ANALYSE 2

UPB

Table des matières

Notations

Notation	Définition
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
Im	Image d'une application
$\ker$	Noyau d'une application linéaire
$\vert . \vert$	Valeur absolue
$\Vert \cdot \Vert_X$	Application norme sur l'ensemble X
$\oplus$	La somme directe
$\sum$	Symbole de sommation
$\prod$	Symbole du produit
$\circ$	La composition des applications
$\cap$	L'intersection
$\cup$	L'union
$\neq$	La non égalitïé
$\subset$	L'inclusion
$\in$	Appartenance
$\notin$	non Appartenance
$\forall$	Symbole universel "pour tout"
$\exists$	Symbole universel "il existe"
$u^{(k)}$	Dérivée d'ordre k de u définie sur une partie de $\mathbb{R}$
$a \vert b$	a divise b
$E(x) = [x]$	partie enti'ere de x
PGCD	plus grand commun diviseur
$a \wedge b$	$PGCD(a, b)$
PPCM	plus petit commun multiple
$a \vee b$	$PPCM(a, b)$
$a \equiv b[N]$	a est congru à b modulo N
$\overline{a_n ... a_0}^b$	écriture en base b
$n!$	factorielle de n : $n! = 1 \times 2 \times \ ... \ \times n$

C_n^k coefficient binomial : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Chapitre 1

CALCUL INTEGRAL

1.1 Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Définition 1.1.1 (Subdivision d'un segment)**.**

*On appelle **subdivision du segment** $[a, b]$ toute famille $\tau = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ de réels tels que*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

*On appelle **pas** ou **module** de la subdivision τ est donné par $\max\limits_{0\leq i\leq n-1} |x_{i+1} - x_i|$.*
*Une subdivision de $[a, b]$ est **régulière** si tous les $x_{i+1} - x_i$ sont égaux. On a alors pour tout $i \in \{0, ..., n\}$,*

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}.$$

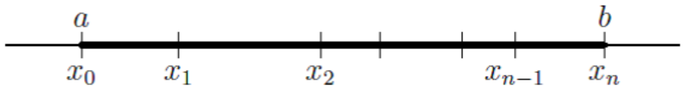
Exemple 1.1.1.

- $\tau = \left(0, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, 1\right)$ *est une subdivision du segment $[0, 1]$. Son pas est*

$$\begin{aligned}
\max_{0\leq i\leq 7} |x_{i+1} - x_i| &= \max\left\{|\frac{1}{8} - 0|, |\frac{1}{5} - \frac{1}{8}|, |\frac{1}{2} - \frac{1}{5}|,\right. \\
&\quad \left.|\frac{3}{5} - \frac{1}{2}|, |\frac{5}{6} - \frac{3}{5}|, |\frac{8}{9} - \frac{5}{6}|, |1 - \frac{8}{9}|\right\} \\
&= \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

- $\tau = \left(0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\right)$ *est une subdivision régulière du segment $[0, 1]$. Son pas est $\frac{1}{8}$.*

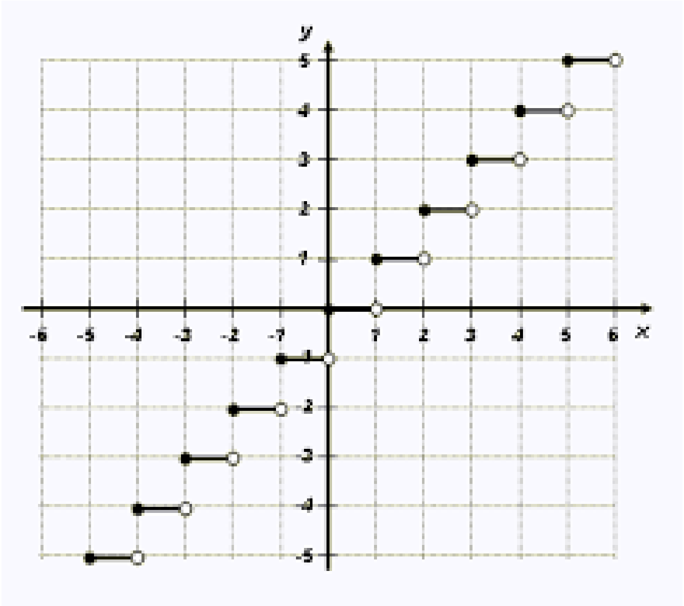
Exemple 1.1.2.



Définition 1.1.2 (Fonction en escalier)**.**

Une fonction f définie dans un intervalle $[a, b]$ est appelée fonction en escalier, s'il existe une subdivision $\tau = (a_0, a_1, ..., a_n)$ de $[a, b]$ telle que f prenne une valeur constante y_i dans chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.

Exemple 1.1.3 (Fonction partie entière)**.**



Définition 1.1.3.

*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur le segment $[a, b]$. S'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < ... < x_n = b$ du segment $[a, b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, c'est-à-dire $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$, $\exists c_k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]x_k, x_{k+1}[$, $f(x) = c_k$, la subdivision τ est dite **subordonnée** ou **adaptée** à la fonction f.*

Définition 1.1.4 (intégrale de Riemann d'une fonction en escalier)**.**

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\tau = (x_0, ..., x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$, on note $c_k = f|_{]x_k, x_{k+1}[}$. On appelle intégrale de Riemann de la fonction f, le réel :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k).$$

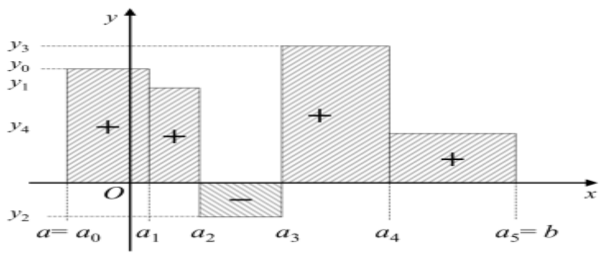
Ce nombre ne dépend pas du choix de la subdivision τ subordonnée à f.

Exemple 1.1.4.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} y_0 & si \quad x \in [a_0, a_1] \\ y_1 & si \quad x \in]a_1, a_2[\\ y_2 & si \quad x \in [a_2, a_3] \\ y_3 & si \quad x \in]a_3, a_4[\\ y_0 & si \quad x \in [a_4, a_5], \end{cases}$$

avec $a_0 = a$ et $a_5 = b$.



On a :

$$\begin{aligned} I(f) = \int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=0}^{4} y_k(a_{k+1} - a_k) \\ &= y_0(a_1 - a_0) + y_1(a_2 - a_1) + y_2(a_3 - a_2) \\ &\quad + y_3(a_4 - a_3) + y_4(a_5 - a_4) \end{aligned}$$

Définition 1.1.5 (Fonction continue par morceaux sur $[a, b]$)**.**

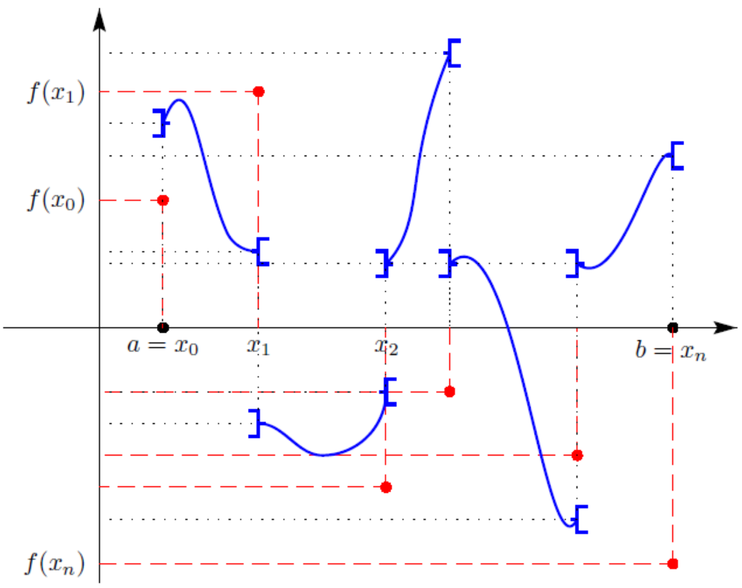
Soit f une fonction définie dans un intervalle $[a, b]$. On dit que f est continue par morceaux, s'il existe une subdivision $\tau = (a_0, a_1, ..., a_n)$ de $[a, b]$ telle que :

1. *La restriction f_i de la fonction f à chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$, $(0 \leq i \leq n-1)$ est continue ;*
2. *Pour $i \in \{0; ...n-1\}$, la fonction f_i possède une limite finie λ_i à droite, et une limite finie μ_i à gauche.*

Définition 1.1.6 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)**.**

On dit qu'une fonction définie sur un intervalle J est continue par morceaux sur J si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de J.

Exemple 1.1.5.



Exemple 1.1.6.

1) *Une fonction en escalier est continue par morceaux.*
2) *Une fonction continue est continue par morceaux.*
3) *La fonction f définie sur [-1,1] par : $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0,\ f(x) = e^{1/x}$ n'est pas continue par morceaux, car elle n'a pas de limite finie à droite en 0.*
4) *La fonction f définie sur [-1,1] par : $f(0) = 0,\ \forall x > 0,\ f(x) = e^x$ et $\forall x < 0,\ f(x) = x^2 + 1$ est continue par morceaux.*

Proposition 1.1.1.

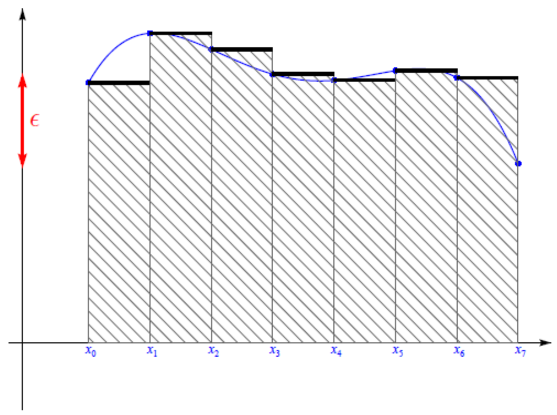
Une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

Théorème 1.1.1 (Approximation d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier)**.**

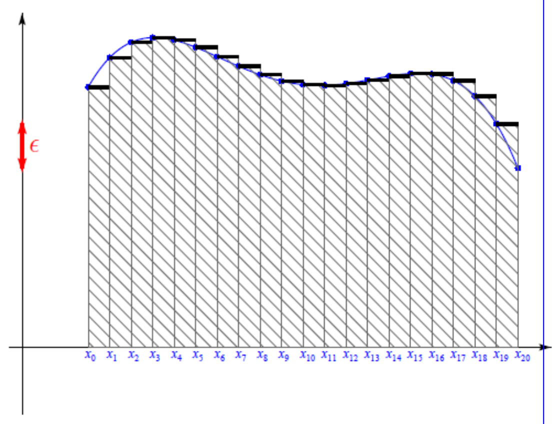
Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemple 1.1.7.



– Une approximation grossière avec ε assez grand



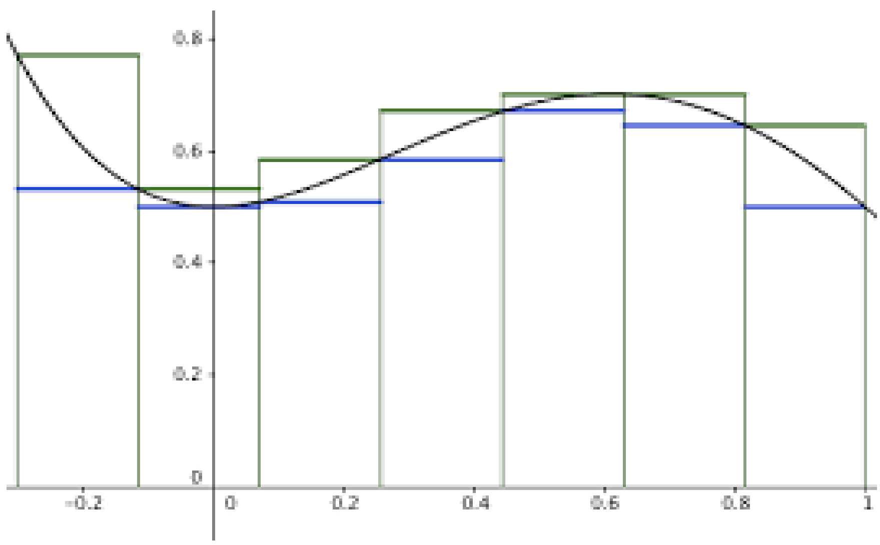
– Une approximation plus fine avec ε plus petit

Corollaire 1.1.1 (Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier)**.**

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,b]$ telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b];\ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \\ \forall x \in [a,b];\ 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Exemple 1.1.8.



Notation 1.1.1. *Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, on note :*

$$\mathcal{A}(f) = \Big\{\varphi \mid \varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } \varphi \leq f\Big\}$$

$$\mathcal{B}(f) = \Big\{\psi \mid \psi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } \psi \geq f\Big\}.$$

Proposition 1.1.2 (Intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux)**.**

Soit une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a,b]$. On considère les ensembles

$$I^-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } \varphi \leq f \right\}$$

$$I^+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(x)dx \mid \psi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } \psi \geq f \right\}.$$

On a les propriétés suivantes,

— I^- *admet une borne supérieure.*

— $I^+(f)$ *admet une borne inférieure.*

— $\sup I^-(f) = \inf I^+(f)$.

Définition 1.1.7.

On définit l'intégrale de Riemann de la fonction continue par morceaux f sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f(x)dx = \sup I^-(f) = \inf I^+(f).$$

Notation 1.1.2. *Soit f une fonction continue par morceaux sur J. Soit $(a,b) \in J^2$. On note*

1 *Si* $a \leq b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f$

2 *Si* $b \leq a$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_{[a,b]} f$

3 *Si* $a = b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0.$

Propriété 1.1.1.

(P1) *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$,*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

(P2) ***(Linéarité)***

Pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

(P3) **(Intégrale d'une fonction continue par morceaux positive)**
Si f est une fonction continue par morceaux positive sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

(P4) Une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$ est nulle si, et seulement si, son intégrale sur $[a, b]$ est nulle.

(P5) **(Majoration d'intégrales)**
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$.

a Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

b Si $\exists m, M \in \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a);$$

c f est bornée et

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|;$$

d On a **l'inégalité de la moyenne** :

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |g(x)|dx;$$

e On a **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}\sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx};$$

(P6) **(Relation de Chasles)**
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, si $a < c < b$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Théorème 1.1.2 (Valeur moyenne d'une fonction).

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\mu = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Le nombre μ est appelé valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

1.2 Primitives et intégrales

1.2.1 Primitives

Définition 1.2.1 (Primitives)**.**

Soit un intervalle I et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si

1. *la fonction F est dérivable sur l'intervalle I ;*
2. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Proposition 1.2.1.

Deux primitives de f sur I sont égales à une constante près.

1.2.2 Primitives usuelles

Dans ce tableau ci-dessous, pour chaque fonction f, nous donnons une primitive $\displaystyle\int f$. Le lecteur précisera l'intervalle ou les intervalles sur lequel ou lesquels f est continue.

$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, \displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\vert x\vert$
$\displaystyle\int e^x dx = e^x$	$\displaystyle\int \ln x dx = x\ln x - x$
$\displaystyle\int \cos x dx = \sin x$	$\displaystyle\int \sin x = -\cos x$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotan} x$
$\displaystyle\int \tan x dx = -\ln\vert\cos x\vert$	$\displaystyle\int \operatorname{cotan} x dx = \ln\vert\sin x\vert$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\vert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\vert$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\vert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\vert$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \ln\vert\tan x\vert$	$\displaystyle\int \tan^2 x dx = \tan x - x$
$\displaystyle\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$	$\displaystyle\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \coth x$
$\displaystyle\int \operatorname{th} x dx = \ln\operatorname{ch} x$	$\displaystyle\int \coth x dx = \ln\vert\operatorname{sh} x\vert$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln\left\vert\operatorname{th}\frac{x}{2}\right\vert$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\arctan e^x$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x} = \ln\vert\operatorname{th} x\vert$	$\displaystyle\int \operatorname{th}^2 x = x - \operatorname{th} x$

$a \neq 0, \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$	$a > 0, \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} = -\arccos\frac{x}{a}$
$a \neq 0, \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\vert\frac{x-a}{x+a}\right\vert$	$a \neq 0, \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\vert x+\sqrt{x^2+a}\vert$
$\alpha \neq 0 \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{3/2}} = \frac{x}{\alpha\sqrt{x^2+\alpha}}$	$\alpha > 0, \displaystyle\int \frac{dx}{(\alpha-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\alpha\sqrt{\alpha-x^2}}$

$I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ Formule de récurrence $2nI_{n+1} = \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n$	
$J_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^n}$ Formule de récurrence $2nJ_{n+1} = \dfrac{x}{(1-x^2)^n} + (2n-1)J_n$	

1.2.3 Relation primitive-intégrale

Théorème 1.2.1.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction

$$\begin{array}{rcl} F : [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$$

est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a. Par conséquent pour une primitive F quelconque de f :

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

Corollaire 1.2.1 (Théorème fondamental deuxième forme)**.**

Soit une fonction f de classe C^1 sur le segment $[a, b]$. Alors la formule suivante relie f et sa dérivée par une intégrale. Pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Théorème 1.2.2 (Dérivée d'une fonction définie par une intégrale)**.**

Soit une fonction f continue sur un intervalle I. Soient $u, v : J \to I$ deux fonctions dérivables sur l'intervalle J. Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} G : J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \end{array}$$

est dérivable sur l'intervalle J et

$$\forall x \in J, \quad G'(x) = v'(x)f[v(x)] - u'(x)f[u(x)].$$

Exemple 1.2.1.

Étudions les variations de la fonction

$$\begin{array}{rcl} g :]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t^2 - 1} \end{array}$$

La fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$. Notons $J =]1, +\infty[$ et définissons les fonctions

$$\begin{array}{rcl} u : J & \to & I \\ x & \mapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} v : J & \to & I \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2 - 1} \end{array}$$

Les fonctions u, v sont dérivables de J vers I et la fonction f est continue sur l'intervalle I. D'après le théorème précédent, g est dérivable sur l'intervalle J et pour $x \in J$,

$$g'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = -\frac{x^2 - 2x + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

Le trinôme $-(x^2 - 2x + 1)$ est strictement négatif sur I. On en déduit que g est strctement décroissante sur $I =]1, +\infty[$.

1.2.4 Méthodes de Calcul de primitives et d'intégrales

Théorème 1.2.3 (Changement de variables)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ une fonction de classe C^1 sur le segment $[\alpha, \beta]$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Exemple 1.2.2.

Calculons la primitive $F = \displaystyle\int \tan t \; dt$.

$$F = \int \tan t \; dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \; dt \; .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln |u|$.
Donc $F = \displaystyle\int -\frac{u'}{u} = -\big[\ln |u|\big] = -\ln |u| + c = -\ln |\cos t| + c$.

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, donc

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \; dt$$

Si f désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est bijective tant que $x \neq 0$; alors $F = -\displaystyle\int \varphi'(t) f(\varphi(t)) \; dt$. En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x) \; dx = -\int \frac{1}{x} \; dx = -\ln |x| + c \; .$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln |\cos t| + c$.
Remarque : pour que l'intégrale soit bien définie il faut que $\tan t$ soit définie, donc $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$. La restriction d'une primitive à un intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ est donc de la forme $-\ln |\cos t| + c$. Mais la constante c peut être différente sur un intervalle différent.

Exemple 1.2.3.

Calcul de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.
Soit le changement de variable $u = \varphi(x) = 1 - x^2$. *Alors* $du = \varphi'(x)\ dx = -2x\ dx$. *Pour* $x = 0$ *on a* $u = \varphi(0) = 1$ *et pour* $x = \dfrac{1}{2}$ *on a* $u = \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. *Comme* $\varphi'(x) = -2x$, φ *est une bijection de* $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ *sur* $\left[1, \dfrac{3}{4}\right]$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{x\ dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-3/2}\ du \\
&= -\frac{1}{2}\big[-2u^{-1/2}\big]_1^{3/4} = \big[\frac{1}{\sqrt{u}}\big]_1^{3/4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.4.

Calcul de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.
On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \sin t$ *et* $dx = \cos t\ dt$. *De plus* $t = \arcsin x$ *donc pour* $x = 0$ *on a* $t = \arcsin(0) = 0$ *et pour* $x = \dfrac{1}{2}$ *on a* $t = \arcsin(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{6}$. *Comme* φ *est une bijection de* $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ *sur* $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t\ dt}{(1-\sin^2 t)^{3/2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t\ dt}{(\cos^2 t)^{3/2}} \\
&= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\cos^3 t}\ dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 t}\ dt \\
&= \big[\tan t\big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ .
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.5.

Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$

Soit le changement de variable $x = \tan t$ *donc* $t = \arctan x$ *et* $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$ *(la fonction tangente établit une bijection de* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$*). Donc*

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \int \frac{1}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}\,\frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \int (\cos^2 t)^{3/2}\,\frac{dt}{\cos^2 t} \qquad \textit{car } 1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \\ &= \int \cos t\,dt = \big[\sin t\big] = \sin t + c = \sin(\arctan x) + c. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \sin(\arctan x) + c.$$

En manipulant un peu les fonctions on trouverait que la primitive s'écrit aussi $F(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c.$

Théorème 1.2.4 (Intégration par parties)**.**

Soient deux fonctions $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *sur le segment* $[a,b]$*. Alors*

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

Remarque 1.2.1.

Cette relation est souvent utilisé pour diminuer successivement le degré d'un polynôme $g(x)$ *qui multiplie une fonction* $f'(x)$ *que l'on sait intégrer.*
Elle sert aussi pour l'intégration des expressions faisant intervenir les fonctions trigonometriques, où l'on retombe sur la fonction d'origine après deux intégrations.

Remarque 1.2.2 (Cas classiques d'utilisation)**.**

P *etant un polynôrne et* $\alpha \neq 0$,

- *pour* $\displaystyle\int_a^b P(t)\sin(\alpha t+\beta)dt$, *on pose* $v(t) = P(t)$ *et* $u'(t) = \sin(\alpha t+\beta)$.
- *pour* $\displaystyle\int_a^b P(t)\cos(\alpha t+\beta)dt$, *on pose* $v(t) = P(t)$ *et* $u'(t) = \cos(\alpha t+\beta)$
- *pour* $\displaystyle\int_a^b P(t)e^{\alpha t+\beta}dt$, *on pose* $v(t) = P(t)$ *et* $u'(t) = e^{\alpha t+\beta}$;
- *pour* $\displaystyle\int_a^b P(t)\ln t\,dt$, *on pose* $v(t) = \ln t$ *et* $u'(t) = P(t)$.

Exemple 1.2.6.

1 *Calcul de* $\int_0^1 xe^x \, dx$. *On pose* $u(x) = x$ *et* $v'(x) = e^x$. *Nous aurons besoin de savoir que* $u'(x) = 1$ *et qu'une primitive de* v' *est simplement* $v(x) = e^x$. *La formule d'intégration par parties donne :*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x \, dx &= \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\
&= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx \\
&= \big[xe^x\big]_0^1 \; - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\
&= \big(1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0\big) - \big[e^x\big]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2 *Calcul de* $\int_1^e x \ln x \, dx$.

On pose cette fois $u = \ln x$ *et* $v' = x$. *Ainsi* $u' = \dfrac{1}{x}$ *et* $v = \dfrac{x^2}{2}$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x \cdot x \, dx &= \int_1^e uv' = \big[uv\big]_1^e - \int_1^e u'v \\
&= \big[\ln x \cdot \tfrac{x^2}{2}\big]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{x}\tfrac{x^2}{2} \, dx \\
&= \big(\ln e \tfrac{e^2}{2} - \ln 1 \tfrac{1^2}{2}\big) - \tfrac{1}{2}\int_1^e x \, dx \\
&= \tfrac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_1^e = \tfrac{e^2}{2} - \tfrac{e^2}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

3 *Calcul de* $\int \arcsin x \, dx$.

Pour déterminer une primitive de $\arcsin x$, *nous faisons artificiellement apparaître un produit en écrivant* $\arcsin x = 1 \cdot \arcsin x$ *pour appliquer la formule d'intégration par parties. On pose* $u = \arcsin x$, $v' = 1$ *(et donc* $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et* $v = x$*) alors*

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot \arcsin x \, dx &= \big[x \arcsin x\big] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \big[x \arcsin x\big] - \big[-\sqrt{1-x^2}\big] \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}$$

4 *Calcul de* $\int x^2 e^x \, dx$. *On pose* $u = x^2$ *et* $v' = e^x$ *pour obtenir :*

$$\int x^2 e^x \, dx = \big[x^2 e^x\big] - 2\int xe^x \, dx$$

On refait une deuxième intégration par parties pour calculer

$$\int xe^x\,dx = \left[xe^x\right] - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c$$

D'où

$$\int x^2e^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x + c.$$

.

Proposition 1.2.2 (Intégrale d'une fonction paire ou impaire).

Soit $a>0$ et f une fonction continue par morceaux sur le segment $[-a,a]$.

— *Si f est paire, alors* $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx.$

En particulier $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

— *Si f est impaire, alors* $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx.$

En particulier $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

1.2.5 Sommes de Riemann

L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Mais maintenant que nous savons calculer des intégrales sans utiliser ces sommes on peut faire le cheminement inverse : calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Théorème 1.2.5.

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(a+k\frac{b-a}{n}\big) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Définition 1.2.2.

*La somme S_n s'appelle la **somme de Riemann** associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$ en n petits intervalles. La hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite.*

Remarque 1.2.3.

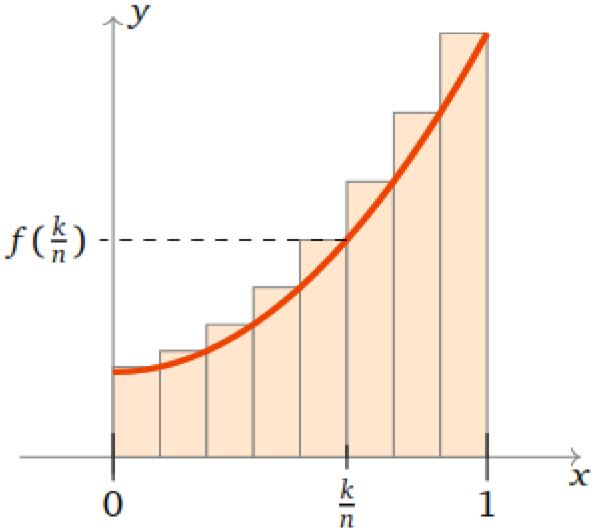
Le cas le plus utile est le cas où $a=0$, $b=1$ alors $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}$ et $f\big(a+k\dfrac{b-a}{n}\big) = f\big(\dfrac{k}{n}\big)$ et ainsi

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Remarque 1.2.4.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors

$$S'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$



Exemple 1.2.7.

Calculer la limite de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

On a $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}, \ldots$

La somme S_n s'écrit aussi $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. En posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. Donc

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \left[\ln|1+x|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ainsi $S_n \to \ln 2$ (lorsque $n \to +\infty$).

1.3 Calcul de primitives

1.3.1 Primitives de fonctions rationnelles

Soit F une fonction rationnelle $F(X) \in \mathbb{R}[X]$. On cherche une primitive de F c'est-à-dire $\int F(X)dX$.

A) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$

$$\begin{array}{ll} si \quad n=1, \quad alors & \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| \\ si \quad n \geq 2, \quad alors & \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} \end{array}$$

B) $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$ **avec** $p^2-4q<0$

∘ si $n=1$, alors

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \\ & (b-\frac{ap}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}} \\ &= \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q) + \\ & \frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) \end{aligned}$$

∘ si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} & \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx \\ &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + (b-\frac{ap}{2})\int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}]^n} \\ &= \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \\ & (b-\frac{ap}{2})(\frac{4}{4q-p^2})^n \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1\right]^n} \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, le changement de variable défini par $t = \dfrac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$ ramène alors au calcul de $\displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

C) Exemples

Exemple 1.3.1.

Déterminons une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}$

1) *La fonction* f *est continue sur* $]-\infty,-1[$ *et* $]-1,+\infty[$. *Les calculs effectués concernent l'un ou l'autre de ces deux intervalles.*
2) *La décomposition en éléments simples de* f *donne*

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

3) *Soit* F *une primitive de* f *sur* $]-\infty,-1[$ *ou* $]-1,+\infty[$. *Il vient alors que*

$$F(x) = x - \frac{3}{2}\ln(|x+1|) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1).$$

Exemple 1.3.2.

Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$*. Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type* $\dfrac{u'}{u}$ *(que l'on sait intégrer en* $\ln|u|$*).*

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2+x+1}$$

On peut intégrer la fraction $\dfrac{4x+1}{2x^2+x+1}$ *:*

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln\left|2x^2+x+1\right| + c$$

Occupons nous de l'autre partie $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$*, nous allons l'écrire sous la forme* $\dfrac{1}{u^2+1}$ *(dont une primitive est* $\arctan u$*).*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x^2+x+1} &= \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}} \\ &= \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{\frac{8}{7}2(x+\frac{1}{4})^2 + 1} = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1}\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $u = \dfrac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})$ *(et donc* $du = \dfrac{4}{\sqrt{7}}dx$*) pour trouver*

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2x^2+x+1} &= \int \frac{8}{7} \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1} = \frac{8}{7} \int \frac{du}{u^2+1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan u + c \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right) + c\,.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right) + c.$$

1.3.2 Fonction Circulaire

Soit $F(X,Y)$ une fonction rationnelle. On cherche une primitive de la fonction f définie par $f(x) = F(\cos x, \sin x)$.

A) F est un polynôme

Par linéarité de l'intégrale, on est ramené au calcul de primitive de la forme :

$$I_{n,m} = \int \cos^n x \sin^m x dx$$

où m et n sont des entiers naturels

1) m ou n est impair
   — $n = 2p+1$, avec $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1,m} = \displaystyle\int (1-\sin^2 x)^p \sin^m x(\cos x)dx$.
   Le changement de variable $t = \sin x$ ramène au calcul de $\displaystyle\int (1-t^2)^p t^m dt$
   — $m = 2q+1$, avec $q \in \mathbb{N}$: $I_{n,2q+1} = \displaystyle\int \cos^n x(1-\cos^2 x)^q(\sin x)dx$.
   Le changement de variable $t = \cos x$ ramène au calcul de $-\displaystyle\int (1-t^2)^q t^n dt$
2) m et n sont pairs
   Si p et q sont trop grands pour que la linéarisation soit aisée, on se ramène au calcul de $\int \cos^{2(p+q)} xdx$ au moyen d'une relation de récurrence. En effet, en intégrant par partie, on a :

$$\begin{aligned} I_{2p,2q} &= \int \sin^{2q-1} x(\cos^{2p} x \sin x)dx \\ &= -\frac{1}{2p+1}\cos^{2p+1} x \sin^{2q-1} x + \\ &\quad \frac{2q-1}{2p+1}\int \cos^{2p+2} x \sin^{2q-2} xdx \\ &= -\frac{1}{2p+1}\cos^{2p+1} x \sin^{2q-1} x + \frac{2q-1}{2p+1} I_{2p+2,2q-2} \end{aligned}$$

ou, de même $I_{2p,2q} = \dfrac{1}{2q+1}\cos^{2p-1} x \sin^{2q+1} x + \dfrac{2p-1}{2q+1} I_{2p-2,2q+2}$

B) Règles de Bioche

Règle 1.3.1.

On étudie si $f(x)dx$ est invariant quand on remplace x par $-x$ ou par $\pi - x$ ou par $\pi + x$.

a) *si $f(x)dx$ est invariant quand on remplace x par $-x$, le chagement de variable défini par $x = \arccos t$, donc $t = \cos x$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t.*

b) *si $f(x)dx$ est invariant quand on remplace x par $\pi - x$, le chagement de variable défini par $x = \arcsin t$, donc $t = \sin x$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t.*

c) *si $f(x)dx$ est invariant quand on remplace x par $\pi + x$, le chagement de variable défini par $x = \arctan t$, donc $t = \tan x$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t.*

Règle 1.3.2.

Si deux au moins des changements a) ou b) ou c) laissent invariant $f(x)dx$, le chagement de variable défini par $x = \frac{1}{2}\arccos t$ donc $t = \cos 2x$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t.

Règle 1.3.3.

Dans tous les cas, le changement de variable $x = 2\arctan t$ donc $t = \tan\frac{x}{2}$, ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t.

Remarque 1.3.1.

Pour avoir les calculs les plus simples possibles, il faut utiliser ces règles dans l'ordre préférentiel 1.3.2, puis 1.3.1 puis 1.3.3.

Remarque 1.3.2.

Le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$.

Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan\dfrac{x}{2}$.

Avec $t = \tan\dfrac{x}{2}$ *on a*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

et $$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

C) Exemples

Exemple 1.3.3.

Déterminons une primitive de $f : x \mapsto \sin^5(x)$
$\sin^5(x) = (1 - \cos^2(x))^2 \sin(x)$ *donne avec le changement de variable défini par* $t = \cos(x)$ *:*

$$\int \sin^5(x)dx = -\int (1-t^2)^2 dt = -\int (t^4 - 2t^2 + 1)dt.$$

Soit F *une primitive de* f *sur* $\mathbb{R}$*. On obtient alors* $F(x) = -\frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{2}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$.

Exemple 1.3.4.

Déterminons $\int \cos^4(x)\sin^2(x)dx$
On a $\cos^4(x)\sin^2(x) = \cos^4(x) - \cos^6(x)$*. En utilisant les formules d'Euler, on a*

$$\cos^4(x) = \frac{1}{2^4}(e^{ix} + e^{-ix})^4 = \frac{1}{2^3}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$$

$$\cos^6(x) = \frac{1}{2^6}(e^{ix} + e^{-ix})^6 = \frac{1}{2^5}(\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10).$$

Ainsi $\cos^4(x) - \cos^6(x) = -\frac{1}{32}\cos(6x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{32}\cos(2x) + \frac{1}{16}$*. Par suite,*

$$\int \cos^4(x)\sin^2(x)dx = -\frac{1}{192}\sin(6x) - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{64}\sin(2x) + \frac{1}{16}x.$$

Exemple 1.3.5.

Calcul de la primitive $\int \frac{\cos x \; dx}{2 - \cos^2 x}$
On note $\omega(x) = \frac{\cos x \; dx}{2 - \cos^2 x}$*. Comme*

$$\omega(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)\; d(\pi - x)}{2 - \cos^2(\pi - x)} = \frac{(-\cos x)\;(-dx)}{2 - \cos^2 x} = \omega(x)$$

alors le changement de variable qui convient est $u = \sin x$ *pour lequel* $du = \cos x \; dx$*. Ainsi :*

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x \; dx}{2 - \cos^2 x} &= \int \frac{\cos x \; dx}{2 - (1 - \sin^2 x)} \\ &= \int \frac{du}{1 + u^2} = [\arctan u] \\ &= \arctan(\sin x) + c\;. \end{aligned}$$

Exemple 1.3.6.

Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}$.
Le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$ *définit une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ *vers* $[-1, 0]$ *(pour* $x = -\dfrac{\pi}{2}$*,* $t = -1$ *et pour* $x = 0$*,* $t = 0$*). De plus on a* $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ *et* $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x} &= \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2-2t} \\ &= 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1-t)^2} = 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 2\big(1-\frac{1}{2}\big) = 1\end{aligned}$$

1.3.3 Fonction hyperboliques

Soit $F(X, Y)$ une fraction rationnelle. On cherche une primitive de la fonction f définie par $f(x) = F(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$.
Chacune des règles suivantes donne un changement de variable qui ramène le calcul de $\int f(x)dx$ à celui d'une primitive de fonction rationnelle.

Règle 1.3.4.

On examine $F(\cos x, \sin x)$ *et quel changement de variable permet, le plus efficacement possible (voir les priorités annoncées pour les règle de Bioche) de se ramener à une primitive de fonction rationnelle.*

a) Si $\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ *se calcule avec* $t = \cos(x)$*, alors* $\int F(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))dx$ *se calcule avec* $t = \operatorname{ch}(x)$.

b) Si $\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ *se calcule avec* $t = \sin(x)$*, alors* $\int F(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))dx$ *se calcule avec* $t = \operatorname{sh}(x)$.

c) Si $\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ *se calcule avec* $t = \tan(x)$*, alors* $\int F(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))dx$ *se calcule avec* $t = (x)$.

d) Si $\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ *se calcule avec* $t = \cos(2x)$*, alors* $\int F(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))dx$ *se calcule avec* $t = \operatorname{ch}(2x)$.

Règle 1.3.5.

Dans les autres cas, on peut utiliser le changement de variable défini par $t = \operatorname{th}(\dfrac{x}{2})$*, mais la il est en général préférable d'utiliser* $t = e^x$.

Exemples

Exemple 1.3.7.

Calculer $F(x) = \int \frac{\operatorname{sh}^3(x)}{\operatorname{ch}(x)(2+\operatorname{sh}^2(x))}dx$. *En notant* $\omega(x) = \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)(2+\sin^2(x))}$, *on a* $\omega(-x) = \omega(x)$, $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ *et* $\omega(\pi + x) = \omega(x)$. *On peut utiliser plusieurs changements de variables :*

1. $t = \operatorname{sh}(x)$ *donne* $G(t) = \int \frac{t^3}{(1+t^2)(2+t^2)}dt.$
2. $t = \operatorname{ch}(x)$ *donne* $G(t) = \int \frac{t^2-1}{t(1+t^2)}dt.$
3. $t = \operatorname{th}(x)$ *donne* $G(t) = \int \frac{t^3}{2-t^2}dt.$
4. $t = e^x$ *donne* $G(t) = \int \frac{(t^2-1)^3}{t(t^2+1)(t^4+6t^2+1)}dt.$

Les fractions rationnelles à primitiver ne sont pas toutes agréables ! Le mieux ici est d'utiliser le changement de variables $t = (x)$ *pour calculer*

$$G(t) = \frac{t^2}{2} - \ln|t^2 - 2|$$

puis

$$F(x) = -\frac{\operatorname{th}^2(x)}{2} - \ln(2 - \operatorname{th}^2(x)) + C.$$

Exemple 1.3.8.

Calculer $\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{5\operatorname{sh}(x) - 4\operatorname{ch}(x)}dx.$
$5\operatorname{sh}(x) - 4\operatorname{ch}(x) = 0$ *lorsque* $5(e^x - e^{-x}) - 4(e^x + e^{-x}) = 0$ *c'est-à-dire* $e^x - 9e^{-x} = 0$ *ou encore* $e^{2x} = 9$, *soit enfin* $x = \ln(3)$.
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{5\operatorname{sh}(x) - 4\operatorname{ch}(x)}$ *est donc continue sur* $[0, \ln(2)]$.
Nous utilisons le changement de variable $t \mapsto e^t$, *bijectif de* $[0, \ln(2)]$ *sur* $[1, 2]$. *Il vient alors*

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{5\operatorname{sh}(x) - 4\operatorname{ch}(x)}dx = 2\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^x - 9e^{-x}}dx = 2\int_1^2 \frac{dt}{t^2-9},$$

et donc

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{5\operatorname{sh}(x) - 4\operatorname{ch}(x)}dx = \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ln(\frac{2}{5}).$$

1.3.4 Intégrale Abélien

Soit $F(X, Y)$ une fraction rationnelle. L'objectif de cette partie est de calculer une primitive d'une fonction f de l'une des formes suivantes :

1 $f(x) = F\Big(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\Big)$

2 $f(x) = F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

A) $\displaystyle\int F\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)dx$, $\qquad ad - bc \neq 0$

Règle 1.3.6.

Le changement de variable défini par

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

ramène le calcul de $\displaystyle\int F\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)dx$ *à celui d'une primitive de fonction rationnelle en* t*. Avec*

$$x = \frac{-dt^n + b}{ct^n - a} \quad et \quad dx = n\frac{ad-bc}{(ct^n-a)^2}t^{n-1}dt.$$

B) $\displaystyle\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad a \neq 0 \qquad b^2 - 4ac \neq 0$

On posera $b^2 - 4ac \neq 0$ sinon $ax^2 + bx + c$ admet une racine double α. Alors
— Pour $a > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|$.
— Pour $a < 0$, l'ensemble de définition est réduit à un point.

1) Se ramener à une primitive de fonction rationnelle

Règle 1.3.7.

Avec $a > 0$*, le calcul de* $\displaystyle\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ *se ramène à celui d'une primitive de fonction rationnelle au moyen du changement de variable défini par*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t.$$

On a alors

$$x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} \quad et \quad dx = \frac{-2t^2\sqrt{a} + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}dt.$$

Règle 1.3.8.

Avec $\triangle > 0$*, le polynôme* ax^2+bx+c *admet des racines* α *et* β*, avec* $\alpha \neq \beta$*. En écrivant*

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = |x-\alpha|\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}},$$

on est face à une primitive de fonction rationnelle de x *et de* $\sqrt{a\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}}$.

2) Se ramener à une primitive de fonction rationnelle de fonctions circulaires ou hyperboliques

Règle 1.3.9.

Avec $a > 0$ *et* $\triangle > 0$, *en écrivant* $ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\triangle}{4a^2}\right]$, *le changement de variable défini par* $t \geq 0$, $\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\cosh(t)$ *ramène au calcul d'une primitive de fonction rationnelle de fonctions hyperboliques.*

Règle 1.3.10.

Avec $a > 0$ *et* $\triangle < 0$, *en écrivant* $ax^2+bx+c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-\triangle}{4a^2}\right]$, *le changement de variable défini par* $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{-\triangle}}{2a}\sinh(t)$ *ramène au calcul d'une primitive de fonction rationnelle de fonctions hyperboliques.*

Règle 1.3.11.

Avec $a < 0$ *et* $\triangle > 0$, *en écrivant* $ax^2 + bx + c = (-a)\left[\frac{\triangle}{4a^2} - (x + \frac{b}{2a})^2\right]$, *le changement de variable défini par* $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\sin(t)$ *ramène au calcul d'une primitive de fonction rationnelle de fonctions trigonométriques.*

C) Exemples

Exemple 1.3.9.

Calculer $F(x) = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{x}$ *sur l'intervalle* $I =]0,1[$. *On effectue le changement de variables*

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad x = \frac{y^2-1}{y^2+1} \qquad dx = \frac{4y}{(y^2+1)^2}dy$$

et on se ramène à calculer la primitive

$$G(y) = 4\int \frac{y^2}{(y^2-1)(y^2+1)}dy.$$

La décomposition de la fraction rationnelle s'écrit

$$4\int \frac{x^2dx}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1/4}{x-1} - \frac{1/4}{x+1} + \frac{1/2}{x^2+1},$$

et on trouve que $G(y) = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + 2\arctan(y)$. *Après simplifications :*

$$F(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

On peut utiliser ensuite les quantités conjuguées pour écrire

$$F(x) = \ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Exemple 1.3.10.

Calculer $F(x) = \int \sqrt{x^2+x+1}dx$. *On réduit le trinôme à l'intérieur de la racine :*

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}]^2+1}$$

et par le premier changement de variables $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, *on se ramène au calcul de* $G(y) = \frac{3}{4}\int \sqrt{y^2+1}dy$. *Ensuite, avec la changement de variables* $y = \mathrm{sh}(z)$, $dy = \mathrm{ch}(z)dz$, *on se ramène à*

$$H(z) = \frac{3}{4}\int \mathrm{ch}(z)dz.$$

Il suffit de linéariser $\mathrm{ch}^2(z) = \frac{\mathrm{ch}(2z)+1}{2}$ *pour calculer*

$$H(z) = \frac{3}{16}\,\mathrm{sh}(2z) + \frac{3}{8}z$$

$$G(y) = \frac{3}{8}\Big(y\sqrt{1+y^2} + \mathrm{argsh}(y)\Big)$$

$$F(x) = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{4} + \frac{3}{8}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}) + C.$$

Chapitre 2

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

2.1 Introduction

Les équations différentielles ordinaires se rencontrent dans tous les domaines de la physique (électricité, mécanique, thermique...). C'est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. **La fonction inconnue ne dépend que d'une seule variable, par exemple** $f(x)$. Nous allons présenter quelques exemples :

— **En mécanique**
L'application des principes et théorèmes généraux conduit dans la pluspart des cas à une équation différentielle dont les solutions permettent d'établir la nature du mouvement ; c'est en particulier le cas des oscillateurs harmoniques que leurs oscillations soient libres, amorties ou entretenues.

— **En électricité**
Elles intervient dans :
  — l'étude des circuits en régime transitoire ou soumis à des oscillations entretenues ;
  — la propagation d'une onde de courant le long d'une ligne électrique ;
  — les circuits oscillants couplés
  — les phénomènes d'induction électromagnétique et l'électromécanique.

— **En thermodynamique**
Elles permettent d'établir des expressions caractérisant l'état d'un fluide. On les rencontre également dans les problèmes de propagation de la chaleur dans une barre ou un milieu conducteur.

- **En Economie**
  Elles intervient :
  - En macro-économie, les équations linéaires d'ordre 1 (et aussi 2) permettent de décrire le principe de I'accélérateur et du multiplicateur dynamiques continus. Ces modèles économiques traitent et lient l'investissement et la consommation.
  - En économie, l'effet multiplicateur décrit pour un systeme donne, la constatation qu'une variation initiale d'un élément a l' entrée (du systeme) provoque par le biais d' entrainements successifs, une variation finale en sortie du système plus importante d'un ou plusieurs autres éléments ; à titre d'exemple, la variation d'un montant d'une dépense peut avoir un effet multiplicateur sur le revenu national ou l'activité économique en génerale. L'effet d'accélérateur reposera quant à lui ;sur l'effet d'entrainement réciproque entre la croissance de la demande et celle de l 'investissement productif. Les deux effets cumulés permettent d'analyser le cycle economique plus globalement.

2.2 Définitions

Définition 2.2.1.

Une équation différentielle est une relation du type

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), ..., u^{(n)}(x)) = 0,$$

entre la variable $x \in \mathbb{R}$ et les dérivées de la fonction inconnue u au point x. La fonction F est une fonction de plusieurs variables $(x, y) \mapsto F(x, y)$ où x est dans $\mathbb{R}$ (ou parfois dans un intervalle de $\mathbb{R}$) et $y = (y_0, ..., y_n)$ est dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 2.2.2.

[Solution.] On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction y définie sur cet intervalle I, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I. On notera en général cette solution $(y; I)$.
Si I contient sa borne inférieure α, (resp. sa borne supérieure β), ce sont des dérivées à droite (resp. à gauche) qui interviennent au point $t = \alpha$ (resp. $t = \beta$). Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Définition 2.2.3.

Soient $(y; I)$ et $(y_1; I_1)$ deux solutions d'une même équation différentielle. On dit que $(y_1; I_1)$ est un prolongement de $(y; I)$ si et seulement si $I \subset I_1$ et $y_1 |_I = y$.

Définition 2.2.4.

[Solution maximale, solution globale.] Soient I_1 et I_2, deux intervalles sur $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \subset I_2$. On dit qu'une solution $(y; I_1)$ est maximale dans I_2 si et seulement si $(y; I_1)$ n'admet pas de prolongement $(\widetilde{y}; \widetilde{I})$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subset \widetilde{I} \subset I_2$. On dit qu'une solution $(y; I_1)$ est globale dans I_2 si et seulement si $(y; I_1)$ admet un prolongement $(\widetilde{y}; I_2)$ solution.

2.3 Equations à variables séparables du premier ordre

Définition 2.3.1.

On appelle équation différentielle à variables séparables une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$y'(x) = g(x)h(y(x)).$$

Ici on va supposer que g est continue sur un intervalle I, et h est continue sur un intervalle J.

Proposition 2.3.1.

Si $h(a) = 0$, alors $y(x) = a$ est une solution constante.

Proposition 2.3.2.

On suppose que h ne s'annulle pas sur J. Si W est une primitive de $\frac{1}{h}$, et si G est une primitive de g, alors l'équation $y'(x) = g(x)h(y(x))$, $x \in I$ et $y \in J$ est équivalente à

$$W(y(x)) = G(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.3.1.

si la fonction W admet une fonction réciproque, on pourra exprimer y comme fonction de x.

Exemple 2.3.1.

Considérons l'équation

$$y'(x) = \frac{2y(x)}{x}, \qquad x > 0. \tag{2.1}$$

Nous avons

$$g(x) = \frac{2}{x} \qquad \text{et} \qquad h(x) = x.$$

Comme $h(0) = 0$, (2.1) admet la solution $y(x) = 0$.

$W(x) = \ln|x|$ est une primitive de $\frac{1}{h(x)}$, et si $G(x) = 2\ln|x|$ est une primitive de $g(x)$ (2.1) admet aussi pour solutions les solutions de $\ln|y(x)| = 2\ln x + C$ qui sont

$$y(x) = kx^2, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.3.2.

Résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy'(x)\ln x = (3\ln x + 1)y(x). \tag{2.2}$$

On peut diviser par $x\ln x$, ce qui est permis car $x\ln x > O$ d'après l'énoncé. On a

$$(2.2) \Leftrightarrow y'(x) = \frac{(3\ln x + 1)}{x\ln x}y(x).$$

Nous avons

$$g(x) = \frac{(3\ln x + 1)}{x\ln x} = \frac{3}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \qquad et \qquad h(x) = x.$$

Comme $h(0) = 0$, (2.2) admet la solution $y(x) = 0$.
$W(x) = \ln|x|$ est une primitive de $\dfrac{1}{h(x)}$, et si $G(x) = 3\ln|x| + \ln|\ln x|$ est une primitive de $g(x)$ (2.2) admet aussi pour solutions les solutions de $\ln|y(x)| = 3\ln|x| + \ln|\ln x| + C$ qui sont

$$y(x) = kx^3\ln x, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

2.4 Équation différentielle linéaire du premier ordre

2.4.1 Définitions

Définition 2.4.1.

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est du type :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \tag{2.3}$$

où les fonctions a et b avec $a \neq 0$, sont données et s'appellent les coefficients de l'équation différentielle et la fonction f est donnée et s'appelle le second membre.

Définition 2.4.2.

Une solution de (2.3) sur un intervalle I est une fonction y de classe C^1 sur I vérifiant (2.3) pour tout $x \in I$.

Définition 2.4.3.

(2.3) est dite normalisée si a est la fonction constante identiquement égale à 1.

Définition 2.4.4.

[Condition initiale] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. On dit que la solution φ de (2.3) vérifie la condition initiale (x_0, y_0) si et seulement si $\varphi(x_0) = y_0$.

2.4.2 Equation homogène

Définition 2.4.5.

On appelle équation différentielle homogène associée à (2.3) l'équation :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0. \tag{2.4}$$

a) Equation à coefficients constants

On se place dans le cas où a et b sont des constantes.

Proposition 2.4.1.

Supposons que a et b sont des constantes telles que $a \neq 0$. Alors :

1. *Les solutions de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ sont de la forme*

$$v(x) = Ce^{rx},$$

avec $r = \dfrac{-b}{a}$ et C une constante arbitraire. Elles forment un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est la fonction $e^{-\frac{b}{a}x}$.

2. *Si l'on fixe une condition $y(x_0) = y_0$, alors cette solution est unique.*
3. *En particulier, si y s'annule en un point, y est identiquement nulle.*

b) Equation à coefficients variables

On se place dans le cas où a et b sont des fonctions.

Proposition 2.4.2.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ où les fonctions a et b sont définies et continues et telles que $a(x) \neq 0$, pour tout $x \in I$.

1. *Les solutions de l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = 0$ sur I sont de la forme*

$$v(x) = Ce^{G(x)}, \quad \forall x \in I$$

où G est une primitive de $\dfrac{-b(x)}{a(x)}$, c'est-à-dire $G'(x) = \dfrac{-b(x)}{a(x)}$. Elles forment un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est la fonction $e^{G(x)}$.

2. *Si l'on fixe une condition $y(x_0) = y_0$, alors cette solution est unique.*
3. *En particulier, si y s'annule en un point, y est identiquement nulle.*

2.4.3 Solution générale

Définition 2.4.6.

Soit v_0 une solution particulière de (2.3) ; alors les solutions générales de (2.3) s'écrivent

$$y(x) = v(x) + v_0(x)$$

où v est la solution générale de l'équation homogène (2.4).

Proposition 2.4.3.

La solution générale v de l'équation (2.3) sur I telle que $v(x_0) = y_0$ pour un certain x_0 dans I est donnée par

$$v(x) = \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(s)}{a(s)} ds\Big)\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{a(s)} \exp\big(\int_{x_0}^{s} \frac{b(\sigma)}{a(\sigma)} d\sigma\big) ds\Big).$$

2.4.4 Recherche de solution particulière

On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes

Second membre constant :

L'equation différentielle $ay' + by = c$ avec $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}$ admet une solution particulière constante. Celle-ci s'interprète souvent comme étant une situation d'équilibre.
On remarque que c'est la limite de n'importe quelle solution convergente, lorsque (le temps) t tend vers $+\infty$.

Une solution particulière de l'équation differentielle linéaire $ay' + by = c$ avec $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}$ est la fonction $v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $v_0(t) = \dfrac{c}{b}$.

Exemple 2.4.1.

Une solution particulière de l'équation $y' + 3y = 2$ est $v_0(x) = \dfrac{2}{3}$.

Exemple 2.4.2.

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + 2y(t) = 1; \qquad \forall t > 0 \tag{2.5}$$

Recherchons une solution particulière y_p de l'équation (2.8) :
Remarquons que le second membre est une constante. Nous aurions pu deviner la forme de la solution en posant $y_p(t) = \alpha$. Il vient alors $y_p(t) = \dfrac{1}{2}$.

Second membre de type exponentiel

Une solution particulière de l'équation differentielle linéaire $ay' + by = e^{\lambda x}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ est la fonction $v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

- $v_0(x) = \dfrac{1}{a\lambda + b} e^{\lambda x}$ si $\lambda \neq -\dfrac{b}{a}$;
- $v_0(x) = \dfrac{x}{a} e^{\lambda x}$ si $\lambda = -\dfrac{b}{a}$.

Exemple 2.4.3.

1 *Une solution particulière de l'équation* $y' + y = e^{2x}$ *est* $v_0(x) = \dfrac{1}{3} e^{2x}$.

2 *Une solution particulière de l'équation* $2y' + 6y = e^{-3x}$ *est* $v_0(x) = \dfrac{x}{2} e^{-3x}$.

Second membre de la forme : $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$

Pour une équation à coefficients constants, si le second membre est de la forme $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n :

1er cas : $\lambda \neq r = \dfrac{-b}{a}$,

alors on cherche une solution sous la forme $v_0(x) = e^{\lambda x} Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré n.

2eme cas : $\lambda = r = \dfrac{-b}{a}$,

on cherche une solution sous la forme $v_0(x) = e^{\lambda x} x Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré n.

Exemple 2.4.4.

Déterminons une solution particulière de l'équation $y' + 2y = xe^{3x}$.

On a $r = -\dfrac{2}{1} = -2$, $\lambda = 3$ *et* $p_1(x) = x$. *Donc* $\lambda \neq r$. *Par suite, une solution est sous la forme* $v_0(x) = (ax + b)e^{3x}$. *On a aussi* $v_0'(x) = ae^{3x} + 3(ax + b)e^{3x}$

$$\begin{aligned}
v_0 \text{ est solution} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ v_0'(x) + 2v_0(x) = xe^{3x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ ae^{3x} + 3(ax + b)e^{3x} + 2(ax + b)e^{3x} = xe^{3x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ (a + 3ax + 3b + 2ax + 2b)e^{3x} = xe^{3x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ (5ax + a + 5b)e^{3x} = xe^{3x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ (5ax + a + 5b) = x
\end{aligned}$$

Par identification, on a $5a = 1$ *et* $a + 5b = 0$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5a & = & 1 \\ a + 5b & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{1}{5} \\ b & = & -\dfrac{1}{25} \end{array} \right.$$

$v_0(x) = (\dfrac{1}{5}x - \dfrac{1}{25})e^{3x}$.

Exemple 2.4.5.

Une solution particulière de l'équation $2y' + y = (x^2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}$.
On a $r = -\dfrac{1}{2}$, $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ *et* $p_2(x) = x^2 + x$. *Donc* $\lambda = r$. *Par suite, une solution est sous la forme* $v_0(x) = (ax^2 + bx + c)xe^{-\frac{1}{2}x} = (ax^3 + bx^2 + cx)xe^{-\frac{1}{2}x}$. *On a aussi* $v_0'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(ax^3 + bx^2 + cx)e^{-\frac{1}{2}x}$

$$
\begin{aligned}
v_0 \text{ est solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\, v_0'(x) + 2v_0(x) = xe^{-\frac{1}{2}x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\, 2((3ax^2 + 2bx + c)e^{-\frac{1}{2}x} - \tfrac{1}{2}(ax^3 + bx^2 + cx)e^{-\frac{1}{2}x}) +\\
&\quad (ax^3 + bx^2 + cx)xe^{-\frac{1}{2}x} = (x^2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\, (6ax^2 + 4bx + 2c - ax^3 - bx^2 - cx + ax^3 + bx^2 + cx)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&\quad = (x^2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\, 2(3ax^2 + 2bx + c)e^{-\frac{1}{2}x} = (x^2 + x)e^{-\frac{1}{2}x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\, (6ax^2 + 4bx + 2c) = (x^2 + x)
\end{aligned}
$$

Par identification, on a $6a = 1$, $4b = 1$ *et* $2c = 0$

$$
\begin{cases} 6a = 1\\ 4b = 1\\ 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{6}\\ b = \dfrac{1}{4}\\ c = 0 \end{cases}
$$

$v_0(x) = \left(\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2\right)e^{-\frac{1}{2}x}$.

Second membre de la forme : $\eta_1 \cos(\omega x) + \eta_2 \sin(\omega x)$
Soient $\eta_1, \eta_2, \omega \in \mathbb{R}$ avec $\omega \neq 0$. L'équation

$$\forall x \in I,\; ay'(x) + by(x) = \eta_1 \cos(\omega x) + \eta_2 \sin(\omega x)$$

admet une solution particuliere sur I de la forme $t \mapsto \mu_1 \cos(\omega x) + \mu_2 \sin(\omega x)$ où $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.4.6.

Déterminons une solution particulière de l'équation $y' + y = 2\cos(4x)$.
On a $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 0$ *et* $\omega = 4$. *Par suite, une solution est sous la forme* $v_0(x) = \mu_1\cos(4x) + \mu_2\sin(4x)$. *On a aussi* $v_0'(x) = -4\mu_1\sin(4x) + 4\mu_2\cos(4x)$

$$\begin{aligned} v_0 \textit{ est solution} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -4\mu_1\sin(4x) + 4\mu_2\cos(4x) + \mu_1\cos(4x) + \mu_2\sin(4x) \\ &\quad = 2\cos(4x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (4\mu_2 + \mu_1)\cos(4x) + (\mu_2 - 4\mu_1)\sin(4x) \\ &\quad = 2\cos(4x) \end{aligned}$$

Par identification, on a $\mu_1 + 4\mu_2 = 2$ *et* $-4\mu_1 + \mu_2 = 0$

$$\begin{cases} \mu_1 + 4\mu_2 &= 2 \\ -4\mu_1 + \mu_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 &= \dfrac{2}{17} \\ \mu_2 &= -\dfrac{8}{17} \end{cases}$$

$v_0(x) = \dfrac{2}{17}\cos(4x) + \dfrac{8}{17}\sin(4x)$.

Méthode de variation de la constante

Si $v(x)$ est une solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière sous la forme $v_0(x) = C(x)v(x)$ et C' vérifie alors : $C'(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)v(x)}$.

Exemple 2.4.7.

Résolvons l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = x$ *pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Solution de l'équation homogène :$v(x) = \dfrac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : on cherche donc une solution sous la forme $v_0(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, *cela donne* $C'(x) = x$ *et* $C(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
Donc une solution particulière de l'équation est $v_0(x) = \dfrac{x}{2}$.
Solution gènérale :$y(x) = \dfrac{C}{x} + \frac{x}{2}, C \in \mathbb{R}$

Exemple 2.4.8.

Soit l'équation différentielle (2.8). Les solutions de

$$y'(t) + 2y(t) = 0 \tag{2.6}$$

l'équation homogène associée, sont de la forme $y_h(t) = Ae^{-2t}$. *Recherchons une solution particulière* y_p *de l'équation (2.8) :*
utilisant la méthode de la variation de la constante : *On pose donc* $y_p(t) = A(t)e^{-2t}$.

$$y_p(t) + 2y_p(t) = 1;$$

$$A'(t)e^{-2t} - 2A(t)e^{-2t} + 2A(t)e^{-2t} = 1;$$

$$A'(t) = e^{2t}$$

$$A(t) = \frac{1}{2}e^{2t}.$$

On en déduit donc

$$y_p(t) = \frac{1}{2}e^{2t}e^{-2t} = \frac{1}{2}.$$

2.4.5 Principe de superposition

Proposition 2.4.4 (principe de superposition des solutions)**.**

Soient a, b_1 *et* b_2 *trois fonctions continues sur un intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
Soient λ_1 *et* λ_2 *deux nombres réels. On suppose que* f_1 *est une solution particulière sur* I *de l'équation*

$$y' + ay = b_1$$

et que f_2 *est une solution particulière sur* I *de l'équation*

$$y' + ay = b_2.$$

Alors, la fonction $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *est une solution particulière de l'équation différentielle*

$$y' + ay = b$$

où $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

Exemple 2.4.9.

Considérons par exemple l'équation différentielle $y' - y = \cos x + x$. *La fonction* $x \mapsto \dfrac{-\cos x + \sin x}{2}$ *est solution de* $y' - y = \cos x$ *et la fonction* $x \mapsto -x - 1$ *est solution de* $y' - y = x$ *sur* $\mathbb{R}$. *Donc, une solution particulière de* $y' - y = \cos x + x$ *sur* $\mathbb{R}$ *est la fonction* $x \mapsto \dfrac{-\cos x + \sin x}{2} - x - 1$.

2.4.6 Résolution de l'équation $y' + ay = b$ par la méthode de Lagrange

On se donne $a : x \mapsto a(x)$ et $b : x \mapsto b(x)$ deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On veut résoudre sur I l'équation différentielle

$$y' + ay = b \qquad\qquad (E).$$

Puisque la fonction a est continue sur I, la fonction a admet des primitives sur I. On note A une primitive de la fonction a sur I. Enfin, on fixe un réel x_0 de I.
Soit f une fonction dérivable sur I. Puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\text{f solution de } (E) \text{ sur } I \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ e^{A(x)}f'(x) + a(x)e^{A(x)}f(x) = b(x)e^{A(x)} \text{ (car } \forall x \in I,\ e^{A(x)} \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ (e^{A}f)'(x) = b(x)e^{A(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x)e^{A(x)} = C + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt.
\end{aligned}$$

Maintenant, la résolution ci-dessus a été éffectuée sous l'hypothèse « soit f une fonction derivable sur I ». Il reste donc à se préoccuper de la dérivabilite des solutions obtenues puis d'éliminer parmi les solutions obtenues celles qui ne sont pas dérivables sur I.
Puisque la fonction a est continue sur I, la fonction A est definie et derivable sur I et il en est de même des fonctions $x \mapsto Ce^{-A(x)}$. D'autre part, puisque la fonction b est continue sur I et que la fonction A est continue sur I (car dérivable sur I), la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue sur I. Mais alors, la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt$ est derivable sur I et il en est de même de la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt$. Finalement, pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt$ est derivable sur I et par suite solution de (E) sur I.

Remarque 2.4.1.

Le moment clé de la resolution est le moment où on multiplie les deux membres de l'égalité par $e^{A(x)}$. On fait ainsi apparaftre la derivee du produit $e^{A}f$ ($(e^{A}f)' = e^{A}f' + A'e^{A}f = e^{A}f' + ae^{A}f$). On passe ainsi d'une equation ou l'inconnue f apparaft deux fois ($f' + af = b$) a une équation ou l'inconnue f apparaft une seule fois ($(e^{A}f)' = be^{A}$). Il n'y a plus alors qu'a parcourir le chemin en sens inverse pour remonter à f (c'est-à-dire intégrer puis multiplier les deux membres par e^{-A}).

On peut enoncer :

Théorème 2.4.1.

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt, \quad C \in \mathbb{R},$$

où A est une primitive fixée de la fonction a sur I.
En particulier, l'équation $y' + ay = b$ admet au moins une solution sur I.

Exemple 2.4.10.

Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = 1$ sur $I = \mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $a : x \mapsto 1$ et $b : x \mapsto 1$. Donc, on a $A : x \mapsto x$

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ e^x f'(x) + e^x f(x) = e^x \text{ (car } \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ (\exp \times f)'(x) = e^x \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x)e^x = C + e^x \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = Ce^{-x} + 1.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est $S = \{x \mapsto 1 + Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 2.4.11.

Soit (E) l'équation différentielle $2xy' - y = 3x^2$ sur $I =]0, +\infty[$.
Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad 2xf'(x) - f(x) = 3x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad f'(x) - \frac{1}{2x} f(x) = \frac{3}{2}x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ e^{-\frac{1}{2}\ln(x)} f'(x) - \frac{1}{2x} e^{-\frac{1}{2}\ln(x)} f(x) = \frac{3}{2} x e^{-\frac{1}{2}\ln(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ ((\exp \circ (-\tfrac{1}{2}\ln)) \times f)'(x) = \frac{3}{2} x e^{-\frac{1}{2}\ln(x)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ ((\frac{1}{\sqrt{}}) \times f)'(x) = \frac{3}{2} x \times \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ \frac{1}{\sqrt{x}} \times f(x) = C + x^{\frac{3}{2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = C\sqrt{x} + x^2.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est $S = \{x \mapsto C\sqrt{x} + x^2, \quad C \in \mathbb{R}\}$.

Proposition 2.4.5.

La solution générale v de l'équation (2.3) sur I telle que $v(x_0) = y_0$ pour un certain x_0 dans I est donnée par

$$v(x) = \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(s)}{a(s)} ds\Big)\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{a(s)} \exp\big(\int_{x_0}^{s} \frac{b(\sigma)}{a(\sigma)} d\sigma\big) ds\Big).$$

Exemple 2.4.12.

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + 2y(t) = 1; \qquad \forall t > 0 \tag{2.7}$$

sous la condition initiale $y(0) = y_0 = 1$.

Utilisation de le proposition 2.4.5

$$\begin{aligned} v(t) &= \exp\Big(-\int_0^t 2ds\Big)\Big(1 + \int_0^t \exp\big(\int_0^s 2d\sigma\big)ds\Big); \\ &= e^{-2t}(1 + \int_0^t e^{2s}ds); \\ &= e^{-2t}(1 + [\frac{1}{2}e^{2s}]_0^t); \\ &= e^{-2t}(1 + (\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2})); \\ &= e^{-2t}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}); \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}). \end{aligned}$$

2.4.7 Exercices

Exercice 2.4.1. *Résoudre l'équation* $y' + y = e^{2x}$

- *La solution de l'équation homogène est* $y_h(x) = Ce^{-x}$ *avec* $C \in \mathbb{R}$.
- *Une solution particulière est de la forme* $y_p(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$.
- *La solution générale est donc* $y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$.

Exercice 2.4.2. *On considère l'équation différentielle* (E) : $x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3$.

1 *Résoudre l'équation différentielle* (E) *sur* $]0, +\infty[$ *et* $]-\infty, 0[$.

2 *Peut-on trouver une solution sur* $\mathbb{R}$ *?*

3 *Trouver la solution sur* $]0, +\infty[$ *vérifiant* $y(1) = 0$.

Correction.

1 **a** *Résolution de l'équation homogène* (E_0) : $x^3y' + (2 - 3x^2)y = 0$. *Pour* $x \neq 0$, *on a* $y' = -\frac{2-3x^2}{x^3}y$. *Donc la solution générale de* (E_0) *est* $y(x) = ke^{\int -\frac{2-3x^2}{x^3}dx} = ke^{3\ln|x|}e^{1/x^2} = k|x|^3e^{1/x^2}$. *Donc la solution générale de* (E_0) *sur* $]0, +\infty[$ *est :* $y(x) = k_1x^3e^{1/x^2}$ *; et sur* $]-\infty, 0[$: $y(x) = k_2x^3e^{1/x^2}$.

b *Résolution de l'équation avec second membre* (E) *par la méthode de variation de la constante. On cherche une solution sous la forme* $y(x) = k(x)x^3e^{1/x^2}$. *En* *dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient* $k'(x)x^3e^{1/x^2} = 1$*. Donc* $k(x) = \int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}dx = \frac{1}{2}e^{-1/x^2} + c$*. D'où une solution particulière de* (E) *sur* $]0, +\infty[$ *ou* $]-\infty, 0[$ *:* $y_0(x) = k(x)x^3e^{1/x^2} = \frac{1}{2}x^3$*.*

c *Solution générale sur* $]0, +\infty[$ *:* $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + k_1x^3e^{1/x^2}$*.*
Solution générale sur $]-\infty, 0[$ *:* $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + k_2x^3e^{1/x^2}$*.*

2 x^3e^{1/x^2} *tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) lorsque* $x \to 0^+$ *(resp.* 0^-*), donc pour* k_1 *ou* k_2 *non nul,* y *ne peut pas être prolongée par continuité en* 0*. Pour* $k_1 = k_2 = 0$*,* $y(x) = \frac{1}{2}x^3$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$*. C'est la seule solution sur* $\mathbb{R}$*.*

3 *Si l'on cherche une solution particulière vérifiant* $y(1) = 0$*, alors on a* $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + kx^3e^{1/x^2}$*,* $y(1) = 1/2 + ke = 0$*, donc* $k = -\frac{1}{2e}$*. Donc* $y(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2e}x^3e^{1/x^2}$*.*

Exercice 2.4.3. *Résoudre* $x(1+x)y' - (x+2)y = 2x$*.*

1 ***Équation homogène.***

L'équation homogène est $x(1+x)y' - (x+2)y = 0$*. Pour* $x \neq 0$ *et* $x \neq -1$*, l'équation s'écrit* $y' = \frac{x+2}{x(1+x)}y$*. La décomposition de la fraction en éléments simples est :* $a(x) = \frac{x+2}{x(1+x)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{1+x}$*. Une primitive de* $a(x)$ *est donc* $A(x) = \int \frac{x+2}{x(1+x)}dx = 2\ln|x| - \ln|x+1|$*. La solution générale de l'équation homogène est* $y(x) = ke^{A(x)} = ke^{2\ln|x| - \ln|x+1|} = ke^{\ln\frac{x^2}{|x+1|}} = k\frac{x^2}{|x+1|} = \pm k\frac{x^2}{x+1}$*. Cette solution est bien définie en* $x = 0$*. On obtient donc la solution générale de l'équation homogène :* $y(x) = k\frac{x^2}{x+1}$ *sur* $]-\infty, -1[$ *ou sur* $]-1, +\infty[$*.*

2 ***Solution particulière.***

On cherche une solution de l'équation non homogène sous la forme $y_0(x) = k(x)\frac{x^2}{x+1}$ *par la méthode de variation de la constante. En remplaçant dans l'équation, on obtient* $k'(x)x^3 = 2x$*. Donc pour* $x \neq 0$*, on a* $k'(x) = \frac{2}{x^2}$*, et* $k(x) = -\frac{2}{x}$*. D'où la solution générale de l'équation non homogène* $y(x) = -\frac{2x}{x+1} + k\frac{x^2}{x+1}$*. Cette solution est définie sur* $]-\infty, -1[$ *ou* $]-1, +\infty[$*.*

3 ***Existe-t-il une solution définie sur*** $\mathbb{R}$ ***?***

On a $y(x) = \frac{x(kx-2)}{x+1}$*. Donc pour* $k \neq -2$*, on ne peut prolonger* y *en* -1*. Pour* $k = -2$*, on peut prolonger* y *en* -1*. On obtient une solution définie sur* $\mathbb{R}$ *:* $y = -2x$*.*

2.5 Méthode d'Euler

On considère le problème de Cauchy pour une équation différentielle du premier ordre explicite :

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Même si l'équation différentielle est linéaire, sa résolution passe par un calcul de primitives, or on ne sait calculer que très peu de primitives. Lorsque l'équation différentielle est non-linéaire, il est en général impossible de déterminer la solution explicite du problème de Cauchy. On a recours à des méthodes numériques de calcul approché de solutions. La plus simple de ces méthodes est la méthode d'Euler qui se base sur une idée géométrique simple.
L'idée est d'approximer la dérivée de y au point t par un taux d'accroissement :

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

ou de manière équivalente, d'approximer la courbe de y par sa tangente en t_0. Comme $\dfrac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \approx f(t_0, y_0)$, on en déduit que $y(t_0+h) \approx y_0 + f(t_0, y_0)$. Connaissant la valeur de y en t_0+h, on peut recommencer pour obtenir une approximation de $y(t_0+kh)$.

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_0 + nh, y_n).$$

Le réel y_n est une approximation de $y(t_0 + nh)$.

2.6 Equation différentielle linéaire du second ordre

2.6.1 Définitions

Définition 2.6.1.

Une équation différentielle linéaire du second ordre est du type :

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x) \tag{2.9}$$

où a, b et c sont des fonctions données avec $a \neq 0$, appelées coefficients de l'équation différentielle et f une fonction donnée, appelée seoncd membre de l'équation différentielle.

Définition 2.6.2.

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est du type :

$$(Ec) \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

où les réels a, b et c sont donnés dans $\mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et f une fonction donnée.

Définition 2.6.3.

Une solution de (2.9) est une fonction y de classe C^2 sur un intervalle I vérifiant (2.9) pour tout $x \in I$.

Définition 2.6.4.

La solution générale de l'EDO de (2.9) s'écrivent :

$$y(x) = y_h(x) + y_0(x),$$

où y_h est solution de l'équation homogène associée et y_0 une solution particulière de (2.9).

Remarque 2.6.1.

Soit :

$$(E_h): \qquad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0.$$

Contrairement aux EDO linéaires homogènes du premier ordre, on n'a pas d'expression explicite des solutions lorsque les coefficients sont non constants.

2.6.2 Equation à coefficients constants

a) Solution de l'équation homogène

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre du type :

$$(E) \qquad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

où les réels a, b et c sont donnés dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On appelle équation caractéristique associée à (Ec) :

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2.10}$$

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

1 Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions $r_1 \neq r_2$ réelles. Les solutions de (Ec) s'écrivent :

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

avec : $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitraires.

2 Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $r = \alpha - i\beta$. Les solutions de (Ec) s'écrivent :

$$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)),$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

3 Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique solution $r = \dfrac{-b}{2a}$ (racine double) et les solutions de (Ec) s'écrivent :

$$y(x) = (A + Bx)e^{rx},$$

où A et B sont deux constantes arbitraires réelles.

Exemple 2.6.1.

1 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - y' - 2y = 0$.*

L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, qui s'écrit aussi $(r+1)(r-2) = 0$ ($\Delta > 0$). D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$.*

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, soit $(r-2)^2 = 0$ ($\Delta = 0$). D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 5y = 0$.*

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$ ($\Delta < 0$). D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = e^x(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x))$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.6.2.

- *Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$ sont les fonctions de la forme*
$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x},$$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *(l'équation caractéristique associée est $r^2 - 4r + 3 = 0$).*
- *Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y'' + 4y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme*
$$x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-\frac{x}{2}},$$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *(l'équation caractéristique associée est $4r^2 + 4r + 1 = 0$).*
- *Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme*
$$x \mapsto e^x(\lambda\cos x + \mu\sin x),$$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *(l'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 2 = 0$ et a pour solutions $1 + i$ et $1 - i$).*
- *Soit ω un réel strictement positif. Les solutions reelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions de la forme*
$$x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x),$$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *(l'équation caractéristique associée est $r^2 + \omega^2 = 0$ et a pour solutions $i\omega$ et $-i\omega$).*

b) Recherche de solution particulière

On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes

Second membre de la forme : $f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$
Pour une équation à coefficients constants, si le second membre est de la forme $f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ alors on peut chercher une solution sous la forme :

$$y_0(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Second membre de la forme : $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$
Pour une équation à coefficients constants, si le second membre est de la forme $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n :

1er cas : si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$ i.e. $\lambda \neq r_1$ et $\lambda \neq r_2$,
alors on cherche une solution sous la forme $v_0(x) = e^{\lambda x} Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré n.

2eme cas : si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et $2a\lambda + b \neq 0$ i.e. si $\lambda = r_1$ ou $\lambda = r_2$ avec $r_1 \neq r_2$,
alors on cherche une solution sous la forme $v_0(x) = e^{\lambda x} x Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré n.

3eme cas : si $\lambda = r_1 = r_2$
alors on cherche une solution sous la forme $v_0(x) = e^{\lambda x} x^2 Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré n.

Exemple 2.6.3.

Résoudre les équations différentielles :

$$(E_0)\ y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (E_1)\ y'' - 5y' + 6y = 4xe^x \quad (E_2)\ y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$$

Trouver la solution de (E_1) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

1 ***Équation*** **(E_0).** *L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$, avec deux racines distinctes $r_1 = 2, r_2 = 3$. Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est $\left\{\lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.*

2 ***Équation*** **(E_1).**

a *On cherche une solution particulière à (E_1) sous la forme $y_0(x) = (ax+b)e^x$. Lorsque l'on injecte y_0 dans l'équation (E_1), on obtient :*

$$\begin{aligned} & (ax+2a+b)e^x - 5(ax+a+b)e^x + 6(ax+b)e^x = 4xe^x \\ \iff\ & (a-5a+6a)x + 2a + b - 5(a+b) + 6b = 4x \\ \iff\ & 2a = 4 \ \ \text{et} \ \ -3a + 2b = 0 \\ \iff\ & a = 2 \ \ \text{et} \ \ b = 3 \end{aligned}$$

Donc $y_0(x) = (2x+3)e^x$.

b *L'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{(2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.*

c *On a $y(x) = (2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$. On cherche λ, μ tels que $y(0) = 1, y'(0) = 0$. C'est-à-dire que $3 + \lambda + \mu = 1$, $5 + 2\lambda + 3\mu = 0$. Donc $\lambda = -1, \mu = -1$, c'est-à-dire que $y(x) = (2x+3)e^x - e^{2x} - e^{3x}$.*

3 ***Équation*** **(E_2).** *Comme 2 est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = x(ax+b)e^{2x}$. On obtient $y_0(x) = x(-2x-4)e^{2x}$.*

Exemple 2.6.4.

Résolvons l'équation différentielle $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Solution de l'équation homogène :$v(x) = C_1e^{3x} + C_2e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : on cherche donc une solution sous la forme $v_0(x) = ax + b$, cela donne $v_0(x) = \frac{x}{3} + \frac{7}{9}$.
Solution gènérale :$y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^x + \frac{x}{3} + \frac{7}{9}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Méthode de variation de la constante

Le principe est le suivant : on a trouvé une solution de l'équation homogène de la forme :

$$y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x).$$

On va chercher une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

On va être amené à chercher des fonctions A et B vérifiant le système suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} y_1(x)A'(x) + y_2(x)B'(x) = 0 \\ y_1'(x)A'(x) + y_2'(x)B'(x) = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Ce système est un système linéaire en $(A'(x), B'(x))$ de déterminant :

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

appelé Wronskien de y_1 et y_2. Le système (S) a-t-il des solutions ? Oui car son déterminant W(x) est non nul :

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = (y_1(x))^2(\frac{y_2}{y_1})'(x) \neq 0,$$

puisque y_1 et y_2 sont linéairement indépendants. On calcule donc $A'(x)$ et $B'(x)$ solutions du système (S), on a

$$A' = \frac{-(\dfrac{f}{a})y_2}{W} \qquad et \qquad B' = \frac{(\dfrac{f}{a})y_1}{W},$$

puis on integre pour trouver $A(x)$ et $B(x)$ et en déduire $y_0(x)$.

Exemple 2.6.5.

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t \tag{2.11}$$

Le polynôme caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2$, dont les racines sont $r = -1$; $r = -2$. La solution de l'équation sans second membre est donc :

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}.$$

Nous recherchons une solution particulière de la forme :

$$\begin{cases} y_p(t) = A_1(t)e^{-t} + A_2(t)e^{-2t} \\ y_p'(t) = -A_1(t)e^{-t} - 2A_2(t)e^{-2t} \end{cases}. \tag{2.12}$$

La dérivée seconde de $y_p(t)$ s'écrit alors :

$$y_p''(t) = -A_1'(t)e^{-t} - 2A_2'(t)e^{-2t} + A_1(t)e^{-t} + 4A_2(t)e^{-2t}.$$

En replacant l'expression de $y_p(t)$, $y_p'(t)$ et $y_p''(t)$ dans l'équation (2.11), on obtient :

$$-A_1'(t)e^{-t} - 2A_2'(t)e^{-2t} = t.$$

On ajoute à cette l'équation, la seconde équation

$$A_1'(t)e^{-t} + A_2'(t)e^{-2t} = 0,$$

pour obtenir le système :

$$\begin{cases} -A_1'(t)e^{-t} - 2A_2'(t)e^{-2t} = t \\ A_1'(t)e^{-t} + A_2'(t)e^{-2t} = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues nous donne :

$$\begin{cases} A_2'(t) = -te^{2t} & \Rightarrow \quad A_2(t) = -\frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{4}(e^{2t} - 1) + C_2; \\ A_1'(t) = te^{t} & \Rightarrow \quad A_1(t) = te^{t} - e^{t} + 1 + C_1, \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes, respectivement les valeurs des fonctions $t \mapsto A_1(t)$ et $t \mapsto A_2(t)$ en zéro. En choisissant finalement $C_1 = -1$ et $C_2 = \frac{1}{4}$, on obtient alors

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}.$$

Exemple 2.6.6.

Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ *:*

$$y''+y=\frac{1}{\cos x}$$

Les solutions de l'équation homogène $y''+y=0$ *sont* $\lambda\cos x+\mu\sin x$ *où* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_0(x)=\lambda(x)\cos x+\mu(x)\sin x$$

où cette fois $\lambda(x),\mu(x)$ *sont des fonctions à trouver et qui vérifient* (S) *:*

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda' y_1+\mu' y_2 & = & 0\\ \lambda' y_1'+\mu' y_2' & = & \frac{g(x)}{a}\end{array}\right. \quad \textit{donc} \quad \left\{\begin{array}{lcl}\lambda'\cos x+\mu'\sin x & = & 0\\ -\lambda'\sin x+\mu'\cos x & = & \frac{1}{\cos x}.\end{array}\right.$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ *et la seconde par* $\cos x$*, on obtient*

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda'\cos x\sin x+\mu'(\sin x)^2 & = & 0\\ -\lambda'\cos x\sin x+\mu'(\cos x)^2 & = & 1\end{array}\right. \quad \textit{donc par somme} \quad \mu'=1.$$

Ainsi $\mu(x)=x$ *et la première ligne des équations devient* $\lambda'=-\frac{\sin x}{\cos x}$ *donc* $\lambda(x)=\ln(\cos x)$.
On vérifie pour se rassurer que $y_0(x)=\ln(\cos x)\cos x+x\sin x$ *est une solution de l'équation. Ainsi les fonctions solutions sont de la forme :*

$$\lambda\cos x+\mu\sin x+\ln(\cos x)\cos x+x\sin x$$

quels que soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

c) principe de superposition

Si $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, une solution particulière est donnée par $y=y_1+y_2$, où y_i est une solution a $ay''+by'+cy=f_i(x)$ (pour $i=1,2$).

Exemple 2.6.7.

Résoudre $y'' + y = x + \cos 3x$ *sur* $I = \mathbb{R}$.

a) *équation homogène : L'équation caractéristique est* $r^2 + 1 = 0$. *La solution generale de* $(E.H.)$ *est donc* $y = A\cos x + B\sin x$.

b) *solution particulière à* $y'' + y = x$: $y = x$ *convient.*

c) *solution particulière a* $y'' + y = \cos 3x$: *En remplacant* $y = A\cos 3x + B\sin 3x$ *dans l'équation, on trouve* $(A - 9A)\cos 3x + (B - 9B)\sin 3x = \cos 3x$, *donc* $A = -\dfrac{1}{8}$ *et* $B = 0$.

d) *conclusion : la solution generale est* $y = x - \dfrac{1}{8}\cos 3x + A\cos x + B\sin x$.

Chapitre 3

DEVELOPPEMENTS LIMITES (DL)

3.1 Formules de Taylor

Théorème 3.1.1 (Formule de Taylor avec reste intégral).

Soit f de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Alors $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \\ & \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons cette formule de Taylor par récurrence sur $k \leq n$:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}dt.$$

(Pour éviter les confusions entre ce qui varie et ce qui est fixe dans cette preuve on remplace x par b.)

Initialisation. Pour $n = 0$, une primitive de $f'(t)$ est $f(t)$ donc $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$, donc $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$. (On rappelle que par convention $(b-t)^0 = 1$ et $0! = 1$.)

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang $k-1$. Elle s'écrit $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1} + \int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$.

On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt$. En posant $u(t) = f^{(k)}(t)$ et $v'(t) = \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}$, on a $u'(t) = f^{(k+1)}(t)$ et $v(t) = -\frac{(b-t)^k}{k!}$; alors

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt &= \left[-f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\right]_a^b + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\,dt \\ &= f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\,dt. \end{aligned}$$

Ainsi lorsque l'on remplace cette expression dans la formule au rang $k-1$ on obtient la formule au rang k.

Conclusion. Par le principe de récurrence la formule de Taylor est vraie pour tous les entiers n pour lesquels f est classe $\mathcal{C}^{n+1}$. $\square$

Théorème 3.1.2 (Formule de Taylor-Young).

Soit f de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Alors $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \\ &\quad \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x), \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Démonstration. f étant une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ nous appliquons la formule de Taylor avec reste $f^{(n)}(c)$ au rang $n-1$. Pour tout x, il existe $c = c(x)$ compris entre a et x tel que

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

Que nous réécrivons :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ &\quad \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

On pose $\epsilon(x) = \dfrac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!}$. Puisque $f^{(n)}$ est continue et que $c(x) \to a$ alors $\lim\limits_{x\to a} \epsilon(x) = 0$. $\square$

Théorème 3.1.3 (Formule de Taylor-Lagrange).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} ($n \in \mathbb{N}$) et soit $a, x \in I$. Il existe un réel c entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Démonstration. Pour la preuve nous montrerons la formule de Taylor pour $f(b)$ en supposant $a < b$. Nous montrerons seulement $c \in [a, b]$ au lieu de $c \in]a, b[$.

Etant donné un réel A, considérons la fonction :

$$g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

On a $g(b) = f(b)$ et on peut choisir A pour que $g(a) = g(b) = f(b)$, puisque $b - a \neq 0$. g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Appliquons le théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ avec

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} A.$$

Il vient

$$g'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} (f^{(n+1)}(x) - A).$$

$g'(c) = 0$ donne $A = f^{(n+1)}(c)$ car $b - c \neq 0$. □

Corollaire 3.1.1 (Formule de Taylor-Mac Laurin).

Soit f de classe C^{n+1} sur un intervalle $[0; x]$ de $\mathbb{R}$. Alors il existe $\theta \in]0; 1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \\ & \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{(x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \end{aligned}$$

3.2 Définitions

Définition 3.2.1.

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et un point $x_0 \in I$. On dit que la fonction f admet un développement limité ou DL à l'ordre n en x_0 s'il existe un polynôme.

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

de degré $\leq n$ et une fonction $h : I \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I; \; f(x) = F(x) + (x - x_0)^n h(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to x_0} h(x) = 0.$$

Le polynôme $F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ est la partie régulière ou partie principale du DL tandis que $(x - x_0)^n h(x)$ noté encore $o((x - x_0)^n)$ est le reste du DL.

Définition 3.2.2.

On dit qu'une fonction réelle f admet au voisinage de 0 un DL d'ordre n s'il existe des constantes a_0, a_1, $\cdots$, a_n telles que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n h(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to 0} h(x) = 0.$$

Le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la partie régulière du DL tandis que $x^n h(x)$ noté encore $o(x^n)$ est le reste du DL.

Définition 3.2.3.

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à droite (respectivement à gauche) à l'ordre n au voisinage de x_0 si la restriction de f à $D_f \cap [x_0, +\infty[$ (respectivement à $D_f \cap]-\infty, x_0]$) admet un développement limité à l'ordre n en x_0.

Proposition 3.2.1.

Si Df est tel que :

$$\exists h > 0 : \quad [x_0 - h, x_0 + h] \backslash \{x_0\} \subset D_f,$$

il est équivalent de dire :

(i) la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en x_0,

(ii) la fonction f admet des développements limités à droite et à gauche à l'ordre n en x_0 et les coefficients de ces derniers développements limités sont égaux.

Définition 3.2.4.

La fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) si la fonction $g : h \mapsto g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$ possède un développement limité à l'ordre n en 0 à droite (respectivement à gauche), c'est-à-dire s'il existe une $(n+1)-$listes de réels $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ telle que l'on ait, au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Remarque 3.2.1.

Par un changement de variable $h = x - x_0$ si $x_0 \in \mathbb{R}$, ou $h = \frac{1}{x}$ si $x_0 = \pm\infty$, on peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$. Dorénavant, nous parlerons plus de DL en 0.

3.3 Propriétés

Propriété 3.3.1.

Toute fonction continue en 0 et admettant un DL d'ordre 1 au voisinage de 0 est dérivable en 0.

Propriété 3.3.2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $f^{(n)}$ existe et est continue, dans I, alors f admet le DL d'ordre n suivant :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

Démonstration. C'est la formule de Taylor-Young (voir 3.1.2) □

Propriété 3.3.3.

Si f admet un DL d'ordre n, au voisinage de 0, alors ce DL est unique.

Démonstration. Écrivons deux DL de f : $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x)$ et $f(x) = d_0 + d_1(x-a) + \cdots + d_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_2(x)$. En effectuant la différence on obtient :

$$(d_0 - c_0) + (d_1 - c_1)(x-a) + \cdots + (d_n - c_n)(x-a)^n + (x-a)^n(\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)) = 0.$$

Lorsque l'on fait $x = a$ dans cette égalité alors on trouve $d_0 - c_0 = 0$. Ensuite on peut diviser cette égalité par $x - a$: $(d_1 - c_1) + (d_2 - c_2)(x-a) + \cdots + (d_n - c_n)(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}(\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)) = 0$. En évaluant en $x = a$ on obtient $d_1 - c_1 = 0$, etc. On trouve $c_0 = d_0$, $c_1 = d_1$, $\ldots$, $c_n = d_n$. Les parties polynomiales sont égales et donc les restes aussi. □

Propriété 3.3.4.

Soit f une fonction admettant pour DL au voisinage de 0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n h(x)$$

1. *Si f est paire, alors $a_k = 0$, pour tout k impair.*
2. *Si f est impaire, alors $a_k = 0$, pour tout k pair.*

Démonstration. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x)$.

1. Si f est paire alors $f(x) = f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \cdots + (-1)^n a_nx^n + x^n\epsilon(x)$. Par l'unicité du DL en 0 on trouve $a_1 = -a_1$, $a_3 = -a_3$, $\ldots$ et donc $a_1 = 0$, $a_3 = 0$,...
2. Si f est impaire alors $f(x) = -f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \cdots + (-1)^n a_nx^n + x^n\epsilon(x)$. Par l'unicité du DL en 0 on trouve $a_0 = -a_0$, $a_2 = -a_2$, ... et donc $a_0 = 0$, $a_2 = 0$,...

□

Propriété 3.3.5.

Si f admet un DL d'ordre n, au voisinage de 0, alors f admet au voisinage de 0 un DL d'ordre p $(p \leq n)$.

Démonstration. Soit $p \leq n$. Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x)$ alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x) \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x) \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_px^p + x^p\Big(a_{p+1}x + \cdots + a_nx^{n-p} + x^{n-p}\epsilon(x)\Big) \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_px^p + x^p\varepsilon'(x),
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon'(x) = a_{p+1}x + \cdots + a_nx^{n-p} + x^{n-p}\epsilon(x)$. On a $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon'(x) = 0$. □

3.4 Quelques DLs usuels (au voisinage de 0).

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(1-x) &= -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ... + \frac{x^n}{n}) + o(x^n) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{1.3...(2n-1)}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x \\
&= \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - ... - \frac{1.3...(2n-1)}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

Pour $x \in]-1; +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ...+ \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

En particulier : Pour $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + ... + \frac{(-1)^n 1.3....(2n-3)}{2.4.6.....2n}x^n + o(x^n)$$

Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + ... + \frac{(-1)^n 1.3....(2n-1)}{2.4.6.....2n}x^n + o(x^n)$$

Pour $\alpha = -1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

et

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n).$$

3.5 DL des fonctions en un point quelconque

La fonction f admet un DL au voisinage d'un point a si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x+a)$ admet un DL au voisinage de 0. Souvent on ramène donc le problème en 0 en faisant le changement de variables $h = x - a$.

Exemple 3.5.1.

DL de $f(x) = \exp x$ *en* 1.
On pose $h = x - 1$. *Si* x *est proche de* 1 *alors* h *est proche de* 0. *Nous allons nous ramener à un DL en 0 de* $\exp h$ *en* $h = 0$. *On note* $e = \exp 1$.

$$\begin{aligned} \exp x &= \exp(1 + (x-1)) = \exp(1)\exp(x-1) = e \exp h \\ &= e\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + h^n \epsilon(h)\right) \\ &= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + (x-1)^n \epsilon(x-1)\right) \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x \to 1} \epsilon(x-1) = 0$.

Exemple 3.5.2.

DL de $g(x) = \sin x$ *en* $\pi/2$.
Sachant $\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ *on se ramène au DL en 0 de* $\cos h$ *quand* $h = x - \frac{\pi}{2} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$. *On a donc*

$$\sin x = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!} + (x - \frac{\pi}{2})^{2n+1} \epsilon(x - \frac{\pi}{2}),$$

où $\lim\limits_{x \to \pi/2} \epsilon(x - \frac{\pi}{2}) = 0$.

Exemple 3.5.3.

DL de $\ell(x) = \ln(1+3x)$ en 1 à l'ordre 3.
Il faut se ramener à un DL en p du type $\ln(1+h)$ en $h=0$. On pose $h = x-1$ (et donc $x = 1+h$). On a

$$\begin{aligned}
\ell(x) &= \ln(1+3x) = \ln\big(1+3(1+h)\big) = \ln(4+3h) = \ln\big(4\cdot(1+\frac{3h}{4})\big) \\
&= \ln 4 + \ln\big(1+\frac{3h}{4}\big) = \ln 4 + \frac{3h}{4} - \frac{1}{2}\big(\frac{3h}{4}\big)^2 + \frac{1}{3}\big(\frac{3h}{4}\big)^3 + h^3\epsilon(h) \\
&= \ln 4 + \frac{3(x-1)}{4} - \frac{9}{32}(x-1)^2 + \frac{9}{64}(x-1)^3 + (x-1)^3\epsilon(x-1)
\end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 1}\epsilon(x-1) = 0$.

3.6 Développement limité au voisinage de l'infini

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$. On pose :

$$\Delta = \left\{\frac{1}{x} | \quad x \in Df \cap \mathbb{R}^*\right\}$$

et on note g la fonction définie sur Δ par $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$.
On dit que f admet un développement limité à l'infini si g possède un développement limité en 0. Elle est alors définie au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$ (ou au voisinage des deux) et y admet un développement limité.

Exemple 3.6.1.

Développement limité à l'ordre 2 au voisinage de l'infini de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \frac{x}{x-1}$ Si pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $u = \frac{1}{x}$, on a :

$$f(x) = \frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}-1} = \frac{1}{1-u}.$$

La fonction $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ a pour développement limité à l'ordre 2 en 0

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$$

ce qui, en revenant à la variable x, donne :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}).$$

3.7 Opérations sur les DL

3.7.1 Combinaison linéaire de DL

Théorème 3.7.1.

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Soient deux fonctions f et g de I dans $\mathbb{R}$ qui admettent des DL d'ordre n au voisinage de 0, de parties régulières respectives $F(x)$ et $G(x)$. Soient deux scalaires $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Alors la fonction

$$\lambda f + \mu g$$

admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière

$$\lambda F(x) + \mu G(x).$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 définies sur I telles que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = F(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad avec \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

$$\forall x \in I, \quad g(x) = G(x) + x^n \varepsilon_2(x) \quad avec \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

En posant $\varepsilon = \lambda \varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2$, on a alors :

$$\forall x \in I, \quad (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda F(x) + \mu G(x) + x^n \varepsilon(x) \quad avec \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

ce qui montre que $\lambda f + \mu g$ admet $\lambda F + \mu G$ comme développement limité à l'ordre n en 0. $\square$

Exemple 3.7.1.

Trouver un developpement limité de $x \mapsto e^x - \ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0. On a

$$e^x = 1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3 + o(x^3)$$

et

$$\ln(1+x) = x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3 + o(x^3).$$

Donc

$$\begin{aligned} e^x - \ln(1+x) &= (1 + x + (1/2)x^2 + (1/6)x^3) - \\ &\quad (x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3) + o(x^3) \\ &= 1 + x^2 - (1/6)x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Exemple 3.7.2.

Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{1-x} - e^x$. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto e^x$ admettent pour développements limités à l'ordre 3 en 0 :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

ce qui donne le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

Exemple 3.7.3.

A partir des développement limités à l'ordre 5 en 0 de e^x et de e^{-x}, déterminer le développement limité à l'ordre 5 en $ch(x)$ et celui de $sh(x)$.

3.7.2 Produit

Théorème 3.7.2.

Soient I une partie de $\mathbb{R}$, ainsi que f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ admettant en 0 des développements limités à l'ordre n, alors fg admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière s'obtient en prenant dans le produit des parties régulières de f et g les monômes de degré inférieur ou égal à n.

Démonstration. Par hypothèse, il existe des fonctions ε_1 et ε_2 définies sur I telles que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = F(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad avec \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

$$\forall x \in I, \quad g(x) = G(x) + x^n \varepsilon_2(x) \quad avec \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

En effectuant le produit de $f(x)$ par $g(x)$ on obtient :

$$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + x^n(P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)).$$

Il existe un polynôme T tel que :

$$F(x)G(x) = R(x) + x^{n+1}T(x), \qquad \text{où} \qquad R \text{ est polynôme de degré } \leq n$$

ce qui donne :

$$f(x)g(x) = R(x) + x^n \varepsilon(x)$$

avec :

$$\varepsilon(x) = xT(x) + F(x)\varepsilon_2(x) + G(x)\varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x).$$

Comme $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, on en déduit que la fonction fg admet R comme développement limité à l'ordre n en 0. □

Exemple 3.7.4.

Trouver un developpement limité de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-x}$ *à l'ordre 4 en 0. On a*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

et

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4).$$

$$(x - \frac{x^3}{6})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 x + \frac{5}{6}x^4 + \frac{5}{6}x^5 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{6}x^7$$

Donc

$$\frac{\sin(x)}{1-x} = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

Exemple 3.7.5.

Montrer que Le DL d'ordre 3 de $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$*, au voisinage de 0 est*

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} = 1 + (1/2)x + (3/8)x^2 - (1/48)x^3 + o(x^3).$$

Exemple 3.7.6.

$$\begin{aligned}
\cos x \times \sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + o(x^2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

Remarque 3.7.1.

Le théorème 3.7.2 permet de calculer les développement limités des puissances des fonctions

Exemple 3.7.7.

Au voisinage de 0, on a

$$\cos^3 x = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + o\left(x^4\right)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^4\right)$$

$$\sin^3 x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)\right)^3 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^6)$$

3.7.3 Composée

Théorème 3.7.3.

Si f et g admettent des DL d'ordre n au voisinage de 0, de parties régulières respectives $F(x)$ et $G(x)$, et si $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, alors la fonction gof admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $(GoF)(x)$.

Démonstration. Sur un voisinage de 0 on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

ou encore

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + x^n \varepsilon'(x)$$

où ε et ε' sont des fonctions telles que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon'(x) = 0$. On remarque que $a_0 = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. On a donc

$$g(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} b_k (f(x))^k + (f(x))^n \varepsilon'(f(x))$$

mais

$$(f(x))^n \varepsilon'(f(x)) = x^n \left[\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \right]^n \varepsilon'(f(x))$$

et

$$\lim_{x\to 0} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \right]^n \varepsilon'(f(x)) = 0.$$

De plus, d'après la remarque 3.7.1, chacune des fonctions $(f(x))^k$ possède un développement limité d'ordre n. Il résulte du théorème 3.7.1 que $g \circ f$ possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. $\square$

Exemple 3.7.8.

Cherchons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $h(x) = \dfrac{1}{1-\sin x}$. *Posons* $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *et* $f(x) = \sin(x)$ *de sorte que* $h(x) = g(f(x))$. *On a* $\sin 0 = 0$. *De plus,*
$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
et $G(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, $F(x) = x - \frac{x^3}{6}$.

$$\begin{aligned}(GoF)(x) &= 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + (x - \frac{x^3}{6})^2 + (x - \frac{x^3}{6})^3 \\ &= -\frac{1}{216}x^9 + \frac{1}{12}x^7 + \frac{1}{36}x^6 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + x^2 + x + 1.\end{aligned}$$

Par suite,
$$\frac{1}{1-\sin x} = 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

Exemple 3.7.9.

Calcul du DL de $h(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ *en* 0 *à l'ordre* 3.

— *On pose ici* $f(u) = \sin u$ *et* $g(x) = \ln(1+x)$ *(pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux variables des deux fonctions, ici* x *et* u*). On a bien* $(f \circ g)(x) = \sin\big(\ln(1+x)\big)$ *et* $g(0) = 0$.

— *On écrit le DL à l'ordre 3 de* $f(u) = \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$ *pour* u *proche de* 0.

— Et on pose $u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$ pour x proche de 0.

— On aura besoin de calculer un DL à l'ordre 3 de u^2 (qui est bien sûr le produit $u \times u$) : $u^2 = \big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\big)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$ et aussi u^3 qui est $u \times u^2$, $u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$.

— Donc $h(x) = (f \circ g)(x) = f(u) = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u) = \big(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\big) - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$.

Exemple 3.7.10.

Soit $h(x) = \sqrt{\cos x}$. On cherche le DL de h en 0 à l'ordre 4.
On utilise cette fois la notation « petit o ». On connaît le DL de $f(u) = \sqrt{1+u}$ en $u = 0$ à l'ordre 2 : $f(u) = \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$.
Et si on pose $u(x) = \cos x - 1$ alors on a $h(x) = f\big(u(x)\big)$ et $u(0) = 0$. D'autre part le DL de $u(x)$ en $x = 0$ à l'ordre 4 est : $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$. On trouve alors $u^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$.
Et ainsi

$$\begin{aligned} h(x) = f\big(u\big) &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\big) - \frac{1}{8}\big(\frac{1}{4}x^4\big) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{32}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

3.7.4 Quotient

Théorème 3.7.4.
Soit une fonction u telle que $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$. Si u admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière un polynôme P.
Alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $1 + P + P^2 + ... + P^n$.

Démonstration. Appliquer le théorème de composition de DL à la fonction définie par $g(y) = 1/(1-y)$ (qui admet un DL à tout ordre) et à la fonction $f = u$. □

Théorème 3.7.5.
Soit I une partie de $\mathbb{R}$ ainsi que f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ admettant des développements limités à l'ordre n en 0. Si g a une limite non nulle en 0, alors la fonction f/g admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Démonstration. Puisque $l \neq 0$, nous pouvons écrire pour $x \in I$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{l\dfrac{g(x)}{l}} = \frac{1}{l}\frac{f(x)}{1-u(x)}$$

où $u(x) = 1 - g(x)/l$. La fonction u admet un développement limité à l'ordre n (combinaison linéaire de DL) et $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$. Il suffit d'appliquer le théorème précédent. □

Remarque 3.7.2.

Une méthode de calcul du DL d'un quotient f/g. Soient

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \qquad g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$$

Nous allons utiliser le DL de $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.

1 *Si $d_0 = 1$ on pose $u = d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit $f/g = f \times \frac{1}{1+u}$.*

2 *Si d_0 est quelconque avec $d_0 \neq 0$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant*

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0} x + \cdots + \frac{d_n}{d_0} x^n + \frac{x^n \epsilon_2(x)}{d_0}}.$$

3 *Si $d_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.*

Remarque 3.7.3.

Si f et g admettent des DL d'ordre n au voisinage de 0, alors f/g admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est le quotient de degré n de la division d'ordre n suivant les puissances croissantes de la partie régulière de f par la partie régulière de g.

Exemple 3.7.11.

Calculer le DL d'ordre 5 de $\tan x$ au voisinage de 0.

1) Méthode 1 :

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^5\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^4\right)\right)^{-1} \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4)^2 + o\left(x^4\right)\right) \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o\left(x^4\right)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

2) Méthode 2 : Effectuons la division suivant les puissances croissantes sans écrire les termes de degré supérieur à 6.

$$\begin{array}{ccccccc|l}
x & - & \frac{1}{6}x^3 & + & \frac{1}{120}x^5 & & & 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4 \\ \cline{8-8}
-(x & - & \frac{x^3}{3} & + & \frac{x^5}{24}) & & & x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-5}
 & & \frac{1}{3}x^3 & - & \frac{1}{30}x^5 & & & \\
 & - & (\frac{1}{3}x^3 & - & \frac{1}{6}x^5) & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & \frac{2}{15}x^5 & & &
\end{array}$$

On a donc $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)$.

Remarque 3.7.4.

L'hypothèse g a une limite non nulle en 0 dans le théorème 3.7.5 n'est pas indispensable, il suffit de supposer que la foncttion $\dfrac{f}{g}$ possède une limite quand x tend vers 0.

Exemple 3.7.12.

Si l'on souhaite calculer le DL de $\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ en 0 à l'ordre 4 alors on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)}{x\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)} \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right) \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)} \\
&= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + o(x^4)
\end{aligned}$$

3.7.5 Dérivation

Théorème 3.7.6.

Si f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0, et si f est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, alors f' admet un DL d'ordre $(n-1)$ obtenu (à l'exception du terme constant) en dérivant terme à terme le DL d'ordre n de f.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ... + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 ... + na_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Exemple 3.7.13.

Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^n\right) \qquad \textit{donc} \\ \cos x &= \sin'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^n\right) \end{aligned}$$

3.7.6 Primitivation

Théorème 3.7.7.

Soit un intervalle I contenant 0 et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I. On suppose que la fonction f' admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 de la forme

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors f admet un DL d'ordre $n+1$ au voisinage de 0 obtenu en primitivant la partie régulière et en ajoutant f(0) :

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + ... + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Démonstration. On a

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = a_0 x + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \int_0^x t^{n+1}\epsilon(t)dt.$$

Notons $\eta(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \epsilon(t)dt$. (Remarque : la fonction ϵ est continue : elle est continue en a par définition, et elle est continue en dehors de a en écrivant

$$\epsilon(x) = \frac{1}{x^n}\big(f(x) - (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n)\big).$$

Alors :

$$|\eta(x)| \leq \left|\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x |t^n| \cdot \sup_{t\in[0,x]} |\epsilon(t)| dt\right| = \left|\frac{1}{x^{n+1}}\right| \cdot \sup_{t\in[0,x]} |\epsilon(t)| \cdot \int_0^x |t^n| dt = \frac{1}{n+1} \sup_{t\in[0,x]} |\epsilon(t)|.$$

Mais $\sup_{t\in[0,x]} |\epsilon(t)| \to 0$ lorsque $x \to 0$. Donc $\eta(x) \to 0$ quand $x \to 0$. $\square$

Exemple 3.7.14.

Calcul du DL de $\arctan x$ *au voisinage de 0.*
On sait que $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$*. En posant* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ *et* $f(x) = \arctan x$*, on écrit*

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + x^{2n}\epsilon(x).$$

Et comme $\arctan(0) = 0$ *alors* $\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$.

Exemple 3.7.15.

Calcul du DL de $\ln(1+x)$ *au voisinage de 0.*
Soit $f(x) = \ln(1+x)$*. On a* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$*. On écrit*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Par suite, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$.

3.8 Développements limités généralisés

Définition 3.8.1.

Soit f *une fonction réelle définie au voisinage de 0. Etant donné* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}$*, on dit que* f *admet un développement limité généralisé à l'ordre* $n+p$ *en 0 lorsque la fonction* $x \mapsto x^p f(x)$ *admet un développement limité à l'ordre* n *en 0. Il existe dans ce cas un polynôme* $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ *tel que* $x^p f(x) = P(x) + o(x^n)$*.*
On peut donc écrire $f(x) = \dfrac{1}{x^p}\Big(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)\Big)$

Remarque 3.8.1.

Certaines fonctions n'admettent pas de développement limité généralisé. C'est le cas de $\ln x$ *en 0 ou en* $+\infty$*,* $|x|$ *en 0,* e^x *en* $+\infty$*.*

Exemple 3.8.1.

Déterminer le développement limité généralisé à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{\tan x}$.
En formant

$$x\frac{1}{\tan x} = \frac{x\cos x}{\sin x},$$

nous pouvons utiliser les développements limités à l'ordre 4 en 0 de $x\cos x$ *et* $\sin x$.

$$\begin{aligned} x\frac{1}{\tan x} = \frac{x\cos x}{\sin x} &= \frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)} \\ &= 1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{45}+o(x^4). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+o(x^3).$$

3.9 Utilisations des DL

3.9.1 Recherche d'équivalents

Quand une fonction f admet en x_0 un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k \quad avec \quad a_p \neq 0.$$

alors :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^P.$$

Exemple 3.9.1.

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = x(1+\cos x) - 2\tan x.$$

L'utilisation directe des équivalents :

$$x(l+cosx) \underset{0}{\sim} 2x \qquad et \qquad 2\tan x \underset{0}{\sim} 2x$$

ne permettant pas de conclure, le recours à un développement limité s'impose. On constate que f *est impaire et que le coefficient de* x *dans le développement limité de* f *est nul, ce qui oblige à chercher un développement limité à un ordre au moins égal à 3.*

On a :

$$x(1+\cos x) = x\Big(2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) = 2x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$-2\tan x = -2x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

ce qui donne $f(x) = -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$, et donc :

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{7}{6}x^3.$$

3.9.2 Calcul de limites

Théorème 3.9.1.

Limite Soit un intervalle I contenant 0 et une fonction $f : I\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Supposons que f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 avec $n \geq 0$.
Soit

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

sa partie régulière. Alors

1. *f admet a_0 pour limite en 0 ;*
2. *La fonction f est prolongeable par continuité en 0.*

Démonstration. Comme f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 avec $n \geq 0$, par la propriété 3.3.5, f admet un DL d'ordre 0 au voisinage de 0. Ce qui donne $f(x) = a_0 + o(1)$. □

Exemple 3.9.2.

Cherchons $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^x}{\sin^2 x}) = +\infty$, cette fonction n'admet pas de développement limité au voisinage de 0.
On remarque que l'on a $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x^2 e^x}{\sin^2 x}) = 1$. Le développement limité au voisinage de 0 de $\frac{x^2e^x}{\sin^2 x}$ donne

$$\begin{aligned}\frac{x^2e^x}{\sin^2 x} &= \frac{x^2(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))^2} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3))^2}\\ &= 1+x+\frac{5x^2}{6}+o(x^2)\end{aligned}$$

On a donc $\frac{e^x}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{6} + o(1)$ et la limite cherchée est $\frac{5}{6}$.

3.9.3 Etude de Dérivabilité

Théorème 3.9.2.

Dérivabilité Soit un intervalle I contenant 0 et une fonction $f : I\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Supposons que f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 avec $n \geq 1$.
Soit

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

sa partie régulière et g le prolongement par continuité de f en 0. Alors g est dérivable en 0 et $g'(0) = a_1$.

Démonstration. Comme f admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 avec $n \geq 1$, par la propriété 3.3.5, f admet un DL d'ordre 1 au voisinage de 0. Ce qui donne $g(x) = g(0) + a_1 x + o(x)$. Il s'en suit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = a_1$. □

Exemple 3.9.3.

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction dérivable en 0.
Le DL d'ordre 3 au voisinage de 0 de f est

$$f(x) = 1 - (1/6)x^2 + o(x^3).$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0. g le prolongement par continuité de f en 0 est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Remarque 3.9.1.

Le théorème précédent ne se généralise pas aux dérivées d'ordre supérieurs comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.9.4.

Soit $f : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$. f admet en 0 un DL d'ordre 2. sa partie régulière d'ordre 2 est le polynôme nul.
f admet donc un prolongement par continuité en 0 que nous notons g. On a $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

$$\forall x \neq 0, \quad g'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

Ainsi g' admet un DL d'ordre 0 au voisinage de 0 de partie régulière 0 à l'ordre 0.
Mais

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x} = 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

n'admet pas de limite en 0. Il s'en suit que g admet un DL à ordre 2 en 0 mais qu'elle n'admet pas de dérivée d'ordre 2 en 0.

3.9.4 Étude des branches infinies

On se place dans le cas où f est définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Règle 3.9.1 (Asymtote oblique ou horizontale)**.**

Si $f(x) = ax + b + \frac{a_p}{x^p} + o(\frac{1}{x^p})$*, avec* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $a_p \neq 0$*, la droite* Δ *d'équation* $y = ax + b$ *est asymptote à* (Cf) *en* $+\infty$ *ou* $-\infty$*.*

- *En* $+\infty$*,* (Cf) *est au dessus de* Δ *lorsque* $a_p > 0$*, et en dessous lorsque* $a_p < 0$*.*
- *En* $-\infty$*,* (Cf) *est au dessus ou en dessous de* Δ *selon que* $\frac{a_p}{x^p}$ *est positif ou négatif ; cela dépend du signe de* a_p *et de la parité de* p*.*
- *Si* $f(x) = b + \frac{a_p}{x^p} + o(\frac{1}{x^p}$*, avec* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $a_p \neq 0$*, la droite* Δ*' d'équation* $y = b$ *est une asymptote horizontale à* (Cf) *en* $+\infty$ *ou* $-\infty$*.*

Règle 3.9.2.

Si

$$f(x) = g(x) + \frac{a_p}{x^p} + o(\frac{1}{x^p}),$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$*,* $a_p \neq 0$ *et* g *une fonction définie au voisinage de* $+\infty$ *ou de* $-\infty$*, alors* (Cg) *est asymptote à* (Cf) *en* $+\infty$ *ou* $-\infty$*.*

Exemple 3.9.5.

Etudier les branches infinies de la courbe représentative de $f(x) = x^2 e^{x/(x^2-1)}$*. Posons* $x = \frac{1}{u}$*. On a*

$$f(x) = f(\frac{1}{u}) = (\frac{1}{u})^2 e^{\frac{(\frac{1}{u})}{(\frac{1}{u})^2-1}}$$

Le développement limité à l'ordre 3 de $u^2 f(\frac{1}{u})$ *au voisinage de 0 donne*

$$u^2 f(\frac{1}{u}) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{7}{6}u^3 + o(u^3).$$

Par suite au voisinage de 0 on a

$$f(\frac{1}{u}) = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}u + o(u).$$

Ce qui donne

$$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$$

au voisinage de $\pm\infty$*. Soit* $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$*.* (Cg) *est asymptote à* (Cf) *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$*.*

3.9.5 Position locale par rapport à la tangente

Théorème 3.9.3.

Si une fonction f admet un DL en x_0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k), \quad a_k \neq 0.$$

Alors

1. *l'équation de la tangente en x_0 est $Y = a_0 + a_1(X - x_0)$;*
2. *$f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)] = a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$, et en fonction du signe de a_k et de la parité de k, on en déduit la position locale de la courbe par rapport à sa tangente.*

Démonstration. □

Exemple 3.9.6.

Soit $f(x) = \ln(\tan x)$. Déterminer une équation de la tangente T à (Cf) en $\frac{\pi}{4}$ et donner les positions relatives de T et (Cf).
Posons $x = \frac{\pi}{4} + h$. Nous avons

$$\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{4} + h) = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = \frac{2}{1 - \tan h} - 1.$$

Avec $\tan h = h + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$, on a $\frac{2}{1-\tan h} = 1 + h + h^2 + \frac{4h^3}{3} + o(h^3)$. Par suite,

$$\tan(\frac{\pi}{4} + h) = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8h^3}{3} + o(h^3).$$

Ce qui donne

$$\ln\tan(\frac{\pi}{4} + h) = 2h + \frac{4h^3}{3} + o(h^3),$$

et donc

$$f(x) = 2(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{4(x - \frac{\pi}{4})^3}{3} + o((x - \frac{\pi}{4})^3),$$

T a pour équation $y = 2x - \frac{\pi}{2}$. A gauche de $\frac{\pi}{4}$, la courbe (Cf) est en dessous de T, a droite de $\frac{\pi}{4}$, la courbe (Cf) est au dessus de T.

Chapitre 4

NOTIONS SUR LES FONCTIONS A DEUX VARIABLES

4.1 Normes-Ouverts

4.1.1 Normes

Définition 4.1.1.

Une application N de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une norme si

- $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $N(u) \geq 0$;
- $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$;
- $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $N(\lambda u) = \lambda N(u)$.

Exemple 4.1.1.

- *L'application* $u = (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$
- *L'application* $u = (x, y) \mapsto |x| + |y|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$
- *L'application* $u = (x, y) \mapsto \sup\{|x|; |y|\}$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$

Notation 4.1.1. *Etant donné* $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on pose*

1. $\|u\| = \|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2. $\|u\|_1 = |x| + |y|$;
3. $\|u\|_\infty = \sup\{|x|; |y|\}$.

4.1.2 Ouverts

Définition 4.1.2 (Boules ouvertes - Boules fermées - Sphères)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ *et* $r > 0$*. On appelle :*

1 *boule ouverte de centre* a *et de rayon* r*,*

$$B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \ \|x-a\| < r\}.$$

$B(a,r)$ *est tout simplement le disque de centre* a *et de rayon* r*, cercle non compris.*

2 *boule fermée de centre* a *et de rayon* r*, l'ensemble :*

$$\overline{B}(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \ \|x-a\| \leq r\}.$$

$B(a,r)$ *est tout simplement le disque de centre* a *et de rayon* r*, cercle y compris.*

3 *sphère de centre* a *et de rayon* r*, l'ensemble :*

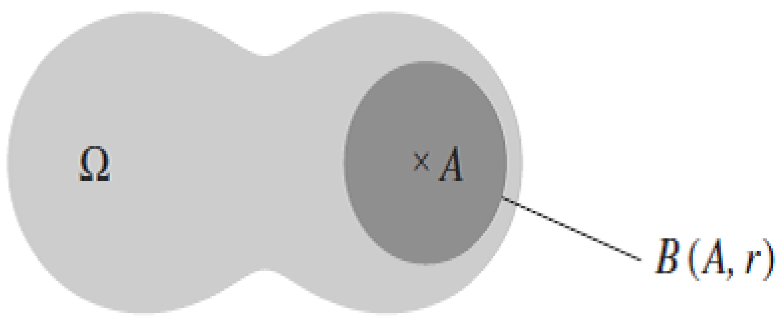
$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x-a\| = r\}.$$

$S(a,r)$ *est tout simplement le cercle de centre* a *et de rayon* r*.*

Définition 4.1.3 (Parties ouvertes)**.**

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$*. On dit que* U *est une partie ouverte si* $\forall a \in U$*, il existe* $r > 0$ *tel que la boule ouverte de centre* a *et de rayon* r *soit incluse dans* U*.*

Exemple 4.1.2.



Définition 4.1.4 (Voisinage)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}^2$*. L'ensemble* $V \subset \mathbb{R}^2$ *est un voisinage de* a *si* $\exists r > 0$ *tel que* $B(a;r) \subset V$*.*

Remarque 4.1.1.

$V \subset \mathbb{R}^2$ *est un ouvert* $\Leftrightarrow$ U *est un voisinage de chacun de ses points.*

4.2 Graphe

Définition 4.2.1 (Fonction reèlle de deux variables)**.**

On appelle fonction reèlle de deux variables toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ ou $D \subset \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire toute fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 4.2.1.

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x;y) & \mapsto & \frac{3}{2}\sin(\frac{1}{2}x^2 - y) \end{array}$$

Définition 4.2.2 (Graphe d'une fonction de deux variables)**.**

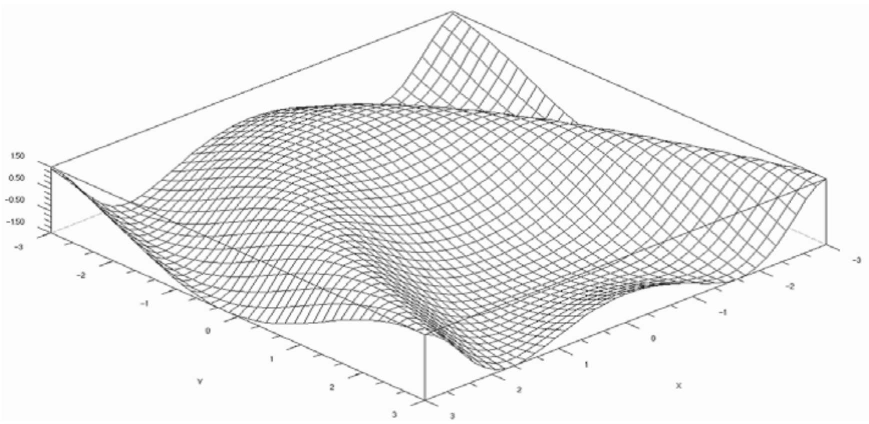
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ ou $D \subset \mathbb{R}^2$. On appelle graphe de f l'ensemble :

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ (x, y) \in U,\ z = f(x, y)\}.$$

Remarque 4.2.1.

Le graphe d'une fonction d'une variable est une courbe dans $\mathbb{R}^2$; celui d'une fonction de deux variables est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4.2.2.



Graphe de $(x;y) \mapsto \frac{3}{2}\sin(\frac{1}{2}x^2 - y)$.

4.3 Applications partielles

Définition 4.3.1.

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et un point $a = (a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2$. On définit les deux fonctions d'une variable (applications partielles au point a) par :

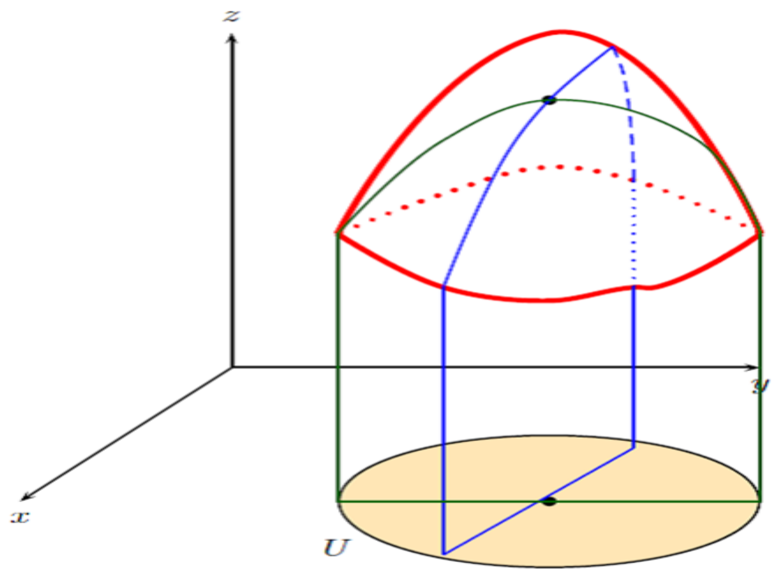
$$\begin{array}{cccc} f_{1a} & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t; a_2) \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{cccc} f_{2a} & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(a_1; t) \end{array}$$

Exemple 4.3.1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = x^2 + x + y^2$. *Soit* $a = (0;1)$. *les deux applications partielles au point* a *sont :*

$$f_{1a}(t) = t^2 + t + 1 \qquad et \qquad f_{2a}(t) = t^2.$$

Exemple 4.3.2 (Graphique)**.**



Applications partielles

4.4 Limite - Continuité

On considère maintenant une partie $U \in \mathbb{R}^2$ ouverte et une fonction de deux variables :

$$\begin{array}{cccc} f & U & \to & \mathbb{R} \\ & (x;y) & \mapsto & f(x;y) \end{array}$$

4.4.1 Limite

Dans la suite, sauf mention expresse, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.4.1 (Limite)**.**

Soit un point $a = (a_1; a_2) \in U$ *et un réel* $l \in \mathbb{R}$. *On dit que* f *tend vers la limite* l *lorsque* $x = (x_1; x_2)$ *tend vers* $a = (a_1; a_2)$ *si et seulement si :* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$; $\forall x \in U$, $\|x - a\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$

Remarque 4.4.1.

— *Si elle existe, la limite d'une fonction est unique.*
— *Pour prouver qu'une fonction de deux variables n'admet pas de limite en a, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par a qui n'admette pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes.*
— *Pour prouver l'existence d'une limite, il faut considérer le cas général. Dans le cas de deux variables, lorsque (x, y) tend vers (0, 0) , il peut être intéressant de passer en coordonnées polaires.*

Exemple 4.4.1.

Montrer que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ *n'existe pas.*
Si f admettait une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $(x; y) \to (0; 0)$, alors on aurait

$$l = \lim_{(x;0)\to(0;0)} \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad et \qquad l = \lim_{(0;y)\to(0;0)} \frac{-y^2}{y^2} = -1,$$

une absurdité.

Exemple 4.4.2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & si \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1 *Montrez que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.*

2 *Montrez que la fonction f n'est pas continue à l'origine.*

Remarquons tout d'abord que la fonction est bien définie dans $\mathbb{R}^2$ puisque $x^4 - 2x^2 y + 3y^2 = (x^2 - y)^2 + 2y^2$ ne s'annule qu'en (0,0).

1 *La restriction de f aux droites $x = 0$ et $y = 0$ est la fonction nulle. La restriction de f à la droite $y = mx$, avec $m \neq 0$, donne :*

$$f(x, mx) = \frac{mx}{x^2 - 2mx + 3m^2}$$

et tend vers 0 quand x tend vers 0. Comme $f(0, 0) = 0$, la restriction de f à toute droite passant par l'origine est donc continue.

2 *Considérons la restriction de f à la parabole $y = x^2$. On a :*

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x4} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $f(x, x^2)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.

Théorème 4.4.1 (Théorème de majoration)**.**

Soit $M_0 = (x_0; y_0) \in U$, $l \in \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de M_0 on ait :

(H_1) $|f(M) - l| \leq \theta(\|M - M_0\|)$;

(H_2) $\lim\limits_{t\to 0}\theta(t) = 0$.

Alors : $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = l$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{r\to 0}\theta(r) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in] - \delta, \delta[$, $|\theta(t)| \leq \varepsilon$. Soit $M \in U$ tel que $\|M - M_0\| \leq \delta$, on a

$$|f(M) - l| \leq s(\|M - M_0\|) \leq \varepsilon.$$

□

Corollaire 4.4.1.

S'il existe $l \in \mathbb{R}$ et une fonction $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'au voisinage de $a = (a_1, a_2) \in U$ la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ vérifie

$$|f(a_1 + r\cos\theta; a_2 + r\sin\theta) - l| \leq s(r) \quad avec \quad \lim_{r\to 0} s(r) = 0,$$

alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Démonstration. on utilise le théorème précédent avec les coordonnées polaires de pôle M_0. Pour $M = (x, y) \in U$, en écrivant

$$\begin{cases} x &= x_0 + r\cos\theta \\ y &= y_0 + r\sin\theta. \end{cases}$$

On a $r = \|M - M_0\|$ et il suffit alors de majorer $|f(M) - f(M_0)|$ par une fonction qui ne dépend que de r, $s(r)$ avec $\lim\limits_{r\to 0} s(r) = 0$. □

Exemple 4.4.3.

Calculer $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$.
Introduisons des coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$\left|\frac{x^3 y}{x^2 + y^2}\right| = r^2 \cos^2\theta |\cos\theta||\sin\theta| \leq r^2$$

$r^2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$, *par conséquent,* $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} = 0$.

Proposition 4.4.1.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $\forall a_n = (x_n, y_n) \to a = (x_0, y_0)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = l$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in U$, $\|x - a\| \leq \delta = |f(x) - l| \leq \varepsilon$. Puisque $a_n = (x_n, y_n) \to a = (x_0, y_0)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, $\|a_n - a\| \leq \delta$. Alors pour $n \geq N$, $|f(a_n) - l| \leq \varepsilon$. $\square$

Remarque 4.4.2.

On se sert souvent de cette propriété séquentielle pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite.

Exemple 4.4.4.

Etudier l'existence de $\lim\limits_{(x;y) \to (0;0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim\limits_{(x;y) \to (0;0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = l$. *Considérons les suites* $X_n = (1/n, 0)$ *et* $Y_n = (1/n, 1/n)$. *Comme* $X_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ *et* $Y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0)$, *on a* $f(X_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ *et* $f(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$. *Or* $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(X_n) = 0$ *et* $f(Y_n) = 1/2$. *On aboutit à l'absurdité* $l = 0 = 1/2$. *Par suite* f *n'admet pas de limite en* $(0,0)$.

Proposition 4.4.2.

Soit f *une fonction définie sur* U. *Si* f *admet une limite en* $a \in U$, *alors cette limite est* $f(a)$.

Démonstration. Soit $l = \lim\limits_{a} f$. On a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $x \in D \cap B(a; r) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Comme $a \in D \cap B(a; r)$, il vient $|f(a) - l| < \varepsilon$ et ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $|f(a) - l| < \varepsilon$ ce qui montre que $l = f(a)$. $\square$

4.4.2 Continuité

Définition 4.4.2 (Continuité).

- *On dit que la fonction* f *est continue au point* $a \in U$ *si et seulement si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- *On dit que la fonction* f *est continue sur l'ouvert* U *si et seulement si elle est continue en tout point de* U.

Exemple 4.4.5.

Soit f *la fonction de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{x \tan y - y \tan x}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

Étudiez la continuité de f *en (0,0).*

Pour étudier la limite de $f(x,y)$ *lorsque* (x,y) *tend vers* $(0,0)$, *nous allons utiliser le développement limité de la fonction tangente au voisinage de l'origine qui peut s'écrire :* $\tan u = u + \frac{1}{3}u^3 + u^3 \varepsilon(u)$ *avec* $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$.

Avec cette notation, on a :

$$f(x,y) = \frac{\frac{1}{3}(xy^3 - yx^3) + xy^3\varepsilon(y) - yx^3\varepsilon(x)}{x^2+y^2}.$$

On a la majoration :

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq \frac{1}{x^2+y^2}\Big(\frac{1}{3}|xy|y^2 + \frac{1}{3}|xy|x^2 + |xy||\varepsilon(y)|y^2 + |yx||\varepsilon(x)|x^2\Big) \\ &\leq |xy|\Big(\frac{1}{3} + |\varepsilon(y)| + |\varepsilon(x)|\Big) \\ &\leq \|(x,y)\|^2\Big(\frac{1}{3} + |\varepsilon(y)| + |\varepsilon(x)|\Big) \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y) = 0$, ce qui prouve que f est continue en (0,0).
La majoration $|f(x,y)| \leq 2\frac{|xy|}{x^2+y^2}$ ne permettait pas de conclure.

Proposition 4.4.3.

Si une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est continue en $a = (x_0, y_0)$, alors les fonctions f_{1a} définie par $f_{1a}(x) = f(x; y_0)$ et $f_{2a})$ définie par $f_{2a}(y) = f(x_0; y)$ sont respectivement continues en x_0 et y_0.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme U est ouvert, les deux applications partielles f_1 et f_2 sont définies respectivement sur un voisinage de x_0, $f_1 :]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\to \mathbb{R}$ et sur un voisinage de y_0 : $f_2 :]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[\to \mathbb{R}$. Puisque f est continue au point $a = (x_0, y_0)$, il existe $0 < \delta \leq \alpha$ tel que $\forall x \in U$, $\|x - a\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. Soit alors $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ vérifiant $|x - x_0| \leq \delta$. Posons $b = (x, y_0)$, $\|(x, y_0) - (x_0, y_0)\| = |x - x_0| \leq \delta$ d'où

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$$

De même, puisque $\|(x_0, y) - (x_0, y_0)\| = |y - y_0| \leq \delta$,

$$|f_2(y) - f_2(y_0)| = |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon.$$

□

Remarque 4.4.3.

La réciproque de la Proposition 4.4.3 est fausse en général.

Exemple 4.4.6.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x;y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad pour \quad (x;y) \neq (0;0) et f(0;0) = (0;0).$$

Les deux applications partielles en $a = (0;0)$ *définies par :* $f_{1a}(x) = f(x;0) = 0$ *et* $f_{2a}(y) = f(0;y) = 0$ *sont continues mais* f *n'admet pas de limite en (0 ;0) donc n'est pas continue en (0 ;0).*

4.5 Dérivées partielles - Différentielle

4.5.1 Dérivées partielles

Définition 4.5.1 (Dérivée selon un vecteur en un point)**.**

Soit $a \in U$ *et un vecteur* $\overrightarrow{h}$ *non nul. On dit que la fonction* f *admet une dérivée selon le vecteur* $\overrightarrow{h}$ *si et seulement si*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{h}) - f(a)}{t}$$

existe. On note alors cette limite $D_{\overrightarrow{h}} f(a)$.

Remarque 4.5.1.

On considère dans cette définition la restriction de f *à la droite passant par a dirigée par le vecteur* $\overrightarrow{h}$ *:* $\phi(t) = f(a + t\overrightarrow{h})$ *et la dérivée selon le vecteur* $\overrightarrow{h}$ *est la dérivée en* $t = 0$ *de la fonction d'une variable* $\phi(t)$.

Exemple 4.5.1.

Soit la fonction f *définie par* $f(x;y) = xy$, U *la boule ouverte de* $\mathbb{R}^2$ *de centre* $a = (0;0)$ *et de rayon 2 et* $\overrightarrow{h} = (1;1)$. *Déterminer si elle existe* $D_{\overrightarrow{h}} f(a)$.

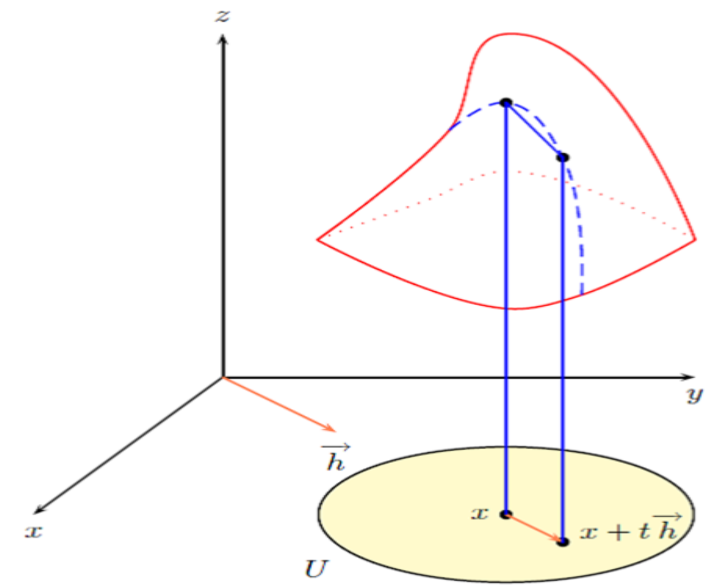
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{h}) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(0+t)(0+t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t \to 0} t = 0.$$

Par suite, $D_{\overrightarrow{h}} f(a) = 0$.

Exemple 4.5.2.

Soit la fonction f *définie par* $f(x;y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ *pour* $(x;y) \neq (0;0)$ *et* $f(0;0) = (0;0)$. *Soit* $\overrightarrow{H} = (h;k)$ *avec* $(h;k) \neq (0;0)$. *Montrer que* f *possède une dérivée selon le vecteur* $\overrightarrow{H}$ *en (0,0) et* $D_{\overrightarrow{H}} f(0;0) = \dfrac{h^2k}{h^2+k^2}$.

Exemple 4.5.3.



Dérivée selon un vecteur

Définition 4.5.2 (Dérivées partielles en un point).

On note $B = (e_1; e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, ($e_1 = (1; 0)$ et $e_2 = (0; 1)$). Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On appelle dérivées partielles de f au point $a = (a_1, a_2)$ les dérivées de f, si elles existent, suivant les vecteur e_1 et e_2.

Notation 4.5.1. *Les dérivées partielles de f en a lorsqu'elles existent, sont notées respectivement*

$$D_{e_1}f(a) \quad ou \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad ou \quad \partial_x f(a) \quad ou \quad f'_x(a);$$
$$D_{e_2}f(a) \quad ou \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) \quad ou \quad \partial_y f(a) \quad ou \quad f'_y(a).$$

Remarque 4.5.2.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1; a_2) \in U$. Les dérivées partielles de f en a sont lorsqu'elles existent, les dérivées en a_1 et a_2 respectivement des applications partielles f_{1a} et f_{2a}. On les définit par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_1) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_{1a}(a_1 + t) - f_{1a}(a_1)}{t}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_2) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_{2a}(a_2 + t) - f_{2a}(a_2)}{t}.$$

Définition 4.5.3.

Si $D_{e_1}f(a)$ et $D_{e_2}f(a)$ existent en tout point a de U, on définit les fonctions dérivées partielles de f sur U par :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}: U & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(a) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial y}: U & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(a). \end{array}$$

Exemple 4.5.4.

Déterminons les dérivées partielles de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule :

$$f(x; y) = x^3 + 4xy^2 - x^2y^5$$

- *Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x; y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, donc f admet une dérivée partielle selon x en tout point de $\mathbb{R}^2$ et :*

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x; y) = 3x^2 + 4y^2 - 2xy^5.$$

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x; y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, donc f admet une dérivée partielle selon y en tout point de $\mathbb{R}^2$ et :*

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = 8xy - 5x^2y^4.$$

Exemple 4.5.5.

Soit $f(x; y) = x\cos(xy^2) + ye^x$. Montrer que

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x; y) = \cos(xy^2) - xy^2\sin(xy^2) + ye^x$$

et

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = -2x^2y\sin(xy^2) + e^x.$$

Définition 4.5.4.

Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U si

1. $\forall (x; y) \in U$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x; y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x; y)$ *existent dans* $\mathbb{R}$.
2. *Les fonctions* $\frac{\partial f}{\partial x} : U \to \mathbb{R}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y} : U \to \mathbb{R}$ *sont continues sur* U.

Remarque 4.5.3.

L'existence des dérivées partielles en un point n'est pas suffisante pour que la fonction soit continue en ce point.

Exemple 4.5.6.

Soit la fonction f définie par

$$f(x;y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad pour \quad (x;y) \neq (0;0) \quad et \quad f(0;0) = (0;0).$$

f n'est pas continue en (0 ;0). Cependant, en (0 ;0), les applications partielles sont nulles et donc dérivables.

Théorème 4.5.1 (Théorème d'opérations sur les fonctions de classe C^1)**.**

Si $f, g : U \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur U et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

1. *$\alpha f + \beta g$ et fg sont de classe C^1 sur U ;*
2. *Si de plus $g \neq 0$ sur U, f/g est de classe C^1 sur U.*

Corollaire 4.5.1.

1. *Les fonctions polynomiales sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Les fonctions rationnelles sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition.*

Théorème 4.5.2 (Dl d'ordre 1)**.**

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur U et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Alors f admet un DL d'ordre 1 en M_0 i.e

$$f(x_0+h; y_0+k) = f(x_0; y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) + o(\|(h;k)\|).$$

Corollaire 4.5.2.

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur U, alors est continue sur U.

4.5.2 Différentielle

Définition 4.5.5 (Différentielle)**.**

*$f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. La **différentielle** de f en M_0 est la forme linéaire*

$$df_{M_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (h;k) \mapsto df_{M_0}(h;k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) + k\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)$$

Définition 4.5.6 (Gradient)**.**

*Le **gradient** de $f : U \to \mathbb{R}$ en $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ est le vecteur*

$$\vec{\nabla} f(M_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)\right).$$

Théorème 4.5.3 (Dérivation d'une composée)**.**

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U et $u, v : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I. $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto (u(t); v(t))$ telle que $\varphi(t) \in U$, $\forall t \in I$. Alors $f \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I et on a :

$$(f \circ \varphi)'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t); v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t); v(t)).$$

Théorème 4.5.4 (Dérivées partielles d'une composée)**.**

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $x, y : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur V telles que $(x(u,v); y(u,v)) \in U$, $\forall (u,v) \in V$. On considère la fonction $F : U \to \mathbb{R}$; $(u,v) \mapsto f(x(u;v); y(u,v))$. Alors

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x;y) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u;v);y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u;v);y(u,v))$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x;y) = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u;v);y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u;v);y(u,v)).$$

Exercice 4.5.1. *La température en un point $(x;y)$ est notée $T(x;y)$ et mesurée en degré Celsius. Supposons que T est de classe C^1 sur $[1;+\infty[\times[2;+\infty[$. Un insecte en train de ramper se trouve après t secondes en $x = \sqrt{1+t}$ et $y = 2 + t/3$ où x et y sont mesurés en centimètres.*
On donne $\partial_x T(2,3) = 4$ et $\partial_y T(2,3) = 3$. A quelle vitesse $(^\circ C.s^{-1})$ croît la température sur la trajectoire, après 3 secondes ?
$T : [1;+\infty[\times[2;+\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $[1;+\infty[\times[2;+\infty[$ et $x, y : [0;+\infty[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[0;+\infty[$.
$\varphi : [0;+\infty[\to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto (x(t); y(t))$ est telle que $\varphi(t) \in [1;+\infty[\times[2;+\infty[$, $\forall t \in [0;+\infty[$.
Alors $T \circ \varphi : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $[0;+\infty[$ et on a :

$$(T\circ\varphi)'(t) = x'(t)\frac{\partial T}{\partial x}(x(t);y(t)) + y'(t)\frac{\partial T}{\partial y}(x(t);y(t)),$$

avec $\forall t \in [0;+\infty[$, $x'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}$ et $y'(t) = \dfrac{1}{3}$. Pour t=3, on a

$$(T\circ\varphi)'(3) = \frac{1}{2\sqrt{1+3}}\frac{\partial T}{\partial x}(\sqrt{1+3}; 2+\frac{3}{3}) + \frac{1}{3}\frac{\partial T}{\partial y}(\sqrt{1+3}; 2+\frac{3}{3}),$$

$$(T\circ\varphi)'(3) = \frac{1}{4}\frac{\partial T}{\partial x}(2;3) + \frac{1}{3}\frac{\partial T}{\partial y}(2;3) = \frac{1}{4}\times 4 + \frac{1}{3}\times 3 = 2.$$

4.6 Extrémums

4.6.1 Définition

Définition 4.6.1.

Soit $M_0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$.

1 *f admet un maximum local en M_0 si et seulement si*

$$\exists V \in v(M_0) \subseteq \mathbb{R}^2 / \ f(M) \leq f(M_0), \quad \forall M \in V \cap U.$$

2 *f admet un minimum local en M_0 si et seulement si si*

$$\exists V \in v(M_0) \subseteq \mathbb{R}^2 / \ f(M) \geq f(M_0), \quad \forall M \in V \cap U.$$

3 *f admet un extrémum local en M_0 si et seulement si*
f admet un maximum local en M_0 ou un minimum local en M_0.

4 *f admet un maximum global en M_0 si et seulement si*

$$\forall M \in U, \qquad f(M) \leq f(M_0).$$

5 *f admet un minimum global en M_0 si et seulement si*

$$\forall M \in U, \qquad f(M) \geq f(M_0).$$

6 *f admet un extrémum global en M_0 si et seulement si*
f admet un maximum global en M_0 ou un minimum global en M_0.

4.6.2 Condition nécessaire du premier ordre

Théorème 4.6.1 (La différentielle est nulle en un extremum local)**.**

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Alors

$$M_0 \text{ est un extrémum local } \Rightarrow df_{M_0} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = 0\right].$$

Démonstration. Supposons par exemple qu'il existe un voisinage V de M_0 tel que M_0 est un maximum de f sur V. Considérons la première fonction partielle f_1 de f au point M_0 définie sur un voisinage de x_0 par $f_1(t) = f(t, y_0)$. Puisque x_0 est un maximum de f1, on sait que $f_1'(x_0) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. On fait de même avec la deuxième fonction partielle pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. $\square$

Remarque 4.6.1.

Un point vérifiant la condition ci-dessus i.e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = 0 \qquad et \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = 0.$$

est appelé point stationnaire ou point critique de f.

Exemple 4.6.1.

La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 3.$$

a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y + 1 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - 1.$$

- Le seul point critique est $(-1, 1)$. En faisant un changement d'origine, on étudie, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(-1 + h, 1 + k) = h^2 + hk + k^2 + 2.$$

Comme $h + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k2}{4} \geq 0$, on a $f(-1 + h, 1 + k) \geq 2$,
i.e. $f(-1 + h, 1 + k) \geq f(-1, 1)$, ce qui montre que f admet un minimum global en (-1, 1).

Exemple 4.6.2.

La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 - 3y^2.$$

a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 6x \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2 - 6y.$$

Ses points critiques sont $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$ et $(-2, -2)$.

- *On a $f(0, 0) = 0$ et au voisinage de 0,*

$$f(h, 0) = h^3 + 3h^2 \sim 3h^2 \qquad et \qquad f(0, k) = -k^3 - 3k^2 \sim -3k^2.$$

Pour h et k assez petits et non nuls, on obtient $f(h, 0) > 0$ et $f(0, k) < 0$: la fonction n'admet pas d'extremum en (0, 0).

- On obtient de même $f(-2,-2) = 0$ et, pour h et k assez petit non nuls,

$$f(-2+h,-2) = -3h^2 + h^3 < 0 \qquad et \qquad f(-2,-2+k) = 3k^2 - k^3 > 0.$$

La fonction f n'admet pas d'extremum en (-2, -2).

- En $A = (-2, 0)$, on étudie

$$f(-2+h,k) = 4 - 3h^2 - 3k^2 + h^3 - k^3 = 4 - h^2(3-h) - k^2(3+k).$$

Si $(h,k) < 3$, on a $3 - h > 0$ et $3 + k > 0$ et donc $f(-2+h,k) \leq 4$. Autrement dit, pour $(x,y) \in B(A,3)$, on a $f(x,y) \leq f(-2,0)$. La fonction f présente un maximum local en (-2, 0).

- En $A = (0, -2)$, on étudie

$$f(h,-2+k) = -4 + 3h^2 + 3k^2 + h^3 - k^3 = -4 + h^2(3+h) + k^2(3-k).$$

On obtient de même que, pour tout $(x,y) \in B(B,3)$, on a $f(x,y) \geq f(0,-2)$. La fonction f présente un minimum local en (0, -2).

Remarque 4.6.2.

Si f est définie sur un ensemble fermé borné Ω, on sait que f possède un maximum et un minimum sur Ω. Mais, comme Ω n'est pas ouvert, on ne peut pas dire que ces extremums sont atteints en des points critiques de f. On peut alors considérer l'ensemble des points X de Ω pour lesquels il existe une boule ouverte de centre X incluse dans Ω. C'est un ouvert appelé intérieur de Ω, sur lequel ce qui précède s'applique.

Un extremum de f est donc obtenu

- *soit en un point critique de l'intérieur de Ω ;*
- *soit en un point de Ω qui n'appartient pas à l'intérieur de Ω (on dit qu'il appartient à la frontière de Ω).*

Dans le cas où Ω est la boule fermé $\overline{B}(A,r)$, l'intérieur de Ω est la boule ouverte $B(A,r)$.

Exemple 4.6.3.

Soit f la fonction définie sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ par

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2.$$

Comme elle est continue, f possède un maximum et un minimum sur le fermé borné Ω (c'est le disque fermé de centre (0, 0) et de rayon 1).

— Sur le disque ouvert, f possède des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y + 1 \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x + 2y.$$

et un seul point critique (0, 0). On obtient f (0, 0) = 0.

— Sur le cercle, on peut poser $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. On obtient

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = 1 - \sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin 2\theta.$$

Sur ce cercle, f possède un maximum $\frac{3}{2}$ et un minimum $\frac{1}{2}$ Le minimum de f sur Ω vaut donc 0 est atteint en (0, 0). Le maximum est $\frac{3}{2}$ et est atteint pour $\sin 2\theta = -1$, ce qui donne $\theta = \frac{-\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$; le maximum est donc atteint aux points $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4.6.3 Conditions du second ordre

Définition 4.6.2 (Dérivées partielles d'ordre 2)**.**

Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U. On dit que f est de classe C^2 sur U lorsque les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} : U \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur U. On note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(M), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})(M),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(M) \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(M).$$

Remarque 4.6.3.

- ⋆ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)$ *se note aussi* $f_{xx}(M)$ *;*
- ⋆ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$ *se note aussi* $f_{xy}(M)$ *;*
- ⋆ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M)$ *se note aussi* $f_{yx}(M)$ *;*
- ⋆ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$ *se note aussi* $f_{yy}(M)$*.*

Théorème 4.6.2 (Théorème de Schwarz)**.**

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur D. Alors en tout point $A \in D$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A).$$

Démonstration. On pose $A = (a,b)$. Comme D est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(A,r) \subset D$. Si $0 < h,k < \frac{r}{\sqrt{2}}$, alors $[a,a+h] \times [b,b+k]$ est inclus dans D. On pose

$$\Delta(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b).$$

La fonction $\varphi : x \mapsto f(x,b+k) - f(x,b)$ est dérivable sur $[a,a+h]$ et sa dérivée est

$$\varphi' : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,b).$$

On peut lui appliquer la formule des accroissements finis : il existe $c \in [a,a+h]$ tel que

$$\Delta(h,k) = \varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(c) = h\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(c,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c,b)\Big).$$

La fonction $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(c,y)$ est dérivable sur $[b,b+k]$ de dérivée $y \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,y)$. On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $d \in [b,b+k]$ tel que

$$\Delta(h,k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,d).$$

En considérant la fonction $\psi : y \mapsto f(a+h,y) - f(a,y)$, on montre de même qu'il existe $c' \in [a,a+h]$ et $d' \in [b,b+k]$ tels que

$$\Delta(h,k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c',d').$$

On en déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,d) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c',d') \tag{4.1}$$

Quand h et k tendent vers 0, (c,d) et (c',d') tendent vers $(a,b) = A$. Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ étant continues en A, on obtient par passage à la limite dans (4.1), l'égalité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A).$$

□

Exemple 4.6.4.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 2x^2y + y^2 - x^3y^4.$$

On obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 4xy - 3x^2y^4; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 2x^2 + 2y - 4x^3y^3;$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = 4x - 12x^2y^3.$$

Théorème 4.6.3.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe c^2, $a \in U$ un point critique de f. Notons Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall h = (h_1, h_2), \quad Q(h) = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a).$$

1 *Si Q est positive et non dégénérée, alors f admet un minimum local strict en a.*

2 *Si Q est négative et non dégénérée, alors f admet un maximum local strict en a.*

3 *Si Q n'est ni positive ni négative, alors f n'admet pas d'extremum local en a.*

Démonstration. D'après le théorème de Taylor-Young à l'ordre 2 et puisque a est un point critique de f, on a :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h) + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|^2).$$

1 Supposons Q positive et non dégénérée. L'application $h \mapsto \sqrt{Q(h)}$ est alors une norme sur $\mathbb{R}^2$. Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que : $\forall h \in \mathbb{R}^2$, $\alpha\|h\| \leq \sqrt{Q(h)} \leq \beta\|h\|$. Par définition de $o(\|h\|^2)$, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a;\eta) \subset U$ et que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \quad \|h\| \leq \eta \Rightarrow |o(\|h\|^2)| \leq \frac{\alpha^2}{4}\|h\|^2 \leq \frac{1}{4}Q(h) \Rightarrow o(\|h\|^2) \geq -\frac{1}{4}Q(h).$$

On a alors :

$$\forall h \in \mathbb{R}^2 - \{0\}, \quad \|h\| \leq \eta \Rightarrow f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h) + o(\|h\|^2) \geq \frac{1}{4}Q(h) > 0.$$

Ceci montre que f admet un minimum local strict en a.

2 L'étude du cas où Q est négative et non dégénérée se déduit de 1) appliqué à $-f$ au lieu de f.

3 Supposons Q ni positive ni négative. Il existe donc $x', x" \in \mathbb{R}^2$ tels que : $Q(x') < 0$ et $Q(x") > 0$. On a alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ dans un voisinage de 0 :

$$\begin{cases} f(a+\lambda x') - f(a) = \lambda^2 Q(x') + \underset{\lambda \to 0}{o}(\lambda^2) \underset{\lambda \to 0}{\sim} \lambda^2 Q(x') \\ f(a+\lambda x'') - f(a) = \lambda^2 Q(x") + \underset{\lambda \to 0}{o}(\lambda^2) \underset{\lambda \to 0}{\sim} \lambda^2 Q(x"), \end{cases}$$

ce qui montre que, sur tout voisinage de a, f prend des valeurs $< f(a)$ et des valeurs $> f(a)$. On conclut que f n'admet pas d'extremum local en a.

□

Théorème 4.6.4.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles secondes continues en $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$q(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)y^2$$

- *Si la signature de q est (2,0) i.e q est définie positive, alors M_0 est un minimum.*
- *Si la signature de q est (0,2) i.e q est définie négative, alors M_0 est un maximum.*
- *Si la signature de q est (1,1) , alors M_0 est un point selle ou un point col.*

Remarque 4.6.4.

Si la signature de q est (1,0) ou (0,1), on ne peut rien conclure.

Remarque 4.6.5.

La signature d'une forme quadratique q est le couple d'entiers (p, s) où p est le nombre de coefficients positifs dans une décomposition de q en carrés et s le nombre de coefficients négatifs.

Corollaire 4.6.1.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Posons :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \quad et \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).$$

Si M_0 un point critique de f tel que $s^2 - rt \neq 0$.

- *Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, alors f présente un minimum en M_0.*
- *Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, alors f présente un maximum en M_0.*
- *Si $s^2 - rt > 0$, alors f ne présente en M_0 ni minimum ni maximum.*

Démonstration. Considérons la forme quadratique $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad Q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2.$$

On a :

$$\begin{array}{rcl}
(\text{Q positive non dégénérée}) & \Leftrightarrow & (s^2 - rt < 0 \quad \text{et} \quad r > 0) \\
(\text{Q négative non dégénérée}) & \Leftrightarrow & (s^2 - rt < 0 \quad \text{et} \quad r < 0) \\
(\text{Q ni positive ni négative}) & \Leftrightarrow & (s^2 - rt > 0).
\end{array}$$

□

Méthode 4.6.1. *Pour déterminer les extremums locaux d 'une application $f : U \to \mathbb{R}$. de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, commencer par déterminer le ou les points critiques de f, c'est-à-dire les points (x, y) de U tels que :*

$$\begin{cases} f'_x(x,y) &= 0 \\ f'_y(x,y) &= 0 \end{cases}$$

Si f admet un extremum local, ce ne peut être qu'en un point critique de f.
En un point critique (x_0, y_0) de f, calculer r, s, t :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad et \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Puis calculer $s^2 - rt$.

— *Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).*
— *Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).*
— *Si $s^2 - rt > 0$ alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) ; on dit que f admet un point-col en (x_0, y_0).*
— *Si $s^2 - rt = 0$, essayer :*
  — *ou bien de montrer que $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ n'est pas de signe fixe lorsque (h, k) est voisin de (0,0) en envisageant, par exemple, de lier les variables (h, k), et alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0).*
  — *ou bien de montrer que $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ est de signe fixe lorsque (h, k) est dans un voisinage de (0,0), et alors f admet un extremum local en (x_0, y_0).*

Méthode 4.6.2. *Pour montrer qu'une fonction f de deux variables réelles x, y n'a pas d'extremum global, on peut essayer de construire une fonction composée, par exemple $x \mapsto f(x, x)$, $x \mapsto f(x, x^2)$, ... de limite $+\infty$ ou $-\infty$.*

Méthode 4.6.3. *Pour trouver les extremums globaux d'une fonction f de deux variables réelles, on peut commencer par rechercher les extremums locaux de f, car, si f admet un extremum global en (x_0, y_0). Pour montrer que f admet, par exemple, un minimum global en un point (x_0, y_0), former $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ et montrer que cette expression est ≥ 0 pour tout (h, k).*

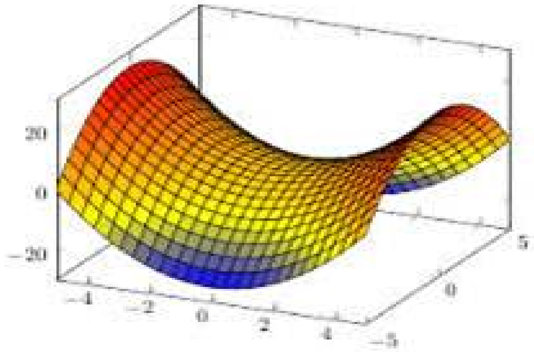
Exemple 4.6.5.

$f(x; y) = x^2 + y^2$. Le point stationnaire est (0 ;0) et $q(x; y) = x^2 + y^2$ donc la signature est (2 ;0), par suite f présente un minimum en (0 ;0),
ou $r = 2$; $s = 0$; $t = 2$ c'est-à-dire $s^2 - rt = -4 < 0$ et $r > 0$, donc f présente un minimum en (0,0).

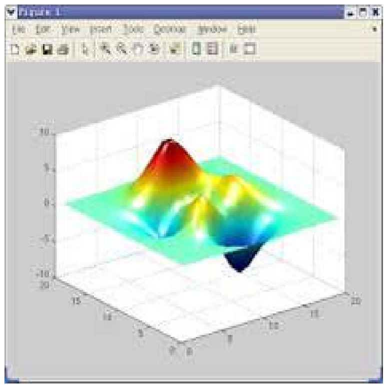
Exemple 4.6.6.

$f(x; y) = xy$. Le point stationnaire est (0 ;0) et $q(x; y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 - \frac{1}{2}(x - y)^2$, donc la signature est (1 ;1). f présente un point-selle en (0 ;0),
ou $r = 0$; $s = 1$; $t = 0$ c'est-à-dire $s^2 - rt = 1 > 0$, donc f présente un point-selle en (0 ;0).

Exemple 4.6.7.



Point-selle



Maximum et minimum

Exercice 4.6.1. *Déterminer les extrema de la fonction*

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - 2xy - y; \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2x - 2y;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 3y^2 - 2x - 1;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = 2;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) = -2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = 6y.$$

Par la résolution du système $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 0 \\ 3y^2 - 2x - 1 & = & 0 \end{array}\right.$ *Les points stationnaires sont* $(\frac{-1}{3}; \frac{-1}{3})$ *et (1 ;1)*

Pour $(x;y) = (1;1)$, *on a* $r = 2$, $s = -2$, $t = 6$ *et* $s^2 - rt = -8$. *Donc* f *présente un minimum en (1 ;1).*

Pour $(x;y) = (\frac{-1}{3}; \frac{-1}{3})$, $r = 2$, $s = -2$, $t = -2$ *et* $s^2 - rt = 8$. *Donc* f *présente ni minimum, ni maximum en* $(\frac{-1}{3}; \frac{-1}{3})$.

Exercice 4.6.2. *La fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si & (x,y) \neq (0;0) \\ 0 & si & (x;y) = (0;0) \end{array}\right.$$

Est-elle de classe C^2.

On vérifie facilement que la fonction f est de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} - \dfrac{2x(yx^3 - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} & si & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si & (x,y) = (0,0); \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} - \dfrac{2y(yx^3 - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} & si & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si & (x,y) = (0,0). \end{array}\right.$$

On a

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0;t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)}{t} = \lim_{t\to 0} -1 = -1,$$

ce qui montre que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) = -1.$$

De même,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t;0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)}{t} = \lim_{t\to 0} 1 = 1,$$

ce qui montre que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0) = 1.$$

Les deux dérivées partielles secondes croisées sont différentes. On peut vérifier l'existence des quatre fonctions dérivées partielles secondes sur $\mathbb{R}^2$, mais on vérifie qu'elles ne sont pas continues en (0, 0).

Bibliographie

[1] **A. Bodin** : *Analyse*. Exo 7 (2016).

[2] **A. Soyeur, F. Capaces, E. Vieillard-Baron** : *Cours de Mathématiques Sup MPSI PCSI PTSI TSI* . sesamath.net (2011).

[3] **B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet** : *Cours d'analyse*. Armand Colin - collection U (1977).

[4] **C. Deschamps, A. Warusfel, F. Moulin, J. François Ruaud, A. AAiquel, J-C Sifre** : *Mathématiques TOUT-EN-UN • I^e année : cours exercices corrigés MPSI-PCSI*. Dunod, Paris, (2003).

[5] **C. Gautier, A. Warusfel, B. Caminade , S. Nicolas** : *Mathématiques TOUT-EN-UN • ECS* 2^e *année : cours exercices corrigés Prépas commerciales* . Dunod, Paris, (2003).

[6] **D. Fredon** : *Mathématiques Résumé du cours en fiches MPSI - MP*. Dunod, Paris, (2010).

[7] **D. Guinin - B. Joppin** : *Analyse Géometrie, Précis de Mathematiques, Prépa MPSI 1e année*. Bréal (1997).

[8] **J. M. Monier** : *Analyse MP*, Dunod, Paris, (2013).

[9] **M. Allano Chevalier, X. Oudot** : *Maths MPSI*. Hachette, (2008).

[10] **T. Pierron** : *Mathématiques MPSI*. ENS Ker Lann.