TD ANALYSE NUMERIQUE

Série 1 : Résolution d'équations non linéaires

Exercice 1

Décrire les méthodes de la dichotomie et de LAGRANGE et les utiliser pour calculer le zéro de la fonction :

$$f(x) = x^3 - 4x - 8,95$$

dans l'intervalle [2; 3] avec une précision de 10^2.

Exercice 2

1. Donner la suite définissant la méthode de NEWTON pour la recherche d'un zéro de fonction. Justifier l'expression de la suite.
2. Écrire l'algorithme pour une convergence à 10^{-6} près.
3. Déterminer l'ordre de convergence minimale de cette suite.

Exercice 3

On investit un capital $C_0 > 0$. Le placement a un taux de 5% par an et des frais de gestion fixes de 50 euros qui sont prélevés chaque année.

1. Décrire la suite récurrente qui décrit l'évolution du placement.
2. Donner les points fixes du système et indiquer s'ils sont attractifs ou répulsifs.
3. Étudier l'évolution du capital au fil des ans selon la valeur de C_0.

Exercice 4

Considérons l'équation $x(1+e^x) = e^x$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution réelle l dans [0 ; 1].
2. Écrire la méthode de NEWTON pour approcher la solution l.
3. Proposer une autre itération de point fixe pour approcher l. Montrer analytiquement que cette itération converge vers l pour tout $x_0 \in$ [0 ; 1] et faire l'étude graphique de la convergence.

Exercice 5

Entre deux murs (verticaux) parallèles, on place deux échelles en les croisant. La première fait 3m de long, la seconde 2m. On constate qu'elles se croisent à une hauteur de 1m. Écrire la méthode de NEWTON pour le calcul approché de la distance entre les deux murs.

Série 2 : Interpolation

Exercice 1

Construire le polynôme P qui interpole les points (0, 2), (1, 1), (2, 2) et (3, 3). Utiliser successivement les trois méthodes : directe (naïve), de Lagrange et de Newton pour la construction.

Exercice 2

1. Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x)=\cos(x)$ en les 3 points $x_i=\frac{\pi}{2}i$ avec $i=0,...,2$.
2. Calculer ensuite le polynôme d'interpolation de la même fonction en les 4 points $x_i=\frac{\pi}{2}i$ avec $i=0,...,3$, c'est-à-dire en ajoutant le point $x_3=3\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3

1. Construire le polynôme de LAGRANGE P qui interpole les points (-1, 2), (0, 1), (1, 2) et (2, 3).
2. Soit Q le polynôme de LAGRANGE qui interpole les points (-1, 2), (0, 1), (1, 2). Montrer qu'il existe un réel λ tel que :

$$Q(x)-P(x)=\lambda(x+1)x(x-1)$$

Exercice 4

1. Construire le polynôme de LAGRANGE P qui interpole les trois points $(-1,\alpha)$, $(0,\beta)$ et $(1,\alpha)$ où α et β sont des réels.
2. Si $\alpha=\beta$, donner le degré de P.
3. Montrer que P est pair. Peut-on avoir P de degré 1 ?

Exercice 5

Soit $f\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x)=1+x^3$.

1. Calculer le polynôme P_0 qui interpole f au point d'abscisse $x_0=0$.

2. Calculer le polynôme P_1 qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1\}$.
3. Calculer le polynôme P_2 qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$.
4. Calculer le polynôme P_3 qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$.
5. Pour n > 3, calculer les polynômes P_n qui interpolent f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0, x_1 = 1, ..., x_n = n\}$.

Série 3 : Quadrature

Exercice 1

Estimer $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$ en utilisant la méthode des trapèzes composite avec 8 et puis 16 sous-intervalles en prenant en compte l'erreur.

Exercice 2

On considère l'intégrale suivante : $I = \int_1^2 \ln(x)\,dx$

1. Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes composite avec m = 4 sous-intervalles et comparer le résultat ainsi obtenu avec la valeur exacte. Pourquoi la valeur numérique est-elle inférieure à la valeur exacte ? Est-ce vrai quel que soit m ? (Justifier la réponse.)
2. Quel nombre de sous-intervalles m faut-il choisir pour avoir une erreur $|E_m|$ inférieure à 10^{-2} On rappelle que, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, l'erreur de quadrature Em associée à la méthode des trapèzes composite avec une discrétisation uniforme de pas $h = (b - a)/m$ de l'intervalle $[a, b]$ en m sous-intervalles vérifie

$$|E_m| = \left|\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)\right|, \qquad \xi \in]a;b[.$$

Exercice 3

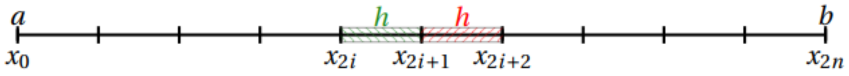
1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1([-1,1])$ et p le polynôme de LAGRANGE qui interpole f aux points $-1, 0\ et\ 1$. Écrire le polynôme p.
2. En déduire une méthode de quadrature pour approcher l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Étudier le degré de précision de la formule de quadrature ainsi trouvée
4. À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. Soit $h = \frac{b-a}{2n}$ et $x_i = a + ih$ pour i = 0,1, 2, …,2n. On subdivise l'intervalle [a ;b] en n sous-intervalles $[x_{2i}; x_{2i+2}]$ de largeur 2h.



En déduire la formule de quadrature composite pour le calcul approché de

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. Ecrire l'algorithme associé à cette formule de quadrature.

Exercice 4

Mettre en œuvre une stratégie pour calculer

$$I(f) = \int_1^0 |x^2 - 0.25|\ dx$$

à l'aide de la formule composite de Simpson en faisant en sorte que l'erreur de quadrature soit inférieure à 10^{-2}.