Logique, ensembles et applications

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur `www.maths-france.fr`

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **IT

Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

1. (f étant une application du plan dans lui-même)
   (a) f est l'identité du plan.
   (b) f a au moins un point invariant (on dit aussi point fixe).
2. (f étant une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
   (a) f est l'application nulle.
   (b) L'équation $f(x) = 0$ a une solution.
   (c) L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution.
3. ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite réelle)
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Correction ▼ [005103]

Exercice 2 *IT

Donner la négation des phrases suivantes

1. $x \geqslant 3$
2. $0 < x \leqslant 2$.

Correction ▼ [005104]

Exercice 3 **IT

Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

1. « $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ ».
2. « $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ ».

Donner un exemple de fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux non nulles et dont le produit est nul.

Correction ▼ [005105]

Exercice 4 **IT

Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ puis vérifier que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ puis préciser f^{-1} :

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $I =]-\infty, 2]$.
2. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$, $I =]-2, +\infty[$.
3. $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$, $I = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

4. $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $I = \mathbb{R}$.

Correction ▼ [005106]

Exercice 5 **IT

Pour $z \neq i$, on pose $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$. Montrer que f réalise une bijection de $D = \{z \in \mathbb{C}/\ |z| < 1\}$ sur $P = \{z \in \mathbb{C}/\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Préciser f^{-1}.

Correction ▼ [005107]

Exercice 6 **T

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Trouver une démonstration directe.

Correction ▼ [005108]

Exercice 7 ***I

1. Montrer par récurrence que, pour tout naturel non nul n, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. En calculant la différence $(k+1)^2 - k^2$, trouver une démonstration directe de ce résultat.
2. Calculer de même les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ et $\sum_{k=1}^{n} k^4$ (et mémoriser les résultats).
3. On pose $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer les S_p de proche en proche.

Correction ▼ [005109]

Exercice 8 *IT

Montrer que : ($g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective) et ($g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective).

Correction ▼ [005110]

Exercice 9 **T

Parmi $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ deux sont injectives et une est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Correction ▼ [005111]

Exercice 10 **T

A et B sont des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $(A\Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \varnothing)$.
2. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
3. $A\Delta B = B\Delta A$.
4. $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
5. $A\Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$.
6. $A\Delta C = B\Delta C \Leftrightarrow A = B$.

Correction ▼ [005112]

Exercice 11 ***IT

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indéxée par un ensemble I et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble F indéxée par un ensemble I. Soit f une application de E vers F. Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i)$ et $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$ (recommencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires).
2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
3. $f(E \setminus A_i)$ et $F \setminus f(A_i)$.

4. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$ et $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
5. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$ et $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
6. $f^{-1}(F\setminus B_i)$ et $E\setminus f^{-1}(Bi)$.

Correction ▼ [005113]

Exercice 12 ***IT

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes (f est une application d'un ensemble E dans lui-même) :

1. f est injective.
2. $\forall X\in\mathscr{P}(E),\ f^{-1}(f(X))=X$.
3. $\forall (X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2,\ f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$.
4. $\forall (X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2,\ X\cap Y=\varnothing\Rightarrow f(X)\cap f(Y)=\varnothing$.
5. $\forall (X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2,\ Y\subset X\Rightarrow f(X\setminus Y)=f(X)\setminus f(Y)$.

Correction ▼ [005114]

Exercice 13 *****

k est un entier impair. Montrer par récurrence que, pour $n\geqslant 1$, la somme $1^k+2^k+...+n^k$ est un entier divisible par $\frac{n(n+1)}{2}$. [005115]

Exercice 14 ****

Pour $n\geqslant 1$, on pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que, pour $n\geqslant 2$, H_n n'est jamais un entier (indication : montrer par récurrence que H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair en distinguant les cas où n est pair et n est impair).

Correction ▼ [005116]

Exercice 15 ***I Théorème de CANTOR

1. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2. En considérant la partie $A=\{x\in E/\ x\notin f(x)\}$, montrer qu'il n'existe pas de bijection f de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Correction ▼ [005117]

Exercice 16 **** Une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$

Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}^2 & \rightarrow & \mathbb{N}\\ (x,y) & \mapsto & y+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}\end{array}$. Montrer que f est une bijection. Préciser, pour $n\in\mathbb{N}$ donné, le couple (x,y) dont il est l'image.

Correction ▼ [005118]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. (a) $(f = Id_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) = M)$ et $(f \neq Id_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P}/\ f(M) \neq M)$.

   (b) (f a au moins un point fixe $\Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P}/\ f(M) = M$) et ($f$ n'a pas de point fixe $\Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) \neq M$).

   Constatez que les phrases $f(M) = M$ ou $f(M) \neq M$ **n'ont aucun sens** si elles ne sont pas accompagnées de quantificateurs.

2. (a) $(f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ et $(f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0)$.

   (b) (L'équation $f(x) = 0$ a (au moins) une solution si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$) et (l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$).

   (c) (L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution si et seulement si $\exists! x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$) et (l'équation $f(x) = 0$ n'a pas exactement une solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$ ou $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2/\ (x \neq x'$ et $f(x) = f(x') = 0)$.

3. (a) $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M)$ et $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}/\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > M)$.

   (b) $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \geqslant u_n)$ et $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non croissante $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} < u_n)$.

   (c) $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \geqslant u_n)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \leqslant u_n))$ et $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non monotone $\Leftrightarrow ((\exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} < u_n)$ et $(\exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} > u_n))$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Le contraire de $x \geqslant 3$ est $x < 3$. Le contraire de $0 < x \leqslant 2$ est $((x \leqslant 0)$ ou $x > 2)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Oui. Dans les deux cas, chaque fois que l'on se donne un réel x_0, $f(x_0)$ et $g(x_0)$ sont tous deux nuls.

2. Non. La deuxième affirmation implique la première mais la première n'implique pas la deuxième. La première phrase est la traduction avec des quantificateurs de l'égalité $fg = 0$. La deuxième phrase est la traduction avec quantificateurs de $(f = 0$ ou $g = 0)$. Voici un exemple de fonctions f et g toutes deux non nulles dont le produit est nul. Soient $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x > 0 \\ x \text{ si } x \leqslant 0 \end{array} \right. \end{array}$.

   Pour chaque valeur de x, on a soit $f(x) = 0$ (quand $x \leqslant 0$), soit $g(x) = 0$ (quand $x \geqslant 0$). On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0$ ou enfin, $fg = 0$. Cependant, $f(1) = 1 \neq 0$ et donc $f \neq 0$, et $g(-1) = -1 \neq 0$ et donc $g \neq 0$. Ainsi, on n'a pas $(f = 0$ ou $g = 0)$ ou encore, on n'a pas $((\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0))$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. f est dérivable sur $I =]-\infty, 2]$, et pour $x \in]-\infty, 2[$, $f'(x) = 2x - 4 < 0$. f est donc continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$. Par suite, f réalise une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $f(]-\infty, 2]) = [f(2), \lim\limits_{-\infty} f[= [-1, +\infty[= J$. On note g l'application de I dans J qui, à x associe $x^2 - 4x + 3 (= f(x))$. g est bijective et admet donc une réciproque. Déterminons g^{-1}. Soit $y \in [-1, +\infty[$ et $x \in]-\infty, 2]$.

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0.$$

   Or, $\Delta' = 4 - (3 - y) = y + 1 \geqslant 0$. Donc, $x = 2 + \sqrt{y+1}$ ou $x = 2 - \sqrt{y+1}$. Enfin, $x \in]-\infty, 2]$ et donc, $x = 2 - \sqrt{y+1}$. En résumé,

$$\forall x \in]-\infty, 2],\ \forall y \in [-1, +\infty[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{y+1}.$$

   On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[,\ g^{-1}(x) = 2-\sqrt{x+1}.}$$

2. On vérifie facilement que f réalise une bijection de $]-2,+\infty[$ sur $]-\infty,2[$, notée g. Soient alors $x \in]-2,+\infty[$ et $y \in]-\infty,2[$.

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow x(-y+2) = 2y+1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

(on a ainsi trouvé au plus une valeur pour x à savoir $x = \frac{2y+1}{-y+2}$, mais il n'est pas nécessaire de vérifier que cette expression est bien définie et élément de $]-2,+\infty[$ car on sait à l'avance que y admet au moins un antécédent dans $]-2,+\infty[$, et c'est donc nécessairement le bon). En résumé,

$$\forall x \in]-2,+\infty[,\ \forall y \in]-\infty,2[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,2[,\ g^{-1}(x) = \tfrac{2x+1}{-x+2}}.$$

3. f est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$. f est donc bijective de $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$ sur $f\left(\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[\right) = \left[f\left(-\frac{3}{2}\right), \lim_{+\infty} f\right[= [-1,+\infty[$. Notons encore f l'application de $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$ dans $[-1,+\infty[$ qui à x associe $\sqrt{2x+3}-1$. Soient alors $x \in [-\frac{3}{2},+\infty[$ et $y \in [-1,+\infty[$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}-1 = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-3+(y+1)^2) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}+y-1.$$

En résumé, $\forall x \in \left[-\frac{3}{2},+\infty\right[,\ \forall y \in [-1,+\infty[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}+y-1$. On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[,\ g^{-1}(x) = \tfrac{x^2}{2}+x-1.}$$

4. f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire. Pour $x \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant f(x) = \frac{x}{1+x} < \frac{1+x}{1+x} = 1$. Donc, $f([0,+\infty[) \subset [0,1[$. Par parité, $f(]-\infty,0]) \subset]-1,0]$ et même $f(]-\infty,0[) \subset]-1,0[$ car l'image par f d'un réel strictement négatif est un réel strictement négatif. Finalement, $f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$. Vérifions alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Soit $y \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $[0,+\infty[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq 1$, et positif, car $y \in [0,1[$. On a montré que :

$$\forall y \in [0,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1-y}).$$

Soit $y \in]-1,0[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $]-\infty,0[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq -1$, et strictement négatif, car $y \in]-1,0[$. On a montré que :

$$\forall y \in]-1,0[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1+y}).$$

Finalement,

$$\forall y \in]-1,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x),$$

ce qui montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. De plus, pour $y \in]-1,1[$ donné, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$ si $y \geqslant 0$ et $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$ si $y < 0$. Dans tous les cas, on a $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.
En notant encore f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ qui à x associe $\frac{x}{1+|x|}$, on a donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Montrons que la restriction de f à D, notée g, est bien une application de D dans P. Soit $z \in D$. On a $|z| < 1$ et en particulier $z \neq i$. Donc, $f(z)$ existe. De plus,

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+i}{z-i} + \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}\right) = \frac{1}{2}\frac{2z\bar{z}-2}{(z-i)(\overline{z-i})} = \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2} < 0.$$

Donc, $f(z)$ est élément de P. g est donc une application de D dans P.

2. Montrons que g est injective. Soit $(z,z') \in D^2$.

$$g(z) = g(z') \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{z'+i}{z'-i} \Rightarrow iz' - iz = iz - iz' \Rightarrow 2i(z'-z) = 0 \Rightarrow z = z'.$$

3. Montrons que g est surjective. Soient $z \in D$ et $Z \in P$.

$$g(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = Z \Leftrightarrow z = \frac{i(Z+1)}{Z-1} \text{ (car } Z \neq 1,$$

(ce qui montre que Z admet au plus un antécédent dans D, à savoir $z = \frac{i(Z+1)}{Z-1}$ (mais on le sait déjà car g est injective). Il reste cependant à vérifier que $\frac{i(Z+1)}{Z-1}$ est effectivement dans D). Réciproquement, puisque $\mathrm{Re}(Z) < 0$,

$$\left|\frac{i(Z+1)}{Z-1}\right| = \frac{|Z+1|}{|Z-1|} < 1$$

(Z étant strictement plus proche de -1 que de 1) et $z \in D$. Finalement g est une bijection de D sur P, et :

$$\boxed{\forall z \in P,\ g^{-1}(z) = \frac{i(z+1)}{z-1}.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. • Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1\times(1+3)}{4\times(1+1)(1+2)}$ et la formule proposée est vraie pour $n = 1$. Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.}$$

Démonstration directe. Pour $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right),$$

et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$. Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)\Big(\frac{n}{2}+1\Big) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

On peut donner plusieurs démonstrations directes.

1ère demonstration. Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ et donc $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2 - k^2) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ ce qui s'écrit $(n+1)^2 - 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n$ ou encore $2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n$ ou enfin $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2ème demonstration. On écrit

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & = & S\\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & S \end{array}$$

et en additionnant (verticalement), on obtient $2S = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$ d'où le résultat. La même démonstration s'écrit avec le symbole sigma :

$$2S = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} (k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n(n+1).$$

3ème demonstration. On compte le nombre de points d'un rectangle ayant n points de large et $n+1$ points de long. Il y en a $n(n+1)$. Ce rectangle se décompose en deux triangles isocèles contenant chacun $1+2+\ldots+n$ points. D'où le résultat.

$$\begin{array}{ccccccccc} * & & * & * & \dots & & & \dots & *\\ * & * & & \ddots & & & & & \vdots\\ * & * & * & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots\\ & & & & & & * & * & *\\ \vdots & & & & & \ddots & & * & *\\ * & \dots & & & \dots & * & * & & * \end{array}$$

4ème démonstration. Dans le triangle de PASCAL, on sait que pour n et p entiers naturels donnés, $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

Donc, pour $n \geqslant 2$ (le résultat est clair pour $n = 1$),

$$1+2+\ldots+n = 1+\sum_{k=2}^{n} C_k^1 = 1+\sum_{k=2}^{n}\left(C_{k+1}^2 - C_k^2\right) = 1+(C_{n+1}^2 - 1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{1}{6}(2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n),$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$, on a

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n) = \frac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1)(n(2n+1)+2n+1)\\ &= \frac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1)) = \frac{(n+1)^2((n+1)^2 - (2n+1))}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.}$$

Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$,

$$5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{5}((n+1)^5 - 1 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - n)\\ &= \frac{1}{30}(6(n+1)^5 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) - 6(n+1))\\ &= \frac{1}{30}(n+1)(6n^4+9n^3+n^2-n) = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{array}}$$

3. Soit p un entier naturel. Pour $k \geqslant 1$,

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} k^j.$$

Donc, pour $n \geqslant 1$:

$$\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} (\sum_{k=1}^{n} k^j) = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} k^j) = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)^{p+1} - k^{p+1}) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

D'où la formule de récurrence :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} S_j = (n+1)^{p+1} - 1.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (car } g \text{ est une application)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } g \circ f \text{ est injective).} \end{aligned}$$

   On a montré que $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, et donc f est injective.

2. Soit $y \in H$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe un élément x dans E tel que $g(f(x)) = y$. En posant $z = f(x) \in G$, on a trouvé z dans G tel que $g(z) = y$. On a montré : $\forall y \in H,\ \exists z \in G/\ g(z) = y$, et donc g est surjective.

Correction de l'exercice 9 ▲

On peut supposer sans perte de généralité que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives et que $h \circ f \circ g$ est surjective. D'après l'exercice 8, puisque $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h$ est injective, h est injective et puisque $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g)$ est surjective, h est surjective. Déjà h est bijective. Mais alors, h^{-1} est surjective et donc $f \circ g = h^{-1} \circ (h \circ f \circ g)$ est surjective en tant que composée de surjections. Puis h^{-1} est injective et donc $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ est injective. $f \circ g$ est donc bijective. $f \circ g$ est surjective donc f est surjective. $g \circ h \circ f$ est injective donc f est injective. Donc f est bijective. Enfin $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ est bijective en tant que composée de bijections.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Si $A = B = \varnothing$ alors $A \Delta B = \varnothing = A \cap B$. Si $A \Delta B = A \cap B$, supposons par exemple $A \neq \varnothing$. Soit $x \in A$. Si $x \in B$, $x \in A \cap B = A \Delta B$ ce qui est absurde et si $x \notin B$, $x \in A \Delta B = A \cap B$ ce qui est absurde. Donc $A = B = \varnothing$. Finalement, $A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.

2. Par distributivité de $\cap$ sur $\cup$,

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap B) \cup (B \cap C)) \cap (C \cup A) \\ &= ((A \cap C) \cup B) \cap (C \cup A) \text{ (car } B \cap B = B \text{ et } A \cap B \subset B \text{ et } B \cap C \subset B) \\ &= ((A \cap C) \cap C) \cup ((A \cap C) \cap A) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A) \\ &= (A \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A) \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \end{aligned}$$

3. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$.

4.

$$\begin{aligned}x \in (A\Delta B)\Delta C &\Leftrightarrow x \text{ est dans } A\Delta B \text{ ou dans } C \text{ mais pas dans les deux}\\ &\Leftrightarrow ((x\in A \text{ et } x\notin B \text{ et } x\notin C) \text{ ou } (x\in B \text{ et } x\notin A \text{ et } x\notin C) \text{ ou } (x\in C \text{ et } x\notin A\Delta B)\\ &\Leftrightarrow x \text{ est dans une et une seule des trois parties ou dans les trois.}\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de A, B et C, $A\Delta(B\Delta C)$ est également l'ensemble des éléments qui sont dans une et une seule des trois parties A, B ou C ou dans les trois. Donc $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$. Ces deux ensembles peuvent donc se noter une bonne fois pour toutes $A\Delta B\Delta C$.

5. $A = B \Rightarrow A\setminus B = \varnothing$ et $B\setminus A = \varnothing \Rightarrow A\Delta B = \varnothing$.
$A \neq B \Rightarrow \exists x\in E/\ ((x\in A \text{ et } x\notin B) \text{ ou } (x\notin A \text{ et } x\in B)) \Rightarrow \exists x\in E/\ x\in (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = A\Delta B \Rightarrow A\Delta B \neq \varnothing$.

6. $\Leftarrow$ Immédiat.
$\Rightarrow$ Soit x un élément de A.
Si $x\notin C$ alors $x\in A\Delta C = B\Delta C$ et donc $x\in B$ car $x\notin C$.
Si $x\in C$ alors $x\notin A\Delta C = B\Delta C$. Puis $x\notin B\Delta C$ et $x\in C$ et donc $x\in B$. Dans tous les cas, x est dans B.
Tout élément de A est dans B et donc $A\subset B$. En échangeant les rôles de A et B, on a aussi $B\subset A$ et finalement $A = B$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit $x\in E$.

$$\begin{aligned}x\in f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right) &\Leftrightarrow \exists y\in \bigcup_{i\in I}A_i/\ x = f(y) \Leftrightarrow \exists i\in I,\ \exists y\in A_i/\ x = f(y)\\ &\Leftrightarrow \exists i\in I/\ x\in f(A_i) \Leftrightarrow x\in \bigcup_{i\in I} f(A_i)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).}$$

2. Soit $x\in E$.

$$\begin{aligned}x\in f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right) &\Leftrightarrow \exists y\in \bigcap_{i\in I}A_i/\ x = f(y) \Leftrightarrow \exists y\in E/\ \forall i\in I,\ y\in A_i \text{ et } x = f(y)\\ &\Rightarrow \forall i\in I/\ \exists y\in A_i/\ x = f(y) \Leftrightarrow \forall i\in I/\ x\in f(A_i)\\ &\Leftrightarrow x\in \bigcap_{i\in I} f(A_i)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).}$$

L'inclusion contraire n'est pas toujours vraie. Par exemple, pour x réel on pose $f(x) = x^2$ puis $A = \{-1\}$ et $B = \{1\}$. $A\cap B = \varnothing$ et donc $f(A\cap B) = \varnothing$ puis $f(A) = f(B) = \{1\}$ et donc $f(A)\cap f(B) = \{1\}$.

3. Il n'y a aucune inclusion vraie entre $f(E\setminus A)$ et $F\setminus f(A)$. Par exemple, soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^2\end{array}$ et $A = [-1,2]$. $f(A) = [0,4]$ et donc $C_{\mathbb{R}}(f(A)) =]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$ mais $f(C_{\mathbb{R}}A) = f(]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[) =]1,+\infty[$ et aucune inclusion entre les deux parties n'est vraie.

4. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ f(x) \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).}$$

5. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ f(x) \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i).}$$

6. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(F \setminus B_i) \Leftrightarrow f(x) \in F \setminus B_i \Leftrightarrow f(x) \notin B_i \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(F \setminus B_i) = E \setminus f^{-1}(B_i).}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1) $\Rightarrow$ **2)** Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a toujours $X \subset f^{-1}(f(X))$. (En effet, pou $x \in E$, $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$). Réciproquement, soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(X)) &\Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \exists x' \in X /\ f(x) = f(x') \Rightarrow \exists x' \in X /\ x = x' \text{ (puisque } f \text{ est injective)} \\ &\Rightarrow x \in X. \end{aligned}$$

Finalement, $f^{-1}(f(X)) \subset X$ et donc $f^{-1}(f(X)) = X$. **2)** $\Rightarrow$ **1)** Soit $x \in X$. Par hypothése, $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ ce qui signifie que $f(x)$ a un et un seul antécédent à savoir x. Par suite, tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f et f est injective.
1) $\Rightarrow$ **3)** Soit $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$. On a toujours $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ ($X \cap Y \subset X \Rightarrow f(X \cap Y) \subset f(X)$ et de même, $f(X \cap Y) \subset f(Y)$ et finalement, $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$). Réciproquement, soit $y \in F$. $y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow \exists (x,x') \in X \times Y /\ y = f(x) = f(x')$. Mais alors, puisque f est injective, $x = x' \in X \cap Y$ puis $y = f(x) \in f(X \cap Y)$. Finalement, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
3) $\Rightarrow$ **4)** Soit $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$. $X \cap Y = \varnothing \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y) = f(\varnothing) = \varnothing$.
4) $\Rightarrow$ **5)** Soit $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tel que $Y \subset X$. Puisque $X \setminus Y \subset X$, on a $f(X \setminus Y) \subset f(X)$. Mais, puisque $Y \cap (X \setminus Y) = \varnothing$, par hypothèse $f(X \setminus Y) \cap f(Y) = \varnothing$. Finalement,$f(X \setminus Y) \subset f(X) \setminus f(Y)$. Inversement, si $f(X) \setminus f(Y) = \varnothing$, l'inclusion contraire est immédiate et si $f(X) \setminus f(Y) \neq \varnothing$, un élément de $f(X) \setminus f(Y)$ est l'image d'un certain élément de X qui ne peut être dans Y et donc est l'image d'un élément de $X \setminus Y$ ce qui montre que $f(X) \setminus f(Y) \subset f(X \setminus Y)$ et finalement que $f(X) \setminus f(Y) = f(X \setminus Y)$.
5) $\Rightarrow$ **1)** Soit $(x_1,x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$. Posons $X = \{x_1,x_2\}$ et $Y = \{x_2\}$. On a donc $Y \subset X$. Par hypothèse $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$ ce qui fournit $f(\{x_1\}) = f(\{x_1,x_2\}) \setminus f(\{x_2\})$ ou encore, $\{f(x_1)\} = \{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_2)\}$. Maintenant, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $\{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_2)\} = \varnothing$ (et pas $\{f(x_1)\}$). Donc $f(x_1) \neq f(x_2)$. On a montré que f est injective.

Correction de l'exercice 14 ▲

Montrons par récurrence que, pour $n \geqslant 2$, H_n peut s'écrire sous la forme $\frac{p_n}{q_n}$ où q_n est un entier pair et p_n est un entier impair (la fraction précédente n'étant pas nécessairement irréductible mais à coup sûr pas un entier). Pour $n = 2$, $H_2 = \frac{3}{2}$ et H_2 est bien du type annoncé. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, on ait $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k est un entier pair et montrons que $H_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ où p_{n+1} est un entier impair et q_{n+1} est un entier pair. (Recherche. L'idée $H_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)p_n+q_n}{(n+1)q_n}$ ne marche à coup sur que si $(n+1)p_n + q_n$ est impair ce qui est assuré si $n+1$ est impair et donc n pair)

1er cas. Si n est pair, on peut poser $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $H_{n+1} = \frac{(2k+1)p_n+q_n}{(2k+1)q_n}$ et H_{n+1} est bien le quotient d'un entier impair par un entier pair.

2ème cas. Si n est impair, on pose $n = 2k-1$ où $k \geqslant 2$ (de sorte que $2k-1 \geqslant 3$).

$$H_{n+1} = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$$

(en séparant les fractions de dénominateurs pairs des fractions de dénominateurs impairs)

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2}H_k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}.$$

Maintenant, en réduisant au même dénominateur et puisque un produit de nombres impairs est impair, on voit que $\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$ est du type $\frac{K}{2K'+1}$ où K et K' sont des entiers. Ensuite, puisque $2 \leqslant k \leqslant 2k-1 = n$, par hypothèse de récurrence, $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k un entier pair. Après réduction au même dénominateur, on obtient

$$H_{n+1} = \frac{p_k}{2q_k} + \frac{K}{2K'+1} = \frac{(2K'+1)p_k + 2Kq_k}{2q_k(2K'+1)}.$$

$2Kq_k$ est un entier pair et $(2K'+1)p_k$ est un entier impair en tant que produit de deux nombres impairs. Donc le numérateur est bien un entier impair et puisque $2qk(2K'+1)$ est un entier pair, H_{n+1} est bien dans tous les cas de la forme désirée.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair et donc n'est pas un entier.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Il y a l'injection triviale $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{P}(E) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$.
2. Soit f une application quelconque de E dans $\mathscr{P}(E)$. Montrons que f ne peut être surjective. Soit $A = \{x \in E / \ x \notin f(x)\}$. Montrons que A n'a pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde que A a un antécédent a. Dans ce cas, où est a ?

$$a \in A \Rightarrow a \notin f(a) = A,$$

ce qui est absurde et

$$a \notin A \Rightarrow a \in f(a) = A,$$

ce qui est absurde. Finalement, A n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective. On a montré le théorème de CANTOR : pour tout ensemble E (vide, fini ou infini), il n'existe pas de bijection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Correction de l'exercice 16 ▲

f est bien une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ car, pour tout couple (x,y) d'entiers naturels, l'un des deux entiers $x+y$ ou $x+y+1$ est pair et donc, $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ est bien un entier naturel (on peut aussi constater que $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = 1+2+\ldots+(x+y)$ est entier pour $x+y \geqslant 1$).
Remarque. La numérotation de $\mathbb{N}^2$ a été effectuée de la façon suivante :

	0	1	2	3	$\ldots$	x	$\ldots$
0	0	1	3	6			
1	2	4	7				
2	5	8					
3	9						
$\vdots$							
y							
$\vdots$							

Sur une parallèle à la droite d'équation $y=-x$, la somme $x+y$ est constante. Il en est de même de l'expression $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ et quand on descend de 1 en y, on avance de 1 dans la numérotation.
Lemme. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! p \in \mathbb{N}/\ \frac{p(p+1)}{2} \leqslant n < \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.
Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on pourrait se contenter de constater que la suite des nombres triangulaires $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)_{p\geqslant 0}$ est strictement croissante. Néanmoins, on va fournir explicitement p en fonction de n. Soient n et p deux entiers naturels.

$$\begin{aligned}\frac{p(p+1)}{2} \leqslant n < \frac{(p+1)(p+2)}{2} &\Leftrightarrow p^2+p-2n \leqslant 0 \text{ et } p^2+3p+2-2n > 0\\ &\Leftrightarrow p \leqslant \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \text{ et } p > \frac{-3+\sqrt{8n+1}}{2} = -1+\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\\ &\Leftrightarrow p \leqslant \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} < p+1 \Leftrightarrow p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right).\end{aligned}$$

Le lemme est démontré.
Montrons que f est surjective (et au passage, déterminons l'antécédent d'un entier n donné). Soient n un entier naturel et $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ (p est un entier naturel). On pose $\left\{\begin{array}{l} x+y=p \\ y = n-\frac{p(p+1)}{2}\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} y = n-\frac{p(p+1)}{2} \\ x = p-y = \frac{p(p+3)}{2}-n\end{array}\right.$.
Tout d'abord, $y+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n-\frac{p(p+1)}{2}+\frac{p(p+1)}{2} = n$. Mais il reste encore à vérifier que x et y ainsi définis (qui sont à l'évidence des entiers relatifs) sont bien des entiers naturels. Puisque $\frac{p(p+1)}{2}$ est un entier naturel et que $n \geqslant \frac{p(p+1)}{2}$, y est bien un entier naturel. Ensuite, $\frac{p(p+3)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}+p$ est aussi un entier naturel et de plus,

$$\frac{p(p+3)}{2}-n \geqslant \frac{p(p+3)}{2}-\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}-1\right) = 0,$$

et x est bien un entier naturel. Ainsi, pour n naturel donné, en posant $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ puis $x = \frac{p(p+3)}{2}-n$ et $y = n-\frac{p(p+1)}{2}$, x et y sont des entiers naturels tels que $f((x,y)) = n$. f est donc surjective. Montrons que f est injective. Pour cela, on montre que si x et y sont des entiers naturels vérifiant $y+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n$, alors nécessairement, $x+y=p$ (et $y = n-\frac{p(p+1)}{2}$). Soient donc x et y deux entiers naturels. On a :

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \leqslant \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y = n < \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+(x+y+1) = \frac{(x+y+1)(x+y+2)}{2},$$

et le lemme montre que $x+y=p$. L'unicité du couple (x,y) est donc démontrée. f est une application injective et surjective et donc f est bijective. Sa réciproque est $f^{-1}: \begin{array}{lcl}\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^2 \\ n & \mapsto & \left(\frac{p(p+3)}{2}-n, n-\frac{p(p+1)}{2}\right)\end{array}$ où $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$.