UNITE PEDAGOGIQUE DE MATHEMATIQUE
UNIVERSITE POLYTECHNIQUE DE BINGERVILLE
UE : **PROBABILITE-STATISTIQUE**

LICENCE 2 **ASSRI et MIAGE**
1er SEMESTRE, Année 2021-2022

TRAVAUX DIRIGES : FICHE 2

EXERCICE 1

Soit X la variable aléatoire définie par :

$P(X = k) = ak(8 - k)$ si $k \in \{0,1,2, \dots \dots ..,8\}$

$P(X = k) = 0$ si $k \notin \{0,1,2, \dots \dots ..,8\}$

1) Calculer a
2) Calculer la moyenne, la variance, et l'écart-type de X.

EXERCICE2

1) Montre que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & pour \quad x < -1 \; et \; x \geq 1 \\ x + 1 & pour \quad -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 1 & pour \quad x \geq 1 \end{cases}$$

est une fonction de densité de probabilité.

2) Déterminer sa fonction de répartition, sa moyenne et la variance.

EXERCICE 3

Soit la fonction de répartition d'une variable d'une variable aléatoire X définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \; x \leq 0 \\ 1 - e^{\frac{-2x}{3}} & si \; x > 0 \end{cases}$$

1) Déterminer la densité de probabilité de X.
2) Calculer les moments d'ordre 1 (espérance mathématique) et d'ordre n et l'écart-type de X.
3) Calculer la probabilité de $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$ et $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$, m étant la moyenne de X.

EXERCIE 4

1) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Montrer qu'en tout point où elle est continue, f est une fonction de densité de probabilité. Déterminer sa fonction de répartition.

2) Soit g la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $ke^{-|x|} = \begin{cases} ke^{x} & si\ x < 0 \\ ke^{-x} & si\ x > 0 \end{cases}$

   a) Déterminer k pour que g soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
   b) Déterminer la fonction de répartition de X admettant g pour densité de probabilité.

EXERCIC 5 :*Utilisation des tables*

1) Soit T une variable aléatoire normale centrée et réduite. Déterminer α tel que $P(T > \alpha) = 0{,}95$.
2) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale $N(m, \sigma)$. Déterminer $P(m - \sigma \leq Y \leq m + \sigma)$ et $P(m - 2\sigma \leq Y \leq m + 2\sigma)$.
3) Déterminer β tel que $P(m - \beta\sigma \leq Y \leq m + \beta\sigma) = 95\%$.

EXERCICE 6

On suppose $X \rightsquigarrow \gamma(a,\rho)$. (Loi GAMMA de paramètre a et ρ)

$f_X(x) = \frac{\rho^a}{\Gamma(a)} e^{-\rho x} x^{a-1} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ **avec** $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{a-1} dx$

1) Démontrer que $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$
2) Démontrer que $E(X^r) = \frac{\Gamma(a+r)}{\rho^r\,\Gamma(a)}$. En déduire $E(X)$ et $V(X)$

EXERCICE 7

Soit T une V.A suivant une loi normale centrée réduite. Calculer :

$P(T < 0)$; $P(T < -0{,}95)$; $P(-1 < T < 2)$; $P(|T| < 2)$; $P(|T| > 1)$; $P(T < 2\ /\ T < 2{,}3)$
$P(T < 2\ /\ T > 1$

EXERCICE 8

Lors d'un examen de fin d'études, uniformisé au niveau national, la moyenne obtenue est 500, avec un écart-type de 100. La distribution est sensiblement normale.
Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant choisi au hasard obtienne une note :

1) Inférieure à 300 ?
2) Supérieure à 650 ?
3) Comprise entre 500 et 650 ?

EXERCICE 9

Une usine fabrique des vis dont 3% ont des défauts.

1) On prélève 1000 vis au hasard. Quelle est la probabilité :
   a) D'avoir plus de 50 vis défectueuses ?
   b) D'avoir entre 20 et 40 vis défectueuses ?
2) On veut 1950 vis sans défaut. Par prudence on en prélève 2000 au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir suffisamment de vis en bon état ?