UIST - UTA ANNÉE ACADÉMIQUE 2020-2021
Algèbre 2 *Licence 1 DAW IGL RIT SI*

T D :

Exercice 1. *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. *Donner les coefficients de la matrice* $a_{2,3}$ *et* $a_{1,2}$ *de la matrice* A.
2. *Calculer, lorsque c'est possible, les sommes suivantes :* $A+B$ *;* $B+C$ *;* $A+^t B$.
3. *Calculer, parmi les produits matriciels suivants, ceux qui ont un sens :*

$$AB,\ BA,\ A^2,\ AC,\ CA\ \ B\,{}^tB,\ AU,\ AV,\ UA,\ VA,\ C^2,\ BC,\ \ CB, {}^tB\,B\,,\ 2C.$$

Exercice 2.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer les déterminants des matrices M, P, Q, R.*
2. *Parmi ces trois matrices, préciser celle qui est inversible puis déterminer sa matrice inverse.*

Exercice 3. *Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :*

$$(S_1) \quad \begin{cases} x+y-2z &= -4 \\ -x-y-z &= -11 \\ 2x+y-z &= 8 \end{cases} \qquad (S_2) \quad \begin{cases} -2x+y+z &= 1 \\ x-2y+z &= -2 \\ x+y-2z &= 4 \end{cases}$$

$$(S_3) \quad \begin{cases} 3x+y+z &= 1 \\ x-y+2z &= 2 \\ x+3y-3z &= -3 \end{cases}$$

$$(S_4) \quad \begin{cases} x+y-3z &= 1 \\ 2x+y-2z &= 1 \\ x+y+z &= 3 \\ x+2y-3z &= 1 \end{cases} \qquad (S_5) \quad \begin{cases} x+y-3z &= 1 \\ 2x+y-2z &= 1 \\ 2x+y+2z &= 3 \\ x+y+z &= 3 \end{cases}$$

Exercice 4. *Dans $\mathbb{R}^2$, on pose :* $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ *et* $\alpha\,(x, y) = (\alpha x, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Ces deux lois de composition définissent-elles sur $\mathbb{R}^2$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 5.

1. *Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :* $u = (1, 2, -1);\ v = (1, 0, 1);\ w = (-1, 2, -3)$.
2. *Préciser si la famille constituée des vecteurs suivants sont liée ou libre.*
   $u = (7, 12);\ v = (18, -13);\ w = (-4, 17)$.

Exercice 6. *On considère les sous-ensembles suivants définis par des conditions sur les composantes d'un vecteur $a = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$.*
Indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectiriels et préciser alors leur dimension.

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\} \quad ; \quad E_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq 0\} \quad ; \quad E_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3\}$$
$$E_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 x_4 = 0\} \quad ; \quad E_5 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\} \quad ; \quad E_6 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1^2\}\,.$$

Exercice 7.

1. *Montrer que le vecteur $u\,(-3; 3; 2)$ de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1\,(1; 2; -3)$, $v_2\,(1; 1; -2)$ et $v_3\,(1; -1; 1)$.*
2. *Montrer que le vecteur $w\,(4; -1; 8)$ de $\mathbb{R}^3$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $u\,(1; 2; -1)$ et $v\,(6; 4; 2)$.*

Exercice 8. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x; y) = (x - 2y; x + y)$*

1. *Montrer que f est un automorphisme.*
2. *Donner la matrice associée à f.*

Exercice 9. *Soit $(e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
Soit $w_1 = (1; -2; 0)\,; w_2 = (-1; 2; 0)\,; w_3 = (0; 0; 2)$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $g\,(e_1) = w_1; g\,(e_2) = w_2$ et $g\,(e_3) = w_3$.
a. Exprimer $w_1; w_2$ et w_3 en fonction de $e_1; e_2$ et e_3.
b. Soit $v = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $g(v)$.
c. Trouver une base de $\ker g$. *est-elle injective ?*
d. $\ker g$ *et $Im(g)$ sont-ils supplémentaires.*

Exercice 10. *Soient $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel de base canonique $\mathbb{B} = \{e_1; e_2; e_3\}$ et l'endomorphisme f défini par $f(e_1) = e_1 + 3e_2$, $f(e_2) = -2e_1 + e_3$, $f(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3$*

1. Déterminer la matrice A associée à f.
2. Déterminer une base de $Ker(f)$ et de $Im(f)$.
3. Soit $u = e_1 + e_2 - e_3$, montrer que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer la matrice de f dans cette base.