UPB — ANNÉE ACADÉMIQUE 2020-2021

Analyse 1 — *Licence 1*

T D :

Exercice 1. *Vrai ou faux ?*

a) *Toute partie majorée de* $\mathbb{R}$ *possède une borne supérieure.*
b) *Si une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *possède une borne supérieure* M*, tout réel inférieur à* M *appartient à* A.
c) *La somme de deux irrationnels est un irrationnel.*
d) *La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.*
e) *Soit* A *une partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$. A *admet un plus grand élément que l'on appelle sa borne supérieure.*
f) $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$. $|b-a| + |b-c| + |a-c| = 2[\max\{a;b;c\} - \min\{a;b;c\}]$
g) *Soient* I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$. $I \cup J$ *est un intervalle.*
h) *Tout réel possède des approximations rationnelles à* 10^{-p} *près, quel que soit l'entier* p.

Exercice 2. *Soient* x *et* y *deux nombres réels. Démontrer les inégalités suivantes.*

1. $\mid x \mid + \mid y \mid \leq \mid x+y \mid + \mid x-y \mid$.
2. $1+ \mid xy-1 \mid \leq (1+ \mid x-1 \mid)(1+ \mid y-1 \mid)$.
3. $\dfrac{\mid x+y \mid}{1+ \mid x+y \mid} \leq \dfrac{\mid x \mid}{1+ \mid x \mid} + \dfrac{\mid y \mid}{1+ \mid y \mid}$.

Exercice 3. *Montrer que :*

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. *Etudier dans quel cas on a l'égalite.*
2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$

Exercice 4.

1. *Les ensembles suivants sont-ils majorés ? minorés ? Si oui, déterminer leur borne inférieure, leur borne supérieure.*

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}; x^2 < 2\right\} \quad B = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^\star\right\} \quad C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p};\ (p,n) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star\right\}$$

2. *On considère la partie de* $\mathbb{R}$ *suivante :*

$$D = \left\{\frac{x^2+2}{x^2+1} \quad \middle| \quad x \in \mathbb{R}\right\}$$

Déterminer, s'ils existent, $\sup D$, $\inf D$, $\min D$, $\max D$.

Exercice 5.
Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 6. *Soit x un nombre réel. On note $E(x)$ la partie entière de x.*

1. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad E(x) + E(-x) = 0.$
2. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, \quad E(x) + E(-x) = -1$
3. *Prouvez que* $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$
4. *Démontrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$
$$E\left[\frac{E(nx)}{n}\right] = E(x).$$

Exercice 7.

1. *Soit la suite de terme général* $u_n = \dfrac{n^3+1}{n^3+n^2+2}$
   a. *Trouver un entier N , tel que, si n $\geq$ N, on ait* $|u_n - 1| < 10^{-2}$.
   b. *Plus généralement, ε étant un nombre réel strictement positif, déterminer un entier N, tel que, si n $\geq$ N, on ait $|u_n - 1| < \varepsilon$. Qu'a-t-on démontré pour la suite (u_n) ?*
2. *En utilisant les définitions, montrer que*
   a. *La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.*
   b. *La suite de terme général* $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ *converge vers 1.*
   c. *La suite de terme général* $w_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ *converge vers 0.*

Exercice 8. *On considère une suite (U_n) définie sur par :* $\mathbb{N}$
$$U_0 = 4 \quad et \quad U_{n+1} = 2U_n - 3.$$
Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$V_n = U_n - 3.$$

1. *Quelle est la nature de la suite (U_n) ?*
2. *Montrer que la suite (V_n) est géométrique.*
3. *Donner l'expression de (V_n) en fonction de n.*
4. *En déduire l'expression de (U_n). en fonction de n.*
5. *Calculer la somme des 11 premiers termes de (U_n).*

Exercice 9. *Donner l'expression du terme général des suites récurrentes (u_n) suivantes*

1. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \qquad u_0 = 3 \qquad u_1 = 5$*;*

2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \qquad u_0 = 1 \qquad u_1 = 0$;
3. $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \qquad u_0 = 1 \qquad u_1 = 2$.

<u>Exercice</u> 10. *Trois suites, u, v, et w sont définies de la manière suivante sur $\mathbb{N}^*$.*

$$u \begin{cases} u_1 = 1 \\ n > 1 : \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases} \qquad v \begin{cases} v_1 = 12 \\ n > 1 : \quad v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

$$w : \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad w_n = u_n - v_n.$$

1. *Démontrer que w est une suite géométrique convergente à termes négatifs ;*
2. *Démontrer que u et v sont adjacentes :*
3. *On considère la suite t définie, pour tout n par*

$$t_n = 3u_n + 8v_n.$$

   Démontrer que t est constante. Est elle convergente ?
4. *Démontrer que u et v ont la même limite. Trouver cette limite.*

<u>Exercice</u> 11. *Dans chacun des cas ci-dessous, trouver une suite simple équivalente à la suite (a_n) dont on donne le terme général. En déduire si elle possède une limite.*

$$a)\ \frac{2n^2 - n - 10}{n^3 + n + 2} \qquad b)\ \sqrt{n^3 + 5n^2} - \sqrt{n^3 + n} \qquad c)\ \frac{n! + n^n}{n^{n+2} + 3^n}$$

<u>Exercice</u> 12.

1. *En utilisant la définition, montrer que :*
   (a) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0.$
   (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^4} = +\infty.$
2. *Calculer* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-x}}{\sin 5x}$ *en utilisant la règle de l'Hospital.*
3. *Calculer* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x) - \sin(3x)}{\ln(1+x)}$.
4. *Montrez que la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.*
5. *Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $]0, 1[$.*

<u>Exercice</u> 13.

1. *Enoncer le théorème de Rolle et le théorème l'inégalité des accroissements finis.*
2. *En utilisant le théorème de Rolle, montrer qu'entre deux solutions réelles de $e^x \sin(x) = 1$, il existe au moins une solution réelle de $e^x \cos(x) = -1$.*
3. *Montrer pour tout $x > 0$ que* $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. *Montrer que* $x_0 = -\dfrac{7}{2}$ *est un minimum local de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2 + 7x + 3$.

Exercice 14.

1. *Donner l'ensemble de définition et la fonction dérivée de la fonction* arctan.
2. *Soit* f *une application définie sur* $\mathbb{R}^+$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et dérivable sue* $\mathbb{R}^+$. *On soppose que* f' *est strctement décroissante sur* $\mathbb{R}^+$, *et que*
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) \geq 0.$$
   (a) *Démontrer que* $\forall x \in [1; +\infty[$, $f(x+1) - f(x) < f'(x)$.
   (On pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $[x, x+1]$*)*
   (b) *Démontrer que* $\forall x \in [1; +\infty[$, $f'(x) < f(x) - f(x-1)$.
3. *Soit* (s_n) *la suite définie par :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} f'(k).$$
   (a) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n+1) - f(1) < s_n < f(n) - f(0)$.
   (b) *En déduire que la suite* (s_n) *converge si et seulement si il existe un réel* l *tel que* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = l$.
4. *Application : Etudier la convergence de la suite* (u_n) *définie par*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}.$$

Exercice 15.

1. *Déterminer les réels* a, b *et* c *tels que la fonction* f *définie ci-dessous soit de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$.
$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & si \quad x > 0. \end{cases}$$
2. *Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a < b$. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur* $[a, b]$, *dérivables sur* $]a, b[$. *On suppose que* g' *ne s'annule pas sur* $]a, b[$.
   (a) *Montrer que le théorème de Rolle s'applique à la fonction*
$$x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$
   (b) *En déduire qu'il existe un point* $c \in]a, b[$ *tel que :*
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. *On prend 100 comme valeur approchée de* $\sqrt{10001}$. *À l'aide du théorème des accroissements finis, majorer l'erreur commise.*

Exercice 16.

1. *Montrer que* $\forall x \in [-1;1],\ \arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$. *(on pourra étudier les variations de la fonction* $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$*).*
2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^3}{2} + \arctan(x) - \arcsin(x)}{\dfrac{x^3}{2} + x(\cos(x) - 1)}$

Exercice 17.
Soit f *la fonction d'une variable réelle définie par :*

$$f(u) = \frac{3 + 4\,\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)}.$$

1. *Préciser son ensemble de définition.*
2. *Préciser ses limites quand* u *tend vers* $+\infty$ *et* $-\infty$.
3. *Etudier les variations de* f *puis dresser son tableau de variation.*
4. *Tracer le graphe de* f.

Exercice 18.
Étudier la convexité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x(x-1)(x-4)$.
2. *cosinus.*