UPB ANNÉE ACADÉMIQUE 2020-2021
Algèbre 1 *Licence 1*

T D 1 :

Exercice 1. *Disposer les éléments* $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10$ *dans un diagramme de Venn, sachant que :*

- $A \cap C = \{1; 4; 5\}$; • $B \backslash A = \{0; 3; 6\}$; • $A \cup B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$;
- $A \cap B = \{2; 4; 5; 7\}$; • $C \backslash A = \{0; 8\}$; • $A \cap B \cap C = \{4; 5\}$

Exercice 2. *On considère trois revues a, b et c. On considère E un ensemble de personnes. Soient A le sous ensemble de E composé de ceux qui lisent la revue a, B le sous ensemble de E composé de ceux qui lisent la revue b et C le sous ensemble de E composé de ceux qui lisent la revue c. $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ désignent respectivement les complémentaires dans E de A, B et C.*

1. *Déterminer en fonction de A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ et E, l'ensemble des personnes :*
   (a) *Qui ne lisent que a et b.*
   (b) *Qui ne lisent que c.*
   (c) *Qui lisent a ou b et ne lisent pas c.*
   (d) *Qui ne lisent ni a ni b.*
2. *Écrire en compréhension les ensembles $A \cup B \cup \overline{C}$ et $A \cap B \cap \overline{C}$.*

Exercice 3. *Écrire les ensembles suivants en extension :*

1. $A = \{x \mid x$ *est un nombre entier impair entre 1 et 15*$\}$
2. $B = \{x \mid x$ *est un jour de la semaine comportant un a*$\}$
3. $C = \{x \mid x$ *est un nombre entier et* $2 < x < 8\}$
4. $D = \{$*nombres entiers compris entre* $\sqrt{2}$ *et* $2\pi\}$
5. $E = \{x \in \mathbb{C};\ \exists (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ x = \dfrac{p}{n}\quad \text{et } 1 \leq p \leq 2n \leq 7\}$

Exercice 4. *Ecrire en compréhension les ensembles suivants :*

(1)	$[3, 8]$	(4)	$]4, +\infty[\cup\{2\}$	(7)	$]-3, 0]\cup]1, 5]$
(2)	$]-\infty, 7[$	(5)	$]-3, +\infty[\cup]-\infty, -8[$	(8)	$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
(3)	$[-9, 4[$	(6)	$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$		

Exercice 5. *A, B et C désignent des parties d'un même ensemble E.*

1. *Montrer que* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. *Simplifier* $\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})$.

Exercice 6. *Soient A, B et C des parties quelconques d'un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Simplifier les ensembles suivants :*

(1) $X = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$,

(2) $Y = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$,

(3) $Z = \overline{\overline{A} \cap B} \cap (\overline{A \cap B})$,

(4) $U = [A \cap (B \cup C)] \cap [(B \cap C) \cup \overline{C}]$,

(5) $V = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C) \cup \overline{[(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup C)]}$.

Exercice 7. *Soit $E = a, b, c, d, e, f, g$; dans chacun des cas suivants, dire si la famille de parties est une partition de E.*

1. $A_1 = \{a, b, e\}$, $A_2 = \{c, g\}$ *et* $A_3 = \{d\}$.
2. $B_1 = \{c, e, g\}$, $B_2 = \{a, d, f\}$ *et* $B_3 = \{b, e\}$.
3. $C_1 = \{a; b; e; g\}$, $C_2 = \{c; d\}$.

Exercice 8.

1. *Soit $A = B = \{1, 2\}$. Donner tous les sous-ensembles de $A \times B$.*
2. *On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{(i, j) \in E^2 | i < j\}$, $B = \{(i, j) \in E^2 | i = j\}$ et $C = \{(i, j) \in E^2 | i > j\}$. Les représenter par un dessin, et montrer que A, B et C forment une partition de $E \times E$.*

Exercice 9. *Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?*

1. $(2 < 3)$ *et* $(2 \mid 4)$.
2. $(2 < 3)$ *et* $(2 \mid 5)$.
3. $(2 < 3)$ *ou* $(2 \mid 5)$.
4. $(2 < 3)$ *et* $(non(2 \mid 5))$.
5. $(non(2 < 3))$ *ou* $(2 \mid 5)$.
6. $((2 < 3)$ *et* $(2 \mid 4))$ *ou* $(3 \mid 6)$.

Exercice 10. *Soit n un entier quelconque. Parmi les phrases suivantes, lequelles traduisent correctement l'implication*

$$(4 \; divise \; n) \Rightarrow (2 \; divise \; n);$$

lesquelles ne la traduisent pas et pourquoi ?

1. *Si 4 divise n alors 2 divise n.*
2. *2 divise n seulement si 4 divise n.*
3. *Pour que 2 divise n il faut que 4 divise n.*
4. *Pour que 2 divise n il suf ?t que 4 divise n.*
5. *la condition « 2 divise n » est nécessaire pour que 4 divise n.*
6. *la condition « 4 divise n » est nécessaire pour que 2 divise n.*
7. *la condition « 4 divise n » est suf ?sante pour que 2 divise n.*

Exercice 11. *Nier les assertions suivantes :*

1. *tout triangle rectangle possède un angle droit ;*
2. *dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;*
3. *pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation z < x implique le relation z < x + 1.*

<u>Exercice</u> 12. *Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :*

1. *f est majorée ;*
2. *f est bornée ;*
3. *f est paire ;*
4. *f est impaire ;*
5. *f ne s'annule jamais ;*
6. *f est périodique ;*
7. *f est croissante ;*
8. *f est strictement décroissante ;*
9. *f n'est pas la fonction nulle ;*
10. *f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;*
11. *f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;*
12. *f est inférieure à g ;*
13. *f n'est pas inférieure à g.*

<u>Exercice</u> 13.

1. *Donner la négation des cinq assertions suivantes :*

$$P \wedge \overline{Q}; \qquad P \vee (Q \wedge R); \qquad P \Leftrightarrow Q; \qquad P \Rightarrow \overline{Q}; \qquad P \Rightarrow (Q \Rightarrow R).$$

2. *Vérifier, à partir d'une table de vérité que*

$$((P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)).$$

<u>Exercice</u> 14.

1. *En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer qu'un rectangle qui a pour aire $170m^2$, a une longueur qui est supérieure à 13 m.*
2. *Ecrire la contraposée de l'implication $x \neq y \Rightarrow x^3 + x \neq y^3 + y$ et la démontrer.*
3. *Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{(6n+2)} + 10^{(3n+1)} + 1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.*