MATHEMATIQUES DU SIGNAL

Dr KOIVOGUI

CH1 : GENERALITES SUR LES SIGNAUX

I-Généralités sur les signaux

- La période commune T est le plus petit commun multiple (PPCM) des périodes individuelles.
- La fréquence fondamentale $f_0 = 1/T$ et est égale au plus grand diviseur commun des fréquences.
- Le rapport entre les périodes doit être un nombre rationnel.

Trouver la période commune du signal
$x(t) = 2\sin(\frac{2}{3}t) + 4\cos(\frac{1}{2}t) + 4\cos(\frac{1}{3}t - \frac{1}{5}\pi)$.

On a $\omega_1 = \frac{2}{3}$. La période est :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 3\pi$$

On a $\omega_2 = \frac{1}{2}$. La période est :

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 4\pi$$

On a $\omega_3 = \frac{1}{3}$. La période est :

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 6\pi$$

Trouver la période commune du signal
$x(t) = 2\sin(\frac{2}{3}t) + 4\cos(\frac{1}{2}t) + 4\cos(\frac{1}{3}t - \frac{1}{5}\pi)$.

On a $\omega_1 = \frac{2}{3}$. La période est :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 3\pi$$

On a $\omega_2 = \frac{1}{2}$. La période est :

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 4\pi$$

On a $\omega_3 = \frac{1}{3}$. La période est :

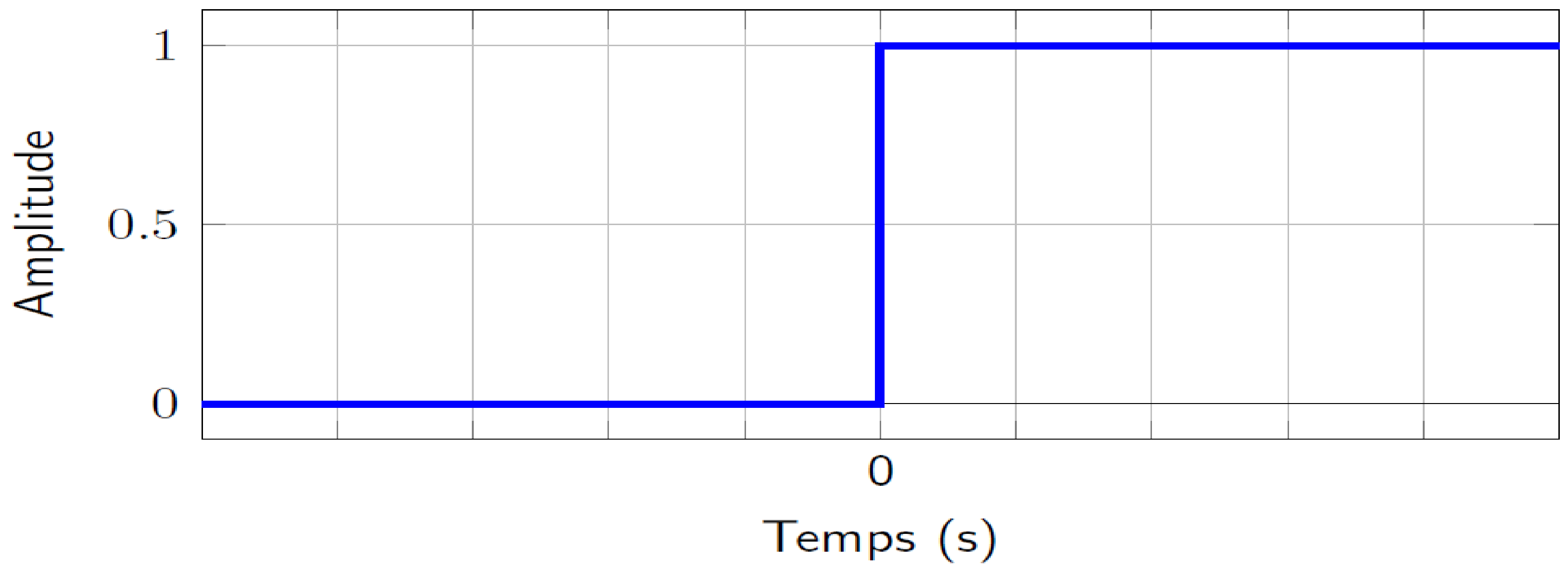
$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 6\pi$$

Le PPCM de 3π, 4π et 6π est 12π.

2- Signaux particuliers

- Fonction échelon
- Fonction signe
- Impulsion
- Fonction rectangulaire
- Fonction triangulaire
- Sinus cardinal (sinc)

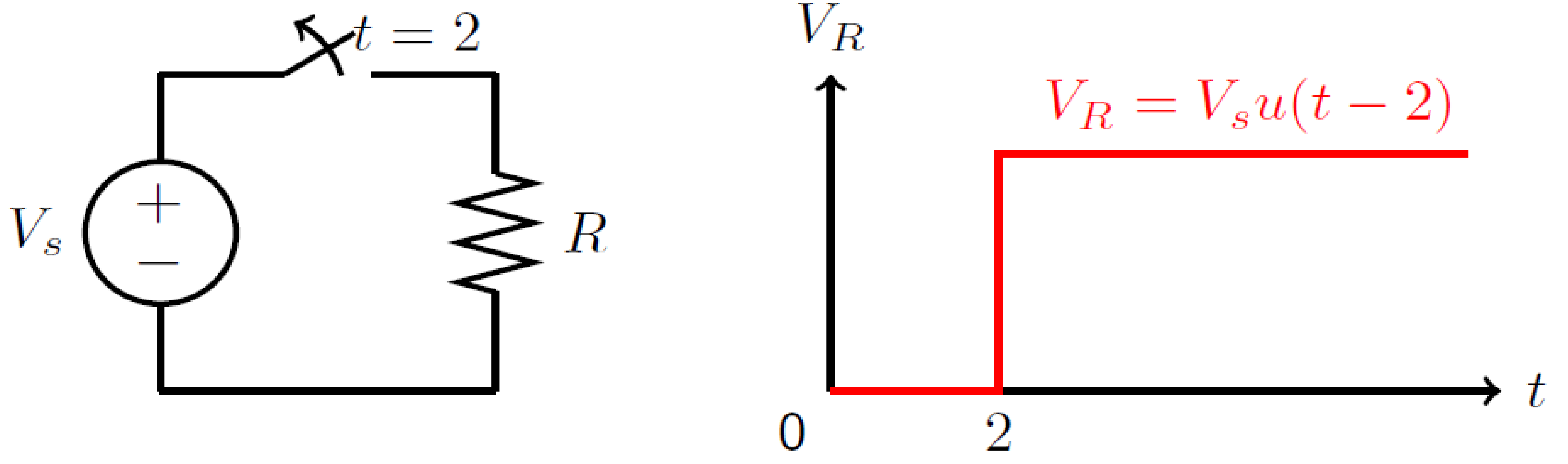
Fonction Echelon



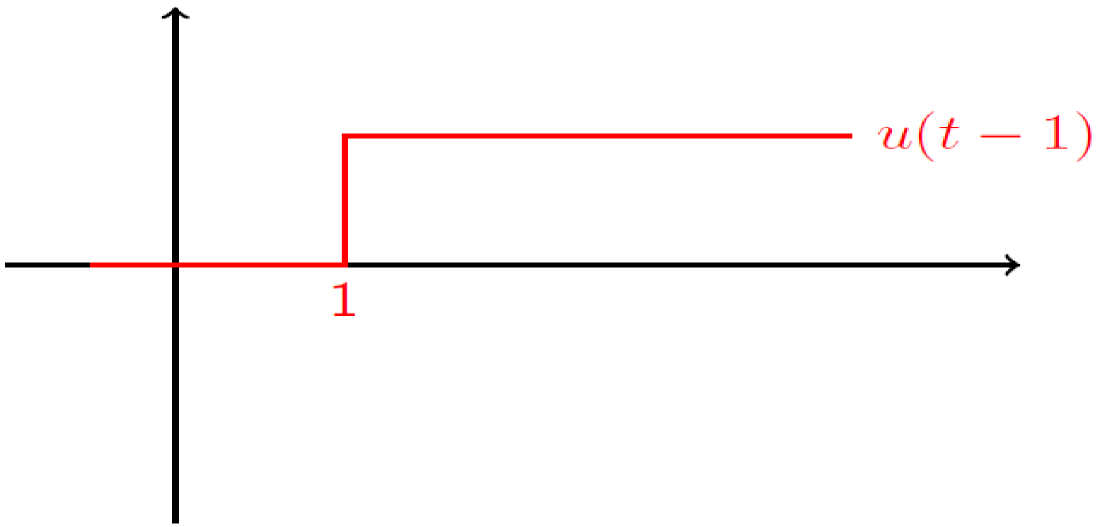
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

À $t = 0$, on utilise $u(0) = 0.5$.

- L'échelon est utile pour modéliser un interrupteur, par exemple lorsqu'on active une source de tension à un moment donné.



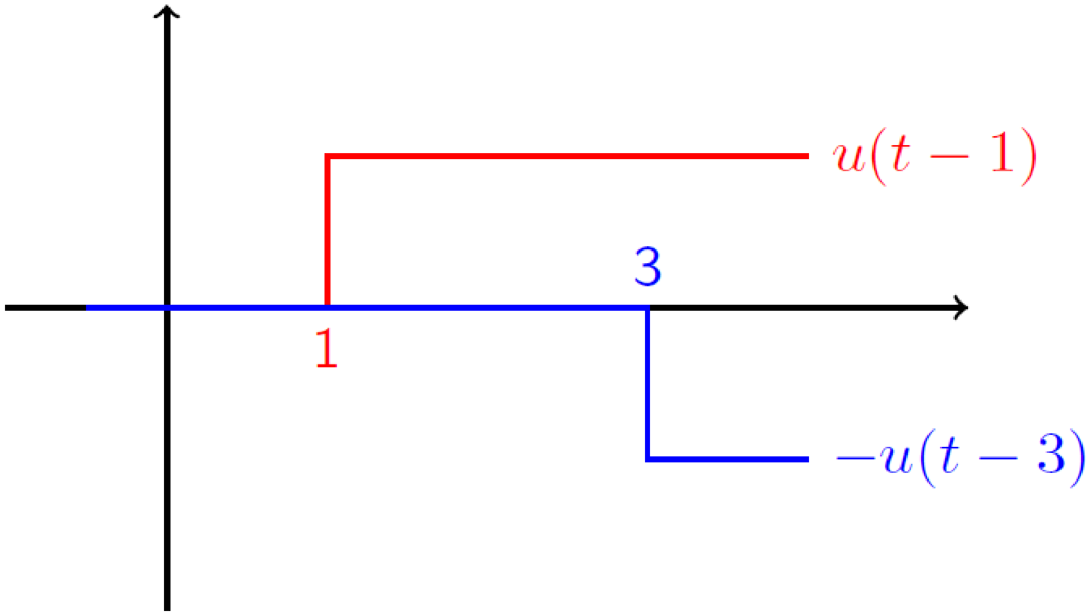
L'échelon peut être utilisé pour créer un pulse :



Le pulse est :

$$x(t) = u(t-1)$$

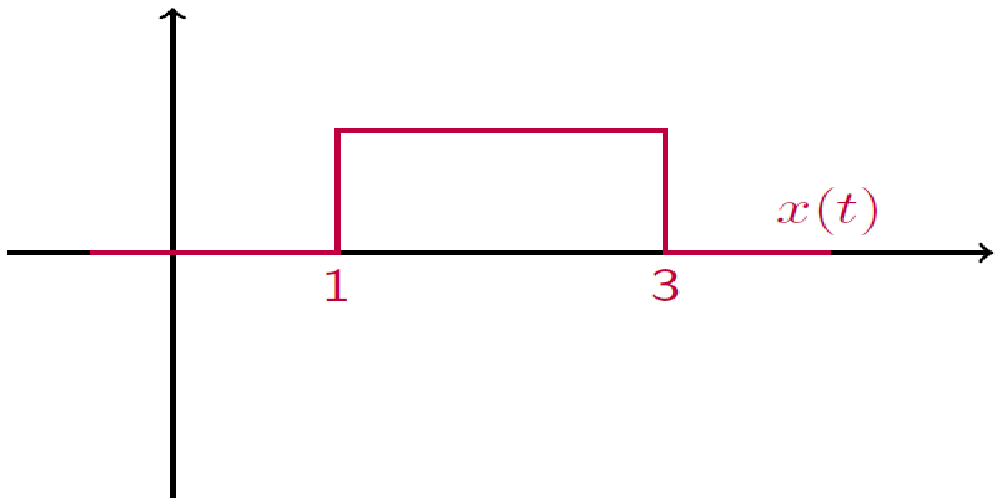
L'échelon peut être utilisé pour créer un pulse :



Le pulse est :

$$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

L'échelon peut être utilisé pour créer un pulse :

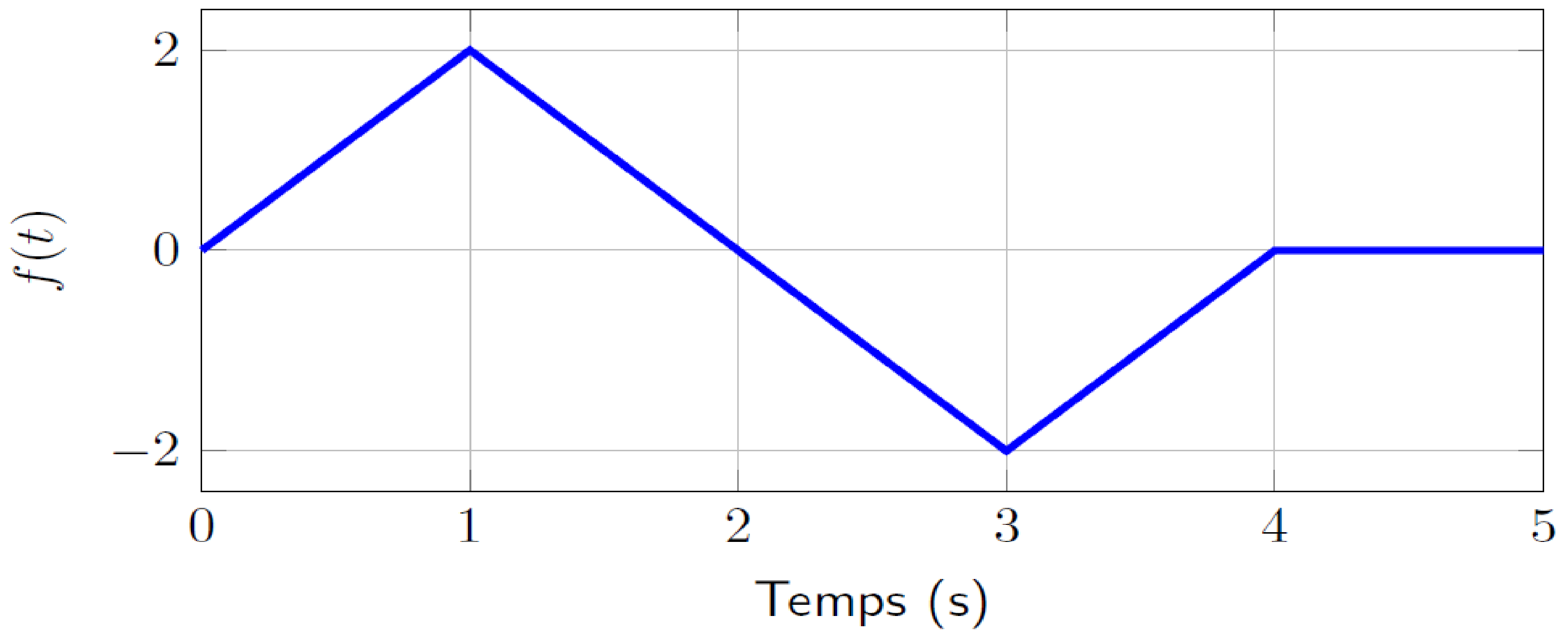


Le pulse est :

$$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

EXERCICE

Écrire la fonction suivante à l'aide d'échelons.



On a trois segments :

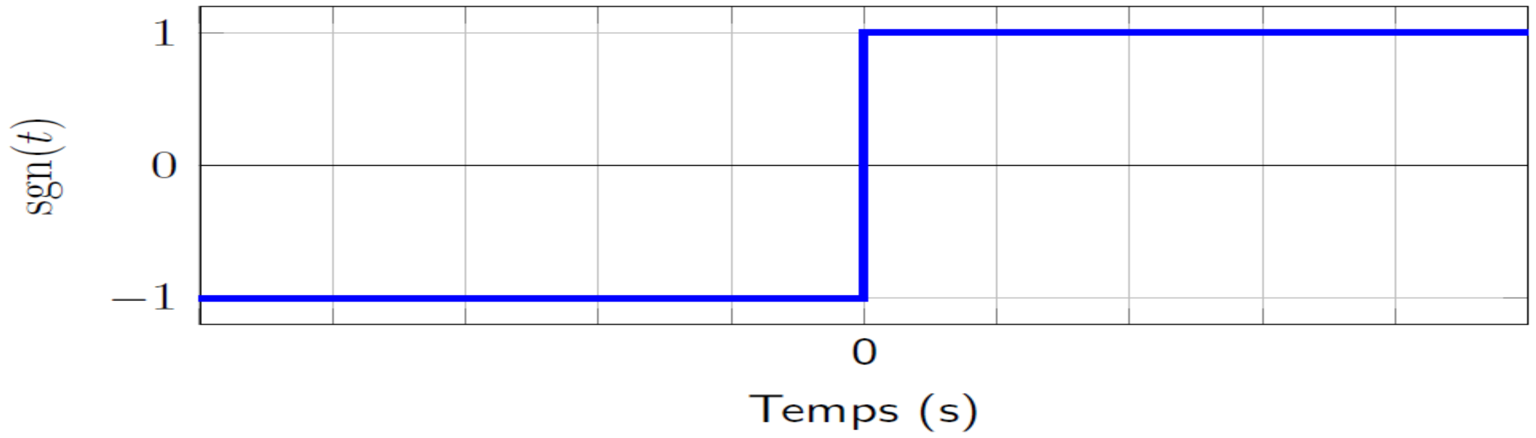
1. À $t = 0$, on allume la fonction $2t$, et on l'éteint à $t = 1$.
2. À $t = 1$, on allume la fonction $-2t + 4$, et on l'éteint à $t = 3$.
3. À $t = 3$, on allume la fonction $2t - 8$, et on l'éteint à $t = 4$.

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(t) = 2t&[u(t) - u(t-1)] \\ &+ (-2t+4)[u(t-1) - u(t-3)] \\ &+ (2t-8)[u(t-3) - u(t-4)] \end{aligned}$$

Fonction signe sign(t)

La fonction signe est semblable à la fonction échelon, mais avec une différence importante.



$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On peut écrire la fonction signe en fonction de l'échelon selon l'équation suivante :

$$\operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

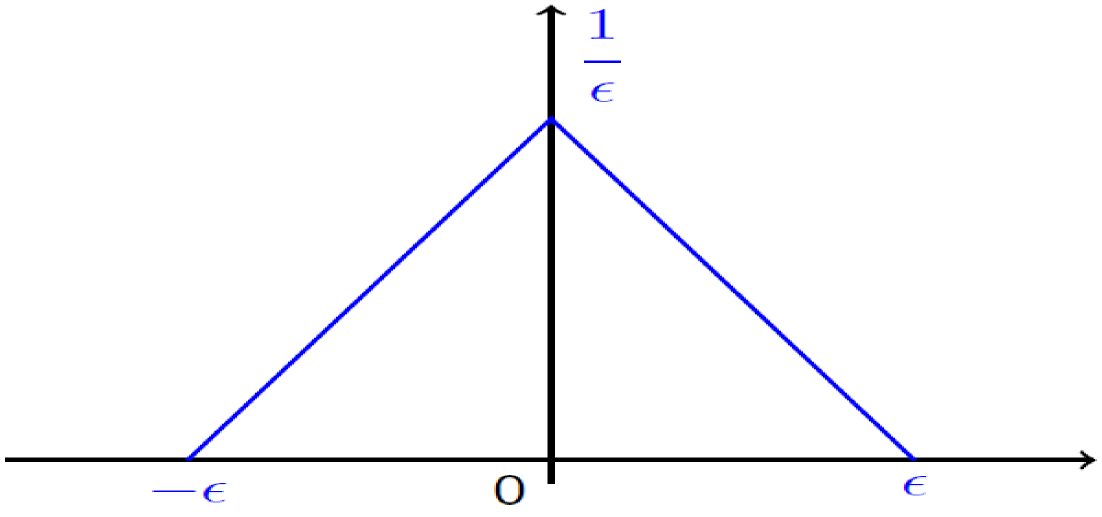
Autrement, la fonction échelon peut être exprimée avec la fonction signe :

$$u(t) = 0.5 + 0.5\,\operatorname{sgn}(t)$$

Fonction Impulsion
$\delta(t)$

1. La fonction impulsion est utilisée pour représenter des pulses ayant une durée très courte.
2. C'est un outil mathématique, très utile pour analyser des systèmes.
3. On va donc développer une définition d'une impulsion.

On approxime l'impulsion par une fonction triangulaire.



Le triangle est symétrique par rapport à l'origine.

On utilise la notation $\delta(t)$ pour représenter l'impulsion. La définition est :

$$\delta(t) \Rightarrow \begin{cases} \int \delta(t)dt = 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

On appelle aussi ceci la fonction de Dirac.

Une propriété importante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(t)\Big|_{t=a} = f(a)$$

si $f(t)$ est continue au point a.

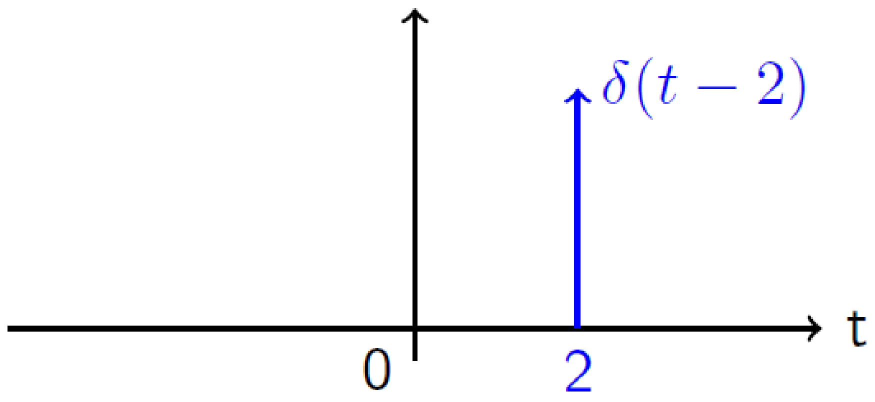
Évaluer la fonction $\int_0^{12}(5t+3)\delta(t-2)\,dt$.

On applique la définition :

$$\int_0^{12}(5t+3)\delta(t-2)\,dt = 5t+3\Big|_{t=2} = 5(2)+3 = 13$$

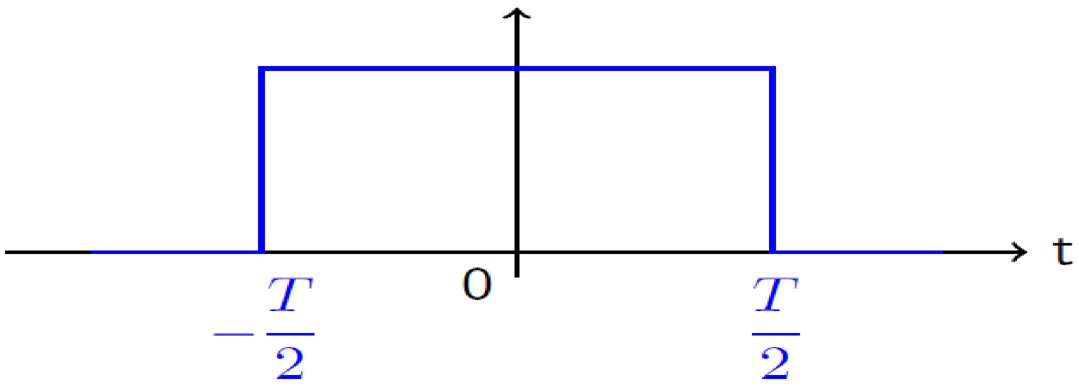
On représente graphiquement une impulsion par une flèche verticale.

Exemple :



Fonction rectangulaire

Permet de décrire un pulse rectangulaire.

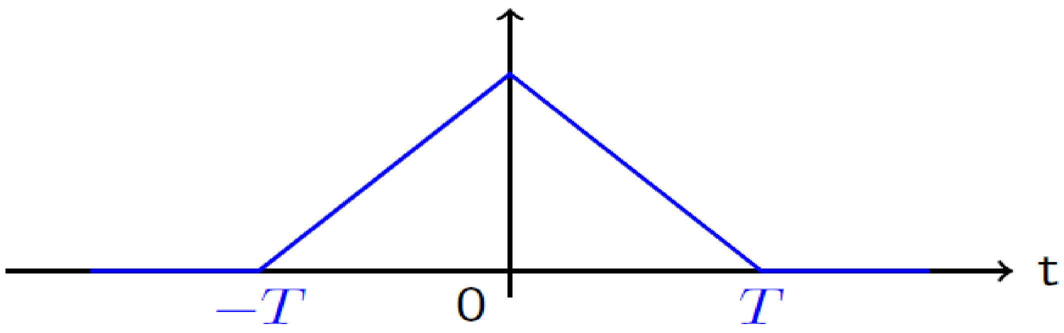


$$\mathrm{rect}(t/T) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} = u(t + T/2) - u(t - T/2)$$

T est la largeur totale du pulse.

Fonction Triangulaire tri(t)

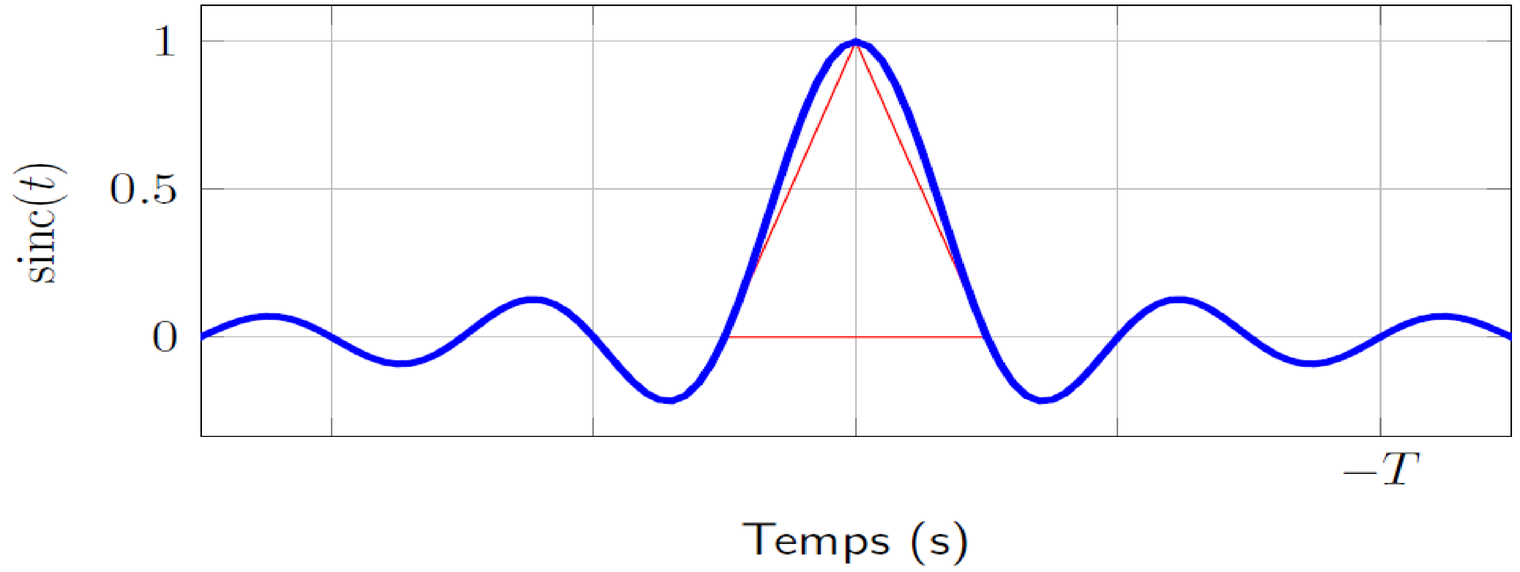
Permet de décrire un pulse triangulaire.



$$\mathrm{tri}(t/T) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

La largeur est $2T$.

Sinus cardinal sinc(t)

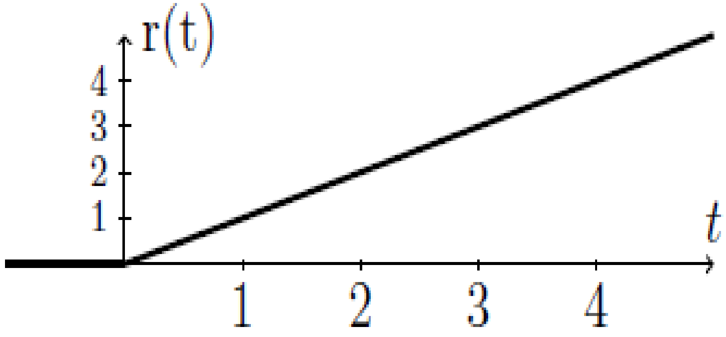


$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{ou} \quad \mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Rampe causale

Notée par r(t) et est définie par :

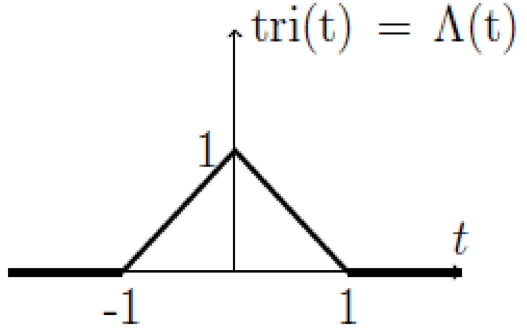
$$r(t) = \begin{cases} t & \text{Si} \quad t \geq 0, \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases} \qquad \text{Ou} \quad r(t) = t\,u(t)$$



Impulsion triangulaire unitaire

Notée par $\mathrm{tri}(t) = \Lambda(t)$ et est définie par :

$$\mathrm{tri}(t) = \Lambda(t) \begin{cases} 1 - |t| & \text{Si} \quad |t| \leq 1, \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$



C'est une impulsion de centre 0 d'amplitude 1 et de durée 2.
$\mathrm{tri}(t) = \Lambda(t)$ peut s'écrire sous une deuxième forme telle que :

$$\mathrm{tri}(t) = (t+1)\,u(t+1) - 2\,t\,u(t) + (t-1)\,u(t-1)$$

Signal exponentiel unitaire décroissant

C'est un signal de forme exponentielle qui a pour :

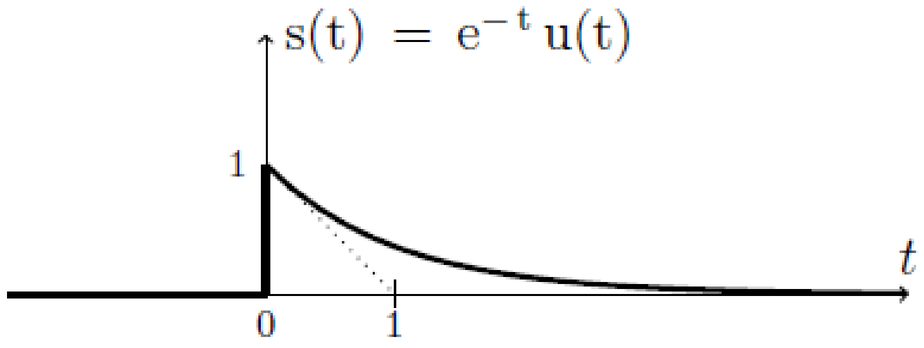
— Valeur nulle quand $t < 0$,

— Valeur nulle quand $t \to \infty$,

— une droite assymptotique oblique de pente égale à 1 à $t = 1$,

— et définit par :

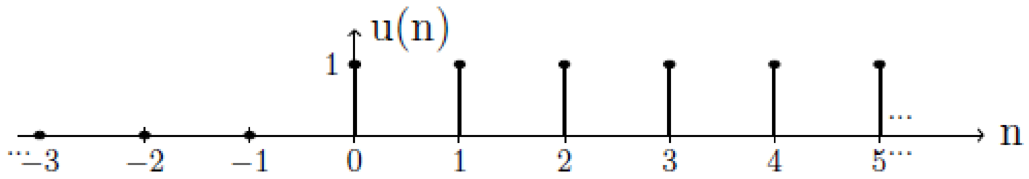
$$s(t) = e^{-t}\,u(t)$$



Echelon unitaire discret

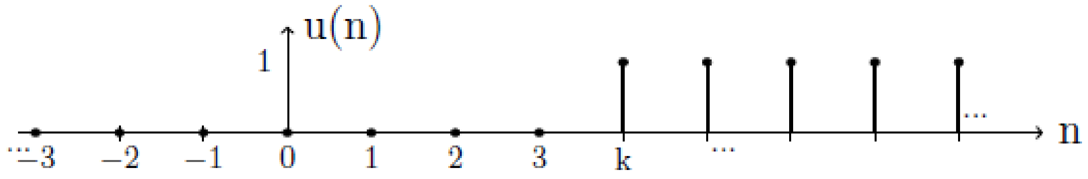
Noté par la séquence unitaire u(n), il se définit par :

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \in \mathcal{N}, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Similairement l'échelon unitaire discret décalé est défini par :

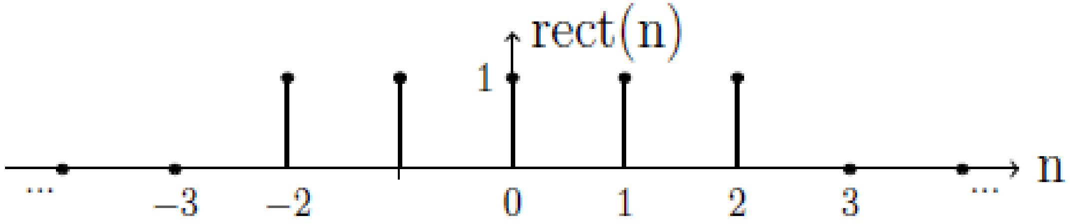
$$u(n - k) = \begin{cases} 1 & n \geq k \quad (n, k) \in \mathcal{N}, \\ 0 & n < k \end{cases}$$



Impulsion Rectangulaire unitaire discret

Notée par rect(n),

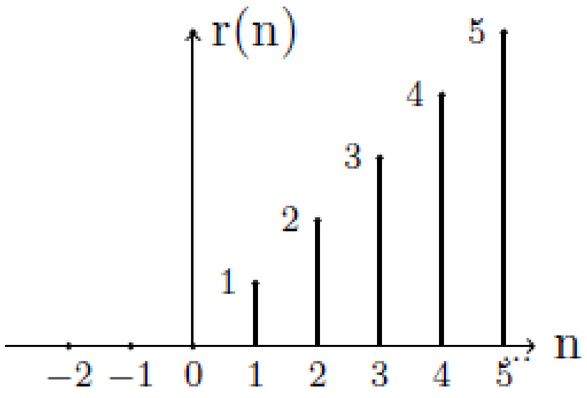
$$\mathrm{rect}(\mathrm{n}) = \begin{cases} 1 & |\mathrm{n}| < 2, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Rampe unité causale discrete

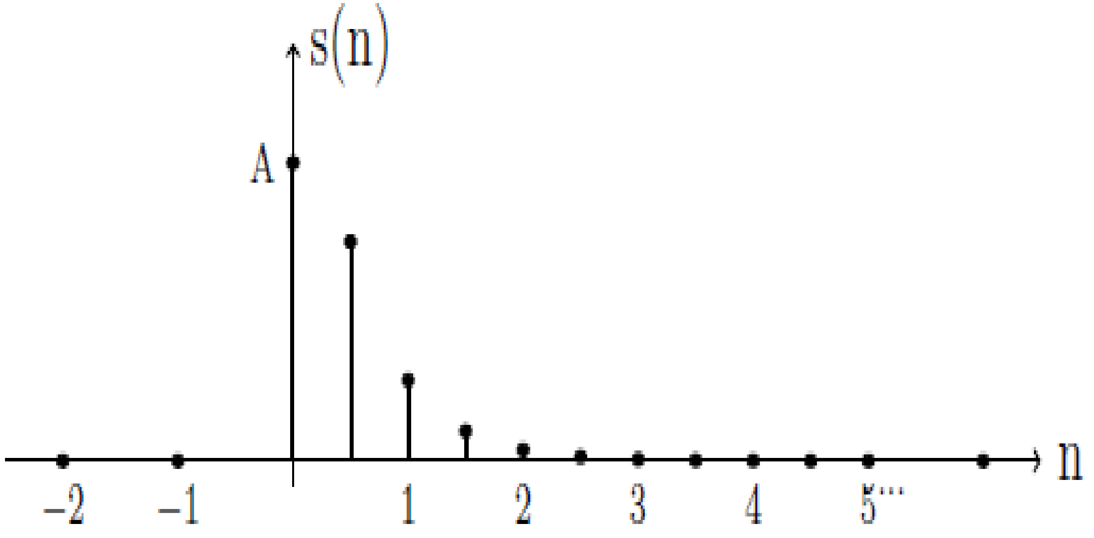
Notée par r(n),

$$r(n) = \begin{cases} n & n \in N; \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$



Signal exponentiel quelconque discret

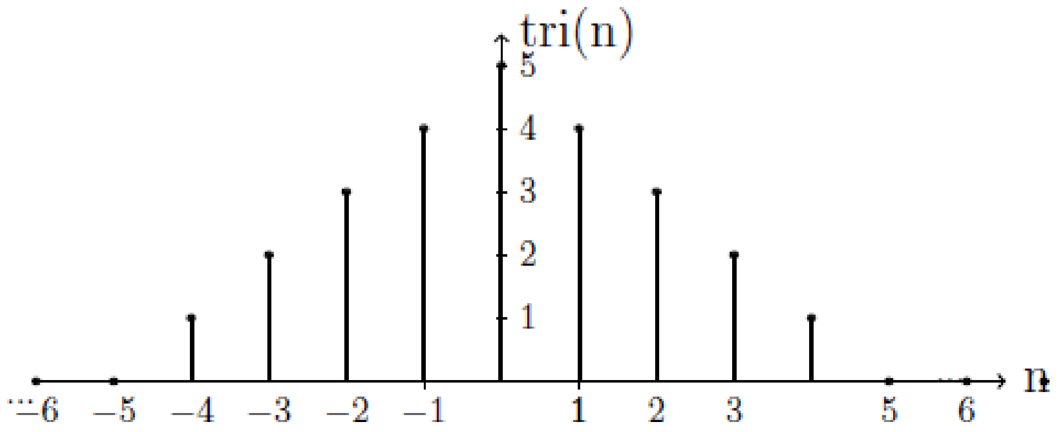
$s(n) = A e^{-an} u(n)$ A, a des constantes positives



Impulsion triangulaire discrete

Notée par tri(n),

$$\mathrm{tri}(n) = \begin{cases} 5 - |n| & n \leq 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



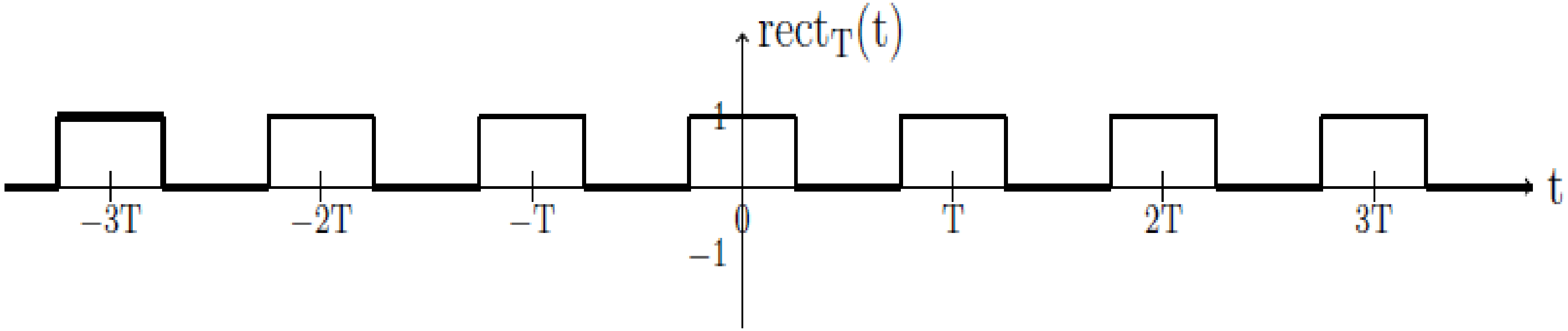
Signaux périodique

Un signal $s_T(t)$ est dit périodique s'il satisfait :

$$s(t+T) = s(t-T) = s(t) \qquad \text{ou} \quad s(t+nT) = s(t-nT) = s(t)$$

Avec T la période du signal.

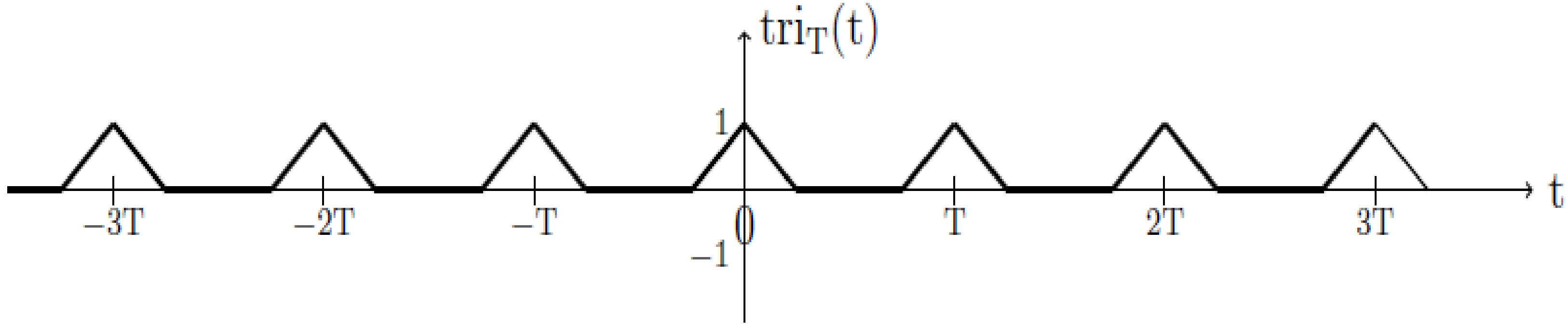
Train d'impulsion rectangulaire unitaire



Pour un signal périodique de période T on a :

$$S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - nT) \Rightarrow \mathrm{rect}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect(t - nT)$$

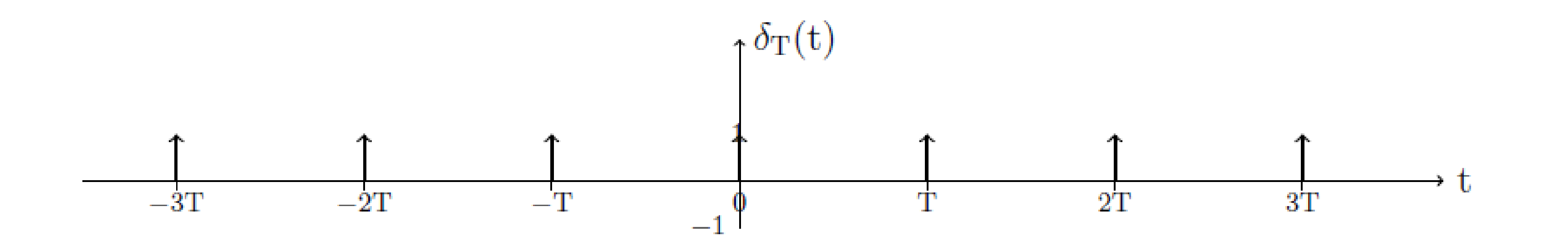
Train d'impulsion triangulaire unitaire



Pour un signal périodique de période T on a :

$$S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - nT) \Rightarrow \mathrm{tri}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} tri(t - nT)$$

Peigne de Dirac



III-Caractéristiques des signaux

Quelques méthodes communes pour caractériser des signaux :

- Valeur moyenne
- Valeur rms
- Énergie
- Puissance

Valeur moyenne

La valeur moyenne d'un signal $x(t)$ périodique est obtenue selon :

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

On appelle parfois la valeur moyenne la *valeur DC*.

Valeur RMS

La valeur efficace (ou RMS en anglais, *Root Mean Square*) est une mesure de l'amplitude d'un signal variable. La définition est :

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt}$$

C'est la racine carrée de la valeur moyenne du signal au carré.

Calculer la valeur efficace du signal $x(t) = A\cos(\omega t)$.

On applique la définition :

$$\begin{aligned} x_{rms}^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T A^2\cos^2(\omega t)dt \\ &= \frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\omega t)\right)dt = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

La valeur efficace est :

$$x_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Pour calculer la puissance, on suppose que le signal $x(t)$ est une tension appliquée à une résistance :

$$p(t) = \frac{x(t)^2}{R}$$

puis l'énergie totale du signal est :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)dt$$

On normalise en utilisant $R = 1$:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

La puissance d'un signal est l'énergie normalisée sur une période :

$$P = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2$$

Pour un signal non périodique :

$$P = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

Un signal où

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

est un *signal d'énergie*.

Un signal où

$$P = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$

est un *signal de puissance*.

IV- Classiffication des Signaux

On peut classifier les signaux selon certaines propriétés.

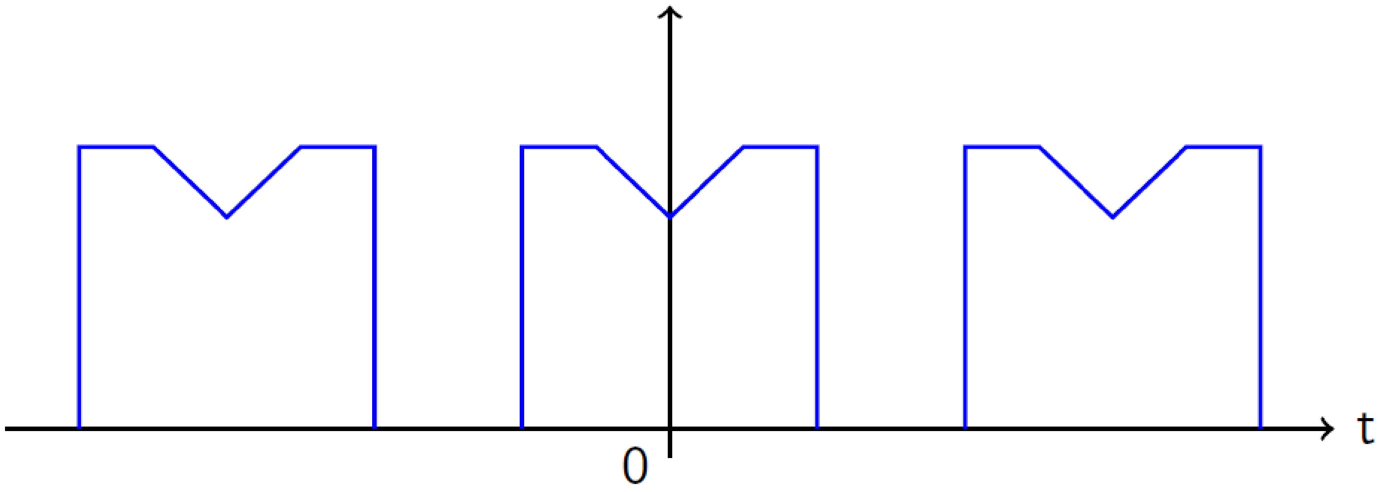
- Symétrie
  - Paire
  - Impaire
  - Demi-onde et quart d'onde
- Causal
- Déterministe

Symétrie paires

Une fonction est *paire* si :

$$f(t) = f(-t)$$

c'est-à-dire qu'on peut faire une copie miroir autour de l'axe y.

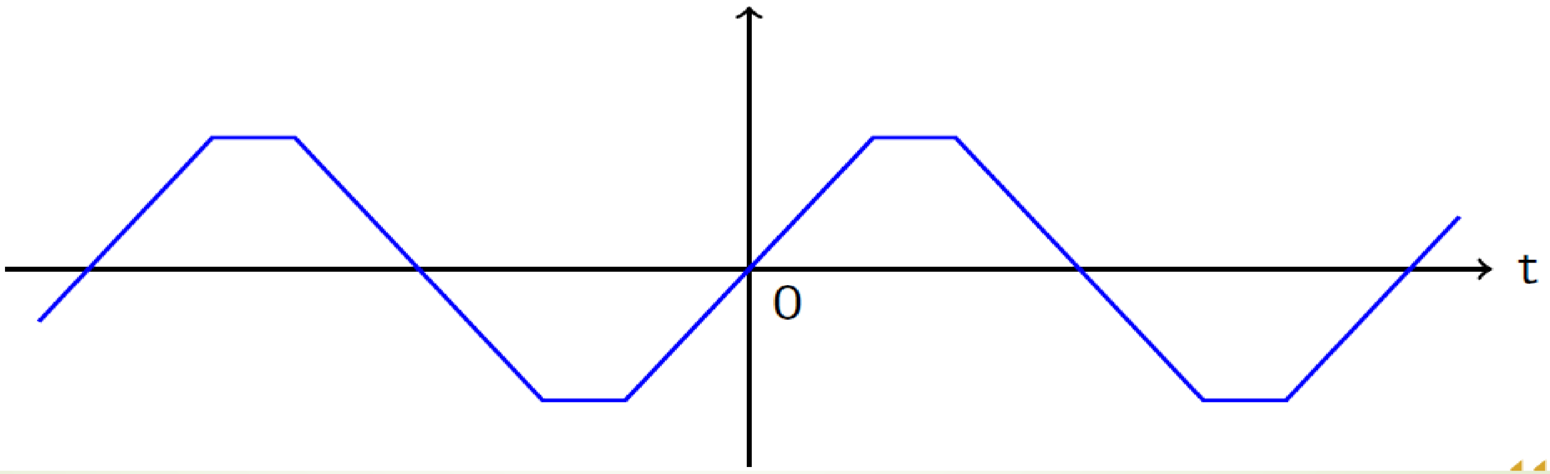


Symétrie impaire

Une fonction est *impaire* si :

$$f(t) = -f(-t)$$

c'est-à-dire qu'on peut faire une rotation de 180° autour de l'origine et retrouver le signal original.

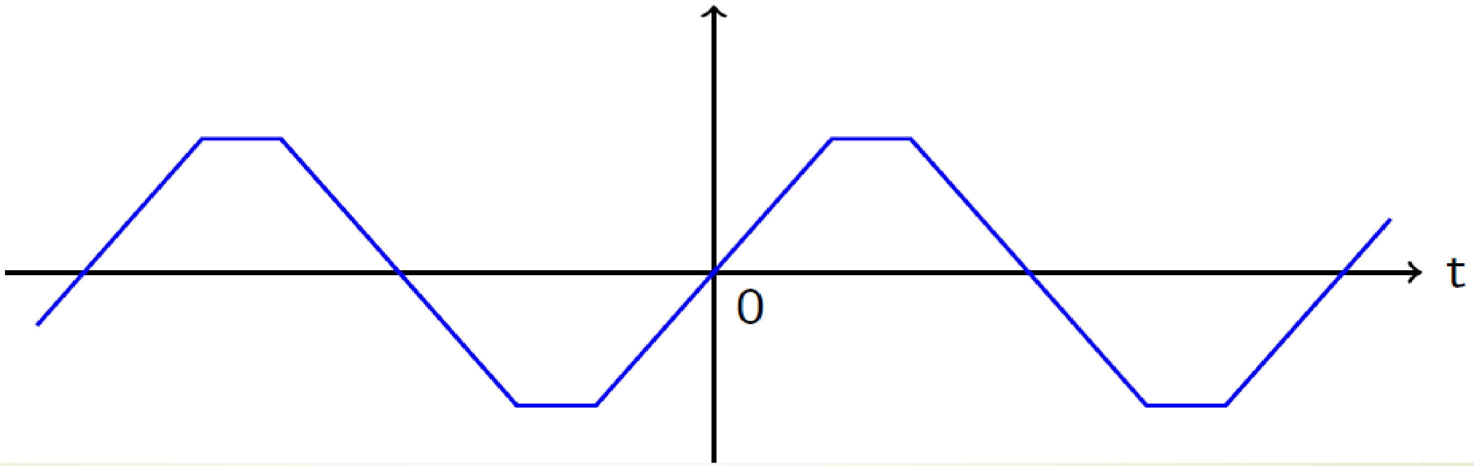


Symétrie demi-onde

Une fonction possède de la symétrie *demi onde* si :

$$f(t) = -f(t - T/2)$$

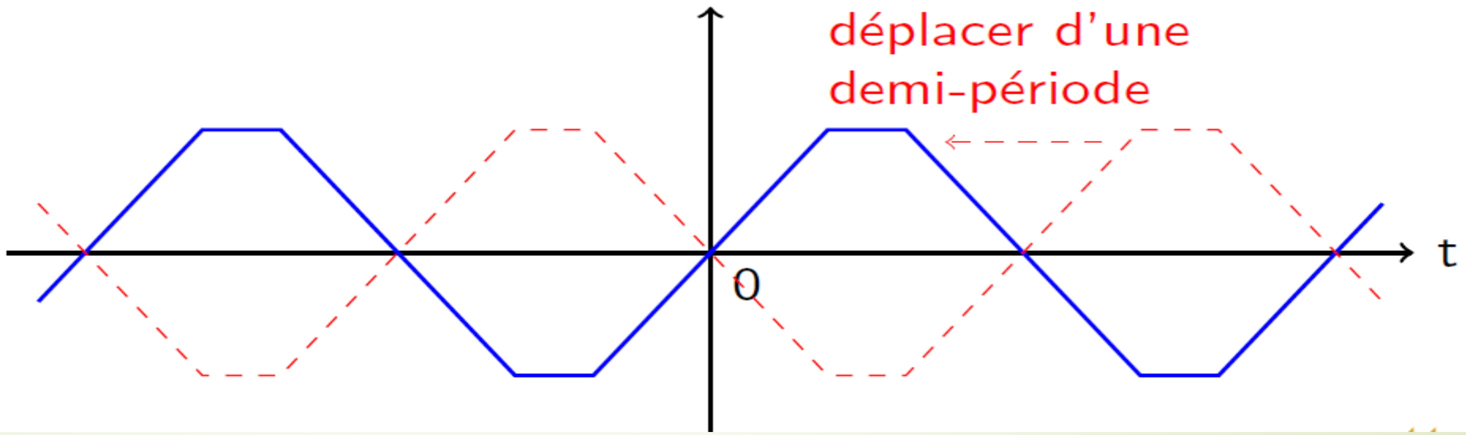
c'est-à-dire qu'on peut déplacer d'une demi période, puis faire une image miroir autour de l'axe x et retrouver le signal original.



Une fonction possède de la symétrie *demi onde* si :

$$f(t) = -f(t - T/2)$$

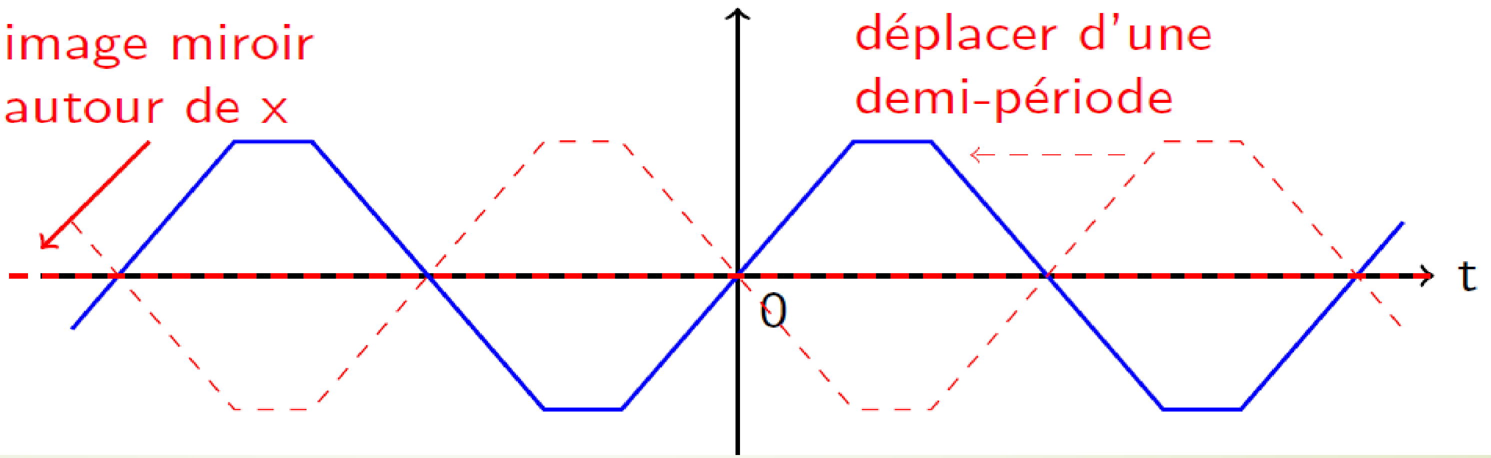
c'est-à-dire qu'on peut déplacer d'une demi période, puis faire une image miroir autour de l'axe x et retrouver le signal original.



Une fonction possède de la symétrie *demi onde* si :

$$f(t) = -f(t - T/2)$$

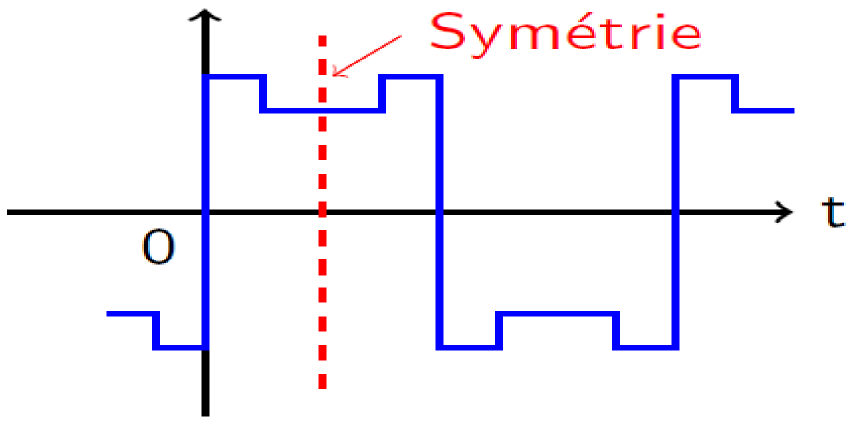
c'est-à-dire qu'on peut déplacer d'une demi période, puis faire une image miroir autour de l'axe x et retrouver le signal original.



Symetrie quart d'onde

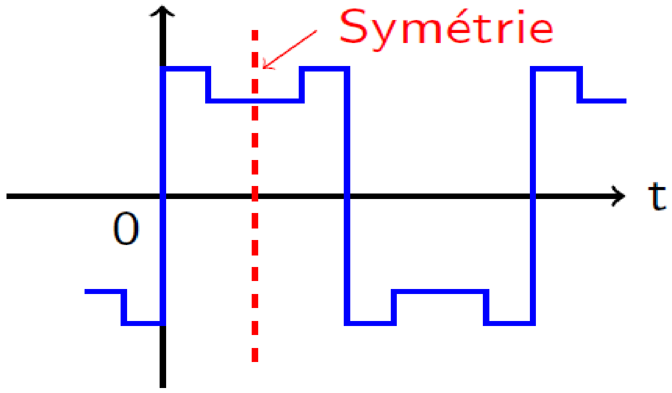
- Possède de la symétrie demi-onde.
- La demi période est aussi symétrique.

- Possède de la symétrie demi-onde.
- La demi période est aussi symétrique.

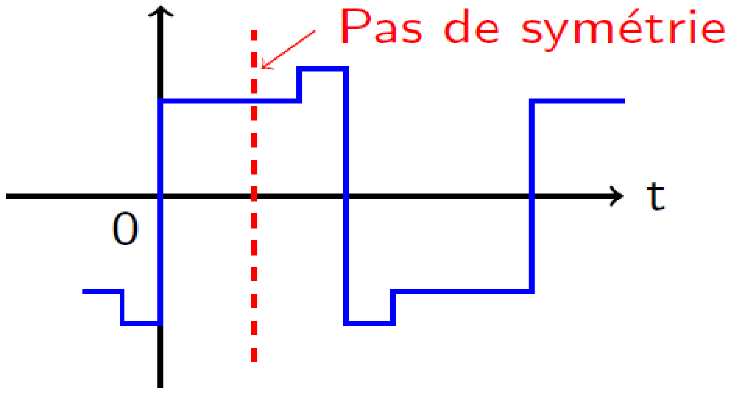


Symétrie quart d'onde

- Possède de la symétrie demi-onde.
- La demi période est aussi symétrique.



Symétrie quart d'onde



Pas de symétrie quart d'onde

Décomposition Symétrique

Tout signal peut être décomposé en une somme d'un signal pair et impair :

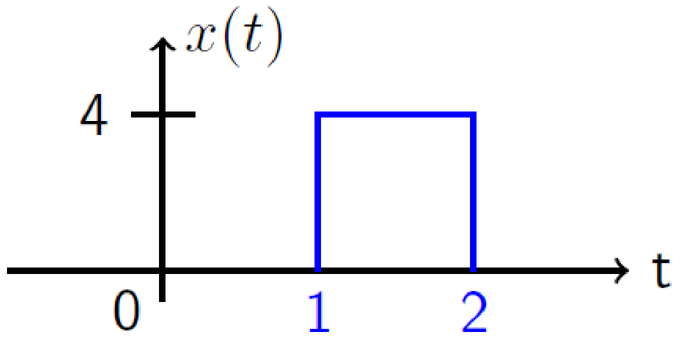
$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

Les composantes sont calculées selon :

$$x_e(t) = 0.5(x(t) + x(-t))$$
$$x_o(t) = 0.5(x(t) - x(-t))$$

EXEMPLE 1

Décomposer le signal suivant en ses composantes paires et impaires.



V- AUTRES CLASSIFICATIONS

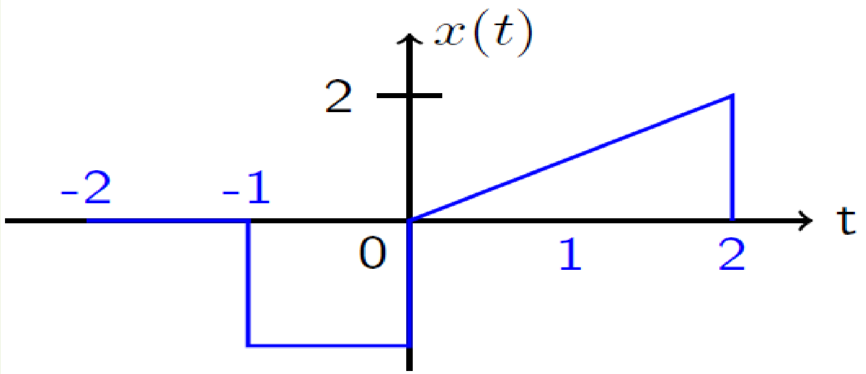
1. Un signal est dit **causal** s'il est non nul pour $t > 0$ seulement. Un signal est **anti-causal** s'il est non nul pour $t < 0$ seulement.
2. Un signal est dit **déterministe** si on peut le décrire à l'aide d'une équation mathématique. Un signal est **aléatoire** ou **stochastique** s'il existe une incertitude sur sa valeur en fonction du temps.

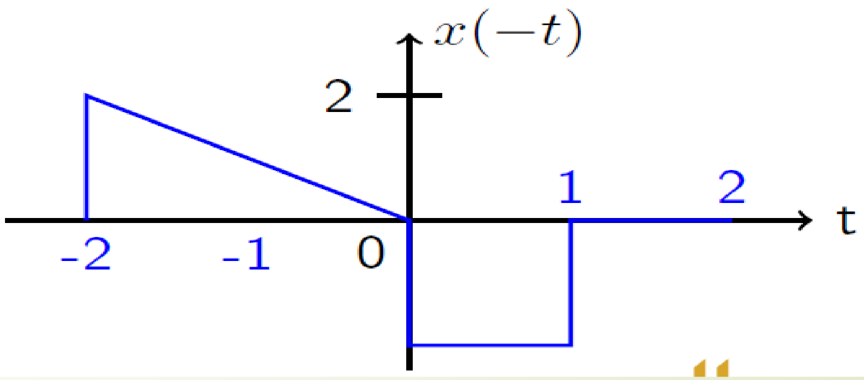
Inversion temporelle

- Faire une image miroir d'un signal autour de l'axe y.

Le nouveau signal $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = x(\tau)\Big|_{\tau=-t} = x(-t)$$



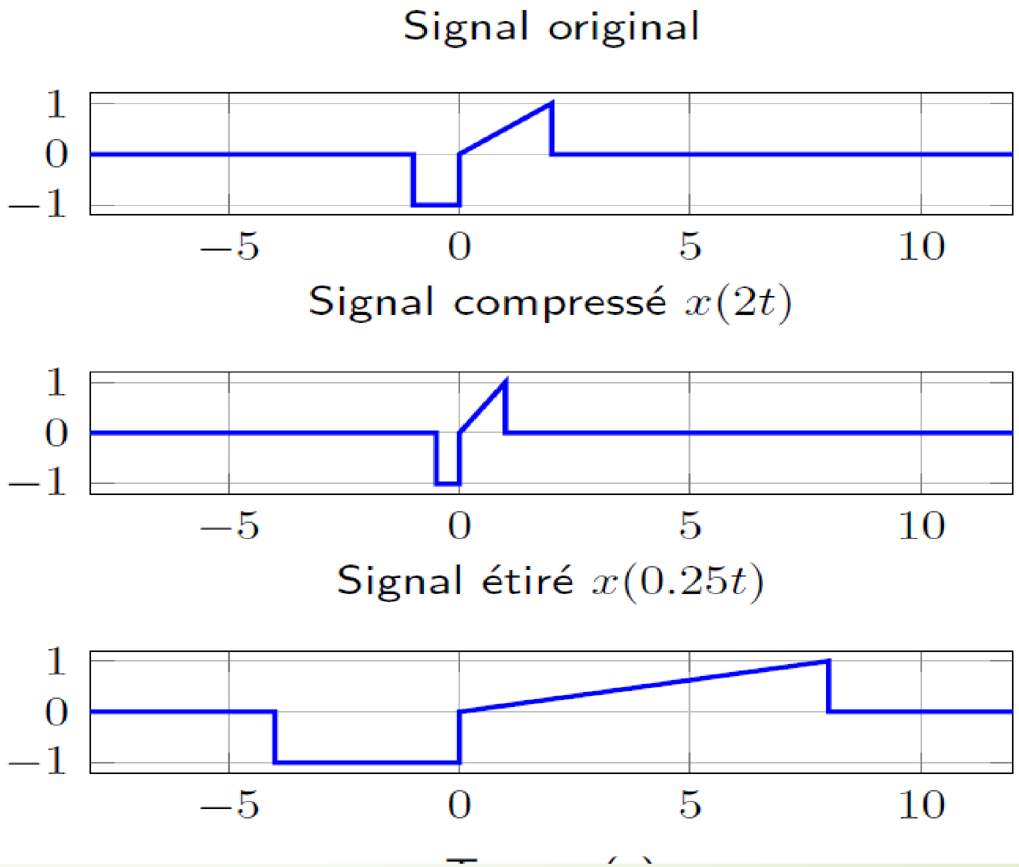


Echelonnage temporel

Étirer ou comprimer un signal

$$x_1(t) = x(\tau)\Big|_{\tau=at} = x(at)$$

$a > 1$: compression
$a < 1$: étirement

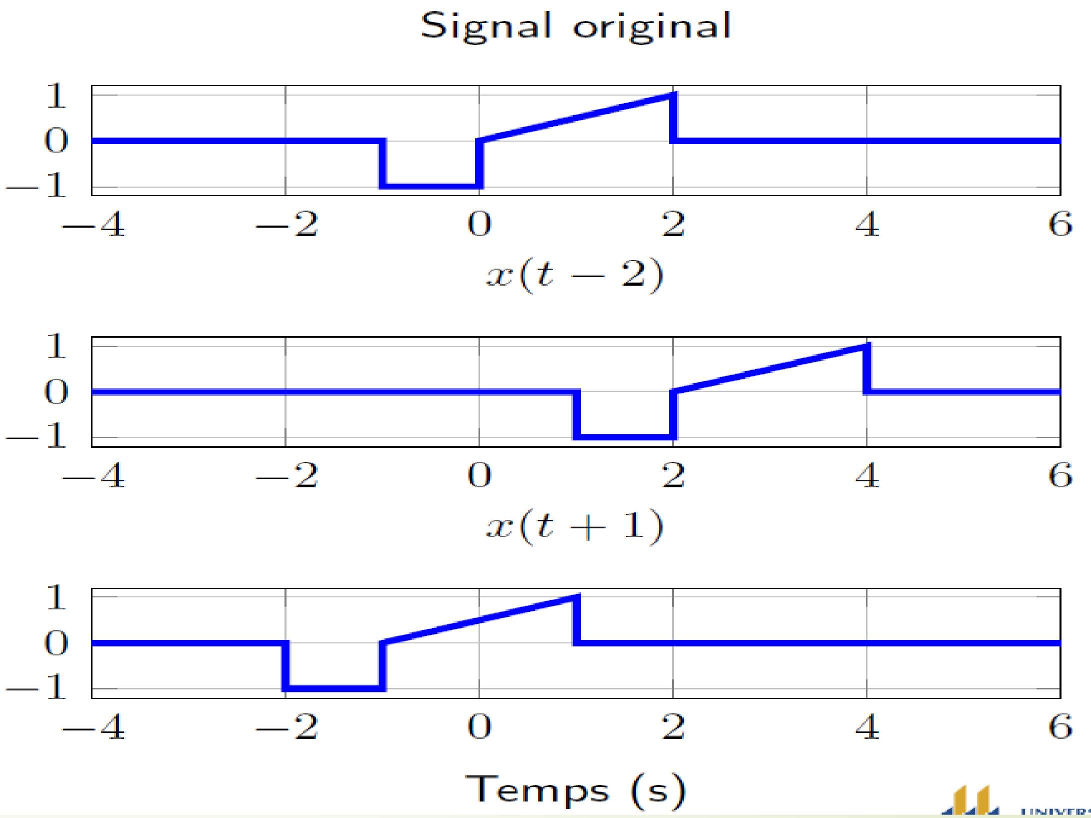


Avancer ou retarder un signal

$$x_1(t) = x(\tau)\Big|_{\tau = t - t_0} = x(t - t_0)$$

$t_0 > 0$: retarder

$t_0 < 0$: avancer



METHODE GENERALE

Pour un signal :

$$y(t) = x(at - b)$$

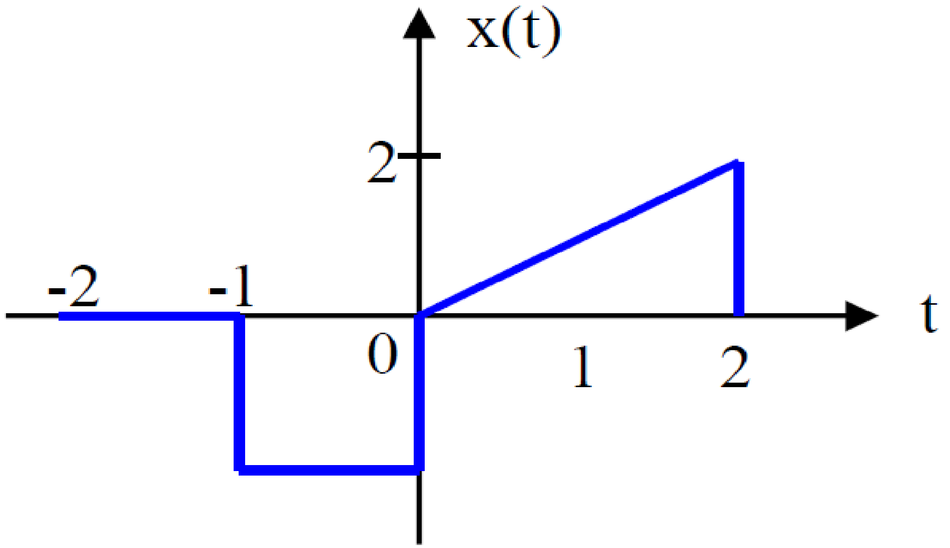
On résout pour isoler t :

$$\tau = at - b \Rightarrow t = \frac{\tau + b}{a}$$

L'axe τ est l'axe du signal $x(t)$, et l'axe t devient le nouvel axe pour $y(t)$.

exemple

Soit le signal $x(t)$ suivant. Tracer le graphe de $y(t) = x(t/3 - 2)$.



VI- Convolution

Pour calculer la sortie d'un système, étant donné l'entrée et la réponse impulsionnelle, on utilise une opération appelée *convolution*.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda$$

La notation est :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

C'est l'opération de base de traitement de signaux.