Exemplo: As alturas da população de homens adultos nos EUA, têm $\bar{x}$ = 69 u.m. desvio padrão σ = 2,8 u.m. . O jogador Michael Jordan, ganhou reputação de gigante, mas com 78 u.m., ele pode ser considerado excepcionalmente alto, comparado com a população em geral de homens adultos americanos?

MOMENTOS ESTATÍSTICOS, ASSIMETRIA E CURTOSE.

O Momento Estatístico é apenas uma fórmula, a qual será utilizada, no estudo de outros dois assuntos: Assimetria e Curtose.
A rigor, existem três tipos de momentos estatísticos:

MOMENTO CENTRADO NA MÉDIA ARITMÉTICA

É o momento que precisamos conhecer bem. Será exatamente ele que encontraremos nas fórmulas de Assimetria e Curtose.

- ✓ Para o Rol:

$$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r}{n}$$

Se durante uma prova precisarmos determinar o **MOMENTO DE ORDEM 2 CENTRADO NA MÉDIA**, temos:

$$M_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Esta fórmula é semelhante à Variância, logo podemos concluir que o **MOMENTO DE SEGUNDA ORDEM CENTRADO NA MÉDIA ARITMÉTICA** de um conjunto é o mesmo que a sua **VARIÂNCIA**.

- ✓ Para Dados Tabulados:

$$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r . f_i}{n}$$

- ✓ Para Distribuição de Frequência:

$$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(PM - \bar{x})^r . f_i}{n}$$

Repetiremos a fórmula dos dados tabulados e no lugar de Xi (elemento individualizado), colocaremos o PM (ponto médio) da classe.

OBS: Notemos que as fórmulas dos Momentos não sofrem a Correção de Bessel, ou seja não subtrai-se o "menos 1"(n-1), colocado no denominador das fórmulas do Desvio Padrão e da Variância, quando o conjunto representar uma **amostra**. Portanto, não nos esqueçamos disso: Correção de Bessel é somente para o **desvio padrão (S)** e para a **Variância (S^2).**

Exemplo: Determinar o valor do Terceiro Momento Centrado na Média do conjunto abaixo:

Classe	0|-- 4	4|-- 8	8|--12	12|-- 16
f_i	1	2	2	1

Resolução: Utilizaremos a fórmula:

$$M_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(PM - \bar{x})^3 . f_i}{n}$$

O primeiro passo é calcular a média, que é $\bar{x}$ = 8.

classe	fi	PM	fi.PM	(PM -média)	(PM -média)^3	(PM -média)^3*fi
0|-- 4	1	2	2	-6	-216	-216
4|--8	2	6	12	-2	-8	-16
8|--12	2	10	20	2	8	16
12|--16	1	14	14	6	216	216
Total	6		48			0

Substituindo os valores temos:

$$M_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(PM-\bar{x})^3 . f_i}{n} \;=\; M_3 = \frac{0}{6} = 0$$

Agora para o mesmo conjunto, mas para o valor do ***Momento Centrado na Média de Ordem 4.***

classe	fi	PM	fi.PM	(PM -média)	(PM -média)^4	(PM -média)^4*fi
0|-- 4	1	2	2	-6	1296	1296
4|--8	2	6	12	-2	16	32
8|--12	2	10	20	2	16	32
12|--16	1	14	14	6	1296	1296
Total	6		48			2656

$$M4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(PM-\bar{x})^4 . f_i}{n} \;=\; M_4 = \frac{2.656}{6} = 442,67$$

Usaremos esta teoria dos Momentos como suporte para chegarmos aos valores de Assimetria e Curtose. O **momento natural de primeira ordem** é o mesmo que a média e o **momento centrado na Média de segunda ordem** é o mesmo que a Variância.

Resumo das Fórmulas de Momentos

- **Teremos três tipos distintos de Momentos**

	Rol	Dados Tabulados	Dist. Frequências
Momento Natural	$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^r}{n}$	$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^r . f_i}{n}$	$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(PM)^r . f_i}{n}$
Momento Centrado Numa Origem Qualquer	$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - Y)^r}{n}$	$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - Y)^r . f_i}{n}$	$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(PM - Y)^r . f_i}{n}$
Momento Centrado na Média Aritmética	$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r}{n}$	$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r . f_i}{n}$	$M_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(PM - \bar{x})^r . f_i}{n}$

Medidas de Assimetria

As medidas de assimetria e curtose são as que restam para completarmos o quadro das estatísticas descritivas, que proporcionam, juntamente com as medidas de posição e dispersão, a descrição e compreensão completas da distribuição de frequências estudadas até agora.

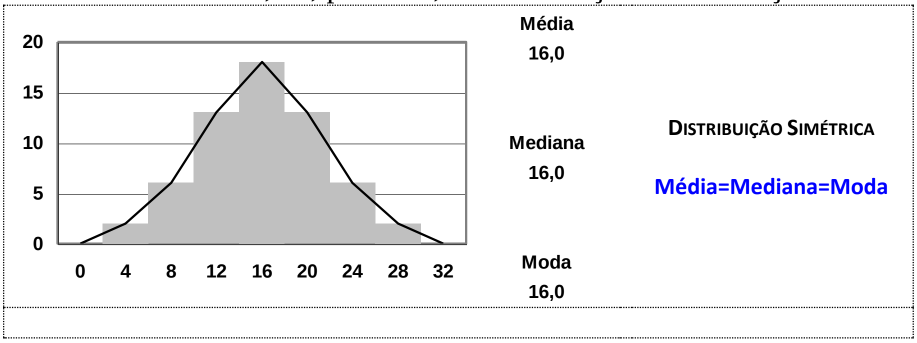
As medidas de assimetria referem-se à forma da curva de uma distribuição de frequências, mais especificamente do polígono de frequência ou do histograma.

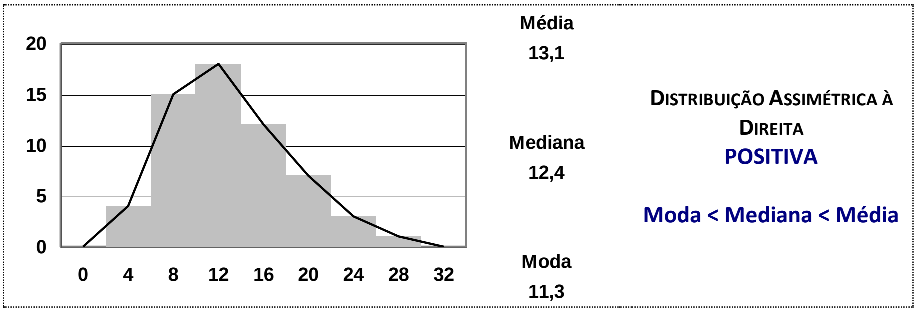
Sua principal característica é apresentar maior concentração de valores (picos) na região central da distribuição. Numa curva simétrica o pico encontra-se no centro da distribuição e as medidas de tendência central coincidem. Já numa curva assimétrica o pico esta localizado a direita ou a esquerda do centro da distribuição. A assimetria é o grau de afastamento de uma distribuição em relação ao eixo de simetria.

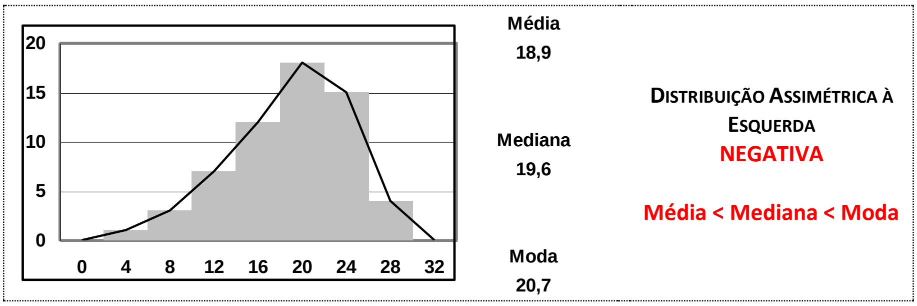
Medidas da Forma de distribuição, da posição relativa e detecção de valores atípicos (outliers)

Indicam a Forma da Distribuição quanto à simetria em relação à média, e quanto ao achatamento em relação a uma Distribuição Normal.

Uma DISTRIBUIÇÃO é SIMÉTRICA quando seus valores de MÉDIA, MEDIANA e MODA coincidem. Quando os dados têm assimetria positiva, a média geralmente será maior que a mediana; quando os dados têm assimetria negativa, a média normalmente será menor que a mediana. A comparação entre o valor da Média e o valor da Moda, dá, portanto, uma indicação da inclinação da distribuição.







Existem cinco formas distintas de determinarmos **índices de Assimetria** ou (**coeficiente de Assimetria**).

- ✓ **ÍNDICE QUARTÍLICO DE ASSIMETRIA**

Será representado pela fórmula:

$$A = \frac{(Q_3 + Q_1 - 2Md)}{(Q_3 - Q_1)}$$

Onde;

Q_1 = primeiro quartil; Q_3 = terceiro quartil e Md é a mediana.

Acerca desta fórmula, convém sabermos que se o índice der positivo, isso indica uma Curva de Assimetria Positiva (Curva Assimétrica à Direita). Se negativo, teremos uma Curva de Assimetria Negativa (Curva Assimétrica à Esquerda).

Exemplo: Calcule a assimetria, aplicando a fórmula do Índice Quartílico de Assimetria, nos valores Q_1= 58,78 ; Q_3 = 81,17 e Md = 71,04.

$$A = \frac{(Q_3 + Q_1 - 2Md)}{(Q_3 - Q_1)} = \frac{(58{,}78 + 81{,}17 - 2 * (71{,}04))}{(58{,}78 - 81{,}17)} = -0{,}095$$

COEFICIENTE DE ASSIMETRIA DE PEARSON

Veremos agora duas outras maneiras de calcular o índice de assimetria de um conjunto, as quais envolvem as Medidas de Tendência Central.

- ✓ **PRIMEIRO COEFICIENTE DE ASSIMETRIA DE PEARSON**
  Dado pela fórmula:

$$A = \frac{(\overline{X} - Mo)}{S}$$

Onde:
$\bar{x}$ = é a Média Aritmética;
Mo = é a Moda;
S = é o Desvio Padrão do conjunto.

Observando bem a fórmula que define o Primeiro Coeficiente de Pearson, verificamos que o sinal da Assimetria será definido pelo seu numerador. Assim, apenas comparando os valores da média e da moda, saberemos qual o tipo de assimetria da distribuição.
Assim, de acordo com este coeficiente, teremos:

Se: $\bar{x} = M_o$ → Assimetria Nula, ou seja, distribuição simétrica;
Se: $\bar{x} > M_o$ → Assimetria Positiva, Curva assimetria à direita;
Se: $\bar{x} < M_o$ → Assimetria Negativa, Curva assimetria à esquerda.

- ✓ **SEGUNDO COEFICIENTE DE ASSIMETRIA DE PEARSON**
  Será calculado da seguinte maneira:

$$\boxed{As = \frac{3 \times (\bar{x} - M_d)}{s}}$$

Onde:
$\bar{x}$ = é a Média Aritmética;
Md = é a Mediana;
S = é o Desvio Padrão do conjunto.

Aqui, observamos que o sinal da assimetria será definido apenas comparando os valores da média e da mediana do conjunto.

Se: $\bar{x} = M_d$ → Assimetria Nula, ou seja, distribuição simétrica;
Se: $\bar{x} > M_d$ → Assimetria Positiva, Curva assimetria à direita;
Se: $\bar{x} < M_d$ → Assimetria Negativa, Curva assimetria à esquerda.

- ✓ Índice Momento de Assimetria

Este é o quarto método pelo qual aprenderemos a determinar o valor do grau de Assimetria de um conjunto.
Será apresentado pela fórmula:
$A = \frac{m_3}{S^3}$, onde:
M_3 é o terceiro Momento Centrado na Média aritmética; e
S^3 é o Desvio Padrão, elevado à terceira potência.

Trata-se de um índice cuja aplicação não é das mais rápidas. No numerador teremos m3, que é o terceiro momento, cuja fórmula é:

$$M_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (PM - \bar{x})^3 . f_i}{n}$$

E, no denominador, o Desvio Padrão ao cubo, que poderá ser encontrado da seguinte maneira:

$$S^3 = \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (PM - \bar{x})^2 . f_i}{n}} \right)^3$$

Daí, teremos que a fórmula completa do Índice Momento de Assimetria será:

$$A = \frac{m_3}{S^3} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (PM - \bar{x})^3 . f_i}{n}}{\left(\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (PM - \bar{x})^2 . f_i}{n}} \right)^3}$$

Percebemos que para encontrar o Índice Momento de Assimetria teríamos que trabalhar o numerador e o denominador, isoladamente para chegar ao resultado.

- ✓ Índice Decílico de Assimetria

Uma quinta e última maneira de se determinar a assimetria de um conjunto é por este índice decílico. Nesta fórmula, só estarão presentes os decis. Vejamos:

$$A = \frac{(D_9 + D_1 - 2Md)}{(D_9 - D_1)}$$

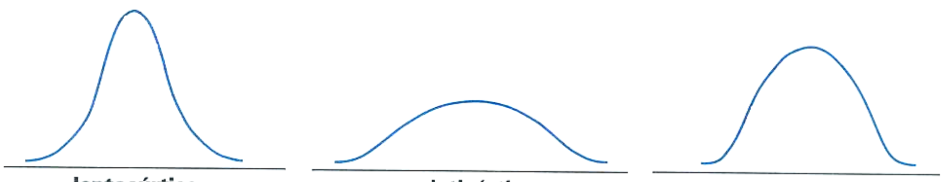
Onde;
D_1 = primeiro decil; D_9 = nono decil e Md é a mediana.

O valor em módulo do Coeficiente de Pearson indica a intensidade da assimetria, e o seu sinal indica a direção da assimetria.

0,15 < |As| < 1	**ASSIMETRIA MODERADA**
|As| > 1	**ASSIMETRIA FORTE**
As < 0	**ASSIMETRIA NEGATIVA**
As > 0	**ASSIMETRIA POSITIVA**

MEDIDAS DE ACHATAMENTO OU CURTOSE

Denominamos **CURTOSE** o **grau de achatamento** de uma distribuição em relação à **DISTRIBUIÇÃO NORMAL**. A distribuição de referência (Distribuição Normal) é denominada **MESOCÚRTICA** (Meso = Meio, Central, etc.).
Quando a distribuição apresenta uma curva de frequência mais **fechada** (mais **aguda** em sua **parte superior**), ela é denominada **LEPTOCÚRTICA** (Lepto = Delgado, Alongado, Magro, etc.)
Quando a distribuição apresenta uma curva de frequência mais **aberta** (mais **achatada** em sua **parte superior**), ela é denominada **PLATICÚRTICA** (Plato = Chato, Plano, Largo, etc.).
Quando se trata de Curtose, não há como extrairmos uma conclusão sobre qual sera a situação da distribuição, se é mesocúrtica, platicúrtica ou leptocúrtica, apenas conhecendo a média, moda e mediana.



COEFICIENTE DE CURTOSE

Para uma distribuição de frequências, o **Coeficiente de Curtose** pode ser calculado conforme a fórmula abaixo:

$$\boxed{C = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}}$$

Onde;
Q_1 = primeiro quartil;
Q_3 = terceiro quartil e
P_{10} = décimo percentil;
P_{90} = nonagésimo percentil.

Uma curva normal apresenta um coeficiente percentílico de curtose de valor **C =0,263**. Tomando esse valor como padrão, podem-se estabelecer comparações entre as diversas curvas:

C = 0,263	**Distribuição Mesocúrtica**
C > 0,263	**Distribuição Platicúrtica**
C < 0,263	**Distribuição Leptocúrtica**

- ✓ Índice Momento de Curtose

Será apresentado pela fórmula:

$$C = \frac{m_4}{S^4}, \text{ onde:}$$

M_4 é o quarto Momento Centrado na Média aritmética; e
S^4 é o Desvio Padrão, elevado à quarta potência.
Teríamos que encontrar separadamente o valor do numerador e do denominador.
O numerador (M_4): Quarto Momento Centrado na Média:

$$M_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (PM - \bar{x})^4 . f_i}{n}$$

O denominador (S^4): Quarta potência Desvio Padrão:

$$S^4 = (S^2)^2 = \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (PM - \bar{x})^2 . f_i}{n}} \right)^2$$

Como vimos acima, a quarta potência do Desvio Padrão é a mesmíssima coisa que o quadrado da Variância. Logo a fórmula completa do Índice Momento de Curtose é:

$$C = \frac{m_4}{S^4} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (PM - \bar{x})^4 . f_i}{n}}{\left(\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (PM - \bar{x})^2 . f_i}{n}} \right)^2}$$

Interpretaremos o Índice Momento de Curtose da seguinte maneira:

C = 3	**DISTRIBUIÇÃO MESOCÚRTICA**
C < 3	**DISTRIBUIÇÃO PLATICÚRTICA**
C > 3	**DISTRIBUIÇÃO LEPTOCÚRTICA**

È, portanto, de suma importância que tenhamos bem memorizados estes valores de referencia, a partir dos quais poderemos dizer em qual das situações de Curtose se encontra determinado conjunto.

Lista de Exercícios

1-Uma distribuição de frequência apresenta as seguintes medidas: $\bar{x}$ = 48,1; M_d= 47,9 e S = 2,12. Calcule o coeficiente de assimetria. (0,283)

2- Em uma distribuição de frequência foram encontradas as seguintes medidas: $\bar{x}$ = 33,18; M_d = 31,67 e S = 12,45.Calcule o coeficiente de assimetria. (0,3639)

3-Dada a distribuição de frequência relativa aos pesos de 100 operários de uma fabrica, determine o grau de assimetria (resp. $\bar{x}$ = 74,08; M_d = 74 e S^2 = 133,81; S = 11,567; AS = 0,0207 aproximadamente 0,021).

Pesos (kg)	50|--58	58|--66	66|--74	74|--82	82|--90	90|--98
Nº de operários	10	15	25	24	16	10

4- Considerando a distribuição de frequências relativas aos pesos de 150 caixas num deposito, calcule:

a). A média aritmética;(55,47)

b) O desvio padrão; (10,15)

c). A mediana;(56)

d) Os quartis Q_1 e Q_3;(48,5 e 63,44)

e). Os percentis P_{10} e P_{90};(68,44 e 41)

f) O coeficiente de assimetria; (0,157)

g). O coeficiente percentílico de curtose. (0,272)

Pesos caixas (kg)	30|--40	40|--50	50|--60	60|--70	70|--80
frequência	12	30	55	45	8

5-Calcule os coeficientes percentílicos de curtose relativo às distribuições: (resp. C_A = 0,240 curva leptocúrtica; C_B = 0,263 curva mesocúrtica; C_C = 0,275 curva platicúrtica)

Distribuições	Q_1	Q_3	P_{10}	P_{90}
A	301,9	398,1	236,4	463,6
B	6820	9075	5812	10100
C	10,5	17,38	8	20,5

6- O valor médio de terras e construções por acre de uma amostra de fazendas é de US$ 1.000,00 com desvio padrão de US$ 200,00. O conjunto de dados tem uma distribuição em forma de sino. Estime a porcentagem de fazendas cujos valores das terras e construções por acre estão entre US$ 800 a US$ 1.200.

7- Se a média de balas em um pacote é 20 e desvio padrão é 4. Determine a área onde x esteja entre 16 e 24.

8- A velocidade média dois veículos ao longo de um trecho de uma estrada é de 56(mph) milhas por hora, com desvio padrão de 4 mph. Foram medidas as velocidades de três carros ao longo da estrada, obtendo-se respectivamente 62 mph, 47 mph e 56 mph. Obtenha o escore $\mathcal{Z}$ correspondente a cada velocidade. O que você pode concluir?