido na utilização de  $p_n$  para a aproximação de  $p$  são dados por

$$|p_n - p| \leq k^n \{p_0 - a, b - p_0\}$$

e

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1 - k} |p_1 - p_0|, n \leq 1.$$

*Demonstração.* Na mesma pegada do Teorema 5. A demonstração pode ser encontrada ([1], pg. 66 – 67). □

**Observação 5.** Conforme mencionado na Observação 4, em muitos casos o uso do Cálculo Diferencial ou de outras ferramentas algébricas se mostram complicadas demais quando se quer buscar limitantes para uma função. Considerando o Exemplo 9 e sua interpretação gráfica, dada na Observação 4, uma estimativa visual para  $k$ , seria algo em torno de 0.4 (Sempre estimamos para mais! O valor ideal para o erro ótimo máximo é  $k = \frac{11}{30}$  conforme o Exemplo 9). O admitir  $k = 0.4$  de fato não é a melhor escolha, mas ela poderia nos ajudar caso queiramos uma estimativa para o erro para prosseguirmos com o método (pelo menos é menor que  $0 < k < 1$ ). Aplicando o Teorema 6 (primeira estimativa - usando  $a, b$  e  $p_0$ ) e juntamente com os valores  $\delta_n$  obtidos no Exemplo 7, temos:

$n$	$k = 0.4$		$k = \frac{11}{30}$		$\delta_n$
1	0.4	$\geq$	0.366666666666667	*	0.966666666666667
2	0.16	$\geq$	0.134444444444444	$\geq$	$1.109876543209876e - 03$
3	0.064	$\geq$	$4.929629629629628e - 02$	$\geq$	$3.687662567172789e - 05$

Exceto pelo primeiro valor de  $\delta_n$  ( $n=1$ ), temos que erro obtido em cada etapa é menor que as estimativas ótima (melhor das maiores!) e visual (sempre estimada para mais em relação à ótima, que, no caso de um gráfico não temos como precisar exatamente).

As Observações 4 e 5 podem ser tomadas de modo genérico na maior parte da disciplina. De modo geral, quando a estimativa ótima do erro máximo não pode ser obtida partimos para a estimativa visual. Tais estimativas nos ajudarão a saber quando o método produziria uma solução em conformidade com a tolerância  $\delta$  exigida antes de aplicá-lo de fato (mais ou menos como ocorrido no Exemplo 4).

### 3.4 No Computador

Apresentaremos a seguir a implementação do método da Iteração de Ponto Fixo em Linguagem Octave. A implementação se baseia no Algoritmo 3 descrito anteriormente.

**Programa 3.** Iteração de Ponto Fixo

```
function[p] = IPF(g, p0, TOL, N)
    i = 1;
    while (i <= N)
        p = g(p0);
        if(abs(p0 - p) < TOL)
            return
        endif
        i = i + 1;
        p0 = p;
    endwhile
    printf("error: O procedimento não foi bem sucedido.")
endfunction
```

Sugerimos ao leitor que repasse todos os exemplos resolvidos neste capítulo utilizando o GeoGebra e também o Octave. Observe como as aproximações  $p_1, p_2, \dots$  se aproximam do zero  $p$ .

**Observação 6.** A aplicação do método do ponto fixo para a obtenção de um função de ponto fixo  $g$  obtida a partir de uma outra função  $f$  apresenta certa dificuldade: *Obter a função de ponto fixo  $g$  associada a uma função  $f$ .* Esta é uma tarefa que pode não ser tão simples, uma vez que,  $g$  deve estar em acordo com as hipóteses do Teorema 4, em especial a parte que cabe ao item “b” a qual exige que  $|g'(x)| \leq k$ ,  $k < 1$ . Uma dica é praticar bastante. Contudo, não há somente uma função de ponto fixo como vimos no Exemplo 8 o que já é algo bom, pois aumenta nossas chances de encontrar uma função que satisfaz as hipóteses desejadas. Porém, algumas funções de ponto fixo são melhores que outras por apresentarem uma convergência mais acelerada. O Teorema 6 pode nos ajudar a escolher a melhor delas. Em caso de dúvida, consulte o professor.

### 3.5 Exercícios

**Exercício 11.** Utilize manipulações algébricas para mostrar que cada uma das funções a seguir tem um ponto fixo em  $p$  precisamente quando  $f(p) = 0$ , para  $f(x) = x^4 + 2x^2 - x + 3$ .

- a)  $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$ ;  
 b)  $g_2(x) = \left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}$ ;  
 c)  $g_3(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{1/2}$ .

**Exercício 12.** Os quatro métodos a seguir são propostos para se calcular  $21^{1/3}$ . Ordene-os, com base na velocidade aparente de convergência, assumindo  $p_0 = 1$ .

- a)  $p_n = \frac{20p_{n-1}+21/p_{n-1}^2}{21}$ ;  
 b)  $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3-21}{3p_{n-1}^2}$ ;  
 c)  $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^4-21p_{n-1}}{p_{n-1}^2-21}$ ;  
 d)  $p_n = \left(\frac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$ .

**Exercício 13.** Utilize o método de iteração do ponto fixo para determinar uma solução com precisão de  $10^{-2}$  para  $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ .

**Exercício 14.** Utilize o método de iteração de ponto fixo para encontrar uma aproximação para  $\sqrt{3}$  com precisão de  $10^{-4}$ .

### 3.6 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 11.** Tente até conseguir. Dica, tente o caminho inverso e depois arrume. Se não conseguir, consulte o professor!!

**Resposta do Exercício 12.** A ordem, por velocidade de convergência descendente, é (b), (d), (a). A sequência em (c) não converge.

**Resposta do Exercício 13.** Considerando  $g(x) = (3x^2 + 3)^{1/4}$  e  $p_0 = 1$  obtemos  $p_6 = 1.943316929898677$  e  $\delta_6 = 5.809389941249465e - 03$ .

**Resposta do Exercício 14.** Considerando  $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$  e  $p_0 = 1$  obtemos  $p_4 = 1.732050810014727$  e  $\delta_4 = 9.204712812982407e - 05$ .

# Plano de Aula

## Aula 4

**Instituição:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

**Professor:** Allan de Sousa Soares

**Disciplina:** Cálculo Numérico

**Conteúdo Pragmático:** Equações Com Uma Variável

**Tema da Aula:** Método de Newton

**Duração:** 100 min

**Objetivos:**

- Introduzir o método de Newton como decorrência do polinômio de Taylor;
- Entender o método de Newton geometricamente;
- Construir um algoritmo para o método de Newton;
- Entender as condições para a convergência do método de Newton;
- Aplicar o método de Newton.

**Metodologia:**

- Aula expositiva participada.

**Recursos Didáticos Utilizados:**

- Apostila;
- Pincel e quadro branco;
- Datashow;
- Softwares Octave e GeoGebra.

**Avaliação:**

- Observação;
- Resolução de exercícios.

**Referência Principal:**

[1] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D.: Análise Numérica. 10<sup>a</sup> ed. Editora CENGAGE Learning, 2015.

**Bibliografia**

[2] BARROSO, L. C. et al. Cálculo Numérico (Com Aplicações).2 ed. São Paulo: Harbra, 1987.

[3] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

# Capítulo 4

## Equações Com Uma Variável

### Método de Newton

#### 4.1 Introdução

O Método de Newton, apresentado a seguir, é um dos mais poderosos métodos numéricos conhecidos para resolver o problema de se encontrar as raízes de uma função. Sua construção, depende em parte, do Polinômio de Taylor.

**Revisando 4.** Fórmula de Taylor ou Série de Taylor é uma expressão que permite o cálculo do valor de uma função por aproximação local através de uma função polinomial. Supondo  $f$  infinitamente derivável num intervalo contendo um ponto  $x_0$ , temos  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$  em que:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2}{2} + \frac{f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3}{6} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n}{n!}.$$

Podemos ainda considerar que  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$  com

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{f^{(n+2)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!} + \dots$$

É possível obter  $\xi_x = \xi(x)$ ,  $\xi_x \in [x, x_0]$  (ou  $x \in [x_0, x]$ ) tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x) \cdot (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Para  $n = 1$ , por exemplo:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(\xi_x)(x - x_0)^2}{2!}.$$

*Para mais informações consulte [9], pg. 758-759.*

Suponha que  $f$  seja diferenciável em  $(a, b)$  e que  $f''$  seja contínua em  $[a, b]$ . Seja  $\bar{x} \in [a, b]$  uma aproximação de  $p$  tal que  $f'(\bar{x}) \neq 0$  e  $|p - \bar{x}|$  é "pequeno". Considere o polinômio de Taylor de primeiro grau para  $f(x)$  expandido em torno de  $\bar{x}$ ,

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(x)),$$

onde  $\xi(x)$  está entre  $x$  e  $\bar{x}$ . Como  $f(p) = 0$ , fazendo  $x = p$ , temos

$$f(p) = 0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(p)).$$

Desde que  $|p - \bar{x}|$  é pequeno, podemos ignorar o termo  $(p - \bar{x})^2$  que é muito menor. Portanto,

$$0 \approx f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}).$$

Isolando  $p$  temos

$$p \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

Repassando para sequências, temos:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}.$$

A Figura 4.1 a seguir ilustra como as aproximações são obtidas utilizando-se sucessivas tangentes. Iniciando-se com uma aproximação inicial  $p_0$ , a aproximação  $p_1$  é o valor em que a linha da tangente ao gráfico de  $f$  em  $(p_0, f(p_0))$  intercepta o eixo dos  $x$ . Por sua vez,  $p_2$  é o valor em que a tangente ao gráfico de  $f$  em  $(p_1, f(p_1))$  encontra o eixo dos  $x$ , e assim por diante.

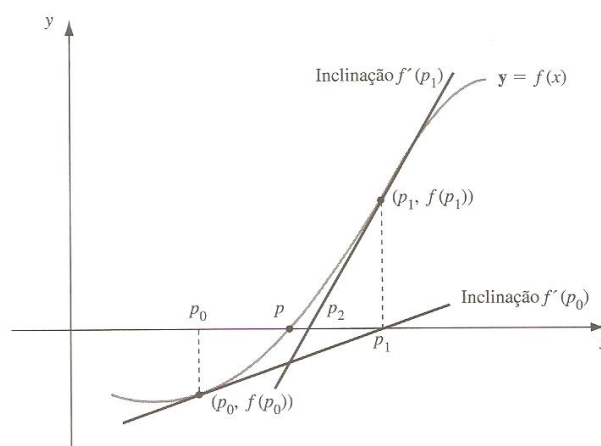


Figura 4.1: Interpretação geométrica do Método de Newton.

**Algoritmo 4.** Método de Newton: Para determinar uma solução de  $f(x) = 0$ , dada a função  $f$  contínua e diferenciável, onde  $f'(p_0) \neq 0$ .

**ENTRADAS:** aproximação inicial  $p_0$ ; tolerância  $TOL$ ; número máximo de interações  $N$ .

**SAÍDA:** solução aproximada  $p$  ou mensagem de erro

**Passo 1:** Faça  $i = 1$ ;

**Passo 2:** Enquanto  $i \leq N$ , execute os Passos 3 a 6;

**Passo 3:** Faça  $p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$ ; (Cálculo de  $p_i$ )

**Passo 4:** Se  $|p - p_0| < TOL$ , então

SAÍDA ( $p$ ); (“Procedimento concluído com sucesso.”)

PARE.

**Passo 5:** Faça  $i = i + 1$ .

**Passo 6:** Faça  $p_0 = p$ ; (Atualiza  $p_0$ .)

**Passo 7:** SAÍDA (“O método falhou após  $N$  iterações); (O procedimento não foi bem sucedido.”)

PARE

O Exemplo 10 nos ajudará a entendermos melhor a interpretação geométrica do Método de Newton bem como sua aplicação.

**Exemplo 10.** Vejamos a interpretação geométrica das 3 primeiras iterações do Método de Newton aplicado à função  $f(x) = 0.1x^3 - x + 1$  partindo de  $p_0 = 5$ .

Solução: Consideremos a sequência iterativa

$$p_n = p_{n-1} - \frac{0.1p_{n-1}^3 - p_{n-1} + 1}{0.3p_{n-1}^2 - 1},$$

temos a seguinte tabela de valores:

$n$	$p_n$	$\delta_n$
0	5.000000000000000	—
1	3.692307692307693	1.307692307692307
2	2.934537312553398	0.757770379754294
3	2.560328358602209	0.374208953951190

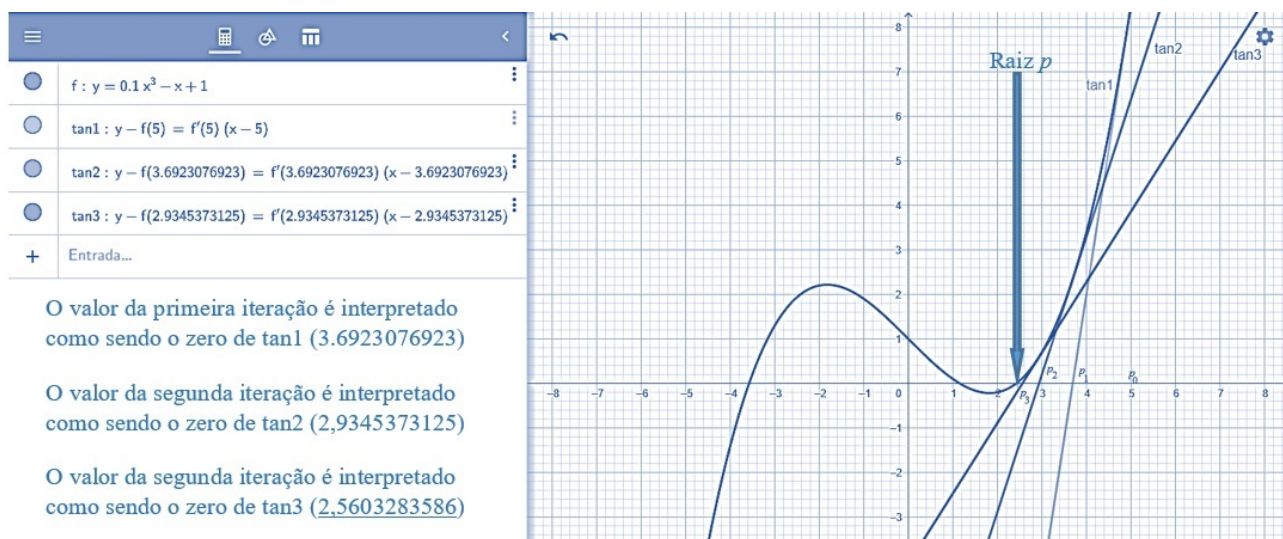


Figura 4.2: Interpretação geométrica do Método de Newton.

**Teorema 7.** Seja  $f \in C^2[a, b]$ . Se  $p \in [a, b]$  é tal que  $f'(p) \neq 0$ , então, existe um  $\delta > 0$  tal que o método de Newton gera uma sequência  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  que converge para seja qual for a aproximação inicial  $p_0 \in [p - \delta; p + \delta]$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em ([1], pg. 76). □

**Exemplo 11.** Suponha que queiramos calcular uma solução aproximada da equação  $\cos(x) - x = 0$  (solução igual a 0,73908513321516064166). Consideremos, inicialmente 7 iterações do método da iteração do ponto fixo partindo de  $p_0 = \pi/4$  e  $x = g(x) = \cos(x)$ :

$n$	$p_n$	$\delta_n$
0	0.785398163397448	—
1	0.707106781186548	$7.829138221090071e - 02$
2	0.760244597075630	$5.313781588908251e - 02$
3	0.724667480889126	$3.557711618650383e - 02$
4	0.748719885789484	$2.405240490035798e - 02$
5	0.732560844592242	$1.615904119724243e - 02$
6	0.743464211315294	$1.090336672305192e - 02$
7	0.736128256500852	$7.335954814441825e - 03$

Por outro lado, utilizando o Método de Newton à função  $f(x) = \cos(x) - x$ , temos, com apenas 4 iterações:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos(p_{n-1}) - p_{n-1}}{-\sin(p_{n-1}) - 1}, \quad n \geq 1.$$

Os resultados obtidos são mostrados na tabela a seguir:

$n$	$p_n$	$\delta_n$
0	0.785398163397448	—
1	0.739536133515238	$4.586202988221000e - 02$
2	0.739085178106010	$4.509554092281265e - 04$
3	0.739085133215161	$4.489084903802620e - 08$
4	0.739085133215161	$4.440892098500626e - 16^*$

Ao que se pode ver, analisando-se os valor de  $p_3$  e  $p_4$  que o Método de Newton se mostrou mais eficiente que a iteração do ponto fixo. O valor  $4.440892098500626e - 16$  obtido para o erro na quarta iteração gerou um erro em uma casa omitida no display. Podemos admitir que  $4.440892098500626e - 16 \approx 0$ .

Consideremos o próximo Exemplo 12 que também tem o status de Observação.

**Exemplo 12.** O Teorema 7 traz um alerta para a escolha de  $p_0$ . Ao aplicarmos o Método de Newton à equação  $\frac{x^3+8}{e^x} = 0$  partindo da aproximação inicial  $p_0 = -1$  (que parece 'bem próxima' da única solução real  $p = -2$ ) as coisas não dão muito certo. Pois bem, sua função iterativa é dada por  $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3+8}{-p_{n-1}^3+3p_{n-1}^2-8}$ . Os resultados para 4 iterações são apresentados a seguir:

$n$	$p_n$	$\delta_n$
0	-1	—
1	0.7500000000000000	1.7500000000000000
2	2.000580046403712	1.250580046403712
3	6.002319680348669	4.001739633944957
4	7.932733943635820	1.930414263287151
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	16.20138499527156	1.250273209802971
50	60.21614504456691	1.053414032129204
100	6112.0923042223339	1.027761020468731

Uma observação (superficial) indica que  $\delta_n$  diminui quando  $n \rightarrow \infty$  o que é natural, mas ainda grande (maior que 1). Perceba que  $p_0 = -1$  não foi uma boa escolha. Examinando (Figura 4.3) o gráfico de  $f(x) = \frac{x^3+8}{e^x}$  notamos que as raízes das retas tangentes se afastam da raiz de  $f$  à medida que  $n$  aumenta, mesmo o  $\delta_n$  aparentemente mostrando o contrário. Qualquer escolha para  $p_0$  superior o máximo de  $f$  (local e global) produzirá uma sequência divergente. Por outro lado, qualquer escolha para  $p_0$  inferior ao máximo de  $f$  irá acarretar em uma sequência convergente para o zero de  $f$ . Calcule as primeiras 5 iterações do método de Newton considerando  $p_0 = -5$  ( $p_5 = -2.457347611076455$  e  $\delta_5 = 0.380804003648816$ ),  $p_0 = -3,5$  ( $p_5 = -2.008685064643689$  e  $\delta_5 = 7.204445735655041e - 02$ ) e  $p_0 = -3$  ( $p_5 = -2.000093645106139$  e  $\delta_5 = 7.856331776083358e - 03$ ). Em particular, o máximo de  $f$  ocorre aproximadamente no ponto  $x = -1.35530139760811990993^*$  sendo igual a aproximadamente  $y = 21,369$ . Qual seria o maior valor de  $\delta$  referente ao Teorema 7? Em caso de dúvida, consulte o professor.



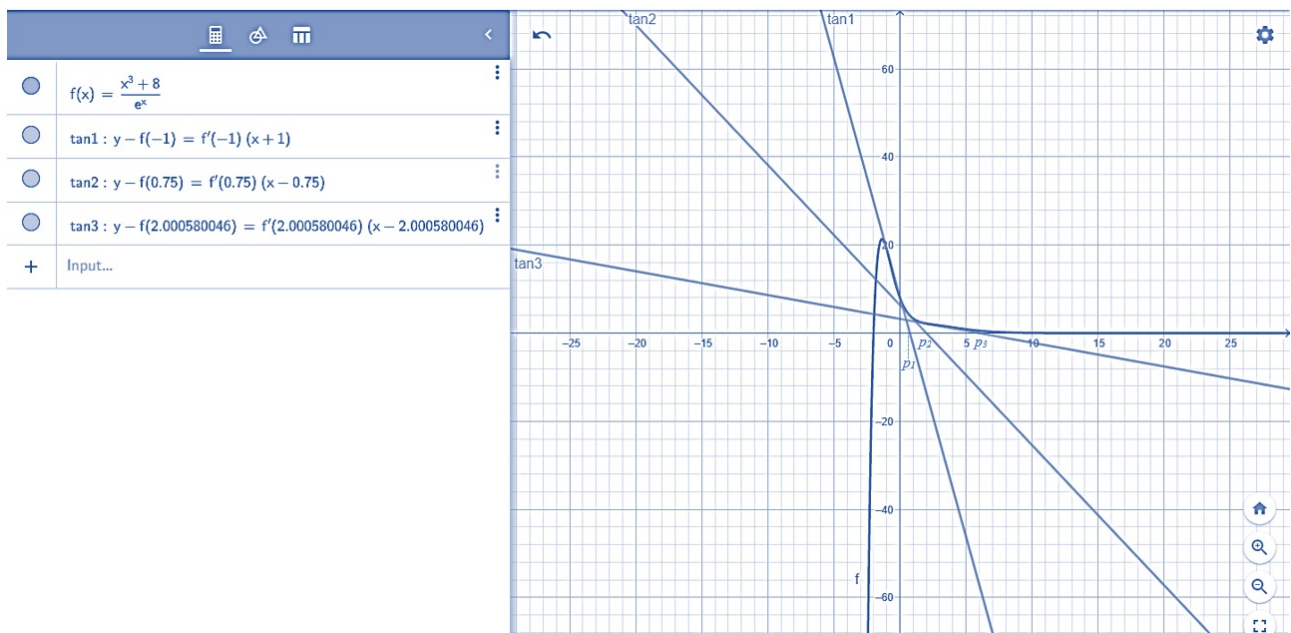


Figura 4.3: Interpretação geométrica do uso inadequado do Método de Newton.

**Observação 7.** O valor  $x = -1.35530139760811990993$  dado no Exemplo 12 é obtido tomando-se os zeros da derivada de  $f(x) = \frac{x^3+8}{e^x}$  (Lembre-se do cálculo diferencial, pontos críticos etc). Podemos optar por usar um dos métodos vistos na anteriormente para buscar por este zero ou algum software ou plataforma online, como por exemplo, WolframAlpa (*Que gosto muito!*)



Figura 4.4: Máximo da função  $f(x) = \frac{x^3+8}{e^x}$ .

**Palavras dos Mestres 3.** Quando lemos um material a primeira vez costumamos, de modo geral, aceitar muitas das coisas escritas ali sem qualquer reflexão. Ignoramos a demonstração de teoremas (*Se o teorema tiver prova complicada tá perdoado, pode pular*), a checagem de valores dados no texto (*O material está sempre correto?*). Além disso, de onde vem certos argumentos, da própria matéria ou de um pré-requisito? Ocorre que, ao lermos um texto matemático, devemos tentar ler com todo o cuidado, buscando entender a demonstração de alguns teoremas, pelo menos os mais simples, ou até mesmo buscando-a em algum outro material caso o texto que se lê não a contemple; a checagem dos valores é fundamental e, pode ser encarada como o primeiro contato com os procedimentos, uma espécie de repetição para fixar a informação que se está lendo; em alguns casos, precisaremos retornar a assuntos já vistos tidos como pré-requisitos.

**Palavras dos Mestres 4.** Estando atento a isto, o aprendizado é efetivo, solidificado e portanto, mais duradouro. É fácil estudar assim? De forma nenhuma, é bem difícil. Mas com treino conseguimos nos condicionar a estudarmos desta forma.

**Aluno:** Há professor, tem um cara que ensina um macete massa para essa questão no youtube. Não precisa de nada disto, rapidona!

**Professor:** Eu tentei!

## 4.2 No Computador

Apresentaremos a seguir a implementação do Método de Newton em Linguagem Octave. A implementação se baseia no Algoritmo 4 descrito anteriormente.

**Programa 4.** Método de Newton Ponto Fixo

```
function[p] = MN(f, df, p0, TOL, N)
    i = 1;
    while (i <= N)
        p = p0 - f(p0)/df(p0);
        if(abs(p0 - p) < TOL)
            return
        endif
        i = i + 1;
        p0 = p;
    endwhile
    printf("error: O procedimento não foi bem sucedido.")
endfunction
```

**Exemplo 13.** Vamos completar o Exemplo 12. Aplicar o algoritmo acima nos pontos  $p_0 = -5$ ,  $p_0 = -3,5$  e  $p_0 = -3$ . Para tanto utilizemos uma tolerância igual a  $10^{-4}$  e  $N = 10$ . Os resultados são precisamente os seguintes:

$p_0$	$\approx p; 10^{-4}$	$n$
-5	-2.000000000074855	10
-3.5	-2.000000000000000	8
-3	-2.000000013152193	6

O valor de  $n$  na ultima coluna de nossa tabela representa o número de iterações até se atingir a precisão desejada. Felizmente  $N = 10$  foi suficiente para todos os valores de  $p_0$  dados. Em linguagem Octave, temos:

```
MN(f = @(x)(x^3+8)/e^x, df = @(x)(3*x^2*e^x-(x^3+8)*e^x)/(e^(2*x)), -5, 10^-4, 10) = -2.000000000074855
MN(f = @(x)(x^3+8)/e^x, df = @(x)(3*x^2*e^x-(x^3+8)*e^x)/(e^(2*x)), -3.5, 10^-4, 10) = -2.000000000000000
MN(f = @(x)(x^3+8)/e^x, df = @(x)(3*x^2*e^x-(x^3+8)*e^x)/(e^(2*x)), -3, 10^-4, 10) = -2.000000013152193
```

Consegue ver como foi obtido o valor de  $n$ ? Dica: Uma leve alteração no programa 4. Em caso de dúvida, consulte o professor.

**Observação 8.** Ao observarmos despretensiosamente o Exemplo 11, em princípio, notamos a grande velocidade do método de Newton em comparação ao método da iteração de ponto fixo (e também demais métodos). O método de

Newton é de fato muito rápido. Contudo, há algo de complicado quando se pensa em um algoritmo “verdadeiro” para tal método. Observe que, no Programa 4, exigimos do usuário que o mesmo insira a função (até aí tudo bem) e sua derivada algébrica (esse foi o pulo do gato). Contudo, a velocidade de computação do método de Newton pode ser piorada se o usuário passar a tarefa de calcular a derivada para o computador. De fato, em cada iteração o programa deveria estimar a derivada no ponto equivalente à aquela iteração e isto é muito custoso. Neste caso, opta-se por dividir o trabalho entre máquina e humano quando passamos para o último a tarefa de inserir a derivada algébrica (pelo menos não costuma ser tão difícil derivar uma função algebricamente!). Uma alternativa ao método de Newton será o método da secante, visto logo mais, cuja semelhança (geométrica) o torna ‘parecido’ ao primeiro, porém mais lento, contudo, sem a necessidade do conhecimento/inserção da derivada por parte do usuário.

**Palavras dos Mestres 5.** Devemos tomar bastante cuidado ao pensarmos que um computador faz cálculos perfeitos, isto é, cálculos exatos em cada etapa. Sabemos, por exemplo, que as expressões:

$$A(x) : (x + 1)^3 \quad e \quad B(x) : x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

são iguais do ponto de vista matemático, isto é, qualquer número real atribuído à variável  $x$  apresentará mesmo resultado quando aplicado em  $A(x)$  e  $B(x)$ . Contudo, dentro da máquina, isto não ocorre como o esperado em muitos casos. A máquina tem memória finita e isto lhe impõe certa limitação. Para  $x = 1$  não há problemas, o valor de  $A(1) - B(1)$ , quando calculado no Octave será zero. Isso se repetirá para muitos outros valores. Contudo, ao considerarmos o valor  $x = -\frac{3}{7}$  não temos a mesma sorte. A Figura 4.5 ilustra bem essa situação. Para mais detalhes sobre erros computacionais consulte ([1], pg. 16-27)



Figura 4.5: Limitação computacional mesmo em um cálculo.

## 4.3 Exercícios

**Exercício 15.** Seja  $f(x) = x^2 - 6$  e  $p_0 = 1$ . Use o método de Newton para achar  $p_2$ .

**Exercício 16.** Use o método de Newton para encontrar soluções com precisão de  $10^{-4}$  para os seguintes problemas. Adote  $p_0 = \frac{a+b}{2}$  em que  $a$  e  $b$  são os extremos dos intervalos dados:

- $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ ,  $[1, 4]$ ;
- $x^3 + 3x^2 - 1$ ,  $[-3, 2]$ ;
- $x - 0,8 - 0,2\sin(x) = 0$ ,  $[0, \pi/2]$ .

**Exercício 17.** Utilize o método de Newton para encontrar uma aproximação com precisão de  $10^{-4}$  do valor de  $x$  que produza o ponto do gráfico de  $y = x^2$  mais próximo a  $(1, 0)$ . (Dica: minimize  $[d(x)]^2$  em que  $d(x)$  representa a distância de  $(x, x^2)$  a  $(1, 0)$ .)

## 4.4 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 15.**  $p_2 = 2.607142857142857$ .

**Resposta do Exercício 16.** a) Para  $p_0 = 2.5$ , obtemos  $p_5 = 2.690647448028615$ ; b) Para  $p_0 = -0.5$ , obtemos  $p_3 = -0.652703646836132$  e  $\delta_3 = 7.413094164576695e - 05$ ; c) Para  $p_0 = 0$ , temos  $p_3 = 0.964333887695271$  e  $\delta_3 = 7.208532798452794e - 07$

**Resposta do Exercício 17.** A função que mede a distância do ponto  $(1, 0)$  à função  $(x, x^2)$  é dada por  $d(x)_{(x,x^2),(1,0)} = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-0)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 1}$ . Encontre o zero de  $d'(x)$ . Usando  $f(x) = (d(x))^2$  podemos buscar os zeros de  $f'(x)$  (que são pontos críticos de  $f$ ). Neste caso, partindo de  $p_0 = 1$ , obtemos  $p_5 = 0.589754512301466$  e  $\delta_5 = 8.201911083638436e - 08$ . Logo, o ponto procurado é dado por  $(0.589754512301466, 0.347810384779940)$ .

# Plano de Aula

## Aula 5

**Instituição:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

**Professor:** Allan de Sousa Soares

**Disciplina:** Cálculo Numérico

**Conteúdo Pragmático:** Equações Com Uma Variável

**Tema da Aula:** Método da Secante

**Duração:** 100 min

**Objetivos:**

- Apresentar o método da secante;
- Relacionar o método da secante e o método de Newton quando às suas exigências;
- Entender o método da secante geometricamente;
- Aplicar o método da secante.

**Metodologia:**

- Aula expositiva participada.

**Recursos Didáticos Utilizados:**

- Apostila;
- Pincel e quadro branco;
- Datashow;
- Softwares Octave e GeoGebra.

**Avaliação:**

- Observação;
- Resolução de exercícios.

**Referência Principal:**

[1] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D.: Análise Numérica. 10<sup>a</sup> ed. Editora CENGAGE Learning, 2015.

**Bibliografia**

[2] BARROSO, L. C. et al. Cálculo Numérico (Com Aplicações). 2 ed. São Paulo: Harbra, 1987.

[3] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

# Capítulo 5

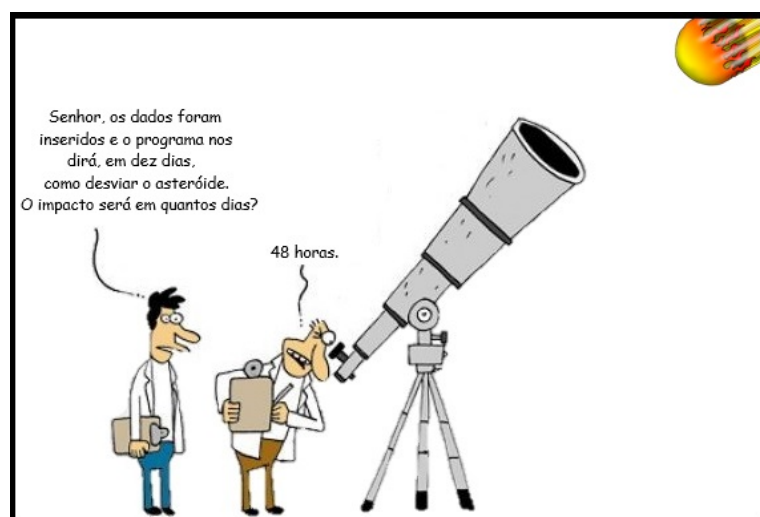
## Equações Com Uma Variável

### Método da Secante

#### 5.1 Método da Secante

Embora o Método de Newton seja uma técnica extremamente poderosa, ele apresenta uma fraqueza: a necessidade de se conhecer o valor da derivada de  $f$  em cada aproximação. Frequentemente, o cálculo de  $f'(x)$  apresenta muito mais dificuldades e necessita de mais operações aritméticas para ser calculada do que  $f(x)$ . Na tentativa de se evitar este problema, introduzimos o *Método da Secante*. Este método trata-se de uma pequena variação do Método de Newton.

**Observação 9.** Conforme mencionado na Observação 8 o método de Newton esconde um certa dificuldade computacional de modo que o trabalho foi dividido entre o PC (realização dos cálculos) e o usuário (inserção da derivada de  $f$ ). Quanto à inserção da função  $f$  não há muito o que fazer, tem que se partir de algum lugar. Por outro lado, incumbir o usuário de inserir  $f'$  (já calculada em sua forma algébrica) demanda tempo. Por outro lado, o implemento da derivada numérica ponto a ponto em cada etapa demandará algum esforço extra na escrita do código e também algum tempo computacional a mais para se obter o resultado pois, ao invés de se calcular a derivada em um ponto apenas substituindo o valor em  $f$  na sua forma algébrica seria necessários certa quantidade de cálculos a mais em cada etapa. Então, ao pensarmos os estudo dos métodos numéricos devemos ponderar não somente com respeito à precisão da resposta obtida mas também o tempo gasto em sua obtenção. *De que adianta uma resposta precisa se necessitamos dela para ontem e ela só sai depois de amanhã. Acredite, existem programas que demoram dias, meses e anos para se chegar ao resultado!*



Por definição,

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \rightarrow p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}.$$

Fazendo  $x = p_{n-2}$ , temos

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}.$$

Utilizando essa aproximação para  $f'(p_{n-1})$  na fórmula de Newton, temos que

$$p_n = p_{n-1} - f(p_{n-1}) \frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}.$$

Agora apresentaremos um algoritmo mostrando os passos para se aplicar o método da secante e, em seguida uma interpretação geométrica para esse método.

**Algoritmo 5.** Método da Secante: Para determinar uma solução de  $f(x) = 0$ , dada a função  $f$  contínua e diferenciável, onde  $f'(p_0) \neq 0$ .

**ENTRADAS:** aproximações iniciais  $p_0$  e  $p_1$ ; tolerância  $TOL$ ; número máximo de interações  $N$ .

**SAÍDA:** solução aproximada  $p$  ou mensagem de erro

**Passo 1:** Faça  $i = 2$ ;

$$s_0 = f(p_0);$$

$$s_1 = f(p_1);$$

**Passo 2:** Enquanto  $i \leq N$ , execute os Passos 3 a 6;

**Passo 3:** Faça  $p = p_1 - s_1(p_1 - p_0)/(s_1 - s_0)$ ; (*Cálculo de  $p_i$* )

**Passo 4:** Se  $|p - p_0| < TOL$ , então

SAÍDA ( $p$ ); (*“Procedimento concluído com sucesso.”*)

PARE.

**Passo 5:** Faça  $i = i + 1$ .

**Passo 6:** Faça  $p_0 = p_1$ ; (*Atualiza  $p_0$ .*)

$$\text{Faça } s_0 = s_1$$

$$\text{Faça } p_1 = p$$

$$\text{Faça } s_1 = f(p)$$

**Passo 7:** SAÍDA (*“O método falhou após  $N$  iterações”;* (*O procedimento não foi bem sucedido.*”)

PARE

A Figura 5.1 a seguir ilustra como as aproximações são obtidas utilizando-se sucessivas secantes. Iniciando-se com aproximações iniciais  $p_1$  e  $p_0$ , a aproximação  $p_2$  é o valor em que a secante ao gráfico de  $f$  nos pontos  $(p_0, f(p_0))$  e  $(p_1, f(p_1))$  intercepta o eixo dos  $x$ . Por sua vez,  $p_3$  é o valor em que a secante ao gráfico de  $f$  nos pontos  $(p_1, f(p_1))$  e  $(p_2, f(p_2))$  intercepta o eixo dos  $x$  e assim por diante. Note que o ponto  $(p_1, f(p_1))$  está fixado. Fica como exercício apresentar a interpretação geométrica variando o sinal de  $f'$  e  $f''$ . Em caso de dúvida consulte o professor.

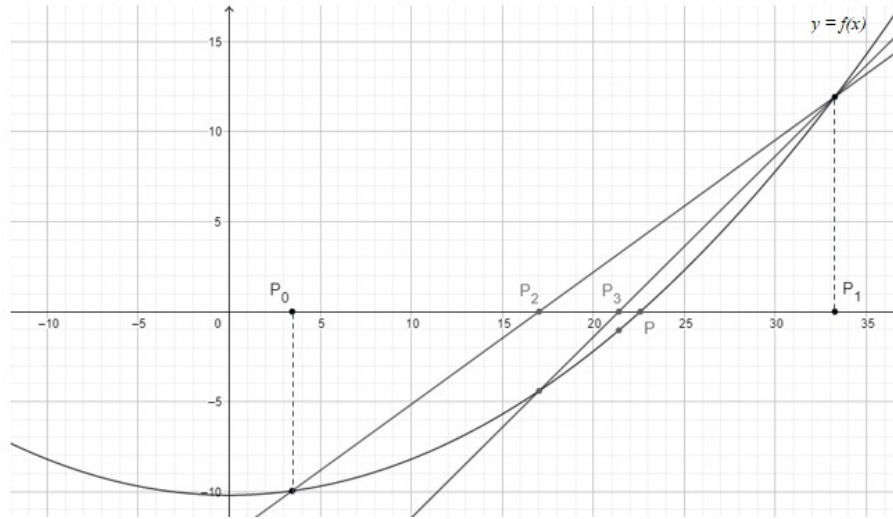


Figura 5.1: Interpretação geométrica para o Método da Secante ( $p_0 = a$  e  $p_1 = b$ ).

**Exemplo 14.** Vejamos a interpretação geométrica das 2 primeiras iterações do Método da Secante aplicado à função  $f(x) = 0,01x^3 - 0,031x^2 + 0,023x - 1,002$  partindo de  $p_0 = 2$  e  $p_1 = 8$ .

Solução: Consideremos a sequência iterativa:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(0,01p_{n-1}^3 - 0,031p_{n-1}^2 + 0,023p_{n-1} - 1,002)(p_{n-1} - p_{n-2})}{0,01p_{n-1}^3 - 0,031p_{n-1}^2 + 0,023p_{n-1} - 0,01p_{n-2}^3 + 0,031p_{n-2}^2 - 0,023p_{n-2}}$$

temos a seguinte tabela de valores:

$n$	$p_n$	$\delta_n$
0	2	—
1	8	6
2	3.808318264014466	4.191681735985534
3	4.895426811417262	1.087108547402796

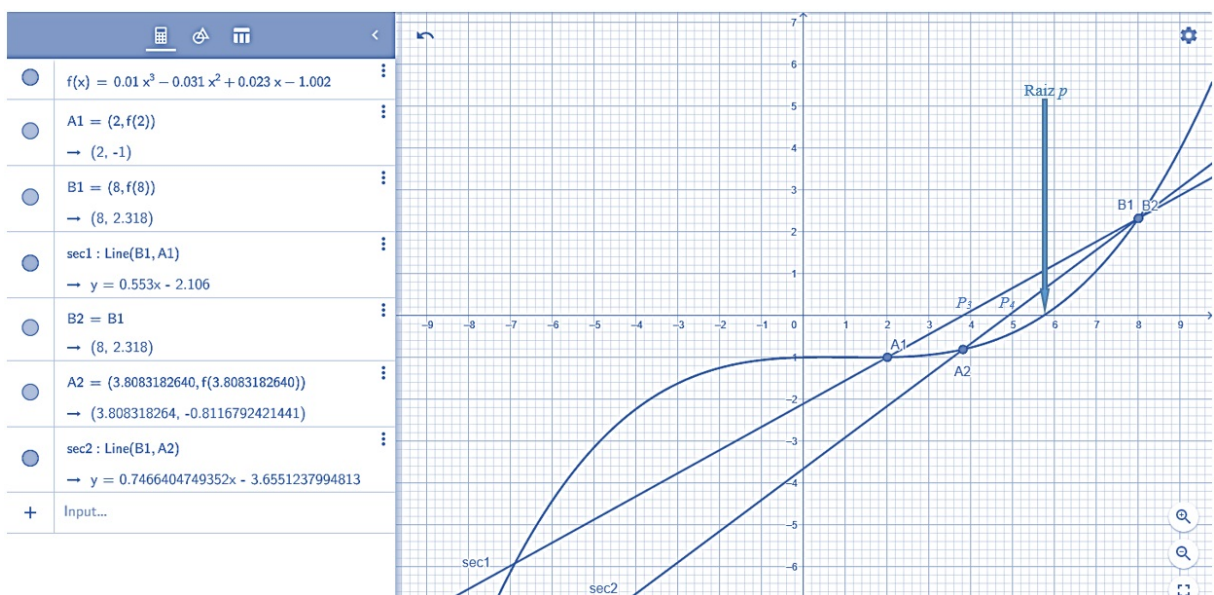


Figura 5.2: Interpretação geométrica do Método Secante.



## 5.2 No Computador

Apresentaremos a seguir a implementação do Método da Secante em Linguagem Octave. A implementação se baseia no Algoritmo 5 descrito anteriormente.

**Programa 5.** Método de Newton Ponto Fixo

```
function[p] = Sec(f,p0,p1,TOL,N)
    i = 2;
    s0 = f(p0);
    s1 = f(p1);
    while (i <= N)
        p = p1 - s1 * (p1 - p0) / (s1 - s0)
        if(abs(p1 - p) < TOL)
            return
        endif
        i = i + 1;
        p0 = p1;
        s0 = s1;
        p1 = p;
        s1 = f(p);
    endwhile
    printf("error: O procedimento não foi bem sucedido.")
endfunction
```

**Exemplo 15.** Determine a solução aproximada da equação  $\cos(x) - x = 0$  utilizando o Método da Secante. Adote  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = \frac{\pi}{4}$  e  $\delta = 10^{-2}$ .

Solução: Utilizando a função de iteração

$$p_n = p_{n-1} - f(\cos(p_{n-1}) - p_{n-1}) \frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{\cos(p_{n-1}) - p_{n-1} - \cos(p_{n-2}) + p_{n-2}},$$

temos:

$n$	$p_n$	$\delta_n$
0	0	—
1	0.785398163397448	0.785398163397448
2	0.728372846481522	$5.702531691592649e - 02$
3	0.738977620617482	$1.060477413595984e - 02$
4	0.739085388964454	$1.077683469724589e - 04$

**Palavras dos Mestres 6.** Retirando-se alguns “;” dos códigos apresentados e acrescentando mais uma ou duas linhas de comandos você mesmo poderá construir tabelas como as apresentadas no texto. *Já se adiante, brinque logo com a linguagem. Se deixar para cima da hora, a brincadeira pode não ser divertida!*

## 5.3 Exercícios

**Exercício 18.** Seja  $f(x) = x^2 - 6$ . Adotando  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = 3$  use o Método da secante para obter  $p_3$ .

**Exercício 19.** Use o Método da Secante para encontrar soluções com precisão de  $10^{-2}$  para os seguintes problemas:

- a)  $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ ,  $[1, 4]$ ;
- b)  $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ ,  $[-3, 2]$ ;
- c)  $x - 0,8 - 0,2\text{sen}(x) = 0$ ,  $[0, \pi/2]$ .

**Exercício 20.** Estude, para uma equação particular,  $f(x) = 0$  a velocidade de convergência dos métodos da Bissecção, iteração do ponto fixo, Newton e Secante. Calcule pelo menos 5 iterações para cada um desses métodos.

Dica: Tome de preferência uma equação cuja solução exata seja conhecida. Você pode usar o Octave!

**Exercício 21.** Após resolver o Exercício 20 Discorra sobre cada um dos métodos estudados até aqui, vantagens e desvantagens levando-se em conta o tripé *hipóteses para a convergência, rapidez de convergência (número de iterações) e esforço computacional (cálculos em cada iteração)*.

## 5.4 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 18.**  $p_3 = 2.428571428571428$ .

**Resposta do Exercício 19.** a) Para  $p_0 = 1$  e  $p_1 = 4$ , obtemos  $p_9 = 2.690398133682820$  e  $\delta_9 = 7.313659274762685e - 03$ ; b) Para  $p_0 = -3$  e  $p_1 = 2$ , obtemos  $p_5 = -2.878641131228635$  e  $\delta_5 = 9.390380629842099e - 03$ ; c) Para  $p_0 = 0$  e  $p_1 = \frac{\pi}{2}$ , obtemos  $p_4 = 0.964346085103906$  e  $\delta_4 = 2.794758721053725e - 03$ .

**Resposta do Exercício 20.** Aberta. Em caso de dúvida, consulte o professor!

**Resposta do Exercício 21.** Aberta. Em caso de dúvida, consulte o professor!

**Palavras dos Mestres 7.** Recomendamos que, no Exercício 21 seja produzido um texto com o máximo de informações possível. Esta, é umas das questões mais importantes da parte referente à *Solução de Equações Com Uma Variável*. Para entender isto, basta observar que toda a parte braçal é deixada para o computador. Nesta apostila, na internet e nos livros está tudo muito bem detalhado. A mera aplicação braçal do conteúdo visto até aqui (e também o que virá) não lhe trará mérito algum. Claro que, não acertar os exercícios à mão pode revelar uma grande falta de atenção ou deficiências mais sérias relativa ao conteúdo estudado. Sendo assim, o que precisamos entender é que, todos os métodos estudados (e outros não abordados neste material) apresentam particularidades que os tornam interessantes em determinadas situações e não tão atrativos em outras. Nenhum método resolverá tudo e nenhum método será sempre descartado. Além disso, precisamos levar em conta as limitações da máquina que teremos disponível para a execução dos cálculos. Neste sentido, pensarmos a resposta do Exercício 21 em termos do tripé: (1) garantia de convergência, (2) rapidez de convergência e (3) esforço computacional é de extrema importância.

**Aluno:** Mas professor, não vou precisar disto na prova, a prova foca mais nas contas, né?

**Professor:** Eu tentei. Fica só no feijão e arroz mesmo, deixa o filé para os melhores!

# Capítulo 6

## Equações Com Uma Variável

### Zeros de um Polinômio

#### 6.1 Zeros de um Polinômio

Nesta seção buscaremos limitar os zeros de um polinômio qualquer. Nos resultados a seguir consideraremos apenas polinômios mônicos, ou seja, polinômios no qual o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1.

**Teorema 8.** Seja  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  um polinômio de grau  $n$  e  $a_0 \neq 0$ . Se  $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\|a_i\|}{\|x\|^{n-i}} < 1$  e  $x \neq 0$ , então  $p(n) \neq 0$ .

*Demonstração.* Temos que

$$P(x) = x^n \left( 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}} \right).$$

Mas  $\left\| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}} \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\|a_i\|}{\|x\|^{n-i}} < 1$  e portanto  $P(x) \neq 0$ . □

**Corolário 1.** Se  $\frac{\|a_i\|^{1/n-i}}{\|x\|} < \frac{1}{2}$  para  $i = 0, \dots, n-1$  e  $x \neq 0$ , então  $P(x) \neq 0$ .

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\|a_i\|}{\|x\|^{n-i}} &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{\|a_i\|^{1/n-i}}{\|x\|} \right)^{n-i} = \left( \frac{\|a_0\|^{1/n}}{\|x\|} \right)^n + \left( \frac{\|a_1\|^{1/n-1}}{\|x\|} \right)^{n-1} + \left( \frac{\|a_2\|^{1/n-2}}{\|x\|} \right)^{n-2} + \dots + \left( \frac{\|a_{n-1}\|^{1/1}}{\|x\|} \right)^1 \leq \\ &\leq \left( \frac{1}{2} \right)^n + \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + \left( \frac{1}{2} \right)^{n-2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Portanto, o Teorema 8 concluímos que  $p(x) \neq 0$ . □

**Revisando 5.** No Corolário 1 Usamos o fato que

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2} < 1.$$

Tal fato decorre da conhecida série geométrica:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \dots}_{=0} = 1.$$

A parte grifada, correspondente à soma de infinitos termos positivos, que é, portanto, positiva. Sendo esta suprimida, temos a desigualdade estrita.

**Teorema 9.** Seja  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  um polinômio de grau  $n$  e  $a_0 \neq 0$ . Se  $x$  é um zero de  $p$ , então  $\|x\| \leq L$ , onde  $L = 2\max_{0 \leq i \leq n-1} \{\|a\|^{1/n-i}\}$ .

*Demonstração.* Negando o corolário 1, temos que se  $P(x) = 0$  então existe  $i_0$  tal que  $\frac{1}{2} \leq \frac{\|a\|^{1/n-i_0}}{\|x\|}$ . Além disso,

$$\frac{\|a\|^{1/n-i}}{\|x\|} \leq \frac{\max_{0 \leq i \leq n-1} \{\|a\|^{1/n-i}\}}{\|x\|}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\max_{0 \leq i \leq n-1} \{\|a\|^{1/n-i}\}}{\|x\|} \Rightarrow \|x\| \leq 2\max_{0 \leq i \leq n-1} \{\|a\|^{1/n-i}\}.$$

□

**Exemplo 16.** Ache o limite superior e inferior dos zeros reais do polinômio  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x + 24$

Solução: Temos que

$$L = 2\max_{0 \leq i \leq n-1} \{\|a\|^{1/n-i}\} = 2\max\{\|a_0\|^{1/3}, \|a_1\|^{1/2}, \|a_2\|\} = 2\max\{24^{1/3}, 10^{1/2}, 3\} = 2\sqrt{10}.$$

Logo, todos os zeros reais de  $P(x)$  estão no intervalo  $[-2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$ .

**Observação 10.** Se por exemplo, estivéssemos interessados tanto nos zeros complexos, quanto reais no exemplo acima, teríamos, ao invés de um intervalo, um círculo  $C$  (ou bola) de raio  $2\sqrt{10}$ . Basta observar que  $\|x\| < L$ . Acompanhe na Figura 6.1:

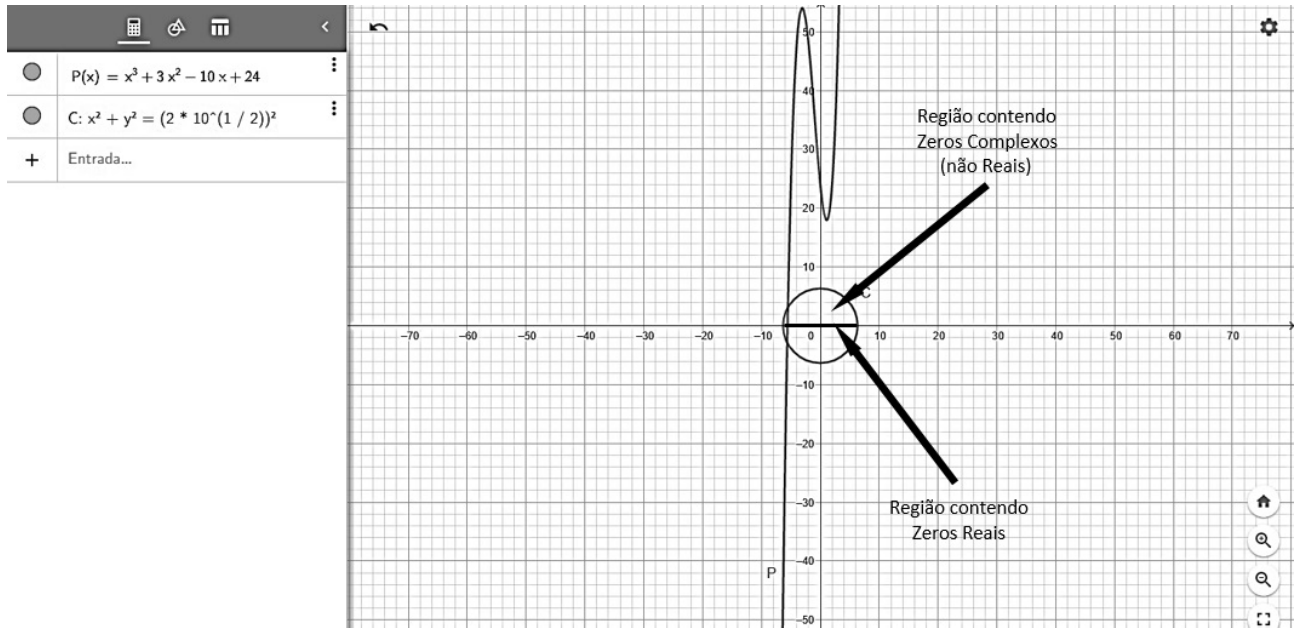


Figura 6.1: Região limite para zeros reais e zeros complexos (não reais).

Note que os zeros de  $P(x)$  são:  $x_1 = -5.56931528279411$ ,  $x_2 = 1.28465764139706 - 1.63063840724481i$  e  $x_3 = 1.28465764139706 + 1.63063840724481i$ . Note que o zero real  $x_1$  pertence ao intervalo  $[-2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$  e os zeros complexos  $x_2$  e  $x_3$  pertencem à bola de  $B(0, 2\sqrt{10})^1$ .

<sup>1</sup>A notação  $B(c, r)$  indica uma bola de centro  $c$  e raio  $r$ . Um número complexo  $x = a + bi$  pertence a bola  $B(0, r)$  se  $\rho(x) = \sqrt{a^2 + b^2} < r$ . De fato,  $\rho(x_2) = \rho(x_3) = 2.075891825404625 < 2\sqrt{10}$

Sejam  $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$  os zeros de  $P(x)$ . Considere o polinômio  $P_1(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ . Assim,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \left(\frac{1}{x} - \xi_0\right) \left(\frac{1}{x} - \xi_1\right) \cdots \left(\frac{1}{x} - \xi_{n-1}\right) = x^n \left(\frac{1 - x\xi_0}{x}\right) \cdots \left(\frac{1 - x\xi_{n-1}}{x}\right) = \\ &= x^n \frac{1}{x^n} (1 - x\xi_0) \cdots (1 - x\xi_{n-1}) = (1 - x\xi_0) \cdots (1 - x\xi_{n-1}). \end{aligned}$$

Fazendo  $1 - x\xi_i = 0$ , temos que os zeros de  $P_1(x)$  são  $\frac{1}{\xi_0}, \dots, \frac{1}{\xi_{n-1}}$ . Aplicando o Teorema 9 a  $P_1(x)$  temos  $L_1$  tal que  $\|\frac{1}{x_i}\| \leq L_1$  e portanto  $\frac{1}{L_1} \leq \|\xi_i\|$ . Logo, se  $x$  é um zero de um polinômio mônico qualquer, então  $L_1 \leq \|x\| \leq L$ .

**Revisando 6.** Um polinômio é chamado mônico quando o coeficiente do termo de maior grau é 1.

No caso de zeros reais podemos dizer que:

$$-L_1 \leq \frac{1}{\xi_i} \leq L_1 \Rightarrow \xi_i \leq -\frac{1}{L_1} \text{ e } \xi_i \geq \frac{1}{L_1}.$$

Portanto, os zeros reais positivos e negativos de  $p(x)$  estão nos intervalos  $[-L, -\frac{1}{L_1}]$ ,  $[\frac{1}{L_1}, L]$ . Como seria a interpretação deste último caso para zeros complexos?

**Algoritmo 6.** Método de Delimitação de Zeros: Para determinar uma região intervalar contendo todos os possíveis zeros reais de um polinômio  $P(x)$  desde que  $P(0) \neq 0$ .

**ENTRADAS:** vetor  $A$  contendo os coeficientes de  $P(x)$  (considerando a ordem decrescente para o grau).

**SAÍDA:** Região composta por uma união de intervalos contendo todos os zeros de  $P(x)$ .

**Passo 1:** Se  $A(1) = 1$ , então

$$C = A;$$

senão

$$C = \frac{1}{A(1)} * A;$$

**Passo 2:** Faça  $i = 2$ ;

$$\text{Faça } L = 10^{-100};$$

**Passo 3:** Enquanto  $i \leq \text{tam}(A)$ , execute os Passos 4 a 6

**Passo 4:** Faça  $C(i) = |C(i)^{1/(i-1)}|$ ;

**Passo 5:** Se  $C(i) > L$ , então  $L = C(i)$

**Passo 6:** Faça  $i = i + 1$ ;

**Passo 7:** Faça  $j = 1$ ;

**Passo 8:** Enquanto  $j \leq \text{tam}(A)$ , execute os Passos 9 e 10

**Passo 9:** Faça  $B(j) = A(\text{tam}(A) - j + 1)$ ;

**Passo 10:** Faça  $j = j + 1$ ;

**Passo 11:** Se  $B(1) = 1$ , então

$$D = B;$$

senão

$$D = \frac{1}{B(1)} * B;$$

**Passo 12:** Faça  $k = 2$ ;

$$\text{Faça } L_1 = 10^{-100};$$

**Passo 13:** Enquanto  $k \leq \text{tam}(B)$ , execute os Passos 14 a 16

**Passo 14:** Faça  $D(k) = |D(k)^{1/(k-1)}|$ ;

**Passo 15:** Se  $D(k) > L_1$ , então  $L_1 = D(k)$ ;

**Passo 16:** Faça  $k = k + 1$ ;

**Passo 17:** SAÍDA: (“Os zeros de  $P(x)$  pertencem aos intervalos  $\left[-L, -\frac{1}{L_1}\right] \cup \left[\frac{1}{L_1}, L\right]$ ”)

**Exemplo 17.** Ache os limites  $L, L_1$  de  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x + 24$ .

Solução: No Exemplo 16 vimos que  $L = 2\sqrt{10}$ . Por outro lado,

$$P_1(x) = x^3 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 \left( \frac{1}{x^3} + 3\frac{1}{x^2} - 10\frac{1}{x} + 24 \right) = 1 + 3x - 10x^2 + 24x^3 \Rightarrow G_1(x) = \frac{P_1(x)}{24} = \frac{1}{24} + \frac{1}{8}x - \frac{5}{12}x^2 + x^3$$

$$L_1 = 2\max \left\{ \left\| \frac{1}{24} \right\|^{1/3}, \left\| \frac{1}{8} \right\|^{1/2}, \left\| -\frac{5}{12} \right\| \right\} = 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{6} \rightarrow \frac{1}{L_1} = \frac{6}{5}.$$

Logo, os zeros reais de  $f(x)$  estão nos intervalos  $[-2\sqrt{10}, -\frac{6}{5}]$ ,  $[\frac{6}{5}, 2\sqrt{10}]$ .

## 6.2 No Computador

Apresentaremos a seguir a implementação do Método de Delimitação de Zeros de Um Polinômio em Linguagem Octave. A implementação se baseia no Algoritmo 6 descrito anteriormente.

**Programa 6.** Método de Delimitação de Zeros de Um Polinômio

```
function[I] = MDZ(A)
    if A(1) == 1
        C = A;
    else
        C = (1/A(1)) * A;
    endif
    i = 2;
    L = 10^(-100);
    while i <= length(A)
        C(i) = abs(C(i)^(1/(i-1)));
        if C(i) > L
            L = C(i);
        endif
        i = i + 1;
    endwhile
    j = 1;
    while j <= length(A)
        B(j) = A(length(A) - j + 1);
        j = j + 1;
    endwhile
    if B(1) == 1
        D = B;
    else
        D = (1/B(1)) * B;
    endif
```

CONTINUA...

```

k = 2;
L1 = 10^(-100);
while k <= length(B)
    D(k) = abs(D(k)^(1/(k-1)));
    if D(k) > L1
        L1 = D(k);
    endif
    k = k + 1;
endwhile
printf("Os zeros de P(x) estão pertencem ao intervalo [%d, %d] U [%d, %d].\n", -2*L, -1/(2*L1), 1/(2*L1), 2*L)
endfunction

```

Vejamos como fica a solução em Octave do Exemplo 17. Neste caso, executaremos a função utilizando o comando:

$$MDZ([1, 3, -10, 24])$$

O resultado obtido foi o seguinte:

Os zeros de  $P(x)$  estão pertencem à união de intervalos  $[-6.32456, -1.2] \cup [1.2, 6.32456]$ .

*Digite o código e para ver as telas do Editor e da Janela de Comandos. Faça isto!*

## 6.3 Multiplicidade de um Zero

O resultado que se segue é um dos teoremas mais importantes referente à álgebra polinomial feitas sobre os números complexos/reais.

**Teorema 10.** Todo polinômio não constante de grau  $n$  possui exatamente  $n$  raízes complexas, não necessariamente distintas.

*Demonstração.* A demonstração do presente teorema envolve conceitos da álgebra abstrata cujos pré-requisitos, em geral não são vistos em cursos de engenharias e outras áreas da matemática aplicada. O leitor mais perspicaz pode encontrá-la em [5]. (Vai na fé!) □

Para se determinar a multiplicidade de um zero,  $\xi$ , basta olharmos as derivadas sucessivas aplicadas a  $\xi$ . A multiplicidade, neste caso, é dada pela ordem da última derivada nula, adicionada de 1 (lembre-se que  $f(x) = f^{(0)}$ ,  $f'(x) = f^{(1)}(x)$ , ...). De fato, um polinômio  $P(x)$  contendo um zero  $a$ , de multiplicidade  $k$ , pode ser escrito na forma  $P(x) = (x - a)^k Q(x)$  em que  $x - a$  não divide  $Q(x)$ . Derivando  $P(x)$  sucessivamente, temos:

$$\begin{aligned}
 P'(x) &= k(x - a)^{k-1}Q(x) + (x - a)^k Q'(x) \\
 P''(x) &= k(k-1)(x - a)^{k-2}Q(x) + k(x - a)^{k-1}Q'(x) + k(x - a)^{k-1}Q'(x) + (x - a)^k Q''(x) \\
 &\vdots \\
 P^{(k-1)}(x) &= k(k-1)(k-2) \cdots 2(x - a)
 \end{aligned}$$

Note que o termo  $x - a$  está presente em todas as parcelas até a derivada de ordem  $k - 1$ .

**Exemplo 18.** O polinômio  $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$  possui três zeros, porém o conjunto solução de  $P(x) = 0$  é  $\{-1, -2\}$ . Isto ocorre devido ao  $-1$  ser um zero de multiplicidade 2. Considerando o exposto acima, temos que  $P(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + 5(-2) + 2 = 0$  e  $P'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 5 = 2 \neq 0$ , donde segue que  $x = -2$  é um zero de  $P(x)$  com multiplicidade 1. Por outro lado,  $P(-1) = (-1)^3 + 4(-1)^2 + 5(-1) + 2 = 0$ ,  $P'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 5 = 0$  e  $P''(-1) = 6(-1) + 8 = 2 \neq 0$ , donde segue que  $x = -1$  é um zero de  $P(x)$  com multiplicidade 2.

## 6.4 Exercícios

**Exercício 22.** Ache os limites superior e inferior dos zeros do polinômio  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$ .

**Exercício 23.** Considerando o polinômio  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$  determine:

- Os limites inferior e superior para os zeros  $P(x)$ .
- Aplique o método de localização de zeros com  $n = 5$  (Capítulo 1) aos intervalos obtidos a fim de separar os zeros reais de  $P(x)$ . (Lembre-se que  $\gamma = \frac{b-a}{n}$ )
- Aplique o método de Newton em cada uma dos subintervalos obtidos no item 'b' com precisão de  $10^{-3}$ . Utilize  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  em que  $a$  e  $b$  são os extremos inferior e superior dos subintervalos contendo algum zero.

## 6.5 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 22.**  $L = 3$ ,  $L_1 = 0.5$

**Resposta do Exercício 23.** a)  $L = 4$ ,  $L_1 = 0.875$ , b) Existem três zeros reais, um em cada um dos seguintes subintervalos:  $I_1 = [-2.125, -1.5]$ ,  $I_2 = [0.875, 1.5]$  e  $I_3 = [2.125, 2.75]$ , c) Aplicando o método de Newton em  $x_0 = \frac{-2.125-1.5}{2} = -1.8125$ , temos  $x_3 = -1.935432332776539$ ; Para  $x_0 = 1.1875$ , temos  $x_3 = 1.462598159595508$ ; Para  $x_0 = 2.4375$ , temos  $x_3 = 2.472833909008159$ . *O fato de todos os itens terem ido exatamente até a terceira iteração  $x_3$  é pura coincidência!!!*



# Capítulo 7

## Interpolação Polinomial

### Polinômio de Lagrange

#### 7.1 Introdução

Consideremos a seguinte situação hipotética:

Em uma certa cidade foram feitas medições da temperatura local a cada hora entre 6 : 00 h (6 h) e 10 : 00 h (10 h). A tabela a seguir mostra a temperatura em graus Celsius obtidas.

<i>Hora</i>	6	7	8	9	10
<i>Temperatura</i>	14	17	21	26	27

Reverendo esses dados podemos perguntar se eles poderiam ser utilizados para se fazer uma estimativa de temperatura, digamos às 8 : 30 h (8.5 h) do mesmo dia. Previsões desse tipo podem ser feitas por meio de uma função de ajuste dos dados obtida usando um processo chamado interpolação.

Uma das funções mais úteis que mapeiam os números reais em si mesmos é a classe dos polinômios algébricos,

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

em que  $n$  é inteiro não negativo e  $a_0, \dots, a_n$  são constantes reais. O resultado a seguir é central no estudo da interpolação.

**Teorema 11.** Suponha que  $f$  esteja definida e seja contínua em  $[a, b]$ . Então, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $P(x)$  tal que

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon,$$

para todo  $x \in [a, b]$ .

*Demonstração.* Este é o famoso Teorema da Aproximação de Weierstrass. Sua demonstração pode ser encontrada em: <https://regijs.github.io/eqdif/teoaproximweierstrass.pdf>

Em caso de dúvida, consulte o professor. □

O Teorema 11 afirma que podemos aproximar de forma tão boa quanto queiramos uma função  $f$ , contínua em um intervalo  $[a, b]$ , por um polinômio  $P$ . A expressão “tão boa quanto queiramos” está diretamente ligada ao valor de  $\epsilon$ . Quanto menor  $\epsilon$  melhor a aproximação de  $f$  por  $P$ . Mas por quê aproximar uma função por um polinômio? Um dos motivos para optarmos por este caminho é que polinômios têm derivadas e integrais indefinidas fáceis de calcular, e sendo  $P \approx f$ , temos que suas derivadas e integrais reflitam o comportamento de  $f$ .

Considerando os dados apresentados no início do capítulo podemos usar o GeoGebra para obter um polinômio de grau 4 que passa por todos os 5 pontos dados. Acompanhe a Figura 7.1:

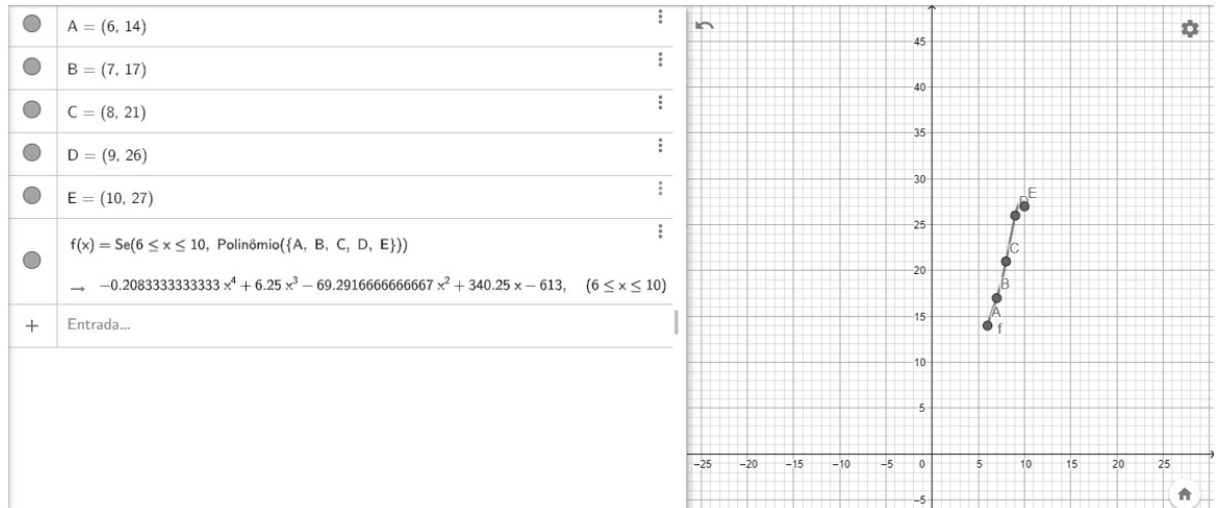


Figura 7.1: Polinômio interpolador usando o GeoGebra.

Observe que, após etc a inserção dos pontos  $(6, 14)$ ,  $(7, 17)$  usamos o comando

$$f(x) = Se(6 \leq x \leq 10, Polinomio(\{A, B, C, D, E\})).$$

## 7.2 Polinômio Interpolador de Lagrange

Nesta seção encontraremos polinômios aproximativos que são determinados especificando-se somente certos pontos através dos quais esses polinômios devem passar.

**Teorema 12.** Se  $x_0, x_1, \dots, x_n$  são  $n + 1$  números distintos e  $f$  é uma função cujos valores são dados nesses números, então existe um único polinômio  $P(x)$  de grau no máximo  $n$  tal que  $f(x_k) = P(x_k)$  para todo  $k = 0, \dots, n$ . Esse polinômio é dado por

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0} + f(x_1)L_{n,1} + \dots + f(x_n)L_{n,n} = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k},$$

em que, para cada  $k = 0, \dots, n$ ,

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

*Demonstração.* Note que

$$L_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_k \\ 0 & \text{se } x = x_j, \quad j \neq k, j = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Como o numerador de cada  $L_{n,k}$  é um produto de  $n$  fatores da forma  $(x - x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $i \neq k$  temos que  $L_{i,k}$  é um polinômio de grau  $n$  e, assim,  $P_n(x)$  será uma combinação de polinômios de grau  $n$  e portanto terá grau menor ou igual a  $n$  (Veja o tópico Revisando 7). □

**Revisando 7.** Se  $P$  e  $Q$  são dois polinômios temos que

$$\text{grau}(P + Q) \leq \max(\text{grau}(P), \text{grau}(Q)).$$

De fato, consideremos os polinômios

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0 \quad \text{e}$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0. \quad \text{Temos três casos (na verdade dois) a considerar.}$$

i)  $n > m$  (e analogamente  $m > n$ )

Neste caso,

$$P(x) + Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0,$$

em que  $c_i = a_i + b_i$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ . Sendo  $a_n \neq 0$ , temos que

$$\text{grau}(P + Q) = \max(\text{grau}(P), \text{grau}(Q)) = \text{grau}(P) = n.$$

ii)  $n = m$

Neste caso,

$$P(x) + Q(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0,$$

em que  $c_i = a_i + b_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Note que  $c_n, c_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  não são necessariamente não nulos. Assim,

$$\text{grau}(P + Q) \leq \max(\text{grau}(P), \text{grau}(Q)) = n.$$

De modo geral,

$$\text{grau}(P_1 + P_2 + \dots + P_n) \leq \max(\text{grau}(P_1), \text{grau}(P_2), \dots, \text{grau}(P_n)).$$

**Exemplo 19.** Utilize os números  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 2,5$  e  $x_2 = 4$  para encontrar o segundo polinômio interpolador para  $f(x) = 1/x$ . Calcule uma aproximação para  $f(3)$  e compare com o valor real.

Solução: Primeiro calculemos  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$ .

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2,5)(x-4)}{(2-2,5)(2-4)} = x^2 - 6,5x + 10,$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(2,5-2)(2,5-4)} = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{32}{3},$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-2)(x-2,5)}{(4-2)(4-2,5)} = \frac{1}{3}x^2 - 1,5x + \frac{5}{3}.$$

Como  $f(x_0) = f(2) = 0,5$ ,  $f(x_1) = f(2,5) = 0,4$  e  $f(x_2) = f(4) = 0,25$ , temos

$$\begin{aligned} P(x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k) L_k(x) &= 0,5(x^2 - 6,5x + 10) + 0,4(-\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{32}{3}) + 0,25(\frac{1}{3}x^2 - 1,5x + \frac{5}{3}) = \\ &= 0,05x^2 - 0,425x + 1,15 \end{aligned}$$

Levando-se em conta o polinômio obtido acima, temos que uma aproximação para  $f(3) = \frac{1}{3}$  é dada por

$$P(3) = 0,05 \cdot 3^2 - 0,425 \cdot 3 + 1,15 = 0,325.$$

Comparando com o valor real,  $f(3)$ , temos

$$|f(3) - P(3)| = -8.33333333333359e - 03,$$

onde obtemos uma precisão de  $10^{-2}$ .

Nesta seção não contamos com um algoritmo “programável” e sua posterior implementação em Octave. Não fique triste, o Octave já faz essa tarefa. Ainda assim apresentaremos algumas implementações.

Surge um detalhe importante: Se usássemos outro método (por sistemas por exemplo) para obtermos um polinômio de grau 2 que passa pelos mesmos pontos dados no Exemplo 19 teríamos o mesmo polinômio como resposta ou teríamos outro? A resposta a esta pergunta é dada pelo próximo teorema.

**Teorema 13.** O polinômio dado no Teorema 11 é único.

*Demonstração.* Suponhamos que exista um outro polinômio  $S(x)$  tal que  $S(x_i) = f(x_i)$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Considere o polinômio:  $T(x) = S(x) - P(x)$ . Veja que

$$T(x_i) = S(x_i) - P(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Como ambos polinômios  $S(x)$  e  $P(x)$  possuem grau  $n$ , então o grau de  $T(x)$  será no máximo  $n$  (Mesma justificativa do tópico Revisando 7). Mas  $T(x)$  tem  $n + 1$  e portanto deve ter grau  $n + 1$  o que é um absurdo de acordo com o Teorema 10. Logo,  $S(x) = P(x)$ .  $\square$

**Exemplo 20.** A tabela a seguir relaciona valores de uma função em diversos pontos. As aproximações para se calcular  $f(1,5)$  obtidas por vários polinômios de Lagrange será comparada.

Índice	$x$	$f(x)$
0	1.0	0.765197686557967
1	1.3	0.620085989561509
2	1.6	0.455402167639381
3	1.9	0.281818559374385
4	2.2	0.110362266922174

**Polinômio de 1º grau:** Como 1,5 está entre 1.3 e 1.6, o polinômio linear mais apropriado utiliza  $x_0 = 1.3$  e  $x_1 = 1.6$ . O chamaremos de  $P_{1,2}(x)$

$$P_{1,2}(1.5) = \frac{(1.5 - 1.6)}{(1.3 - 1.6)}(0.620085989561509) + \frac{(1.5 - 1.3)}{(1.6 - 1.3)}(0.455402167639381) = 0.5102967749467571.$$

**Polinômio de 2º grau:** Dois Polinômios de 2º grau podem ser razoavelmente utilizados, um deles fazendo  $x_0 = 1.3$ ,  $x_1 = 1.6$  e  $x_2 = 1.9$ , o que nos dá

$$P_{1,2,3}(1.5) = \frac{(1.5-1.6)(1.5-1.9)}{(1.3-1.6)(1.3-1.9)} \cdot 0.62008... + \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.9)}{(1.6-1.3)(1.6-1.9)} \cdot 0.45540... + \frac{(1.5-1.3)(1.5-1.6)}{(1.9-1.3)(1.9-1.6)} \cdot 0.28181... = 0.511285640095964,$$

e o outro polinômio fazendo  $x_0 = 1.0$ ,  $x_1 = 1.3$  e  $x_2 = 1.6$ , o que nos dá

$$P_{0,1,2}(1.5) = 0.512471455494054.$$

**Polinômio de 3º grau:** Consideremos as duas escolhas a seguir. Consideremos o polinômio interpolador que passa pelos pontos de abscissas  $x_0 = 1.3$ ,  $x_1 = 1.6$ ,  $x_2 = 1.9$  e  $x_3 = 2.2$ , o que nos dá

$$P_{1,2,3,4}(1.5) = 0.511830188350565.$$

Uma segunda escolha de pontos pode ser dada pelos pontos  $x_0 = 1.0$ ,  $x_1 = 1.3$ ,  $x_2 = 1.6$  e  $x_3 = 1.9$  o que nos dá

$$P_{0,1,2,3}(1,5) = 0.511812669161782.$$

**Polinômio de 4º grau:** Com  $x_0 = 1.0$ ,  $x_1 = 1.3$ ,  $x_2 = 1.6$ ,  $x_3 = 1.9$  e  $x_4 = 2.2$ , o que nos dá

$$P_{0,1,2,3,4}(1.5) = 0.511819968823775.$$

A função que está sendo aproximada é a função de Bessel cujo valor de  $f(1.5)$  é de aproximadamente 0.5118277 (Veja a Figura 7.2), o que nos leva a concluir que a melhor aproximação é obtida por meio de  $P_{1,2,3,4}(1.5)$  ao invés de  $P_{0,1,2,3,4}(1.5)$ . Não acredite, faça as contas  $|f(1.5) - P_\alpha(1.5)|$  para todos os polinômios utilizados!



Figura 7.2: Valor da função de Bessel  $J_0(x)$  para  $x = 1.5$  usando a plataforma WolframAlpha.

O Exemplo 20 nos mostra que a intuição as vezes falha, isto é, um polinômio de grau maior (considerado em mais pontos) não necessariamente produzirá uma aproximação melhor. Porém, é possível se conhecer um limite para o erro onde se conhece algo sobre certa derivada de ordem superior de  $f$ . Antes de tratarmos disto, relembremos um importante teorema do cálculo diferencial, o Teorema de Rolle.

**Revisando 8.** Seja  $f : [ab] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida em um intervalo fechado  $[a, b]$ . Se  $f(x)$  é diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$  e  $f(a) = f(b) = 0$ . Então existe  $\xi \in (a, b)$  tal que  $f'(\xi) = 0$ .  
*Para mais detalhes, consultar [8], pg. 290.*

**Teorema 14.** Seja  $f(x) = E_t(x) + P(x)$ , onde  $P(x)$  é o polinômio interpolador de  $f(x)$  relativamente aos pontos  $x_0, \dots, x_n$  de  $[a, b]$ . Suponha que  $f(x)$  seja  $n + 1$  vezes diferenciável em  $[a, b]$ . Então existe  $\beta \in (a, b)$  tal que

$$E_t(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{n+1}(\beta)}{(n+1)!}.$$

*Demonstração.* Consideremos a função auxiliar

$$\phi(x) = f(x) - p(x) - (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)A.$$

Note que  $\phi(x_0) = \phi(x_1) = \dots = \phi(x_n) = 0$  e, portanto,  $\phi(x)$  se anula em  $n + 1$  pontos. Tome  $z \in (a, b)$  distinto de  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e escolhamos  $A$  tal que  $\phi(z) = 0$  (basta tomar  $A = \frac{f(z) - p(z)}{(z - x_0)(z - x_1) \dots (z - x_n)}$ ). Como  $f$ ,  $P$  e o termo  $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$  são  $n + 1$  vezes diferenciável a função  $\phi(x)$  também o é. Assim, podemos aplicar o Teorema de Rolle repetidas vezes e garantir a existência de  $\xi \in (a, b)$  tal que:

$$0 = \phi^{n+1}(\xi) = f^{n+1}(\xi) - (n+1)!A,$$

donde segue que

$$A = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Portanto,  $E_t(z) = (z - x_0)(z - x_1) \dots (z - x_n) \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$ . Sendo  $z$  arbitrário, temos provado o resultado. □

Não sei se percebeu. Mas teve um pequeno salto em parte da prova do Teorema 14 ocorrendo exatamente na parte “Assim, podemos aplicar o Teorema de Rolle repetidas vezes e garantir a existência de  $\xi \in (a, b)$  tal que:

$$0 = \phi^{n+1}(\xi) = f^{n+1}(\xi) - (n+1)!A$$

” Tente fazer! Em caso de dúvida, consulte o professor.

**Exemplo 21.** Calcule uma aproximação para  $\log_{10}(2.4)$  sabendo que  $\log_{10}(2) = 0.301029995663981$  e  $\log_{10}(3) = 0.477121254719662$ . Calcule uma cota superior para o erro e compare com o erro real. (Use  $\log_{10}(2.4) = 0.380211241711606$ .)

Solução: Temos que

$$P(2.4) = 0.301029995663981 \frac{2.4-3}{2-3} + 0.477121254719662 \frac{2.4-2}{3-2} = 0.37146649928625336.$$

Vemos que o erro absoluto da aproximação é

$$|\log_{10}(2.4) - P(2.4)| = |0.380211241711606 - 0.37146649928625336| = 8.744742425352614e - 03.$$

Agora, analisemos o erro conforme 14. Queremos uma cota superior para  $f''(x)$  em que  $f(x) = \log_{10}(x)$ . Temos que

$$|f''(x)| = \left| \frac{1}{x^2 \ln(10)} \right|,$$

cujo máximo em  $[2, 3]$  ocorre em  $x = 2$ , isto é,  $|f''(x)| \leq \frac{1}{2^2 \ln(10)} = 0.108573620475813$ . Portanto,

$$e(2.4) \leq \frac{|(2.4-2)(2.4-3)|}{2!} \cdot 0.108573620475813 \Rightarrow e(2.4) \leq 1.302883445709756e - 02.$$

Note que a cota máxima de erro,  $1.302883445709756e - 02$ , é maior que o erro real,  $8.744742425352614e - 03$ , o que já era esperado.

## 7.3 No Computador

No GNU Octave, podemos encontrar o polinômio interpolador e esboçar seu gráfico com os seguintes comandos:

**Programa 7.** Gráfico do Polinômio Interpolador (Exemplo 19)

```
xi = [2 2.5 4]';
yi = [0.5 0.4 0.25]';
A = [xi.^3 xi.^2 xi.^1 xi.^0];
a = A \ yi;
xx = linspace(2, 4);
plot(xi, yi, 'ro', xx, polyval(a, xx), 'b-');
```

**Observação 11.** No Programa 7 é muito importante considerar a linha de comando  $xx = \text{linspace}(2, 4)$ . Ela nos mostra o intervalo que cujo gráfico (sua imagem) será exibido. Pode-se alterá-lo para outros valores inferiores a 2 ou superiores a 4. Contudo, devemos tomar bastante cuidado para não sermos enganados por nossos olhos. A interpolação só nos permite controlar o erro em se estimar um valor entre o menor e o maior valor da variável  $x$  (neste caso 2 e 4). Nada de querer estimar  $f(5)$  usando  $P_{[2,4]}(x)$ , nem mesmo  $f(4.0001)$ ! *Consegue pensar em uma situação onde se estimar algo fora do intervalo adequado poderia acarretar grande diferença entre o valor estimado e o valor real? Se não, consulte o professor caso queira saber!*

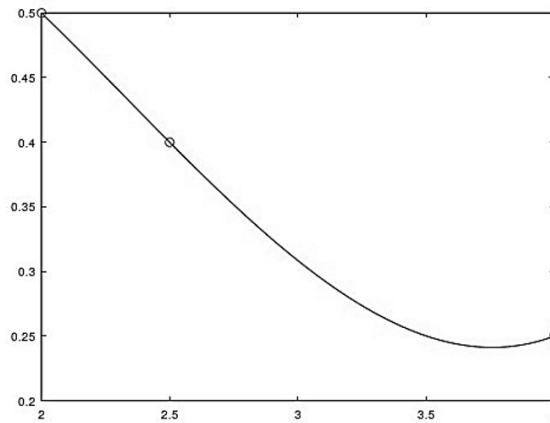


Figura 7.3: Gráfico do Polinômio Obtido no Exemplo 19.

A aplicação de programa acima resulta no gráfico da Figura 7.3:

Podemos usar comandos simples do Octave para fazermos as contas na busca pelos coeficientes do polinômio interpolador. Vejamos os comandos:

**Programa 8.** Coeficientes do Polinômio Interpolador (Exemplo 19)

```
x = [2 2.5 4]';
y = [0.5 0.4 0.25]';
num = poly([x(2), x(3)]);
L1 = num/polyval(num, x(1));
num = poly([x(1), x(3)]);
L2 = num/polyval(num, x(2));
num = poly([x(1), x(2)]);
L3 = num/polyval(num, x(3));
p = y(1) * L1 + y(2) * L2 + y(3) * L3
```

Execute os comando acima para ver o resultado.

## 7.4 Exercícios

**Exercício 24.** Consideremos uma curva com valores conhecidos conforme a tabela dada a seguir:

Índice	$x$	$f(x)$
0	8.0	2.225540928492467
1	8.2	2.270499837532406
2	8.4	2.316366976781092
3	8.6	2.363160693705795
4	8.8	2.410899706417210

Considerando  $p_{i_0, i_1, \dots}(x)$  o polinômio que passa pelos pontos  $x_0, x_1, \dots$  estime  $f(8.5)$  a partir de:

a)  $p_{0,3}(x)$    b)  $p_{1,3}(x)$    c)  $p_{2,3}(x)$    d)  $p_{2,4}(x)$    e)  $p_{1,2,3}(x)$    f)  $p_{0,1,2,3}(x)$    g)  $p_{0,1,2,3,4}(x)$

**Exercício 25.** Sabendo que a função que deu origem aos dados do Exercício 24 foi  $f(x) = e^{0.1x}$  calcule o erro exato e uma cota superior para o erro (Teorema 14) para cada um dos itens a, b, ..., g.

**Observação 12.** No Exercício 25 temos que  $f(x) = e^{0.1x}$  é tal que todas suas derivadas são monótonas crescentes e portanto, o valor de  $\beta$ , exigido para se aplicar o Teorema 14 pode ser substituído pelo maior valor de  $x_i$  da malha considerada. Sendo assim, podemos usar o valor máximo da derivada  $f^{n+1}(x)$  no intervalo  $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  ao obtermos uma cota máxima para o erro ao invés de buscarmos  $\beta$  que nos forneceria o erro exato via Teorema 14.

**Exercício 26.** Considere a função  $f(x) = \sin(x)$ .

- Obtenha o polinômio interpolador de Lagrange de grau 2 nos pontos  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ ;
- Use o polinômio interpolador para estimar  $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$  e calcule o erro exato;
- Use o Teorema 14 para apresentar uma cota superior para o erro ao estimar  $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ .

## 7.5 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 24.** a) 2.34022406617024, b) 2.339995479662448, c) 2.339763835243443, d) 2.340000159190121, e) 2.339648013033941, f) 2.33964686631724, g) 2.339646851838978

**Resposta do Exercício 25.** a)  $e(8.5) = 5.772142442488359e - 04$ ,  $E_{max}(8.5) = 5.907901734264466e - 04$ ,  
b)  $e(8.5) = 3.486277364568302e - 04$ ,  $E_{max}(8.5) = 3.544741040558688e - 04$ ,  
c)  $e(8.5) = 1.169833174516910e - 04$ ,  $E_{max}(8.5) = 1.181580346852889e - 04$ ,  
d)  $e(8.5) = 3.533072641297430e - 04$ ,  $E_{max}(8.5) = 3.616349559625811e - 04$ ,  
e)  $e(8.5) = 1.161107949787521e - 06$ ,  $E_{max}(8.5) = 1.181580346852892e - 06$ ,  
f)  $e(8.5) = 1.439124863722441e - 08$ ,  $E_{max}(8.5) = 1.476975433566115e - 08$ ,  
g)  $e(8.5) = 8.701306342118187e - 11$ ,  $E_{max}(8.5) = 9.040873899064516e - 10$ .

**Resposta do Exercício 26.** a)  $p(x) = -0.335748867362810x^2 + 1.164012859946630x$ , b)  $p\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 0.905330085889910$ ,  
 $e_{exato}\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1.854944662137670e - 02$  c)  $E_{max}\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 3.027956707060529e - 02$ .



# Capítulo 8

## Interpolação Polinomial

## Diferenças Divididas Finitas

### 8.1 Diferenças Divididas Finitas

Nesta parte, veremos uma outra maneira de se encontrar o polinômio interpolador que passa pelos  $n + 1$  pontos  $x_0, \dots, x_n$ , onde  $f$  é conhecida. Lembre-se que o polinômio interpolador é único (Teorema 13).

Consideremos uma função  $f(x)$  contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$ .

Uma DDF de primeira ordem de  $f(x)$  em relação a  $x_0, x_1$  é dada por:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

A DDF de segunda ordem de  $f(x)$  será dada por:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

Assim a DDF de  $n$ -ésima ordem de  $f(x)$  será dada por:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

**Observação 13.** 1) Observe que

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Da mesma mesma forma

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} = \\ &= \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} - \left( \frac{f(x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} - \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} \right) + \frac{f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} - \left( \frac{f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} \right) + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} - \left( \frac{f(x_1)x_1 - f(x_1)x_0 + f(x_1)x_2 - f(x_1)x_1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} \right) + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} - \left( \frac{f(x_1)x_2 - f(x_1)x_0}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} \right) + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} - \frac{f(x_1)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \\
&= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} - \frac{f(x_1)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \\
&= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}.
\end{aligned}$$

Conseguiu observar algum possível padrão para, por exemplo, determinar  $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ ? E  $f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ ?

2) Observe que  $f[x_0, x_1]$  é uma aproximação para  $f'(x_0)$ ,  $f[x_0, x_1, x_2]$  é uma aproximação para  $f''(x_1)$ . Quanto mais perto, uns dos outros, os valores de  $x_i$ , estão, melhor será a aproximação.

**Teorema 15.** A igualdade a seguir é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_0^n \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)}.$$

*Demonstração.* Dá um trabalhinho. O leitor mais perspicaz pode acompanhar a demonstração no Anexo 1. □

Uma DDF tem a seguinte propriedade:  $f[x_n, \dots, x_1, x_0] = f[x_{\alpha_n}, \dots, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_0}]$  onde  $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$  é qualquer permutação dos inteiros  $\{n, \dots, 1, 0\}$ .

## 8.2 Fórmula do Polinômio Interpolador

Consideremos os  $n + 1$  pontos em que  $f(x)$  seja conhecida. Sabemos que existe um único polinômio  $p(x)$  de grau  $n$  que passa por estes pontos. Pela definição de DDF temos que

$$p[x_0, x] = \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0}$$

donde segue que:

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)p[x_0, x] \tag{8.1}$$

Por outro lado,

$$p[x, x_0, x_1] = \frac{p[x_0, x] - p[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

isto é,

$$p[x_0, x] = p[x_0, x_1] + (x - x_1)p[x_0, x_1, x]. \tag{8.2}$$

Substituindo 8.2 em 8.1, temos:

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)p[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)p[x_0, x_1, x] \tag{8.3}$$

Analogamente,

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)p[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)p[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)p[x_0, x_1, x_2, x].$$

Procedendo indutivamente, obtemos:

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)p[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)p[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_n)p[x_0, x_1, \dots, x_n, x].$$

Não é difícil ver que  $p[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = 0$  (Tente mostrar. Em caso de dúvida, consulte o professor!).

Assim,

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)p[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)p[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})p[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

**Exemplo 22.** Construa o polinômio interpolador para a função  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{x}}$  via DDF considerando os pontos  $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ .

Solução: Temos que 4.712388980384690

$$p(x) = f(x_0) + (x - x_0)p[x_0, x_1] = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + (x - \frac{3\pi}{2}) \frac{\frac{\text{sen}(\frac{3\pi}{2})}{\sqrt{\frac{3\pi}{2}}} - \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} =$$

$$= -0.460658865961781 + (x - 4.712388980384690) \cdot (-0.400606814930812) = -0.400606814930812x + 1.427156274185188$$

Sendo assim, o polinômio interpolador é dado por:

$$p(x) = -0.400606814930812x + 1.427156274185188.$$

**Observação 14.** Verifique que o polinômio interpolador de Lagrange de grau 1 que passa pelos pontos dados no Exemplo 22 é exatamente o mesmo. Isso se deve ao fato de o polinômio interpolador ser único conforme apresentado no Teorema 13.

## 8.3 No Computador

Uma forma interessante de se calcular os coeficientes polinomiais via DDF se dá pelo uso de tabelas. Apresentaremos a seguir um desses exemplos o qual exibiremos a implementação capaz de produzir uma tabela semelhante.

**Exemplo 23.** Encontre, via DDF, o polinômio interpolador considerando os valores apresentados no Exemplo 20. Ao final, estime 1, 5.

Solução: No Exemplo 20 nos foi apresentada a seguinte tabela:

Índice	$x$	$f(x)$
0	1.0	0.765197686557967
1	1.3	0.620085989561509
2	1.6	0.455402167639381
3	1.9	0.281818559374385
4	2.2	0.110362266922174

Por meio do Programa 9 a seguir calcularemos o valor das DDF's que precisaremos bem como o avaliaremos o polinômio interpolador em 1, 5. Executando o programa e inserindo na Janela de Comandos o comando

$$DDF([1 \ 1.3 \ 1.6 \ 1.9 \ 2.2]', [0.7651977 \ 0.6200860 \ 0.4554022 \ 0.2818186 \ 0.1103623]')$$

obtemos a seguinte tabela contendo os coeficientes das DDFs.

$f(x)$	Primeiras DDFs	Segundas DDFs	Terceiras DDFs	Quartas DDFs
0.765197686557967	0	0	0	0
0.620085989561509	-0.483705656654860	0	0	0
0.455402167639381	-0.548946073073760	-0.108734027364832	0	0
0.281818559374385	-0.578612027549987	-0.049443257460379	0.065878633227171	0
0.110362266922174	-0.571520974840703	0.011818421182140	0.068068531825021	0.001824915498209

Em seguida, avaliando em 1.5, temos  $P(1.5) = 0.51182$ . Curiosamente a resposta só conta com 5 dígitos.

Sugerimos que sejam feitas, à mão, os cálculos de todas as DDFs  $f[x_0, x_1]$ ,  $f[x_0, x_1, x_2]$ ,  $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$  e  $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$  e, em seguida encontre o polinômio

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Em caso de dúvida, consulte o professor.

**Programa 9.** Coeficientes da DDF e Avaliação Polinomial em Um Valor

```
function[tab] = DDF(x,y)
    d(:,1) = y;
    b0 = d(1,1);
    n = length(x);
    k = 2;
    for i = 2 : n
        for j = 2 : k
            d(i,j) = (d(i,j-1) - d(i-1,j-1))/(x(i) - x(i-j+1));
        end
        k = k + 1;
    end
    disp('A tabela abaixo apresenta todas as diferenças divididas:')
    disp(d)
    for g = 2 : n
        b(g-1) = d(g,g);
    end
    xa = input('Digite o valor de x que se quer avaliar em P(x): [Para terminar digite "fim"]:');
    while xa ~= "fim"
        p = d(1,1);
        for c = 1 : n - 1
            z = 1;
            for m = 1 : c
                z = z * (xa - x(m));
            end
            p = p + z * b(c);
        end
        fprintf('y(%g) = %g \ n', xa, p)
        xa = input('Digite o valor de x que se quer avaliar em P(x): [Para terminar digite "fim"]:');
    end
endfunction
```

Sendo o polinômio interpolador único, toda a teoria desenvolvida no Capítulo 7, em especial, a parte que trata do erro na interpolação (Teorema 14) continua válida.

## 8.4 Exercícios

**Exercício 27.** Refaça, com os devidos ajustes, todos os exercícios do Capítulo 7.

**Observação 15.** O ajuste dos exercícios do Capítulo 7 é feito da seguinte forma: Onde lê-se **polinômio interpolador de Lagrange de grau n**, passe a ler **polinômio interpolador via DDF de ordem n**.

## 8.5 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 27.** Respostas: São as mesmas. Em caso de dúvida, consulte o professor.

# Capítulo 9

## Teoria da Aproximação

### Aproximação Discreta dos Mínimos Quadrados

#### 9.1 Introdução

O estudo da teoria da aproximação envolve dois tipos de problemas genéricos:

- 1) Um problema ocorre quando uma função é dada de forma explícita, mas queremos encontrar um tipo de função “mais simples”, como uma função polinomial que possa ser utilizada para determinar valores aproximados da função dada.
- 2) O outro problema na teoria da aproximação é relativo ao ajuste da função aos dados encontrados, e a se encontrar a “melhor” função em determinada classe para representar todos os dados.

#### 9.2 Mínimos Quadrados

Considere o problema de se estimar a temperatura as 4 : 30 (4.5  $h$ ) a partir de valores tabulados a entre 0 : 00 (0  $h$ ) e 5 : 00 (5  $h$ ) com medições no início de cada hora. Os dados coletados estão dispostos na tabela a seguir:

i	1	2	3	4	5	6
$x_i[h]$	0	1	2	3	4	5
$y_i[^\circ C]$	6.2	9.3	11.2	13.5	14.8	17.0

Vejamos o gráfico apresentando os valores dados acima

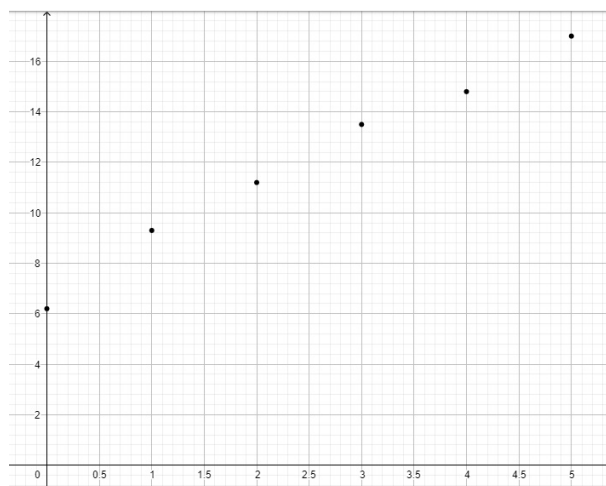


Figura 9.1: Temperatura em Função do Tempo.

Uma rápida observação nos leva a crer que a relação entre  $x$  e  $y$ , entre os tempos 0 : 00 e 5 : 00, tem forte tendência linear uma vez que os pontos apresentam certo alinhamento. Vamos imaginar que os dados coletados apresentam certa precisão não ideal. Neste caso, é razoável esperar que nenhuma curva (ideal) contenha os dados apresentados.

Uma forma de obtermos uma estimativa para a temperatura no instante 4.5 h consiste em determinar a melhor aproximação linear envolvendo a busca de valores de  $a_0$  e  $a_1$  que minimizem

$$E_1(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^6 |y_i - (a_1 x_i + a_0)|.$$

Essa quantidade é chamada de desvio absoluto. Na tentativa de minimizar esta função de duas variáveis recaímos em um sério problema. A função módulo não é diferenciável em zero, e portanto, não podemos usar as ferramentas do cálculo diferencial integral. Mas não se preocupe, resolveremos este impasse a seguir.

A abordagem de mínimos quadrados busca as constantes  $a_0$  e  $a_1$  de modo a minimizar o erro quadrático dado a seguir:

$$E = E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^m (y_i - (a_1 x_i + a_0))^2.$$

Na obtenção do mínimo, façamos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^m (y_i - (a_1 x_i + a_0))^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0) \cdot (-1), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^m (y_i - (a_1 x_i + a_0))^2 = 2 \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0) \cdot (-x_i). \end{aligned}$$

Que resulta no seguinte sistema  $2 \times 2$

$$\begin{cases} a_0 m + a_1 \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^m x_i + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{cases}$$

Por meio da resolução deste sistema podemos encontrar a reta dos mínimos quadrados que aproxima os dados apresentados anteriormente. Pois bem, utilizemos a seguinte tabela auxiliar:

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
0	6.2	0	0
1	9.3	1	9.3
2	11.2	4	22.4
3	13.5	9	40.5
4	14.8	16	59.2
5	17.0	25	85
<b>15</b>	<b>72</b>	<b>55</b>	<b>216.4</b>

Temos portanto, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6a_0 + 15a_1 = 72 \\ 15a_0 + 55a_1 = 216.4 \end{cases}$$

A solução do sistema acima é  $a_0 = 6.8000000000000008$ ,  $a_1 = 2.0799999999999998$ . Logo,

$$P(x) = 2.0799999999999998x + 6.8000000000000008.$$

*Lembre-se que estamos optando por deixar os arredondamentos para a resposta final!*

Uma estimativa para a temperatura ocorrida às 4 : 30 é dada por:

$$T(4.5) \approx P(4.5) = 2.0799999999999998 \cdot 4.5 + 6.8000000000000008 = 16.160000000000000.$$

Portanto,  $P(4.5) \approx 16.2^\circ C$ . (*Arredonde somente aqui!*)

Agora, calculemos  $E_2 = \sum_{i=1}^6 (y_i - P(x_i))^2$ .

$y_i$	$P(x_i)$	$(y_i - P(x_i))^2$
6.2	6.800000000000008	0.360000000000009
9.3	8.880000000000006	0.176399999999995
11.2	10.960000000000000	$5.75999999999754e - 02$
13.5	13.040000000000000	0.211599999999999
14.8	15.120000000000000	0.102399999999999
17.0	17.200000000000000	$3.99999999999829e - 02$

$$E_2 = 0.947999999999999$$

Ao final deste capítulo, no Exercício 29 e Observação 16, faremos um paralelo entre os erros em diferentes ajustes.

Por fim, observe o gráfico constando da reta de ajuste e o valor estimado de  $T(4.5)$ :

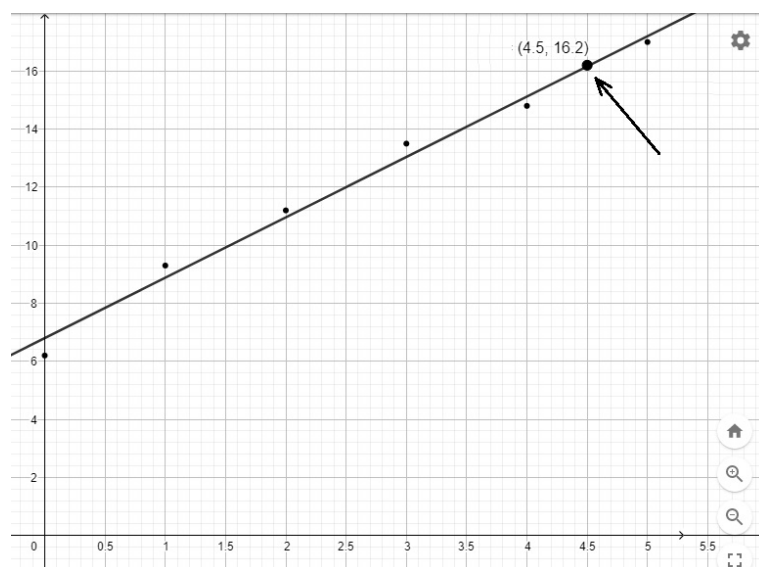


Figura 9.2: Reta de Ajuste Por Mínimos Quadrados.

O problema algébrico de se aproximar um conjunto de dados  $\{(x_i, y_i); i = 1, \dots, m\}$ , com um polinômio algébrico

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

de grau  $n < m - 1$  é tratado de modo semelhante. Neste caso, devemos achar  $a_0, \dots, a_n$  de modo a minimizar

$$E_2 = \sum_{i=1}^m (y_i - P_n(x_i))^2.$$

Isso resulta no seguinte sistema de  $n + 1$  equações

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 m + a_1 \sum x_i^1 + a_2 \sum x_i^2 + \dots + a_n \sum x_i^n & = & \sum y_i \\ a_0 \sum x_i^1 + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \dots + a_n \sum x_i^{n+1} & = & \sum x_i y_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_0 \sum x_i^n + a_1 \sum x_i^{n+1} + a_2 \sum x_i^{n+2} + \dots + a_n \sum x_i^{2n} & = & \sum x_i^n y_i \end{array} \right.,$$

onde escrevemos  $\sum_{i=1}^m = \sum$ .



**Exemplo 24.** Ajuste os dados da tabela a seguir com um polinômio discreto de mínimos quadrados de 2º grau. Ao final apresente o erro quadrático.

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	0	0.25	0.5	0.75	1
$y_i$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

Solução: Utilizemos a seguinte tabela auxiliar:

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
0	1	0	0	0	0	0
0.25	1.2480	0.0625	0.015625	0.00390625	0.321	0.08025
0.5	1.6487	0.25	0.125	0.0625	0.82435	0.412175
0.75	2.1170	0.5625	0.421875	0.31640625	1.58775	1.1908125
1	2.7183	1	1	1	2.7183	2.7183
<b>2,5</b>	<b>8.7680</b>	<b>1.875</b>	<b>1.5625</b>	<b>1.3828</b>	<b>5.4514</b>	<b>4.4015</b>

(Usamos o Excel para construir a tabela anterior dadas suas funcionalidades de “arraste”).

Temos portanto, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5a_0 + 2,5a_1 + 1,875a_2 = 8,7680 \\ 2,5a_0 + 1,875a_1 + 1,5625a_2 = 5,4514 \\ 1,875a_0 + 1,5625a_1 + 1,3828a_2 = 4,4015 \end{cases}$$

Onde obtemos  $a_0 = 1.005075518975769$ ,  $a_1 = 0.864675848193854$  e  $0.843164151806145$ . Logo,

$$P_2(x) = 0.843164151806145x^2 + 0.864675848193854x + 1.005075518975769$$

Agora apresentemos o erro quadrático

$y_i$	$P(x_i)$	$(y_i - P(x_i))^2$
0.00	1.005075518975769	$2.576089287339086e - 05$
0.25	1.273942240512117	$1.011585259161097e - 04$
0.50	1.648204481024232	$2.455390553459973e - 07$
0.75	2.127862240512116	$1.179882689430622e - 04$
1.00	2.712915518975768	$2.899263590031750e - 05$
		$E_2 = 2.741458626882262e - 04$

**Revisando 9.** Um sistema linear  $(n \times n)$  pode ser posto na forma

$$AX = B,$$

em que  $A$  é a matriz quadrada  $n \times n$  composta pelos coeficientes do sistema,  $X$  é o vetor coluna composto de  $n$  linhas representando as variáveis e  $B$  é o vetor coluna, também de  $n$  linhas, formado pelos termos independentes das variáveis. Caso seja possível e determinado ( $\det(A) \neq 0$ ) tal sistema pode ser resolvido tomando-se o produto

$$X = A^{-1}B,$$

em que  $A^{-1}$  é a matriz inversa de  $A$ . Mais a frente, neste material, abordaremos os sistemas lineares e outras formas de resolvê-los. Por hora, resolva da forma que achar melhor. No Octave, o comando usado para inverter uma matriz  $A$  é dado por  $\text{inverse}(A)$ . Outros comandos podem ser usados para solucionar um sistema linear conforme veremos nesse material.

Em certas situações os dados podem estar relacionados por uma relação exponencial da forma:

$$y = be^{ax}.$$

Aplicando  $\ln$  a ambos os membro da função acima, temos:

$$\ln(y) = \ln(be^{ax}) \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(b) + ax \Leftrightarrow Y = B + Ax,$$

onde  $Y = y$ ,  $B = \ln(b)$  e  $A = a$ .

**Exemplo 25.** Ajuste os dados da tabela a seguir com uma curva exponencial obtida pelo método dos mínimos quadrados.

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$y_i$	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

Solução: Utilizemos a seguinte tabela auxiliar:

$i$	$x_i$	$\ln(y_i)$	$x_i^2$	$x_i \ln(y_i)$
1	1.00	1.629	1.0000	1.629
2	1.25	1.756	1.5625	2.195
3	1.50	1.876	2.2500	2.814
4	1.75	2.008	3.0625	3.514
5	2.00	2.135	4.0000	4.270
$\Sigma$	<b>7.50</b>	<b>9.404</b>	<b>11.875</b>	<b>14.422</b>

Portanto, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 5B + 7.50A = 9.404 \\ 7.50B + 11.875A = 14.422 \end{cases},$$

cuja solução é dada por  $A = 0.5056000000000000$ ,  $B = 1.1224000000000000$ . Portanto,  $b = e^{1.1224} = 3.072218687226674$ ,  $a = 0.5056$  donde obtemos a seguinte função de aproximação

$$y = 3.072218687226674e^{0.5056x}.$$

Calcule  $E_2$  e use um soft para esboçar os gráfico de  $y = 3.072218687226674e^{0.5056x}$  juntamente com os pontos.

## 9.3 No Computador

Apresentaremos a seguir um programa que nos auxiliará a obter os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  para o ajuste polinomial de um grau qualquer. Com poucos ajustes ao programa fornecido é possível trabalharmos outros ajustes como o exponencial.

**Programa 10.** Coeficientes do Polinômio de Ajuste e Avaliação em Um Valor

```

function[r] = MQ(xi, yi, grau, x)
    printf('\n');
    i = 0;
    while i <= grau
        V(:, i + 1) = xi.^i;
        i = i + 1;
    endwhile
    a = V \ yi;
    k = 0;
    printf('Os coeficientes do polinômio de ajuste são: \n');
    while k <= grau
        printf('a%d = %d \n', k, a(k + 1));
        k = k + 1;
    endwhile
    j = 0;
    printf('\n');
    fx = 0;
    while j <= grau
        S = a(j + 1) * x.^j;
        fx = fx + S;
        j = j + 1;
    endwhile
    printf('O polinômio de ajuste avaliado em x = %d tem valor %d : \n', x, fx);
endfunction

```

Podemos aplicar o Programa 10 ao Exemplo 24 além de, ao final, o avaliarmos em  $x = 0,6$ . Neste caso, usamos o comando:

$$MQ([0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1]', [1 \ 1.284 \ 1.6487 \ 2.1170 \ 2.7183]', 2, 0.6)$$

O resultado é mostrado na Figura 9.3 a seguir:

```

Janela de Comandos
>> MQ([0 0.25 0.5 0.75 1]', [1 1.284 1.6487 2.1170 2.7183]', 2, 0.6)

Os coeficientes do polinômio de ajuste são:
a0 = 1.00514
a1 = 0.864183
a2 = 0.843657

O polinômio de ajuste avaliado em x = 0.6 tem valor: 1.82736

```

Figura 9.3: Coeficientes do ajuste polinomial de grau 2 referente ao Exemplo 24 e avaliação em  $x = 0,6$ .

Para optarmos por apenas exibirmos os coeficientes como foi solicitado no Exemplo 24, modificamos a primeira linha de comando para  $function[r] = MQ(xi, yi, grau)$  excluindo  $x$  e apagamos todo o código a da linha contendo  $j = 0$ ; em diante exceto o comando *endfunction*. Até o presente momento, por meio do código apresentado, não conseguimos exibir os valores com 16 casas decimais como de costume. Para tanto, realizamos os cálculos separadamente. *Tente reescrever o programa para que se exibam 16 casas decimais.*

O software Microsoft Excel contém uma ferramenta bastante útil associada ao ajuste de curvas. Consideremos os dados correspondentes ao Exemplo 24. Neste caso, seguimos os seguintes passos:

- 1) Disponhamos os dados em duas colunas  $x$  e  $y$ ;
- 2) Selecione os dados e, em seguir, no menu Inserir clique em Inserir Gráfico de Dispersão (X,Y) ou de Bolha e novamente clique em Dispersão;

Neste momento um gráfico de pontos aparece na tela. Continuando, apresentaremos uma forma de vermos as curvas de ajuste linear, polinomial de grau qualquer, exponencial entre outras.

- 3) Dê um duplo clique sobre o gráfico. No menu que irá aparecer escolha a opção Layout Rápido e em seguida Layout 9 (considerando o Office 2016);

Neste momento aparecerá uma reta (aproximação linear), juntamente com sua equação e o valor  $R^2$  (quanto mais perto de 1  $R^2$  estiver, melhor será a aproximação). Para visualizar as demais opções siga o passo 4);

- 4) Dê um duplo clique na reta de ajuste para escolher outras opções de ajuste.

A tela final, considerando o Exemplo 24 é mostrada na Figura 9.4: Embora as células do Excel comportem até 15

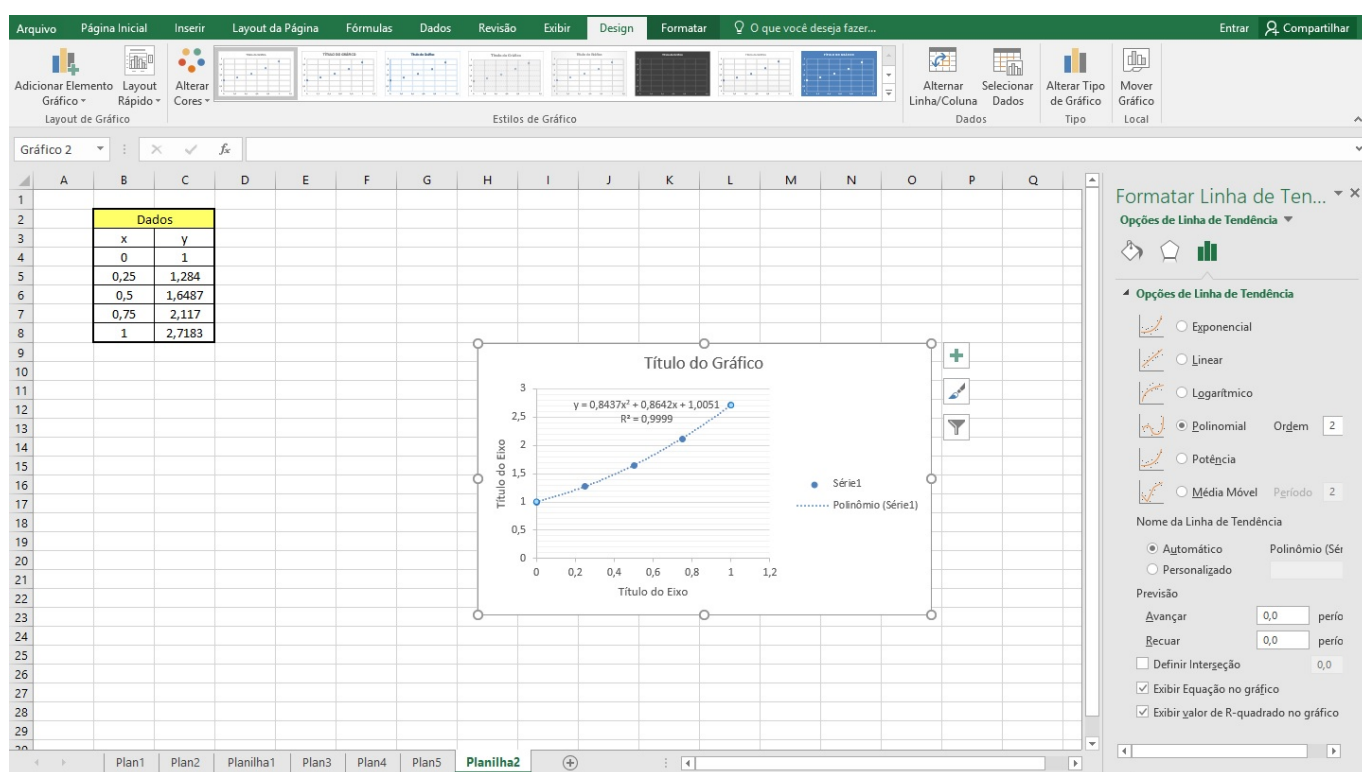


Figura 9.4: Ajuste polinomial de grau 2 referente ao Exemplo 24.

dígitos, os resultados finais, conforme exibidos na Figura 9.4 comportam apenas 4. Ocorre que 4 dígitos são suficientes uma vez que temos em  $y$  valores com 4 casas decimais. Arredondar os coeficientes da função não é o ideal, mas dá para aceitar, não perdemos muita coisa.

Uma alternativa para quem deseja obter de maneira rápida as funções de ajuste com maior precisão (inclusive algumas não apresentadas aqui) é a utilização da plataforma PLANETCALC na seção “Function approximation with regression analysis”. Algumas repostas podem se diferir levemente, o que ocorre muito provavelmente por usarmos de forma híbrida o Excel e o Octave para alguns cálculos.

## 9.4 Exercícios

**Exercício 28.** Encontre os polinômios de mínimos quadrados de graus 1 e 2 para os dados apresentados na tabela a seguir. Calcule o erro em cada caso. Apresente uma estimativa para  $f(1.7)$  usando as curvas de ajuste obtidas.

$x_i$	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
$y_i$	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

**Exercício 29.** Apresentados os dados

$x_i$	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
$y_i$	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

- a) Construa o polinômio de mínimo quadrado de grau 1 e calcule o erro.
- b) Construa o polinômio de mínimo quadrado de grau 2 e calcule o erro.
- c) Construa a aproximação de mínimo quadrado da forma  $be^{ax}$  e calcule o erro.
- d) Construa a aproximação de mínimo quadrado da forma  $bx^a$  e calcule o erro.

Dica: No item 'd', aplique o  $\ln$  a ambos os membros de  $y = bx^a$  obtendo a expressão  $\ln(y) = \ln(b) + a\ln(x)$ . Em resumo, construiremos uma tabela repassando  $x_i$  para  $\ln(x_i)$ , e  $x_i^2$  para  $(\ln(x_i))^2$  e  $y_i$  para  $\ln(y_i)$ . Depois retorne para a forma  $y = bx^a$ . Em caso de dúvida, consulte o professor.

## 9.5 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 28.** O polinômios de graus 1 e 2 são juntamente com os respectivos erros são:  $y = 1.219621342512906x + 0.620895008605856$ ,  $E_2 = 2.719449225473183e - 05$ ;  $y = -1.085343228195123e - 02x^2 + 1.253293135435827x + 5.965807050093975e - 01$ ,  $E_2 = 1.801484230055401e - 05$ .

**Resposta do Exercício 29.** As curvas de ajuste e o erro são dados por:

a)  $y = 7.208451769539666e + 01x - 1.941382407320959e + 02$ ,  $E_2 = 329.0131930338976$ ; b)  $y = 6.618210918382164x^2 - 1.143523368298846x + 1.235560369700269$ ,  $E_2 = 1.442912885932507e - 03$ ; c)  $y = 24.25876025866294e^{3.188777799929138x}$ ,  $E_2 = 417.6909953768654$ ; d)  $y = 6.239029497195922x^{2.019541383008145}$ ,  $E_2 = 7.023205194437010e - 03$ .

**Observação 16.** Observando as respostas dos itens a) e c) do Exercício 29 vemos que o ajuste linear e o ajuste exponencial não são adequados. Dentre os modelos apresentados, o que melhor se adéqua aos dados é o polinômio mínimo quadrado de grau 2, pois o erro é menor que nos demais itens.

**Palavras dos Mestres 8.** Por muitas vezes, ao estudarmos uma matéria passamos, em um primeiro momento, a tê-la como mais importante que as outras que vieram antes e, por muitas vezes as ignoramos. Provavelmente o aluno de Cálculo Numérico já tenha visto Laboratório de Física (presente na maior parte dos cursos de engenharia e alguns outros de exatas). Neste caso, recomenda-se que os cuidados vistos durante a matéria de Laboratório de Física ainda estejam presentes aqui durante esta matéria. Um cuidado que o estudante deve ter é perceber que medidas coletadas no mundo real apresentam certo erro. Neste caso, recomenda-se uma revisão no material de física sobre o tratamento de erros, algarismos significativos etc. Embora apresentamos neste material valores contendo por volta de 16 algarismos, nem todos poderiam ser significativos caso viessem de medições no mundo real. Neste caso, o ideal ao se trabalhar com dados coletados no mundo real é escrever as respostas finais com o número mais adequado de algarismos significativos associados aos instrumentos de medição e equipamentos de cálculos utilizados.

*Em caso de dúvida, consulte o professor de física. Nessa eu passo a bola.*

# Capítulo 10

## Integração

### Regra do Trapézio

#### 10.1 Introdução

Frequentemente nos deparamos com a necessidade de calcular a integral definida de uma função  $f(x)$  sem anti-derivada explícita, ou seja, cuja derivada não é simples de se obter, como, por exemplo

$$\int_a^b e^{-x^2} dx.$$

A interpolação polinomial pode nos ajudar a resolver este problema. Nela aprendemos como gerar o polinômio  $P(x)$  “parecido” com  $f(x)$ . Assim, dada uma função  $f(x)$  a qual aproximamos por  $P(x)$ , podemos considerar as integrais

$$\int_a^b P(x) dx \approx \int_a^b f(x) dx.$$

Neste caso, resolvendo a primeira (integrar polinômio é moleza) na tentativa obtermos uma resposta aproximada da segunda.

#### 10.2 Regra dos Trapézios

Seja  $f(x)$  uma função conhecida apenas nos pontos  $(x_0, f(x_0))$ ,  $(x_1, f(x_1))$ . Por meio de Interpolação de Lagrange sabemos que

$$P(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (10.1)$$

Integrando ambos os membros de (10.1) de  $x_0$  a  $x_1$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} P(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left( f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) dx = \\ &= \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \int_{x_0}^{x_1} x_1(x - x_1) dx + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} x_1(x - x_0) dx = \frac{x_1 - x_0}{2} (f(x_1) + f(x_0)). \end{aligned}$$

Temos, portanto

$$\int_{x_0}^{x_1} P(x) dx = \frac{x_1 - x_0}{2} (f(x_1) + f(x_0)).$$

A Figura 10.2 apresenta a interpretação geométrica da Regra do Trapézio. *Se lembra das aulas de cálculo integral?*

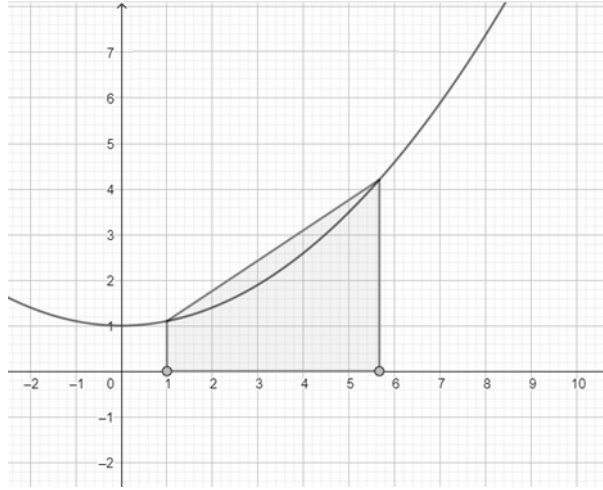


Figura 10.1: Interpretação geométrica da Regra do Trapézio

Vimos anteriormente que o erro na interpolação é dado por  $E_t(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\beta)}{2!}$  para  $\beta \in (x_0, x_1)$ . Integrando, temos

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} E_t(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\beta)}{2!} dx = \\ &= \frac{f''(\beta)}{12} (x_1 - x_0)^3 = \frac{f''(\beta)h^3}{12}. \end{aligned}$$

Portanto, uma cota para o erro cometido ao aplicarmos a Regra do Trapézio é dado por

$$\int_{x_0}^{x_1} E_t(x) dx = -\frac{f''(\beta)h^3}{12}.$$

**Exemplo 26.** Apliquemos a regra do trapézio para calcular  $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$ , onde  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ,  $x_1 = \frac{5\pi}{6}$  e  $f(x) = \sin(x)$ . Apresente uma cota superior para o erro e o erro exato.

Solução: Temos que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{x_1 - x_0}{2} (f(x_1) - f(x_0)) = \frac{5\pi/6 - \pi/3}{2} (\sin(5\pi/6) - \sin(\pi/3)) = 1.072873843286556.$$

Sabemos que  $f''(x) = -\sin(x)$  é tal que  $|f''(\pi/2)| \geq |f''(x)|$  para todo  $x \in (\pi/3, 5\pi/6)$ . Logo,

$$E_{max} = \left| \frac{f''(\pi/2)(5\pi/6 - \pi/3)^3}{12} \right| = 0.322982048753123.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_{\pi/3}^{5\pi/6} \sin(x) dx = 1.366025403784439.$$

Por fim, o erro exato é dado por:

$$E_{ext} = |1.366025403784439 - 1.072873843286556| = 0.293151560497883.$$

### 10.3 Generalizando $n + 1$ pontos

Se tivermos  $(n + 1)$  pontos, digamos  $x_0, \dots, x_n$ , igualmente espaçados, ou seja,  $x_k = x_{k-1} + h$ ,  $(k = 1, \dots, n)$ , temos

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} P_1(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} P_n(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_1 - x_0}{2}(f(x_1) + f(x_0)) + \frac{x_2 - x_1}{2}(f(x_2) + f(x_1)) + \dots + \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_{n-2})) + \frac{x_n - x_{n-1}}{2}(f(x_n) + f(x_{n-1})) = \\
&= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)).
\end{aligned}$$

Obtemos portanto,

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Para o caso geral, em que temos  $n + 1$  pontos,  $x_0, \dots, x_n$ , o erro total será dado por:

$$E = \sum_{i=1}^{n-1} E_{I_i} \quad (10.2)$$

, em que  $E_{I_i}$  é o erro em cada  $(x_{i-1}, x_i)$ .

Há uma certa dificuldade em se utilizar (10.2) uma vez que teremos um  $\beta_i$  associado a cada  $E_{I_i}$ . Neste caso, poderemos achar uma cota superior  $E_{max}$  para o erro. Note que

$$\begin{aligned}
|E| &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} E_{I_i} \right| \leq |E_{I_1} + E_{I_2} + \dots + E_{I_n}| = \left| -\frac{h^3 f''(\beta_1)}{12} - \frac{h^3 f''(\beta_2)}{12} - \dots - \frac{h^3 f''(\beta_n)}{12} \right| \leq \\
&\leq \frac{h^3}{12} |f''(\beta_1)| + \frac{h^3}{12} |f''(\beta_2)| + \dots + \frac{h^3}{12} |f''(\beta_n)| \leq \frac{h^3}{12} M + \frac{h^3}{12} M + \dots + \frac{h^3}{12} M,
\end{aligned}$$

com  $M \geq \max_{0 \leq i \leq n} \{|f''(\beta_i)|\}$ ,  $\beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Continuando, temos

$$\frac{h^3}{12} M + \frac{h^3}{12} M + \dots + \frac{h^3}{12} M = n \frac{h^3}{12} M = nh \frac{h^2}{12} M = (b - a) \frac{h^2}{12} M$$

onde usamos o fato que  $h = \frac{b-a}{n}$ , isto é,  $nh = b - a$ . Portanto

$$E_{max} = (b - a) \frac{h^2}{12} M.$$

Contudo, para termos uma boa cota máxima (cota não muito “grande”) devemos tentar obter  $M$  tal que

$$M = \max_{0 \leq i \leq n} \{|f''(\beta_i)|\}.$$

**Exemplo 27.** Aplique a regra do trapézio generalizada para calcular  $\int_I \sin(x)dx$  usando os pontos  $x_0 = \frac{\pi}{3}, x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \frac{5\pi}{6}$ . Apresente uma estimativa para o erro e compare com o erro exato.

Solução: Temos que  $h = \frac{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$ . Assim,

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin(x)dx = \frac{\pi}{6} \left( f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 1.334673231085705$$

Temos que

$$E_{ext} = |1.366025403784439 - 1.334673231085705| = 3.135217269873403e - 02$$

Note que  $f(x) = \sin(x)$  é tal que  $f''(x) = -\sin(x)$ , donde segue

$$|f''(x)| \leq 1, \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right].$$

Sendo assim, podemos tomar  $M = 1$ . Portanto,

$$E_{max} = \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{12} \cdot 1 = 3.588689430590256e - 02.$$



**Observação 17.** No Exemplo 27, dada simplicidade da função envolvida, podemos melhorar um pouco a cota  $E_{max}$  (diminuindo-a) escolhendo valores de  $M$  em cada subintervalo envolvido. Neste caso, não é difícil ver que

$$E'_{max} = \left| \frac{f''(\pi/2)(\pi/2 - \pi/3)^3}{12} \right| + \left| \frac{f''(\pi/2)(2\pi/3 - \pi/2)^3}{12} \right| + \left| \frac{f''(2\pi/3)(5\pi/6 - 2\pi/3)^3}{12} \right| = 3.428425024788130e - 02.$$

Entendeu a escolha de  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{2\pi}{3}$  na determinação de  $E'_{max}$ ? Em caso de dúvida, consulte o professor. Em qualquer caso, tanto  $E_{max} = 3.588689430590256e - 02$  quanto  $E'_{max}$  maiores ou igual que  $E_{ext} = 3.135217269873403e - 02$ .

**Exemplo 28.** Quantos pontos do intervalo  $[0, 1]$  são necessários para estimarmos a integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

com erro menor ou igual a  $10^{-4}$  usando a regra do trapézio?

Solução: Devemos ter que  $(b-a)\frac{h^2}{12}M \leq 10^{-4}$ . Temos que  $f(x) = e^{-x^2}$  é tal que  $f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$ , donde segue

$$|f''(x)| = |e^{-x^2}(4x^2 - 2)| \leq e^{-0^2}(4 \cdot 1^2 - 2) = 1 \cdot 2 = 2 \Rightarrow M = 2.$$

Assim,

$$(b-a)\frac{h^2}{12}M = 10^{-4} \Rightarrow (1-0)\frac{h^2}{12} \cdot 2 = 10^{-4} \Rightarrow h^2 = 6 \cdot 10^{-4} \Rightarrow h = 2.449489742783178e - 02$$

Como  $n = \frac{b-a}{h}$ , temos

$$n = \frac{1-0}{2.449489742783178e - 02} \uparrow = 40.82482904638631 \uparrow = 41.$$

Portanto, precisaremos de pelo menos uma malha com 41 pontos para atingirmos uma estimativa da integral dada com precisão de  $10^{-4}$ . Obviamente pode ocorrer com menos pontos, mas temos que trabalhar com o que temos.

O exemplo a seguir o ajudará a encontrar cotas superiores para funções nos intervalos dados. Ele segue a regra de dividir uma função em partes. *O Exemplo 29 é uma relíquia.*

**Exemplo 29.** Determine cotas superiores absolutas para funções a seguir nos intervalos dados:

a)  $f(x) = 10, x \in [0, 2]$

b)  $g(x) = \frac{3}{4-x}, x \in [-1, 1]$

c)  $h(x) = xe^{-x}, x \in [0, 2]$

d)  $k(x) = x^2 + \text{sen}(x), x \in [-2, 2]$

e)  $s(x) = \frac{(x^2-2x)\text{sen}(x)}{\ln(x)+1}, x \in [0.5, 3]$

Solução: a) Note que  $f(x) = 10$  é constante. Neste caso, uma cota superior será  $M = 10$ .

b) Note que a imagem da função em questão diminui à medida que o denominador aumenta e vice-versa. Após uma rápida observação pode-se notar que o denominador é o menor possível para  $x = 1$ . Neste caso, temos que

$$|g(x)| \leq \frac{3}{4-1} = 1.$$

Portanto, uma cota superior será  $M = 1$ .

c) Note que temos um produto de funções  $h_1(x) = x$  e  $h_2(x) = e^{-x}$ . Podemos observar cada uma separadamente:

$$|h_1(x)| = |x| \leq |2| = 2$$

$$|h_2(x)| = |e^{-x}| \leq |e^{-0}| = 1$$

Sendo assim,

$$|h(x)| = |xe^{-x}| = |x||e^{-x}| \leq 2 \cdot 1 = 2.$$

Portanto, uma cota superior será  $M = 2$ .

d) Note que temos uma soma de funções  $k_1(x) = x^2$  e  $k_2(x) = \text{sen}(x)$ . Neste caso,

$$|k_1(x)| = |x^2| \leq |2^2| = 4$$

$$|k_2(x)| = |\text{sen}(x)| \leq |\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)| = 1.$$

Sendo assim,

$$|k(x)| = |x^2 + \text{sen}(x)| \leq |x^2| + |\text{sen}(x)| \leq 4 + 1 = 5.$$

Portanto, uma cota superior será  $M = 5$ .

e) Note que temos tanto produto como divisão de funções. Neste caso, procurar valores que produzam maiores valores absolutos nas funções do numerador e menores valores absolutos nas funções do denominador. Pois bem,

$$|s_1(x)| = |x^2 - 2x| \leq |x^2| + |2x| \leq |3^2| + |2 \cdot 3| \leq 15$$

$$|s_2(x)| = |\text{sen}(x)| \leq \text{sen}(\pi/2) = 1$$

$$|s_3(x)| = |\ln(x) + 1| \geq |\ln(0.5) + 1| = -0.693147180559945 + 1 = 0.306852819440055.$$

Sendo assim,

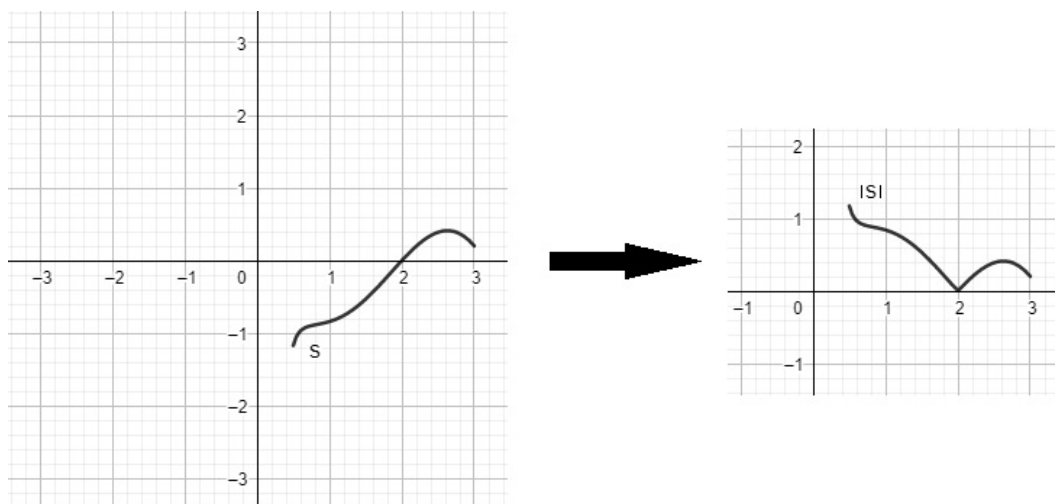
$$|s(x)| = \left| \frac{(x^2 - 2x)\text{sen}(x)}{\ln(x) + 1} \right| \leq \frac{1 \cdot 15}{0.306852819440055} = 48.88337029906394.$$

Portanto, uma cota superior será  $M = 48.88337029906394$ .

**Observação 18.** No Exemplo 29 item ‘c’ convém ressaltar que a igualdade  $xe^{-x} = 2$  não necessariamente deva ocorrer para algum valor  $x \in [0, 2]$ . Aqui buscamos uma cota superior em  $[0, 2]$  e não necessariamente um máximo neste intervalo. Caso, tal cota seja atingida teremos uma cota máxima ideal ou um máximo desta função em  $[0, 2]$ . Em particular,  $|xe^{-x}| < 2$  para todo  $x \in [0, 2]$  (Esboce o gráfico para ver). O mesmo ocorre no item ‘d’, não havendo garantias que a cota encontrada seja o valor máximo no intervalo  $[0.5, 3]$ . Por exemplo, poderíamos obter outras cotas para  $s_1(x)$ . De fato, note que  $|x^2 - 2x| \leq 3$  (resolva a equação). Neste caso, poderíamos repassar 15, para 3. Neste caso,

$$|s(x)| = \left| \frac{(x^2 - 2x)\text{sen}(x)}{\ln(x) + 1} \right| \leq \frac{3 \cdot 1}{0.306852819440055} = 9.776674059812787.$$

Poderíamos ainda recorrer a uma estimativa visual geral do gráfico de  $s(x)$  conforme a Figura 18:



Uma cota superior ainda melhor poderia ser algo um pouco maior que 1.2 uma vez que o ponto mais baixo do gráfico

de  $s$ . Ou ainda, notando que  $s$  é estritamente crescente, tomemos que o ponto mais alto (e mais baixo) do gráfico de  $s$  ocorre em um dos extremos do intervalo  $[0.5, 3]$ . Neste caso,  $x = 0.5$ . Sendo assim,

$$|s(x)| = \left| \frac{(x^2 - 2x)\sin(x)}{\ln(x) + 1} \right| \leq s(0.5) = 1.171796806720871.$$

Neste caso, nossa cota superior, também máximo de  $|s|$  (ou mínimo de  $s$ ) seria  $M = s(0.5) = 1.171796806720871$ . Neste ultimo caso agimos de modo semelhante ao feito na Observação 4 onde buscamos uma faixa em com centro na origem na qual o gráfico de  $s$  esteja totalmente contido. Volte ao Exemplo 29 e verifique quais cotas superiores podem ser melhoradas (diminuídas).

No Exemplo 28 podemos tentar obter um valor menor que 41 (menos pontos = menos cálculos). Neste último caso, usando um software gráfico é possível notar que  $f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$  é estritamente crescente em  $[0, 1]$ . Assim, atinge seus valores mais altos nos extremos do intervalo  $[0, 1]$ . Não é difícil ver que

$$|f''(x)| = |e^{-x^2}(4x^2 - 2)| \leq e^{-0^2}(4 \cdot 0^2 - 2) = 2$$

o que não diminui o valor 41, mas nos deixa mais calmos em saber que 2 é o valor máximo de  $|f''(x)|$  e não há mais o que melhorar. Em caso de dúvida, consulte o professor. **Em todos os Exercícios ao final deste capítulo foram usadas as melhores (menores) cotas superiores para estimativas de erro.**

## 10.4 No Computador

Apresentaremos a seguir um programa que nos possibilitará calcular a integral aproximada via regra do trapézio.

**Programa 11.** Regra do Trapézio Generalizada

```
function[y] = trapG(f, a, b, n)
    h = (b - a)/n;
    x = linspace(a, b, n + 1);
    y = h * (f(x(1)) + f(x(n + 1)))/2;
    for i = 2 : n
        y = y + h * f(x(i));
    endfor
endfunction
```

**Palavras dos Mestres 9.** Retirar alguns “;” é bastante importante para entendermos os passos em alguns programas. No Programa 11, o comando  $x = \text{linspace}(a, b, n + 1)$  facilita bem as contas uma vez que gera a partição  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sob a qual trabalharemos. Sem este comando necessitaríamos, provavelmente de mais um *while* ou algumas modificações em outras partes do programa. Para ver a malha, retire o “;” da terceira linha do programa.

**Observação 19.** Note que, no Programa 11 os valores referentes a  $f(x_1)$  e  $f(x_{n+1})$  (que na verdade são  $f(x_0)$  e  $f(x_n)$ ) são calculados anteriormente uma vez que não estão multiplicados por 2 na fórmula geral e, portanto, não são levados em conta no *while*.

Aplicando o Programa 11 aos Exemplos 26 e 27, temos:

Exemplo 26:  $\text{trapG}(f = @(x)\sin(x), \pi/3, 5 * \pi/6, 1) = 1.072873843286556$

Exemplo 27:  $\text{trapG}(f = @(x)\sin(x), \pi/3, 5 * \pi/6, 3) = 1.334673231085705$

## 10.5 Exercícios

**Exercício 30.** Aproxime as seguintes integrais utilizando a regra do trapézio.

- a)  $\int_{0.5}^1 x^4 dx$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $x_1 = 1$ ;
- b)  $\int_0^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.5$ ;
- c)  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ;
- d)  $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen}(x) dx$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \pi/4$ .

**Exercício 31.** Encontre um limitante para o erro no Exercício 30 e compare-o com o erro exato.

**Exercício 32.** Resolva todo o Exercício 30 usando 3 pontos ao invés de 2. Compare os resultados com o valor exato sempre que possível. Tente obter o  $E_{max}$ .

**Exercício 33.** Utilize a regra do trapézio nos itens abaixo com os valores de  $n$  indicados.

- a)  $\int_1^2 x \ln(x) dx$ ,  $n = 4$  ( $n = 4$  significa que são considerados os pontos  $x_0, \dots, x_4$ );
- b)  $\int_{-2}^2 x^3 e^{-x} dx$ ,  $n = 4$ ;
- c)  $\int_0^2 \frac{2}{x^2+4} dx$ ,  $n = 6$ ;
- d)  $\int_1^3 \frac{x}{x^2+4} dx$ ,  $n = 8$ .

## 10.6 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 30.** a) 0.265625; b)  $-0.267857142857143$ ; c) 0.183939720585721; d) 0.218089506238715.

**Resposta do Exercício 31.** Seguem os erros exatos e as cotas para o erro:

- a)  $-7.187499999999999e-02$  e  $0.1250000000000000$       b)  $7.941428571430209e-04$  e  $9.718172983479105e-04$
- c)  $2.333692644293300e-02$  e  $0.1666666666666667$       d)  $6.634309232196300e-02$  e  $8.074551218828077e-02$

Dica: a)  $|[x^4]''| = |12x^2|$  atinge seu valor máximo em  $x = 1$ , b)  $\left| \left[ \frac{2}{x-4} \right]'' \right| = \left| \frac{4}{(x-4)^3} \right|$  atinge seu valor máximo em  $x = 0.5$ , c)  $|[x^2 e^{-x}]''| = |e^{-x}(x^2 - 4x + 2)|$  atinge seu valor máximo em  $x = 0$ , d)  $|[x \operatorname{sen}(x)]''| = |2 \cos(x) - x \operatorname{sen}(x)|$  atinge seu valor máximo em  $x = 0$ .

**Resposta do Exercício 32.** Usando a estimativa  $(b-a)\frac{h^2}{12}M$ , com  $M$  aproveitado da Resposta do Exercício 31, temos:

- a)  $\int_{0.5}^1 x^4 dx \approx 0.2119140625$ ,  $E_{ext} = 1.816406249999999e-02$ ,  $E_{max} = 3.125000000000000e-02$ ,
- b)  $\int_0^{0.5} \frac{2}{x-4} dx \approx 0.267261904761905$ ,  $E_{ext} = 1.989047619049833e-04$ ,  $E_{max} = 2.429543245869776e-04$
- c)  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx \approx 0.167786192756940$ ,  $E_{ext} = 7.183398614152015e-03$ ,  $E_{max} = 4.166666666666666e-02$
- d)  $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen}(x) dx \approx 0.168059348248958$ ,  $E_{ext} = 1.631293433220599e-02$ ,  $E_{max} = 2.018637804707019e-02$ .

**Resposta do Exercício 33.** a) 0.639900477687986, b)  $-31.36528565006375$ , c) 0.784240766617816, d) 0.476976866514718.

# Capítulo 11

## Integração

## Regra de Simpson

### 11.1 Regra de Simpson

A regra dos trapézios utiliza polinômios interpolantes de grau 1, uma vez que trabalha de "dois em dois" pontos. A Regra de Simpson, por sua vez, utiliza polinômios de grau 2. Considere o polinômio interpolante de grau 2 que passa pelos pontos  $x_0, x_1, x_2$

$$P(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Integrando  $P(x)$  de  $x_0$  a  $x_2$ , temos

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

É possível mostrar que

$$\int_{x_0}^{x_1} E_t(x) dx = -\frac{f^{(4)}(\beta)h^5}{90}.$$

**Exemplo 30.** Aplique a 1ª regra de Simpson para calcular  $\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx$ , onde  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ,  $x_1 = \frac{7\pi}{12}$ ,  $x_2 = 5\pi/6$  e  $f(x) = \sin(x)$ . Em seguida compare com o valor exato e apresente uma cota superior para o erro.

Solução: Temos que  $h = \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{7\pi/12 - \pi/3}{2} = \pi/4$ .

$$\int_{\pi/3}^{5\pi/6} \sin(x) dx = \frac{\pi/4}{3} (\sin(\pi/3) + 4\sin(7\pi/12) + \sin(5\pi/6)) = 1.369139774356314.$$

O erro exato é dado por:

$$E_{ext} = 3.114370571875025e - 03.$$

Sabemos que  $f^{(4)}(x) = \sin(x)$  é tal que  $|f^{(4)}(\frac{\pi}{2})| \geq |f^{(4)}(x)|$  para todo  $x \in (\pi/3, 5\pi/6)$ . Logo,

$$E_{max} = \left| \frac{f^{(4)}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right)^5}{90} \right| = 3.320526093590293e - 03.$$

### 11.2 Generalizando $n + 1$ pontos

Para  $n + 1$  pontos  $x_0, \dots, x_n$ , temos

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Podemos obter uma cota superior para erro quando se aplica a regra de Simpson Generalizada. De fato,

$$\begin{aligned} |E| &= \left| \sum_{i=1}^{n-1} E_{I_i} \right| \leq |E_{I_1} + E_{I_2} + \dots + E_{I_n}| = \left| -\frac{h^5 f^{(4)}(\beta_1)}{90} - \frac{h^5 f^{(4)}(\beta_2)}{90} - \dots - \frac{h^5 f^{(4)}(\beta_n)}{90} \right| \leq \\ &\leq \frac{h^5}{90} |f^{(4)}(\beta_1)| + \frac{h^5}{90} |f^{(4)}(\beta_2)| + \dots + \frac{h^5}{90} |f^{(4)}(\beta_n)| \leq \frac{h^3}{12} M + \frac{h^5}{90} M + \dots + \frac{h^5}{90} M, \end{aligned}$$

com  $M \geq \max_{0 \leq i \leq n} \{|f^{(4)}(\beta_i)|\}$ ,  $\beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Continuando, temos

$$\frac{h^5}{90} M + \frac{h^5}{90} M + \dots + \frac{h^5}{90} M = n \frac{h^5}{90} M = nh \frac{h^4}{90} M = \frac{b-a}{2} \frac{h^4}{90} M = (b-a) \frac{h^4}{180} M$$

onde usamos o fato que  $\frac{h}{2} = \frac{b-a}{n}$ , isto é,  $nh = \frac{b-a}{2}$ . Portanto

$$E_{max} = (b-a) \frac{h^4}{180} M.$$

Contudo, para termos uma boa cota máxima (cota não muito “grande”) devemos tentar obter  $M$  tal que

$$M = \max_{0 \leq i \leq n} \{|f^{(4)}(\beta_i)|\}.$$

**Exemplo 31.** Aplique a 1ª Regra de Simpson à integral dada no Exemplo 30 considerando os pontos  $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ,  $x_1 = \frac{11\pi}{24}$ ,  $x_2 = \frac{7\pi}{12}$ ,  $x_3 = \frac{17\pi}{24}$  e  $x_4 = \frac{5\pi}{6}$ . Obtenha o erro exato e uma cota superior para o erro.

Solução: Temos que

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} P(x) dx = \frac{\pi}{3} \left( f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4f\left(\frac{11\pi}{24}\right) + 2f\left(\frac{7\pi}{12}\right) + 4f\left(\frac{17\pi}{24}\right) + f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 1.366209250278155.$$

Temos que o erro exato é dado por:

$$E_{ext} = 1.838464937160555e - 04$$

Usando a estimativa  $(b-a) \frac{h^4}{180} M$  e  $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ , temos que uma cota para o erro é dada por:

$$E_{ext} = \left( \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{11\pi}{24} - \frac{\pi}{3}\right)^4}{180} = 2.075328808493934e - 04.$$

**Exemplo 32.** Quantos pontos do intervalo  $[0, 1]$  são necessários para estimarmos a integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

com erro menor ou igual a  $10^{-4}$  usando a regra de Simpson?

Solução: Devemos ter que  $(b-a) \frac{h^4}{180} M \leq 10^{-4}$ . Temos que  $f(x) = e^{-x^2}$  é tal que  $f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$ , donde segue

$$|f^{(4)}(x)| = |4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)| \leq |4e^{-0^2}(4 \cdot 0^4 - 12 \cdot 0^2 + 3)| = 12 \Rightarrow M = 12.$$

Dê uma olhada no gráfico de  $f^{(4)}(x)$ .

Assim,

$$(b-a) \frac{h^4}{180} M = 10^{-4} \Rightarrow (1-0) \frac{h^4}{180} \cdot 12 = 10^{-4} \Rightarrow h^4 = 15 \cdot 10^{-4} \Rightarrow h = 0.196798967126543$$

Como  $n = \frac{b-a}{h}$ , temos

$$n = \frac{1-0}{0.196798967126543} \uparrow = 5.081327481546147 \uparrow = 6.$$

Portanto, precisaremos de pelo menos uma malha com 6 pontos para atingirmos uma estimativa da integral dada com precisão de  $10^{-4}$ .

## 11.3 No Computador

Apresentaremos a seguir um programa que nos permitirá calcular a integral aproximada via Regra de Simpson.

**Programa 12.** Regra do Simpson Generalizada

```
function[y] = simpG(f,a,b,n)
    h = (b - a)/(2 * n);
    x = linspace(a,b,2 * n + 1);
    y = f(x(1));
    for i = 1 : n - 1
        y = y + 2 * f(x(2 * i + 1));
    endfor
    for i = 1 : n
        y = y + 4 * f(x(2 * i));
    endfor
    y = y + f(x(2 * n + 1));
    y = h * y/3;
endfunction
```

Aplicando o Programa 12 aos Exemplos 30 e 31, temos:

Exemplo 30  $\text{simpG}(f = @(x)\sin(x), \pi/3, 5 * \pi/6, 1) = 1.369139774356314$

Exemplo 31  $\text{simpG}(f = @(x)\sin(x), \pi/3, 5 * \pi/6, 2) = 1.366209250278155$

**Observação 20.** Note que, para uma partição composta de 3 pontos,  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  atribuímos o valor 1 para  $n$ . Isso decorre do fato de o Programa 12 tomar a quantidade de pontos como sendo  $2 * n + 1$ , isto é, para  $n = 1$  temos  $2 * 1 + 1 = 3$  pontos. Para  $n = 2$ , temos  $2 * 2 + 1 = 5$  pontos. Por que esse ajuste foi necessário? Para entender isto, consulte o Algoritmo 4.1 em ([1], pq. 227). Embora o Programa 12 não siga estritamente este algoritmo, a essência do ajuste utilizado segue a mesma linha. Implemente um programa seguindo os passos deste algoritmo e compare-o com o programa apresentado aqui. Há diferenças significativas? Como se pode comparar dois programas que fazem a mesma coisa?

**Palavras dos Mestres 10.** Na Observação 20 Surge um questionamento interessante: “Como podemos comparar dois programas que produzem dados iguais ou levemente diferentes (dentro da margem da tolerância)? Uma forma de se fazer isto é, analisando a complexidade ou medindo-se o tempo. Lembre-se que, a solução não é a única coisa que importa. A velocidade com que ela é obtida é, também, algo fundamental. Neste caso, recomenda-se colocarmos um marcador de tempo no início e no final do programa em questão. Para exemplificar isto, tomemos o Exemplo 31. Logo após a linha de comando  $\text{function}[y] = \text{simpG}(f, a, b, n)$ , nossa primeira linha, podemos inserir o comando  $t1 = \text{time}$  (não importa como esse time é contado, ou qual sua unidade, faremos uma comparação relativa). Em seguida, antes de nossa ultima linha de comando  $\text{endfunction}$  colocamos duas linhas de comando  $t2 = \text{time}$  e, em seguida,  $t = t2 - t1$ . Neste caso, além da saída do resultado teremos também a duração do processo. Nesta caso, os programas devem ser testados na mesma máquina, de preferência com quaisquer outros programas não essenciais desligados. Além disso, recomenda-se tomarmos diversas amostras de tempo juntamente com a média aritmética. Dessa forma poderemos comparar um programa com o outro. Vejamos as telas do Editor e Janela de Comandos na Figura 11.3:

```

Editor
Arquivo Editar Visualizar Depurar Executar Ajuda
teste12.m teste11.m
1 clc
2 clear all
3 format long
4
5 function [y] = simpG(f,a,b,n)
6     t1=time;
7     h = (b-a)/(2*n);
8     x = linspace(a,b,2*n+1);
9     y = f(x(1));
10    for i = 1:n-1
11        y = y + 2*f(x(2*i+1));
12    endfor
13    for i = 1:n
14        y = y + 4*f(x(2*i));
15    endfor
16    y = y + f(x(2*n+1));
17    y = h*y/3;
18    t2=time;
19    t=t2-t1
20 endfunction

Janela de Comandos
>> simpG(f = @(x)sin(x),pi/3,5*pi/6,2)
t = 1.010894775390625e-04
ans = 1.366209250278155
>>

```

## 11.4 Exercícios

**Exercício 34.** Aproxime as seguintes integrais utilizando a regra de Simpson.

- $\int_{0.5}^1 x^4 dx$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $x_1 = 0.75$ ,  $x_2 = 1$ ;
- $\int_0^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.25$ ,  $x_2 = 0.5$ ;
- $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 1$ ;
- $\int_0^{\pi/4} x \sin(x) dx$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{8}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{4}$ ;

**Exercício 35.** Encontre uma limitante para o erro no Exercício 34 e compare com o erro exato.

**Exercício 36.** Use a 1ª regra de Simpson para aproximar  $\int_0^2 x e^x dx$

- usando  $h = 0.25$ ;
- usando  $h = 0.125$ .

## 11.5 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 34.** a) 0.194010416666667, b) -0.267063492063492, c) 0.162401683480679, d) 0.151382628919040.

**Resposta do Exercício 35.** Os erros exatos e as cotas para o erro:

- $2.6041666666669849e-04$  e  $2.604166666666667e-04$ , b)  $7.068144470268045e-07$  e  $9.916503044366435e-07$ ,
  - $1.798889337890991e-03$  e  $4.166666666666667e-03$ , d)  $-3.637849977120022e-04$  e  $-4.150657616987866e-04$
- Dica: a)  $|[x^4]^{(4)}| = 24$  atinge seu máximo em qualquer ponto do intervalo  $[0.5, 1]$ , b)  $\left| \left[ \frac{2}{x-4} \right]^{(4)} \right| = \frac{48}{(x-4)^5}$  atinge seu máximo em  $x = 0.5$ , c)  $|[x^2 e^{-x}]^{(4)}| = e^{-x}(x^2 - 8x + 12)$  atinge seu máximo em  $x = 0$ , d)  $|[x \sin(x)]^{(4)}| = x \sin(x) - 4 \cos(x)$  atinge seu máximo em  $x = 0$ .

**Resposta do Exercício 36.** a) 8.389102022529084; b) 8.389058974666806.



# Capítulo 12

## Integração

## Quadratura Gaussiana

### 12.1 Introdução

As fórmulas de integração numéricas vistas anteriormente foram obtidas integrando-se polinômios interpoladores. Além disso, temos a utilização de pontos uniformemente espaçados.

Por sua vez, a Quadratura Gaussiana escolhe pontos para se calcular a aproximação de uma maneira ótima, em vez de considerar apenas pontos igualmente espaçados.

**Teorema 16.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua,  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada integrável e  $g([c, d]) \subset [a, b]$ . Então,

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt.$$

A quadratura gaussiana afirma que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(t_i),$$

onde os nós  $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$  e os coeficientes  $w_1, \dots, w_n$  são escolhidos de modo a minimizar o erro esperado para o cálculo da aproximação.

Pois, bem seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + \frac{b+a}{2}$ . Observe que  $g(-1) = a$  e  $g(1) = b$ . Aplicando o Teorema 16 temos:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 F(t) dt$$

onde

$$F(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2}.$$

Assim, para sabermos o valor de  $\int_a^b f(x) dx$  basta calcular  $\int_{-1}^1 F(t) dt$ .

Por meio da quadratura gaussiana, temos

$$\int_{-1}^1 F(t) dt = \sum_{i=0}^n w_i F(t_i),$$

onde  $w_k$  são chamados de pesos e  $t_k$  são pontos do intervalo  $[-1, 1]$ .

A seguir identificaremos estes pontos e pesos para  $n = 1$ , isto é, dois pontos apenas. Devemos achar  $w_0, w_1, t_0$  e  $t_1$ , tais que

$$\int_{-1}^1 F(t) dt = w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1).$$

Necessitamos de um sistema de 4 equações para descobrir estas incógnitas. Note que, estas incógnitas não depende de  $F(t)$ , donde podemos escolher  $F(t) = t^k$ . Portanto,

$$\begin{aligned} k=0 &\Rightarrow \begin{cases} 2 = \int_{-1}^1 t^0 dt = w_0 t_0^0 + w_1 t_1^0 \\ 0 = \int_{-1}^1 t^1 dt = w_0 t_0^1 + w_1 t_1^1 \\ \frac{2}{3} = \int_{-1}^1 t^2 dt = w_0 t_0^2 + w_1 t_1^2 \\ 0 = \int_{-1}^1 t^3 dt = w_0 t_0^3 + w_1 t_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = w_0 t_0^0 + w_1 t_1^0 \\ 0 = w_0 t_0^1 + w_1 t_1^1 \\ \frac{2}{3} = w_0 t_0^2 + w_1 t_1^2 \\ 0 = w_0 t_0^3 + w_1 t_1^3 \end{cases} \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, temos

$$w_0 = 1, \quad w_1 = 1, \quad t_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Até mesmo para  $n = 1$  encontra-se certa dificuldade para se resolver o sistema anterior na busca pela incógnitas  $w_i$  e  $t_i$ . Apresentaremos a seguir as soluções para os casos  $n = 1, n = 2, \dots, n = 7$  em que  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

$n$	$i$	$t_i$	$w_i$
1	1; 0	$\pm 0.577350269189626$	1
2	0; 1;	$\pm 0.774596669241483$	0.5555555555555556
	2	0.0000000000000000	0.8888888888888889
3	0; 1;	$\pm 0.861136311594053$	0.347854845137454
	2; 3;	$\pm 0.339981043584856$	0.652145154862546
4	0; 1;	$\pm 0.906179845938664$	0.236926885056189
	2; 3;	$\pm 0.538469310105683$	0.478628670499367
	4	0.0000000000000000	0.5688888888888889
5	0; 1;	$\pm 0.932469514203152$	0.171324492379170
	2; 3;	$\pm 0.661209386466265$	0.360761573048139
	4; 5;	$\pm 0.238619186083197$	0.467913934572691
6	0; 1;	$\pm 0.949107912342759$	0.129484966168870
	2; 3;	$\pm 0.741531185599395$	0.279705391489277
	4; 5;	$\pm 0.405845151377397$	0.381830050505119
	6	0.0000000000000000	0.417959183673469
7	0; 1;	$\pm 0.960289856497536$	0.101228536290376
	2; 3;	$\pm 0.796666477413627$	0.222381034453375
	4; 5;	$\pm 0.525532409916329$	0.313706645877887
	6; 7;	$\pm 0.183434642495650$	0.362683783378362

A página Gaussian Quadrature Weights and Abscissae conta com valores as abscissas ( $t_i$ ) e os pesos ( $w_i$ ) para  $n = 1, 2, \dots, 63$  (64 pois  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Por outro lado, o site ke!+san - Online Calculator o ajudará a conferir seus cálculos.

**Exemplo 33.** Calcule  $\int_0^1 e^x dx$  por quadratura gaussiana para  $n = 1$  e  $n = 2$ .

Solução: Inicialmente, devemos achar  $F(t)$ ,

$$F(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} = e^{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}} \frac{1}{2}.$$

Para  $n = 1$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &\approx \int_{-1}^1 F(t) dt = w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1) = \\ &= 1.F(-0.577350269189626) + 1.F(0.577350269189626) = 1.717896378007504. \end{aligned}$$

Para  $n = 2$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &\approx \int_{-1}^1 F(t) dt = w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1) + w_2 F(t_2) = \\ &= 0.55555...F(0.774596669241483) + 0.55555...F(-0.774596669241483) + 0.88888...F(0) = 1.718281004372523. \end{aligned}$$

Comparando os casos  $n = 1$  e  $n = 2$  com o resultado obtido via Teorema Fundamental do Cálculo, temos  $n = 1 \Rightarrow$

$$E_1 = |1.718281828459045 - 1.717896378007504| = .854504515410362e - 04;$$

$$E_2 = |1.718281828459045 - 1.718281004372523| = 8.240865221331717e - 07.$$

## 12.2 No Computador

Apresentaremos a seguir um programa que nos permitirá calcular a integral aproximada via Quadratura Gaussiana para  $n = 1$  e  $n = 2$ .

**Programa 13.** Quadratura Gaussiana  $n = 1$  e  $n = 2$

```
function[y] = QGauss(f, a, b, n)
    g = @(x)((b - a)/2) * f(((b - a)/2) * x + (b + a)/2);
    if n == 1
        s0 = 1 * g(-0.577350269189626);
        s1 = 1 * g(0.577350269189626);
        s0 + s1
    endif
    if n == 2
        s0 = 0.555555555555556 * g(-0.774596669241483);
        s1 = 0.555555555555556 * g(0.774596669241483);
        s2 = 0.888888888888889 * g(0);
        s0 + s1 + s2
    endif
endfunction
```

Aplicando o Programa 13 aos Exemplos 33 para  $n = 1$  e  $n = 2$ , temos:

$$n = 1 \quad QuadG(f = @(x)e^x, 0, 1, 1) = 1.717896378007504;$$

$$n = 2 \quad QuadG(f = @(x)e^x, 0, 1, 2) = 1.718281004372523.$$

Complete o Programa 13 com todos os valores de  $n = 3, 4, \dots, 7$  disponíveis neste capítulo. *Moleza!*

## 12.3 Exercícios

**Exercício 37.** Aproxime as seguintes integrais utilizando quadratura gaussiana com  $n = 1$ . Calcule o erro exato.

a)  $\int_{0.5}^1 x^4 dx;$

b)  $\int_0^{0.5} \frac{2}{x-4} dx;$

c)  $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx;$

d)  $\int_0^{\pi/4} x \sin(x) dx.$

**Exercício 38.** Repita todo o Exercício 37 com  $n = 2$ .

**Exercício 39.** Utilize A Quadratura Gaussiana nos itens abaixo com os valores de  $n$  indicados.

a)  $\int_1^2 x \ln(x) dx$ ,  $n = 4$ ;

b)  $\int_{-2}^2 x^3 e^{-x} dx$ ,  $n = 4$ ;

c)  $\int_0^2 \frac{2}{x^2+4} dx$ ,  $n = 6$ ;

d)  $\int_1^3 \frac{x}{x^2+4} dx$ ,  $n = 8$ .

Dica: No item ‘d’ pesquise a abscissa e os pesos referentes a  $n = 8$ .

**Exercício 40.** Escolha uma integral definida particular, cujo valor exato é conhecido pelo Teorema Fundamental do Cálculo, e compare os métodos de solução da Regra dos Trapézios, Regra de Simpson e Quadratura Gaussiana. Pesquise mais alguns outros métodos não citados neste material. *Não espere que o professor lhe fale tudo. Pelo contrário, saiba que dentro da vastidão de conteúdos, ele não abordará quase nada!*

**Observação 21.** A resposta do Exercício 40 é aberta. Para a comparação entre os métodos use  $n = 1, \dots, n = 7$  dispondo-os em uma tabela, de forma a compará-los. Obtenha também o valor real da integral definida via Teorema Fundamental do Cálculo.

## 12.4 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 37.** A integral e o erro exato são dados por:

a)  $0.19357638888889$ ,  $1.736111111109995e - 04$ , b)  $-0.267062314540059$ ,  $-4.707089859556923e - 07$ ,

c)  $0.159410430966379$ ,  $1.192363176409000e - 03$ , d)  $0.151989389931872$ ,  $2.429760151199944e - 04$

**Resposta do Exercício 38.** A integral e o erro exato são dados por:

a)  $.19375$ ,  $0$ , b)  $-0.267062784709844$ ,  $-5.392009616578264e - 10$ ,

c)  $0.160595386808919$ ,  $7.407333869002830e - 06$ , d)  $0.151745923889952$ ,  $4.900267999985441e - 07$

**Resposta do Exercício 39.** a)  $1.718281828458392$ , b)  $-19.91946935977890$ , c)  $0.785398164063438$ , d)  $0.477755722513747$

**Resposta do Exercício 40.** Aberta. Em caso de dúvida, consulte o professor. Esta é a questão mais importante sobre integração. Se possível, pesquise ainda sobre uma cota para o erro quando se usa a Quadratura Gaussiana.

# Capítulo 13

## Equações Diferenciais Ordinárias

### Método de Euler

#### 13.1 Problema de Valor Inicial

As equações diferenciais são usadas para modelar inúmeras situações nas mais diversas áreas da ciência. A maioria destes problemas requer a solução de um *problema de valor inicial (PVI)*, isto é, a solução de uma equação diferencial sujeita a uma condição inicial.

Listaremos a seguir algumas definições e resultados da teoria das equações diferenciais ordinárias antes de considerar métodos de aproximação das soluções para um problema de valor inicial.

**Definição 3.** Uma função  $f(t, y)$  satisfaz uma condição de Lipschitz na variável  $y$  em um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  se existir uma constante  $L > 0$  tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

sempre que  $(t, y_1), (t, y_2) \in D$ . A constante  $L$  é chamada de constante de Lipschitz para  $f$ .

**Exemplo 34.** Se  $D = \{(t, y) | 1 \leq t \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$  e  $f(t, y) = t|y|$ , então para cada par de pontos  $(t, y_1)$  e  $(t, y_2)$  em  $D$ , temos

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t|y_1| - t|y_2|| = |t|||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|.$$

Assim,  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz em  $D$  na variável  $y$  com  $L = 2$ .

**Revisando 10.** Um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  é dito convexo se, sempre que  $(t_1, y_1)$  e  $(t_2, y_2)$  pertencerem a  $D$ , então  $((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$  também pertencer a  $D$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Um objeto que não é convexo é dito côncavo. Acompanhe na Figura 13.1 uma forma convexa e uma forma côncava.

**Teorema 17.** Suponha que  $f(t, y)$  seja definido em um conjunto convexo  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Se existir uma constante  $L > 0$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq L,$$

para todo  $(t, y) \in D$ , então  $f$  satisfaz uma condição de Lipschitz em  $D$  na variável  $y$  como constante de Lipschitz  $L$ .

*Demonstração.* Para detalhes sobre a demonstração consulte [1], pg. 286. □

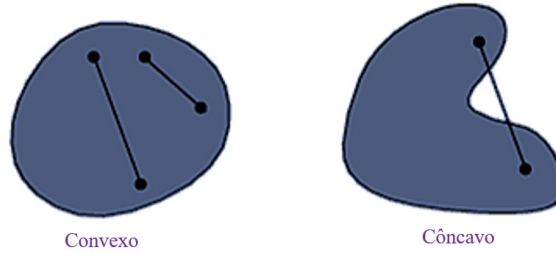


Figura 13.1: Formas convexas e côncavas.

**Teorema 18.** Suponha que  $D = \{(t, y) | a \leq t \leq c, -\infty \leq y \leq +\infty\}$  e que  $f(t, y)$  seja contínua em  $D$ . Se  $f$  satisfizer a uma condição de Lipschitz em  $D$  na variável  $y$ , então o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

tem uma única solução  $y(t)$  para  $a \leq t \leq b$ .

**Exemplo 35.** Seja  $D = \{(t, y) | 0 \leq t \leq 2, -\infty \leq y \leq +\infty\}$  e considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0, 5.$$

Note que  $\left| \frac{\partial(y - t^2 + 1)}{\partial y} \right| = |1| = 1$ . Decorre do Teorema 17 que  $f(t, y) = y - t^2 + 1$  satisfaz uma condição de Lipschitz em  $y \in D$ , com  $L = 1$ .

Agora veremos nosso primeiro método numérico para aproximarmos a solução de um PVI. De modo geral, os métodos numéricos que serão apresentados produzem aproximações passo a passo de tal sorte que será possível obtermos uma poligonal que aproxima a solução do nosso PVI (Veja o Exemplo 37).

## 13.2 Método de Euler

O objetivo do método de Euler é obter uma aproximação para a solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha. \quad (13.1)$$

O método não produzirá uma solução no contínuo, mas sim aproximações de  $y$  serão geradas em vários valores, chamados pontos de malha, no intervalo  $[a, b]$ .

Dado um inteiro  $N$  consideremos a malha

$$t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

em que  $h = (b - a)/N = t_{i+1} - t_i$  é o tamanho do passo. Consideremos além disso a fórmula de Taylor e que a solução  $y(t)$  seja única com  $y'$  e  $y''$  contínuas em  $[a, b]$ . Assim, para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i),$$

para algum número  $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$ . Como  $h = t_{i+1} - t_i$ , temos

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i). \quad (13.2)$$

Decorre das equações 13.1 e 13.2 que:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i). \quad (13.3)$$

Ignorando-se o erro em 13.3 construímos  $\omega_i \approx y(t_i)$  em que  $i = 1, 2, \dots, N$  donde segue o método de Euler:

$$\omega_0 = \alpha,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + hf(t_i, \omega_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

**Algoritmo 7.** Método de Euler: Para encontrar uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

em  $N + 1$  números igualmente espaçados no intervalo  $[a, b]$ .

**ENTRADAS:** função  $f$ ; extremidades  $a, b$ ; número inteiro  $N$ ; condição inicial  $\alpha$ .

**SAÍDA:** aproximação  $\omega$  de  $y$  nos  $N + 1$  valores de  $t$ .

**Passo 1:** Faça  $h = \frac{b-a}{N}$ ;

Faça  $t = a$

Faça  $\omega = \alpha$

SAÍDA  $(t, \omega)$

**Passo 2:** Para  $i = 1, 2, \dots, N$  execute os Passos 3 e 4;

**Passo 3:** Faça  $\omega = \omega + hf(t, \omega)$ ; (*Calcule  $\omega_i$* )

Faça  $t = a + ih$ ; (*Calcule  $t_i$* )

**Passo 4:** SAÍDA  $(t, \omega)$

**Passo 5:** PARE;

**Exemplo 36.** Aplique o método de Euler para fornecer uma aproximação para a solução do problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5,$$

com  $N = 10$ .

Solução: Neste caso,

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{2-0}{10} = 0.2, \quad t_i = a + ih = 0 + i \cdot 0.2 = 0.2i \quad e \quad \omega_0 = \alpha = y(0) = 0.5.$$

Assim, montamos a seguinte equação recursiva

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h(\omega_i - t^2 + 1) = \omega_i + 0.2(\omega_i - 0.04i^2 + 1) = 1.2\omega_i - 0.008i^2 + 0.2,$$

para  $i = 1, 2, \dots, 9$ .

Considerando a solução exata  $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$  montamos a tabela a seguir:

$t_i$	$\omega_i$	$y_i = y(t_i)$	$ y_i - \omega_i $
0.0	0.5000000000000000	0.5000000000000000	0.0000000000000000
0.2	0.8000000000000000	0.829298620919915	$2.929862091991497e-02$
0.4	1.1520000000000000	1.214087651179365	$6.208765117936510e-02$
0.6	1.5504000000000000	1.648940599804746	$9.854059980474594e-02$
0.8	1.9884800000000000	2.127229535753766	0.138749535753766
1.0	2.4581760000000000	2.640859085770478	0.182683085770478
1.2	2.9498112000000001	3.179941538631727	0.230130338631726
1.4	3.4517734400000001	3.732400016577663	0.280626576577662
1.6	3.9501281280000001	4.283483787802443	0.333355659802442
1.8	4.4281537536000001	4.815176267793526	0.387022514193525
2.0	4.8657845043200001	5.305471950534676	0.439687446214674

Um limitante para o erro, é dado pelo Teorema 19.

**Teorema 19.** Suponha que  $f$  seja contínua e satisfaça uma condição de Lipschitz com constante  $L$  em  $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$  e que exista uma constante  $M$  com  $|y''(t)| \leq M$ , para todo  $t \in [a, b]$ . Denote por  $y(t)$  a única solução do problema de valor inicial

$$y'(t) = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

e sejam  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N$  as aproximações geradas pelo método de Euler para algum número inteiro positivo  $N$ . Então, para cada  $i = 0, 1, \dots, N$ ,

$$|y(t_i) - \omega_i| \leq \frac{hM}{2L} \left( e^{L(t_i-a)} - 1 \right).$$

**Exemplo 37.** Aplique o Teorema 19 para encontrar os erros limitante para o erro no Exemplo 36 e compare com os erros exatos.

Solução: Considerando o problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0, 5,$$

do Exemplo 34 encontramos  $L = 1$ . Considerando a solução  $y(t) = (t+1)^2 - 0,5e^t$ , temos que  $y''(t) = 2 - 0,5e^t$  donde segue que

$$|y''(t)| = |2 - 0,5e^t| \leq 0,5e^2 - 2, \quad \forall t \in [0, 2].$$

Portanto,  $M = 0,5e^2 - 2$ . Retomando, do Exemplo 36, segue  $h = 0,2$  e portanto, decorre do Teorema 19

$$|y_i - \omega_i| \leq 0.1(0.5e^2 - 2)(e^{t_i} - 1).$$

Os erros exatos e limitantes estão apresentados a seguir:

$t_i$	$E_{lim}$	$ y_i - \omega_i $
0.0	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.2	3.751731839313956e-02	2.929862091991497e-02
0.4	8.334107455729349e-02	6.208765117936510e-02
0.6	0.139310336725450	9.854059980474594e-02
0.8	0.207671347909826	0.138749535753766
1.0	0.291167675521042	0.182683085770478
1.2	0.393150320361625	0.230130338631726
1.4	0.517712204054383	0.280626576577662
1.6	0.669852432358344	0.333355659802442
1.8	0.855676926835919	0.387022514193525
2.0	1.082643476924549	0.439687446214674

A Figura 13.2 consta de uma poligonal ligando os valores obtidos em cada passo juntamente com a solução do problema de valor inicial. Note que a poligonal apresenta certo distanciamento da solução exata.



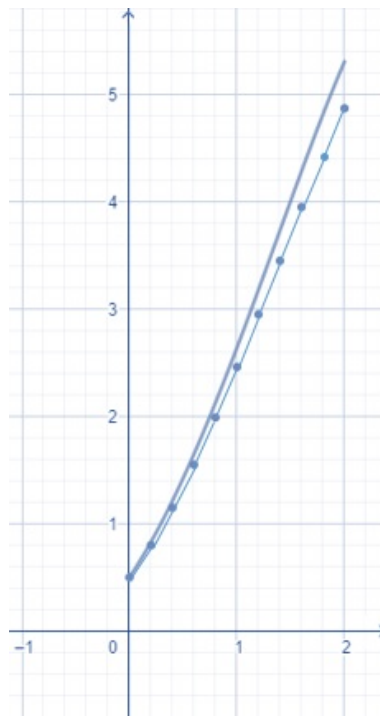


Figura 13.2: Curva poligonal de aproximação.

### 13.3 No Computador

A seguir apresentaremos a implementação do Algoritmo 7 em linguagem Octave.

**Programa 14.** Método de Euler

```
function[omega] = euler(f, a, b, N, alpha)
    h = (b - a)/N;
    t = a;
    omega = alpha
    i = 1;
    while i <= N
        omega = omega + h * f(t, omega)
        t = a + i * h;
        i = i + 1;
    endwhile
endfunction
```

Aplicando o Programa 14 ao Exemplo 36, temos o resultado expresso na Figura 13.3:

```
Janela de Comandos
>> euler(f=@(t,omega) omega-t^2+1,0,2,10,0.5)
omega = 0.5000000000000000
omega = 0.8000000000000000
omega = 1.1520000000000000
omega = 1.5504000000000000
omega = 1.9884800000000000
omega = 2.4581760000000000
omega = 2.9498112000000001
omega = 3.4517734400000001
omega = 3.9501281280000001
omega = 4.4281537536000001
omega = 4.8657845043200001
ans = 4.865784504320001
```

Figura 13.3: Solução do Exemplo 36 no Octave.

## 13.4 Exercícios

**Exercício 41.** Use o método de Euler para obter uma aproximação para cada um dos seguintes problemas de valor inicial. Calcule o valor exato e o erro em cada passo a partir da solução fornecida.

- a)  $y' = te^{3t} - 2y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $h = 0.5$ . (Solução:  $y(t) = \frac{1}{25}e^{-2t}(1 + e^{5t}(-1 + 5t))$ )  
b)  $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ ,  $h = 0.5$ . (Solução:  $y(t) = \frac{t^2 - t - 1}{t - 1}$ )  
c)  $y' = \cos(2t) + \sin(3t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $h = 0.25$ . (Solução:  $y(t) = \frac{1}{6}(3\sin(2t) - 2\cos(3t) + 8)$ )

**Exercício 42.** Use o método de Euler para obter uma aproximação para o problema de valor inicial  $y' = 1 + \frac{y}{t}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,  $y(1) = 2$ ,  $h = 0.25$ . Em seguida, considerando a solução exata  $y(t) = t \ln(t) + 2t$ , encontre o erro exato e limitante para o erro em cada passo.

## 13.5 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 41.** a) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	0.5	0.0000000000000000	0.283616521867142	0.283616521867142
2	1.0	1.120422267584516	3.219099319039491	2.098677051454975

b) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	2.5	2.0000000000000000	1.833333333333333	0.166666666666667
2	3.0	2.6250000000000000	2.5000000000000000	0.125000000000000

c) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	0.25	1.2500000000000000	1.329149813010828	$7.914981301082791e - 02$
2	0.50	1.639805330478427	1.730489758514714	$9.068442803628707e - 02$
3	0.75	2.024254653596476	2.041472034209607	$1.721738061313083e - 02$
4	1.00	2.236457253235382	2.117979545612989	0.118477707622393

**Resposta do Exercício 42.** Considerando a solução  $y(t) = t \ln(t) + 2t$ , temos que  $y''(t) = \frac{1}{t}$  donde segue que  $|y''(t)| = \left| \frac{1}{t} \right| \leq 1$  para todo  $t \in [1, 2]$ . Além disso,  $\left| \frac{\partial(1 + \frac{y}{t})}{\partial y} \right| = \left| \frac{1}{t} \right| \leq 1$  para todo  $x \in [1, 2]$ . Aplicando a relação  $|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L} (e^{L(t_i-a)} - 1) = \frac{0.25 \cdot 1}{2 \cdot 1} (e^{t_i-1} - 1) = \frac{1}{8} (e^{t_i-1} - 1)$ , temos:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $	$\frac{1}{8} (e^{t_i-1} - 1)$
1	1.25	2.7500000000000000	2.778929439142762	$2.892943914276191e - 02$	$3.550317708596767e - 02$
2	1.50	3.5500000000000000	3.608197662162247	$5.819766216224709e - 02$	$8.109015883751602e - 02$
3	1.75	4.391666666666667	4.479327628886990	$8.766096222032349e - 02$	0.139625002076584
4	2.00	5.269047619047619	5.386294361119891	0.117246742072272	0.214785228557381

# Capítulo 14

## Equações Diferenciais Ordinárias

### Métodos de Runge-Kutta

Apresentaremos nesta parte quatro métodos com erros de truncamento local de alta ordem (quando comparados com o método de Euler), os métodos de Runge-Kutta. Seu desenvolvimento envolve o polinômio de Taylor em duas variáveis. O leitor mais curioso pode encontrar as deduções dos métodos apresentados a seguir em [1], pg. 309 – 321. A aplicação dos métodos que serão apresentados é bastante simples o que os torna bastantes atrativos, em especial o método de Runge-Kutta de ordem 4.

#### 14.1 Métodos de Runge-Kutta

- **Método do Ponto Médio** ( $O(h^2)$ )

$$\omega_0 = \alpha,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{h}{2}f(t_i, \omega_i)\right), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

- **Método de Euler Modificado** ( $O(h^2)$ )

$$\omega_0 = \alpha,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{2}(f(t_i, \omega_i) + f(t_{i+1}, \omega_i + hf(t_i, \omega_i))), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

- **Método de Heun** ( $O(h^2)$ )

$$\omega_0 = \alpha,$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{h}{4}\left(f(t_i, \omega_i) + 3f\left(t_i + \frac{2}{3}h, \omega_i + \frac{2}{3}hf(t_i, \omega_i)\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

**Exemplo 38.** Aplique os métodos de Runge-Kutta de segunda ordem ao problema de valor inicial.

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0.5,$$

com  $N = 10$ .

Solução: Temos que  $N = 10$ ,  $h = 0,2$ ,  $t_i = 0, 2i$  e  $\omega_0 = 0,5$ . As equações recursivas a partir das fórmulas apresentadas são dadas a seguir:

(1) Método do Ponto Médio(M1):  $\omega_{i+1} = 1,22\omega_i - 0,0088i^2 - 0,008i + 0,218;$

Acompanhe os resultados na tabela a seguir:

$t_i$	$y(t_i)$	$w_i^{M1}$	$E_{M1}$
0,0	0.5000000000000000	0.5000000000000000	0.0000000000000000
0,2	0.829298620919915	0.8280000000000000	$1.298620919915061e-03$
0,4	1.214087651179365	1.2113600000000000	$2.727651179365020e-03$
0,6	1.648940599804746	1.6446592000000000	$4.281399804745956e-03$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1,8	4.815176267793527	4.800958574784175	$1.421769300935161e-02$
2,0	5.305471950534676	5.290369461236693	$1.510248929798230e-02$

(2) Método de Euler Modificado(M2):  $\omega_{i+1} = 1,22\omega_i - 0,0088i^2 - 0,008i + 0,216$ .

Acompanhe os resultados na tabela a seguir:

$t_i$	$y(t_i)$	$w_i^{M2}$	$E_{M2}$
0.0	0.5000000000000000	0.5000000000000000	0.0000000000000000
0.2	0.829298620919915	0.8260000000000000	$3.298620919915063e-03$
0.4	1.214087651179365	1.2069200000000000	$7.167651179365020e-03$
0.6	1.648940599804746	1.6372424000000000	$1.169819980474585e-02$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.8	4.815176267793527	4.755618549333895	$5.955771845963209e-02$
2.0	5.305471950534676	5.233054630187352	$7.241732034732351e-02$

(3) Método de Heun (M3):  $\omega_{i+1} = 1,22\omega_i - 0,0088i^2 - 0,008i + 0,217\bar{3}$ .

$t_i$	$y(t_i)$	$w_i^{M3}$	$E_{M3}$
0.0	0.5000000000000000	0.5000000000000000	0.0000000000000000
0.2	0.829298620919915	0.8273333333333333	$1.965287586581987e-03$
0.4	1.214087651179365	1.2098800000000000	$4.207651179364946e-03$
0.6	1.648940599804746	1.6421869333333333	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.8	4.815176267793527	4.785845232967416	$2.933103482611088e-02$
2.0	5.305471950534676	5.271264517553581	$3.420743298109485e-02$

Contudo, um dos métodos mais eficientes, isto é com menor erro é o que segue:

• **Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem( $O(h^2)$ )**

$$\omega_0 = \alpha,$$

$$k_1 = hf(t_i, \omega_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, \omega_i + k_3),$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Vejamos o algoritmo de Runge-Kutta de Quarta Ordem:

**Algoritmo 8.** Método de Runge Kutta de Quarta Ordem: Para encontrar uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

em  $N + 1$  números igualmente espaçados no intervalo  $[a, b]$ .

**ENTRADAS:** função  $f$ ; extremidades  $a, b$ ; número inteiro  $N$ ; condição inicial  $\alpha$ .

**SAÍDA:** aproximação  $\omega$  de  $y$  nos  $N + 1$  valores de  $t$ .

**Passo 1:** Faça  $h = \frac{b-a}{N}$ ;

Faça  $t = a$

Faça  $\omega = \alpha$

SAÍDA  $(t, \omega)$

**Passo 2:** Para  $i = 1, 2, \dots, N$  execute os Passos 3 e 5;

**Passo 3:** Faça  $k_1 = hf(t, \omega)$ ;

Faça  $k_2 = hf\left(t + \frac{h}{2}, \omega + \frac{k_1}{2}\right)$ ;

Faça  $k_3 = hf\left(t + \frac{h}{2}, \omega + \frac{k_2}{2}\right)$ ;

Faça  $k_4 = hf(t + h, \omega + k_3)$ ;

**Passo 4:** Faça  $\omega = \omega + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$ ; (*Cálculo de  $\omega_i$* )

Faça  $t = a + ih$ ; (*Cálculo de  $\omega_i$* )

**Passo 5:** SAÍDA  $(t, \omega)$

**Passo 6:** PARE.

Escreva os algoritmos referentes aos métodos do Ponto Médio, Euler Modificado e Heun.

**Exemplo 39.** Aplique o método de Runge-Kutta de quarta ordem ao problema de valor inicial.

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0,5,$$

com  $N = 10$ .

Solução: Tomemos  $N = 10$ ,  $h = 0,2$ ,  $t_i = 0,2i$  e  $\omega_0 = 0,5$ . Considerando a solução exata  $y = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ , temos:

$t_i$	$y_i = y(t_i)$	$\omega_i$	$ y_i - \omega_i $
0.0	0.5000000000000000	0.5000000000000000	0.0000000000000000
0.2	0.829298620919915	0.8292933333333333	$5.287586582025661e - 06$
0.4	1.214087651179365	1.214076210666667	$1.144051269807989e - 05$
0.6	1.648940599804746	1.648922017041600	$1.858276314603557e - 05$
0.8	2.127229535753766	2.127202684947944	$2.685080582187638e - 05$
1.0	2.640859085770478	2.640822692728752	$3.639304172597946e - 05$
1.2	3.179941538631727	3.179894170232231	$4.736839949615046e - 05$
1.4	3.732400016577663	3.732340072854980	$5.994372268292025e - 05$
1.6	4.283483787802441	4.283409498318405	$7.428948403642721e - 05$
1.8	4.815176267793527	4.815085694579433	$9.057321409411401e - 05$
2.0	5.305471950534676	5.305363000692653	$1.089498420228097e - 04$

## 14.2 No Computador

Vejamos como fica a implementação do Algoritmo 8 em linguagem Octave. É fortemente recomendado que sejam feitas as implementações dos métodos de Euler de ordem 2.

**Programa 15.** Método de Runge Kutta de Quarta Ordem

```

function[omega] = RK4(f,a,b,N,alpha)
    h = (b - a)/N;
    t = a;
    omega = alpha
    i = 1;
    while i <= N
        k1 = h * f(t,omega);
        k2 = h * f(t + h/2, omega + k1/2);
        k3 = h * f(t + h/2, omega + k2/2);
        k4 = h * f(t + h, omega + k3);
        omega = omega + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6
        t = a + i * h;
        i = i + 1;
    endwhile
endfunction

```

Aplicando o Programa 15 ao Exemplo 39, temos o resultado expresso na Figura 14.1:

```

Janela de Comandos
>>
>> RK4(f=@(t,omega) omega-t^2+1,0,2,10,0.5)
omega = 0.5000000000000000
omega = 0.8292933333333333
omega = 1.2140762106666667
omega = 1.648922017041600
omega = 2.127202684947944
omega = 2.640822692728752
omega = 3.179894170232231
omega = 3.732340072854980
omega = 4.283409498318405
omega = 4.815085694579433
omega = 5.305363000692653
ans = 5.305363000692653

```

Figura 14.1: Solução do Exemplo 39 no Octave.

## 14.3 Exercícios

**Exercício 43.** Use o método do Ponto Médio para obter uma aproximação para cada um dos seguintes problemas de valor inicial. Calcule o valor exato e o erro em cada passo a partir da solução fornecida.

- a)  $y' = te^{3t} - 2y$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $h = 0.5$ . (Solução:  $y(t) = \frac{1}{25}e^{-2t}(1 + e^{5t}(-1 + 5t))$ )
- b)  $y' = 1 + (t - y)^2$ ,  $2 \leq t \leq 3$ ,  $y(2) = 1$ ,  $h = 0.5$ . (Solução:  $y(t) = \frac{t^2 - t - 1}{t - 1}$ )
- c)  $y' = \cos(2t) + \sin(3t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $h = 0.25$ . (Solução:  $y(t) = \frac{1}{6}(3\sin(2t) - 2\cos(3t) + 8)$ )

**Exercício 44.** Repita o Exercício 43 usando o método de Euler Modificado.

**Exercício 45.** Repita o Exercício 43 usando o método de Heun.

**Exercício 46.** Repita o Exercício 43 usando o método de Runge-Kutta de Quarta Ordem.

## 14.4 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 43.** a) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	0.5	0.264625002076584	0.283616521867142	$1.899151979055796e - 02$
2	1.0	3.130002305880481	3.219099319039491	$8.909701315901009e - 02$

b) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	2.5	1.781250000000000	1.833333333333333	$5.208333333333304e - 02$
2	3.0	2.455063849687576	2.500000000000000	$4.493615031242415e - 02$

c) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	0.25	1.333796237699173	1.329149813010828	$4.646424688345085e - 03$
2	0.50	1.742285353442402	1.730489758514714	$1.179559492768800e - 02$
3	0.75	2.059637389443643	2.041472034209607	$1.816535523403617e - 02$
4	1.00	2.138555950183792	2.117979545612989	$2.057640457080279e - 02$

**Resposta do Exercício 44.** a) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	0.5	0.560211133792258	0.283616521867142	0.276594611925116
2	1.0	5.301489797693045	3.219099319039491	2.082390478653554

b) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	2.5	1.812500000000000	1.833333333333333	$2.083333333333304e - 02$
2	3.0	2.481553077697754	2.500000000000000	$1.844692230224609e - 02$

c) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	0.25	1.319902665239213	1.329149813010828	$9.247147771614950e - 03$
2	0.50	1.707029992037451	1.730489758514714	$2.345976647726311e - 02$
3	0.75	2.005355953415928	2.041472034209607	$3.611608079367867e - 02$
4	1.00	2.077078899674472	2.117979545612989	$4.090064593851706e - 02$

**Resposta do Exercício 45.** a) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	0.5	0.339785228557381	0.283616521867142	$5.616870669023905e - 02$
2	1.0	3.696816410102397	3.219099319039491	0.477717091062906

b) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	2.5	1.791666666666667	1.833333333333333	$4.166666666666607e - 02$
2	3.0	2.464174749429334	2.500000000000000	$3.582525057066599e - 02$

c) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	0.25	1.329571715922302	1.329149813010828	$4.219029114740369e - 04$
2	0.50	1.731034960436654	1.730489758514714	$5.452019219398530e - 04$
3	0.75	2.041747603740292	2.041472034209607	$2.755695306850825e - 04$
4	1.00	2.117697540981299	2.117979545612989	$2.820046316900360e - 04$



**Resposta do Exercício 46.** a) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	0.5	0.296997462129329	0.283616521867142	$1.338094026218700e - 02$
2	1.0	3.314311777477845	3.219099319039491	$9.521245843835358e - 02$

b) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	2.5	1.833323360731204	1.833333333333333	$9.972602128982544e - 06$
2	3.0	2.499971193426182	2.500000000000000	$2.880657381787444e - 05$

c) A tabela a seguir apresenta os valores solicitados em cada passo:

$i$	$t_i$	$w_i$	$y(t_i)$	$ y(t_i) - w_i $
1	0.25	1.329165046879186	1.329149813010828	$1.523386835811102e - 05$
2	0.50	1.730533566307418	1.730489758514714	$4.380779270385382e - 05$
3	0.75	2.041543577434405	2.041472034209607	$7.154322479818731e - 05$
4	1.00	2.118063600014019	2.117979545612989	$8.405440103009809e - 05$

# Capítulo 15

## Sistemas Lineares

### Método Direto de Gauss

#### 15.1 Introdução

Este capítulo é uma espécie de revisão de conceitos normalmente vistos em um curso de Álgebra Linear. O leitor mais interessado no assunto pode consultar diretamente as fontes ([6] pg. 0 – 43) e ([7] pg. 29 – 63).

É bastante comum nos depararmos com sistemas lineares quadrados, isto é, sistemas lineares de  $n$  equações e  $n$  incógnitas. Utilizaremos a seguinte notação para tais sistemas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \dots + \vdots = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (15.1)$$

O sistema (15.1) admite uma representação matricial da forma  $AX = B$  como segue

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Podemos considerar também a chamada matriz aumentada  $AM$  do sistema 15.1

$$AM = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

**Exemplo 40.** Considere os sistema  $2 \times 2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

Neste caso,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Além disso a matriz aumentada deste sistema é dada por

$$AM = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nas seções a seguir, trabalharemos somente com sistemas possíveis e determinados, isto é, sistemas quadrados (número de equações igual ao número de incógnitas) cujo determinante da matriz  $A$  é não nulo.

## 15.2 Método De Gauss

Este método trabalha por meio do uso de operações elementares capazes de transformar sistemas lineares em outros sistemas lineares equivalentes escalonados os quais podemos resolver por substituição retroativa.

**Definição 4.** Dada uma matriz  $A$  entenderemos por operações elementares com as linhas de  $A$ , uma qualquer das seguintes alternativas:

- i) Trocar duas linhas:  $L_i \leftrightarrow L_j$ ;
- ii) Multiplicar uma linha por um escalar  $k \neq 0$ :  $L_i \rightarrow kL_i$ ;
- iii) Substituir uma linha por uma soma dela própria com um múltiplo escalar de outra:  $L_i \rightarrow L_i + kL_j$ .

**Definição 5.** Dizemos que as matrizes  $A$  e  $B$  são linha equivalentes, se  $B$  pode ser obtida através de operações elementares em  $A$ .

**Exemplo 41.** Mostre que as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  são linha equivalentes.

Solução: Aplicando operações elementares em  $A$ , temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 20.** Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes possuem mesma solução.

*Demonstração.* A demonstração deste teorema pode ser encontrada em ([7], pg.85). □

O Teorema 20 nos permitirá iniciar o Método de Gauss. Este método consiste em transformar a matriz ampliada de um sistema através de operações elementares em uma matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix}. \quad (15.2)$$

Na verdade, o Método de Gauss Consiste em transformar a matriz  $A$  em uma matriz diagonal. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 42.** Encontre a solução do sistema  $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ .

Solução: Temos a seguinte representação matricial para os sistema dado:  $AM = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Devemos deixar a matriz acima na forma dada em 15.2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Voltando a forma matricial para a forma de sistema, temos  $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ \frac{1}{3}x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$ . Portanto, de  $L_2$ , temos que  $x_2 = -1$ , donde por substituição em  $L_1$ , temos que  $x_1 = 1$ . Logo, a solução do sistema é dada por  $S = \{[1, 1]^T\}$ .

**Exemplo 43.** Encontre a solução do sistema 
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}.$$

Solução: Temos a seguinte representação matricial para o sistema dado:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Procederemos na tentativa de colocar a matriz acima na forma dada em 15.2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \Rightarrow \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1 \Rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -4 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} L_3 \leftrightarrow L_3 + \frac{5}{3}L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{7}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{3}x_2 + 0 = 0 \end{cases},$$

onde obtemos que  $x_2 = 0$ , e por substituição em  $L_2$ , obtemos  $x_3 = 1$ . Por fim, substituindo  $x_2$  e  $x_3$  em  $L_1$ , temos  $x_1 = 1$ . Logo, a solução do sistema é  $S = \{[1, 0, 1]^T\}$ .

**Observação 22.** Os valores  $m_{21} = -\frac{1}{2}$ ,  $m_{31} = -\frac{3}{2}$  e  $m_{32} = \frac{5}{3}$  são, comumente chamados de pivôs do sistema.

## 15.3 No Computador

O Octave já conta com um comando simples para a solução de um sistema linear. Basta digitarmos o comando  $X = A \backslash B$  em que  $A$  é a matriz do sistema e  $B$  é o vetor coluna dos termos independentes das variáveis. Por Exemplo, podemos resolver o sistema dado no Exemplo 43 usando o comando  $X = [2 \ 2 \ -1; 1 \ 2 \ 1; 3 \ -1 \ -4] \backslash [1; 2; -1]$  conforme mostrado na Figura 15.1 a seguir:

```
Janela de Comandos
>> X=[2 2 -1;1 2 1;3 -1 -4]\[1; 2; -1]
X =

 1.0000000000000000e+00
-2.498001805406602e-16
 1.0000000000000000e+00
```

Figura 15.1: Solução do Exemplo 43 no Octave.

Observe que o valor da variável  $y$  deveria ser 0, contudo, devido à memória da máquina não ser suficientemente grande, temos um “leve errinho”. *Já falamos sobre isto. Se lembra?*

A seguir apresentaremos o Programa 16 que transforma a matriz aumentada  $AM$  em uma matriz equivalente a ela na forma (15.2).

**Programa 16.** Eliminação Gaussiana

```

function[AM] = EG(A, B)
    m = size(A);
    n = m(1);
    dett = det(A)
    if dett == 0
        print("Este sistema não pode ser resolvido pois  $\det(A) = 0$  ")
    else
        AM = [A B];
        for j = 1 : (n - 1)
            for i = (j + 1) : n
                mult = AM(i, j)/AM(j, j);
                for k = j : n + 1
                    AM(i, k) = AM(i, k) - mult * AM(j, k);
                end
            end
        end
        for p = n : -1 : 1
            for r = p + 1 : n
                x(p) = AM(p, r)/AM(p, r - 1);
            end
        end
    end
endfunction

```

Aplicando o Programa 16 ao Exemplo 43, temos o resultado expresso na Figura 15.2 a seguir:

```

Janela de Comandos
>> EG([2 2 -1; 1 2 1; 3 -1 -4], [1; 2; -1])
dett = 6.999999999999998
ans =

    2.000000000000000    2.000000000000000   -1.000000000000000    1.000000000000000
           0    1.000000000000000    1.500000000000000    1.500000000000000
           0           0    3.500000000000000    3.500000000000000

```

Figura 15.2: Forma escalonada do Exemplo 43 no Octave usando o Método de Gauss.

Note que o Programa 16 deixou o sistema final em uma forma levemente diferente daquela encontrada na solução do Exemplo 43. Contudo, continuando, por meio de substituição retroativa chegaremos ao mesmo resultado. *Que tal implementar esta última parte?* Neste caso, precisaremos implementar a resolução de um sistema cuja matriz associada seja triangular superior. Em caso de dúvida, consulte o professor.

## 15.4 Exercícios

**Exercício 47.** Determine a solução dos seguintes sistemas lineares usando o Método da Eliminação Gaussiana:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 5x_2 = -9 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 = 13 \end{array} \right. \end{array} \quad \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = -\frac{1}{3} \\ x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{6} \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$
  
$$\text{d)} \left\{ \begin{array}{l} 0.25x_1 + 0.2x_2 - x_3 = 0.2175 \\ 0.03x_1 + 0.4x_2 + 0.9x_3 = 0.0007 \\ x_1 - 0.5x_2 - 0.5x_3 = 0.26 \end{array} \right. \quad \text{e)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1 \end{array} \right.$$

**Exercício 48.** Por meio de sistemas lineares encontre o polinômio do segundo grau que passa pelos pontos  $(2;0)$ ,  $(1,2)$ ,  $(4,2)$ .

**Exercício 49.** Resolva, por meio de sistemas lineares o seguinte problema:

“Em uma oficina mecânica há exatamente 50 veículos, considerando apenas carros e motos. Sabe-se que todos os pneus destes veículos foram trocados, de modo que foram necessários 160 pneus.”

Determine o número de carros e de motos nesta oficina.

## 15.5 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 47.** a)  $[\frac{1}{2}, 1]^T$ ; b) Impossível; c)  $[\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}]^T$ ;

d)  $[3.112717638152914e - 01, 2.018546555639666e - 01, -9.931112793338377e - 02]^T$ ; e)  $[1, 1, 1, 1]^T$ .

**Resposta do Exercício 48.**  $P(x) = x^2 - 5x + 6$

**Resposta do Exercício 49.** 30 carros e 20 motos.

# Capítulo 16

## Sistemas Lineares

### Método Direto da Decomposição LU

#### 16.1 Decomposição LU

Considere o sistema  $AX = B$  em sua forma matricial, com  $\det(A) \neq 0$ . Suponha que  $A$  possa se decompor no produto de uma matriz triangular inferior  $L$ , e uma matriz triangular superior  $U$ , tal que  $A = LU$ . Assim,  $AX = B$  equivale a  $(LU)X = B$ . Dessa forma, obtemos dois sistemas  $LY = B$  e  $UX = Y$ . Como  $L$  e  $U$  são triangulares temos que a resolução destes sistemas é feita por substituição retroativa.

**Teorema 21.** Seja  $A_{n \times n}$  uma matriz qualquer e  $A_{kk}$  uma submatriz de  $A_{n \times n}$  formada pela intersecção das primeiras  $k$  linha e  $k$  colunas. Se  $\det(A) \neq 0$  para  $k = 1, \dots, n-1$  então existem e são únicas as matrizes  $L$  e  $U$ .

Para obtermos  $L$  e  $U$ , utilizaremos eliminação Gaussiana faremos  $L$  sendo a matriz inferior com diagonal igual a 1 e multiplicadores  $m_{ij}$ , e  $U$  uma matriz triangular superior formada pelos elementos da forma final de  $A$ . Vejamos o caso  $3 \times 3$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

**Exemplo 44.** Aplique o método da decomposição  $LU$  ao sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}.$$

Solução: Nosso ponto de partida é a matriz  $A$  do sistema, que é dada por

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que  $m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -2$  e  $m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -1$ , donde obtemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 + m_{21}L_1 \Rightarrow \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + m_{31}L_1 \Rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tomando agora  $m_{23} = -\frac{a_{23}}{a_{22}}$ , temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} L_3 \leftrightarrow L_3 + m_{32}L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema  $LY = B$  equivale a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ 2y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 = -1 \end{cases}.$$

Por meio de substituição, temos  $y_1 = 5$ ,  $y_2 = -7$  e  $y_3 = 15$ . Agora, podemos montar o sistema  $UX = Y$ .

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_2 - x_3 = -7 \\ 5x_3 = 15 \end{cases}.$$

Novamente, por substituição, temos  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 3$ .

Uma observação rápida e sem muito cuidado, nos faz pensar que a decomposição  $LU$  é pouco eficiente, uma vez que ela utiliza do método de Gauss, e portanto, menos eficiente que este. Mas vejamos a diferença na aplicação a seguir:

#### Exemplo 45. Inversão de Matrizes

É sabido que uma matriz  $A_{n \times n}$  tal que  $\det(A) \neq 0$  possui inversa  $A^{-1}$ . Para encontrar  $A^{-1}$  devemos resolver  $n$  sistemas lineares. De fato, fazendo  $A^{-1} = X$ , devemos ter  $AX = I$ , onde  $I$  é a identidade de ordem  $n$ . Os  $n$  sistemas mencionados são os seguintes:

$$AX_1 = [1; 0; 0; \dots; 0]^T, \quad AX_2 = [0; 1; 0; \dots; 0]^T, \dots, \quad AX_n = [0; 0; 0; \dots; 1]^T,$$

onde  $X_i$  é o vetor coluna formado pela  $i$ -ésima coluna de  $X$ , isto é  $X_i = [x_{1i}; x_{2i}; x_{3i}; \dots; x_{ni}]^T$ .

Veja que os  $n$  sistemas lineares tem a mesma matriz dos coeficientes  $A$ . Para usar o método de Gauss deveríamos aplicá-lo  $n$  vezes. Por outro lado, uma vez obtida a decomposição  $LU$  da matriz  $A$ , temos que o resto é feito por simples substituições.

## 16.2 No Computador

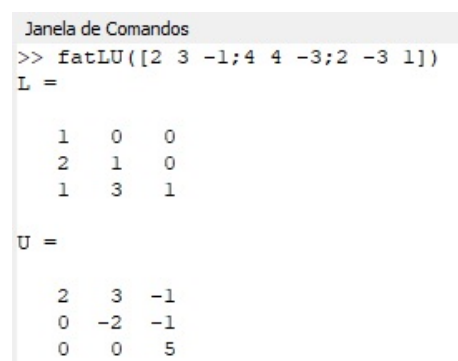
Apresentaremos a seguir um programa que exibe as matrizes  $L$  e  $U$  associadas à matriz  $A$  de um sistema. Parte do que faremos já foi construído no Programa 16.



**Programa 17.** Decomposição  $L, U$ 

```
function[ ] = fatLU(A)
    Aux = A;
    n = size(A,1);
    L = eye(n,n);
    for j = 1 : n - 1
        for i = j + 1 : n
            L(i,j) = A(i,j)/A(j,j);
            A(i,j+1:n) = A(i,j+1:n) - L(i,j) * A(j,j+1:n);
            A(i,j) = 0;
        endfor
    endfor
    m = size(Aux,1);
    for j = 1 : (n - 1)
        for i = (j + 1) : n
            mult = Aux(i,j)/Aux(j,j);
            fork = j : n
                Aux(i,k) = Aux(i,k) - mult * Aux(j,k);
            end
        end
    end
    for p = n : -1 : 1
        for r = p + 1 : n
            x(p) = Aux(p,r)/Aux(p,r-1);
        end
    end
    U = Aux;
    L
    U
endfunction
```

Aplicando o Programa 17 ao Exemplo 44, temos o resultado expresso na Figura 16.1 a seguir:



```
Janela de Comandos
>> fatLU([2 3 -1;4 4 -3;2 -3 1])
L =

    1     0     0
    2     1     0
    1     3     1

U =

    2     3    -1
    0    -2    -1
    0     0     5
```

Figura 16.1: Matrizes  $L$  e  $U$  associadas ao Exemplo 44.

Com mais alguns poucos comandos pode-se resolver o sistema. Neste caso, precisaremos implementar a resolução de sistemas cujas matrizes associadas sejam ora triangulares inferiores e triangulares superiores. Tente implementar essa ultima etapa. Em caso de dúvida, consulte o professor.

## 16.3 Exercícios

**Exercício 50.** Determine a solução dos seguintes sistemas lineares utilizando decomposição  $LU$ :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -\frac{1}{3} \\ x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{6} \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

**Exercício 51.** Encontre a inversa da matriz a seguir pelos dois métodos descritos no Exemplo 45, isto é, por meio do método de Gauss e depois por meio do método da decomposição  $LU$ . Descreva qual dos dois métodos é mais eficiente neste caso.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

## 16.4 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 50.** a)  $[\frac{1}{2}, 1]^T$ ; b)  $[\frac{1}{2}, -1; \frac{1}{3}]^T$ .

**Resposta do Exercício 51.**  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ .

# Capítulo 17

## Sistemas Lineares

### Método Iterativo de Jacobi

#### 17.1 Introdução

Estudaremos nesta e na próxima seção dois métodos iterativos de resolução de sistemas lineares. Assim, dado um sistema  $AX = B$ , com  $A_{n \times n}$ , devemos obter  $\phi(x)$ , tal que, dada uma aproximação  $x^0$ , tenhamos a sequência  $x^1 = \phi(x^0)$ ,  $x^2 = \phi(x^1)$ ,  $\dots$ ,  $x^n = \phi(x^{n-1})$ ,  $\dots$ , de modo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \bar{x}$ , onde  $\bar{x}$  é a solução exata do sistema  $AX = B$ .

Como estaremos trabalhando com métodos iterativos, devemos ter um critério de parada. Neste caso, a definição a seguir será bastante útil.

**Definição 6.** Dado  $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , com  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ , definiremos  $\|v\| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|\}$ .

**Exemplo 46.** Dado  $u = (1; -3, 2)$ , temos que  $\|u\| = \max\{|1|, |-3|, |2|\} = \max\{1, 3, 2\} = 3$ .

**Definição 7.** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Definiremos a norma de  $A$ , isto é,  $\|A\|$ , como sendo

$$\|A\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}|; i = 1, \dots, n \right\}.$$

**Exemplo 47.** Encontre a norma da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 10 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução: Temos que

$$\|A\| = \max \{ |1| + |-6| + |3|; |0| + |10| + |3|; |4| + |4| + |3| \} = \max \{ 10; 13; 11 \} = 13.$$

De posse da Definição 6 devemos parar os métodos iterativos quando, para um dado  $\delta > 0$ , tivermos  $\|x^n - x^{n-1}\| < \delta$ . Neste caso, a solução será dada por  $x^n$ .

#### 17.2 Método Iterativo de Jacobi

Considere o sistema  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned} (L_1) & \left\{ \begin{array}{lclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ (L_2) & \left\{ \begin{array}{lclcl} a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ (L_3) & \left\{ \begin{array}{lclcl} a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Em cada linha  $L_i$  isolemos a variável  $x_i$ :

$$L_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3$$

$$L_2 \Rightarrow x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3$$

$$L_3 \Rightarrow x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2.$$

Podemos organizar em uma forma matricial como segue

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Montamos portanto a função de iteração de Jacobi:

$$\phi(x) = d + Fx.$$

O caso geral é análogo, neste caso as matrizes  $F$  e  $d$  são dadas por:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 48.** Resolva, por meio do método de Jacobi, os sistemas a seguir considerando  $\delta = 0.2$ :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \quad x^0 = [0, 0]^T \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases} \quad x^0 = [0.5, 0.5, 0]^T \end{aligned}$$

Solução: a) Temos que

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 1 + x_2 \\ 2x_2 = 3 - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 \end{cases}.$$

Neste caso, as matrizes  $F$  e  $d$  são dadas por:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Donde,

$$x^1 = \phi(x^0) = d + Fx^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}.$$

Devemos continuar, pois  $\|x^1 - x^0\| = \|(0.5, 1.5) - (0, 0)\| = \|(0.5, 1.5)\| = 1.5 > \delta$ . Assim,

$$x^2 = \phi(x^1) = d + Fx^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.25 \end{bmatrix}, \quad \|x^2 - x^1\| = 0.75 > \delta.$$

$$x^3 = \phi(x^2) = d + Fx^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.125 \\ 0.875 \end{bmatrix}, \quad \|x^3 - x^2\| = 0.375 > \delta.$$

$$x^4 = \phi(x^3) = d + Fx^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.125 \\ 0.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9375 \\ 0.9375 \end{bmatrix}, \quad \|x^3 - x^2\| = 0.1875 > \delta.$$

Logo, a solução procurada é  $x^4 = (0.9375, 0.9375)$ .

b) Neste caso,

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 = \frac{7}{6} - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1 \end{cases}$$

Por uma questão de simplificação, optemos pela função de iteração escrita da seguinte forma:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \left[ 1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3; \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3; \frac{7}{6} - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1 \right]^T.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x^1 = \phi(x^0) &= \begin{bmatrix} 0.83333333333333 \\ 1.37500000000000 \\ 1.08333333333333 \end{bmatrix}, \|x^1 - x^0\| = 1.08333333333333 > \delta; \\ x^2 = \phi(x^1) &= \begin{bmatrix} 0.90277777777778 \\ 1.02083333333333 \\ 1.11805555555556 \end{bmatrix}, \|x^2 - x^1\| = 0.35416666666667 > \delta; \\ x^3 = \phi(x^2) &= \begin{bmatrix} 1.03240740740740 \\ 0.99479166666667 \\ 1.03587962962963 \end{bmatrix}, \|x^3 - x^2\| = 0.12962962962963 < \delta; \end{aligned}$$

Logo, a solução procurada é dada por  $x^3 = [1.03240740740740, 0.99479166666667, 1.03587962962963]^T$ . Além disso, a solução exata é  $\bar{x} = [1, 1, 1]^T$ , donde obtemos

$$\begin{aligned} e_{real} &= \|\bar{x} - x^3\| = \|[1, 1, 1] - [1.03240740740740, 0.99479166666667, 1.03587962962963]^T\| = \\ &= \|[-3.24074074074070e - 02, 5.208333333333037e - 03, -3.587962962962998e - 02]^T\| = 3.587962962962998e - 02. \end{aligned}$$

**Exemplo 49.** Considere o sistema a seguir

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases},$$

cuja solução exata é dada por  $\bar{x} = [1, 1, 1]^T$ . Obser que se aplicarmos o método de Jacobi a este sistema partindo de  $x^0 = (0, 0, 0)$ , produziremos a seguinte sequência.

$$x^0 = [0, 0, 0]^T, \quad x^1 = [2, -3, 1]^T, \quad x^2 = [9, 3, -0.25]^T, \quad x^3 = [-4.25, 14.5, -0.5]^T$$

Procedendo com o cálculo de  $x^4, x^5, \dots$  notamos que os valores parecem não se aproximar de nenhuma terna, isto é, a sequência parece divergir.

O que ocorreu no Exemplo 49, isto é, por que as iterações por meio do método de Jacobi parecem não convergir? Será que há alguma hipótese para que o método de Jacobi possa ser aplicado?

A respostas às questões anteriores repousa no seguinte teorema

**Teorema 22.** Se para cada  $i = 1, \dots, n$ , temos que  $\sum_{j=1}^n |f_{ij}| \leq L < 1$ , então o método iterativo de Jacobi (e também o de Gauss-Seidel, logo mais) convergem para a solução do sistema.

**Exemplo 50.** Apliquemos o Teorema 22 aos Exemplos 48 e 49.

Temos, que o Teorema 22 afirma simplesmente que se a  $\|F\| \leq L < 1$  então o método de Jacobi (e Gauss-Seidel) converge. Pois bem,

No Exemplo 48 item a) , temos

$$\|F\| = \max\{|0| + |1/2|, |-1/2| + |0|\} = 1/2 < 1.$$

Portanto, o método de Jacobi converge, isto é, ele pode ser aplicado.

No Exemplo 48 item b) , temos

$$\|F\| = \max\{|0| + |-1/3| + |1/3|, |1/4| + |0| + |-1/4|, |-1/3| + |1/6| + |0|\} = 2/3 < 1.$$

Portanto, o método de Jacobi converge, isto é, ele pode ser aplicado.

No Exemplo 49, temos que

$$\|F\| = \max\{|0| + |-2| + |1|, |2| + |0| + |2|, |-1/4| + |1/4| + |0|\} = 2.$$

Portanto, o método de Jacobi não pode ser aplicado. Observe que o Teorema 22 não afirma no caso em que  $\|F\| = L \geq 1$ .

## 17.3 No Computador

Apresentaremos a seguir um programa que executa o Método Iterativo de Jacobi ou exibe uma mensagem de erro caso o número máximo de iterações seja ultrapassado.

**Programa 18.** Método Iterativo de Jacobi

```
function[x] = jacobi(A, B, x, tol, N)
    n = size(A,1);
    x0 = x;
    iter = 1;
    while(iter <= N)
        for i = 1 : n
            x(i) = (B(i) - A(i, [1 : i - 1, i + 1 : n]) * x0([1 : i - 1, i + 1 : n]))/A(i, i);
        endfor
        if(norm(x - x0, inf) < tol)
            return
        endif
        x0 = x;
        iter = iter + 1;
    endwhile
    printf("error: O procedimento não foi bem sucedido.")
endfunction
```

Aplicando o Programa 18 ao item “b” do Exemplo 48, temos o resultado expresso na Figura 17.1:

```
Janela de Comandos
>> jacobi([3 1 -1;1 4 1;2 -1 6],[3; 6; 7],[0.5; 0.5; 0],0.2,10)
ans =

    1.032407407407407
    0.994791666666667
    1.035879629629630
```

Figura 17.1: Solução do Exemplo 48 usando o Método Iterativo de Jacobi.

## 17.4 Exercícios

**Exercício 52.** Use o Teorema 22 para verificar a convergência de cada um dos sistemas a seguir. Em no caso de as hipóteses do teorema serem satisfeitas encontre a solução com a tolerância  $\delta$  e a aproximação inicial  $x^0$ . Compare a solução obtida com a solução exata, isto é, aquela obtida por meio de um método direto.

- a)  $\begin{cases} 1.5x_1 + 0.8x_2 = 1.23 \\ 2.1x_1 - 3.2x_2 = -0.87 \end{cases}, \quad \delta = 0, 1, \quad x^0 = [0, 0]^T.$
- b)  $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ \phantom{4x_1} 3x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases} \quad \delta = 0.1, \quad x^0 = [0.5, 0.5, 0.5]^T.$
- c)  $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \\ \phantom{7x_1} 4x_2 \phantom{- 2x_3} + x_4 = 5 \\ x_1 \phantom{+ x_2} + 5x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -5 \end{cases} \quad \delta = 0.05, \quad x^0 = [2, 2, 2, 2]^T.$
- d)  $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases} \quad \delta = 0.1, \quad x^0 = [0, 0, 0]^T.$

**Exercício 53.** Mostre que os sistemas a seguir não se adéquam às hipóteses exigidas para a aplicação do método de Jacobi. Em seguida, por meio de operações elementares transforme-os de modo que o método de Jacobi, aplicado a eles, gere uma sequência convergente para suas respectivas soluções.

- a)  $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = 6 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$

## 17.5 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 52.** a) Converge. Solução aproximada  $x^6 = [0.521437500000000, 0.625725000000000]^T$ . Solução exata =  $[0.5, 0.6]^T$ ;

b) Converge. Solução aproximada  $x^5 = [0.997685185185185, 3.006944444444445, 1.974922839506173]^T$ . Solução exata =  $[1, 3, 2]^T$ ;

c) Converge. Solução aproximada  $x^4 = [0.992295918367347, 0.998214285714286, 1.000000000000000, 1.010785714285714]^T$ . Solução exata =  $[1, 1, 1, 1]^T$ ;

d) O Teorema 22 não se aplica. Solução exata =  $[1, 1, 1, 1]^T$ .

**Resposta do Exercício 53.** a) Faça, seguidamene, as seguintes operações elementares: i)  $L_1 \leftrightarrow L_3$ , ii)  $L_2 \leftrightarrow L_3$ .

b) Faça, seguidamente, as seguintes operações elementares: i)  $L_1 \leftrightarrow L_2$ , ii)  $L_1 \rightarrow L_1 + L_3$ , iii)  $L_3 \rightarrow L_1 + L_3$ .

# Capítulo 18

## Sistemas Lineares

### Método Iterativo de Gauss-Seidel

#### 18.1 Método Iterativo de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é bem semelhante ao método de Jacobi, tratando-se somente de uma leve modificação neste último.

No método de Jacobi tínhamos que a  $i$ -ésima coordenada de uma  $k$ -ésima iteração era dada por

$$x_i^k = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^k,$$

onde, facilmente nota-se que uma dada solução  $x^k$  depende exclusivamente dos elementos (coordenadas) da solução anterior. No método de Gauss-Seidel, isso muda, desta vez usaremos tanto coordenadas da aproximação anterior como coordenadas da solução atual que vão sendo obtidas. Isso é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1^k &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{k-1} - a_{13}x_3^{k-1} - \dots - a_{1n}x_n^{k-1}) \\ x_2^k &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^{k-1} - \dots - a_{2n}x_n^{k-1}) \\ &\vdots \\ x_k^k &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^k). \end{aligned}$$

**Exemplo 51.** Resolva, por meio do método de Gauss-Seidel, os sistemas a seguir considerando  $\delta = 0,2$ :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \quad x^0 = [0, 0]^T \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases} \quad x^0 = [0.5, 0.5, 0]^T \end{aligned}$$

Solução: a) Temos que a função de iteração de Gauss-Seidel é dada por:

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2^{k-1} \\ x_2^k = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1^k \end{cases},$$

Assim,

$$x^1 = \phi(x^0) = \begin{bmatrix} 0.5000000000000000 \\ 1.2500000000000000 \end{bmatrix}, ||x^1 - x^0|| = 1.2500000000000000 > \delta;$$



$$x^2 = \phi(x^1) = \begin{bmatrix} 1.125000000000000 \\ 0.937500000000000 \end{bmatrix}, ||x^2 - x^1|| = 0.625000000000000 > \delta;$$

$$x^3 = \phi(x^2) = \begin{bmatrix} 0.968750000000000 \\ 1.015625000000000 \end{bmatrix}, ||x^3 - x^2|| = 0.156250000000000 < \delta;$$

Logo, a solução procurada é  $x^3 = [0.968750000000000, 1.015625000000000]^T$ .

b) Temos que a função de iteração de Gauss-Seidel é dada por:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1^k = 1 - \frac{1}{3}x_2^{k-1} + \frac{1}{3}x_3^{k-1} \\ x_2^k = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x_1^k - \frac{1}{4}x_3^{k-1} \\ x_3^k = \frac{7}{6} - \frac{1}{3}x_1^k + \frac{1}{6}x_2^k \end{cases},$$

Assim,

$$x^1 = \phi(x^0) = \begin{bmatrix} 0.833333333333333 \\ 1.291666666666667 \\ 1.104166666666667 \end{bmatrix}, ||x^1 - x^0|| = 1.104166666666667 > \delta;$$

$$x^2 = \phi(x^1) = \begin{bmatrix} 0.937500000000000 \\ 0.989583333333333 \\ 1.019097222222222 \end{bmatrix}, ||x^2 - x^1|| = 0.302083333333333 > \delta;$$

$$x^3 = \phi(x^2) = \begin{bmatrix} 1.009837962962963 \\ 0.992766203703704 \\ 0.995515046296296 \end{bmatrix}, ||x^3 - x^2|| = 7.233796296296302e-02 < \delta;$$

Logo, a solução procurada é  $x^3 = [1.009837962962963, 0.992766203703704, 0.995515046296296]^T$ .

Compare os resultados obtidos neste exemplo com os resultados obtidos no Exemplo 48.

## 18.2 No Computador

Apresentaremos a seguir um programa que executa o Método Iterativo de Gauss-Seidel ou exibe uma mensagem de erro caso o número máximo de iterações seja ultrapassado.

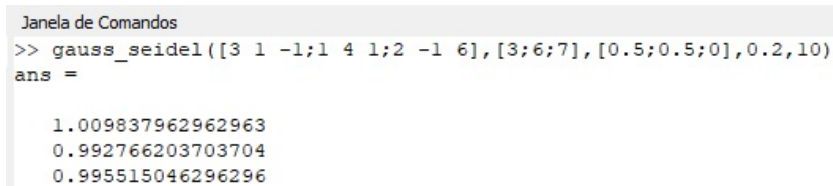
**Programa 19.** Método Iterativo de Gauss-Seidel

```

function[x] = gauss_seidel(A,b,x,tol,N)
    n = size(A,1);
    x0 = x;
    iter = 1;
    while(iter <= N)
        for i = 1 : n
            x(i) = (b(i) - A(i,[1:i-1,i+1:n]) * x([1:i-1,i+1:n]))/A(i,i);
        endfor
        if(norm(x - x0,inf) < tol)
            return
        endif
        x0 = x;
        iter = iter + 1;
    endwhile
    prtf("error: O procedimento não foi bem sucedido.")
endfunction

```

Aplicando o Programa 19 ao item “b” do Exemplo 51, temos o resultado expresso na Figura 18.1:



```

Janela de Comandos
>> gauss_seidel([3 1 -1;1 4 1;2 -1 6],[3;6;7],[0.5;0.5;0],0.2,10)
ans =

    1.009837962962963
    0.992766203703704
    0.995515046296296

```

Figura 18.1: Solução do Exemplo 51 usando o Método Iterativo de Gauss-Seidel.

## 18.3 Exercícios

**Exercício 54.** Utilize o método de Gauss-Seidel aos itens a), b) e c) do Exercício 1, da Seção 17.4.

**Exercício 55.** Dado o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases},$$

i) determine a solução exata, ii) calcule 5 iterações para os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel e compare os resultados com a solução real. Considere  $x^0 = [0, 0, 0]^T$ .

## 18.4 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 54.** a)  $x^4 = [0.486280000000000; 0.590996250000000]^T$ ;

b)  $x^3 = [1.017361111111111, 2.995370370370370, 1.993441358024691]^T$ ;

c)  $x^4 = [1.007818419825073, 1.003334964285714, 0.995768344606414, 1.003923338979592]^T$ .

**Resposta do Exercício 55.** i) Gauss  $[1, 2, 3]^T$ ;

ii) Jacobi  $[0.977640625000000, 2.011542968750000, 3.001123046875000]^T$ ,

Gauss-Seidel  $[0.997533608398438, 2.000823402099609, 3.000822448425293]^T$ .

Erros:  $e_{Jacobi} = 6.502929687500014e - 02$ ,  $e_{Gauss-Seidel} = 1.484412597656248e - 02$ .

# Capítulo 19

## Sistemas Lineares

## Número Condicional

### 19.1 Número Condicional

Consideremos um sistema  $Ax = b$ , em que  $A$  é uma matriz  $n \times n$  invertível. Se perturbarmos a inversa de  $A$ , isto é,  $A^{-1}$  obteremos uma nova matriz  $B$ . Consequentemente, a solução perturbada será  $\tilde{x} = Bb$ . Vejamos como medir esta perturbação.

Usando uma norma compatível com a norma vetorial, temos

$$\|x - \tilde{x}\| = \|x - Bb\| = \|x - BAx\| = \|(I - BA)x\| \leq \|I - BA\| \|x\|.$$

Em termos relativos, temos

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|I - BA\|.$$

Em outra mão, ao perturbarmos o vetor  $b$  obteremos um vetor  $\tilde{b}$  de que  $x$  e  $\tilde{x}$  satisfação, respectivamente,  $Ax = b$  e  $A\tilde{x} = \tilde{b}$ . Portanto,

$$\|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}b - A^{-1}\tilde{b}\| = \|A^{-1}(b - \tilde{b})\| \leq \|A^{-1}\| \|b - \tilde{b}\|.$$

Em termos relativos, temos

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|b - \tilde{b}\| = \|A^{-1}\| \left( \frac{\|Ax\|}{\|b\|} \right) \|b - \tilde{b}\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \|x\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

donde segue que

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

**Definição 8.** Seja  $A_{n \times n}$  uma matriz tal que  $\det(A) \neq 0$ . Definimos o número condicional de  $A$  como sendo

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

O valor de  $\text{cond}(A)$  na Definição 8 depende da norma utilizada. Neste material optaremos por usar a norma apresentada na Definição 7.

**Exemplo 52.** Determine o número condicional da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução: Temos que a inversa de  $A$ , é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que  $\|A\| = \max\{|2| + |1|, |4| + |3|\} = 7$  e  $\|A^{-1}\| = \{|\frac{3}{2}| + |-\frac{1}{2}|, |-2| + |1|\} = 3$

Portanto,  $Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 7 \cdot 3 = 21$ .

Decorre imediatamente das Definições 7 e 8 que  $cond(A) \leq 1$ . De fato,

$$cond(A) = \|A^{-1}\| \|A\| \geq \|A^{-1}A\| = \|I\| = 1.$$

Se  $cond(A) \gg 1$ , então pequenas perturbações relativas no vetor  $b$  podem produzir grandes perturbações na solução  $x$ . Neste caso, diremos que o sistema  $Ax = b$  é mal condicionado. *Acompanhe os exemplos a seguir para ver os estragos!*

**Exemplo 53.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad \epsilon > 0.$$

Temos que sua inversa  $A^{-1}$  é dada por

$$A^{-1} = e^{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1-\epsilon \\ -1+\epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

donde decorre que

$$\|A\| = \{\|1\| + \|1+\epsilon\|, \|1-\epsilon\| + \|1\|\} = 2+\epsilon$$

$$\|A^{-1}\| = \{\|\epsilon^{-2}\| + \|\epsilon^2(-1-\epsilon)\|, \|\epsilon^{-2}(-1+\epsilon)\| + \|1\|\} = \epsilon^{-2}(2+\epsilon).$$

Portanto,

$$cond(A) = \|A^{-1}\| \|A\| = \epsilon^{-2}(2+\epsilon)(2+\epsilon) = \left(\frac{2+\epsilon}{\epsilon}\right)^2 > \frac{4}{\epsilon^2}.$$

Se supormos  $\epsilon = 0.001$ , temos que

$$\epsilon \leq 10^{-3} \Rightarrow \epsilon^2 \leq 10^{-6} \Rightarrow \frac{1}{10^{-6}} \leq \frac{1}{\epsilon^2} \Rightarrow \frac{4}{10^{-6}} \leq \frac{4}{\epsilon^2} \leq cond(A) \Rightarrow cond(A) \geq 4 \cdot 10^6$$

Assim, uma pequena perturbação em  $A$  ou  $b$  da ordem de  $10^{-3}$  pode produzir uma perturbação  $4 \cdot 10^6$  vezes maior na solução de um sistema associado  $Ax = b$ .

Assim, ao considerarmos um sistema  $n \times n$ ,  $Ax = B$  e uma solução aproximada  $\tilde{x}$ , somos, intuitivamente, levados a pensar que quanto mais próximo do vetor nulo o vetor  $\tilde{r} = B - A\tilde{x}$  (resíduo) estiver, melhor será a solução  $\tilde{x}$ . Porém, esta intuição é falha como veremos a seguir.

**Exemplo 54.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 & + & 1.001x_2 & = & 2.001 \\ 0.999x_1 & + & x_2 & = & 1.999 \end{cases} \quad (\epsilon = 0.001)$$

Este sistema tem solução exata  $x = (1, 1)^T$ . Estudaremos a seguir duas perturbações deste sistema, uma na matriz  $A$  e outra na matriz  $b$ . Pois bem:

Consideremos o sistema a seguir com matriz  $A$  “levemente” modificado:

$$\begin{cases} x_1 & + & 1.001x_2 & = & 2.001 \\ 0.998x_1 & + & x_2 & = & 1.999 \end{cases}.$$

Para nosso espanto, a solução exata deste sistema é dada por  $x = (9.980039918513484e-04, 1.998003992016133e+00)$  ou mais precisamente  $(\frac{1}{1002}, \frac{1001}{501})^T$ . Sem o conhecimento da solução  $(1, 1)^T$  do sistema original certamente seríamos tentados a calcular o resíduo  $\tilde{r}$  para verificarmos se  $\tilde{x} = (\frac{1}{1002}, \frac{1001}{501})^T$  seria uma boa aproximação da solução exata  $x$ . Pois bem, façamos as contas:

$$\tilde{r} = B - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 2.001 \\ 1.999 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1.001 \\ 0.999 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1002} \\ \frac{1001}{501} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.980039918922046e-07 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, consideremos o sistema a seguir com matriz  $b$  “levemente” modificada:

$$\begin{cases} x_1 + 1.001x_2 = 2.000 \\ 0.999 + x_2 = 1.999 \end{cases}.$$

Novamente, para nosso espanto, a solução exata deste sistema é dada por  $x = (-998.9999998601942, 999.9999998603339)^T$  ou mais precisamente  $(-999, 1000)^T$ . Analogamente ao caso anterior, calculemos o resíduo em relação à “aproximação”  $\tilde{x} = (-999, 1000)^T$ . Pois bem

$$\tilde{r} = B - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 2.001 \\ 1.999 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1.001 \\ 0.999 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -999 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000000000113577e-03 \\ -2.353672812205332e-14 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Conseguiu ver o  $10^6$ ?

**Teorema 23.** Se  $r = b - \tilde{b}$  e  $e = x - \tilde{x}$ , então

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

*Demonstração.* Temos que

$$Ae = A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - \tilde{b} = r \Rightarrow e = A^{-1}r,$$

$$b = Ax \Rightarrow \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \|x\|,$$

e

$$\|e\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|.$$

Assim,

$$\|e\| \|b\| \leq \|A^{-1}\| \|r\| \|A\| \|x\| \Rightarrow \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

Por outro lado,

$$r = Ae \Rightarrow \|r\| = \|Ae\| \leq \|A\| \|e\|$$

e

$$x = A^{-1}b \Rightarrow \|x\| = \|A^{-1}b\| \leq \|A^{-1}\| \|b\|.$$

Logo,

$$\|r\| \|x\| \leq \|A\| \|e\| \|A^{-1}\| \|b\| \Rightarrow \frac{1}{\|A^{-1}\| \|A\|} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \Rightarrow \frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|}.$$

□

**Exemplo 55.** Aplique o Teorema 23 para obter cotas para o erro relativo considerando o sistema dado no Exemplo 54 referente às duas perturbações abordadas. Use a norma dada pela Definição 6.

Solução: Temos que a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.001 \\ 0.999 & 1 \end{bmatrix}$$

é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1000000 & -1001000 \\ -999000 & 1000000 \end{bmatrix}.$$

Além disso  $\|A\| = \max\{|1| + |1.001|, |0.999| + |1|\} = 2.001$  e  $\|A^{-1}\| = \max\{|1000000| + |-1001000|, |-999000| + |1000000|\} = 2001000$  donde segue que  $\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\| = 2001000 \cdot 2.001 = 4004001$ .

Considerando à perturbação na matriz  $A$ , temos

$$\|r\| = \max\{|0|, |-9.980039918922046e-07|\} = 9.980039918922046e-07, \quad \|b\| = \max\{|2.001|, |1.999|\} = 2.001$$

Aplicando os dados acima à relação

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4004001} \frac{9.980039918922046e-07}{2.001} &\leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq 4004001 \frac{9.980039918922046e-07}{2.001} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1.245635602079730e-13 \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq 1.997005987776301. \end{aligned}$$

Comprovemos calculando o valor de  $\frac{\|e\|}{\|x\|}$ . Pois bem,

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} = \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{1002} \\ \frac{1001}{501} \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} \frac{1001}{1002} \\ -\frac{500}{501} \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\max\left\{\left|\frac{1001}{1002}\right|, \left|-\frac{500}{501}\right|\right\}}{\max\{|1|, |1|\}} = \frac{\frac{1001}{1002}}{1} = \frac{1001}{1002} = 0.999001996007984$$

Por fim, temos a seguinte desigualdade em conformidade com o Teorema 23:

$$\Rightarrow 1.245635602079730e-13 \leq 0.999001996007984 \leq 1.997005987776301.$$

Agora vejamos o caso em que  $b$  sofreu uma perturbação. Algumas das contas acima serão aproveitadas. Temos que

$$\|r\| = \max\{|1.000000000113577e-03|, |-2.353672812205332e-14|\} = 1.000000000113577e-03, \quad \|b\| = \max\{|2.001|, |1.999|\}$$

Aplicando os dados acima à relação

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4004001} \frac{1.000000000113577e-03}{2.001} &\leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq 4004001 \frac{1.000000000113577e-03}{2.001} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1.248126873754890e-10 \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq 2000.999999947571. \end{aligned}$$

Vejamos o valor de  $\frac{\|e\|}{\|x\|}$ :

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} = \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -999 \\ 1000 \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1000 \\ -9999 \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\max\{|1000|, |-999|\}}{\max\{|1|, |1|\}} = \frac{1000}{1} = 1000$$

Por fim, temos a seguinte desigualdade em conformidade com o Teorema 23:

$$1.248750937017220e-10 \leq 1000 \leq 2001.000000227268$$

**Observação 23.** Quando  $Cond(A) \approx 1$  dizemos que a matriz  $A$  é bem condicionada, ou seja, pequenas perturbações no vetor  $B$  refletem em pequenas variações no vetor  $X$ . O número condicional não deve ser entendido como regra para determinar o mau condicionamento de uma matriz (sistema). Mas como uma previsão de mau condicionamento. Por exemplo, um sistema em que a matriz dos coeficientes é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}$$

tem  $Cond(A) = 10^{10}$  (*verifique*) mas o sistema não é mal condicionado. *Crie um sistema e faça alguns testes.*

O Exemplo ?? ilustra bem um problema com relação à precisão dos instrumentos de medida tendo em vista o mal condicionamento de um sistema.

## 19.2 No Computador

O comando  $cond(A, 'inf')$  do Octave encontra a norma de uma matriz  $A$ . Neste caso, pode-se facilmente calcular  $cond(A)$ . O programa a seguir apresenta uma implementação do Teorema 23.

**Programa 20.** Intervalo Para o Erro  $\frac{\|e\|}{\|x\|}$  Associada ao Condicionamento de Um Sistema Linear

```
function[x] = erCond(A,b,x1)
condA = norm(A,'inf') * norm(inverse(A),'inf');
r = norm(b - A * x1,'inf');
normb = norm(b,'inf');
cinf = (1/condA) * (r/normb);
csup = condA * (r/normb);
printf("Uma estimativa para o erro relativo é dada por: \n")
printf("%d ||e||/||x|| %d \n",cinf,csup)
endfunction
```

Aplicando o Programa 20 ao Exemplo 55 temos:

```
Janela de Comandos
>> erCond([1 1.001; 0.999 1],[2.001;1.999],[1/1002;1001/501])
Uma estimativa para o erro relativo é dada por:
1.24564e-13 ||e||/||x|| 1.99701
>> erCond([1 1.001; 0.999 1],[2.001;1.999],[-999;1000])
Uma estimativa para o erro relativo é dada por:
1.24813e-10 ||e||/||x|| 2001
```

Figura 19.1: Solução do Exemplo 55 usando o Octave.

**Observação 24.** Uma “abertura” do código, referente ao Programa 20, em tela (retirada de alguns ; - *Lembra-se?*) revelará valores levemente diferentes dos obtidos no Exemplo 55. Isso ocorre devido à aproximações que a máquina faz e no Exemplo não o fizemos (usamos o Octave apenas em algumas etapas). Por exemplo, o Octave obteve  $cond(A) = 4004000.999440328$  e nós  $cond(A) = 4004001$ , sendo este último o valor exato. Tais erros não comprometem os resultados finais de maneira significativa.



## 19.3 Exercícios

**Exercício 56.** Calcule o número condicional de cada matriz a seguir.

a)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.00001 & 2 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercício 57.** Use o método de Gauss a seguir e discuta mudanças significativas devido aos arredondamentos propostos:

a)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 2.001 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 1.999 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 2 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2.001 \\ 1.00001x_1 + 2x_2 = 1.999 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 1.00001x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

**Exercício 58.** “Uma matriz é dita singular quando seu determinante é nulo”. Esta é uma definição amplamente conhecida da Álgebra Linear. Calcule alguns determinantes de matrizes apresentadas aqui neste capítulo (e outras se tiver tempo livre). O que se pode notar sobre o determinante de matrizes possivelmente mal condicionadas?

## 19.4 Respostas dos Exercícios

**Resposta do Exercício 56.** a) 50; b) 600002; c) 12.

**Resposta do Exercício 57.** a) Solução do sistema original:  $[-11.95799999999997, 23.93999999999996]^T$ ; Solução do sistema ajustado:  $[-11.99999999999996, 23.99999999999995]^T = [-11, 24]^T$ . As diferenças entre as soluções obtidas se deram somente a partir da segunda casa decimal que é de certa forma aceitável dado o arredondamento feito. Esse fato se deve ao baixo valor de  $\text{cond}(A) = 12$  em que  $A$  é a matriz dada no item “a” do Exercício 56.

b) Solução do sistema original:  $[-199.9999999988358, 101.0004999994271]^T$ ; Solução do sistema ajustado:  $[0, 1]^T$ . As diferenças entre as soluções obtidas são notáveis extrapolando vários dígitos. Esse fato se deve ao alto valor de  $\text{cond}(A) = 600002$  em que  $A$  é a matriz dada no item “b” do Exercício 56.

**Resposta do Exercício 58.** É comum que matrizes mal condicionadas apresentem além de números condicionais muito elevados, valores de determinante muito próximos de zero o que as torna “quase” singulares. *Coisas estranhas acontecem perto de uma singularidade!*

# Referências

- [1] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D.: *Análise Numérica*. 10<sup>a</sup> ed. Editora CENGAGE Learning, 2015.
- [2] BARROSO, L. C. et al. *Cálculo Numérico (Com Aplicações)*. 2 ed. São Paulo: Harbra, 1987.
- [3] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.
- [4] SPERANDIO, D. et al. *Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.
- [5] HERNSTEIN, I.N. . *Topics in Algebra*, 2nd edition. John Wiley & Sons, Chicago 1975.
- [6] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H., COSTA, R. C.F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 5<sup>a</sup> ed., São Paulo: Atual, 1987.
- [7] BOLDRINI, J. L. ... [et al.]. *Álgebra Linear*. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [8] STEWART, J. *Cálculo*, volume 1. 5<sup>a</sup> ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- [9] STEWART, J. *Cálculo*, volume 2. 5<sup>a</sup> ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2007.
- [10] RESNICK, R. HALLIDAY, D. *Física* 4<sup>ed.</sup> Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983.
- [11] MUKAI, H., FERNANDES, P. R. G, *Manual de Laboratório de Física I*. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas - Departamento de Física.

# Anexos

## Anexo 1. Demonstração do Teorema 15.

A igualdade a seguir é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_0^n \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)}.$$

*Demonstração.* Utilizaremos a prova por indução matemática.<sup>1</sup> Note que

$$P(1) : f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} - \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \text{ donde segue que } P(1) \text{ é verdadeira.}$$

Suponhamos que  $P(n-1)$  seja verdadeira

$$P(n-1) : f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^{n-1} (x_j - x_i)} \text{ e mostremos que } P(n) \text{ é verdadeira.}$$

Por definição de DDF, temos que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] \stackrel{[*]}{=} \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}. \quad (19.1)$$

Multiplicando (19.1) por  $(x_n - x_{n-1})$ , temos:

$$\begin{aligned} (x_n - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \underbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n]}_I - \underbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}]}_{II} \stackrel{HI}{=} \\ &= \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{n-2} \frac{f(x_j)}{\left[ \prod_{i=0, i \neq j}^{n-2} (x_j - x_i) \right] (x_j - x_n)} + \frac{f(x_n)}{\prod_{i=0}^{n-2} (x_n - x_i)} \right)}_I - \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{n-2} \frac{f(x_j)}{\left[ \prod_{i=0, i \neq j}^{n-2} (x_j - x_i) \right] (x_j - x_{n-1})} + \frac{f(x_{n-1})}{\prod_{i=0}^{n-2} (x_{n-1} - x_i)} \right)}_{II} = \\ &= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \frac{f(x_j)}{\left[ \prod_{i=0, i \neq j}^{n-2} (x_j - x_i) \right] (x_j - x_n)}}_{III} - \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \frac{f(x_j)}{\left[ \prod_{i=0, i \neq j}^{n-2} (x_j - x_i) \right] (x_j - x_{n-1})}}_{IV} + \underbrace{\frac{f(x_n)}{\prod_{i=0}^{n-2} (x_n - x_i)} - \frac{f(x_{n-1})}{\prod_{i=0}^{n-2} (x_{n-1} - x_i)}}_{IV} = \\ &= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \frac{f(x_j)(x_n - x_{n-1})}{\left[ \prod_{i=0, i \neq j}^{n-2} (x_j - x_i) \right] (x_j - x_n)(x_j - x_{n-1})}}_{III} + \underbrace{\sum_{j=n-1}^n \frac{f(x_j)(x_n - x_{n-1})}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)}}_{IV} = \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)(x_n - x_{n-1})}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)} = (x_n - x_{n-1}) \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Indução matemática é um método de prova matemática usado para demonstrar a verdade de um número infinito de proposições.

A forma mais simples e mais comum de indução matemática prova que um enunciado vale para todos os números naturais ( $\mathbb{N}$ ). Essa forma de prova consiste de dois passos:

$P(1)$ : mostrar que o enunciado vale para  $n = 1$  (ou  $n = 0$  se o conjunto dos naturais  $\mathbb{N}$  incluir o 0);

$P(n+1)$ : mostrar que, se o enunciado vale para  $n-1$ , então o mesmo enunciado vale para  $n$ . Esta última etapa é comumente chamada de passo indutivo.

Assim,

$$(x_n - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] = (x_n - x_{n-1}) \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j} (x_j - x_i)}$$

donde segue que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j} (x_j - x_i)}$$

como queríamos demonstrar.

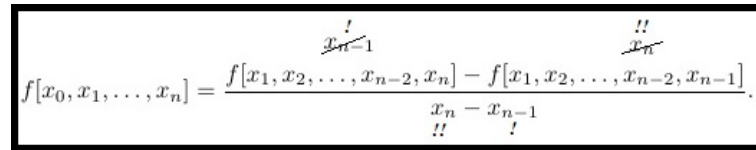
[\*] Note que a DDF  $f[x_0, x_1, x_2]$  pode se apresentar de várias formas (tente perceber a simetria):

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_2]}{x_1 - x_2}.$$

Sendo assim, é conveniente observar que  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  também pode ser escrita como segue:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_n] - f[x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}.$$

Em resumo, temos que termos omitidos no numerador aparecem trocados no denominador. Acompanhe na Figura 19.2



$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_n] - f[x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}.$$

Figura 19.2: Esquema - DDF.

Em caso de dúvida, consulte o professor!

□