UPB ANNÉE ACADÉMIQUE 2019-2020
Analyse 1 *Licence 1*

T D 1 :

Exercice 1. *Vrai ou faux ?*

a) *Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*
b) *Si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure M, tout réel inférieur à M appartient à A.*
c) *La somme de deux irrationnels est un irrationnel.*
d) *La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.*
e) *L'ensemble des irrationnels est un intervalle de $\mathbb{R}$.*
f) *Entre deux rationnels distincts, il existe toujours un irrationnel.*
g) *La fonction partie entière est croissante.*
h) *Tout réel possède des approximations rationnelles à 10^{-p} près, quel que soit l'entier p.*

Exercice 2. *Démontrer que pour tous réels x et y :*

a) $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
b) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$

Exercice 3. *Montrer que :*

1. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. *Etudier dans quel cas on a l'égalite.*
2. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leq \sqrt{|a - b|}$

Exercice 4. *On considère la partie de $\mathbb{R}$ suivante :*

$$A = \left\{ \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \quad | \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

Déterminer, s'ils existent, $\sup A$*,* $\inf A$*,* $\min A$*,* $\max A$*.*

Exercice 5.
Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 6.
On suppose que $\sqrt{2}$*,* $\sqrt{3}$ *et* $\sqrt{6}$ *sont irrationnels. Montrer que*

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
2. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 \notin \mathbb{Q}$
3. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$
4. $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 \notin \mathbb{Q}$

On rappelle que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Exercice 7.

1. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad E(x) + E(-x) = 0.$
2. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, \quad E(x) + E(-x) = -1$

Exercice 8 (*Valeurs approchées de racines carrées*)**.**
Soient deux réels strictement positifs $a \leq b$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les deux suites strictement positives définies par :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 = a & et & v_0 = b \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} & et & v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array} \right.$$

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ *(on pourra exprimer* $v_n - u_n$ *sous forme d'une fraction en* u_{n-1} *et* v_{n-1}*).*
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes, puis que leurs limites sont égales.*
3. *À l'aide du produit* $u_n v_n$ *déterminer la valeur de cette limite.*
4. *Application : donner des approximations rationnelles de* $\sqrt{2}$ *et* $\sqrt{3}$.

Exercice 9. *Soit la suite numérique* (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_0 = 2$ *et, pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. a) *Calculer* u_1, u_2, u_3 *et* u_4. *On pourra en donner des valeurs approchées à* 10^{-2} *près.*

   b) *Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.*
2. a) *Démontrer que pour tout entier naturel* n, $u_n \leq n + 3$.

   b) *Démontrer que pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

   c) *En déduire le sens de variation de la suite* (u_n).
3. *On désigne par* (v_n) *la suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $v_n = u_n - n$.

   a) *Démontrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{2}{3}$.

   b) *En déduire que pour tout entier naturel* n, $u_n = 2 \times (\frac{2}{3})^n + n$

   c) *Déterminer la limite de la suite* (u_n).
4. *Pour tout entier naturel non nul* n, *on pose :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + ... + u_n \qquad et \qquad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

   a) *Exprimer* S_n *en fonction de* n.

   b) *Déterminer la limite de la suite* (T_n).

Exercice 10. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$ *et la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

1. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $\frac{-3}{5}$
2. *Exprimer* v_n *en fonction de* n.
3. *Exprimer* u_n *en fonction de* n.
4. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et déterminer sa limite.*