

# Chapitre 1

## Ensembles et sous-ensembles

### 1. Notion d'ensemble - Élément d'un ensemble

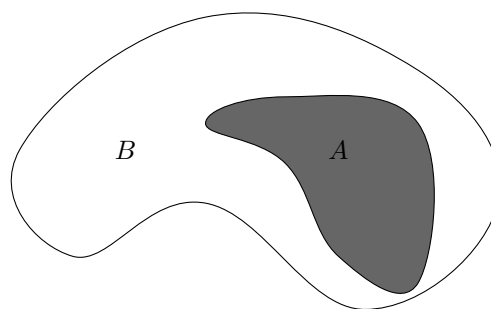
Un *ensemble* est une collection d'objets satisfaisant un certain nombre de propriétés et chacun de ces objets est appelé *élément* de cet ensemble. Si  $x$  est un élément de l'ensemble  $E$ , on dit aussi que  $x$  *appartient* à  $E$  et on note  $x \in E$ . Si  $x$  n'appartient pas à  $E$ , on note  $x \notin E$ . Deux ensembles sont *égaux* s'ils ont les mêmes éléments. On admet l'existence d'un ensemble n'ayant aucun élément. Cet ensemble est appelé *ensemble vide* et noté  $\emptyset$ .

#### Notations

- Il y a des notations réservées pour certains ensembles ; par exemple,  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels ;  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  désignent respectivement l'ensemble des entiers relatifs, des nombres rationnels, des nombres réels et des nombres complexes ;  $\mathbb{R}^*$ ,  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{R}_+^*$  désignent les réels non nuls, les réels positifs, les réels strictement positifs, etc.
- L'ensemble  $E$  dont les éléments sont 1, 2, 3, 4 est noté  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ .
- Un ensemble à un seul élément  $x$  est noté  $\{x\}$  et on l'appelle le *singleton*  $\{x\}$ . On a donc  $x \in \{x\}$  (et pas  $x = \{x\}$ ).
- L'ensemble  $E'$  dont les éléments sont les entiers naturels  $x$  tels que  $x \leq 4$  est noté  $E' = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$  (et on a aussi  $E' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ).
- Plus généralement, soit  $E$  un ensemble et  $\mathbf{P}(x)$  une propriété vérifiée ou non suivant la valeur de  $x$ , élément de  $E$  ; l'ensemble  $A$  dont les éléments sont les éléments  $x$  de  $E$  qui vérifient  $\mathbf{P}(x)$  est noté  $A = \{x \mid x \in E \text{ et } \mathbf{P}(x)\}$  ou  $A = \{x \in E \mid \mathbf{P}(x)\}$ .

### 2. Relation d'inclusion

**Définition 1.1** – Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. On dit que  $A$  est inclus dans  $B$  si chaque élément de  $A$  est un élément de  $B$ . On note  $A \subset B$ . On dit aussi “ $A$  est contenu dans  $B$ ” ou “ $A$  est une partie de  $B$ ” ou “ $A$  est un sous-ensemble de  $B$ ”.



$$A \subset B$$

**Remarques** - •  $A \subset A$

- Si  $A \subset B$  et  $B \subset C$ , alors  $A \subset C$
- $A = B$  si et seulement si ( $A \subset B$  et  $B \subset A$ ).

On traduit les propriétés précédentes en disant que la relation d'inclusion est respectivement *réflexive*, *transitive* et *antisymétrique*. On peut rapprocher ces propriétés de celles de la relation d'inégalité  $\leq$  dans  $\mathbb{R}$  : pour tous  $a, b, c$  réels, on a  $a \leq a$ , si ( $a \leq b$  et  $b \leq c$ ) alors  $a \leq c$  et si ( $a \leq b$  et  $b \leq a$ ), alors  $a = b$ . De telles relations sont appelées *relations d'ordre*.

**Exemples -**

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\} \subset \mathbb{R}_+$

**Définition 1.2** – Soit  $E$  un ensemble. Les sous-ensembles de  $E$  forment un ensemble appelé ensemble des parties de  $E$  et noté  $\mathcal{P}(E)$ .

**Exemple** - Si  $E = \{1, 2\}$ , alors  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$ .

**Remarque** - Les trois assertions  $x \in E$ ,  $\{x\} \subset E$  et  $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$  sont équivalentes.

*Exercice - 1°) Soit  $E = \{1, 2, 3\}$ . Donner tous les sous-ensembles de  $E$ .*

*2°) Montrer, par récurrence sur  $n$ , qu'un ensemble à  $n$  éléments a  $2^n$  sous-ensembles.*

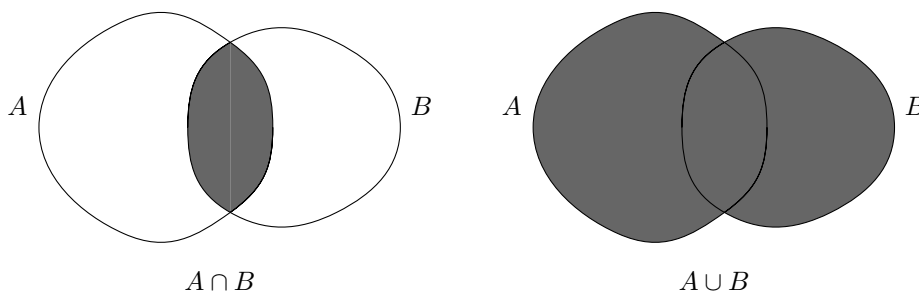
*3°) Soient  $A$  et  $B$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .*

*Montrer que  $(A \subset B \text{ si et seulement si } \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B))$ .*

### 3. Intersection et réunion

**Définition 1.3** – Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . L'ensemble  $\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$  est appelé l'intersection des ensembles  $A$  et  $B$  et est noté  $A \cap B$ . Si  $A \cap B = \emptyset$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont disjoints.

L'ensemble  $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$  est appelé l'union des ensembles  $A$  et  $B$  et est noté  $A \cup B$ .



Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . On a :

- 1)  $A \cap \emptyset = \emptyset$  et  $A \cup \emptyset = A$
- 2)  $A \cap B \subset A$  et  $A \cap B \subset B$
- 3)  $A \subset A \cup B$  et  $B \subset A \cup B$
- 4)  $A \cup B = A$  si et seulement si  $B \subset A$
- 5)  $A \cap B = A$  si et seulement si  $A \subset B$

#### Propriétés de $\cap$ et $\cup$ -

Soient  $A, B, C$  trois sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . On a :

- 1)  $A \cup B = B \cup A$
- 2)  $A \cap B = B \cap A$
- 3)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 4)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 5)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 6)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

On traduit ces propriétés en disant que  $\cup$  et  $\cap$  sont *commutatives* (propriétés 1 et 2), *associatives* (propriétés 3 et 4), que  $\cup$  est *distributive par rapport* à  $\cap$  (propriété 5) et  $\cap$  est *distributive par rapport* à  $\cup$  (propriété 6). Ces propriétés seront étudiées dans le chapitre sur les lois de composition internes. Pour s'en souvenir, on peut les comparer aux

propriétés analogues de l'addition et de la multiplication dans  $\mathbb{R}$  : pour  $a, b, c$  réels, on a  $a + b = b + a$ ,  $ab = ba$ ,  $a + (b + c) = (a + b) + c$ ,  $a(bc) = (ab)c$ ,  $a(b + c) = ab + ac$ . Mais on n'a pas l'équivalent de la propriété 5 ; en général, on n'a pas  $a + (bc) = ab + ac$  (trouver un exemple).

⚠ Ne pas oublier les parenthèses. Par exemple,  $A \cap B \cup C$  n'a pas de sens. Si  $A = [0, 1]$ ,  $B = [1, 2]$  et  $C = [2, +\infty[$ , on a  $(A \cap B) \cup C = \{1\} \cup [2, +\infty[$ , et  $A \cap (B \cup C) = \{1\}$ .

**Généralisation** - Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ , on définit de même la réunion  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  comme l'ensemble des  $x$  qui appartiennent à au moins l'un des ensembles  $A_1, A_2, \dots$  ou  $A_n$  et l'intersection  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  comme l'ensemble des  $x$  qui appartiennent à tous les ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_n$  :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid \exists i \in \{1, 2, \dots, n\}, x \in A_i\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, x \in A_i\}$$

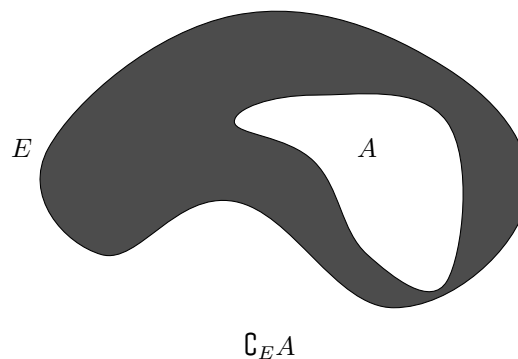
*Exercice* - Soient  $A, B, C, D$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

1°) Montrer que  $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$ . Simplifier le résultat lorsque l'on a  $A \subset C$ .

2°) Soit  $E$  un ensemble qui est la réunion de deux sous-ensembles  $A$  et  $B$ . On suppose que  $A$  et  $B$  sont finis et ont respectivement  $n$  et  $m$  éléments. Si  $A$  et  $B$  sont disjoints, combien  $E$  a-t-il d'éléments ? Plus généralement, si  $A \cap B$  a  $p$  éléments, montrer que  $E$  en a  $n + m - p$ .

## 4. Complémentaire d'un ensemble

**Définition 1.4** - Soient  $E$  un ensemble et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . Le complémentaire de  $A$  dans  $E$  est l'ensemble  $\{x \mid x \in E \text{ et } x \notin A\}$ . On le note  $\complement_E A$  ou  $E \setminus A$  ou encore lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $E$ ,  ${}^c A$ ,  $A^c$  ou  $\bar{A}$ .



### Propriétés du complémentaire (Lois de De Morgan) -

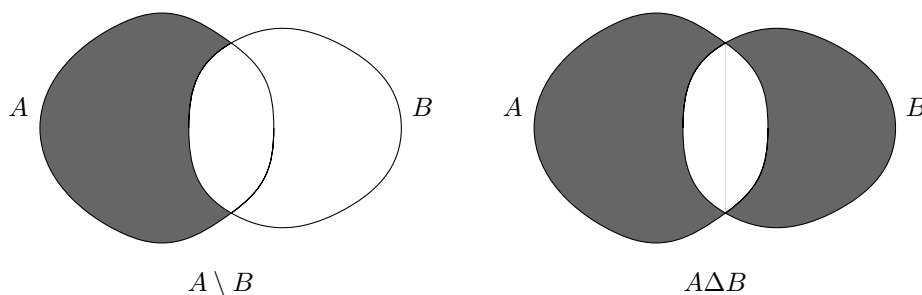
Soient  $E$  un ensemble,  $A, B, C$  des sous-ensembles de  $E$ .

- 1)  $\complement_E(\complement_E A) = A$
- 2)  $A \subset B$  si et seulement si  $(\complement_E B) \subset (\complement_E A)$
- 3)  $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- 4)  $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

**Définition 1.5** - Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . On note

1 -  $A \setminus B$  l'ensemble  $\{x \in A \mid x \notin B\}$  et on l'appelle différence de  $A$  et  $B$ .

2 -  $A \Delta B$  l'ensemble  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$  et on l'appelle différence symétrique de  $A$  et  $B$ .



- Remarques** -
- La différence symétrique correspond au 'ou' exclusif :  $A \Delta B$  est l'ensemble des points qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$ , mais PAS à  $A$  et  $B$  en même temps.
  - Lorsque l'on a  $B \subset A$ , la différence de  $A$  et  $B$  est aussi le complémentaire de  $B$  dans  $A$ .
  - $A \setminus B = A \cap B^c$ .
  - $A \subset B$  si et seulement si  $A \setminus B = \emptyset$ .
  - La différence symétrique  $A \Delta B$  est aussi égale à  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .



Ne pas oublier les parenthèses.

Trouver un exemple d'ensembles vérifiant  $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$ .

**Exercice** - 1°) Soient  $E = \mathbb{R}$ ,  $A = \{x \in E \mid x^2 - 3x + 1 > 0\}$  et  $B = \{x \in E \mid x > 0\}$ .

Montrer que les ensembles  $A^c, B^c, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$  et  $A \Delta B$  sont des intervalles ou des réunions d'intervalles et préciser lesquels.

2°) Soient  $A$  et  $B$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $A = B$
- 2)  $A \setminus B = B \setminus A$
- 3)  $A \Delta B = \emptyset$

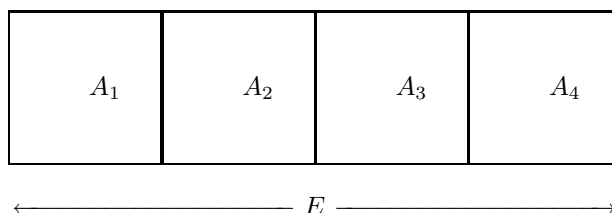
3°) Même question pour les propriétés suivantes. (On peut montrer qu'elles sont toutes équivalentes à la première) :

- 1)  $A \subset B$
- 2)  $B^c \subset A^c$
- 3)  $A \cap B = A$
- 4)  $A \cup B = B$
- 5)  $A \setminus B = \emptyset$
- 6)  $A \Delta B = B \setminus A$

## 5. Partitions

**Définition 1.6** – Soient  $E$  un ensemble et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des sous-ensembles de  $E$ . On dit que ces sous-ensembles forment une partition de  $E$  si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) Leur réunion est égale à  $E$  :  $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
- 2) Ils sont deux à deux disjoints : si  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $i \neq j$  alors  $A_i \cap A_j = \emptyset$
- 3) Chacun de ces ensembles est non vide : pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $A_i \neq \emptyset$ .



- Exemples -**
- Sur le dessin ci-dessus, les ensembles  $A_1, \dots, A_4$  forment une partition de l'ensemble  $E$ .
  - Soient  $E = \mathbb{N}$ ,  $A_1$  le sous-ensemble formé des entiers pairs,  $A_2$  le sous-ensemble formé des entiers impairs. Alors, les sous-ensembles  $A_1$  et  $A_2$  forment une partition de  $E$ .
  - Soient  $E = \mathbb{R}$ ,  $A_1 = \mathbb{R}_+^*$ ,  $A_2 = \mathbb{R}_-^*$ ,  $A_3 = \{0\}$ . Alors, les sous-ensembles  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  forment une partition de  $E$ .

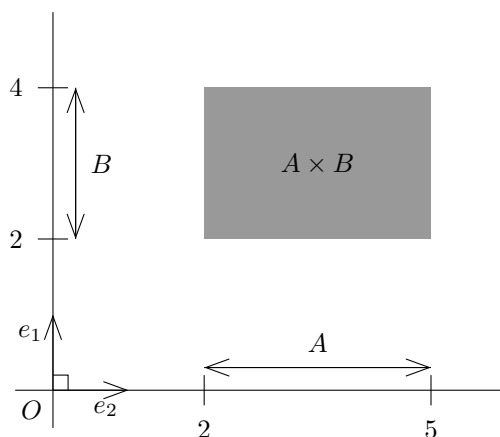
**⚠** Attention à ne pas confondre les termes “disjoint” et “distinct.”  $\mathbb{R}^-$  et  $\mathbb{R}^+$  sont distincts, mais pas disjoints.  $\mathbb{R}^{-*}$  et  $\mathbb{R}^{+*}$  sont distincts et disjoints.

*Exercice - Soient  $a, b$  et  $c$  des réels, avec  $a \geq 0$ . A quelle condition les sous-ensembles  $]0, a[, ]-\infty, b]$  et  $[c, +\infty[$  forment-ils une partition de  $\mathbb{R}$  ?*

## 6. Produit

**Définition 1.7** – Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $x$  un élément de  $E$  et  $y$  un élément de  $F$ . Le couple  $(x, y)$  est la donnée des deux éléments  $x$  et  $y$  dans cet ordre. Les éléments  $x$  et  $y$  sont appelés respectivement première et deuxième coordonnée du couple  $(x, y)$ . Deux couples  $(x, y)$  et  $(x', y')$  sont égaux si et seulement si on a  $(x = x' \text{ et } y = y')$ . Le produit cartésien  $E \times F$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x \in E$  et  $y \in F$ .

- Exemples -**
- Si  $E = F = \mathbb{R}$ , le produit  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est aussi noté  $\mathbb{R}^2$ . On le représente souvent par l'ensemble des points du plan affine euclidien, en choisissant un repère orthonormé  $(O, e_1, e_2)$ . Le couple  $(x, y)$  est représenté par le point d'abscisse  $x$  et d'ordonnée  $y$ .
  - Si  $A = [2, 5]$  et  $B = [2, 4]$ , le produit  $A \times B$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  qui peut être représenté par le rectangle sur la figure ci-dessous.



## PRODUIT

**Remarques** - • Il ne faut pas confondre le couple  $(x, y)$  et l'ensemble  $\{x, y\}$ . Si  $x \neq y$ , on a  $(x, y) \neq (y, x)$ , mais  $\{x, y\} = \{y, x\}$ . Le couple  $(x, x)$  est représenté par un point de la première diagonale et l'ensemble  $\{x, x\}$  est le singleton  $\{x\}$ .

•  $A \subset E$  et  $B \subset F$  si et seulement si  $A \times B \subset E \times F$ .

• Un produit cartésien de deux ensembles est vide si et seulement si l'un au moins des deux ensembles est vide.

**Généralisation** - Si on considère des ensembles  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , on peut de même définir les  $n$ -uples  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  où  $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$  et le produit  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ . En particulier,  $\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ facteurs}}$  est encore noté  $\mathbb{R}^n$ . De même, on note  $E^n$  l'ensemble  $\underbrace{E \times \dots \times E}_{n \text{ facteurs}}$ .

---

*Exercice - 1°) Soit  $A = B = \{1, 2\}$ . Donner tous les sous-ensembles de  $A \times B$ .*

*2°) On considère les ensembles  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A = \{(i, j) \in E^2 \mid i < j\}$ ,*

*$B = \{(i, j) \in E^2 \mid i = j\}$  et  $C = \{(i, j) \in E^2 \mid i > j\}$ . Les représenter par un dessin, et montrer que  $A, B$  et  $C$  forment une partition de  $E \times E$ .*

---

## EXERCICES D'APPLICATION

### Exercice n°1

Soient  $E = \mathbb{C}$ ,  $A = \{z \in E \mid |z| \leq 1\}$  et  $B = \{z \in E \mid \Re(z) < 1\}$ . Représenter  $\mathbb{C}_E A$ ,  $\mathbb{C}_E B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  et  $A \Delta B$ .

### Exercice n°2

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? (Sinon, donner un contre-exemple)

- 1)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
- 2)  $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

### Exercice n°3

Soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ . Montrer les égalités  $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$  et  $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ .

### Exercice n°4

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

- 1) Simplifier  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \cup (A \cup B)^c \cup C$ .
- 2) Simplifier  $(A \setminus (B^c \cup C)) \cup A^c \cup B^c \cup C$ .

### Exercice n°5

Soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

- 1) Montrer que l'on a  $((A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c)$  et  $((A \setminus B) \cup B = A \cup B)$ .
- 2) En déduire que l'on a  $E = (C \setminus D) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup A^c \cup B^c \cup D$ .

### Exercice n°6

Léon et Nicole travaillent dans un centre de lexicographie. Ils disposent de trois dictionnaires  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Leur patron donne à Léon le travail suivant : former d'abord une liste des mots communs aux dictionnaires  $A$  et  $B$ , former ensuite une liste de mots communs aux dictionnaires  $B$  et  $C$ , enfin chercher les mots qui figurent dans l'une ou l'autre liste, mais pas dans les deux à la fois. Léon demande à Nicole de l'aider en dressant une liste des mots figurant dans le dictionnaire  $A$  ou dans le dictionnaire  $C$ , mais pas dans les deux à la fois. Ensuite Léon se charge de trouver les mots communs à cette liste et au dictionnaire  $B$ . Le patron obtiendra-t-il le résultat demandé ?

### Exercice n°7

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$  et  $C$  et  $D$  deux sous-ensembles de  $F$ . Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ?

- 1)  $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$ .
- 2)  $(A \times C) \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times C$ .

### Exercice n°8

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Un sous-ensemble  $X$  de  $E \times F$  est-il toujours de la forme  $A \times B$  où  $A$  appartient à  $\mathcal{P}(E)$  et  $B$  appartient à  $\mathcal{P}(F)$  ?

### Exercice n°9

On suppose que les sous-ensembles  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  forment une partition de l'ensemble  $E$ . Combien y-a-t-il de façons de former une partition de  $E$  avec des sous-ensembles qui sont des réunions de certains des  $A_i$  ?

INDICATIONS ET SOLUTIONS SOMMAIRES

**Exercice n°2**

- 1) Non - Contre-exemple :  $A = C = \mathbb{R}, B = \emptyset, A \setminus (B \setminus C) = \mathbb{R}, (A \setminus B) \setminus C = \emptyset$ .  
2) Non - Contre-exemple :  $A = \mathbb{R}, B = C = \emptyset, A \cup (B \setminus C) = \mathbb{R}, (A \cup B) \setminus (A \cup C) = \emptyset$ .

**Exercice n°4**

On trouve  $E$ .

**Exercice n°6**

Oui - Considérer  $A, B, C$  comme des ensembles (de mots) et utiliser la distributivité de  $\cap$  par rapport à  $\Delta$ .

**Exercice n°7**

Oui.

**Exercice n°8**

Non - Contre-exemple :  $E = F = \mathbb{R}$  et  $X$  le cercle  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .

**Exercice n°9**

15.