UPB ANNÉE ACADÉMIQUE 2020-2021

Analyse 2 *Licence 1 SEA MIAGE*

T D :

Exercice 1. *Calculer les intégrales suivantes*

1. $I_1 = \displaystyle\int x\sqrt{x-1}dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int x^2 e^{3x} dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int \sin x e^x dx$

Exercice 2.

1. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^x)dx$
2. *Déterminer une primitive de* f *sur* $[3; +\infty[$, *avec* $f(x) = \dfrac{x}{x^3-3x+2}$.
3. *Déterminer une primitive de* g *sur* $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, *avec* $g(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x + 2\tan^2 x}$.
4. *Soit la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
   (a) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2.$
   (b) *Déterminer la limite de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *de terme général*
   $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{(n^2+k^2)^3}}$$
5. *On considère l'intégrale* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\cos^4 x + \sin^4 x}}dx.$
   (a) *Montrer que* $J = -J$.
   (b) *En déduire la valeur de* J.

Exercice 3.

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{2+\sqrt{4x-x^2}}.$

1) *Montrer par un changement de variables que :* $I = \displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{0} \frac{du}{1+\sqrt{1-u^2}}.$

2) *Effectuer le changement de variable* $u = \cos t$ *dans l'intégrale* $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{0} \frac{du}{1+\sqrt{1-u^2}}.$

3) **(a)** *Exprimer* $\sin\theta$ *en fonction de* $\tan\dfrac{\theta}{2}$ *pour* $\theta \in]-\pi;\pi[$.

(b) *En déduire que* $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t}{(1+t)^2(1+t^2)}dt.$

4) *En déduire enfin la valeur de I.*

Exercice 4. *Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions*

$$f(x) = \frac{C+x}{1+x^2}$$

seraient les solutions.

Exercice 5. *Résoudre sur des intervalles appropriés les équations différentielles suivantes :*

a) $\frac{yy'}{1+y^2} = \frac{1}{x}$

b) $xy' - y = 2x^2, \qquad y(1) = 5,$

c) $(1+e^x)y' + e^x y = (1+e^x)$

d) $(2+\cos x)y' + \sin(x)y = (2+\cos x)\sin x$

Exercice 6. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes :*

a) $y'' - 3y' + 2y = x$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$

c) $y'' + 2y' + y = (x+1)e^{-x}$

d) $y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)e^x$

Exercice 7.

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de*

$$f(x) = \frac{e^{\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{x^2}{\sin x}\right)} - e}{\ln(1+x)};$$

2. *En déduire le développement limité a l'ordre 2, au voisinage de* $+\infty$ *de*

$$h(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x;$$

3. *Déterminer le développement limité a l'ordre 3, au voisinage de* $\frac{\pi}{4}$ *de*

$$i(x) = (\tan x)^{\tan(2x)};$$

Exercice 8.
A l'aide du développement limité, déterminer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2}{\tan^2 x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}, \quad a > 0.$

Exercice 9.

On considère les fonctions g, h et f définies respectivement par

$$g(x) = \frac{2}{2-x^2}, \quad h(x) = \exp(1-\cos(x)) \quad et \quad f(x) = \frac{g(x)-h(x)}{x^4}.$$

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de g ;*
2. *Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0 de h ;*
3. *En déduire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de f ;*
4. *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ;*
5. *Soit k le prolongement par continuité de f en 0. Montrer que k est dérivable en 0 et préciser $k'(0)$;*
6. *Déterminer une équation de la tangente à la courbe (Ck) de k au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe de k par rapport à la tangente au voisinage de 0 ;*
7. *Déterminer le développement limité a l'ordre 2, au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ de h*

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On note :

$$\begin{array}{lllcl} g : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & (t,u) & \mapsto & f(2t-u, 4t+3u), \\ h : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & (t,u) & \mapsto & f(t^2+2u^2, e^{tu}), \\ k : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & t & \mapsto & f(t^2, t^3). \end{array}$$

Calculer les derivees partielles premieres de g, h et la dérivée première de k en fonction de celles de f.

Exercice 11.

Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en (0,0) pour les fonctions f de deux variables réelles définies par les formules suivantes :

$$a)\ \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad b)\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad c)\ \frac{\sin x sh y}{xy} \qquad d)\ \frac{\sin x - sh y}{sh x - \sin y}.$$

Exercice 12.

On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. *Calculer les dérivées partielles premières de f.*
2. *Déterminer les éventuels points critiques de f.*
3. *Calculer les dérivées partielles secondes de f.*
4. *Déterminer la nature de chaque point critique.*
5. *Montrer que f admet un minimum absolu égal à -8, et préciser les points critiques aux quels il est atteint.*