UPB ANNÉE ACADÉMIQUE 2020-2021
Analyse 2 *Licence 1 SEA MIAGE ASSRI*

T D :

Exercice 1. *Calculer les intégrales suivantes*

1. $I_1 = \displaystyle\int x\sqrt{x-1}dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int x^2 e^{3x}dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int \sin x e^x dx$

Exercice 2.

1. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^x)dx$
2. *Déterminer une primitive de* f *sur* $[3;+\infty[$*, avec* $f(x) = \dfrac{x}{x^3-3x+2}$.
3. *Déterminer une primitive de* g *sur* $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$*, avec* $g(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x + 2\tan^2 x}$.
4. *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
   (a) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}\sqrt{2}-2.$
   (b) *Déterminer la limite de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, de terme général*
   $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{(n^2+k^2)^3}}$$
5. *On considère l'intégrale* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}}dx.$
   (a) *Montrer que* $J = -J$.
   (b) *En déduire la valeur de* J.

Exercice 3.
On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{2+\sqrt{4x-x^2}}.$

1) *Montrer par un changement de variables que :* $I = \displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^0 \frac{du}{1+\sqrt{1-u^2}}.$

2) *Effectuer le changement de variable* $u = \cos t$ *dans l'intégrale* $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^0 \frac{du}{1+\sqrt{1-u^2}}.$

3) **(a)** *Exprimer* $\sin\theta$ *en fonction de* $\tan\dfrac{\theta}{2}$ *pour* $\theta \in]-\pi;\pi[$.

(b) *En déduire que* $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}dt.$

4) *En déduire enfin la valeur de I.*

<u>Exercice</u> 4. *Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions*

$$f(x) = \frac{C+x}{1+x^2}$$

seraient les solutions.

<u>Exercice</u> 5. *Résoudre sur des intervalles appropriés les équations différentielles suivantes :*

a) $\frac{yy'}{1+y^2} = \frac{1}{x}$

b) $xy' - y = 2x^2, \qquad y(1) = 5,$

c) $(1+e^x)y' + e^x y = (1+e^x)$

d) $(2+\cos x)y' + \sin(x)y = (2+\cos x)\sin x$

<u>Exercice</u> 6. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*

a) $y'' - 3y' + 2y = x$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$

c) $y'' + 2y' + y = (x+1)e^{-x}$

d) $y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)e^x$

<u>Exercice</u> 7.

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de*

$$f(x) = \frac{e^{\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{x^2}{\sin x}\right)} - e}{\ln(1+x)};$$

2. *En déduire le développement limité a l'ordre 2, au voisinage de* $+\infty$ *de*

$$h(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x;$$

3. *Déterminer le développement limité a l'ordre 3, au voisinage de* $\frac{\pi}{4}$ *de*

$$i(x) = (\tan x)^{\tan(2x)};$$

<u>Exercice</u> 8.

A l'aide du développement limité, déterminer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2}{\tan^2 x}$

2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}, \quad a > 0.$

<u>Exercice</u> 9.
On considère les fonctions g, h et f définies respectivement par

$$g(x) = \frac{2}{2 - x^2}, \quad h(x) = \exp(1 - \cos(x)) \quad et \quad f(x) = \frac{g(x) - h(x)}{x^4}.$$

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de g ;*
2. *Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de h ;*
3. *En déduire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de f ;*
4. *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ;*
5. *Soit k le prolongement par continuité de f en 0. Montrer que k est dérivable en 0 et préciser $k'(0)$;*
6. *Déterminer une équation de la tangente à la courbe (Ck) de k au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe de k par rapport à la tangente au voisinage de 0 ;*
7. *Déterminer le développement limité a l'ordre 2, au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ de h*

<u>Exercice</u> 10.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On note :

$$\begin{array}{rlcl} g: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t,u) & \mapsto & f(2t - u, 4t + 3u), \\ h: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t,u) & \mapsto & f(t^2 + 2u^2, e^{tu}), \\ k: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad\quad t & \mapsto & f(t^2, t^3). \end{array}$$

Calculer les derivees partielles premieres de g, h et la dérivée première de k en fonction de celles de f.

<u>Exercice</u> 11.
Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en (0,0) pour les fonctions f de deux variables réelles définies par les formules suivantes :

$$a)\ \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad b)\ \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \qquad c)\ \frac{\sin x shy}{xy} \qquad d)\ \frac{\sin x - shy}{shx - \sin y}.$$

<u>Exercice</u> 12.
On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

1. *Calculer les dérivées partielles premières de f.*
2. *Déterminer les éventuels points critiques de f.*
3. *Calculer les dérivées partielles secondes de f.*
4. *Déterminer la nature de chaque point critique.*
5. *Montrer que f admet un minimum absolu égal à -8, et préciser les points critiques aux quels il est atteint.*

Exercice 13.
Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$I_1 = \int \tan(4x) - \text{cotan}\left(\frac{x}{4}\right) dx \qquad I_2 = \int \frac{\sqrt{\tan x + 1}}{\cos^2(x)} dx \qquad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}};$$

$$I_4 = \int \frac{x^2}{5 - x^6} dx \qquad I_5 = \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx \qquad I_6 = \int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx;$$

$$I_7 = \int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx \qquad I_8 = \int \frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}} dx \qquad I_9 = \int x \cos^2(x) dx;$$

$$I_{10} = \int \frac{dx}{x^2 + 1} \qquad I_{11} = \int \frac{dx}{4 - 5\sin x} dx \qquad I_{12} = \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx$$

$$I_{13} = \int \frac{x + 2}{(x-1)^2(x^2+1)} dx \qquad I_{14} = \int \sqrt{\frac{2 + 3x}{x - 3}} dx \qquad I_{15} = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1 + x + x^2}};$$

$$I_{16} = \int \frac{\sin(2x)}{(x+1)\sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}} dx$$

Exercice 14.
Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' - (2x - l)y = 1$
2. $(x^2 + 1)y' + 2xy = 3x^2 + 1; \quad y(0) = 3$
3. $xy' + y - xy^3 = 0$
4. $y' + y = x - \exp(x) + \cos x$
5. $x^2(y' + y^2) = xy - 1, \qquad y_0(x) = \dfrac{1}{x}$ *en étant une solution particulière.*
6. $y'' + y' - 2y = x\exp(-2x)$
7. $y'' + 2y' + 5y = [2\cos(2x) - 3\sin(2x)]\exp(-x)$
8. $y'' + y' = x + \cosh x$
9. $y'' + 2y' + y = 2x^2 \cosh x$
10. $y'' - 3y' - 4y = x\exp(|x|)$
11. $y'' + y = |x| + 1.$
12. $|x|y' + (x-1)y = x^2$

N.B. En 11) et 12), on cherchera à raccorder les solutions.

Exercice 15.
Déterminer le développement limité de :

1. $x \mapsto \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ *à l'ordre 3 au voisinage de 0 ;*
2. $x \mapsto \arccos(\sqrt{2 + x^2})$ *à l'ordre 5 au voisinage de 0.*

Exercice 16.
Donner un développement limité à l'ordre 2 de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x^2}}$$

en 0. En déduire un développement à l'ordre 2 en $+\infty$. Calculer un développement à l'ordre 1 en $-\infty$.

Exercice 17.
Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{3-\sin^2 x}}{\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{\tanh x - \tan x} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x^2) + x - \ln x}$$

Exercice 18.
Etudier au voisinage de x_0, les fonctions f définies ci-dessous (tangente, position par rapport à la tangente, dessin).

1. $x_0 = 0$ *et*
$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$
2. $x_0 = 1$ *et*
$$f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}$$

Exercice 19.
Etudier à l'infini (asymptote à la courbe représentative, position par rapport l'asymptote), les fonctions ci-dessous

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}; \qquad g(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{3x^2}{1+3x^2}\right)$$

Exercice 20.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3 e^{xy}}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. *Etudier la continuité de f.*
2. *f est-elle dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur ?*
3. *Etudier la différentiablité de f.*
4. *Calculer les dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.*
5. *La différentielle seconde de f existe-elle au point (0, 0) ?*

Exercice 21.
Déterminer les points critiques des fonctions réelles suivantes et préciser l'existence et le type d'extrema.

1. $f(x,y) = x^2 - 2xy + \dfrac{y^4}{2}$
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8xy.$

Exercice 22.
Déterminer le maximum et le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ dont les variables sont astreintes à la condition $x^2 + y^2 = 1$.