CH1: INTEGRALE DE RIEMANN

DR KOIVOGUI

Au cours de ce chapitre, l'étudiant est appelé à maîtriser :

- Le calcul des primitives de certaines fonctions usuelles.
- Les méthodes générales de calcul d'intégrales.
- Le calcul des intégrales des fractions rationnelles en utilisant la méthode de décomposition en éléments simples.

I- PRIMITIVE D'UNE FONCTION

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.

- Par définition, une fonction F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$$F'(x) = f(x).$$

- Toute fonction f continue sur I admet une infinité de primitives sur I. Ces primitives sont de la forme
$$G(x) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$
où F est aussi une primitive de f.

- Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Si f est une fonction continue sur I, alors il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Exemple 1 *Rappeler les primitives F de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :*

$f(x)$	$F(x)$	I
$a \in \mathbb{R}$	$\ldots + C,\ C \in \mathbb{R}$	$\ldots$
$x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\ldots + C$	$\ldots$
$\frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$\ldots + C$	$\ldots$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\ldots + C$	$\ldots$
$\sin x$	$\ldots + C$	$\ldots$
$\cos x$	$\ldots + C$	$\ldots$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\ldots + C$	$\ldots$
$\frac{1}{x}$	$\ldots + C$	$\ldots$
e^x	$\ldots + C$	$\ldots$
$sh(x)$	$\ldots + C$	$\ldots$
$ch(x)$	$\ldots + C$	$\ldots$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\ldots + C$	$\ldots$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\ldots + C$	$\ldots$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ldots + C$	$\ldots$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ldots + C$	$\ldots$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\ldots + C$	$\ldots$

Exercice 1

1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 pour $x = \dfrac{\pi}{2}$.*

2. *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.*

Opérations sur les primitives :

Si F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur I, alors

- $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de λf sur I.

Primitives usuelles :

Soit u une fonction **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J : u est dérivable sur J et sa dérivée u' est continue sur J.

Rappeler les primitives F de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

$f(x)$	$F(x)$	I
$u'(x)u^n(x), \quad n \in \mathbb{N}^*$	$... + C,\ C \in \mathbb{R}$	J
$\dfrac{u'(x)}{u^n(x)}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$... + C$	$\{x \in J / \ u(x) \neq 0\}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$... + C$	$\{x \in J / \ u(x) > 0\}$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$... + C$	$\{x \in J / \ u(x) \neq 0\}$
$u'(x)e^{u(x)}$	$... + C$	J

Primitives de la composée de deux fonctions :

Soient u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et v une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $J \subseteq u(I)$. Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)v'\big(u(x)\big)$ sur I sont données par les fonctions

$$x \mapsto v \circ u(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = x\big(1 + x^2\big)^3, \quad g(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad h(x) = \cos(4x) - 3\sin(2x) + \cos x.$$

II-INTEGRALE DE RIEMANN D'UNE FONCTION

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f et a et b deux nombres réels de I.

- Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est appelé **l'intégrale de Riemann** de la fonction f entre a et b et il est noté par

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- L'ordre de a et b est important. Le nombre a est appelé la borne inférieure de l'intégrale et le nombre b est appelé la borne supérieure de l'intégrale.

Propriétés principales des intégrales de Riemann : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, $c \in I$ et α, $\beta \in \mathbb{R}$. Alors

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

- $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$
  (linéarité de l'intégrale)

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$
  (Relation de Chasles)

- $\displaystyle(\forall x \in I,\ f(x) \le g(x)) \overset{\boxed{a \le b}}{\Rightarrow} \left(\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\right).$

  En particulier, $\displaystyle(\forall x \in I,\ f(x) \ge 0) \overset{\boxed{a \le b}}{\Rightarrow} \left(\int_a^b f(x)dx \ge 0\right).$

- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \overset{\boxed{a \le b}}{\le} \int_a^b |f(x)|\,dx.$

Exemple 2 *Calculer les intégrales suivantes :*

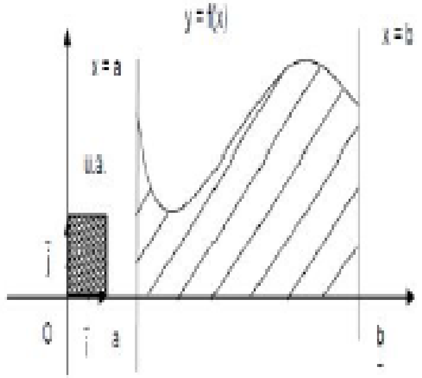
$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx, \quad B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(|x|) \, dx, \quad C = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin(|x|) \, dx.$$

III- CALCUL D'AIRE

Soient $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthogonal et D la région du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, avec $a < b$. L'unité d'aire est l'aire du rectangle engendré par le repère choisi.

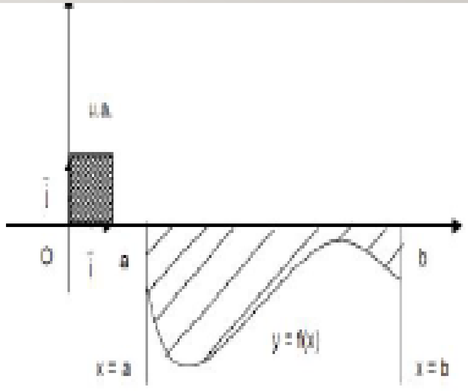
- **Cas d'une fonction positive :**
  Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ alors l'aire de D, mesurée en unité d'aire (u.a), est

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx.$$



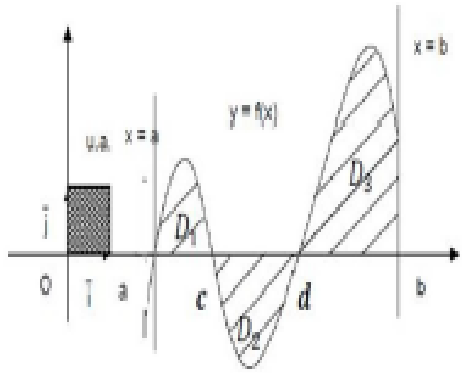
- **Cas d'une fonction négative :**
Si f est une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a, b]$ alors l'aire de D, mesurée en unité d'aire (u.a), est

$$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,dx.$$



- **Cas général :**
Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors l'aire de D, mesurée en unité d'aire (u.a), est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$



Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x|x|.$$

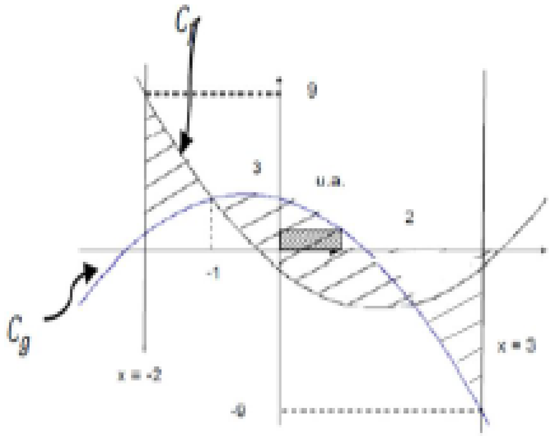
1. *Tracer $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.*

2. *Calculer, en u.a, l'aire de la région du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.*

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives, respectivement, de f et g dans un repère orthogonal et D la région du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, avec $a < b$.

L'aire de D, mesurée en u.a est donnée par

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$



IV-METHODES GENERALES D(INTEGRATIONS

Intégration par parties

Théorème d'intégration par parties : Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I et $a, b \in I$. On a

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,dx, \quad B = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,dx, \quad C = \int_0^1 arcsin(x)\,dx, \quad D = \int_1^t \ln x\,dx\ (t \in \mathbb{R}_+^*).$$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ *la suite définie par* $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{sin(\pi x)}{x+n}\,dx.$

1. *Montrer que* $(u_n)_{n\in N^*}$ *est décroissante.*
2. *En déduire que* $(u_n)_{n\in N^*}$ *est convergente, puis calculer sa limite.*
3. *En utilisant une intégration par parties, calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n$.

CHANGEMENT DE VARIABLES

Dans certains cas, à l'aide d'un changement de variables, on peut transformer une intégrale en une autre plus simple à calculer.

Exemple introductif : Calculons l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx.$$

$1^{\text{ère}}$ **étape :** On pose $u = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = u^2 + 1$.

$2^{\text{ème}}$ **étape :** On a $dx = 2u\,du$.

$3^{\text{ème}}$ **étape :** On s'intéresse aux bornes de l'intégrale. On a

$$x = 1 \Leftrightarrow u = 0 \quad et \quad x = 2 \Leftrightarrow u = 1.$$

Le chagement de variable $u = \sqrt{x-1}$ entraîne que

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \int_0^1 (u^2+1)\,u\,2u\,du = \frac{16}{15}.$$

Théorème de changement de variable : Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $\varphi : I \to J$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in I$. On a

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{3+\mathrm{e}^{-x}}\,dx, \quad B = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x(\ln x + 1)}.$$

Intégration des fonctions trigonométriques

On peut aussi calculer les intégrales de certaines fonctions polynomiales ou rationnelles qui dépendent uniquement de $\cos x$ et/ou $\sin x$, en se ramenant au calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle à travers deux méthodes :

1. Les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours.

2. Le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ fonctionne tout le temps mais conduit généralement à davantage de calculs.

Les règles de Bioche : On note $w(x) = f(x)\,dx$.

- Si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a $(-x) \in \mathcal{D}_f$ et $w(-x) = w(x)$, alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$.

- Si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a $(\pi - x) \in \mathcal{D}_f$ et $w(\pi - x) = w(x)$, alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$.

- Si $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a $(\pi + x) \in \mathcal{D}_f$ et $w(\pi + x) = w(x)$, alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

Exemple 4

1. *En utilisant une règle de Bioche adéquate, calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx.$

2. (a) *Soit* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *et* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)\cdot$. *En utilisant les formules trigonométriques, montrer que*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad et \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

   (b) *En effectuant le changement de variable* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, *calculer* $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}.$

V-INTEGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES

La décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle est l'écriture de cette fraction rendue irréductible sous forme de somme d'un polynôme appelé sa partie entière et de fractions rationnelles dites ses éléments simples.

Dans ce qui suit, on introduira ces notions et on illustrera l'utilité de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles dans le cadre du calcul des intégrales de Riemann.

- **Intégrale du type** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^n}$ **sur un intervalle ne contenant pas** $-a$

  Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto (x+a)^n$ est continue sur un intervalle ne contenant pas $-a$. On rappelle que ce type d'intégrale se calcule de la manière suivante :

  - Si $n = 1$, on a $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a} = \ln(|x+a|) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

— Si $n > 1$, on a $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \frac{1}{(-n+1)(x+a)^{n-1}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

- **Intégrale du type** $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^p}\,dx,$ **(avec** $\alpha^2 - 4\beta < 0$**)**

  Cas où $p = 1$. On a

$$I_1 = \int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx = \int \frac{ax+b}{\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}}\,dx.$$

En effectuant le changement de variable $t = x + \frac{\alpha}{2}$, on obtient

$$I_1 = \int \frac{a\left(t - \frac{\alpha}{2}\right) + b}{t^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}}\, dt = J_1 + K_1,$$

où $J_1 = \int \frac{at}{t^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}}\, dt$ et $K_1 = \int \frac{b - \frac{a\alpha}{2}}{t^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}}\, dt$. On a

$$J_1 = \frac{a}{2} \ln\left(t^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}\right).$$

De plus,

$$K_1 = \frac{2(2b - a\alpha)}{4\beta - \alpha^2} \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}\right)^2 + 1}\, dt.$$

Le changement de variable $u = \dfrac{2t}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}$ conduit à

$$K_1 = \frac{2b - a\alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \int \frac{1}{u^2 + 1}\, du = \frac{2b - a\alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \arctan u.$$

Illustrons le calcul par l'exemple suivant :

Exemple 11 *Calculer* $I = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx.$

Le polynôme x^2+x+1 *s'écrit comme suit :* $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\cdot$ *En effectuant le changement de variable* $t = x + \frac{1}{2}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1}\,dt. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant le changement de variable $u = \frac{2}{\sqrt{3}}$. *On obtient*

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\ln 3 + \sqrt{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\, du \\ &= \frac{1}{2}\ln 3 + \sqrt{3}\Big(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan 3\Big). \end{aligned}$$

Cas où $p \geq 2$. En effectuant le même changement de variable $t = x + \dfrac{\alpha}{2}$, on obtient

$$I_p = \int \frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^p}\,dx = J_p + K_p,$$

où $J_p = \displaystyle\int \frac{at}{\left(t^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^p}\,dt$ et $K_p = \displaystyle\int \frac{b-\frac{a\alpha}{2}}{\left(t^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^p}\,dt$. On a

$$J_p = \frac{-a}{2(p-1)}\,\frac{1}{\left(t^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^{p-1}}.$$

Pour calculer K_p, on applique le changement de variable $u = \dfrac{2t}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}$. Ceci induit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{(2b - a\alpha)4^{p-1}}{(4\beta - \alpha^2)^{p-\frac{1}{2}}} \int \frac{1}{(u^2+1)^p}\, du \\ &= \frac{(2b - a\alpha)4^{p-1}}{(4\beta - \alpha^2)^{p-\frac{1}{2}}} \left(\int \frac{1}{(u^2+1)^{p-1}}\, du - \int \frac{u^2}{(u^2+1)^p}\, du \right). \end{aligned}$$

Une intégration par parties sur la deuxième intégrale donne une relation de récurrence entre K_p et K_{p-1}.

Expliquons le calcul dans l'exemple suivant :

Exemple 12 *Calculer* $J = \int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

En appliquant les mêmes étapes de calcul de l'intégrale I *de l'exemple précédent, on obtient*

$$\begin{aligned}
J &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{t+\frac{3}{2}}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{t}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2+1\right)^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant le changement de variable $u = \frac{2}{\sqrt{3}}$. *On obtient*

$$J = \frac{1}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}\, du.$$

Comme $\dfrac{1}{\left(u^2+1\right)^2} = \dfrac{1}{u^2+1} - \dfrac{u^2}{\left(u^2+1\right)^2}$., *alors*

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}\,du = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\,du - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} u\frac{u}{\left(u^2+1\right)^2}\,du.$$

En intégrant la deuxième intégrale par parties, on obtient

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}\,du = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot$$

Par conséquent, $J = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot$

Exercice 8 *Calculer les intégrale suivantes :*

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + x + 2}, \quad B = \int_{0}^{1} \frac{2x + 1}{x^2 - x + 3}\, dx, \quad C = \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}.$$

Exercice 9 *Soit F la fraction rationnelle définie par* $F(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^5(x^2 + 2)}$.

1. *Effectuer une division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4 de $x^3 + 4$ par $x^2 + 2$.*
2. *En déduire la décomposition en éléments simples de F.*
3. *Calculer* $\displaystyle\int_1^2 F(x)\, dx$.

Exercice 10 *Soit F la fraction rationnelle définie par* $F(x) = \dfrac{x^6 + 2x^4 + 2x^3 - 1}{x^3 + x}$.

1. *Montrer que F est irréductible.*
2. *Décomposer F en éléments simples.*
3. *Calculer* $\displaystyle\int_1^2 F(x)\,dx$.

CH2: EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I- DIFFERENTES TYPES D'EQUATIONS

- ◇ 1er type : $\dfrac{dy}{dx} = g(x)$: Équations primitives
- ◇ 2ème type : $g(y)dy = h(x)dx$:Équations à variables séparables
- ◇ 3ème type :$\dfrac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)$: Équations linéaires du 1er ordre

II-EQUATIONS PRIMITIVES

Lorsque l'équation différentielle peut être mise sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

et si G est une primitive de g, alors la solution générale de l'équation proposée est donnée par $y = G(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Exercice II.1 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y' = -10x^{-3}$.
2. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{t^2+1}$.
3. $f'(x) + 2x = 0$.
4. $\dfrac{dy}{dx} = \sin x \cos x$.

Exercice II.2 *: Une voiture accélère au taux de $0,5m/s^2$ à partir d'une position immobile. En combien de temps la voiture atteindra-t-elle la vitesse de $30m/s$? Quelle sera alors la distance parcourue ?*

III-EQUATIONS A VARIABLES SEPARABLES

Lorsque l'équation différentielle peut être mise sous la forme :

$$g(y)dy = h(x)dx$$

donc si G et H sont des primitives de g et h, alors la solution générale d'une telle équation est donnée par : $G(y) = H(x) + C, C \in \mathbb{R}$

Exercice II.3 : *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y' = \dfrac{2+y}{x}$.
2. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t^2\cos(x)}$.
3. $y' = 2y$.
4. $\dfrac{dy}{dx} = x^3\sqrt{y}$.
5. $3y' - 2y = 0, \quad y(3) = -1$.
6. $f'(x) + 2f(x) = 0, \quad f(1) = 3$.

Exercice II.4 *On laisse se refroidir une plaque métallique qui a été chauffée et on constate qu'elle passe de 80^oC à 65^oC en $20min$ dans de l'air ambiant à 15^oC. En suivant les lois de la thermodynamique (voir l'introduction du cours), on peut calculer approximativement sa température après une heure de refroidissement. Quelle est-elle ? À quel moment sa température sera-t-elle de 37^oC ?*

Exercice II.5 *faire l'exemple de l'introduction.*

IV-EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Définition Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est de la forme :

$$y' + f(x)y = g(x).$$

— On parle d'équation différentielle linéaire d'ordre 1 sans second membre si $g(x) = 0$.

— On parle d'équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre si $g(x) \neq 0$.

La fonction $g(x)$ est le second membre de l'équation. L'équation sans second membre est encore appelée **équation homogène**.

Théorème II.1 *Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I, la solution générale de l'équation $y' + f(x)y = 0$ est :*

$$y = Ce^{-F(x)}$$

où F est une primitive de f sur I et où C est une constante réelle quelconque.

Preuve : Remarquer que $y' + f(x)y = 0$ est une équation Ã variables sÃ©parables.

Exercice II.6 *Résoudre les équations suivantes :*

1. $y' + e^x y = 0.$
2. $y'(x) + 3y(x) = 0.$
3. $x^2 y' = 2y.$

Théorème II.2 *La solution générale de* $(E) : y' + f(x)y = g(x)$ *peut s'obtenir en ajoutant à une solution particulière de cette équation la solution générale de l'équation sans second membre associée* $(E_0) : y' + f(x)y = 0$.

Exercice II.7 *Soit l'équation différentielle* $(E) : xy' - 2y = 2\ln(x) - 3$

1. *Montrer que la fonction* y_p *définie sur* $]0; +\infty[$ *par :* $y_p(x) = 1 - \ln(x)$ *est une solution particulière de* (E).
2. *Résoudre l'équation différentielle* (E) *sur* $I =]0; +\infty[$.
3. *Déterminer la solution particulière vérifiant que* $y(1) = 0$.

Résumé : Les équations avec second membre se résolvent en deux temps :

1. *On résout d'abord l'équation sans second membre pour obtenir une solution*
$$y_1 = Ce^{-F(x)};$$

2. *On recherche une solution particulière y_p de léquation avec second membre.*
3. *La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient en calculant $y_1 + y_p$.*

Et si on ne trouve pas de solution particulière de l'équation avec second membre ?

Méthode :Après avoir déterminé la solution de l'équation sans second membre sous la forme $y_1 = Ce^{-F(x)}$, on remplace la constante C par une fonction $C(x)$ que l'on cherchera à déterminer en resubsituant le tout dans l'équation de départ. Cette méthode s'appelle la méthode de la variation de la constante et elle est due à Lagrange.

Exercice II.8 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y' + 2xy = x$.
2. $y'(x) + 2y(x) = 1$.
3. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2x, \quad y(0) = 1$.

Définition Une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 est de la forme :

$$(E) : ay'' + by' + cy = g(x) \quad a \in \mathbb{R}^* b, c \in \mathbb{R}$$

V-EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU SECOND ORDRE

- Equation homogenes

nous indiquerons dans cette partie du cours une méthode de résolution basée sur le théorème qui suit.

Théorème III.1 *Soit* $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0 \quad a \in \mathbb{R}^* \quad et \quad b, c \in \mathbb{R}$ *, La solution générale de* (E_0) *dépend des solutions* ***de l'équation caractéristique*** *:*

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Trois cas peuvent se présenter :
a) si cette équation admet ***deux solutions réelles distinctes*** r_1 *et* r_2*, la solution générale de* (E_0) *est :*

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

b) si cette équation admet **une solution réelle** r, *la solution générale de* (E_0) *est :*

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{rx}$$

c) si cette équation admet **deux solutions complexes** $a \pm bi$, *la solution générale de* (E_0) *est :*

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)).$$

Exercice III.1 *Résoudre les équations suivantes*

1. $y'' - 3y' + 2y = 0.$
2. $y'' + 2y' + 5y = 0.$
3. $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Théorème III.2 *La solution générale de* $(E) : ay'' + by' + cy = g(x)$ *peut s'obtenir en ajoutant à une solution particulière de cette équation la solution générale de l'équation sans second membre associée à* $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0.$

Recherche d'une solution particulière de l'équation complète : La nature du second membre et la linéarité peut aider dans cette recherche. Par exemple :

⋄ Si $g(x)$ est de la forme $P(x)e^{kx}$, $P \in R_n[X]$;

Dans ce cas, une solution particulière de (E) est de la forme $y_p(x) = Q(x)e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$, avec :

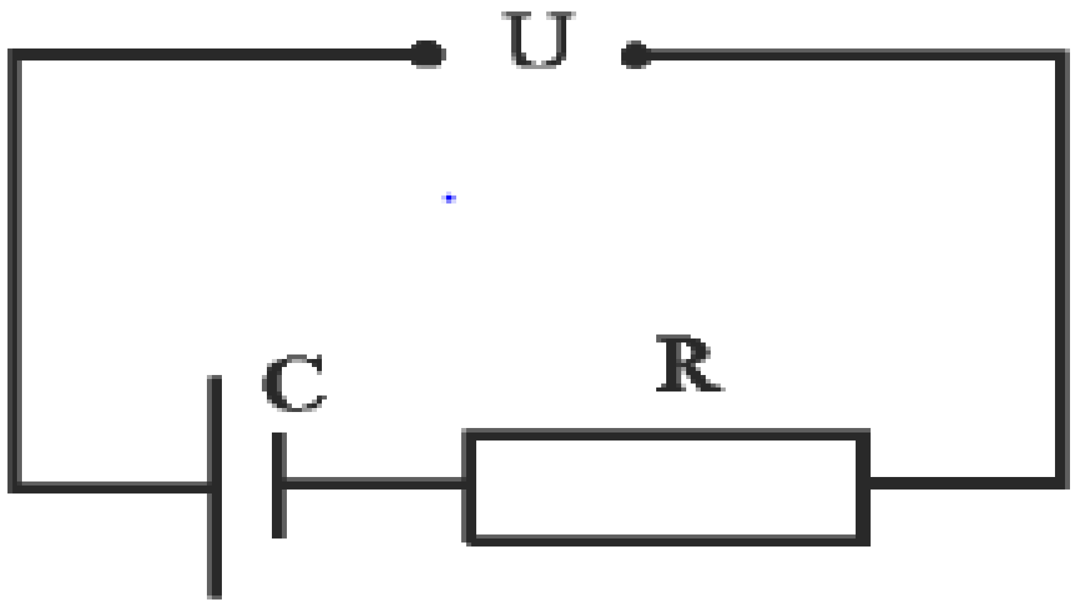
- $deg(Q) = deg(P)$, si k n'est pas une racine de (E),
- $deg(Q) = deg(P) + 1$, si k est une racine simple de (E),
- $deg(Q) = deg(P) + 2$, si k est une racine double de (E).

Exercice III.2 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4.$
2. $y'' - 3y' = 2.$
3. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}.$
4. $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}.$

Exercice III.3 *On considère le circuit électrique ci dessous où C est la capacité du condensateur, R la valeur de le résistence et U désigne la tension aux bornes du circuit.*
En physiques, on montre que $Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = U$ où q, la charge du condensateur est une fonction du temps qui prend la valeur 0 pour $t = 0$.

1. *Écrire l'équation différentielle vérifiée par q.*
2. *Montrer que $q(t) = CU - CUe^{-\frac{t}{RC}}$.*
3. *Sachant que l'intensité $i(t) = q'(t)$, déterminer $i(t)$.*


U
C
R