UPB ANNÉE ACADÉMIQUE 2020-2021
Algèbre 1 *Licence 1*

T D 2 :

Exercice 1. *Nous considérons les relations suivantes :*

1. $E = \mathbb{N}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -y$,
2. $E = \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$.

Ces relations sont-elles réflexives, antisymétriques, symétriques, transitives ? Sont-elles des relations d'ordre, d'équivalence ?

Exercice 2. *Soit E l'ensemble des diviseurs positifs de 60, soient x et y des éléments de E, soient A et B des parties de E. On définit les relations binaires R, S et T sur E par :*

$$xRy \leftrightarrow x \text{ divise } y$$

$$xSy \leftrightarrow x - y \text{ multiples de } 5$$

$$ATB \leftrightarrow A \text{ inclus dans } B.$$

Repondre par vrai ou faux

— R *est une relation d'équivalence*
— S *est une relation d'équivalence*
— T *est une relation d'équivalence*
— R *est une relation d'ordre*
— S *est une relation d'ordre*
— T *est une relation d'ordre*
— T *est un ordre total*
— T *est un ordre partiel*
— *A-t-on 6 appartient à* $\dot{15}$ *suivant* S *?*
— $\dot{10}$ *suivant S a 6 éléments dans* E *?*

Exercice 3. *Soit $E = \{1; 2; 3; 4, 5\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E dont le graphe est :* $\{(1,1); (1,2); (1,4); (2,1); (2,2); (2,4); (3,3); (3,5); (4,1), (4,2); (4,4); (5,3); (5,5)\}$

1. *Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer la classe de 2, notée* $\overline{2}$.
3. *Déterminer le quotient* $E/\mathcal{R}$.

Exercice 4. *Dans $\mathbb{N}^*$, on considère la relation notée $|$ qui est la relation divise, $a|b$ se lit a divise b ou encore b est un multiple de a ; la définition mathématique de cette relation étant*

$$a|b \text{ si et seulement si } \exists k \in \mathbb{N}^*,\ b = ka.$$

1. *Démontrer que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. Cet ordre est-il total ? Donner des éléments comparables et non comparables.*

2. *On considère la relation divise sur* $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
   (a) *Construire le diagramme sagital de cette relation.*
   (b) *Donner deux minorants et deux majorants de* E.
   (c) E *admet-il un maximun ? un mnimum ?*
   (d) *Donner deux minorants et deux majorants de* $V = \{2, 4\}$ *dans* E.
   (e) $U = \{4, 6, 8\}$ *admet-il une borne supérieure, borne inférieure dans E ? dans* $\mathbb{N}^*$ *?*

<u>Exercice</u> 5. *On munit l'ensemble* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *de la relation binaire notée* $\triangle$, *définie par : pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *et* $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$(x, y) \triangle (a, b) \Leftrightarrow x < a \quad ou \quad (x = a \quad et \quad y = b).$$

Démontrer que la relation $\triangle$ *est une relation d'ordre total sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> 6. 1. *Soit* f *l'application de l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4\}$ *dans lui-même définie par :*

$$f(1) = 4, \qquad f(2) = 1 \qquad , f(3) = 2, \qquad f(4) = 2.$$

Déterminer $f^{-1}(A)$ *lorsque* $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.

2. *Soit* g *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = x^2$.
   (a) *Déterminer* $g(B)$ *lorsque* $B = [-2; -1]$, $B = [1, 2]$
   (b) *Déterminer* $g^{-1}(C)$ *lorsque* $C = \{1\}$, $C = [1, 2]$.
   (c) *Déterminer* $g^{-1}(g(D))$ *pour* $D = [0, 1]$.
   (d) *Déterminer* $g(g^{-1}(E))$ *pour* $E = [-1, 0]$.

<u>Exercice</u> 7. *Soient* A, B *et* C *des ensembles et* $f : A \to B$ *et* $g : B \to C$ *des applications.*

1. *Montrer que* $g \circ f$ *injective* $\Rightarrow f$ *injective.*
2. *Montrer que* $g \circ f$ *surjective* $\Rightarrow g$ *surjective.*

<u>Exercice</u> 8. 1. *Soit* f *définie de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x; y) = (x; xy - y^3)$. f *est-elle injective, surjective, bijective ?*

2. *Soit* h *l'application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par* $h(x; y) = (2x+y-1; -3x+2y+2)$. *Démontrer que* h *est une bijection et déterminer sa bijection réciproque* h^{-1}.

<u>Exercice</u> 9. *Vrai ou faux ?*

1. *0 est élément neutre de la soustraction dans* $\mathbb{Z}$ *;*
2. *Les ensembles suivants, munis de la multiplication des réels sont-ils des groupes ?*
   (a) $\{1, -1\}$ *;*
   (b) $\{1, -1, \frac{1}{2}, 2\}$
3. *On considère le groupe* $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$ *formé de l'ensemble des nombres complexes non nuls, muni de la multiplication.*
   L'application qui à $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *associe* z^2 *est un automorphisme de* $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$ *;*

4. *Tout élément de* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *est son propre inverse pour la division.*
5. *Le nombre de sous groupes d'un groupe est supérieur ou égal à 2 ;*
6. *Soit* $(G, .)$ *un groupe. Soit* C *la partie de* G *définie par :*

$$C = \{x \in G/\ \forall x \in G,\ xy = yx\}.$$

   C *est un sous groupe de* G *;*
7. *Si un anneau possède des éléments inversibles, alors c'est un corps ;*
8. *Deux groupes isomorphes ont le même élément neutre.*

Exercice 10. *Dans l'ensemble des nombres réels, on définit la loi de composition interne* $" \star "$ *par* $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \star b = a$

1. $" \star "$ *est elle associative ?*
2. $" \star "$ *admet elle un élément neutre ?*
3. $" \star "$ *est elle commutative ?*

Exercice 11.
Soit $*$ *la loi définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x * y = x \times y + (x^2 - 1) \times (y^2 - 1)$$

où $x^2 = x \times x$ *et* $y^2 = y \times y$ *avec* $+$ *et* $\times$ *les opérations usuelles sur* $\mathbb{R}$*.*

1. *La loi* $*$ *est-elle associative sur* $\mathbb{R}$ *? Commutative sur* $\mathbb{R}$ *?*
2. *Vérifier que* $\mathbb{R}$ *possède un élément neutre pour la loi* $*$*.*
3. *La loi* $*$ *confère-t-elle à* $\mathbb{R}$ *une structure de groupe ?*
4. *Calculer le(s) symétrique(s) du réel 2 pour la loi* $*$*.*
5. *Résoudre les équations suivantes :* $2 * x = 2$*,* $2 * x = 5$*.*

Exercice 12. *On note*

$$H = \{x + y\sqrt{3}\ /\ x^2 - 3y^2 = 1 \ et\ (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

1. *Justifier que* $H \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *;*
2. *Établir que* $(H, \times)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \times)$*, (*$\times$ *désigne la multiplication usuelle dans* $\mathbb{R}$*)*

Exercice 13.
On définit sur $\mathbb{R}$ *les lois* $*$ *et* $\top$ *par*

$$x * y = ax + by - 1 \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}), \qquad x \top y = x + y - x \times y$$

avec $+$ *et* $\times$ *les opérations usuelles sur* $\mathbb{R}$

1. (a) *Déterminer des conditions sur* a *et* b *pour que* $*$ *soit commutative dans* $\mathbb{R}$*.*
   (b) *Déterminer des conditions sur* a *et* b *pour que* $*$ *soit associative dans* $\mathbb{R}$*.*
2. *On pose* $a = b = 1$*.*
   (a) *Montrer que* $(\mathbb{R}, *)$ *est un groupe commutatif.*
   (b) *Montrer que la loi* $\top$ *est distributive par rappport à la loi* $*$*.*
   (c) $(\mathbb{R}, *, \top)$ *est il un corps commutatif ?*