Algèbre 2

T D

Exercice 1

Soit $a\epsilon\mathbb{R}^*$.On considère le système (S) $\begin{cases} ay + a^2z = a^2 \\ \frac{1}{a} + az = a \\ \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a}y = 1 \end{cases}$

1) Déterminer trois matrices A, X et B telles que (S)<=>AX=B
2) Montrer que $A^2-A-2I_3=0$.
3) En déduire que A est inversible puis calculer A^{-1}.

Exercice 2

Soit β= (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$f∈ $L(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice associée dans la base β est la matrice définie par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soient les vecteurs V_1, V_2 et V_3définis par : $V_1=e_1$

$V_2=e_1+e_2$

$V_3=e_1+e_3$

1) Montrer que β'= (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Exprimer f(V_1), f(V_2) et f(V_3) en fonction de e_1, e_2 et e_3.
3) Exprimer f(V_1), f(V_2) et f(V_3) en fonction de V_1, V_2 et V_3.
4) En déduire la matrice A' associée à f dans la base β'.
5) En déduire les valeurs propres de f.
6) Déterminer les sous espaces propres de f.
7) F est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Soient U_1= (1 ; -1 ;2), U_2= (1 ;1 ; -1) et U_3= (-1 ; -3 ; -7)

On pose E=vect (U1, U2, U3)

1) Donner une base de E.
2) Montrez que F= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , x+y+z=0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer dim(F).
4) Donner une base $E \cap F$.

Exercice 4

Soient E= $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, x+y+z=0} et v_1=(1 ;-2 ;3), v_2=(2 ;1 ;-1). On pose F=vect (v_1, v_2)

1) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer $E \cap F$.
3) A-t-on $E \oplus F$?

Exercice 5

1) On considère la matrice A=$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2=2I_3-A$.
   b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2) On considère B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
   a) Calculer B^3-B.
   b) En déduire que B est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6

1) Soient A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   a) Calculer A^2, A^3 puis montrer que $A^3-A^2-A+I_3=0$.
   b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
   c) Montrer que $B^3-3B+2B=0$. En déduire que B n'est pas inversible.
2) Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :
   a) A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   b) B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   c) C=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   d) D=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 7

On considère que A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Verifier que $A^2=A+2I_3$.
2) En déduire que A est inversible puis déterminer son inverse.
3) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $A^n=U_nA+V_nI_3$ avec U_n et V_n qui sont deux suites à déterminer.

Exercice 8

1) Cherchez les valeurs propres et la dimension des sous espaces propres des matrices suivantes :

A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ E=$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

2) Ces matrices sont-elles diagonalisables ?

<u>Exercice</u> 9

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dont sa matrice dans sa base canonique est définie par A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le noyau et Im(f).
2) Trouver une base dont la matrice de f est B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Soit A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   a) Déterminer rg(A)
   b) Soit f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique. Déterminer le noyau et Im(f).

4) Soient A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer AB; BA; $(A+B)^2$ et A^2+B^2+2AB.