ANALYSE 1

(2020 - 2021)

UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE DE BINGERVILLE

Table des matières

Chapitre 1

NOMBRES RÉELS

1.1 Ensemble des nombres réels

Définition 1.1.1. *L'ensemble $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres reels, est muni de deux lois internes " $+$ ", " $\times$ ", et d'une relation " $\leq$ " tel que :*

1. $(\mathbb{R}, +, x)$ *est un corps commutatif ;*
2. $\leq$ *est une relation d'ordre total dans* $\mathbb{R}$ *;*
3. — $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
   — $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in [0; +\infty[, \ x \leq y \Rightarrow xz \leq yz.$

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1. *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tous x et y dans I et pour tout z dans $\mathbb{R}$,*

$$\text{si} \quad x \leq z \leq y \quad \text{alors} \quad z \in I.$$

Remarque 1.2.1.

1. *Il existe plusieurs types d'intervalles.*
2. *Le fait de considérer une partie I de $\mathbb{R}$ se note $I \subset \mathbb{R}$ (qui se lit I inclus dans $\mathbb{R}$).*
3. *Le fait de considérer un élément a de I se note $a \in I$ (qui se lit a appartient à I). Il ne faut donc pas confondre le symbole $\subset$ qui est utilisé pour des parties, et $\in$ qui est utilisé pour des éléments.*

Exemples 1.2.1. *Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.*

Intervalles de $\mathbb{R}$	*Bornés*	*Non Bornés*
Ouverts	$]a;b[$; $\emptyset$	$\mathbb{R}$; $]-\infty;a[$; $]a;+\infty[$
Fermés	$[a;b]$; $\{a\}$; $\emptyset$	$\mathbb{R}$; $]-\infty;a]$; $[a;+\infty[$
Semi-ouverts	$[a;b[$; $]a;b]$	

Remarques 1.2.1.

1

$[a;b]=\{x\in\mathbb{R};\quad a\le x\le b\}$;	$]a;b[=\{x\in\mathbb{R};\quad a<x<b\}$;
$]a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R};\quad a<x\}$;	$]-\infty;b[=\{x\in\mathbb{R};\quad x<b\}$;
$[a;b[=\{x\in\mathbb{R};\quad a\le x<b\}$,	$]a;b]=\{x\in\mathbb{R};\quad a<x\le b\}$;
$[a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R};\quad x\ge a\}$,	$]-\infty;b]=\{x\in\mathbb{R};\quad x\le b\}$;

2 *L'intervalle qui ne contient aucun nombre réel est appelé l'ensemble vide, et il est noté* $\emptyset$ *;*

3 *L'intervalle qui ne contient qu'un seul nombre est appelé singleton. On le note alors entre accolade ; Autrement un singleton contenant le nombre réel a s'écrit* $\{a\}$ *;*

4 *Un singleton* $\{a\}$ *est considéré comme l'intervalle* $[a;a]$ *et donc c'est un cas particulier d'intervalle fermé ;*

5 *L'ensemble vide* $\emptyset$ *est considéré comme l'intervalle* $]a;a[$ *donc c'est un cas particulier d'intervalle ouvert. Comme c'est le complémentaire de* $\mathbb{R}$*, on considère* $\mathbb{R}$ *alors comme un intervalle fermé.*
Mais, $\mathbb{R}$ *peut être également vu comme un intervalle ouvert si on l'écrit* $]-\infty;+\infty[$*. Et donc son complémentaire* $\emptyset$ *sera considéré comme fermé. C'est la raison pour laquelle* $\mathbb{R}$ *et* $\emptyset$ *sont considérés comme des ensembles à la fois ouverts et fermés de* $\mathbb{R}$*.*

Définition 1.2.2. *Soient* a *et* b *deux réels, avec* $a\le b$*. On appelle segment* $[a;b]$*, l'ensemble défini par*

— $[a;b]=\{x\in\mathbb{R},\ \textit{tels que}\quad a\le x\le b\}=\{x=(1-t)a+bt;\quad t\in[0;1]\}$, *si* $a<b$.

— $\{a\}$ *si* $a=b$.

1.3 Voisinage

1.3.1 Voisinage d'un point

Définition 1.3.1. *Soit* a *un nombre réel. On dit que* $V\subset\mathbb{R}$ *est un voisinage de* a *si et seulement s'il existe* $\varepsilon>0$ *tel que* $[a-\varepsilon;a+\varepsilon]\subset V$.

Remarque 1.3.1. *On peut aussi dire que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\subset V$.*

Remarque 1.3.2. *Un voisinage V de a peut s'interpréter donc comme ce qu'il y a autour de a tout en étant très proche de a.*

1.3.2 Voisinage de l'infini

Définition 1.3.2. *On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$) si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A; +\infty[\subset V$ (respectivement $]-\infty; A] \subset V$).*

1.4 Majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieure, maximum et minimum

1.4.1 Majorants, minorants

Définition 1.4.1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$) et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est*

— *un majorant de A si et seulement si $\forall x \in A$, $x \leq a$.*
— *un minorant de A si et seulement si $\forall x \in A$, $x \geq a$.*

Dans le cas où l'ensemble A admet un majorant (resp. minorant), on dit que A est majoré (resp. minoré). Si A est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.

Remarque 1.4.1. *Un majorant n'est pas unique. Un minorant n'est pas unique.*

Exemples 1.4.1.

— *La partie $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ possède par exemple comme majorants 2 et 3 et comme minorants -1 et 0.*
— *La partie $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ admet par exemple 4 comme majorant.*
— *le sous-ensemble $]-\infty; 1]$ de $\mathbb{R}$ est majoré et non minoré.*

1.4.2 Borne supérieure, Borne inférieure

Définition 1.4.2. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si*

1. *M est un majorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \leq M$,*
2. *si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$, autrement dit, M est le plus petit des majorants*

De même $M \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de E que l'on note $m = \inf(E)$ si et seulement si

1 *m est un minorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \geq m$,*

2 *si m' est un minorant de E, alors $m \geq m'$, autrement dit, m est le plus grand des minorants.*

Proposition 1.4.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide.*

1 *si la partie E est majorée par un réel M. Alors $M = \sup(E)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x \in]M - \varepsilon; M]$.*

2 *si la partie E est minorée par un réel m. Alors $m = \inf(E)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x \in [m; m + \varepsilon[$.*

Remarque 1.4.2. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide.*

1 *M est la borne supérieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :*

- **a** *M est un majorant de A ;*
- **b** *$\forall \varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.*

2 *m est la borne inférieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :*

- **a** *m est un minorant de A ;*
- **b** *$\forall \varepsilon > 0$, $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A.*

Exemples 1.4.2.

a) 0 est la borne inférieure de $[0, 1]$ et la borne inférieure de $]0, 1[$.

b) 1 est la borne supérieure de $[0, 1]$ et la borne supérieure de $]0, 1[$.

c) $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. X possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ qui vaut $\sqrt{2}$.

Axiome 1.4.1. *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*

1.4.3 Plus grand élément, plus petit élément

Définition 1.4.3. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{Q}$) et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est*

— *le plus grand élément ou le maximum de A si et seulement si $a \in A$ et a est un majorant de A.*

— *le plus petit élément ou le minimum de A si et seulement si $a \in A$ et a est un minorant de A.*

S'il existe, le plus grand élément de A est unique. Nous le noterons $\max(A)$ ou $\max A$. De même, s'il existe, le plus petit élément de A est unique et nous le noterons $\min(A)$ ou $\min A$.

Remarque 1.4.3. *Soit $E \subset \mathbb{R}$.*

— *Si* $M = \sup(E)$ *et* $M \in E$ *alors* M *est le maximum de* E.
— *Si* $m = \inf(E)$ *et* $m \in E$ *alors* m *est le minimum de* E.
— *Si* E *possède un plus grand élément, alors* E *possède une borne supérieure et :* $\sup E = \max E$.
— *Si* E *possède un plus petit élément, alors* E *possède une borne inférieure et :* $\inf E = \min E$.

Exercices 1.4.1.

1 *Montrer que* $]1; 2]$ *est borné, admet un maximum mais pas de minimum.*

2 *Montrer que* $\left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ *est borné, admet un maximum mais pas de minimum.*

3 *Soit* A *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$. *Montrer que* A *majoré est équivalent à* $\{-a; a \in A\}$ *minoré.*

Théorème 1.4.1.

1 *Toute partie non vide de* $\mathbb{N}$ *possède un plus petit élément.*

2 *Toute partie non vide majorée de* $\mathbb{N}$ *possède un plus grand élément.*

1.4.4 Propriété d'Archimède

Théorème 1.4.2. *Pour tout couple de réels* $(x; y)$ *tel que* $x > 0$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $y \leq nx$.

1.5 Droite réelle achevée

1.5.1 Définition et relation d'ordre

Définition 1.5.1. *On appelle droite réelle achevée ou droite numérique achevée l'ensemble* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ *où :*

1 $-\infty$ *et* $+\infty$ *sont des éléments non réels ;*

2 $\overline{\mathbb{R}}$ *est muni de la relation d'ordre total qui prolonge celle de* $\mathbb{R}$ *telle que*

a $-\infty$ *est strictement inférieur à tout* $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

b $+\infty$ *est strictement supérieur à tout* $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Remarque 1.5.1.

— $\overline{\mathbb{R}}$ *possède un plus grand élément :* $+\infty$ *et un plus petit élément :* $-\infty$.
— *Si* X *est une partie non vide de* $\mathbb{R}$, *par convention, on pose :*
  - $\sup X = +\infty$ *si* X *n'est pas une partie majorée de* $\mathbb{R}$.

- $\inf X = -\infty$ *si* X *n'est pas une partie minorée de* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 1.5.1. *Toute partie de* $\overline{\mathbb{R}}$ *possède une borne supérieure et une borne inférieure.*

1.5.2 Opérations

x	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$x+y$	$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$	$x+y$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}_-^*$	$x \in \mathbb{R}_-^*$	$x \in \mathbb{R}_*^*$	$x \in \mathbb{R}_-^*$	$x \in \mathbb{R}_-^*$
y	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$x \times y$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$

x	0	0	0	0	0	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
y	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$x \times y$		0	0	0		$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$

x	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$x \times y$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

x	$x \in \mathbb{R}^*$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	0	0	

1.6 Valeur absolue

Définition 1.6.1. *Soit* a *un nombre réel. La valeur absolue de* a *est le nombre réel défini par :*

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a > 0; \\ -a & si \quad a < 0; \\ 0 & si \quad a = 0. \end{cases}$$

Remarque 1.6.1. *Sur la droite numérique munie du repère* $(o; \overrightarrow{i})$*, pour tout réel* x*, il existe un unique point d'abscisse* M*. La valeur absolue du nombre* x *est la distance* OM*, c'est-à-dire la distance entre 0 et* x*. On a donc* $|x| = d(x; 0)$*.*

Proposition 1.6.1 (Propriétés de la valeur absolue.)**.**

1. $|x| = \max\{x, -x\}$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

4 $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \forall r \in \mathbb{R}_+^*, |x-y| \leq r, y-r \leq x \leq y+r,$

5 $\sqrt{x^2} = |x|.$

6 $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|,$

7 $|-x| = |x|,$

8 *(1ère inégalité triangulaire)* $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, |x+y| \leq |x|+|y|,$

9 *(2ème inégalité triangulaire)* $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$; $||x|-|y|| \leq |x+y|,$

Proposition 1.6.2. *Pour tout réel x, en notant $x^+ = \max\{x, 0\}$ et $x^- = \max\{-x, 0\}$, on a :*

1 $|x| = x^+ + x^-$;

2 $x = x^+ - x^-$;

3 $x^+ = \frac{1}{2}(|x|+x)$;

4 $x^- = \frac{1}{2}(|x|-x).$

Proposition 1.6.3. *Quels que soient soient les réels x et y,*

1 $\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$;

2 $\min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$

Définition 1.6.2. *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle distance de x a y le reel $|x-y|$.*

1.7 Partie entière

Définition 1.7.1. *Soit a un nombre réel. Le plus grand entier inférieur ou égal à a s'appelle la partie entière de a. Nous le noterons $E(a)$ ou $\lfloor a \rfloor$.*

Exemple 1.7.1.

1 $E(\pi) = 3,$

2 $E(-\pi) = -4.$

3 *Les deux majorations suivantes sont souvent utiles dans les exercices :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) \leq x < E(x)+1 \quad \textit{et} \quad x-1 < E(x) \leq x.$$

Proposition 1.7.1. *Soit x un réel. Il existe un unique entier relatif p tel que*

$$p \leq x < p+1.$$

1.8 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.8.1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \quad \textit{tel que } |x - a| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.8.1. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si on peut approché tout réel aussi près que l'on veut par un élément de A.*

Théorème 1.8.1. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

Théorème 1.8.2. *L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ formé des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

Chapitre 2

SUITES DE NOMBRES RÉELS

2.1 Définition, premières propriétés

Définition **2.1.1.** *Une suite réelle est une application* $u : I \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. On note cette fonction sous forme indicielle* $(u_n)_{n \in I}$ *ou encore* (u_n)*. L'ensemble des suites réelles est noté* $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$*.*

Remarque **2.1.1.** *On peut généralement se ramener au cas où* $I = \mathbb{N}$*, ce que l'on supposera souvent.*

Remarque **2.1.2.** *On peut définir les suites de deux façons différentes.*

1. *Soit directement par une formule, en général une fonction* f*, et on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n = f(n)$*, c'est ce qu'on appelle une formulation explicite de la suite.*
2. *Soit en exprimant* u_{n+1} *en fonction du terme précédent* u_n *et en définissant une valeur initiale, comme par exemple :*

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & f(u_n); \\ u_0 & = & a, \end{cases}$$

c'est ce qu'on appelle une formulation par récurrence.

Propriétés 2.1.1. *On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites* $\mathfrak{S}$*. Soient* (u_n)*,* $(v_n) \in \mathfrak{S}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

1. *Addition :* $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ *;*
2. *Multiplication par un scalaire :* $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$ *;*
3. *Multiplication de deux suites :* $(u_n) \times (v_n) = (u_n.v_n)$*.*

Définition **2.1.2** (Suite croissante, décroissante, monotone)**.** *On dit qu'une suite réelle* (u_n) *est*

1 *croissante à partir de l'indice n_p si et seulement si pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_p, $u_n \leq u_{n+1}$.*

2 *strictement croissante à partir de l'indice n_p si et seulement si pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_p, $u_n < u_{n+1}$.*

3 *décroissante à partir de l'indice n_p si et seulement si pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_p, $u_n \geq u_{n+1}$.*

4 *strictement décroissante à partir de l'indice n_p si et seulement si pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_p, $u_n > u_{n+1}$.*

5 *monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.*

6 *strictement monotone si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Exemple 2.1.1. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2$ est croissante. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ est décroissante.*

2.2 Suites convergentes, Suites divergentes

Définition 2.2.1. *On dit qu'une suite (u_n) est convergente vers le réel l (ou converge vers l, ou tend vers l) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Le nombre l est appelé la limite de la suite. Si (u_n) n'est pas convergente, elle est dite divergente. Si (u_n) converge vers l, on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \qquad ou \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l.$$

Définition 2.2.2. *On dit qu'une suite divergente (u_n) tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq A.$$

On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad ou \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

On dit qu'une suite divergente (u_n) tend vers $-\infty$ si $-(u_n)$ tend vers $+\infty$. On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \qquad ou \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty.$$

Si (u_n) tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on dit que (u_n) est une suite divergente de première espèce. Sinon, on dit que (u_n) est une suite divergente de deuxième espèce

Théorème 2.2.1 (Unicité de la limite)**.** *La limite d'une suite, si elle existe, est unique.*

Théorème 2.2.2 (Condition nécessaire de convergence.)**.** *Une suite convergente est bornée.*

Remarque 2.2.1. *Une suite bornée n'admet pas forcément de limite. Par exemple* $u_n = (-1)^n$.

Méthode 2.2.1. *Pour montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$*, on peut utiliser le plan suivant :*

1. *Soit* $\varepsilon > 0$.
2. *On cherche à partir de quelle valeur* N*, on a* $|u_N - l| \leq l$ *en sorte de vérifier le point 3 . Cela se ramène la plupart du temps à la résolution d'inéquations. C'est souvent la partie la partie la plus difficile de la preuve*
3. *Posons* $N = \ldots.$
4. *Vérifions : soit* $n \geq N$*, on a bien* $|u_n - l| \leq \varepsilon$.
5. *Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Exemple 2.2.1. *Montrons que la suite* $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers 0 en utilisant le plan ci-dessus.*

1. *Soit* $\varepsilon > 0$.
2. *On cherche* N *tel que* $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$*. On obtient* $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$.
3. *On pose alors* $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$.
4. *Vérifions. Soit* $n \geq N$*. On a* $n \geq N \geq \frac{1}{\varepsilon}$*. ce qui s'écrit aussi* $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ *ou encore* $|\frac{1}{n} - 0| \leq \varepsilon$.
5. *Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exemple 2.2.2. *En utilisant la définition de la limite montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+2} = 2$.
Rappelons la définition de la limite :

$$(\lim_{n\to+\infty} v_n = l) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\,;\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon).$$

Soit $\varepsilon > 0$ *quelconque, on cherche* N_ε *pour que l'on ait pour* $n \geq N_\varepsilon$, $\left|\dfrac{2n+1}{n+2} - 2\right| \leq \varepsilon$.

Or

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+1}{n+2}-2\right|\leq\varepsilon &\Rightarrow \left|\frac{2n+1-2(n+2)}{n+2}\right|\leq\varepsilon\\ &\Rightarrow \left|\frac{-3}{n+2}\right|\leq\varepsilon\\ &\Rightarrow \frac{3}{n+2}\leq\varepsilon\\ &\Rightarrow \frac{n+2}{3}\geq\frac{1}{\varepsilon}\\ &\Rightarrow n\geq\frac{3}{\varepsilon}-2\end{aligned}$$

Choisissons $N_\varepsilon = E(\frac{3}{\varepsilon}-2)+1$.
Vérifions. Soit $n \geq N_\varepsilon$. *On a* $n \geq N_\varepsilon \geq \dfrac{3}{\varepsilon}-2$. *Ce qui s'écrit aussi* $\dfrac{3}{n+3} \leq \varepsilon$ *ou encore* $\left|\dfrac{2n+1}{n+2}-2\right| \leq \varepsilon$.

Méthode 2.2.2. *Pour montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *on peut utiliser le plan suivant :*

1. *Soit* $M \in \mathbb{R}$.
2. *Posons* $N = \ldots$
3. *Vérifions : soit* $n \geq N$, *on a bien* $u_n \geq M$.

Exemple 2.2.3. *En utilisant la définition de la limite montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(n^2+(-1)^n n\Big) = +\infty$.
Nous devons montrer que :

$$\forall A > 0,\ \exists N_A \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N_A, n^2+(-1)^n n > A.$$

Soit $A > 0$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *minorons :* $n^2+(-1)^n n$.
On minore en simplifiant et en vérifiant que ce par quoi on minore tend toujours vers $+\infty$.
On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver le rang N_A *cherché.*
On obtient

$$n^2+(-1)^n n \geq n^2-n = n(n-1) \geq (n-1)^2$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $(n-1)^2 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}+1$. *Posons donc :* $N_A = E(\sqrt{A})+2$.
À partir de N_A, *l'inégalité :* $(n-1)^2 > A$ *est vraie, donc aussi l'inégalité :* $n^2+(-1)^n n > A$.

Proposition 2.2.1. *Soit* (u_n) *une suite réelle et* l *un réel. La suite* (u_n) *converge vers* l *si et seulement si la suite* $(u_n - l)$ *converge vers 0.*

Proposition 2.2.2. *Soit* (u_n) *une suite réelle et* $l \in \mathbb{R}$. *On suppose qu'il existe une suite réelle* (α_n) *et un rang* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que*

(H_1) : $\forall n \geq N_1, |u_n - l| \leq \alpha_n$,

(H_2) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple 2.2.4. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1+\cos(n)}{n+2} = 2$.
On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+1+\cos(n)}{n+2} - 2\right| &= \left|\frac{2n+1-2(n+2)+\cos(n)}{n+2}\right| \\ &= \left|\frac{-3+\cos(n)}{n+2}\right| \\ &\leq \frac{4}{n+2}\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n+2} = 0$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1+\cos(n)}{n+2} = 2$.

Théorème 2.2.3. *Soit* (u_n) *une suite et* $k, k' \in \mathbb{R}$. *On suppose que*

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$;

2 $k < l < k'$.

Alors, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N$, $k \leq u_n \leq k'$.

Théorème 2.2.4. *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites telles que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2$. *On a :*

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l_1 + l_2$;

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = l_1 l_2$;

3 $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l_1|$;

4 *pour tous réels* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha u_n + \beta v_n = \alpha l_1 + \beta l_2$;

5 *Si* $l_1 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{l_1}$;

6 *Si* $l_2 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l_1}{l_2}$.

Proposition 2.2.3. *Soit* (u_n) *une suite réelle et* $k \in \mathbb{R}$. *On suppose que :*

(H_1) : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$,

(H_2) : *A partir d'un certain rang,* $u_n \leq k$.

Alors $l \leq k$.

Proposition 2.2.4. *Soient deux suites* (u_n) *et* (v_n). *On suppose que :*

(H_1) : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$,

(H_2) : $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} l'$,

(H_3) : *A partir d'un certain rang,* $u_n \leq v_n$.

Alors $l \leq l'$.

Théorème 2.2.5 (Théorème des gendarmes). *On considère trois suites :* (u_n), (v_n) *et* (w_n) . *On suppose que :*

(H_1) : *A partir d'un certain rang,* $v_n \leq u_n \leq w_n$,

(H_2) : *Les deux suites encadrantes* (v_n) *et* (w_n) *convergent vers une même limite* $l \in \mathbb{R}$.

Alors la suite (u_n) *converge vers* l.

Exemple 2.2.5. *Soit* (w_n) *la suite définie par* $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ *pour tout naturel* n.
Pour tout naturel n, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, *et donc* $\dfrac{-1}{n} \leq w_n \leq \dfrac{1}{n}$. *Or*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0 \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Théorème 2.2.6 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure). *On considère une partie* X *non vide et majorée de* $\mathbb{R}$. *Elle possède une borne supérieure* $\sup X$. *Soit un réel* $l \in \mathbb{R}$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(H_1) : $l = \sup X$.

(H_2) : l *est un majorant de* X *et il existe une suite* (x_n) *d'éléments de* X *qui converge vers* l.

Exemple 2.2.6. *On note* A *l'ensemble* $\left\{\frac{q}{2^p+q}\right\}_{p,q\in\mathbb{N}^*}$. *Montrons que* $\inf A = 0$ *et* $\sup A = 1$.
Pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq \frac{q}{2^p+q} \leq 1,$$

donc A *est minoré par 0 et majoré par 1. On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0 \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2+n} = 1;$$

avec : $\dfrac{1}{2^n+1} \in A$ *et* $\dfrac{n}{2+n} \in A$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Par suite,* $\inf A = 0$ *et* $\sup A = 1$.

Théorème 2.2.7 (Caractérisation séquentielle de la densité). *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$.
A *est dense dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si tout réel est la limite d'une suite d'éléments de* A.

Proposition 2.2.5. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Si*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty.$

Proposition 2.2.6. *On considère deux suites (u_n) et (v_n). On suppose que :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \overline{\mathbb{R}} \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = l' \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Alors,

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$, *sauf si $(l + l')$ est une forme indéfinie ;*
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = ll'$, *sauf si (l l') est une forme indéfinie ;*
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$, *sauf si $\frac{l}{l'}$ est une forme indéfinie*

Proposition 2.2.7. *Soient deux suites (u_n) et (v_n). On suppose que*

(H_1) : *A partir d'un certain rang,* $v_n \leq u_n$,

(H_2) : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. *De même, si*

(H_1) : *A partir d'un certain rang,* $u_n \leq v_n$,

(H_2) : $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty,$

alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$

Exemple 2.2.7. *Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^3 + \sqrt{n^2 - n + 3} + 11$. Pour tout naturel n, $\sqrt{n^2 - n + 3} > 0$. Donc*

$$n^3 + \sqrt{n2 - n + 3} + 11 > n^3 + 11.$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 + 11 = \lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty.$$

Donc, par comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

2.3 Suite extraite d'une suite

Définition 2.3.1 (Suite extraite)**.** *On dit qu'un suite (v_n) est une suite extraite ou une sous suite d'une suite (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$*

Exemple 2.3.1. *Les suites* $\left(\sqrt{2^n + 4n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites extraites de la suite de terme général* $\sqrt{n}$, *associées respectivement aux fonctions* $n \mapsto 2^n + 4n$ *et* $n \mapsto n^2$ *strictement croissantes de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

Lemme 2.3.1. *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ *strictement croissante. Alors* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Proposition 2.3.1. *Une suite extraite d'une suite convergente est convergente Toute suite extraite d'une suite* (u_n) *convergeant vers une limite l est une suite convergeant vers l.*

Corollaire 2.3.1 (Critère de divergence d'une suite). *Soit* (u_n) *une suite réelle. On suppose qu'il existe deux suites extraites* $u_{\varphi(n)}$ *et* $u_{\widetilde{\varphi}(n)}$ *telles que :*

(H_1) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l_1 \in \mathbb{R}$,

(H_2) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\widetilde{\varphi}(n)} = l_2 \in \mathbb{R}$,

(H_3) : $l_1 \neq l_2$.

Alors la suite (u_n) *est divergente.*

Exemple 2.3.2. *La suite* $(u_n) = ((-1)^n)$ *est divergente. En effet, la suite extraite* (u_{2n}) *converge vers 1 alors que la suite extraite* (u_{2n+1}) *converge vers -1.*

Proposition 2.3.2. *Critère de convergence d'une suite Soit* (u_n) *une suite et* $l \in \mathbb{R}$. *On suppose que :*

(H_1) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l$;

(H_2) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Définition 2.3.2 (valeur d'adhérence). *Un réel* l *est une valeur d'adhérence de la suite* (u_n) *s'il existe une suite extraite de* (u_n) *qui converge vers* l.

Exemple 2.3.3. *Soit* $u_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$. *1 et* -1 *sont des valeurs d'adhérence de* (u_n).

Proposition 2.3.3. *Si* (u_n) *converge vers* l, *alors* l *est une valeur d'adhérence de* (u_n). *et c'est la seule.*

Proposition 2.3.4. *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels. Un réel* l *est une valeur d'adhérence de* (u_n) *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une infinité d'indices* n *tels que* $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

2.4 Suites monotones

2.4.1 Théorème de la limite monotone

Théorème 2.4.1 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes.*

1 *Si la suite (u_n) est majorée alors elle converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ donnée par $l = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

2 *Si la suite (u_n) n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.*

Remarque 2.4.1.

— *Ce théorème dit que toute suite croissante possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

— *La première partie de ce théorème est souvent formulée sous la forme suivante qu'il faut impérativement retenir : Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.*

— *Si une suite (u_n) croissante converge vers l, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$.*

— *Si un suite (u_n) décroissante converge vers l, on a $\forall n \in \mathbb{N}, l \leq u_n$.*

Corollaire 2.4.1. *Soit (u_n) une suite décroissante. On a les deux possibilités suivantes.*

1 *Si (u_n) est minorée alors (u_n) converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ donnée par $l = \inf\{u_n \mid \ n \in \mathbb{N}\}$.*

2 *Si (u_n) n'est pas minorée alors elle diverge vers $-\infty$.*

Remarque 2.4.2. *Le théorème de la limite monotone permet de justifier l'existence d'une limite sans la connaître explicitement. C'est un théorème d'existence abstrait très important en analyse.*

Proposition 2.4.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit (u_n) la suite définie par* $\begin{cases} u_{n+1} &= f(u_n); \\ u_0 &= a \in \mathbb{R}. \end{cases}$ *Si f est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation : $f(x) = x$.*

Exemple 2.4.1. *Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ converge vers 0.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. On a $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et $u_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$, donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = -\frac{u_n^3}{1+u_n^2} \leq 0.$$

Par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, ce qui permet de dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminons sa limite ℓ. Pour cela, résolvons l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{1+x^2} = x \\ &\Leftrightarrow \quad x = x + x^3 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0. \end{aligned}$$

On a donc $\ell = 0$.

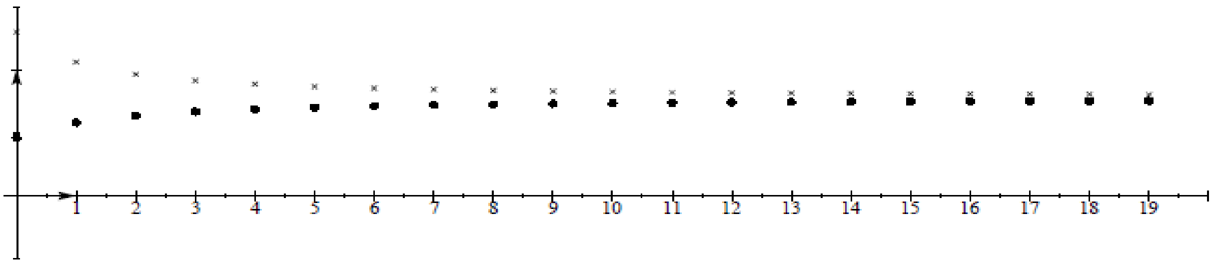
2.4.2 Suites adjacentes

Définition 2.4.1 (Suites adjacentes)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si*

1. *(u_n) est croissante*
2. *(v_n) est décroissante*
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

Exemple 2.4.2. *Les suites de termes généraux $U_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $V_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. sont adjacentes. En effet, (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante puisque pour $n \geq 1$, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ et $V_{n+1} - V_n = -\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 0$, et de plus $U_n - V_n = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Exemple 2.4.3.



Suites adjacentes

Théorème 2.4.2 (Théorème de convergence des suites adjacentes)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.*
Alors ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$.

2.4.3 Approximation décimale des réels

Dans tout ce paragraphe x est un nombre réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_n = E(10^n x).$$

Par définition de la partie entière d'un réel, on a $p_n \leq 10^n x < p_n + 1$. Cette inégalité est équivalente à $\frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < \frac{E(10^n x)+1}{10^n}$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ et $b_n = \frac{E(10^n x)+1}{10^n}$.

Remarque 2.4.3. - $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = 10^{-n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des rationnels : $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$.

Définition 2.4.2 (Valeur décimale approchée)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Les rationnels a_n et b_n sont appelés respectivement valeurs décimales approchées de x à 10^{-n} près respectivement par défaut et par excès.*

Exemple 2.4.4.

n		a_n	b_n	$erreur = 10^{-n}$
1	$\sqrt{2}$	*1*	*2*	*1*
2	$\sqrt{2}$	*1.4*	*1.5*	*0.1*
3	$\sqrt{2}$	*1.41*	*1.42*	*0.01*
4	$\sqrt{2}$	*1.414*	*1.415*	*0.001*

Théorème 2.4.3. *Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et leur limite commune est x.*

2.4.4 Segments emboités et théorème de Bolzano-Weierstrass

Corollaire 2.4.2 (Théorème des segments emboîtés)**.** *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments, $I_n = [a_n, b_n]$ tels que*

(H_1) : *Ils sont emboîtés : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$;*

(H_1) : *Leur diamètre tend vers 0 :* $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Alors il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$.

Théorème 2.4.4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.*

2.5 Des suites classiques

2.5.1 Suites arithmétiques

Définition 2.5.1. *On appelle suite arithmétique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $a \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$u_{n+1} = a + u_n.$$

Formule explicite

La suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p est définie par $u_n = u_p + (n-p)r$.

Sens de variation et convergence

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1 Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante et diverge vers $-\infty$.

2 Si $r = 0$, alors (u_n) est constante et converge vers u_0.

3 Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante et converge vers $+\infty$.

Somme de termes consécutifs

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}.$$

2.5.2 Suites géométrique

Définition 2.5.2. *On appelle suite géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $q \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Formule explicite

La suite géométrique de raison q et de premier terme u_p est définie par $u_n = u_p q^{(n-p)}$.

Convergence

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit u_n une suite géométrique de raison q. On a :

1 $|q| < 1 \Rightarrow (u_n)$ converge vers 0.

2 $|q| \geq 1$ et $q \neq 1 \Rightarrow (u_n)$ diverge.

3 $q = 1 \Rightarrow (u_n)$ est constante et vaut u_0.

Somme de termes consécutifs

Soit (u_n) une suite géométrique de rason q.

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n = u_p \frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q-1}.$$

2.5.3 Suites arithmético-géométrique

Définition 2.5.3. *On appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $q, r \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$u_{n+1} = r + qu_n.$$

Remarque 2.5.1. *Si (u_n) est une suite arithmético-géométrique, avec $r = 0$, alors (u_n) est une suite géométrique.*
Si (u_n) est une suite arithmético-géométrique, avec $q = 1$, alors (u_n) est une suite arithmétique.
Dans le cas général, la méthode la plus rapide pour exprimer u_n en fonction de n et u_0 consiste à déterminer une suite constante (α) vérifiant la relation de récurrence : $\alpha = q\alpha + r$. La suite $(v_n) = (u_n - \alpha)$ vérifie $v_{n+1} = qv_n$ (suite géométrique) et donc $v_n = q^n v_0$. On en déduit que $u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)q^n$ où $\alpha = r/(1-q)$.

Exemple 2.5.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 1; \\ u_0 &= 1. \end{cases}$$

Déterminons le terme général u_n en fonction de n.
Soit α tel que $\alpha = 3\alpha + 1$. On a $\alpha = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$. Considérons la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \frac{1}{2}$. Par suite,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3(u_n + \frac{1}{2}) = 3v_n.$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3, ce qui nous permet d'écrire $v_n = 3^n v_0$ avec $v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + \frac{1}{2}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - \frac{1}{2}$. Par suite $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$.

2.5.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 2.5.4. *On dit qu'une suite (u_n) est une suite récurrentes linéaires d'ordre 2 si :*

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Remarque 2.5.2. *Quand (u_n) est une suite récurrentes linéaires d'ordre 2, il faut aussi savoir exprimer le terme général de (u_n) en fonction de a, de b, de u_0 et de u_1. (Nous donnerons la méthode)*

Proposition 2.5.1. **1** *Si l'équation caractéristique $r^2 - br - c = 0$ possède 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$$

avec λ_1 et λ_2 deux réels.

2 *Si l'équation caractéristique $r^2 - br - c = 0$ possède 1 solution réelle $r_0 \neq 0$, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^n,$$

avec λ_1 et λ_2 deux réels.

3 *Si l'équation caractéristique $r^2 - br - c = 0$ possède 2 solutions complexes conjuguées $r = \rho e^{i\theta}$ et $\overline{r} = \rho e^{-i\theta}$, le terme général de toute suite réelle satisfaisant la formulation de récurrence linéaire d'ordre 2 est de la forme*

$$u_n = \lambda_1 \rho^n \cos(n\theta) + \lambda_2 \rho^n \sin(n\theta),$$

avec λ_1 et λ_2 deux réels.

Exemple 2.5.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$\begin{cases} u_{n+2} &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n; \\ u_0 &= 1; \\ u_1 &= 9. \end{cases}$$

Déterminons le terme général u_n en fonction de n.
L'équation caractéristique $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$ possède $\frac{1}{2}$ comme seule solution. Le terme général u_n est de la forme

$$u_n = \lambda_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lambda_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

avec λ_1 et λ_2 deux réels vérifiant $\begin{cases} \lambda_1 &= 1 \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{1}{2} &= 9, \end{cases}$
c'est à dire $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 17$. Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (17n+1)\frac{1}{2^n}.$$

2.6 Suites de cauchy.

Définition 2.6.1. *On dit qu'une suite (u_n) est de cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}; \forall (n;p) \in \mathbb{N}^2; \quad n \geq p \geq N \Rightarrow |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

Théorème 2.6.1. *Une suite réelle est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Exemple 2.6.1. *La suite de terme général $u_n = \sum_1^n \frac{1}{k}$ n'est pas convergente car elle n'est pas de Cauchy. En effet, pour tout $n \geq 1$, on a*

$$|u_{2n} - u_n| = \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2.6.2. *La suite géométrique (k^n), pour $0 < k < 1$, est une suite de Cauchy.*

2.7 Relations de comparaison

2.7.1 Suite dominée par une autre

Définition 2.7.1 (Suite dominée par une autre)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si il existe une suite (B_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :*

1. (B_n) *est une suite bornée.*
2. $\forall n \geq N,\ u_n = B_n v_n$

On note alors :$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$

Proposition 2.7.1 (Transitivité de la relation O)**.** *Le relation O est transitive, ce qui signifie que si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites, alors : $[u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)] \Rightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(w_n)$*

Théorème 2.7.1. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Si à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas alors : $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \Leftrightarrow (\frac{u_n}{v_n})$ est bornée*

2.7.2 Suite négligeable devant une autre

Définition 2.7.2 (Suite négligeable devant une autre)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) et un rang N tels que*

1 $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$;

2 $\forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n$.

On note alors : $u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n)$.

Remarque 2.7.1. *Écrire que* $u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(1)$ *revient à dire que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Proposition 2.7.2 (Transitivité de la relation o)**.** *La relation o est transitive, ce qui signifie que si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles, alors :*

$$\left[u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n) \quad et \quad v_n = \underset{n \to +\infty}{o}(w_n)\right] \Rightarrow u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(w_n)$$

Théorème 2.7.2 (Une suite est négligeable devant une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième tend vers 0.)**.** *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas alors :*

$$u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque 2.7.2. *Vous rencontrerez deux façons d'utiliser la notation o.*

- *La première est celle de la définition. Par exemple, on peut écrire $ln(n) = \underset{n \to +\infty}{o}(n)$, ce qui signifie que $\frac{ln(n)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*
- *Mais vous rencontrerez aussi des écritures comme : $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \underset{n \to +\infty}{o}(\frac{1}{n^3})$ qui signifie que $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ est négligeable devant $\frac{1}{n^3}$ quand $n \to +\infty$. Autrement dit $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ est une approximation de $\frac{1}{n-1}$ quand $n \to +\infty$ et l'erreur commise est un $\underset{n \to +\infty}{o}(\frac{1}{n^3})$. c'est-à-dire est négligeable devant $\frac{1}{n^3}$ quand $n \to +\infty$.*

2.7.3 Suites équivalentes

Définition 2.7.3 (Suite équivalentes)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si et seulement si :*

$$u_n - v_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n).$$

On note $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$.

Proposition 2.7.3. *La relation "est équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On a :*

- *$\sim$ est réflexive : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$.*
- *$\sim$ est symétrique : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$.*
- *$\sim$ est transitive : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n \Rightarrow u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n$.*

Théorème 2.7.3 (Une suite est équivalente à une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième tend vers 1.). *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Méthode 2.7.1. *Pour montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ on peut au choix, montrer que*

1. $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$;
2. *À partir d'un certain rang, $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;*
3. *À partir d'un certain rang, $u_n = v_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.*

Théorème 2.7.4 (Équivalents et limites). *Soit (u_n) et (u_n) deux suites réelles . Alors :*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.*
- *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ avec $l \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l$.*

Remarque 2.7.3. *Écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ revient à dire qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (u_n) sont tous nuls.*

Proposition 2.7.4. *Un équivalent simple permet de connaître le signe d'une suite Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles équivalentes alors, il existe un rang à partir duquel elles sont de même signe*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow [\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, u_n v_n \geq 0].$$

Théorème 2.7.5 (Produits, quotients, puissances d'équivalents). *Soit (a_n), (B_n), (u_n), (v_n) des suites vérifiant :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n \qquad et \qquad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$

Alors :

1. $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n b_n$
2. *Si (v_n) et (b_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang : $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{b_n}$.*
3. *Si (u_n) et (a_n) sont strictement positives à partir d'un certain rang : $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Exemple 2.7.1. *Calculons la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

$$\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \qquad et \qquad 2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n,$$

d'où

$$\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2n}.$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2.7.2. *Calculons la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = n\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.*

$$\forall n > 1, \qquad x_n = \frac{n}{2}\ln\frac{n+1}{n-1} = \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$

Comme $\dfrac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *on a*

$$\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1}$$

car

$$\frac{\ln(x+1)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

On a $\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n-1}$, $\dfrac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$ *et* $\dfrac{n}{2}\times\dfrac{2}{n-1} = \dfrac{n}{n-1}$.
Donc ,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

Par suite

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

Remarque 2.7.4. *Attention, il ne faut pas*

1. *Sommer des équivalents.*
2. *Composer des équivalents. En particulier, il ne faut pas*
   - *Prendre des logarithmes d'équivalents.*
   - *Prendre des exponentielles d'équivalents.*

Exemple 2.7.3. • $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ *et* $-n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n+2$ *mais cela n'a pas de sens d'écrire :* $1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.
• $2n+n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ *mais par contre* e^{2^n+n} *n'est pas équivalent à* e^{2^n} .

2.8 Comparaison des suites de référence

Proposition 2.8.1 (Comparaison logarithmique). **1** *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs et si, à partir d'un certain rang,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

alors $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

2 *Soit* (u_n)*est une suite à termes strictement positifs . On a :*

(a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l < 1 \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

(b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l > 1 \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

Théorème 2.8.1 (Comparaison des suites de référence)**.** *Soient* $a > 1$, $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$.

$$(\ln n)^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\alpha) \qquad n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(a^n) \qquad a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!) \qquad n! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n).$$

Théorème 2.8.2 (Équivalents usuels)**.** *Soit* (u_n) *une suite telle que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1 $\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

2 $\tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

3 $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

4 $[1-\cos u_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$;

5 $[e^{u_n}-1] \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

6 $\sinh u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

7 $[(1+u_n)^\alpha - 1] \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n (\alpha \in \mathbb{R}^*)$.

2.9 Suites complexes

Définition 2.9.1. *Une suite complexe est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{C}$.

Définition 2.9.2. *On dit qu'une suite de nombres complexes* (z_n) *converge vers un nombre complexe* $a \in \mathbb{C}$ *si et seulement si la suite réelle* $|z_n - a|$ *converge vers 0.*
On dit que la suite (z_n) *diverge vers l'infini lorsque la suite réelle* $|z_n|$ *diverge vers* $+\infty$.

Remarque 2.9.1. *Une autre façon de dire que* $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ *est*

$$\forall r > 0; \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N; \quad z_n \in D(a; r).$$

Remarque 2.9.2. *Toutes les propriétés démontrées sur les suites réelles ne faisant pas intervenir d'inégalités sont encore valables pour les suites complexes (les démonstrations n'utilisent que l'inégalité triangulaire). En particulier, on a les théorèmes généraux sur les sommes, produits, quotients, l'unicité de la limite, une suite convergente est bornée. On ne dispose plus par contre du passage à la limite dans les inégalités, du théorème de la limite monotone, ni du théorème des gendarmes. Le théorème suivant permet de montrer qu'une suite de complexes converge vers une limite.*

Proposition 2.9.1. *Soit (z_n) une suite complexe et $a \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite réelle (α_n) et un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que*

1 $\forall n \geq N_1, |z_n - a| \leq \alpha_n$,

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

Théorème 2.9.1.

$$(z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a) \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{ccc} Re(z_n) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & Re(a) \\ Im(z_n) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & Im(a) \end{array} \right. \right).$$

Exemple 2.9.1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *donc :* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{n} + i \arctan n) = i\frac{\pi}{2}$.

Théorème 2.9.2. *Soit un nombre complexe $k \in \mathbb{C}$. On appelle suite géométrique de raison k, la suite définie par $z_n = k^n$. Elle vérifie la relation de récurrence $z_{n+1} = kz_n$.*

1 $|k| < 1 \Rightarrow (z_n)$ *converge vers 0.*

2 $|k| \geq 1$ *et* $k \neq 1 \Rightarrow (z_n)$ *diverge.*

3 $k = 1 \Rightarrow (z_n)$ *est constante et vaut* z_0.

Théorème 2.9.3. *On appelle série géométrique de raison k, la suite complexe définie par :*

$S_n = 1 + k + ... + k^n = \sum\limits_{i=0}^{n} k^i$.

1 $|k| < 1 \Rightarrow S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-k}$.

2 $|k| \geq 1 \Rightarrow (S_n)$ *diverge.*

Chapitre 3

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

3.1 Généralités

3.1.1 Fonctions numériques

Définition 3.1.1. *A et B sont des ensembles non vides. On appelle fonction de A vers B toute correspondance qui à chaque élément de A, associe au plus un élément de B. Pour tout $x \in A$, on note $f(x)$ l'élément de B (s'il existe) qui lui est associé par la fonction f. On appelle A l'ensemble de départ, et B l'ensemble d'arrivée. L'ensemble des éléments de A qui ont effectivement une image par f est l'ensemble de définition de f. Il est noté Df, ou D s'il n'y a pas d'ambiguïté.*

Notation 3.1.1.

— *On peut résumer ce qui précède à l'aide de la notation symbolique suivante*

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

— *Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un point). L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 3.1.1. *Si $x \in A$ a une image, celle-ci est unique. En revanche, il est tout à fait possible pour un élément y de B d'avoir plusieurs antécédents dans A.*

Remarque 3.1.2. *Les fonctions numériques sont, le plus souvent, définies par une expression mathématique, comme par exemple : $f(x) = 5x^2 - 4x + 15$ où $g(x) = \dfrac{x+8}{3x+2}$. Parfois, l'ensemble de définition est explicitement donné avec la définition de la fonction :*

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.
Lorsque l'ensemble de définition n'est pas indiqué, il suffit d'examiner l'expression pour déterminer les conditions d'existence de $f(x)$:

- *Y-a-t'il un dénominateur ? (celui-ci doit être non nul)*
- *Y-a-t'il une racine carrée ? (le radicande doit être positif ou nul)*
- *Y-a-t'il une fonction particulière non définie sur þ ? (comme la fonction logarithme par exemple).*

3.1.2 Représentation graphique

On sait que 1'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels peut être représenté par une droite. Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être représentée graphiquement par une courbe dans le plan. L'axe des abscisses (droite horizontale, généralement) représente $\mathbb{R}$ comme ensemble de départ de la fonction, et l'axe des ordonnées (droite verticale, généralement) représente $\mathbb{R}$ comme ensemble d'arrivée.
On trace dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$, la courbe représentant les points (x, y), avec $x \in Df \subset \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, tels que $y = f(x)$. On note (Cf) cette courbe, dite **courbe représentative** de la fonction f, ou **graphe** de f.
Un coup d'oeil à la courbe permet souvent de comprendre quelles sont les propiétés de la fonction f.

Remarque 3.1.3. *1) En général, le repère sera orthogonal ou orthonormal.*

2) Le tracé d'une courbe représentatif est toujours approximatif : on fait un tableau de valeurs, on place les points correspondants dans un repère et on les relie par une courbe régulière (sans utiliser la règle, sauf dans certains cas particuliers).

3) On peut utiliser la calculatrice pour remplir des tableaux de valeurs et tracer des courbes représentatives de fonctions.

4) Certaines fonctions ne sont connus que par leur courbe représentative

3.1.3 Images et images réciproques d'ensembles

- Soit $A \subset Df$. L'image de A par f est l'ensemble :
$$f(A) = \{f(x); \quad x \in A\}.$$
- Soit $B \subset \mathbb{R}$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble :
$$f^{-1}(B) = \{x \in Df; \quad f(x) \in B\}.$$
- Attention à ne pas confondre avec la réciproque d'une bijection. Ici, on ne suppose rien sur f.

3.1.4 Restriction, prolongement

Soit f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J. Si $I \subset J$ et si $f(x) = g(x)$ pour tout x de I, on dit que f est une restriction de g, ou que g est un prolongement de f.

Exemple 3.1.1.

Soit $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \; si \; x \geq 0 \\ -x^2 \; si \; x < 0 \end{cases}.$$

Soit $J = [0,1]$, alors $f_{|[0,1]}$ est la fonction $f_{|[0,1]}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_{|[0,1]}(x) = x^2$ pour tout $x \in [0,1]$.

3.1.5 Opérations sur les fonctions

Soit f et g deux fonctions numériques et λ un réel.

1. **Addition :** La fonction $f+g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

2. **Multiplication par un réel :** La fonction λf est définie sur D_f par

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x);$$

3. **Multiplication de deux fonctions :** La fonction $f \times g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x);$$

4. **Quotient de deux fonctions :** La fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $(D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R}; \quad g(x) \neq 0\}$ par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)};$$

5. **Valeur absolue d'une fonction :** f étant définie sur D, la fonction $|f|$ est définie sur D par $x \mapsto |f(x)|$.
On définit aussi f^+ et f^- sur D par :

$$f^+(x) = \sup(f(x), 0); \qquad f^-(x) = \sup(-f(x), 0).$$

On a alors

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{et} \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

6 **Maximum, Minimum de deux fonctions :** On définit les deux applications $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sur $D_f \cap D_g$ par

$$\sup(f,g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2},$$

$$\inf(f,g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

7 **Composition :** On appelle composée de f par g la fonction, notée $g \circ f$, définie sur $\{x \in D_f / \quad f(x) \in D_g\}$ par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Remarque **3.1.4.** *La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ s'étend naturellement à $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ en posant, pour $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$*

3.1.6 Fonctions bornées

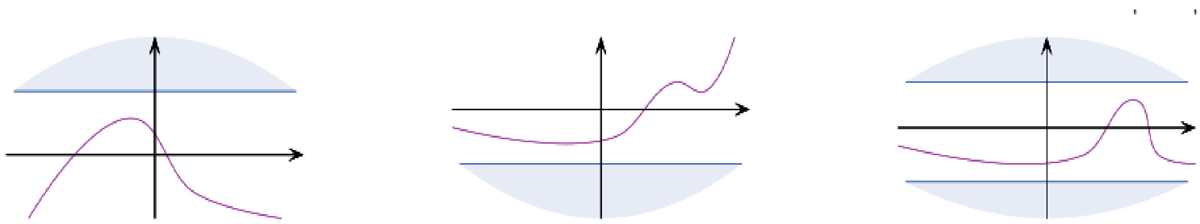
Définition **3.1.2** (Fonction majorée, minorée, bornée)**.** *Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que f est :*

1 *Majorée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) \leq M$.*

2 *Minorée si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) \geq m$.*

3 *Bornée si elle est majorée et minorée.*

Exemple **3.1.2.**



Fonction majorée non minorée — Fonction minorée non majorée — Fonction bornée

Proposition **3.1.1** (Pour montrer qu'une fonction est bornée sur I, il suffit de la majorer, sur I, en valeur absolue)**.** *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si elle est majorée en valeur absolue, c'est à dire*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \qquad |f(x)| \leq \alpha.$$

Proposition **3.1.2.**

1 *Toute combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée (l'ensemble des fonctions bornées forme un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$) ;*

2 *Tout produit de deux fonctions bornées est encore borné.*

Notation 3.1.2.

— *Dire que $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est majorée revient à dire que $\{f(x)|\ x \in I\}$ est un sous ensemble majoré de $\mathbb{R}$ Comme ce sous ensemble est non vide, d'après l'axiome de la borne supérieure, il possède une borne supérieure qu'on note* $\sup I f$.

— *De même, si $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est minorée alors ce sous ensemble est minoré. On note* $\inf I f$ *sa borne inférieure.*

— *Si une fonction f est bornée, puisque $|f|$ est majorée, la partie $\{|f(x)|;\ x \in I\}$ possède une borne supérieure que l'on notera $\sup\limits_{I}|f| = \|f\|_\infty$.*

Définition 3.1.3 (Extremum, Extremum local)**.** *Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et soit $a \in I$.*

— *On dit que f admet un maximum en a si et seulement si $\forall x \in I,\ f(x) \leq f(a)$.*

— *On dit que f admet un maximum local en a si et seulement si $\exists h > 0,\ \forall x \in I$, $|x-a| \leq h \Rightarrow f(x) \leq f(a)$;*

— *On définit de manière analogue la notion de minimum et de minimum local ;*

— *On dit que f admet un extrémum (respectivement un extremum local) si f admet un maximum (respectivement un maximum local) ou un minimum (respectivement un minimum local).*

Notation 3.1.3. *Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$*

— *Si f possède un maximum sur I, on le note $\max\limits_{I} f$;*

— *De même, si f possède un minimum sur I, on le note $\min\limits_{I} f$.*

3.1.7 Monotonie

Définition 3.1.4 (Fonction croissante, décroissante, strictement croissante,...)**.** *Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que :*

— *f est croissante si et seulement si $\forall x,y \in I,\ x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)$;*

— *f est décroissante si et seulement si $\forall x,y \in I,\ x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y)$.*

— *f est monotone si et seulement si f est croissante ou décroissante.*

On dit de plus que f est strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone si et seulement si l'inégalité correspondante est stricte.

Proposition 3.1.3 (Règle des signes)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ toutes deux monotones et telles que $f(I) \subset J$. On peut alors définir la fonction composée $g \circ f : I \to$*

$\mathbb{R}$ *qui est également monotone et l'on a la règle des signes pour la monotonie de* $g \circ f$ *.*

f	g	$g \circ f$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Proposition 3.1.4. *Soit* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *strictement monotone sur* I *et soit* $J = f(I)$ *alors* f *réalise une bijection de* I *sur* J *et sa bijection réciproque* $f^{-1} : J \to I$ *est strictement monotone de même sens que* f*.*

Remarque 3.1.5. *Soit* f *une fonction bijective sur* I*. Le graphe de* f^{-1}*, dans un repère orthonormé, se déduit de celui de* f *par une symétrie d'axe la première bissectrice.* $y = f(x)$ $y = f^{-1}(x)$

3.1.8 Parité - périodicité

a) Ensemble de définition centré

Définition 3.1.5. *Soit* f *une fonction. Soit* Df *son ensemble de définition. On dit que* Df *est un ensemble de définition centré (symétrique par rapport à 0) si et et seulement si :*

Pour tout réel x, si $x \in Df$*, alors* $-x \in Df$ *.*

Exemple 3.1.3.

Exemples d'ensembles centrés	*Exemples d'ensembles non centrés*
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$
$\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$	$\mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}$
$]-\infty; +\infty[$	$]0; +\infty[$
$[-4; 4]$	$[2; 4]$

b) Fonction paire

Définition 3.1.6. *On dit qu'une fonction* f *est paire si et seulement si :*

1 *Son ensemble de définition est centré,*

2 *Pour tout réel* x *de* Df*, on a :* $f(-x) = f(x)$*.*

Remarque 3.1.6. *la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.*

c) Fonction impaire

Définition 3.1.7. *On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :*

1 *Son ensemble de définition est centré,*

2 *Pour tout réel x de Df, on a : $f(-x) = -f(x)$.*

Remarque 3.1.7. *la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.*

d) Fonction périodique

Définition 3.1.8. *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique si et seulement s'il existe un réel $T > 0$ tel que $\forall x \in I$, $f(x+T) = f(x)$. On dit que T est une période de f et que f est $T-$périodique.*

Remarque 3.1.8. *Soit $T > 0$. L'ensemble des fonctions $T-$périodiques sur $\mathbb{R}$ est stable par combinaison linéaire et par produit. En particulier, c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.*

3.1.9 Fonctions Lipschitziennes

Définition 3.1.9 (Fonctions lipschitziennes)**.** *Soit un réel $k > 0$.*

— *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est $k-$lipschitzienne sur l'intervalle I si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|;$$

— *On dit qu'une fonction est lipschitzienne sur l'intervalle I s'il existe $k \geq 0$ telle que f soit $k-$lipschitzienne ;*

— *On note $\mathcal{L}(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur l'intervalle I.*

Remarque 3.1.9. *1.8 On comprend mieux cette définition en écrivant la propriété équivalente,*

$$\exists k > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ x \neq y, \quad \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq k.$$

Une fonction est lipschitzienne sur l'intervalle I si et seulement si l'ensemble des pentes de toutes ses cordes est borné.

Exemples 3.1.1.

1 *La fonction $x \longmapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ d'après l'inégalité triangulaire*

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

2 *La fonction* $x \longmapsto \frac{1}{x}$ *est 1-lipschitzienne sur* $[1; +\infty[$, *car*

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| = \frac{|x-y|}{|x|\,|y|} \leq |x-y|\,.$$

3 *La fonction* $x \longmapsto \frac{1}{x}$ *n'est pas lipschitzienne sur* $\mathbb{R}_+^*$, *car*

$\dfrac{f(2x)-f(x)}{2x-x} = \dfrac{\frac{1}{2x} - \dfrac{1}{x}}{2x-x} = -\dfrac{1}{2x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$, *donc l'ensemble des réels* $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$, $(x\,,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ *avec*

$x \neq y$ *n'est pas borné.*

Chapitre 4

Limite et continuité en un point

4.1 Notion de limite

Définition 4.1.1 (Limite d'une fonction en un point)**.** *Soient une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, un point adhérent $a \in I$ et un réel $l \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f admet pour limite le réel l en a lorsque*

— *Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$.*
— *Si $a = +\infty$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $x \geq M \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$.*
— *Si $a = -\infty$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $x \leq m \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$.*

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.

Méthode 4.1.1. *Pour montrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, on utilise le plan*

1 *Soit $\varepsilon > 0$;*

2 *Posons $\delta = ... > 0$;*

3 *Vérifions : soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \delta$...on a bien $|f(x) - l| \leq \varepsilon$.*

Remarque 4.1.1. *Comme pour les suites, on peut utiliser des inégalités strictes $|f(x) - l| < \varepsilon$, $|x - a| < \delta$, $x > M$ ...dans ces définitions.*

Exemple 4.1.1. *Montrons que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = 1$. Nous devons montrer que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > B \Rightarrow \left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, majorons : $\left| \dfrac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right|$.
On majore en simplifiant et en vérifiant que ce par quoi on majore tend toujours vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On arrête de majorer quand on se sent capable de trouver le

rang B cherché.
On obtient

$$\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right| = \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$$

Résolvons l'inéquation $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$.

$$x > 0,\ \frac{1}{x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Posons $B = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.
Vérifions : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} &\Rightarrow \frac{1}{x^2} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Proposition 4.1.1 (Unicité de la limite). *Si f admet pour limites en $a \in I$ les réels l et l' alors $l = l'$. On dira que l est la limite de f en a et on écrira $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ ou $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.*

Définition 4.1.2 (Limite infinie). *Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et un point adhérent $a \in I$. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers a lorsque*

- *Si $a \in \mathbb{R}$, $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq B$ (respectivement $f(x) \leq B$).*
- *Si $a = +\infty$, $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R} \forall x \in I$, $x \geq A \Rightarrow f(x) \geq B$ (respectivement $f(x) \leq B$).*
- *Si $a = -\infty$, $\forall B \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R} \forall x \in I$, $x \leq A \Rightarrow f(x) \geq B$ (respectivement $f(x) \leq B$). On notera alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ (respectivement $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$).*

Méthode 4.1.2. *Pour montrer que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ Dans le cas où a est fini, on utilise le plan*

1. *Soit $B \in \mathbb{R}$;*
2. *Posons $\delta = ... > 0$;*
3. *Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leq \delta$;*
4. *On a bien $f(x) \geq B$.*

Exemple 4.1.2. *Montrons que $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$. Nous devons montrer que*

$$\forall A > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in]1, +\infty[, \quad |x-1| < \alpha \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} > A.$$

Soit $A > 0$. *Pour tout* $x \in]1, +\infty[$, *minorons :* $\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.
On minore en simplifiant et en vérifiant que ce par quoi on minore tend toujours vers $+\infty$ *lorsque* x *tend vers 1. On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver* α.
On obtient

$$\frac{x+2}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{3}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Résolvons l'inéquation $x \in]1, +\infty[$, $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > A$.

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} > A \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < \frac{1}{A} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{A^2}$$

Posons $\alpha = \dfrac{1}{A^2}$.
Vérifions : $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} |x-1| < \frac{1}{A^2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x-1}} > A \\ &\Rightarrow \quad \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} > A. \end{aligned}$$

Méthode 4.1.3. *Pour montrer que* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$,
- *Soit* $B \in \mathbb{R}$.
- *Posons* $A = \ldots$
- *Soit* $x \in I$ *tel que* $x \geq A$.
- *On a bien* $f(x) \leq B$.

Méthode 4.1.4. *Pour montrer que* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
- *Soit* $B \in \mathbb{R}$.
- *Posons* $A = \ldots$
- *Soit* $x \in I$ *tel que* $x \geq A$.
- *On a bien* $f(x) \geq B$.

Exemple 4.1.3. *Montrons que* $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = +\infty$. *Nous devons montrer que*

$$\forall A > 0, \quad \exists B > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > B \Rightarrow x^2 - x > A.$$

Soit $A > 0$. *Pour tout* $x \geq 2$, *minorons :* $x^2 - x$.
On minore en simplifiant et en vérifiant que ce par quoi on minore tend toujours vers $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$. *On arrête de minorer quand on se sent capable de trouver le rang* B.
On obtient

$$x^2 - x = x(x-1) \geq x.$$

Posons $B = \max\{A, 2\}$.
Vérifions : $\forall x \in [2, +\infty[$,

$$\begin{aligned} x > \max\{A, 2\} &\Rightarrow x > A \\ &\Rightarrow x^2 - x > A. \end{aligned}$$

Voici une formulation équivalente de la notion de limite (finie et infinie) qui ne fait intervenir que la notion de voisinages.

Proposition 4.1.2 (Définition de la limite à l'aide des voisinages)**.** *Soient* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in \overline{I}$ *et* $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall W \in V_l, \quad \exists V \in V_a, \; f(V \cap I) \subset W.$$

Proposition 4.1.3 (Limite finie $\Rightarrow$ localement bornée)**.** *Soit* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *une fonction admettant une limite finie en* $a \in I$. *Alors il existe un voisinage* V *du point* a *sur lequel la fonction* f *est bornée. a.*

Proposition 4.1.4 (Transformation de limite en inégalité)**.** *Soit* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *une fonction,* $a \in I$ *et* $l \in \mathbb{R}$ *et deux réels* $k, k' \in \mathbb{R}$. *On suppose que*

(H_1) : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$

(H_2) : $k < l < k'$

Alors il existe un voisinage V *du point* a *tel que* $\forall x \in V\ I$, $k \leq f(x) \leq k'$.

Proposition 4.1.5 (Théorème de majoration)**.** *Soient*

— *une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ *et* $l \in \mathbb{R}$ *;*
— θ *une fonction définie sur un voisinage* V *de* a.

On suppose que

(H_1) : $\forall x \in V$, $|f(x) - l| \leq \theta(x)$ *;*

(H_2) : $\theta(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.

4.1.1 Opérations algébriques sur les limites

Les démonstrations de ce paragraphe sont typiques des démonstrations à ε d'analyse. Il est important de les étudier en détail et de les comparer aux démonstrations correspondantes sur les suites.

Théorème 4.1.1 (Limite d'une somme)**.** *Soient* f , g : $I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions et* $a \in I$. *On suppose que* $f \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_1$ *et que* $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_2$. *Alors,* $(f + g)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_1 + l_2$.

Remarque 4.1.2. *On montre de même que pour tous réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ tend vers la combinaison linéaire des limites :* $(\alpha f + \beta g)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \alpha l_1 + \beta l_2$.

Théorème 4.1.2 (Limite d'un produit)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_1$, $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_2$. Alors $(fg)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_1 l_2$.*

Théorème 4.1.3 (Limite d'une valeur absolue)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$, alors $|f|(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} |l|$.*

Théorème 4.1.4 (Limite de l'inverse)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que*

(H_1) **:** $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$;

(H_2) **:** $l \neq 0$.

Alors $(\frac{1}{f})(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$.

Remarque 4.1.3. *D'après les deux théorèmes précédents, si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_1$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_2$ avec $l_2 \neq 0$, $\frac{f}{g}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{l_1}{l_2}$. On invoque souvent les théorèmes de ce paragraphe pour justifier l'existence d'une limite sous le nom de ≪théorèmes généraux≫ sur les limites. On peut étendre les théorèmes généraux aux limites infinies. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in I$, éventuellement infini et un réel α . On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l' \in \overline{\mathbb{R}}$. Nous avons résumé dans les tableaux suivants les limites de la somme, produit et quotient des deux fonctions dans tous les cas de figure. Les cases noires correspondent à des « formes indéterminées » où l'on ne peut rien dire de général.*

• ***Somme*** $f + g$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$	$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$	$l + l'$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

• ***Produit*** fg

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}^*_-$	$l \in \mathbb{R}^*_-$	$l \in \mathbb{R}^*_*$	$l \in \mathbb{R}^*_-$	$l \in \mathbb{R}^*_-$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}^*_-$	*0*	$l' \in \mathbb{R}^*_+$	$+\infty$	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}^*_-$	*0*	$l' \in \mathbb{R}^*_+$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (fg)(x)$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ll'	*0*	ll'	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	$l \in \mathbb{R}^*_+$	$l \in \mathbb{R}^*_+$	$l \in \mathbb{R}^*_+$	$x \in \mathbb{R}^*_+$	$x \in \mathbb{R}^*_+$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}^*_-$	*0*	$l' \in \mathbb{R}^*_+$	$+\infty$	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}^*_-$	*0*	$l' \in \mathbb{R}^*_+$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (fg)(x)$		*0*	*0*	*0*		$-\infty$	ll'	*0*	ll'	$+\infty$

$\lim_{x\to a} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}_-^*$	0	$l' \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} (fg)(x)$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

• ***Inverse***

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}^*$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	0	0	

4.1.2 Continuité

Définition 4.1.3 (Continuité en un point)**.** *Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que la fonction f est continue au point a si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$ ce qui se traduit avec des quantificateurs par :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0; \quad \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Théorème 4.1.5 (Théorèmes généraux)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$, alors*

— *la fonction $(f+g)$ est continue au point a,*

— *la fonction (fg) est continue au point a,*

— *si $g(a) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur un voisinage du point a est est continue au point a.*

4.1.3 Limite à gauche, à droite, continuité à gauche, à droite

Définition 4.1.4 (Voisinages à gauche, à droite)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est*

— *un voisinage à droite de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a, a+\varepsilon] \subset V$,*

— *un voisinage à gauche de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a] \subset V$,*

— *un voisinage strict à droite de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a, a+\varepsilon] \subset V$,*

— *un voisinage strict à gauche de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a[\subset V$,*

— *un voisinage pointé de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a[\cup]a, a+\varepsilon] \subset V$.*

Définition 4.1.5 (Limite à gauche, à droite)**.** *Soit une fonction $f : I\ a \to \mathbb{R}$. On dit qu'un réel l est la limite à droite (resp. à gauche) de f si il existe un voisinage strict à droite de a (resp. un voisinage strict à gauche de a) tel que la restriction de f à ce voisinage admet l pour limite en a. Lorqu'elle existe, la limite à droite de f est unique et est notée*

$$l = \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad ou \qquad l = \lim_{\substack{x\to a\\ x\geq a}} f(x) \qquad ou \qquad l = \lim_{a^+} f.$$

Nous noterons également $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$. *On a des notations identiques pour la limite à gauche.*

Remarque 4.1.4. *En termes de quantificateurs,* f *admet* $l \in \mathbb{R}$ *comme limite à gauche en* a *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ a - \delta \leq x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Remarque 4.1.5. *Une fonction* f *possède une limite en* a *lorsque*

— f *admet une limite à gauche* $l_1 \in \mathbb{R}$.
— f *admet une limite à droite* $l_2 \in \mathbb{R}$.
— $l_1 = l_2$.

Définition 4.1.6 (Continuité à gauche, à droite)**.** *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $a \in I$. *On dit que* f *est continue à droite en a (respectivement à gauche en a) si et seulement si* $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} f(a)$ *(respectivement* $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} f(a)$*).*

Remarque 4.1.6. *Soit* $a \in I$ *un point intérieur (il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $]a-\alpha, a+\alpha[\subset I$*). Une fonction* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *est continue en* a *si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de* a.

Exemple 4.1.4. *La fonction* $\sigma : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & si & x \neq 0 \\ 1 & si & x = 0 \end{cases} \end{cases}$ *n'est pas continue au point 0. On a bien* $\lim\limits_{x\to a^-} \sigma(x) = \lim\limits_{x\to a^+} \sigma(x) = 0$ *mais* $\sigma(0) = 1$.

Définition 4.1.7 (Prolongement par continuité)**.** *Soit* f *une fonction définie sur* I *et* $x_0 \notin I$. *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, *la fonction* g *définie sur* $I \cup \{x_0\}$ *par*

$$g(x_0) = b \qquad et \qquad g(x) = f(x) \quad pour \quad x \in I,$$

est la seule fonction continue en x_0 *dont la restriction à* I *soit* f. *On l'appelle le prolongement par continuité de* f *en* x_0.

Exemple 4.1.5. *Considérons la fonction* $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin x}{x}. \end{cases}$ *Puisque* $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, *on peut la prolonger par continuité en une fonction définie sur* $\mathbb{R}$, $\widetilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si & x \neq 0 \\ 1 & si & x = 0. \end{cases} \end{cases}$:

4.1.4 Limites et relation d'ordre

Théorème 4.1.6. *Passage à la limite dans les inégalités Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, un point $a \in \overline{I}$ (éventuellement infini) et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que*

(H_1) **:** $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.

(H_2) **:** *Il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in V\ I$, $k \leq f(x)$.*

Alors $k \leq l$.

Remarque 4.1.7. *Le passage à la limite dans les inégalités ne conserve pas les inégalités strictes. Si sur un voisinage V de a on a $k < f(x)$, on ne peut pas garantir que $k < l$. Par exemple pour la fonction définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = x$, $\forall x \in]0, 1]$, $k = 0 < f(x)$, $f \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = l$ et $k = l = 0$. On dispose bien sûr du théorème correspondant en remplaçant $\leq$ par $\geq$.*

Corollaire 4.1.1 (Passage à la limite dans les inégalités)**.** *Soient deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que*

(H_1) **:** $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_1$,

(H_2) **:** $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_2$,

(H_3) **:** *il existe un voisinage V du point a tel que $\forall x \in V\ I$, $f(x) \leq g(x)$.*

Alors $l_1 \leq l_2$.

Théorème 4.1.7 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient α, f, β trois fonctions définies sur un voisinage V d'un point adhérent $a \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que*

(H_1) $\forall x \in V$, $\alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x)$;

(H_2) $\alpha(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et $\beta(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$;

Alors la fonction f admet une limite au point a et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.

Remarque 4.1.8. *Le théorème des gendarmes se généralise aux limites infinies. Par exemple, si au voisinage de $a \in \overline{I}$, on a*

(H_1) $f(x) \geq \alpha(x)$.

(H_2) $\alpha(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$

alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque 4.1.9. *Attention, il ne faut pas confondre le théorème des gendarmes et le théorème de passage à la limite dans les inégalités. Le second permet d'affirmer l'existence d'une limite tandis que dans le premier l'existence de cette limite est présupposée.*

4.1.5 Théorème de composition des limites

Théorème 4.1.8 (Composition de limites)**.** *Soient deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions : $I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soient $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{J}$. On suppose que*

(H_1) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$;

(H_2) $g \underset{y \to b}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$;

Alors $(g \circ f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.

Remarque 4.1.10. *On déduit du théorème précédent les règles de passage à la limite dans une exponentiation $f^g = e^{g \ln f}$. On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent comme limites respectives l et l'.*

$l \setminus l'$	$-\infty$	$l' < 0$	$l' = 0$	$0 < l'$	$+\infty$
$l = 0$	$+\infty$	$+\infty$		0	0
$0 < l < 1$	$+\infty$	$l^{l'}$	1	$l^{l'}$	0
$l = 1$		1	1	1	
$1 < l$	0	$l^{l'}$	1	$l^{l'}$	$+\infty$
$+\infty$	0	0		$+\infty$	$+\infty$

Remarque 4.1.11. — 0^0 *est une forme indéterminée. Par exemple,*

- *Lorsque* $x \to 0$, $x^x = e^{x \ln x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$ *car* $x \ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$;
- *Lorsque* $x \to 0$, $x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln x}{\ln x}} = e \underset{x \to 0}{\longrightarrow} e$.

— $1^{+\infty}$ *est une forme indéterminée. Par exemple,*

- *Lorsque* $x \to 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} e$ *car* $\frac{ln(1+x)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$.
- *Lorsque* $x \to +\infty$, $1^x = 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Corollaire 4.1.2 (Continuité de la composée de deux applications)**.** *Soient deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On suppose que*

(H_1) *f est continue en a;.*

(H_2) *g est continue en $b = f(a)$.*

Alors $g \circ f$ est continue en a.

4.1.6 Image d'une suite par une fonction

Théorème 4.1.9 (Théorème de la limite séquentielle)**.** *On considère une fonction $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \overline{I}$. Soit une suite (u_n) de points de I et $l \in \overline{I}$. On suppose que*

(H_1) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$;

(H_2) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

Alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Corollaire 4.1.3. *Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) de points de I vérifiant*

(H_1) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$;

(H_2) $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$, $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2$;

(H_3) $l_1 \neq l_2$;

alors f n'admet pas de limite au point a.

Exemple 4.1.6. *Considérons la fonction* $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(\frac{1}{x}) \end{cases}$ *et montrons qu'elle n'admet pas de limite en 0. Par l'absurde, supposons que* $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} l$. *Introduisons les deux suites* $(u_n) = (\frac{1}{n\pi})$ *et* $(v_n) = (\frac{1}{2n\pi+\pi/2})$. *On calcule* $\forall n \in N^*$, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $f(v_n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ *et on aurait* $0 = 1$ *ce qui est faux.*

Théorème 4.1.10 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)**.** *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I \subset D_f$, et un point $a \in I$. La fonction f est continue au point a si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

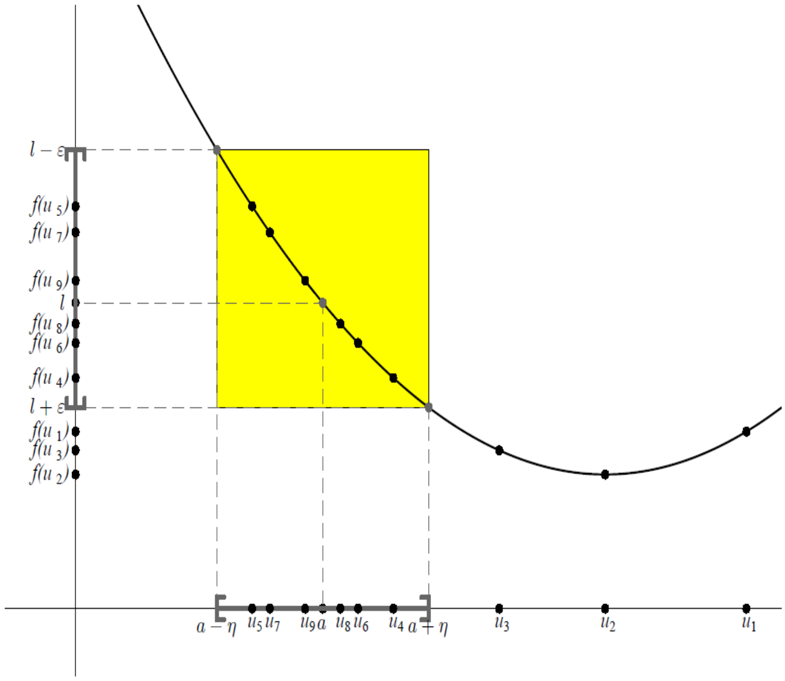


FIGURE – Si $n \geqslant 4$ alors $|u_n - a| \leqslant \eta$ et $|f(u_n) - l| \leqslant \varepsilon$.

Exemple 4.1.7.

4.1.7 Théorème de la limite monotone

Théorème 4.1.11 (Théorème de la limite monotone (fonction croissante))**.** *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $I =]a, b[$. Si une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante, alors il y a deux possibilités.*

1 *Si f est majorée, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers b et on a alors $l = \sup_I f$;*

2 *Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$.*

De même,

1 *Si f est minorée, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers a et $l = \inf_I f$;*

2 *Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.*

Remarque 4.1.12. *Si f est croissante et si $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in]a, b[$, $f(x) \leq l$. En effet, d'après le théorème précédent, on est dans le premier cas et l est la borne supérieure de f donc un majorant de f . Ce résultat est bien entendu faux si la fonction n'est pas croissante. On a le théorème correspondant pour une fonction décroissante.*

Théorème 4.1.12 (Théorème de la limite monotone (fonction décroissante))**.** *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $I =]a, b[$. Si une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est décroissante, alors il y a deux possibilités.*

1 *Si f est majorée, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers a et on a alors $l = \sup\limits_I f$.*

2 *Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.*

De même,

1 *Si f est minorée, alors f admet une limite finie l lorsque x tend vers b et $l = \inf\limits_I f$;*

2 *Si f n'est pas minorée, alors $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} -\infty$.*

Remarque 4.1.13. *Le théorème de la limite monotone permet de justifier l'existence d'une limite sans la connaître explicitement. C'est un théorème d'existence abstrait très important en analyse.*

4.2 Étude locale d'une fonction

4.2.1 Domination, prépondérance

Définitions

Définition 4.2.1 (Fonction dominée par une autre)**.** *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est dominée par g au voisinage de a si et seulement si existe une fonction B définie au voisinage de a telle que*

1 *$f(x) = B(x)g(x)$ au voisinage de a ;*

2 *B est bornée au voisinage de a*

On note alors $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$.

Définition 4.2.2 (Fonction négligeable devant une autre)**.** *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que*

1 *$f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ au voisinage de a ;*

2 *$\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.*

On note alors : $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$

Remarque 4.2.1. *f une fonction définie au voisinage de a. Alors,*

— *$f(x) = \underset{x \to a}{O}(1) \Leftrightarrow f(x)$ est bornée au voisinage de a ;*

— *$f(x) = \underset{x \to a}{o}(1) \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.*

Propriétés

Proposition 4.2.1 (Caractérisation pratique de $f(x) = O(g(x))$). *Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $a \in \mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas sur V a. Alors $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x)) \Leftrightarrow$ la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.*

Proposition 4.2.2 (Caractérisation pratique de $f(x) = o(g(x))$). *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage sur un voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur V a. Alors*

$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Opérations sur les relations de comparaison

Proposition 4.2.3 (Les relations o et O sont transitives). *Soient f, g et h des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

— $[f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)) \quad et \quad g(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))] \Rightarrow f(x) = \underset{x \to a}{o}(h(x))$;

— $[f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x)) \quad et \quad g(x) = \underset{x \to a}{O}(h(x))] \Rightarrow f(x) = \underset{x \to a}{O}(h(x))$.

Proposition 4.2.4 (Opérations sur les relations de comparaison). *Soient f, f_1, f_2, g, g_1 et g_2 des fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$:*

•

1. $f_1(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)) \quad et \quad f_2(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)) \Rightarrow (f_1 + f_2)(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$;
2. $f_1(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x)) \quad et \quad f_2(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x)) \Rightarrow (f_1 + f_2)(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$.

•

1. $f_1(x) = \underset{x \to a}{o}(g_1(x)) \quad et \quad f_2(x) = \underset{x \to a}{o}(g_2(x)) \Rightarrow (f_1 f_2)(x) = \underset{x \to a}{o}((g_1 g_2)(x))$;
2. $f_1(x) = \underset{x \to a}{o}(g_1(x)) \quad et \quad f_2(x) = \underset{x \to a}{o}(g_2(x)) \Rightarrow (f_1 f_2)(x) = \underset{x \to a}{o}((g_1 g_2)(x))$.

Exemples fondamentaux

Proposition 4.2.5 (Comparaison des fonctions usuelles). *Soient α, β et γ des réels strictement positifs.*

• *En $+\infty$:*

$$(\ln x)^\gamma = \underset{x \to +\infty}{o}(x^\alpha) \qquad et \qquad x^\alpha = \underset{x \to +\infty}{o}(e^{\beta x})$$

• *En 0 et en $-\infty$:*

$$|lnx|^\gamma = \underset{x \to 0}{o}\frac{1}{x^\alpha} \qquad et \qquad e^{\beta x} = \underset{x \to a}{o}\frac{1}{x^\alpha}$$

Autrement dit :

Aux bornes de l'intervalle de définition,

— *<< l'exponentielle l'emporte sur la puissance >>,*

— *<< la puissance l'emporte sur le logarithme >>.*

4.2.2 Fonctions équivalentes

Définitions

Définition 4.2.3 (Fonctions équivalentes)**.** *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si et seulement si*

$$f(x) - g(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)).$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Remarque 4.2.2. *On a $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ si et seulement s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$*

Théorème 4.2.1 (Caractérisation pratique de $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$)**.** *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas sur V a. Alors*

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1.$$

Propriétés

Proposition 4.2.6 (Un équivalent donne localement le signe)**.** *Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont de même signe.*

Proposition 4.2.7 (Une fonction est équivalente à sa limite si celle-ci est non nulle et finie)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Alors*

$$[f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \quad et \quad l \neq 0] \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x \to a}{\sim} l.$$

Proposition 4.2.8 (Deux fonctions équivalentes ont même limite)**.** *Soit $f, g : f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Alors :*

$$[f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad et \quad g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l] \ \Rightarrow \ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} .$$

Remarque 4.2.3. *Attention, écrire $f(x) \underset{x \to a}{\sim} 0$ signifie que la fonction f est nulle sur un voisinage de a, ce qui est possible, mais en général, lorsque vous écrivez 0 à droite d'un équivalent, vous commetez une erreur !*

Proposition 4.2.9. *Soient $a \in I$ et une fonction f définie sur I. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors, au voisinage de a,*

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

Proposition 4.2.10. *Soient u une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que*

(H_1) **:** $u(t) \underset{t \to a}{\to} b$;

(H_2) **:** $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$.

Alors $f(u(t)) \underset{t \to a}{\sim} g(u(t))$.

Théorème 4.2.2 (Opérations sur les équivalents)**.** *Soient f, g, $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que*

(H_1) **:** $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$;

(H_2) **:** $\widetilde{f}(x) \underset{x \to a}{\sim} \widetilde{g}(x)$.

Alors

1 $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\sim} \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)$;

2 *Si la fonction $\widetilde{f}$ ne s'annule pas sur un voisinage du point a, il en est de même pour la fonction $\widetilde{g}$ et alors*

$$\frac{f(x)}{\widetilde{f}(x)} \underset{x \to a}{\sim} \frac{g(x)}{\widetilde{g}(x)};$$

3 *Pour tout réel s, si les fonctions f et g sont strictement positives au voisinage du point a,*

$$[f(x)]^s \underset{x \to a}{\sim} [g(x)]^s.$$

Remarque 4.2.4. *Attention ! "Il ne faut pas"*

1 *Sommer des équivalents.*

2 *Composer des équivalents. En particulier, il ne faut pas :*

(a) *Prendre des logarithmes d'équivalents.*

(b) *Prendre des exponentielles d'équivalents.*

Exemple 4.2.1. *Par exemple $x \underset{x \to +\infty}{\sim} x+1$ mais e^x et e^{x+1} ne sont pas équivalents quand x tends vers $+\infty$ puisque $\frac{e^x}{e^{x+1}} = e^{x-x-1} = e^{-1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 1$.*

Proposition 4.2.11 (Équivalents classiques en 0)**.**

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

$$\sinh x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \tanh x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \arcsin x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad arctan x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

$$argsh x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad argth x \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad \cosh x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\arccos x - \frac{\pi}{2} \underset{x \to 0}{\sim} -x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Remarque 4.2.5. *Attention, n'écrivez pas* $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$. *Le résultat est vrai, mais on a plus simplement* $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

De manière plus générale,

Proposition 4.2.12. *Si* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, *au voisinage du point* a

$$\ln(1+f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \sin(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \tan(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$$

$$\cos(f(x))-1 \underset{x\to a}{\sim} -\frac{(f(x))^2}{2} \qquad e^{f(x)}-1 \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad (1+f(x))^\alpha-1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha f(x) \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

4.3 Propriétés globales des fonctions continues

4.3.1 Définitions et propriétés de base

Définition 4.3.1 (Fonction continue sur un intervalle)**.** *On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si et seulement si la fonction f est continue en chaque point de I. Cette définition s'écrit avec les quantificateurs sous la forme suivante :*

$$\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon.$$

On note $C(I)$ (ou $C^0(I)$, $C(I,R)$, $C^0(I,R)$) l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle I.

Remarque 4.3.1.
- *La continuité en un point est une notion locale ;*
- *La continuité sur un intervalle est une notion globable ;*
- *Intuitivement, "une fonction est continue sur un intervalle si et seulement si on peut tracer son graphe sans lever le crayon".*

Théorème 4.3.1 (Une fonction lipschitzienne est continue)**.** *Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur l'intervalle I, alors f est continue sur l'intervalle I.*

Opérations sur les fonctions continues

Théorème 4.3.2. • *Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I ;*
• *Une combinaison linéaire de fonctions continues sur I est continue sur I ;*
• *La fonction produit de deux fonctions continues sur I est continue sur I ;*
• *Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.*

Remarque 4.3.2. *$C(I)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.*

Théorème 4.3.3 (La composée de fonctions continues est continue)**.** *Soient deux intervalles I et J. Soit une application f continue sur I telle que $f(I) \subset J$ et g une application continue sur J. Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.*

4.3.2 Les théorèmes fondamentaux

Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.3.4 (Théorème des valeurs intermédiaires (TVI))**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Soient deux points $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. On suppose que*

(H_1) **:** *la fonction f est continue sur l'intervalle I ;*

(H_2) **:** $f(a) \leq 0$ *et* $f(b) \geq 0$.

Alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque 4.3.3. *Le résultat est faux si la fonction est définie sur un ensemble $\mathcal{A}$ qui n'est pas un intervalle. Par exemple, la fonction f définie sur $[-2, -1] \cup [1, 2]$ par $f(x) = -1$ si $x \in [-2, -1]$ et $f(x) = 1$ lorsque $x \in [1, 2]$ est continue en tout point de $\mathcal{A}$, vérifie la deuxième hypothèse, puisque $f(-2) < 0$ et $f(2) > 0$ mais ne s'annule pas sur $\mathcal{A}$.*

Remarque 4.3.4. *Plus généralement, on peut remplacer l'hypothèse (H_1) par $f(a)f(b) \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires est (comme le théorème de la limite monotone) un théorème qui permet de montrer l'existence d'objets de façon abstraite sans préciser leur valeur. On utilise pour cela une fonction auxiliaire bien choisie et on applique le TVI à cette fonction.*

Exemple 4.3.1. *Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Cette fonction admet au moins un point fixe $x' \in [0, 1]$. Définissons la fonction auxiliaire $g : \begin{cases} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & f(x) - x. \end{cases}$ D'après les théorèmes généraux, la fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$. Puisque la fonction est à valeurs dans $[0, 1]$, $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$ d'où $g(0) \leq 0$ et $g(1) \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x' \in [0, 1]$ tel que $g(x') = 0$, c'est à dire $f(x') = x'$.*

Exemple 4.3.2. *Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynômiale de degré impair. Vérifions qu'elle s'annule au moins une fois. En notant $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + ... + a_0$, avec $a_{2n+1} \neq 0$, on obtient un équivalent simple de la fonction au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_{2n+1}x^{2n+1}$. Si $a_{2n+1} > 0$, $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. La transformation de limite en inégalités donne l'existence d'un réel $a < 0$ tel que $P(a) \leq 0$ et d'un réel $b > 0$ tel que $P(b) \geq 0$. Puisque P est une fonction continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $P(c) = 0$.*

Théorème 4.3.5 (Théorème des valeurs intermédiaires (deuxième forme))**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que f est continue sur [a,b]. alors $f(x)$ prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ quand x parcourt $[a, b]$. Autrement dit, si $y_0 \in [f(a), f(b)]$, alors il existe au moins un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.*

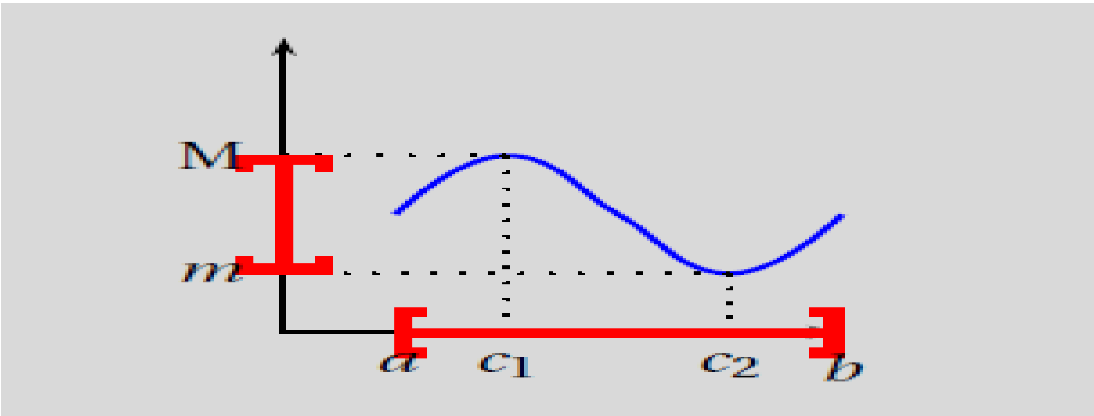
Corollaire 4.3.1 (Image d'un intervalle par une application continue)**.** *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Fonction continue sur un segment

Le théorème suivant est fondamental en analyse.

Théorème 4.3.6 (Théorème du maximum : une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes)**.** *Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur un segment. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes*

$$\exists (c_1, c_2) \in [a,b]^2 : \ f(c_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \textit{et} \quad f(c_2) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$



Remarque 4.3.5. *En d'autres termes, une fonction continue sur un segment possède un maximum et un minimum :*

$$\sup_{x\in I} f(x) = \max_{x\in I} f(x) = f(c_1), \qquad \inf_{x\in I} f(x) = \min_{x\in I} f(x) = f(c_2).$$

On se sert souvent de ce théorème en analyse sous la forme suivante. Si f est une fonction continue sur un segment, la fonction $|f|$ est également continue sur ce segment donc elle possède un maximum. On note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$ ce maximum et il est atteint. Il existe $c \in [a,b]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(c)|$.

Corollaire 4.3.2 (Image d'un segment par une application continue)**.** *L'image d'un segment $[a,b]$ par une application continue est un segment et si $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$ alors $f([a,b]) = [m, M]$.*

Fonctions uniformément continues

Définition 4.3.2 (Fonction uniformément continue)**.** *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est uniformément continue sur I lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \forall (x,y) \in I^2, \ |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon.$$

Le nombre δ est indépendant des réels (x, y) et s'appelle un module d'uniforme continuité.

Proposition 4.3.1 (Lipschitz $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.*

$$f \text{ lipschitzienne sur } I \;\Rightarrow\; f \text{ uniformément continue sur } I \;\Rightarrow\; f \text{ continue sur } I.$$

Le théorème suivant est un résultat important d'analyse.

Théorème 4.3.7 (Théorème de Heine)**.** *Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.*

Théorème de la bijection

Théorème 4.3.8 (Théorème de la bijection)**.** *Soit une application $f : I \to \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. On suppose que la fonction f est*

(H_1) **:** *continue sur I,*

(H_2) **:** *strictement monotone sur I.*

Alors,

1. *J est un intervalle,*
2. *f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J,*
3. *la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est une fonction continue sur J, strictement monotone de même sens que f.*

Chapitre 5

Dérivation des fonctions à valeurs réelles

5.1 Dérivée en un point, fonction dérivée

Dans tout ce paragraphe, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit a un point. Les fonctions considerees sont définies sur I et a valeurs réelles.

5.1.1 définitions

Définition 5.1.1. *Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si le nombre*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existe. Cette limite s'appelle le nombre dérivée de f au point x_0 et est noté :

$$f'(x_0) \qquad ou \qquad Df(x_0) \qquad ou \frac{df}{dx}(x_0).$$

Si $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe, f est dite dérivable à droite en x_0, et cette limite est appelée dérivée à droite de f en x_0, et notée $f'_d(x_0)$.

Si $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe, f est dite dérivable à gauche en x_0, et cette limite est appelée dérivée à gauche de f en x_0, et notée $f'_g(x_0)$.

Remarque 5.1.1. *Pour un point a intérieur a I (c'est-a-dire tel qu'il existe $R > 0$ vérifiant $]a-R, a-R[\subset I$) alors f est dérivable au point a si et seulement si on a simultanément :*

1 *f est dérivable à droite en a,*

2 *f est dérivable à gauche en a,*

3 $f'_d(a) = f'_g(a)$

Exemple 5.1.1.

— *Soient* $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha x+\beta. \end{array}$ *f est dérivable en tout point* a *de* $\mathbb{R}$ *et* $\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a) = \alpha$.

— *La fonction* $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$*, dérivable à droite et à gauche en 0 mais pas dérivable en 0.*

— *Par contre la fonction* $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^+$.

— *la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{-1}{x}) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0. \end{cases}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

— *La fonction racine carrée :* $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*_+$.

En effet, si $a \in \mathbb{R}$*. et si* $x \in \mathbb{R}^+$ a *alors*

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})} = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

par opérations sur les limites. Donc f *est bien dérivable en a et* $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$*. Par contre, cette fonction n'est pas dérivable à droite en 0. En effet, si* $x \in \mathbb{R}^*_+$*, on a*

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

5.1.2 Interpretations de la dérivée Interpretation geometrique

Interpretation geometrique

Soient $f \in F(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Le plan étant ramene a un repère orthonormé, pour $x \in I\ \{a\}$, considerons là droite joignant les points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$. La pente de la droite (AM) est donnée par

$$\Delta_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Si la fonction f est dérivable au point $a \in I$, cette pente a pour limite $f'(a)$ quand x tend vers a. Le vecteur de composante $\begin{pmatrix} a \\ \Delta_a(x) \end{pmatrix}$ dirige la corde (AM) et tend vers $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$. La droite passant par A et de pente $f'(a)$ est donc tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$. C'est la position limite des cordes (AM) quand M tend vers A.

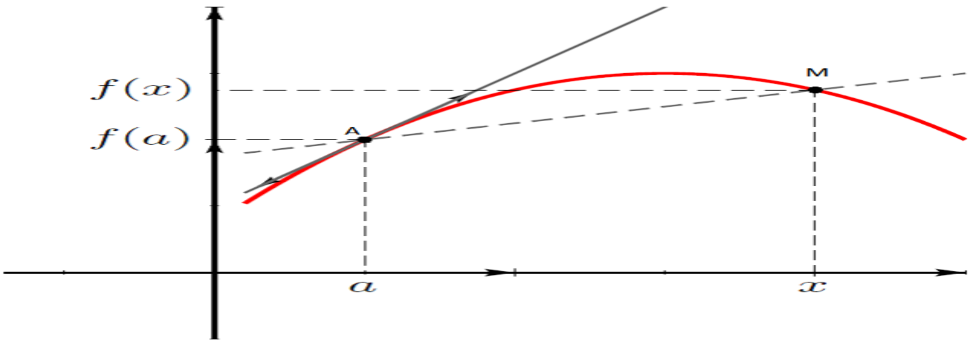


FIGURE Interprétation géométrie du nombre dérivé

Remarque 5.1.2.

— *La tangente en a est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$;*

— *Si f est continue en a et si $\Delta_a(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, les cordes (AM) ont une position limite verticale encore appelée tangente à la courbe en A (tangente verticale).*

— *Si f n'est pas dérivable en a mais si $\Delta_a(x)$ possède des limites à gauche et à droite en a, A est appelé point anguleux de la courbe. C'est un point qui possède deux demi-tangentes de pentes differentes.*

Interpretation cinematique

Considerant $f(t)$ comme l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne, pour $t \neq a$, $\Delta_{a,f}(t)$ represente la vitesse moyenne entre les instants t et a et sa limite $f'(a)$, notee aussi. $f(a)$ la vitesse instantanee à l'instant a.

5.1.3 Dérivabilité et continuité

Théorème 5.1.1 (Dérivabilité implique continuité)**.** *Soient $f \in F(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Remarque 5.1.3. *La réciproque est bien entendu fausse : Par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.*

Remarque 5.1.4.

— *Si f est dérivable à gauche en $a \in I$ alors f est continue à gauche en a.*

— *Si f est dérivable à droite en $a \in I$ alors f est continue à droite en a.*

— *Si f possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche en a alors f est continue en a.*

5.1.4 Fonction dérivée

Définition **5.1.2** (Dérivabilité sur un intervalle)**.** *On dit qu'une fonction f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point $a \in I$. On définit alors la fonction dérivée*

$$f' : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$$

La fonction dérivée se note aussi Df ou $\frac{df}{dx}$. .

Remarque **5.1.5.** *Si une fonction f est dérivable sur I alors elle est continue sur I.*

5.2 Operations sur les dérivées

Théorème **5.2.1** (Regles de calcul de dérivées)**.** *Soient deux fonctions f et g définies sur I et dérivables en un point $a \in I$. On à les propriétés suivantes :*

— *Soient deux réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a);$$

— *La fonction fg est dérivable en a et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

— *Si $g(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage du point a sur lequel la fonction g ne s'annule pas. La fonction $\frac{1}{g}$ est alors définie au voisinage du point a et est dérivable en a avec*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)};$$

— *Si $g(a) \neq 0$, alors de la meme facon que précédemment la fonction $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a, est dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Corollaire **5.2.1** (Theoreme d'opérations sur les fonctions dérivables)**.** *Soient deux fonctions f et g définies sur I et dérivables en un point $a \in I$. On a les propriétés suivantes :*

— *Soient deux réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et*

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g';$$

— *La fonction fg est dérivable en a et*

$$(fg)' = f'g + fg';$$

— *Si* $g \neq 0$ *sur* I*, alors il existe un voisinage du point* a *sur lequel la fonction* g *ne s'annule pas. La fonction* $\frac{1}{g}$ *est alors définie au voisinage du point* a *et est dérivable en* a *avec*
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2};$$

— *Si* $g \neq 0$ *sur* I*, alors de la meme facon que précédemment la fonction* $\frac{f}{g}$ *est définie au voisinage de* a*, est dérivable en* a *et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Théorème 5.2.2 (Dérivation des fonctions composées)**.** *Soient deux fonctions* $f : I \to \mathbb{R}$*,* $g : J \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(a) \in J$*. On suppose que*

(H_1) **:** *La fonction* f *est dérivable au point* $a \in I$ *;*

(H_1) **:** *La fonction* g *est dérivable au point* $b = f(a) \in J$*.*

Alors la fonction $g \circ f$ *est dérivable en* a *et*
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Remarque 5.2.1. *Dans cette preuve, on pourrait etre tenter d'écrire pour* $x \in I\ \{a\}$
$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
ce qui n'est pas correct car la fonction f *peut s'annuler une infinité de fois au voisinage de* a *sans être constante et tout en étant dérivable en* a*. Un exemple d'une telle fonction est donne par* $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ *en* $a = 0$*.*

Corollaire 5.2.2. *Soient deux fonctions* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(I) \subset J$*. On suppose que*

(H_1) **:** *La fonction* f *est dérivable sur* I *;*

(H_2) **:** *La fonction* g *est dérivable sur* J*.*

Alors la fonction $g \circ f$ *est dérivable sur I et*
$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

Théorème 5.2.3 (Dérivation de la bijection réciproque)**.** *Soit une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$*. On suppose que*

(H_1) **:** *la fonction* f *est injective sur l'intervalle* I*.*

(H_2) **:** *la fonction* f *est dérivable sur l'intervalle* I*.*

(H_3) **:** *la fonction* f' *ne s'annule pas sur* I *:* $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$*.*

Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ et son application réciproque, f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f}.$$

Exemple 5.2.1. — *Soient $n \in \mathbb{N}$. et $f_n : x \mapsto x^n$. f_n est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée n'est jamais nulle. La fonction réciproque g_n de f_n est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ y & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{cases}$ verifie,*

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g_n'(y) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}}.$$

— *La fonction f : $\begin{cases}]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[& \to &]-1;1[\\ x & \mapsto & \sin x. \end{cases}$ est une bijection strictement croissante et sa dérivée n'est jamais nulle. La fonction réciproque,* $\arcsin : \begin{cases}]-1;1[& \to &]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\\ y & \mapsto & \arcsin y \end{cases}$ *est dérivable sur $]-1,1[$ et*

$$\forall y \in]-1,1[, \qquad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

5.3 Etude globale des fonctions dérivables

5.3.1 Extremum d'une fonction dérivable

Proposition 5.3.1 (Condition nécessaire d'un extremum relatif)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un point de I tel que*

- (H_1) **:** *Le point a est intérieur à l'intervalle, c'est à dire qu'il existe $R > 0$ tel que $]a-R, a+R[\subset I$;*
- (H_2) **:** *Le point a est un extremum local de la fonction f sur I ;*
- (H_3) **:** *La fonction f est dérivable au point a.*

Alors $f'(a) = 0$.

Remarque 5.3.1. *Attention !*

— *La condition $f'(a) = 0$ n'est pas une condition suffisante d'extremum, (penser a $f : x \mapsto x^3$ en $x = 0$.)*

— *La condition a est intérieur à l'intervalle est fondamentale dans ce théorème. Si le point a est une borne de l'intervalle, on ne peut obtenir qu'une inegalite sur la dérivée à gauche ou à droite au point a.*

5.3.2 Theoreme de Rolle

Théorème 5.3.1 (Théorème de Rolle). *Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. On suppose que*

(H_1) **:** *la fonction f est continue sur le segment $[a;b]$;*

(H_2) **:** *la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$;*

(H_3) **:** $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interpretation graphique

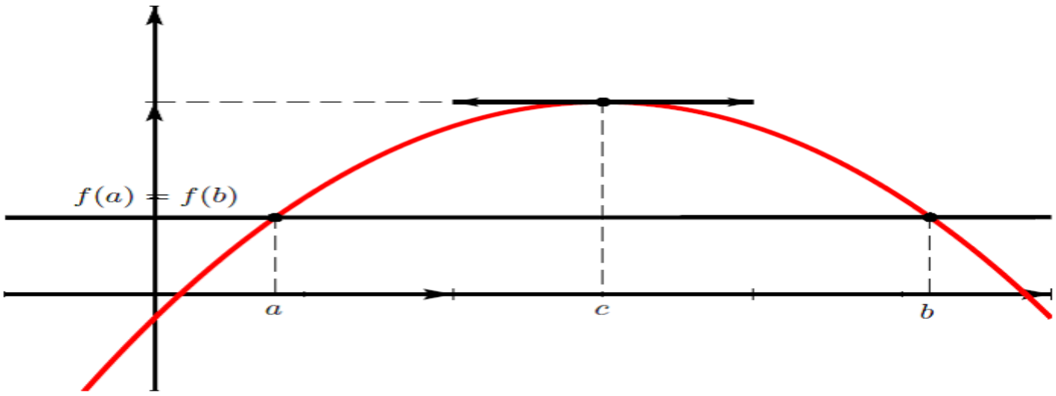


FIGURE Théorème de Rolle

Interpretation cinematique Un point mobile sur un axe qui revient a sa position de depart a vu sa vitesse s'annuler a un instant donne.

Exemple 5.3.1. *Montrer que pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Le polynôme*

$$P = 4\alpha X^3 + 3\beta X^2 + 2\gamma X - (\alpha + \beta + \gamma)$$

possède une racine dans $]0;1[$.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considérons le polynome $Q = \alpha X^4 + \beta X^3 + \gamma X^2 - (\alpha + \beta + \gamma)X$.

Q est une primitive de P et $Q(0) = Q(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, $P = Q'$ s'annule donc au moins une fois entre 0 et 1

5.3.3 Egalite des accroissements finis

Théorème 5.3.2 (Theoreme des accroissement finis (TAF)). *Soit une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. On suppose que*

(H_1) **:** *la fonction f est continue sur le segment $[a;b]$;*

(H_2) **:** *la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.*

Alors il existe un point intérieur $c \in]a; b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Remarque 5.3.2. *Quand un mobile se deplace sur un axe et part d'un point* A *au temps* t_1*, arrive en* B *au temps* t_2 *et si* f *est la fonction position de ce mobile sur l'axe, alors il existe un instant* $t \in]t_1, t_2[$ *tel que la vitesse instantanee en* t. $f'(t)$ *de ce mobile soit egale a sa vitesse moyenne* $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$.

5.3.4 Inégalite des accroissements finis

Théorème 5.3.3 (Inégalité des accroissement finis (IAF))**.** *Soit une fonction* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$. *On suppose que*

- (H_1) **:** *la fonction* f *est continue sur le segment* $[a; b]$ *;*
- (H_2) **:** *la fonction* f *est dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a; b[$*;*
- (H_3) **:** *il existe deux réels* $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\forall x \in]a; b[$, $m \leq f'(x) \leq M$.

Alors on a $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Théorème 5.3.4. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur le segment* $[a; b]$*, avec* $a < b$. *On suppose que :*

1 *f et g sont continues sur [a ; b] et dérivables sur]a ; b[;*

2 $f'(x) \leq g'(x)$ *pour tout* $x \in]a; b[$.

Alors $f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$.

Théorème 5.3.5. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur le segment* $[a; b]$*, avec* $a < b$. *On suppose que :*

1 *f et g sont continues sur [a ; b] et dérivables sur]a ; b[;*

2 $|f'(x)| \leq g'(x)$ *pour tout* $x \in]a; b[$.

Alors $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Corollaire 5.3.1. *Soit* f *une fonction continue sur le segment* $[a; b]$ *et dérivable sur* $]a; b]$. *Si* f' *admet une limite* l *en* a*, alors* f *est dérivable en* a *et* $f'(a) = l$.

Théorème 5.3.6 (Dérivée bornée implique lipschitzienne)**.** *Soit une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *définie sur un intervalle* I. *On suppose que*

- (H_1) **:** *la fonction* f *est continue sur l'intervalle* I*,*
- (H_2) **:** *la fonction* f *est dérivable sur l'intervalle ouvert* $\mathring{I}$*,*
- (H_3) **:** *la fonction* f *est bornée sur l'intervalle ouvert* $\mathring{I}$ *:* $\exists K \geq 0$*, tel que* $\forall x \in \mathring{I}$*,* $|f'(x)| \leq K$.

Alors la fonction f *est* $K-$*lipschitzienne sur l'intervalle* I.

5.3.5 Application : Variations d'une fonction

Le résultat suivant, utilise depuis le lycée est une conséquence du théorème des accroissements finis.

Proposition 5.3.2 (Caracterisation des fonctions constantes, monotones). *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I. Alors on a les résultats suivants :*

1 $[\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0] \quad \Leftrightarrow \quad$ *f est croissante sur I ;*

2 $[\forall x \in I, f'(x) > 0] \quad \Rightarrow \quad$ *f est strictement croissante sur I ;*

3 $[\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0] \quad \Leftrightarrow \quad$ *f est décroissante sur I ;*

4 $[\forall x \in I, f'(x) < 0] \quad \Rightarrow \quad$ *f est strictement décroissante sur I ;*

5 $[\forall x \in I,\ f'(x) = 0] \quad \Leftrightarrow \quad$ *f est constante sur I ;*

Remarque 5.3.3. *La réciproque de 2. est fausse : la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, dérivable et pourtant sa dérivée s'annule en 0.*

5.3.6 Accroissements finis généralisés

Théorème 5.3.7. *Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a; b[$. Il existe c dans $]a; b[$ tel que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Si de plus, g' ne s'annule pas sur $]a; b[$, alors

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

5.3.7 Règle de l'Hospital

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si α est dans I, on notera $V(\alpha)$ un voisinage de α dans I, et $V'(\alpha) = V(\alpha) \setminus \{\alpha\}$.
le voisinage épointé correspondant. (Si α est infini on a $V(\alpha) = V'(\alpha)$).

Théorème 5.3.8 (Règle de l'Hospital). *Soit f et g dérivables dans un voisinage épointé de α. Supposons que :*

(1) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$ *ou* $\lim\limits_{x\to\alpha} |f(x)| = \lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$ *;*

(2) $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *possède une limite l en α.*

Alors,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Remarquons que l'existence de la limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ suppose qu'il existe un voisinage épointé de α dans lequel g' ne s'annule pas. Soit donc $V'(\alpha)$ un tel voisinage.

Exemple 5.3.2. *Calculer la limite* $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2}$.
On a ici $f(x) = x - 1$ *et* $g(x) = x^2 + x - 2$. *Ces deux fonctions s'annulent en* $x = 1$. *On calcule leurs dérivées* $f'(x) = 1$ *et* $g'(x) = 2x + 1$. *Ces dérivées sont continues donc la limite du quotient est*

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{1}{3}.$$

Par suite $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$.

Exemple 5.3.3. *Calculer la limite* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

On a ici $f(x) = \sin(x)$ *et* $g(x) = x$. *Ces deux fonctions s'annulent en* $x = 0$. *On calcule leurs dérivées* $f'(x) = \cos(x)$ *et* $g'(x) = 1$. *Ces dérivées sont continues donc la limite du quotient est*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{\cos(0)}{1} = 1.$$

Par suite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemple 5.3.4. *Calculer* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos(x)}$.
En posant $f(x) = 1 - \cos(\frac{x}{2})$ *et* $g(x) = 1 - \cos(x)$ *on a* $f(0) = g(0) = 0$ *et* f *et* g *sont dérivable en 0 avec* $f'(0) = 0$ *et* $g'(0) = 0$ *car* $f'(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})$ *et* $g'(x) = \sin(x)$. *Les fonctions dérivées étant aussi dérivables en 0 on passe à la dérivée seconde.* $f"(x) = \frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})$ *et* $g"(x) = \cos(x)$. *D'où*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\frac{x}{2})}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})}{\cos(x)} = \frac{1}{4}.$$

Exemple 5.3.5.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

5.3.8 Condition suffisante de derivabilite en un point

Théorème 5.3.9 (Theoreme du prolongement dérivable). *Soit une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *et un réel* $a \in I$. *On suppose que*

(H_1) **:** *la fonction* f *est continue sur l'intervalle* I *;*

(H_2) **:** *la fonction* f *est dérivable sur* $I \setminus \{a\}$,

(H_3) **:** $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$.

Alors la fonction f est dérivable au point a et $f'(a) = l$.

Proposition 5.3.3. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que*

(H_1) **:** *la fonction f est continue sur I ;*

(H_2) **:** *la fonction f est dérivable sur $I \backslash \{a\}$;*

(H_3) **:** $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$. En d'autres termes, la courbe représentative de f possède une tangente verticale au point a.

Remarque 5.3.4. *La réciproque du théorème de prolongement dérivable est fausse comme le montre le contre-exemple suivant*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & si & x \neq 0 \\ 0 & si & x = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Cette fonction est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ car

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq |x| | \sin(\frac{1}{x})| \leq |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

La fonction f est dérivable en tout point $x \neq 0$ avec $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}). \cos(\frac{1}{x})$ et f' n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$. En effet, la suite $(f(1/(n\pi))_{n \geq 1}$ admet deux sous-suites, une convergeant vers 1 et l'autre vers -1.

5.4 Dérivées successives

5.4.1 Dérivée seconde

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 5.4.1 (Fonction deux fois dérivable)**.** *On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I lorsque la fonction f' est dérivable en tout point de I. Sa dérivée est appelée fonction dérivée seconde de f et est notée*

$$f" \qquad ou \qquad D^2 f \qquad ou \qquad \frac{d^2 f}{dt^2}$$

Remarque 5.4.1. *Si f est deux fois dérivable sur I alors f' et f sont continues sur I.*

Remarque 5.4.2. *Lorsque $f(t)$ est l'abscisse à l'instant t d'un point en mouvement rectiligne alors $f"(t)$, si elle existe, represente l'accélération de ce point à l'instant t.*

5.4.2 Dérivée d'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 5.4.2. *dérivées successives étant donne une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on pose $f^{(0)} = f$ et on définit par récurrence, la dérivée nème de f sur I, notée $f^{(n)}$, comme la dérivée de $f^{(n-1)}$, si elle existe. On la note*

$$f^{(n)} \qquad ou \qquad D^n f \qquad ou \qquad \frac{d^n f}{dt^n}.$$

Remarque 5.4.3.

— *L'existence de $f^{(n)}$ sur I entraine l'existence et la continuité, sur I, de toutes les dérivées d'ordre strictement inferieur.*

— *Si f est n fois dérivable sur I alors $f = f^{(0)}, f' = f^{(1)}, ..., f^{(n-1)}$ sont continues sur I.*

Proposition 5.4.1. *Etant donne deux fonctions f et g définies sur I et n fois dérivables sur I ainsi que deux réels α et β. Alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est elle aussi n fois dérivable sur I et :*

$$\forall x \in I, \qquad (\alpha f + \beta g)^{(n)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x).$$

Proposition 5.4.2 (Formule de Leibniz)**.** *Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I alors il en est de même du produit fg et on à la formule de Leibniz qui permet d'exprimer la dérivée n-ième du produit*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n.k)}$$

Exemple 5.4.1.

Calculer la dérivée n-ième de

$$f : x \mapsto (x^2+1)e^{2x}$$

Soit $u(x) = (x^2+1)$ et $v(x) = e^{2x}$ sont de classe C^∞. La formule de Leibniz nous permet de calculer $(uv)^{(n)}$

$$u'(x) = 2x\,, \qquad u''(x) = 2, \qquad u^{(k)}(x) = 0$$

Pour tout entier $k \geq 3$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$. Il vient

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-2}e^{2x}(4(x^2+1) + 4nx + n(n-1))$$

Proposition 5.4.3. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si*

(H_1) **:** *la fonction f est n fois dérivable sur l'intervalle I ;*

(H_2) **:** *la fonction g est n fois dérivable sur l'intervalle J.*

Alors la fonction composée $g \circ f$ est n fois dérivable sur l'intervalle I.

5.4.3 Fonctions de classe C^n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Définition 5.4.3 (Fonctions de classe C^n)**.** *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^n sur l'intervalle I si et seulement si*

1. *f est n fois dérivable sur I ;*
2. *la fonction $f^(n)$ est continue sur I.*

On note

- *$C^0(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^0 sur I, c'est à dire l'ensemble des fonctions continues sur I ;*
- *Pour $n \geq 1$, $C^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I ;*
- *$C^{+\infty}(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.*

Proposition 5.4.4. *Soit $(f, g) \in (C^n(I))^2$ et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors*

- *$\alpha f + \beta g \in C^n(I)$;*
- *$fg \in C^n(I)$.*

Remarque 5.4.4.

- *La premiere egalite et le fait que la fonction nulle est de classe C^n permet d'affirmer que $C^n(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.*
- *On a ...$C^n(I) \subset C^{n-1}(I) \subset ... \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I) \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.*

Proposition 5.4.5. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si*

(H_1) **:** *$f \in C^n(I)$;*

(H_2) **:** *$g \in C^n(J)$.*

Alors $g \circ f \in C^n(I)$.

Exemple 5.4.2. *4 Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n. \end{cases}$ On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ (On a même $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ si $n \in \mathbb{N}$).*

Proposition 5.4.6. *Soit $f \in C^n(I)$ ne s'annulant pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est element de $C^n(I)$.*

Théorème 5.4.1 (Theoreme de la bijection de classe C^n)**.** *Soit $f \in C^n(I)$ telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f est une bijection sur son image $J = f(I)$ et f^{-1} est de classe C^n sur J.*

5.5 Fonctions convexes

Définition 5.5.1 (Fonction convexe)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est convexe lorsque*

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Exemple 5.5.1.

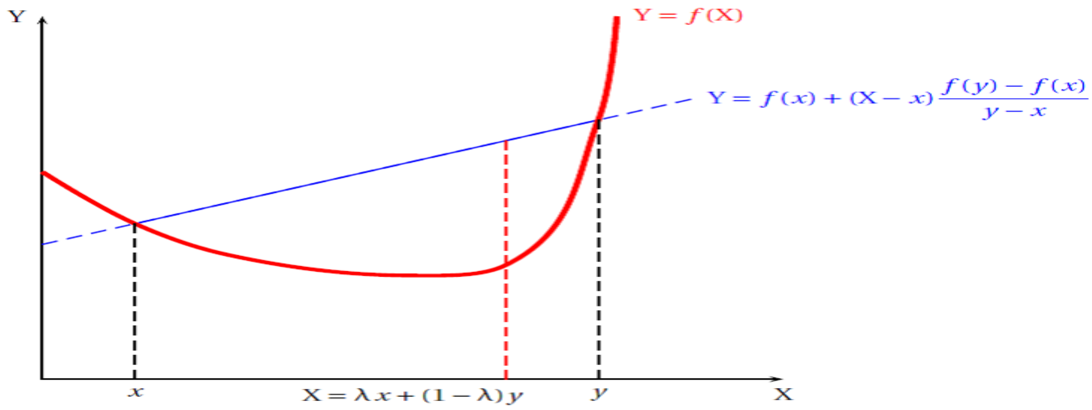


FIGURE Fonctions convexes

Remarque 5.5.1. *Cela signifie geometriquement que le graphe de f est situe en dessous de toutes les cordes joignant deux points de ce graphe.*

Remarque 5.5.2. *On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est concave lorsque*

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

La fonction f est concave si et seulement si la fonction $-f$ est convexe. Dans la suite, on n'étudiera que les propriétés des fonctions convexes.

Remarque 5.5.3. *Les fonctions qui sont à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines.*

Définition 5.5.2 (Fonction strictement convexe)**.** *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement convexe lorsque*

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \neq y, \quad \forall \lambda \in]0,1[, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Proposition 5.5.1 (Inégalité de convexite généralisée)**.** *Soit une fonction f convexe sur l'intervalle I. Alors*

$$\forall n \geq 2, \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in I^n, \quad \forall (\lambda 1, ..., \lambda_n) \in [0,1]^n \quad \textit{tels que} \quad \sum_{i=1}^{i=n} \lambda i = 1$$

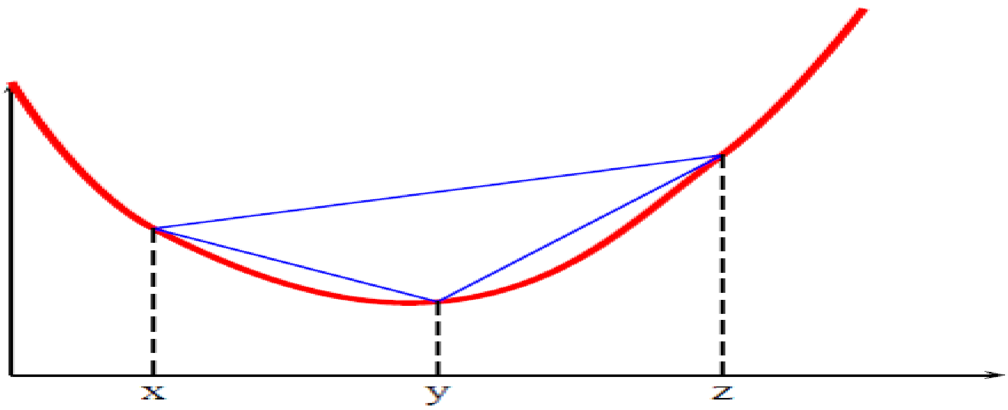
$$f(\lambda 1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

Le résultat suivant est à la base de toutes les demonstrations et est souvent utilise dans les exercices theoriques sur les fonctions convexes. Il est facile a retenir, il suffit de faire le schema suivant :

Lemme 5.5.1 (Lemme des trois pentes)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe :*

$$\forall (x, y, z) \in I^3, \quad x < y < z, \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Exemple 5.5.2.



Le théorème suivant fournit un moyen tres pratique de montrer qu'une fonction est convexe : il suffit de montrer que sa dérivée seconde est positive sur I.

Théorème 5.5.1 (Caracterisation des fonctions convexes dérivables)**.** **1** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable,*

$$(\textit{f convexe}) \quad \Leftrightarrow \quad (\textit{f' croissante}).$$

2 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable,*

$$(\textit{f convexe}) \quad \Leftrightarrow \quad (f'' \geq 0 \textit{sur } I).$$

Théorème 5.5.2 (Le graphe d'une fonction convexe est situe au dessus de toutes ses tangentes)**.** *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable.*

$$\forall x_0 \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - .x_0)$$

Proposition 5.5.2 (Exemples d'inégalités de convexité)**.** **1** *Si $\alpha \geq 1$ et $x, y > 0$, $(x + y)\alpha \geq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha)$;*

2 *Pour n réels $x_1, ..., x_n$, $(x_1 + ... + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + ... + x_n^2)$.*

Proposition 5.5.3 (Concavite du logarithme)**.** **1** *Comparaison entre moyenne geometrique et arithmetique. Pour tous réels* $x_1, ..., x_n > 0$*,*

$$(x_1...x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}.$$

2 *Inégalité de Young : pour deux réels* $a, b > 0$ *et deux réels* $p, q > 0$ *vérifiant* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Chapitre 6

Fonctions usuelles

6.1 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

6.1.1 Logarithme népérien

Définition

Définition 6.1.1. *La fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array} \right.$ *est continue sur l'intervalle* $]0,+\infty[$. *Elle admet donc des primitives sur* $]0,+\infty[$.
On appelle fonction logarithme népérien l'unique primitive de f *sur* $]0,+\infty[$ *qui s'annule en* $x = 1$. *Cette fonction est notée* $\ln$.

Remarque 6.1.1. $\ln(1) = 0$.

Propriétés

Théorème 6.1.1 (Premières propriétés).
- *La fonction* $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$ *;*
- *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ *;*
- *La fonction* $\ln$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *;*
- *La fonction* $\ln$ *est concave* $\mathbb{R}_+^*$

Corollaire 6.1.1. *Soient* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $u : I \to \mathbb{R}_+^*$ *une fonction dérivable. La fonction* $x \mapsto \ln(u(x))$ *est derivable sur* I *et, pour tout* $x \in I$

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Proposition 6.1.1 (Propriétés algébriques). *Pour tout* $x,\ y \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $n \in \mathbb{Z}$,

① $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

② $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$

③ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

④ $\ln(x^n) = n\ln(x)$

Proposition 6.1.2 (Inégalité de convexité). $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

Limites

Proposition 6.1.3. ❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$;

❷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$;

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$;

❹ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$;

❺ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$;

❻ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Définition 6.1.2 (Nombre de Néper). *On appelle nombre de Néper l'unique réel e vérifiant* $\ln(e) = 1$.

Remarque 6.1.2. *L'existence du nombre de Néper est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. L'unicité est une conséquence directe continuité et de la stricte monotonie de* ln.

Remarque 6.1.3. *La tangente en* $(e, 1)$ *passe par l'origine du repère.*

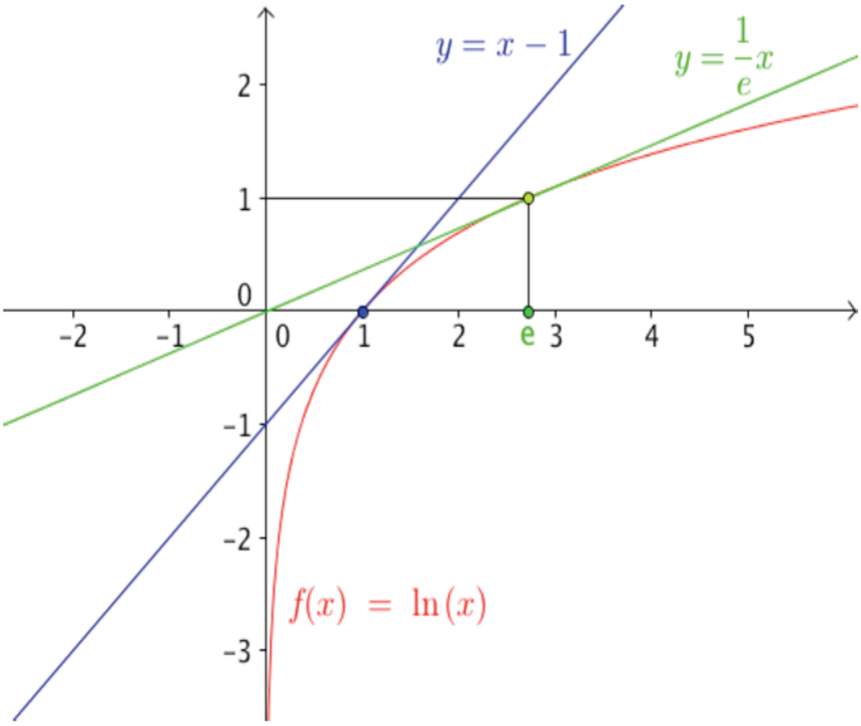
Tableau de variations et courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$	$+$	
$\ln x$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Valeurs particulières : $\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$



6.1.2 Logarithme de base quelconque

Définition 6.1.3 (Logarithme de base a)**.** *Soit a un réel strictement positif et différent de 1 : $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. On appelle logarithme de base a l'application notée $\log_a$ définie par*

$$\log_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}.$$

Remarque 6.1.4. — *Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal qu'on note $\log$;*
— *Si $a = e$, $\log_a = \ln$;*
— $\log_a(1) = 0$ *et* $\log_a(a) = 1$.

Proposition 6.1.4. *Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $x,\ y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.*

① $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

② $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$

③ $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

④ $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

Proposition 6.1.5. *Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, la fonction $\log_a$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

- *Si $a \in]1; +\infty[$, $\log_a$ est strictement croissante et concave ;*
- *Si $a \in]0; 1[$, $\log_a$ est strictement décroissante et convexe.*

Preuve. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. La fonction log_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$ et $\log_a'(x) = \frac{-1}{x^2\ln(a)}$.

- Si $a \in]1; +\infty[$, alors $\ln(a) > 0$, $\log_a'$ est donc strictement positive et $\log_a''$ est strictement négative. Donc $\log_a$ est strictement croissante et concave.
- Si $a \in]0; 1[$, alors $\ln(a) < 0$, $\log_a'$ est donc strictement négative et $\log_a''$ est strictement positive. Donc $\log_a$ est strictement décroissante et convexe.

□

6.1.3 Exponentielle népérienne

Définition - propriétés

Proposition 6.1.6. *La fonction $\ln$ définie une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée fonction exponentielle népérienne et est notée $\exp$.*

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ y & \mapsto & \exp(y) \end{array}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \exp(\ln(x)) = x \quad et \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad \ln(\exp(y)) = y.$$

La fonction $\exp$

- *est strictement croissante et strictement positive ;*
- *est continue $\mathbb{R}$;*
- *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$;*
- *est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 6.1.5. $\exp(0) = 1$ *et* $\exp(1) = e$.

Proposition 6.1.7 (Propriétés algébriques). *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$*

① $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$;

② $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;

③ $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$;

④ $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Notation 6.1.1. *D'après la formule 4, $\exp(n) = \exp(1.n) = (\exp(1))^n = e^n$, on conviendra de noter pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.*

Proposition 6.1.8. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq 1 + x$.

Limites

Proposition 6.1.9. ① $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$;

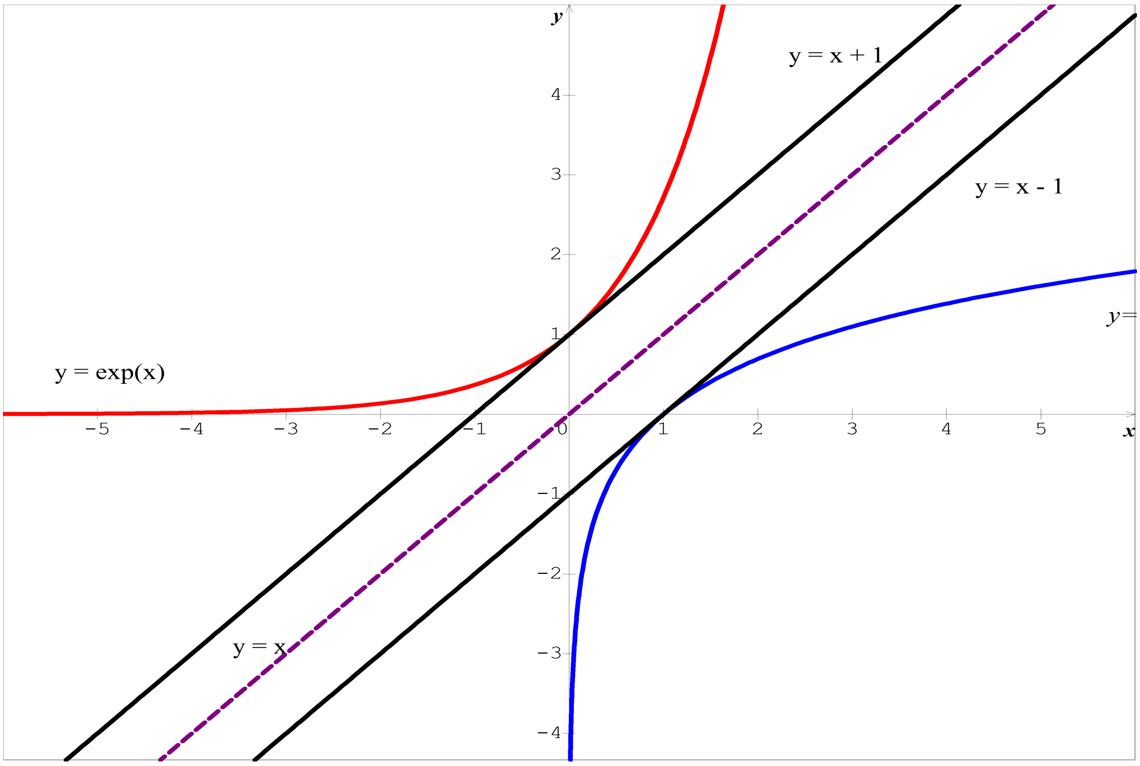
② $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$;

③ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$;

④ $\lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$;

⑤ $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

Tableau de variations et courbe représentative



6.1.4 Exponentielle de base a

Définition - propriétés

Définition 6.1.4. *Soit a un nombre réel strictement positif. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction notée $\exp_a$ définie par*

$$\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & a^x \end{array}.$$

où $a^x = e^{x\ln(a)}$.

Proposition 6.1.10. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. La fonction $\log_a$ définie une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $\exp_a$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est la bijection réciproque de $\log_a$.*
De plus, $\exp_a$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp_a'(x) = \ln(a)\exp_a(x).$$

Proposition 6.1.11. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:*

① $\exp_a(0) = 1$ *et* $\exp_a(1) = a$

② $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$

③ $\exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$

④ $\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n$

⑤ $\exp_a(x)\exp_b(x) = \exp_{ab}(x)$

⑥ $\frac{\exp_a(x)}{\exp_b(x)} = \exp_{\frac{a}{b}}(x)$

Remarque 6.1.6. — *On retrouve la notation précédente $\exp(x) = e^x$.*
— *Remarquons aussi que $1^x = \exp(x \ln 1) = 1$.*

La propriété précédente peut être donnée sous la forme

Proposition 6.1.12. *Pour tout $a,\ b \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $x,\ y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:*

① $a^0 = 1$ *et* $a^1 = a$

② $a^{x+y} = a^x a^y$

③ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

④ $a^{nx} = (a^x)^n$

⑤ $a^x b^x = (ab)^x$

⑥ $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$.

Limites

Proposition 6.1.13. *Si $a > 1$ alors :* $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$*;*
Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

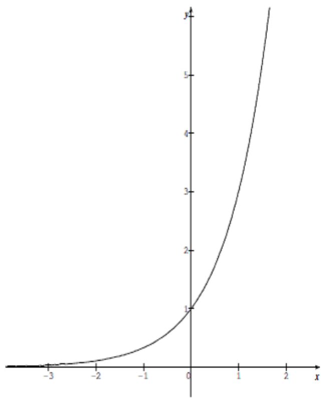
Tableau de variations et courbe représentative

Cas où $a > 1$

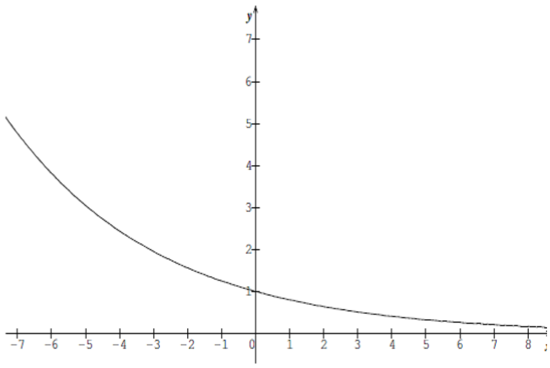
x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$		$+$
f	0 $\nearrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

Cas où $0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$		$-$
f	$+\infty$ $\searrow$	1	$\searrow$ 0



Représentation graphique de $x \mapsto 3^x$



Représentation graphique de $x \mapsto (0{,}8)^x$

6.1.5 Fonctions puissances

Définition - propriétés

Définition 6.1.5. *Soit $a \in \mathbb{R}$ On appelle fonction puissance d'exposant a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a = \exp(a\ln(x)) \end{array}.$$

Remarque 6.1.7. — *φ_0 est la fonction constante égale à 1.*
— $\varphi_1 = Id$.

Proposition 6.1.14. *Propriétés algébriques des fonctions puissances Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$*

① $x^{a+b} = x^a x^b$

② $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

③ $(xy)^a = x^a y^a$

④ $(x^a)^b = x^{ab}$

⑤ $x^0 = 1$ *et* $1^a = 1$

⑥ $\ln(x^a) = a\ln(x)$.

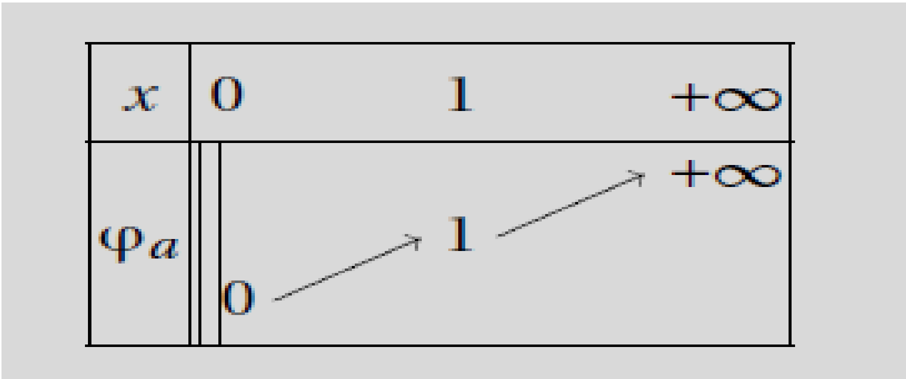
Proposition 6.1.15. *Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction* $\varphi_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a = \exp(a\ln(x)) \end{array}$ *est*

1 *continue sur* $\mathbb{R}_+^*$

2 *dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi_a'(x) = ax^{a-1}$.

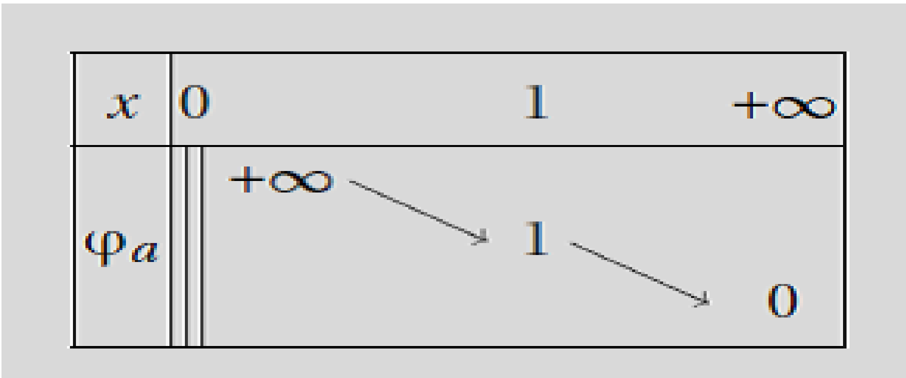
3 *de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

4 *si* $a > 0$, φ_a *est croissante,* $\varphi_a(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ *et* $\varphi_a(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.



5 *Si* $a = 0$, $\varphi_a : x \mapsto x^0 = 1$ *est constante.*

6 *Si* $a < 0$, φ_a *est décroissante,* $a(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ *et* $\varphi_a(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.



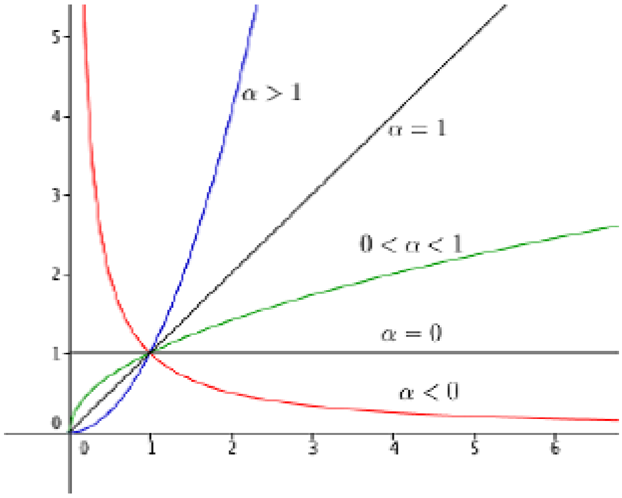
7 *Si* $a > 1$ *ou si* $a < 0$, φ_a *est convexe et si* $0 < a < 1$, φ_a *est concave.*

Remarque 6.1.8.
— *Si* $a > 0$, *on peut prolonger* φ_a *par continuité en* 0 *en posant* $\varphi_a(0) = 0$.
— *Si* $a > 1$, φ_a *est même dérivable en 0 :* $\varphi_a'(0) = 0$.
— *Si* $0 < a < 1$, $\varphi_a'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ *et le graphe de* φ_a *possède une tangente verticale à l'origine.*

Remarque 6.1.9. *Pour dériver une fonction de la forme* $w(x) = u(x)^{v(x)}$ *(là où elle est définie et dérivable...), il faut au préalable la mettre sous la forme* $w(x) = \exp(v(x)\ln(u(x)))$ *puis utiliser la formule de dérivation des fonctions composées. A titre d'exercice, on montrera que :*

$$w'(x) = w(x)\Big(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\Big).$$

Courbe représentative



6.1.6 Comparaison des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles

Proposition 6.1.16 (Croissance comparée)**.** *Pour tout* $\alpha, \beta > 0$, *pour tout* $\gamma \in \mathbb{R}$

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta} = +\infty$

2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\gamma} = +\infty$

3 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\gamma e^{\alpha x} = 0$

6.2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

6.2.1 Fonctions circulaires directes

Proposition 6.2.1 (Rappels et formulaire de trigonométrie circulaire)**.** *On a :*

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ *;*

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *;*

3) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$, $cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ *;*

4) *les fonctions* cos, sin, tan *et cotan sont de classe* C^∞ *sur leur ensemble de définition. ;*

5) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ *;*

6) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$, $cotan'(x) = -1 - cotan^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ *;*

7) *pour tout* $(a;b) \in \mathbb{R}^2$,

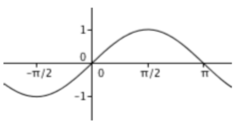
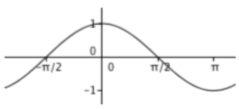
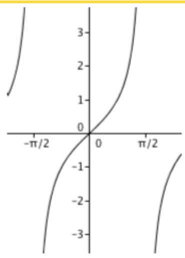
$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b);\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b);\\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a);\\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).
\end{aligned}$$

8) *lorsque ces expressions ont un sens :*

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\\
\tan(a-b) &= \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}
\end{aligned}$$

Tableau récapitulatif

Fonctions sinus, cosinus, tangente

Nom	sinus	cosinus	tangente
Notation	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
Départ et arrivée	$\mathbb{R} \to [-1,1]$	$\mathbb{R} \to [-1,1]$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$
Parité	Impaire	Paire	Impaire
Période	2π	2π	π
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
Monotonie	Croissante sur $[-\pi/2,\pi/2]$	Décroissante sur $[0,\pi]$	Croissante sur $]-\pi/2,\pi/2[$
Courbe représentative			

6.2.2 Fonctions circulaires réciproques

Fonction arcsin

L'application $\sin : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \to [-1;1]$ est continue, strictement croissante. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1;1]$. La fonction sin admet donc une fonction réciproque, notée $\arcsin : [-1;1] \to [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in [-1;1] \times [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}], \qquad y = \arcsin(x) \Leftrightarrow \sin(y) = x.$$

$\arcsin$ est impaire. De plus, comme $\sin$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\sin'(x) = \cos(x) > 0$, $\arcsin$ est dérivable et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il en résulte que $\arcsin$ est de classe C^∞ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

Exemple 6.2.1.

$$\arcsin(0) = 0 \qquad \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6} \qquad \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4} \qquad \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3} \qquad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Fonction $\arccos$

L'application $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$ est continue, strictement décroissante. C'est donc une bijection continue strictement décroissante de $[0;\pi] dans [-1;1]$. La fonction $\cos$ admet donc une fonction réciproque, notée $\arccos : [-1;1] \to [0;\pi]$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in [-1;1] \times [0;\pi], \qquad = \arccos(x) \Leftrightarrow \cos(y) = x.$$

$\arccos$ n'est ni paire ni impaire. De plus, comme $\cos$ est dérivable sur $]0;\pi[$ et que $\forall x \in]0;\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$, $\arccos$ est dérivable et

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il en résulte que $\arccos$ est de classe C^∞ sur $]0;\pi[$.

Fonction $\arctan$

L'application $\tan :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante,

$$\lim_{x\to+-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty \qquad et \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty.$$

C'est donc une bijection continue strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $\tan$ admet donc une fonction réciproque, notée $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[, \qquad y = \arctan(x) \Leftrightarrow \tan(y) = x.$$

$\arctan$ est impaire. De plus, comme $\tan$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$, $\arctan$ est dérivable et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

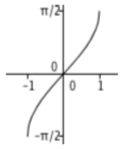
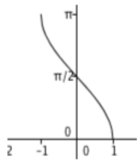
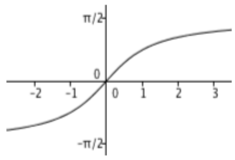
Il en résulte que $\arctan$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6.2.2. *On a la formule suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} signe(x).$$

Tableau récapitulatif

Fonctions arcsin, arccosinus, arctangente

Nom	arcsinus	arccosinus	arctangente
Notation	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$
Départ et arrivée	$[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$	$[-1,1] \to [0,\pi]$	$\mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$
Lien avec les fonctions circulaires	$y = \arcsin x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$	$y = \arccos x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0,\pi] \end{cases}$	$y = \arctan x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$
Parité	Impaire	Ni paire, ni impaire	Impaire
Période	2π	2π	π
Dérivée	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
Monotonie	Croissante	Décroissante	Croissante
Limites	Sans objet	Sans objet	$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
Courbe représentative			
Formules	$\forall x \in [-1,1], \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$		$\forall x \geq 0,\ \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

6.2.3 Fonctions hyperboliques directes

Définitions - propriétés

Définition 6.2.1. *On appelle :*

1) *sinus hyperbolique l'application* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2) *cosinus hyperbolique l'application* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Proposition 6.2.3. *Les fonctions* $\cosh$ *et* $\sinh$ *sont de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *De plus :*

1) $\forall x \in \mathbb{R},, \sinh'(x) = \cosh(x)$ *et* $\cosh'(x) = \sinh(x)$ *;*

2) *La fonction* $\sinh$ *est impaire, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, strictement négative sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et strictement positive sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et s'annule en* 0.

3) *La fonction* $\cosh$ *est paire, strictement positive sur* $\mathbb{R}$*, strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *;*

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) \geq 1.$

Proposition 6.2.4. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) + \sinh(x) = e^x, \quad \textit{et} \quad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Remarque 6.2.1. *Si l'on considère l'hyperbole* (H) *d'équation* $x^2 - y^2 = 1$*, la proposition précédente montre qu'elle admet une représentation paramétrique :* $\begin{cases} x(t) &= \varepsilon \cosh(t) \\ y(t) &= \sinh(t) \end{cases}$ *avec* $\varepsilon = \pm 1$ *selon que l'on veuille paramétrer la branche "haute" ou la branche "basse".*

Définition 6.2.2. *On appelle :*

1) *tangente hyperbolique l'application* $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\tanh x = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

2) *cotangente hyperbolique l'application* $\coth : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\coth x = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Proposition 6.2.5. *Les fonctions* $\tanh$ *et* $\coth$ *sont de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^*$ *respectivement. De plus :*

1 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\coth'(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$,

2 $\tanh$ *et* $\coth$ *sont impaires.*

Proposition 6.2.6. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$*, on a :*

1 $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$

2 $\cosh(a-b) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)$

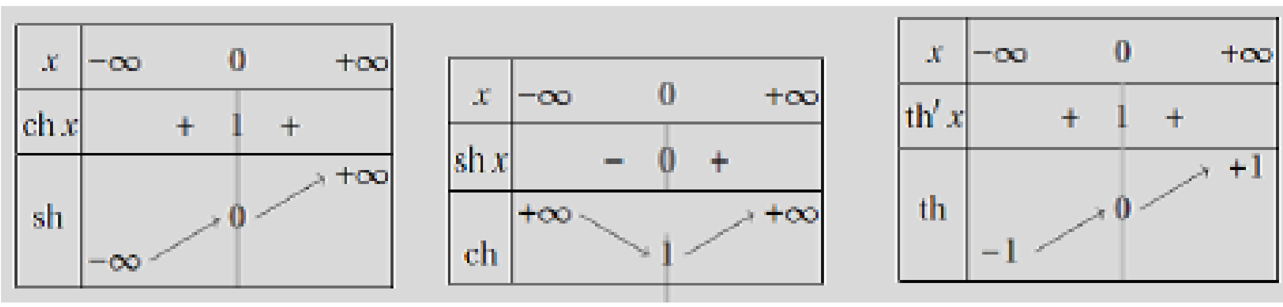
3 $\sinh(a+b) = \cosh(a)\sinh(b) + \cosh(b)\sinh(a)$

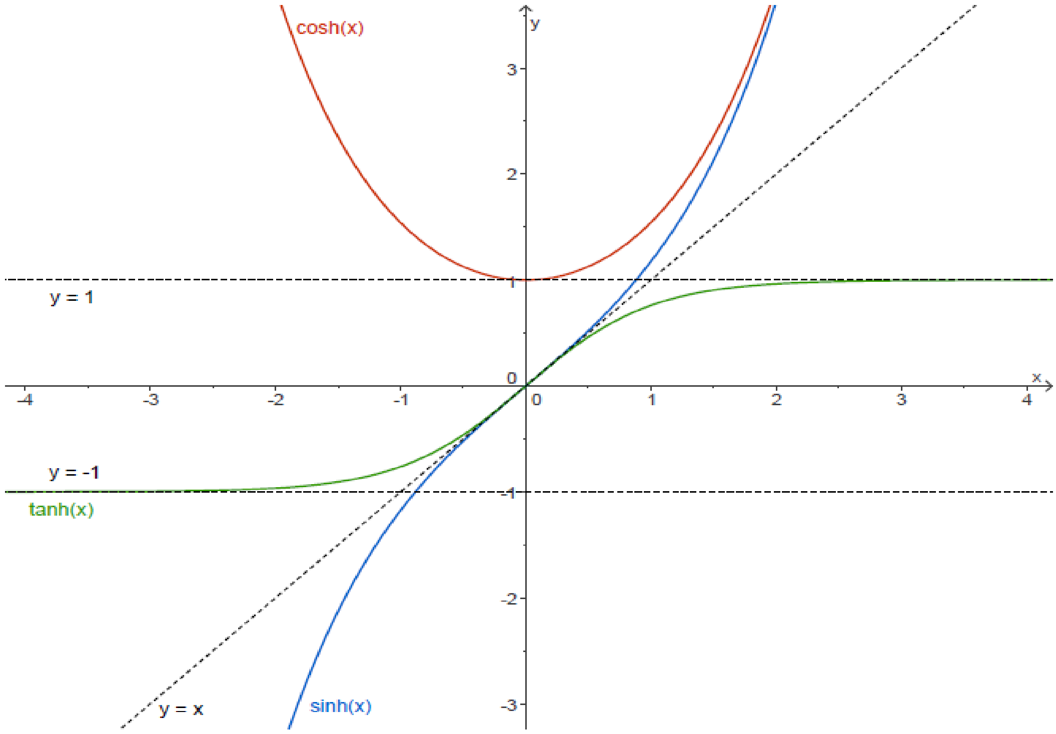
4 $\sinh(a-b) = -\cosh(a)\sinh(b) + \cosh(b)\sinh(a)$

5 $\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh(a) + \tanh(b)}{1 + \tanh(a)\tanh(b)}$

6 $\tanh(a-b) = \dfrac{\tanh(a) - \tanh(b)}{1 - \tanh(a)\tanh(b)}$

Tableaux de variations et courbes représentatives





6.2.4 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction $argsh$

L'application $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante et $\lim_{n \to -\infty} \sinh(x) = -\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \sinh(x) = \infty$. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $\sinh$ admet donc une fonction réciproque, notée $argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a ainsi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad y = argsh(x) \Leftrightarrow \sinh(y) = x.$$

$argsh$ est impaire. De plus, comme $\sinh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sinh'(x) = \cosh(x) \geq 1$, $argsh$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad argsh'(x) = \frac{1}{\sinh'(argsh(x))} = \frac{1}{\cosh(argsh(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Il en résulte que $argsh$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6.2.7 (expression logarithmique de $argsh$)**.** *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad argsh(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Fonction $argch$

L'application $\cosh : [0; +\infty[\to [1; +\infty[$ est continue, strictement croissante et $\lim_{n \to +\infty} \cosh(x) = +\infty$. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $[0; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$.

La fonction $\cosh$ admet donc une fonction réciproque, notée $argch : [1;+\infty[\to [0;+\infty[$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in [1;+\infty[\times[0;+\infty[, \qquad y = argch(x) \Leftrightarrow \cosh(y) = x.$$

De plus, comme $\cosh$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $\forall x \in]0;+\infty[$, $\cosh'(x) = \sinh(x) > 0$, $argch$ est dérivable et

$$\forall x \in [1;+\infty[, \quad argch'(x) = \frac{1}{\cosh'(argch(x))} = \frac{1}{\sinh(argch(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Il en résulte que argch est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.

Proposition 6.2.8 (expression logarithmique de argch). *On a :*

$$\forall x \in]1;+\infty[, \qquad argsh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Fonction argth

L'application $\tanh : \mathbb{R} \to]-1;1[$ est continue, strictement croissante, $\lim_{n\to-\infty} \tanh(x) = -1$ et $\lim_{n\to+\infty} \tanh(x) = 1$. C'est donc une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans$]-1;1[$. La fonction $\tanh$ admet donc une fonction réciproque, notée argth $:]-1;1[\to \mathbb{R}$. On a ainsi

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \qquad y = \text{argth}(x) \Leftrightarrow \tanh(y) = x.$$

$argth$ est impaire. De plus, comme $\tanh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) > 0$, argth est dérivable et

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \text{argth}'(x) = \frac{1}{\tanh'(argth(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Il en résulte que argsh est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6.2.9 (expression logarithmique de argth). *On a :*

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$