Equations différentielles

1. Généralités

Définition

Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle (par exemple x), une fonction qui dépend de cette variable (par exemple y) et un certain nombre de ses dérivées successives. Lorsque la dérivée de plus haut degré de la fonction (qui apparaît réellement) est la $n^{\text{ième}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on dit que l'équation différentielle est d'ordre n.

Exemples

- $yy'' = x - x^2y'$ est une équation différentielle d'ordre 2 où y est une fonction de la variable x.
  On peut aussi l'écrire $y'' = \dfrac{x - x^2y'}{y}$.
- $x'' - tx' + x^2 = 1$ est une équation différentielle d'ordre 2 où x est une fonction de la variable t.
- $t' - tx + x^2 = 1$ est une équation différentielle d'ordre 1 où t est une fonction de la variable x.

Remarques

- Une équation différentielle d'ordre n peut donc s'écrire sous la forme :
  $\phi(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$ ou encore $\phi(x,y(x),y'(x),y''(x),\ldots,y^{(n)}(x)) = 0$
  où y est donc une fonction qui dépend de x et ϕ est une fonction des $n + 2$ variables $x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}$.
  Nous nous intéresserons aux fonctions y à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Il nous arrivera de rencontrer $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ à la place de y' et nous pourrons avoir des équations de la forme $2x\mathrm{d}x = y^2\mathrm{d}y$.

Définition

Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle $\phi(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier, c'est trouver toutes les fonctions f telles que :

a. f soit n fois dérivable sur I

b. $\forall x \in I$, $\phi(x,f(x),f'(x),f''(x),\ldots,f^{(n)}(x)) = 0$

Une fonction qui vérifie les conditions (a) et (b) est appelée solution (ou intégrale) particulière de l'équation différentielle et sa courbe représentative est appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.
On appelle solution (ou intégrale) générale de l'équation l'ensemble de toutes les fonction solutions.
On appelle courbes intégrales d'une équation différentielle l'ensemble des courbes représentatives de toutes les solutions de cette équation différentielle.

Remarques

- En pratique, on suppose souvent que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
- Si Id_I désigne l'application identité de $\mathbb{R}$ restreint à I, on peut aussi écrire $\phi(Id_I,y,y',y'',...,y^{(n)}) = 0$ où 0 designe la fonction nulle sur I.
- Dans certains cas, à partir de la solution générale d'une équation différentielle, on peut rechercher une solution particulière satisfaisant à certaines conditions appelées conditions initiales. En général, ces conditions concernent les valeurs prises par la fonction ou certaines dérivées en une valeur x_0.

Exemples

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + xy' - 5y = 2 - 3x^2$.
- Les courbes intégrales de l'équation différentielle $y'' = 0$ sont les droites du plan non parallèles à l'axe des ordonnées.
- $y = \int_2^x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 - 2$ est la solution particulière de l'équation différentielle $y' = x$ qui vérifie la condition initiale $y(2) = 0$.

Définition

Une fonction f définie sur I est dite une solution maximale d'une équation différentielle (E) s'il n'existe pas d'intervalle $J \supset I$ et de fonction g telle que $g_{|I} = f$ qui soit aussi solution de (E).

Définition

On appelle équation simplifiée toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $\phi(x,y^{(n)}) = 0$.

Méthode de résolution

Si on peut mettre l'équation sous la forme $y^{(n)} = g(x)$ alors il suffit d'intégrer n fois la fonction g.

Ex : On cherche à résoudre l'équation différentielle $xy' - 1 = 0$.
A priori, cette équation est définie sur $\mathbb{R}$. Toutefois, si $x = 0$, alors aucune fonction ne convient.
On peut donc la résoudre soit sur $]-\infty;0[$ soit sur $]0;+\infty[$. Pour simplifier, on prend $]0;+\infty[$.
On obtient $y' = \frac{1}{x}$ et donc $y = \ln x + a$ où $a \in \mathbb{R}$.
Les courbes intégrales de l'équation s'obtiennent de celle de $\ln x$ par une translation parallèlement à l'axe des ordonnées.

2. Equations différentielles du premier ordre

2.1 Equations à variables séparables

Définition

On appelle équation à variables séparables toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $a(x) + b(y)y' = 0$ où a et b sont des applications continues sur des intervalles à préciser.

Méthode de résolution

Soient A et B des primitives respectivement de a et de b sur un intervalle I où a et b sont continues.
En intégrant l'égalité, on obtient $A(x) + B(y) = cste$
Si B admet une application réciproque B^{-1}, on a $y = B^{-1}(-A(x) + cste)$.

Ex : On cherche à résoudre l'équation différentielle $x^2y' = e^y$.
Si $x = 0$, alors aucune fonction ne convient.
On peut donc la résoudre soit sur $]-\infty;0[$ soit sur $]0;+\infty[$.
On a $-y'e^{-y} = \dfrac{-1}{x^2}$ et en intégrant $e^{-y} = \dfrac{1}{x} + c$ où $c\in\mathbb{R}$. Donc $y = -\ln\left(\dfrac{1}{x} + c\right)$ où $c\in\mathbb{R}$.
L'ensemble de définition de la fonction y dépend de c.
Pour avoir une solution sur $]0;+\infty[$, il faut que $c > 0$. Il n'y pas de solution sur $]-\infty;0[$ tout entier, car il faut $\dfrac{1}{x} + c > 0$ c'est-à-dire $c > 0$ et $x \in \left]-\dfrac{1}{c}\,;0\right[$.

Remarque

Il arrivera que l'on ne puisse pas obtenir y en fonction de x.

2.2 Equations non linéaires homogènes

Définition

On appelle équation homogène toute équation différentielle qui ne change pas lorsque l'on remplace x par λx et y par λy pour tout réel λ.
Une équation homogène peut se mettre sous la forme $\phi(y',\dfrac{y}{x}) = 0$ et parfois sous la forme $y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (1).

Méthode de résolution

Nous nous bornerons aux équations homogènes que l'on peut mettre sous la forme (1).
Dans ce cas, on pose $y = tx$ où t est donc une fonction de x.
On obtient alors une équation à variables séparables.

Ex : On veut résoudre l'équation différentielle $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $]0;+\infty[$.
On peut mettre cette équation sous la forme (1) en effet, on a $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x} = \sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x}$.
On pose donc $y = tx$ et $y' = t'x + t$.

$$x(t'x + t) - tx = \sqrt{x^2+t^2x^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad t'x + t - t = \sqrt{1+t^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad t' \times \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) = \ln kx \quad \text{où } k\in\mathbb{R}_+^* \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{argsh} t = \ln x + c \quad \text{où } c\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \quad t + \sqrt{1+t^2} = kx \quad \text{où } k\in\mathbb{R}_+^* \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{argsh} t = \ln kx \quad \text{où } k\in\mathbb{R}_+^*$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+t^2} = kx - t \quad \text{où } k\in\mathbb{R}_+^* \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{e^{\ln(kx)} - e^{-\ln(kx)}}{2} \quad \text{où } k\in\mathbb{R}_+^*$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 + t^2 = k^2x^2 - 2kxt + t^2 \quad \text{où } k\in\mathbb{R}_+^* \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{kx - \frac{1}{kx}}{2} \quad \text{où } k\in\mathbb{R}_+^*$$
$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{k^2x^2-1}{2kx} \quad \text{où } k\in\mathbb{R}_+^*.$$

Et donc $y\ (= tx) = \dfrac{k^2x^2-1}{2k}$ où $k\in\mathbb{R}_+^*$.

2.3 Equations linéaires du premier ordre

Définition

On appelle équation linéaire du premier ordre toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ où a,b et c sont des applications continues sur des intervalles à préciser. L'équation est dite normalisée si $a(x) = 1$ ($\forall x$) c'est-à-dire si elle est de la forme $y' + b(x)y + c(x) = 0$.

Remarque

Lorsque l'équation n'est pas normalisée, on peut se ramener à une équation normalisée en divisant par $a(x)$ sur tout intervalle où a ne s'annule pas. Puis on "raccorde" les solutions suivant l'intervalle demandé.

Méthodes de résolution

a. Equations linéaires du premier ordre sans second membre

Nous nous intéressons dans un premier temps aux équations de la forme $y' + b(x)y = 0$
C'est une équation à variables séparables dont la solution générale est $y = ke^{-B(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$ et B est une primitive de b.

Ex : On cherche à résoudre $(1 + x^2)y' + 4xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.
On a $y' + \dfrac{4x}{1+x^2}\, y = 0$.
Une primitive de $2 \times \dfrac{2x}{1+x^2}$ est $2 \times \ln(1+x^2) = \ln(1+x^2)^2$.
D'où la solution générale est $y = ke^{-\ln(1+x^2)^2}$ où $k \in \mathbb{R}$
C'est-à-dire $y = \dfrac{k}{(1+x^2)^2}$ où $k \in \mathbb{R}$.

b. Equations linéaires du premier ordre avec second membre

Soient y_1 et y_2 deux solutions de $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$ (2).
On a donc $a(x)y_1' + b(x)y_1 + c(x) = 0$
$a(x)y_2' + b(x)y_2 + c(x) = 0$
D'où $a(x)y_1' - a(x)y_2' + b(x)y_1 - b(x)y_2 = 0$
$a(x)(y_1 - y_2)' + b(x)(y_1 - y_2) = 0$
Donc $y_1 - y_2$ est une solution de l'équation sans second membre associée : $a(x)y' + b(x)y = 0$ (3)
ou $y' + \dfrac{b(x)}{a(x)}\, y = 0$ (3′) sur tout intervalle où a ne s'annule pas.

D'où la méthode :

On résout d'abord l'équation (3).
On détermine ensuite une solution particulière de (2).
Les solutions générales de (2) s'obtiennent en ajoutant les solutions de (3) et la solution particulière trouvée de (2).

Détermination de la solution particulière de (2) : Méthode dite de la variation de la constante

Sur un intervalle où a ne s'annule pas, soit D est une primitive de $\dfrac{b(x)}{a(x)}$.
Les solutions de (3′) sont de la forme $y = ke^{-D(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$.

On suppose que la solution particulière y_0 de (2) est de la forme $y_0 = ke^{-D(x)}$ où k cette fois-ci est une fonction de x c'est-à-dire $y_0 = k(x)e^{-D(x)}$.

D'où $y'_0 = k'(x)e^{-D(x)} - \dfrac{b(x)}{a(x)}k(x)e^{-D(x)}$.

$a(x)y_0' + b(x)y_0 = a(x)[k'(x)e^{-D(x)} - \dfrac{b(x)}{a(x)}k(x)e^{-D(x)}] + b(x)k(x)\,e^{-D(x)} = a(x)k'(x)e^{-D(x)} = -\,c(x)$

Et donc $k'(x) = -\dfrac{c(x)}{a(x)}e^{D(x)}$.

Il suffit de déterminer une primitive $F(x)$ de $-\dfrac{c(x)}{a(x)}\,e^{D(x)}$ et alors $y_0 = F(x)e^{-D(x)}$.

Ex : On cherche à résoudre $(x^2+1)y' - xy = 3x$.

\# L'équation sans second membre associée (appelée aussi équation linéaire du premier ordre homogène) est $(x^2+1)y' - xy = 0$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Elle est équivalente à $y' - \dfrac{x}{x^2+1}y = 0$

Une primitive de $-\dfrac{x}{x^2+1}$ est $-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) = -\ln\sqrt{1+x^2}$.

D'où les solutions de l'équation sans second membre sont $y = k\sqrt{1+x^2}$ où $k\in\mathbb{R}$.

\# Recherche d'une solution particulière :

On pose $y_0 = k(x)\left(\sqrt{1+x^2}\right)$.

$y'_0 = k'(x)\left(\sqrt{1+x^2}\right) + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}k(x)$

$(x^2+1)y_0' - xy_0 = k'(x)\sqrt{(1+x^2)^3} + x\sqrt{1+x^2}\,k(x) - xk(x)\sqrt{1+x^2}$

$(x^2+1)y_0' - xy_0 = k'(x)\sqrt{(1+x^2)^3} = 3x$

D'où $k'(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = 3x(1+x^2)^{-3/2}$ et $k(x) = 3\times(-2)\times\dfrac{1}{2}\times(1+x^2)^{-1/2}$.

Enfin $y_0 = -3$

\# Les solutions de l'équation avec second membre sont donc $y = k\sqrt{1+x^2} - 3$ où $k\in\mathbb{R}$.

2.4 Equations de Bernoulli

Définition

On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^{\alpha} = 0$ où a,b et c sont des applications continues sur des intervalles à préciser et α est un réel fixé avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

Remarque

Dans un cadre quelconque, il faut $y > 0$.

Méthode de résolution

On pose $t = y^{1-\alpha}$. On obtient $t' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha} = (1-\alpha)\dfrac{y'}{y^{\alpha}}$.

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^{\alpha} = 0 \iff a(x)\frac{y'}{y^{\alpha}} + b(x)\frac{y}{y^{\alpha}} + c(x) = 0$$

$$\iff \frac{a(x)}{1-\alpha}t' + b(x)t + c(x) = 0$$

On obtient donc une équation linéaire du premier ordre en t.

Ex : On cherche à résoudre $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$.

On peut intégrer l'équation sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$.

On a $\alpha = 5$. On divise par y^5 : $\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{2x} \times \frac{1}{y^4} = 5x^2$.

On pose $t = y^{-4}$ d'où $t' = -4y'y^{-5}$.

On obtient $-\frac{1}{4}t' - \frac{t}{2x} = 5x^2$ c'est-à-dire $t' + \frac{2}{x}t = -20x^2$

C'est une équation linéaire du premier ordre et l'équation sans second membre est $t' + \frac{2}{x}t = 0$.

Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Une primitive de $\frac{2}{x}$ est $\ln(x^2)$.

D'où les solutions de l'équation sans second membre sont $t = \frac{c}{x^2}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière :

On pose $t_0 = \frac{1}{x^2}c(x)$

$t'_0 = c'(x)\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}c(x)$

On obtient : $t'_0 + \frac{2}{x}t_0 = c'(x)\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}c(x) + \frac{2}{x}\left(\frac{1}{x^2}c(x)\right) = c'(x)\frac{1}{x^2} = -20x^2$

D'où $c'(x) = -20x^4$

Et $c(x) = -4x^5$ et $t_0 = -4x^3$.

La solution générale est donc $t = \frac{c}{x^2} - 4x^3$ où $c \in \mathbb{R}$.

On obtient donc $y = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{c}{x^2} - 4x^3}}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Attention : Ensemble de définition et solution maximale.

2.5 Equations de Ricatti

Définition

On appelle équation de Ricatti toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :
$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ où a,b et c sont des applications continues sur des intervalles à préciser.

Remarque

On ne sait résoudre ce type d'équation que si l'on connaît déjà une solution particulière y_1.

Méthode de résolution

On pose $y = y_1 + \frac{1}{t}$ avec $y_1' = a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x)$ et t ne s'annulant pas sur l'intervalle de résolution.

On a $y' = y'_1 - \frac{t'}{t^2}$.

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad y'_1 - \frac{t'}{t^2} = a(x)\left(y_1 + \frac{1}{t}\right)^2 + b(x)\left(y_1 + \frac{1}{t}\right) + c(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{t'}{t^2} = 2a(x)\frac{y_1}{t} + a(x)\frac{1}{t^2} + b(x)\frac{1}{t}$$
$$\Leftrightarrow \quad t' + \left(2a(x)y_1 + b(x)\right)t = -a(x)$$

On obtient une équation linéaire du premier ordre en t.

Ex : On cherche à résoudre $2x^2y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy$ sur $]0;+\infty[$.

On peut mettre l'équation sous la forme : $y' = \frac{x-1}{2x^2}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{x-1}{2}$

$y = x$ est une solution particulière.

On pose $y = x + \frac{1}{t}$ où t est une fonction qui ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$.
On a $y' = 1 - \frac{t'}{t^2}$.
On obtient $2x^2\left(1 - \frac{t'}{t^2}\right) = (x-1)\left(\left(x + \frac{1}{t}\right)^2 - x^2\right) + 2x\left(x + \frac{1}{t}\right)$.

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x^2\frac{t'}{t^2} = (x-1)\left(x^2 + 2x\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - x^2\right) + 2x^2 + 2x\frac{1}{t}$

$\Leftrightarrow \quad -2x^2\frac{t'}{t^2} = (x-1)\left(2x\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) + 2x\frac{1}{t}$

$\Leftrightarrow \quad -2x^2\frac{t'}{t^2} = 2x^2\frac{1}{t} + x\frac{1}{t^2} - 2x\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + 2x\frac{1}{t}$

$\Leftrightarrow \quad -2x^2\frac{t'}{t^2} = 2x^2\frac{1}{t} + x\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2t' + 2x^2t = 1 - x$

$\Leftrightarrow \quad t' + t = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}$

La solution de l'équation sans second membre est $t = ce^{-x}$ où $c \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière est $t_0 = -\frac{1}{2x}$.

D'où la solution générale est : $t = ce^{-x} - \frac{1}{2x}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Et $y = x + \dfrac{1}{ce^{-x} - \frac{1}{2x}} = x + \dfrac{2x}{2cxe^{-x} - 1} = \dfrac{2cx^2e^{-x} + x}{2cxe^{-x} - 1} = x.\dfrac{kxe^{-x} + 1}{kxe^{-x} - 1}$ où $k \in \mathbb{R}$.
Danger : Ensemble de définition

2.6 Equations de Lagrange

Définition

On appelle équation de Lagrange toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :
$y = xf(y') + g(y')$ où f et g sont des applications continûment dérivables sur des intervalles à préciser.

Méthode de résolution

On pose $t = y' = \frac{\partial y}{\partial x}$.
L'équation devient $y = xf(t) + g(t) = x(t)f(t) + g(t)$.
On la dérive par rapport à t : $\frac{\partial y}{\partial t} = x'(t)f(t) + x(t)f'(t) + g'(t)$.
or $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial t} = t\,x'(t)$.
Donc $tx'(t) = x'(t)f(t) + x(t)f'(t) + g'(t)$.
Equation que l'on peut considérer comme une équation linéaire de premier ordre en prenant pour la variable t et pour la fonction x.

Ex : On cherche à résoudre $xy' + y + y'^2 = 0$.
On pose $y' = t$. L'équation devient $y = -tx(t) - t^2$.
D'où $-x(t) - tx'(t) - 2t = \frac{\partial y}{\partial t} = tx'(t)$ et $2tx'(t) + x(t) = -2t$.
L'équation sans second membre est $2tx' + x = 0$ ou encore $x' + \frac{1}{2t}x = 0$ sur tout intervalle où t ne s'annule pas. La solution générale est $x = ke^{-\frac{1}{2}\ln|t|} = k|t|^{-\frac{1}{2}} = \frac{k}{\sqrt{|t|}}$ où $k \in \mathbb{R}$.
On cherche maintenant une solution particulière de $2tx' + x = -2t$ du type $x_0 = at + b$.
$x_0' = a$ et $2at + at + b = -2t$.

D'où $b = 0$ et $a = -\frac{2}{3}$. C'est-à-dire $x_0 = -\frac{2}{3}t$.
La solution générale de $2tx'(t) + x(t) = -2t$ est donc $x = \frac{k}{\sqrt{|t|}} - \frac{2}{3}t$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Or $y = -tx - t^2 = -t\left(\frac{k}{\sqrt{|t|}} - \frac{2}{3}t\right) - t^2$.
On a donc $y = -t\frac{k}{\sqrt{|t|}} - \frac{1}{3}t^2$ avec $k \in \mathbb{R}$.
On obtient uniquement un paramétrage des courbes intégrales. Il aurait été plus "intéressant" d'obtenir t en fonction de x.

2.7 Equations de Clairaut

Définition

On appelle équation de Clairaut toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :
$y = xy' + f(y')$ où f est une application continûment dérivable sur des intervalles à préciser.

Remarque

C'est un cas particulier des équations de Lagrange.

Méthode de résolution

On pose $y' = t$.
L'équation devient $y = xt + f(t)$.
On la dérive par rapport à x : $y' = xt' + t + t'f'(t) = t$ (t est une fonction de x).
D'où $xt' + t'f'(t) = 0 = t'(x + f'(t))$.

Si $t' = 0$, alors $t = c \in \mathbb{R}$.
D'où $y = cx + f(c)$ car $y = xt + f(t)$.

Si $x + f'(t) = 0$ et si f' est inversible, alors $t = (f')^{-1}(-x)$

Ex : On cherche à résoudre $y = xy' + \frac{y'}{y'+1}$ sur $]-\infty;0[$.
On pose $y' = t$.
L'équation devient $y = xt + \frac{t}{t+1}$
D'où $y' = xt' + t + \frac{t'(t+1) - tt'}{(t+1)^2} = t$.
$t'\left(x + \frac{1}{(t+1)^2}\right) = 0$

Si $t' = 0$, alors $t = c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
D'où $y = cx + \frac{c}{c+1}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Si $x + \frac{1}{(t+1)^2} = 0$, alors $t = \frac{1}{\sqrt{-x}} - 1$.
D'où $y = xt + \frac{t}{t+1} = -\sqrt{-x} - x + \frac{\frac{1}{\sqrt{-x}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{-x}}} = -2\sqrt{-x} - x + 1$.

3. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Equations sans second membre

Définition

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme : (4) $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$ sinon nous sommes dans le cas du linéaire premier ordre).

Définitions

On appelle polynôme caractéristique de l'équation (4), le polynôme $P = aX^2 + bX + c$.
On appelle discriminant de l'équation (4), le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque

On se bornera aux fonctions réelles.

Propriété

Avec les notations précédentes,

- Si $\Delta > 0$ et si r_1 et r_2 sont les racines de P alors les solutions de (4) sont de la forme : $y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ et si r est la racine double de P alors les solutions de (4) sont de la forme : $y = (\lambda x + \mu) e^{rx}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- Si $\Delta < 0$ et si $r_1 = \alpha + \beta i$ et $r_2 = \alpha - \beta i$ sont les racines de P alors les solutions de (4) sont de la forme : $y = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

.

Remarques

- L'ensemble des solutions d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 2.
- On peut étendre ces résultats quand $a,b,c \in \mathbb{C}$.
  Dans ce cas, le polynôme caractéristique possède une ou deux racines complexes et on obtient les résultats correspondants aux deux premiers points.

Ex : On veut résoudre les équations différentielles suivantes et déterminer la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données.

a. $y'' + 2y' - 3y = 0$ $\quad y_0(1) = 1$ et $y_0'(1) = 1$
b. $y'' + 4y' + 4y = 0$ $\quad y_0(-1) = 1$ et $y_0'(-1) = 2$
c. $y'' + 2y' + 5y = 0$ $\quad y_0(0) = 0$ et $y_0'(0) = 1$

a. $\Delta = 16 > 0$ $\quad r_1 = -3$ et $r_2 = 1$
D'où la solution générale est $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$ où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.
Les conditions initiales nous amènent au système : $\begin{cases} c_1 e + c_2 e^{-3} = 1 \\ c_1 e - 3c_2 e^{-3} = 1 \end{cases}$
D'où $c_2 = 0$, $c_1 = \dfrac{1}{e}$ et $y_0 = e^{x-1}$

b. $\Delta = 0 \quad r = -2$

D'où la solution générale est $y = (c_1 x + c_2)\, e^{-2x}$ où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

Les conditions initiales nous amènent au système : $\begin{cases} (-c_1 + c_2)e^2 = 1 \\ (3c_1 - 2c_2)e^2 = 2 \end{cases}$

D'où $c_1 = \dfrac{4}{e^2}$, $c_2 = \dfrac{5}{e^2}$ et $y_0 = (4x + 5)e^{-2x-2}$.

c. $\Delta = -16 < 0 \quad r_1 = -1 + 2i$ et $r_2 = -1 - 2i$

D'où la solution générale est $y = e^{-x}\,(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

Les conditions initiales nous amènent au système : $\begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_2 = 1 \end{cases}$

D'où $c_1 = 0$, $c_2 = \dfrac{1}{2}$ et $y_0 = \dfrac{1}{2}e^{-x} \sin 2x$

3.2 Equations avec second membre de type exponentielle-polynôme

Définition

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre de type exponentielle-polynôme toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

(5) $ay'' + by' + cy = f(x)$ où a, b et $c \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ et
f est une somme de fonctions de la forme $Q(x)\, e^{mx}$ où $m \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Remarque

Ce type de fonction *f* comprend les fonctions *f* trigonométriques et les produits de fonctions exponentielles par des fonctions cosinus ou sinus.

Méthode de résolution

De la même façon que les équations linéaires du premier ordre, si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (5) alors $y_1 - y_2$ est solution de l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ (6)

D'où la méthode :

On résout d'abord l'équation (6).
On détermine ensuite une solution particulière y_0 de (5).
Les solutions générales de (5) s'obtiennent en ajoutant les solutions de (6) et la solution particulière trouvée de (5).

Détermination de la solution particulière de (5)

- Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ alors une solution particulière de (5) est $y_0 = y_1 + y_2$ avec
  y_1 une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_1(x)$
  y_2 une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f_2(x)$

- Si $f(x) = Q(x)$ avec Q polynôme de degré n alors une solution particulière de (5) est de la forme
  $y_0 = R(x)$ où R est un polynôme de $\deg R = n$ si $c \neq 0$,
  $\deg R = n + 1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$,
  $\deg R = n + 2$ si $c = 0$ et $b = 0$.
  (Cas particulier du suivant)

- Si $f(x) = Q(x)\, e^{mx}$ avec Q polynôme de degré n alors une solution particulière de (5) est de la forme $y_0 = R(x)\, e^{mx}$ avec deg $R = n$ si m n'est pas racine du polynôme caractéristique.
deg $R = n + 1$ si m est une racine simple du polynôme caractéristique.
deg $R = n + 2$ si m est une racine double du polynôme caractéristique.

Remarque

Si nous avons l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$ avec $f(x) = Q(x)$ alors on peut écrire $f(x) = Q(x)\, e^{0x}$.
$P = aX^2 + bX + c$.
0 n'est pas racine de $P \Rightarrow P(0) \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$.
0 est racine simple de $P \Rightarrow P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0 \Rightarrow c = 0$ et $b \neq 0$.
En posant $t = y'$, on obtient une équation linéaire premier ordre.
0 est racine double de $P \Rightarrow P(0) = 0$ et $P'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ et $b = 0$
L'équation est une équation simplifiée.

Ex : On chercher à résoudre : $y'' - 2y' + 2y = 2\cos x$.
$\Delta = -4 = (2i)^2 \quad r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$.
D'où les solutions de l'équation sans second membre sont $y = e^x(\lambda\cos x + \mu\sin x)$ où $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
$\cos x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ et donc $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$.
On cherche des solutions particulières de $y'' - 2y' + 2y = e^{ix}$ et $y'' - 2y' + 2y = e^{-ix}$.

\# i n'est pas solution de l'équation caractéristique.
On cherche une solution du type $y_1 = k e^{ix}$ $k \in \mathbb{C}$.
On a $y'_1 = ik e^{ix}$
$y''_1 = -k e^{ix}$
$y_1'' - 2y_1' + 2y_1 = (-k - 2ik + 2k)\, e^{ix}$
$= (k - 2ik)\, e^{ix} = e^{ix}$
D'où $k = \dfrac{1}{1 - 2i} = \dfrac{1 + 2i}{5}$.

\# $-i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique.
On cherche une solution du type $y_2 = k e^{-ix}$ $k \in \mathbb{C}$.
On a $y'_2 = -ik e^{-ix}$
$y''_2 = -k e^{-ix}$
$y_2'' - 2y_2' + 2y_2 = (-k + 2ik + 2k)\, e^{-ix}$
$= (k + 2ik)\, e^{-ix} = e^{-ix}$
D'où $k = \dfrac{1}{1 + 2i} = \dfrac{1 - 2i}{5}$.

$$y_1 + y_2 = \frac{1 + 2i}{5} e^{ix} + \frac{1 - 2i}{5} e^{-ix} = \frac{2}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x$$

Les solutions générales sont donc $e^x(\lambda\cos x + \mu\sin x) + \dfrac{2}{5}\cos x - \dfrac{4}{5}\sin x$ où $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.